# Ćwiczenie I - Predykaty Geometryczne

**Jakub Frączek - grupa nr 4**

## 1. Wstęp

### Opis ćwiczenia

Ćwiczenie polegało na wygenerowaniu 4 różnych zbiorów punktów, a następnie sklasyfikowaniu ich ze względu na to po której stronie prostej się znajdują.

### Dane techniczne - software

Ćwiczenie zostało zrealizowane w języku Python przy użyciu środowiska Jupyter notebook. Wykorzystane biblioteki to: numpy, random, pandas, matplotlib, bitalg.

### Dane techniczne - hardware

Laptop z systemem operacyjnym Linux Mint, procesorem AMD Ryzen 5 5500U 2.1 GHZ oraz 8 GB pamięci RAM.

## 2. Generacja punktów

### Wygenerowane zbiory

1. $10^5$ losowych punktów o współrzędnych z przedziału [-1000, 1000]
2. $10^5$ losowych punktów o współrzędnych z przedziału [$-10^{14}$, $10^{14}$]
3. 1000 losowych punktów leżących na okręgu o środku (0,0) i promieniu R=100
4. 1000 losowych punktów o współrzędnych z przedziału [-1000, 1000] leżących na prostej wyznaczonej przez wektor (a, b), gdzie a = [-1.0, 0.0], b = [1.0, 0.1].

### Sposób generowania

Punkty zostały wygenerowane za pomocą funkcji random.uniform() z biblioteki random. W przypadku punktów leżących na okręgu skorzystałem z równań okręgu zadanego parametrycznie:

$$x = a\,cos(t)$$
$$y = a\,sin(t)$$
$$dla\ t \in [0,\ 2\pi)$$

W przypadku punktów leżących na prostej skorzystałem ze wzoru na prostą w postaci kierunkowej

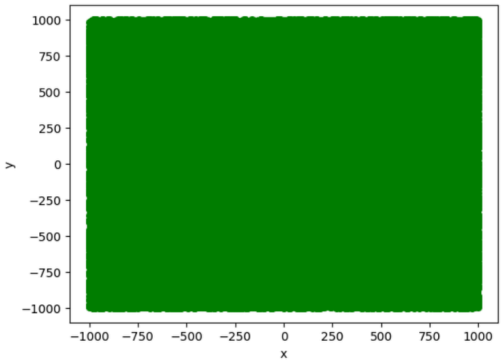
$$y = \frac{y_A - y_B}{x_A - X_B}x + (y_A - \frac{y_A - y_B}{x_A - X_B}x_A)$$

### Wizualizacja wygenerowanych zbiorów

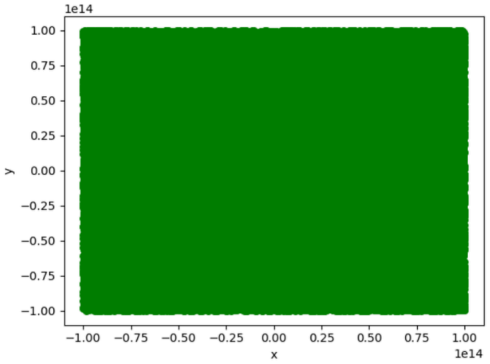
Wizualizacja została zrealizowana przy pomocy biblioteki bitalg napisanej przez koło naukowe BIT.

### Wykresy

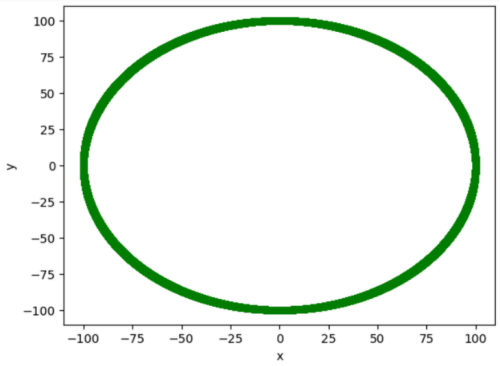
Poniższe wykresy (Wykres 1, Wykres 2, Wykres 3, Wykres 4) obrazują wygenerowane punkty:



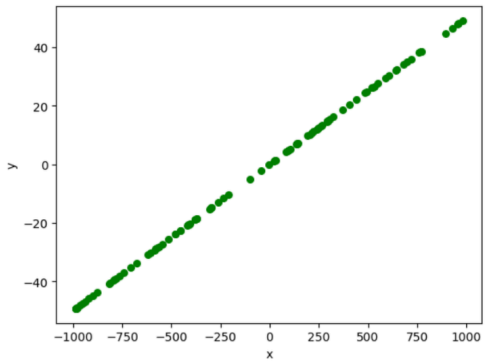

Wykres 1. Zbiór 1




Wykres 2. Zbiór 2.




Wykres 3. Zbiór 3.




Wykres 4. Zbiór 4.

## 3. Określenie po której stronie znajduje się punkt

### Sposób określania

Położenie punktu względem prostej można łatwo określić obliczając iloczyn wektorowy $\vec{ab} \times \vec{ac}$. Przez punkty a i b przechodzi prosta, a punkt c jest tym którego położenie chcemy określić. Ta metoda jest równoważna z wyliczeniem wyznacznika:

macierzy 2 x 2:

$$\begin{vmatrix} a_x - c_x & a_y - c_y \\ b_x - c_x & b_y - c_y \end{vmatrix}$$

lub macierzy 3x3:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \\ c_x & c_y & 1 \end{vmatrix}$$

Przyjąłem, że jeśli det(A) < 0 to punkt leży po prawej stronie prostej, det(A) > 0 po lewej, a det(A) = 0 na prostej.

### Sposoby wyliczania wyznaczników

Zaimplementowane zostały 4 funkcje:

1. mat_det_3x3() - wyliczająca wyznacznik macierzy 3x3 metodą Sarrusa
2. mat_det_3x3_lib() - wyliczająca wyznacznik macierzy 3x3 przy użyciu funkcji linalg.det() z biblioteki numpy
3. mat_det_2x2() - wyliczająca wyznacznik macierzy 2x2 mnożąc wyrazy macierzy stojące na przekątnej, a następnie odejmując je od siebie
4. mat_det_2x2_lib() - wyliczająca wyznacznik macierzy 2x2 przy użyciu funkcji linalg.det() z biblioteki numpy

## 4. Analiza danych

### Sposób analizy

Dane ze zbiorów 1-4 zostały przeanalizowane wszystkimi 4 sposobami obliczania wyznaczników, przy użyciu dwóch różnych precyzji typu danych float (float64, float32), a także w zależności od zbioru, różnych wartości tolerancji, czyli dokładności z jaką klasyfikuje punkt jako leżący na prostej. Pod każdą tabelą znajdują się wybrane przeze mnie najciekawsze wykresy. Zielony kolor na wykresie oznacza punkty na lewo od prostej, pomarańczowy na prawo, a fioletowy punkty leżące na prostej. Gwiazda w tabeli oznacza, że każda użyta metoda dała taki sam efekt.

### Dane ze zbioru 1.

Dla każdej wybranej metody wyniki były takie same. Są one przedstawione w Tabeli 1. Przetestowane epsilony to: $10^{-15}$, $10^{-10}$, $10^{-5}$.

| Wyznacznik | Precyzja float'a | Epsilon | Punkty po lewej | Punkty na prostej | Punkty po prawej |
|---|---|---|---|---|---|
| * | * | * | 49787 | 0 | 50213 |

Tabela 1. Klasyfikacja danych ze zbioru 1.

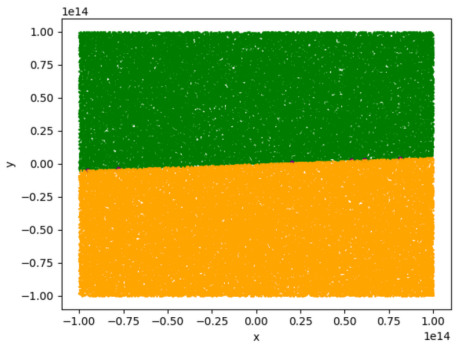
### Dane ze zbioru 2.

Wyznacznik 3x3 okazał się nieskuteczny przy wykryciu punktów leżących na prostej. Odmienne rezultaty dał wyznacznik 2x2 są one przedstawione w Tabeli 2. Po ręcznym przetestowaniu co zwracają oba wyznaczniki okazało się, że wyznacznik 2x2 zwraca dokładnie 0, a wyznacznik 3x3 bardzo dużą, lub bardzo małą liczbę w zależności od punktu. Pod tabelą (wykres 6. i wykres 7.) znajduje się graficzne porównanie dla dwóch różnych precyzji floata i funkcji mat_det_2x2. Przetestowane epsilony to: $10^{-100}$, $10^{-15}$, $10^{-10}$, $10^{-5}$.

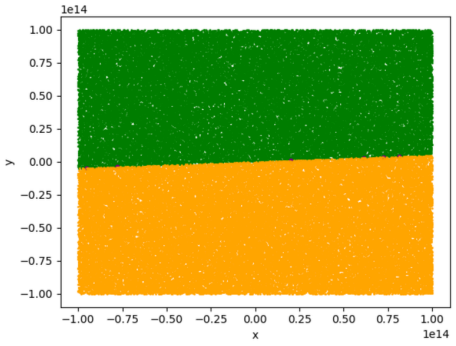
| Wyznacznik | Precyzja float'a | Epsilon | Punkty po lewej | Punkty na prostej | Punkty po prawej |
|---|---|---|---|---|---|
| mat_det_2x2 | 64 bity | * | 50068 | 6 | 49926 |
| | 32 bity | * | 50066 | 8 | 49926 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| mat_det_2x2_lib | 64 bity | * | 50066 | 6 | 49928 |
| | 32 bity | * | 50067 | 6 | 49927 |

Tabela 2. Klasyfikacja danych ze zbioru 2.




Wykres 6. mat_det_2x2, eps = $10^{-15}$, float64




Wykres 7. mat_det_2x2, eps = $10^{-15}$, float32

**Dane ze zbioru 3.**

Podobnie jak w przypadku zbioru 1. nie udało się trafić punkty na prostej oraz metody dały ten sam wynik zaprezentowany w Tabeli 3. Przetestowane epsilony to: $10^{-15}$, $10^{-10}$, $10^{-5}$.

| Wyznacznik | Precyzja float'a | Epsilon | Punkty po lewej | Punkty na prostej | Punkty po prawej |
|---|---|---|---|---|---|
| * | * | * | 50240 | 0 | 49760 |

Tabela 3. Klasyfikacja danych ze zbioru 3.

**Dane ze zbioru 4.**

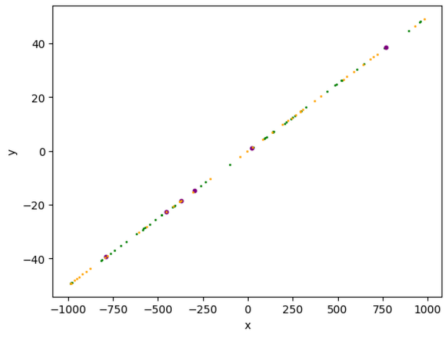
Rezultaty dla zbioru 4. są zdecydowanie najciekawsze. Każda użyta metoda dała inne wyniki dla różnych tolerancji i precyzji. W tym wypadku punkty mimo, że zostały wygenerowane na prostej nie wszystkie zostały zakwalifikowane jako takowe. Dla tolerancji= 10^-10 wszystkie punkty zostały określone jako leżące na prostej. Dane zostały zestawione w tabeli 4. Pod tabelą na wykresie 8. przedstawiony jest wynik dla najmniej skutecznej metody, a na wykresie 9. dla optymalnej moim zdaniem funkcji mat_det_2x2 i tolerancji $10^{-15}$.

**Wybrane wykresy dla danych ze zbioru 4.**

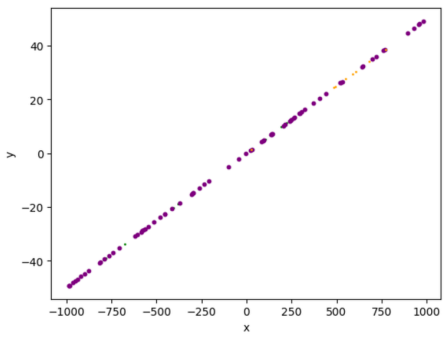
| Zestaw 4 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Wyznacznik | Precyzja float'a | Epsilon | Punkty po lewej | Punkty na prostej | Punkty po prawej |
| mat_det_3x3 | 64 bity | $10^{-10}$ | 0 | 100 | 0 |
| | | $10^{-15}$ | 20 | 46 | 34 |
| | | $10^{-20}$ | 20 | 44 | 36 |
| | | $10^{-100}$ | 20 | 44 | 36 |
| | 32 bity | $10^{-10}$ | 46 | 17 | 37 |
| | | $10^{-15}$ | 51 | 7 | 42 |
| | | $10^{-20}$ | 51 | 7 | 42 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $10^{-100}$ | 51 | 7 | 42 |
| mat_det_3x3_lib | 64 bity | $10^{-10}$ | 0 | 100 | 0 |
| | | $10^{-15}$ | 35 | 33 | 32 |
| | | $10^{-20}$ | 42 | 25 | 33 |
| | | $10^{-100}$ | 42 | 25 | 33 |
| | 32 bity | $10^{-10}$ | 46 | 17 | 37 |
| | | $10^{-15}$ | 52 | 7 | 41 |
| | | $10^{-20}$ | 52 | 6 | 42 |
| | | $10^{-100}$ | 52 | 6 | 42 |
| mat_det_2x2 | 64 bity | $10^{-10}$ | 0 | 100 | 0 |
| | | $10^{-15}$ | 17 | 75 | 8 |
| | | $10^{-20}$ | 18 | 74 | 8 |
| | | $10^{-100}$ | 18 | 74 | 8 |
| | 32 bity | $10^{-10}$ | 46 | 17 | 37 |
| | | $10^{-15}$ | 48 | 14 | 38 |
| | | $10^{-20}$ | 48 | 14 | 38 |
| | | $10^{-100}$ | 48 | 14 | 38 |
| mat_det_2x2_lib | 64 bity | $10^{-10}$ | 0 | 100 | 0 |
| | | $10^{-15}$ | 26 | 60 | 14 |
| | | $10^{-20}$ | 26 | 60 | 14 |
| | | $10^{-100}$ | 26 | 60 | 14 |
| | 32 bity | $10^{-10}$ | 46 | 17 | 37 |
| | | $10^{-15}$ | 51 | 7 | 42 |
| | | $10^{-20}$ | 48 | 12 | 40 |
| | | $10^{-100}$ | 48 | 12 | 40 |

Tabela 4. Klasyfikacja danych ze zbioru 4.




Wykres 8. mat_det_3x3_lib, eps = $10^{-100}$, float32




Wykres 9. mat_det_2x2, eps = $10^{-15}$, float64

## 5. Wnioski

Dane ze zbiorów 1 i 3 dały takie same wyniki, nie udało się wygenerować żadnego punktu leżącego na prostej. Próbowałem eksperymentować z dość dużą wartością tolerancji tj. $10^{-1}$ i udało się uzyskać 3 punkty w przypadku zbioru 1 i 33 punkty w przypadku zbioru 3, które zostały sklasyfikowane jako leżące na prostej. Jednak nie można powiedzieć, że leżą one na tej prostej, a jedynie w pobliżu. W przypadku obu zbiorów, szansa że jakiś punkty wypadnie dokładnie na prostej była bardzo znikoma.

W zbiorze 2. udało się wygenerować kilka punktów leżących na prostej. Mogę być tego pewny ponieważ zarówno wyznacznik 2x2 obliczony moją metodą jak i metodą biblioteczną niezależnie dla jakiej tolerancji dawał niemal te same wyniki (6 pkt. lub 8pkt. dla mat_det_2x2 i float32). Należy to uznać za duże szczęście ponieważ zbiór 2. zawierał $10^5$ punktów z przedziału $[-10^4, 10^4]$ dużo większego niż zbiór 1.

Zdecydowanie najciekawsze rezultaty otrzymałem dla zbioru 4. Co ciekawe dla tolerancji $10^{-10}$ wszystkie punkty zostały określone jako leżące na prostej niezależnie od sposobu sprawdzenia. Jednak wraz z wzrostem tolerancji malała ich liczba. Zmiana z 64 bitowego float'a na 32 bitowy również znacznie zmniejszyła liczbę tych punktów. Najbardziej zaskoczyło mnie, że dla float32 zaledwie 17 / 100 punktów leżało na prostej, gdzie dla tej samej tolerancji ($10^{-10}$) wszytkie na niej leżały. Dzieje się tak ponieważ przez taką zmianę znacznie traci się na precyzji. Przy takich obliczeniach liczby daleko po przecinku mają znaczenie, a ich utrata wiążę się z błędnym określeniem pozycji punktu.

W moim przypadku najlepsze wyniki dała funkcja obliczająca wyznacznik macierzy 2x2 zaimplementowana przeze mnie, a optymalną tolerancją jest $10^{-15}$.