

# Algorithmik für Schwere Probleme

thgoebel@ethz.ch

ETH Zürich, FS 2021

This document is a **short** summary for the course *Algorithmik für Schwere Probleme* at ETH Zurich. It is intended as a document for quick lookup, e.g. during revision, and as such does not replace attending the lecture, reading the slides or reading a proper book.

We do not guarantee correctness or completeness, nor is this document endorsed by the lecturers. Feel free to point out any errata, either by mail or on Github.

# Contents

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
1.1	Definitionen . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Pseudopolynomielle Algorithmen</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Parametrisierte Algorithmen</b>	<b>7</b>
3.1	Kernbildung . . . . .	8
3.1.1	Kronenzerlegung . . . . .	9
3.2	Tiefenbeschränkte Suchbäume . . . . .	10
3.3	Iterative Kompression . . . . .	10
3.4	Dynamische Programmierung für den Steinerbaum . . . . .	11
3.5	Baumzerlegung . . . . .	12
3.5.1	Beispiel: VCP parametrisiert mit Baumweite . . . . .	13
3.6	Grenzen der Parametrisierbarkeit . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Exakte Exponentialzeit Algorithmen</b>	<b>17</b>
4.1	Branching-Algorithmen . . . . .	17
4.1.1	Beispiel: 3-SAT . . . . .	17
4.1.2	Beispiel: Max-IS . . . . .	18
4.2	Dynamische Programmierung . . . . .	19
4.3	Measure-and-Conquer . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Approximations-Algorithmen</b>	<b>23</b>
5.1	Nichtapproximierbarkeit . . . . .	26

# 1 Einführung

## Konzepte

- NP-schwer vs. NP-vollständig
- Schwellwertsprache

**Polynomzeit-Reduzierbarkeit** Ein Entscheidungsproblem  $\Pi_1$  ist “polynomzeit-reduzierbar” auf ein anderes Entscheidungsproblem  $\Pi_2$ :

$$\iff \exists \text{ Algo } \mathcal{A} \text{ s.t. } \text{time}_{\mathcal{A}} \in \text{poly} \wedge \Pi_1(x) = \Pi_2(\mathcal{A}(x))$$

$$\iff \Pi_2 \text{ mindestens so schwer wie } \Pi_1$$

$$\iff \Pi_1 \text{ höchstens so schwer wie } \Pi_2$$

$$\iff \Pi_1 \preceq_P \Pi_2$$

**Klasse NP** Nichtdeterministisch-Polynom-Zeit. Klasse der Probleme, die sich in Polynomzeit verifizieren lassen, und von einer nichtdeterministischen Turing-Maschine in Polynomzeit lösen lassen (z.B. durch Lösung raten und verifizieren).

**NP-schwer (NP-hard)** Ein Problem  $\Pi$  das “mindestens so schwer” ist wie alle Probleme in NP. D.h. alle Probleme in NP lassen sich auf  $\Pi$  reduzieren:

$$\forall \Pi' \in NP : \Pi' \preceq_P \Pi$$

$\Pi$  muss nicht notwendigerweise in NP liegen (d.h. kann schwerer sein)! Beispiel: das Halteproblem (nicht entscheidbar, daher  $\notin NP$ ).

**NP-vollständig (NP-complete)** Ein Problem  $\Pi$ , das in NP liegt und NP-schwer ist. “Repräsentativ” für die Menge NP, da sich alle Probleme aus NP darauf reduzieren lassen.  
Beispiel: Satisfiability-Problem SAT (Satz von Cook).

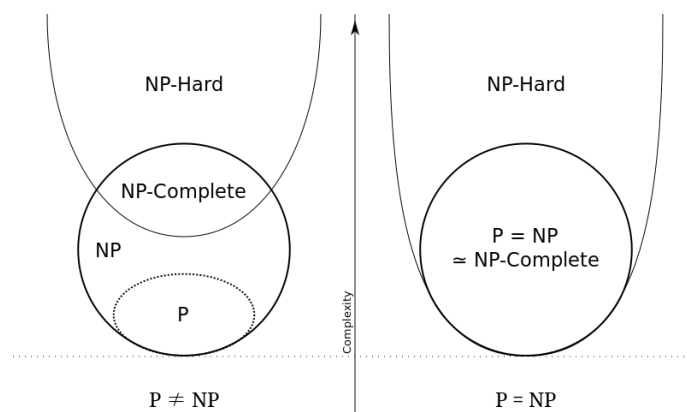


Figure 1: Mengendiagramm der Beziehungen (Quelle: Wikipedia)

**“Schwere Probleme”** NP-schwere Probleme, aber generell alle Probleme die sich nicht in Polynomzeit lösen lassen. **Sinnvollerweise gehen wir im Folgenden davon aus dass  $P \neq NP$ .**

Alle Instanzen unseres Problems sind deterministisch in Polynomzeit nicht lösbar. Mögliche Ansätze:

- nicht exakt sondern approximativ lösen (Approximationsalgorithmen)
- nicht deterministisch sondern nichtdeterministisch lösen (Randomisierte Algorithmen)
- nicht polynomiell sondern moderat exponentiell lösen<sup>1</sup>
- nicht alle sondern alle Instanzen mit einer bestimmten Struktur lösen (Parametrisierte Algorithmen)
- anderweitig zusätzliche Informationen über die Eingabe nutzen (Reoptimierung, Win-Win-Strategy)
- Heuristiken<sup>2</sup>

## 1.1 Definitionen

**Entscheidungsproblem**  $P = (L, U, \Sigma)$  wobei

- $\Sigma$  ein Alphabet
- $U \subseteq \Sigma^*$  die Menge der zulässigen Eingaben (als Wörter über dem Alphabet, als *Sprache*)
- $L \subseteq U$  die Menge der akzeptierten Eingaben (*JA-Instanzen*)

Ein Algorithmus  $\mathcal{A}$  *löst*  $P$  falls gilt:

$$\forall u \in U : A(x) = \begin{cases} 1 \text{ oder JA, if } x \in L \\ 0 \text{ oder NEIN, if } x \in U - L \end{cases}$$

**Vertex Cover Problem VC** “Der Hefepilz der parametrisierten Algorithmiker – ein Modellproblem.”

Eingabe  $U$ : ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  und  $k \leq |V|, k \in \mathbb{N}$ .

Ausgabe  $L$ : JA falls  $\exists C \subseteq V$  s.t.  $|C| \leq k$  mit  $\forall \{u, v\} \in E : u \in C \vee v \in C$ .

**Satisfiability-Problem SAT**

Eingabe: CNF-Formel  $\Phi = C_1 \wedge \dots \wedge C_m$  mit Klauseln  $C_i$  über Variablen  $x_1, \dots, x_n$ .

Ausgabe: eine Variablen-Belegung die  $\Phi$  erfüllt.

Bei  $l$ -SAT enthält jede Klausel maximal  $l$  Literale.

**Optimierungsproblem**  $U = (L, M, cost, goal)$  wobei

- $L$  die Sprache der zulässigen Eingaben<sup>3</sup>
- $M : L \mapsto \Sigma^*$  so dass  $M(x)$  die Sprache der akzeptierten Lösungen für Eingabe  $x$
- $cost$ :  $\forall x \in L \forall y \in M(x) : cost(y, x) = \text{Kosten der Lösung } y \text{ für Eingabe } x$
- $goal \in \{\min, \max\}$  das Optimierungsziel
- $Opt_U(x) = goal\{cost(y, x) | y \in M(x)\}$  die Kosten einer optimalen Lösung für Eingabe  $x$

<sup>1</sup>D.h. die Basis der Exponentiation ist klein, z.B.  $1.4^n$  statt  $2^n$ .

<sup>2</sup>Nachteil: Im Gegensatz zu den anderen Ansätzen ist hier die Qualität (Laufzeit, ...) nicht beweisbar.

<sup>3</sup>Oben noch  $U$ !

**Minimum Vertex Cover Problem MIN-VC** Wie VC, mit  $cost(C, G) = |C|$  = Grösse des Vertex Covers und  $goal = \min$ .

**MAX-SAT** Wie SAT, mit  $cost$  = Anzahl belegte Variablen und  $goal = \max$ .

**Laufzeit** eines Algorithmus'  $\mathcal{A}$  auf Eingabe  $x$  ist  $\text{time}_{\mathcal{A}}(x)$  wobei  $\text{time}_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ . Die Laufzeit von  $\mathcal{A}$  in Abhängigkeit von der Grösse  $n$  der Eingabe ist:  $\text{time}_{\mathcal{A}}(n) = \max\{\text{time}_{\mathcal{A}}(x) \mid |x| = n, x \in L\}$ . Die Laufzeit wird in  $\mathcal{O}$ -Notation angegeben.

**Schwellwertsprache (threshold language)** definiert für ein Optimierungsproblem  $U$ :

$$Lang_U = \{(x, a) \in L \times \{0, 1\}^* \mid Opt_U(x) \leq Number(a)\}$$

wo  $Number(a)$  die Zahl mit der Binärdarstellung  $a$  (der *Schwellwert*) ist und  $goal = \min$ .  
Beispiel:  $Lang_{MIN-VC} = VC$ . Aber  $Lang_{MAX-SAT} \neq SAT$  (da SAT leichter sein kann)!

$U$  heisst "NP-schwer" falls  $Lang_U$  NP-schwer ist (warum?).<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>Recall that NP-Schwere für Entscheidungsprobleme definiert ist. Über die Schwellwertsprache erweitern wir dies für Optimierungsprobleme.

## 2 Pseudopolynomielle Algorithmen

### Konzepte

- Pseudopolynomialität
- Stark NP-schwer

### Zahlproblem (integer value problem IVP)

Eingabe: darstellbar als Zahl  $x = x_1 \# \dots \# x_n$ ;  $x_i \in \{0, 1\}^*$  und interpretiert als Vektor  $Int(x) = (Number(x_1), \dots, Number(x_n))$ .

Beispiel: Travelling Salesman Problem TSP (via Adjazenzmatrix des Graphen).

Sei  $Max - Int(x) = \max\{Number(x_i)\}$  die grösste vorkommende Zahl (im Wert, nicht in der Darstellung).  $Max - Int(x)$  kann exponentiell in  $|x|$  sein.

**Pseudopolynomiell** Sei  $U$  ein Zahlproblem und  $\mathcal{A}$  ein Algorithmus der  $U$  löst.  $\mathcal{A}$  heisst *pseudopolynomiell* falls für alle Eingaben  $x$  ein Polynom  $p$  existiert, so dass

$$\text{time}_{\mathcal{A}}(x) \in \mathcal{O}\left(p(|x|, Max - Int(x))\right)$$

D.h. auf Eingaben mit “kleinen Zahlen” ist  $\mathcal{A}$  polynomiell.

### Rucksackproblem (Knapsack problem KP)

Eingabe  $I$ : Gewichte  $w_i \in \mathbb{N}^+$ , Kosten/Nutzen  $c_i \in \mathbb{N}^+$ , Limit/Kapazität  $b \in \mathbb{N}^+$ , wo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Ausgabe: Indexmenge  $T \subseteq \{1, \dots, n\}$  s.t.  $\sum_{i \in T} w_i \leq b$

Kosten:  $\text{cost}(T, I) = \sum_{i \in T} c_i$

Ziel: max

Lösung mit DP: Iteration über alle Teilprobleme  $I_i$  und Speichern von Tripeln  $(k, W_{i,k}, T_{i,k}) = (\text{Nutzen, Gewicht, Indexmenge})$ , also Mengen  $T_{i,k}$  die exakt Nutzen  $k$  mit minimalen Gewicht  $W_{i,k}$  erreichen. In jeder Iteration behalte für jeden vorhandenen Nutzen ein Tripel mit minimalen Gewicht. Lese am Ende den maximal erreichten Nutzen  $k^*$  (und sein  $T_{n,k^*}$ ) aus.

Laufzeit:  $\mathcal{O}(|I|^2 \cdot Max - Int(I))$  da  $|I|$  Iterationen und jeder Schritt in  $\leq \sum_j^n c_j = |I| \cdot Max - Int(I)$ .

**h-beschränktes Teilproblem** Sei  $U$  ein Zahlproblem,  $h : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  monoton nicht-fallend. Das *h-beschränkte Teilproblem* von  $U$  (*h-value-bounded subproblem*)  $Value(h) - U$  ist das Teilproblem mit Eingaben  $I$  für die gilt:  $Max - Int(I) \leq h(|I|)$ .

**Stark NP-schwer** Ein Zahlproblem  $U$  heisst *stark NP-schwer* falls ein Polynom  $p$  existiert, so dass  $Value(p) - U$  NP-schwer ist.

In anderen Worten:  $U$  ist stark NP-schwer wenn es auch dann NP-schwer ist wenn alle darin vorkommenden Zahlen “klein” sind.

Beispiel: TSP. Generell jedes gewichtete Graph-Optimierungsproblem wenn das ungewichtete Pendant NP-schwer ist (hier: Hamiltonkreisproblem HCP).

Theorem: Sei  $U$  stark NP-schwer. Dann existiert kein pseudopolynomieller Algorithmus für  $U$ .<sup>5</sup>

<sup>5</sup>Wie immer unter der Annahme dass  $P \neq NP$ .

### 3 Parametrisierte Algorithmen

#### Konzepte

- Parametrisierter Algorithmus, fpt
- Standard-Parametrisierung
- Kernbildung
- (Sichere) Datenreduktionsregel
- Kronenzerlegung
- Tiefenbeschränkte Suchbäume
- Iterative Kompression
- Baumzerlegung, Baumweite; *bramble*, *bramble number*
- Klasse  $W[1]$
- Probleme: Edge Clique Cover, Cluster Editing, Steinerbaum, VCP via Baumweite

**Idee** Verallgemeinerung von pseudopolynomiellen Algorithmen: Laufzeit hängt von der Eingabegrösse nur polynomiell ab, aber darf extrem gross werden in der Grösse eines Parameters. Partitionierung in Problemklassen entlang des Parameters.

**Parametrisierung** Sei  $U$  ein Entscheidungsproblem,  $L$  die Sprache der Eingaben.  $\text{par} : L \mapsto \mathbb{N}$  ist eine *Parametrisierung* von  $U$  falls gilt:

- (i)  $\text{par}$  ist in Polynomzeit berechenbar
- (ii) Für unendlich viele  $k \in \mathbb{N}$  ist die Parameter- $k$ -Menge für  $U$

$$\text{Set}_U(k) := \{I \in L \mid \text{par}(I) = k\}$$

unendlich. Dies stellt sich dass  $\text{par}$  nichttrivial ist, z.B. nicht etwa  $\text{par}(I) = |I|$ . In anderen Worten, für jeden Parameterwert soll es beliebig viele Probleminstanzen geben.

Ein Algorithmus  $\mathcal{A}$  heisst *par-parametrisierter Polynomzeit-Algorithmus* für  $U$  falls gilt:

- (i)  $\mathcal{A}$  löst  $U$
- (ii)  $\exists$  Polynom  $p \exists$  (berechenbare) Funktion  $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  so dass  $\forall I \in L$ :

$$\text{time}_{\mathcal{A}}(I) \leq f(\text{par}(I)) \cdot p(|I|)$$

Dann heisst  $U$  *fixed-parameter-tractable bezüglich par*.  $\mathcal{A}$  heisst auch *fpt-Algorithmus für U bezüglich par* und läuft in fpt-Zeit.

Beispiel: Sei  $U$  ein Zahlproblem und sei  $\text{Val}(I) := \max\{|x_i|\}$ . Es gilt  $\text{Max} - \text{Int}(I) \leq 2^{\text{Val}(I)}$  und ist  $\text{Val}$  eine Parametrisierung von  $U$ .

**Ansätze** Die *Standard-Parametrisierung* wählt als Parameter die Grösse der gewünschten Lösung (z.B. Grösse des VCs). Die *Strukturelle Parametrisierung* wählt eine bestimmte Eigenschaft der Eingabe (z.B. maximaler Knotengrad). Andere Ansätze betrachten wir im Folgenden.

### 3.1 Kernbildung

**Idee** Polynomielles Preprocessing, Datenreduktion, um die Instanz auf einen *Kern* zu verkleinern, der in seiner Grösse nur noch vom Parameter abhängt. Diesen Kern dann mit bekannten Algorithmen (oder brute force) lösen.

**Kernbildung (kernelisation)** Sei  $(U, \text{par})$  ein parametrisiertes Entscheidungsproblem,  $L$  die Sprache der JA-Instanzen von  $U$ . Ein *Kernbildungs-Algorithmus* für  $(U, \text{par})$  ist ein Polynomzeit-Algorithmus  $\mathcal{A}$  der jede Eingabe  $(I, k)$  in eine neue Eingabe  $(I', k')$  (den *Kern (kernel)*) transformiert so dass:

- (i)  $I \in L \iff I' \in L$  (Korrektheit)
- (ii)  $|I'| + k' \leq g(k)$  für  $g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  (neue Grösse nur abhängig vom alten Parameterwert  $k$ )

Eine *Reduktionsregel* von  $\mathcal{A}$  heisst *sicher*, wenn sie (i) erfüllt.

#### Beispiel: VCP

Reduktionsregel: Sei  $S \subseteq V$  ein VC von  $G$  so dass  $|S| \leq k$ . Dann enthält  $S$  alle Knoten mit  $\deg_G(v) > k$  (warum?). Dann gilt für ein solches  $v$ :

$$(G, k) \in VCP \iff (G - \{v\}, k - 1) \in VCP$$

Zusätzlich entferne alle isolierten Knoten mit  $\deg_G(v) = 0$  (sie decken keine Kanten ab).

Zu zeigen: wenn die Regel nicht mehr anwendbar ist, dann hat der verbleibende Graph  $G'$  entweder kein vertex cover, oder aber er ist “klein genug” (nur noch anhängig von  $k$ ), also ein Kern.

Beobachtung: Sei  $G$  ein Graph ohne isolierten Knoten, mit einem vertex cover der Grösse  $m$  und mit  $\max \deg_G(v) \leq k$ . Dann gilt  $|V| \leq m \cdot (k + 1)$  (warum?).<sup>6</sup>

Theorem: Diese Reduktionsregeln berechnen einen Kern der Grösse  $\mathcal{O}(k^2)$  in Zeit<sup>7</sup>  $\mathcal{O}(k \cdot n)$ .

Parametrisierter Algorithmus: Berechne einen Kern  $(G', k')$ . Wenn der Kern zu gross ist, geben NEIN aus. Andernfalls prüfe durch vollständige Suche ob ein VC mit  $|S'| \leq k'$  existiert.

Theorem: Dies ist ein fpt-Algorithmus bzgl. der Standard-Parametrisierung. Die Laufzeit beträgt  $\mathcal{O}(k \cdot n + k^{2k+2}) \subseteq \mathcal{O}(k^{2k+2} \cdot n)$ .

**Theorem** Sei  $(U, \text{par})$  ein parametrisiertes Entscheidungsproblem.

Ein fpt-Algorithmus für  $(U, \text{par})$  existiert  $\iff$  Ein Kernbildungsalgorithmus für  $(U, \text{par})$  existiert.

#### Edge Clique Cover Problem ECCP

Eingabe: ungerichteter Graph  $G = (V, E)$ ,  $k \leq \mathbb{N}$

Ausgabe: JA falls  $k$  Cliques<sup>8</sup>  $C_1, \dots, C_k$  existieren, so dass  $E = \bigcup_{i=1}^k E(C_i)$  (jede Kante ist in mind. einer Clique), sonst NEIN.

Reduktionsregeln:

- (i)  $(G, k) \xrightarrow{\text{isolierter Knoten } u} (G - \{u\}, k)$

<sup>6</sup>Falls  $|V| > k \cdot (k + 1)$ , dann wir wissen dass  $I \notin L$  und können NEIN ausgeben.

<sup>7</sup>Unter der Annahme dass die Knotengrade bereits gegeben sind, ansonsten  $\mathcal{O}(k \cdot n + m)$ .

<sup>8</sup>Clique: Knotenmenge so dass alle Knoten paarweise miteinander verbunden sind, d.h. einen vollständigen Teilgraphen bilden.



$$(ii) (G, k) \xrightarrow{\text{isolierte Kante } e=\{u,v\}} (G - \{u, v\}, k - 1)$$

$$(iii) (G, k) \xrightarrow{\{u,v\} \in E \text{ s.t. } \{u,v\} \subsetneq N[u]=N[v]} (G - \{u\}, k)$$

$N[u]$  ist die *geschlossene Nachbarschaft* von  $u$ , also alle benachbarten Knoten und  $u$  selbst.

Theorem: Das ECCP hat einen Kern mit  $\leq 2^k$  Knoten.

### 3.1.1 Kronenzerlegung

Ziel: statt einem quadratischen Kern suchen wir einen linearen Kern für das VCP.

Bisher genutzte Strukturen zur Reduktion: hoher Knotengrad, gleiche geschlossene Nachbarschaft.

**Kronenzerlegung (crown decomposition)** Die *Kronenzerlegung* von  $G = (V, E)$  ist eine Partitionierung  $V = C \cup H \cup B$  so dass:

- (i)  $C \neq \emptyset$  ist ein independent set<sup>9</sup> in  $G$
- (ii)  $N(C) = H$  (keine Kanten zwischen  $C$  und  $B$ )
- (iii) Die Kanten zwischen  $C$  und  $H$  enthalten ein Matching  $M$  mit  $|M| = |H|$  ( $M$  *saturiert*  $H$ ).

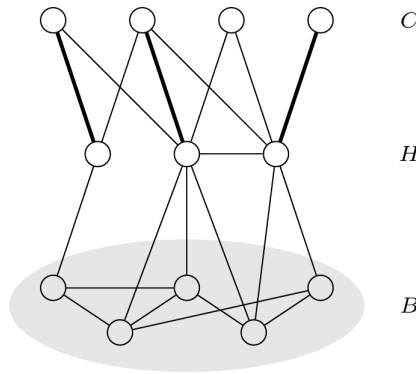


Figure 2: Kronenzerlegung: crown, head, body (Quelle: Vorlesung)

**Satz von König** Sei  $G$  ein ungerichteter bipartiter Graph, sei  $M$  ein Matching maximaler Kardinalität, sei  $S$  ein vertex cover minimaler Kardinalität. Dann gilt  $|M| = |S|$ .

Theorem:  $M$  und  $S$  können in Polynomzeit berechnet werden.

**Lemma** Sei  $G$  ungerichtet, ohne isolierte Knoten, mit  $|V| \geq 3k + 1$ . Dann existiert ein Polynomzeitalgorithmus der

- (i) entweder eine Kronenzerlegung berechnet
- (ii) oder ein Matching  $M$  mit  $|M| \geq k + 1$  findet.

Beweis siehe Buch, Kapitel 6.2, Seite 145f.

<sup>9</sup>Eine Menge von Knoten zwischen denen es keine Kante gibt.

## Reduktion für VCP

Lemma: Sei  $G$  ein Graph mit Kronenzerlegung  $V = C \cup H \cup B$  und sei  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

$$(G, k) \in VCP \iff (G - (C \cup H), k - |H|) \in VCP$$

Theorem: Ein Kernbildungsalgorithmus mit obiger Reduktionsregel findet einen Kern mit  $\leq 3k$  Knoten.

## 3.2 Tiefenbeschränkte Suchbäume

**Idee** Vollständige Suche über alle möglichen Lösungen, aber mit Suchbaumtiefe beschränkt im Parameter.

**Beispiel: VCP** Beobachtung: in jedem vertex cover  $S$  gilt  $\forall e = \{v_1, v_2\} : v_1 \in S \vee v_2 \in S$ . Daher verzweige von  $(G, k)$  nach  $(G - \{v_1\}, k - 1)$  und  $(G - \{v_2\}, k - 1)$ . In den Blättern  $(G_j, 1)$  ist das VCP trivial. Dieser Suchbaum hat Tiefe  $k$  und  $2^{k-1}$  Blätter. Gesamtlaufzeit:  $\mathcal{O}(2^k \cdot n)$ .

## Cluster Editing Problem CEP

Eingabe: Graph  $G = (V, E)$ ,  $k \in \mathbb{N}$

Ausgabe: JA falls durch Löschen/Einfügen von  $\leq k$  Kanten  $G$  in eine Vereinigung (union) von disjunkten Cliques (= jeder connected component ist eine Clique) transformiert werden kann, sonst NEIN. Bekannterweise NP-schwer.

Theorem: Graph  $G$  besteht aus disjunkten Cliques

$\iff G$  enthält *keinen* Pfad aus drei Knoten<sup>10</sup>

$\iff$  es gibt *keine* paarweise verschiedenen  $u, v, w \in V : \{u, v\}, \{v, w\} \in E \wedge \{u, w\} \notin E$

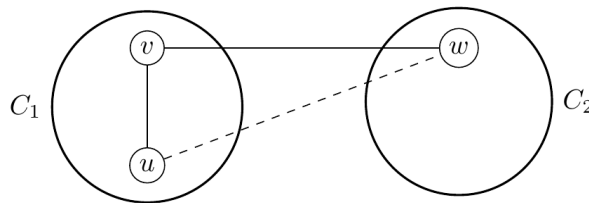


Figure 3: Cluster Editing Situation (Quelle: Vorlesung)

Algorithmus: Teste ob  $G$  bereits eine Vereinigung disjunkter Cliques ist, oder ob  $k = 0$ . Wenn nicht, finde  $u, v, w \in V$  mit obiger Bedingung. Rekursiere auf  $G_1 = (V, E - \{\{u, v\}\})$ ,  $G_2 = (V, E - \{\{v, w\}\})$ ,  $G_3 = (V, E \cup \{\{u, w\}\})$ . Laufzeit<sup>11</sup>:  $\mathcal{O}(n^3 \cdot 3^k)$ .

## 3.3 Iterative Kompression

**Idee** Gegeben ein Kompressionsalgorithmus der aus einer (bzgl. dem Schwellwert) etwas zu grossen Lösung eine kleinere, gültige Lösung in fpt-Zeit berechnet. Iteriere: Instanz vergrößern, komprimieren, usw.:

<sup>10</sup>In eine Clique bilden drei Knoten einen Kreis, keinen Pfad.

<sup>11</sup>Die Rekursionsformel  $T(k) = 3 \cdot T(k - 1)$  gibt  $\mathcal{O}(3^k)$  rekursive Aufrufe.

$$\begin{array}{l}
(I_0, k_0) \text{ mit Lösung } S_0^*, |S_0^*| \leq k_0 \\
\begin{array}{c} \text{Instanz vergrößern} \\ \longrightarrow \end{array} (I_1, k_1) \text{ mit Lösung } S_1, |S_1| > k_1 \\
\begin{array}{c} \text{komprimieren} \\ \longrightarrow \end{array} (I_1, k_1) \text{ mit Lösung } S_1^*, |S_1^*| \leq k_1 \\
\vdots
\end{array}$$

### Disjoint Vertex Cover Problem DVCP

Eingabe:  $G = (V, E)$ , vertex cover  $W$ ,  $k \in \mathbb{N}$

Ausgabe: JA falls es ein vertex cover  $S$  gibt mit  $|S| \leq k \wedge S \cap W = \emptyset$  sonst NEIN.

Lemma: Jede DVCP-Instanz  $(G, W, k)$  kann in Zeit  $\mathcal{O}(|V|^2)$  gelöst werden (warum?<sup>12</sup>).

**Beispiel: VCP** Idee: füge einen Knoten nach dem anderen hinzu. Starte mit  $S_1^* = \emptyset$ . In jeder Iteration setze  $S_i \leftarrow S_{i-1}^* \cup \{v_i\}$  und benutze  $\mathcal{A}_{compress}(G_i, S_i, k)$  um entweder  $S_i^*$  zu finden oder NEIN. Details siehe Buch, Algorithmen 6.6+6.7, Seite 151ff.

Kompression: Idee: probiere alle möglichen intersections  $X$  des gesuchten VCs mit  $S$  aus:

If  $|S| \leq k$  return  $S$ . For all  $X \subseteq S$  with  $|X| \leq k$  do: solve DVCP on  $(G - X, S - X, k - |X|)$  – if YES return  $X \cup N(S - X)$ .

Laufzeit:  $\mathcal{O}(2^k \cdot n^2)$  also gesamt:  $\mathcal{O}(2^k \cdot n^3)$ .

## 3.4 Dynamische Programmierung für den Steinerbaum

### Steinerbaum-Problem STP

Eingabe:  $G = (V, E)$  mit Kantenkosten  $c : E \mapsto \mathbb{N}$ , *Terminalen*  $S \subseteq V$ , *Nicht-Terminals/Steiner-Knoten*  $N = V - S$

Lösungen: Teilbaum  $T$  von  $G$  (“Steinerbaum”) der alle Knoten aus  $S$  enthält (und einige aus  $N$ )

Kosten:  $\text{cost}(T, (G, c, S)) = c(T) = \sum_{e \in E(T)} c(e)$  = Summe der Kanten = “Grösse” des Baums

Ziel: min

**DP-Ansatz** Annahme: alle Blätter sind Terminale (warum?).

Beobachtung: falls  $Y \subseteq N$  gegeben ist dann ist das STP einfach: berechne MST von  $S \cup Y$ .

$\implies$  k-parametrisierter Algorithmus mit  $k = |N|$ .

Uninteressant, wir schauen im Folgenden ein DP mit dem Parameter  $k = |S|$  an. Für alle  $X \subseteq S$  und alle  $v \in V - X$  berechne zwei Steinerbäume:

1. Auf Instanz  $(G, c, X)$  einen Steinerbaum mit minimalen Kosten  $g(X)$ .
2. Auf Instanz  $(G, c, X \cup \{v\})$  einen Steinerbaum mit minimalen Kosten  $g_{in}(X, v)$  so dass  $v$  ein innerer Knoten ist (d.h.  $\deg(v) \geq 2$ ).

<sup>12</sup>Es reicht zu prüfen ob  $N(W)$  ein vertex cover ist

**Lemma** Es gilt:

$$g_{in}(X, v) = \min_{\emptyset \neq X' \subset X} \{g(X' \cup \{v\}) + g((X - X') \cup \{v\})\} \quad (1)$$

$$g(X \cup \{v\}) = \min \left\{ \min_{w \in X} \{p(v, w) + g(X)\}, \min_{w \in V - X} \{p(v, w) + g_{in}(X, w)\} \right\} \quad (2)$$

wobei  $p(v, w)$  die minimalen Kosten eines Pfades von  $v$  nach  $w$  in  $G$  sind. Beweis siehe Buch Kapitel 6.5, Seite 159ff.

**Dreyfus-Wagner Algorithmus** Eingabe  $(G, c, S)$ . Berechne  $p(v, w)$  für alle  $v, w \in V$ . Initialisiere  $g(\{x, y\}) := p(x, y)$  für alle  $x, y \in S$ . Für alle  $X \subseteq S$  mit  $|X| \in [2, |S| - 1]$  und alle  $v \in V - X$  berechne  $g_{in}(X, v)$  und  $g(X \cup \{v\})$ . Gebe  $g(S)$  aus.

Laufzeit:  $\mathcal{O}(n^2 \log n + n \cdot m + (k^2 +) 3^k \cdot n + 2^k \cdot n^2)$

### 3.5 Baumzerlegung

**Motivation** Viele schwere Graphprobleme sind auf Bäumen einfach. Z.B. Reduktionsregel für VCP: entferne Blätter und ihre Nachbarn, füge Nachbarn ins VC hinzu.

Ziel: “Baumähnlichkeit” von Graphen beschreiben und “Baum-Algorithmenvariante” anwenden.

**Definition (Baumzerlegung)** Eine *Baumzerlegung* (tree decomposition) von  $G$  ist ein Paar  $D = (T, B)$  wobei  $T = (V_T, E_T)$  ein Baum ist. Sei  $I$  eine Indexmenge, die die Knoten aus  $V_T$  aufzählt.<sup>13</sup> Sei  $B$  eine Label-Funktion  $B : I \mapsto 2^V$  die jedem Index  $i$  von  $V_T$  eine Knotenmenge  $X_i \subseteq V$  (einen *bag*) zuordnet, so dass:

- (i)  $\bigcup_{i \in I} X_i = V$  (alle Knoten kommen vor)
- (ii)  $\forall \{u, v\} \in E \exists i \in I : u, v \in X_i$  (alle Kanten in einem bag)
- (iii)  $\forall v \in V$  bilden die bags  $X_i$  mit  $v \in X_i$  einen Teilbaum von  $T$  (Zusammenhang, Lokalität)

Die *Weite* von  $D$  ist  $\max\{|X_i|\} - 1$ .<sup>14</sup>

Die *Baumweite*  $\text{tw}(G)$  von  $G$  ist die minimale Weite über alle möglichen Baumzerlegungen.

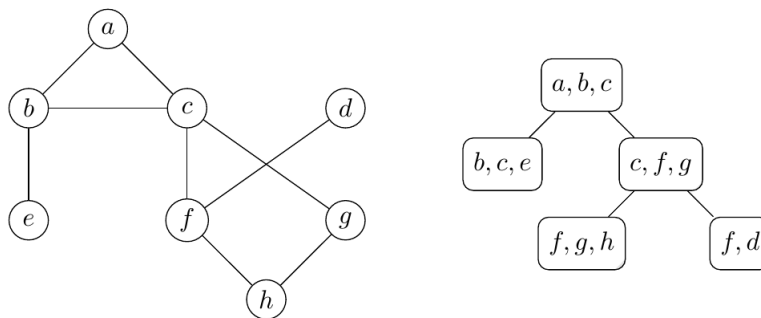


Figure 4: Graph  $G$  (links) und seine Baumzerlegung  $D$  (rechts) (Quelle: Vorlesung)

<sup>13</sup>Dies erlaubt es uns getrennt über die Knotenmenge  $V_T$  des Baums  $T$  und über die bags zu sprechen.

<sup>14</sup>Das  $-1$  ist kosmetisch damit echte Bäume eine Baumweite von 1 haben.

## Beobachtungen

- Sei  $G$  ein Baum. Dann ist  $\text{tw}(G) = 1$ .
- Sei  $G$  ein Kreis. Dann ist  $\text{tw}(G) = 2$ .
- Sei  $G$  ein Graph,  $v \in V, e \in E$ . Dann ist jede Baumzerlegung  $D$  für  $G$  auch eine Baumzerlegung für  $G - e$ . Auch kann  $D$  in eine Baumzerlegung  $D'$  für  $G - v$  transformiert werden mit gleicher oder kleinerer Weite (z.B. durch Entfernen von  $v$  aus  $D$ ).  
 $\implies$  Die Baumweite ist monoton: zusätzliche Knoten/Kanten verringern nicht die Baumweite.
- Sei  $G$  ein Graph, sei  $C \subseteq V$  eine Clique der Grösse  $|C| = k$ . Dann gilt  $\text{tw}(G) \geq k - 1$  (und es existiert ein bag, der alle Knoten der Clique enthält).  
 $\implies$  grosse Cliques  $\implies$  grosse Baumweite. ABER kleine Cliques  $\nRightarrow$  kleine Baumweite (z.B.  $l \times l$ -Gitter-Graph).  
 $\implies$  Konzept der Clique kein genügendes Modell für den Zusammenhang (und damit der Baumähnlichkeit) eines Graphen. Verallgemeinerung: statt Knoten die sich gegenseitig berühren betrachten wir Mengen von Knoten die sich gegenseitig berühren.

**Definition (bramble)** Sei  $G$  ein Graph, sei  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$  mit  $B_i \subseteq V$ . Wir sagen dass  $B_i, B_j$  sich *berühren* (*touch*), falls  $B_i \cap B_j \neq \emptyset$  oder  $\exists \{x_i, x_j\} \in E : x_i \in B_i \wedge x_j \in B_j$ .

Wenn alle  $B_i$  sich paarweise berühren, dann heisst  $\mathcal{B}$  *bramble* ("Dornen-/Brombeergestrüpp") von  $G$ .

$C \subseteq V$  heisst *Überdeckung* (*cover*) von  $\mathcal{B}$ , falls  $C \cap B_i \neq \emptyset$  für alle  $i$ .

Die *Ordnung* (*order*) von  $\mathcal{B}$  ist die Grösse einer minimalen Überdeckung von  $\mathcal{B}$ .

Die *bramble number*  $\text{bn}(G)$  von  $G$  ist die maximale Ordnung eines bramble von  $G$ .

Beispiel: In einem  $k \times k$ -Gitter-Graph sei ein "Kreuz"  $C_{i,j}$  die Vereinigung von Reihe  $i$  und Spalte  $j$ . Dann ist  $\mathcal{B} = \{C_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq k\}$  ein bramble von  $G$  der Ordnung  $k$  und jede Reihe und jede Spalte ist eine Überdeckung von  $\mathcal{B}$ .

## Theoreme

- Sei  $G$  ein Graph. Dann gilt  $\text{bn}(G) = \text{tw}(G) + 1$ .  
 $\longrightarrow$  Die bramble number beschreibt die Grösse des grössten bags in einer optimalen Baumzerlegung. D.h. sie bietet eine untere Schranke für die Weite einer beliebigen Baumzerlegung.
- Die Konstruktion einer Baumzerlegung und Bestimmung der Baumweite sind NP-schwer.  
 $\longrightarrow$  Problem: das Parameter eines parametrisierten Algorithmus' sollte in Polynomzeit berechenbar sein!
- Sei  $G$  ein Graph mit  $\text{tw}(G) = k$ . Dann kann man eine Baumzerlegung  $D$  der Grösse/Weite  $\leq 5k$  in Zeit  $2^{\mathcal{O}(k)} \cdot n$  berechnen.

### 3.5.1 Beispiel: VCP parametrisiert mit Baumweite

**Idee** Löse VCP in den bags und setze die Gesamtlösung aus den Teillösungen anhand der Baumstruktur bottom-up zusammen.

**Definition** Eine Baumzerlegung heisst *einfach* (*simple*), falls  $\forall i, j \in I : X_i \not\subseteq X_j$ .

**Lemma** Jede Baumzerlegung lässt sich umwandeln in eine einfache Baumzerlegung.

Beweis: falls solche  $X_i, X_j$  existieren, dann müssen sie auf einem Pfad liegen. O.B.d.A. ist  $X_i$  Nachbar von  $X_j$ . Kontrahiere beide. Die Weite bleibt erhalten. Machbar in Zeit  $\mathcal{O}(\text{tw}(G) \cdot n)$ .<sup>15</sup>

**Lemma** Sei  $G$  ein Graph. Dann existiert eine Baumzerlegung  $D = (T, B)$  von  $G$  mit (optimaler) Weite  $\text{tw}(G)$  so dass  $|V_T| \leq |V|$ .

—→ Es gibt wenige bags, und diese sind klein.

Beweis: O.B.d.A. hat  $D$  Baumweite  $\text{tw}(G)$  und ist einfach. Wähle ein  $r \in T$  als Wurzel.  $\forall v \in V$  sei  $\text{high}(v)$  der höchste Knoten in  $V_T$  dessen bag  $v$  enthält.  $\text{high}(v)$  ist eindeutig (warum?). Behauptung:  $\forall X_i \exists v \in V : \text{high}(v) = X_i$ . Fall nicht, gilt entweder  $i = r$ , aber dann ist  $X_r = \emptyset$ . Oder aber  $X_i$  hat einen parent  $X_j$ , und da es kein eindeutiges  $v$  gibt für  $X_i$  muss  $X_i \subseteq X_j$  gelten. Beide Fälle sind ein Widerspruch zur Annahme dass  $D$  einfach ist. Also hat jeder bag mind. ein  $v$  an höchster Stelle, ergo muss  $|V_T| \leq |V|$  gelten.

**Notation** Wurzel  $R$ , Orientierung von  $R$  zu den Blättern. Teilbaum  $T_X$  mit Wurzel  $X$ . Induzierter Teilgraph  $G[T_X]$  von  $G$  mit all den Knoten die in einem bag aus  $T_X$  sind.

**Definition** Sei  $G$  ein Graph, sei  $X \subseteq Y \subseteq V$ , seien  $C_X, C_Y$  vertex cover für  $G[X], G[Y]$ .  $C_Y$  *erweitert* (*extends*)  $C_X$ , falls  $C_X \subseteq C_Y$  und  $C_Y \cap X = C_X$  (d.h.  $C_Y$  stimmt auf  $X$  mit  $C_X$  überein).

**Theorem** Sei  $G$  ein Graph und sei  $D$  eine einfache Baumzerlegung von  $G$  der Weite  $k$ .<sup>16</sup> Dann lässt sich ein optimaler VC für  $G$  berechnen in Zeit  $\mathcal{O}(2^k \cdot k \cdot n)$ .

Beweis: Konstruktiv. Ziel: verwalte eine Tabelle, die für jeden bag  $X$  alle optimalen VCs für  $G[T_X]$  enthält – diese lassen sich zu einem optimalen VC für  $G$  erweitern.

- 1) Initialisierung: Für alle bags  $X$  berechne alle zulässigen VCs für  $G[X]$  und definiere  $w_X : 2^X \mapsto \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  für alle  $C \subseteq X$  wie folgt:

$$w_X(C) = \begin{cases} |C| & \text{if } C \text{ is a VC for } G[X] \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

D.h.  $w_X$  speichert die Grösse aller VC-Kandidaten für  $G[X]$ .

- 2) Bottom-up-Durchlauf von  $T$ : Für jeden Knoten  $Y$  merge die Information  $w_X$  aus jedem seiner Kinder  $X$  in  $w_Y$  hinein. Sobald alle Kinder abgearbeitet sind enthält  $w_Y$  die Grösse aller VC-Kandidaten für  $G[T_Y]$ .

Merge-Schritt: Für alle  $C_Y \subseteq Y$ , sei  $Z = X \cap Y$  und sei  $C_Z := (C_Y \cap Z) \subseteq Z$  (also  $C_Y$  erweitert  $C_Z$ ). Dann berechne:

$$w_Y(C_Y) = w_Y(C_Y) + \min\{w_X(C_X) \mid C_X \subseteq X \text{ extends } C_Z\} - |C_Z|$$

Beispiel siehe Buch Kapitel 6.6, Seite 173.

Beobachtung: Jeder Knoten der in  $T_X$  aber nicht in  $X$  vorkommt, kommt nicht ausserhalb von  $T_X$  vor (wegen Eigenschaft 3 der Baumzerlegung). Dadurch bleibt die Tabelle klein, da wir für alle abgehandelten “unteren” Knoten den optimalen VC bereits kennen.

Laufzeit:

<sup>15</sup>Wenn die Ausgangszerlegung  $D$  wie im Theorem oben gebildet wurde, impliziert dies dass  $D$   $\mathcal{O}(n)$  viele bags hat.

<sup>16</sup> $k = \text{tw}(G)$  muss nicht gelten!

- 1) Initialisierung:  $2^{k+1}$  Teilmengen pro bag, jede in amortisiert<sup>17</sup>  $\mathcal{O}(k)$  testbar ob sie ein VC ist.  $\leq n$  bags (da einfache Zerlegung).  $\implies \mathcal{O}(2^k \cdot k \cdot n)$
- 2) Mergen von  $X$  in Vorgänger  $Y$ : Sortiere  $w_x$ -Tabelle bzgl. Ordnung auf  $Z = X \cap Y$  in  $\mathcal{O}(2^k \cdot \log 2^k)$ . Finde Minimum für alle  $C_Z$  in  $\mathcal{O}(2^k)$  (da Tabelle sortiert). Für jedes  $C_Y \subseteq Y$  finde passendes  $C_Z$  in  $w_x$ -Tabelle in  $\mathcal{O}(\log 2^k)$  dank binärer Suche.  $\leq n$  merges.  $\implies \mathcal{O}(2^k \cdot k \cdot n)$

**Korollar** Das VCP ist fpt bzgl.  $\text{tw}(G)$ .

**[Ausblick] Theorem** Sei  $(G, k)$  eine VCP-Instanz, so dass  $G = (V, E)$  planar ist und  $|V| = n$ . Dann kann das VCP auf  $G$  in subexponentieller Zeit  $2^{\mathcal{O}(\sqrt{k})} \cdot n$  gelöst werden.

Beweisidee: Berechne einen VC-Kern der Grösse  $\mathcal{O}(k)$  (insbesondere bleibt der Graph planar). Ein planarer Graph kann mit Separatoren der Grösse  $\mathcal{O}(\sqrt{k})$  in Teile der Grösse  $\mathcal{O}(\sqrt{k})$  zerlegt werden. Dann gilt  $\text{tw}(G) \in \mathcal{O}(\sqrt{k})$  und wir können eine Baumzerlegung mit Weite  $\mathcal{O}(\sqrt{k})$  finden. Wende dann den  $\text{tw}(G)$ -parametrisierten Algorithmus an.

### 3.6 Grenzen der Parametrisierbarkeit

**Ziel** Zeige, dass es Probleme gibt, die keine fpt-Algorithmen erlauben (unter komplexitätstheoretischen Annahmen).

**Definition** Das parametrisierte Problem  $(U_1, \text{par}_1)$  lässt sich auf  $(U_2, \text{par}_2)$  reduzieren mit *parametrisierter Standardreduktion*, falls es einen Algorithmus gibt, der in fpt-Zeit Instanzen  $(I_1, k)$  in  $(I_2, k')$  umwandelt, JA-Instanzen erhält, und  $k'$  nur von  $k$  abhängt (nicht von  $|I_1|$ ).

**Theorem** Falls  $(U_2, \text{par}_2)$  fpt ist und eine parametrisierte Reduktion von  $(U_1, \text{par}_1)$  auf  $(U_2, \text{par}_2)$  existiert, dann ist auch  $(U_1, \text{par}_1)$  fpt.

#### Definitionen

- Das *gewichtete (weighted) 2-SAT Problem (W2SAT)* ist ein parametrisiertes Problem:  
Eingabe: 2-KNF Formel  $F$ ,  $k \in \mathbb{N}$   
Ausgabe: JA, falls es eine erfüllende Belegung für  $F$  mit Gewicht<sup>18</sup> genau  $k$  gibt.  
Parametrisierung: Gewicht  $k$
- Die Klasse  $W[1]$  enthält alle parametrisierten Probleme, die sich auf W2SAT parametrisiert reduzieren lassen (c.f. Klasse NP).<sup>19</sup>
- Problem  $U$  ist *W[1]-schwer*, falls sich W2SAT auf  $U$  reduzieren lässt.
- Problem  $U$  ist *W[1]-vollständig*, falls es in  $W[1]$  liegt und  $W[1]$ -schwer ist.
- Die Klasse *FPT* enthält alle parametrisierten Probleme, für die ein fpt-Algorithmus existiert (c.f. Klasse P).

<sup>17</sup>Naiv  $\mathcal{O}(k^2)$  da wir alle Kanten in  $G[X]$  auf coverage testen müssen. Besser: iteriere über Teilmengen via Gray-Code, so dass sich immer nur ein Knoten ändert, d.h. wir nur  $\leq k$  Kanten testen müssen.

<sup>18</sup>Gewicht := Anzahl auf 1 gesetzter Variablen

<sup>19</sup>Der Name  $W[1]$  ist historisch bedingt, die Klasse ist ursprünglich auch nicht via W2SAT definiert.

**Theorem** Falls  $W[1] = FPT$ , dann kann 3-SAT auf Eingabe  $F$  mit  $n$  Variablen in Zeit  $2^{o(n)} \cdot |F|^{\mathcal{O}(1)}$  gelöst werden.

—→ Schwierigkeit von  $W[1]$  steht in direkter Verbindung mit der subexponentieller Lösbarkeit von 3-SAT. Allerdings: die Bedingung dass ein solcher Algorithmus nicht existiert (*Exponential-Zeit-Hypothese ETH*) ist stärker als  $P \neq NP$  (bzw.  $3\text{-SAT} \notin P$ ). D.h.  $W[1]$ -Vollständigkeit ist schwächer als NP-Vollständigkeit.

**Theorem** Das Independent-Set-Problem ist bzgl. Standardparameter  $W[1]$ -vollständig.



## 4 Exakte Exponentialzeit Algorithmen

### Konzepte

- $\mathcal{O}^*$ -Notation
- Branching-Algorithmen: 3-SAT, Max-IS
- Dynamische Programmierung: TSP/Held-Karp, Graph Coloring
- Measure-and-Conquer

**Motivation** Entwerfe Algorithmen die zwar exponentiell, aber dennoch schneller als vollständige Suche sind. Insbesondere in Zeit  $c^n$  für  $c < 2$  (z.B.  $2^{\sqrt{n}} \approx 1.41^n$ ) anstelle von  $2^n$ .

**$\mathcal{O}^*$ -Notation** Idee: so wie wir in  $\mathcal{O}$ -Notation konstanten Faktoren weglassen, lassen wir in  $\mathcal{O}^*$ -Notation polynomielle Vorfaktoren weg (da der exponentielle Faktor dominiert).

Seien  $f, g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^+$ . Dann gilt  $f(n) \in \mathcal{O}^*(g(n))$ , falls ein Polynom  $p : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^+$  existiert, so dass  $f(n) \in \mathcal{O}(p(n) \cdot g(n))$ .

### 4.1 Branching-Algorithmen

**Idee** Instanz der Grösse  $n$  aufteilen in konstant viele kleinere Teilinstanzen der Grösse  $n - d$ , für eine Konstante  $d$ . Ähnlich divide-and-conquer.

#### 4.1.1 Beispiel: 3-SAT

Annahme: O.B.d.A. hat jede Klausel Literale von paarweise verschiedenen Variablen und alle Klauseln sind paarweise verschieden, dank polynomielltem preprocessing. Dann gilt  $|\Phi| \in \mathcal{O}(n^3)$ .

**Notation** Sei  $\Phi$  eine Formel in 3-KNF über Variablen  $X$ , sei  $x \in X$ ,  $\alpha \in \{0, 1\}$ .  $\Phi[x = \alpha]$  beschreibt die Formel in 3-KNF, die aus  $\Phi$  entsteht indem man den Wert  $x = \alpha$  einsetzt und vereinfacht.

**Trivialer Ansatz** Wähle eine Variable  $x$ , berechne  $\Phi[x = 0]$  und  $\Phi[x = 1]$ , merge ( $\Phi$  satisfiable  $\iff \Phi[x = 0]$  satisfiable  $\vee \Phi[x = 1]$  satisfiable). Zeit:  $T(n) = 2 \cdot T(n-1) + \mathcal{O}(n) \implies T(n) \in \mathcal{O}^*(2^n) \implies$  keine Verbesserung, probiert nur alle Belegungen aus.

#### Branch-3SAT / Monien-Speckenmeyer Algorithmus

1. Falls  $\Phi = \emptyset$  return JA
2. Wähle Klausel  $F \in \Phi$  von minimaler Länge
3. Falls  $F = \emptyset$  return NEIN
4. Falls  $F = (l)$ , rufe Branch-3SAT( $\Phi[l = 1]$ ) auf
5. Falls  $F = (l_1 \vee l_2)$ , rufe Branch-3SAT( $\Phi[l_1 = 1]$ ) und Branch-3SAT( $\Phi[l_1 = 0, l_2 = 1]$ ) auf
6. Falls  $F = (l_1 \vee l_2 \vee l_3)$ , rufe Branch-3SAT( $\Phi[l_1 = 1]$ ) und Branch-3SAT( $\Phi[l_1 = 0, l_2 = 1]$ ) und Branch-3SAT( $\Phi[l_1 = 0, l_2 = 0, l_3 = 1]$ ) auf

7. return JA falls einer der rekursiven Aufrufe JA returned, sonst NEIN

**Theorem** Branch-3SAT löst 3-SAT in Zeit  $\mathcal{O}^*(1.8393^n)$  für alle Formeln über  $n$  boolesche Variablen.

Laufzeit:

$$T(n) \leq T(n-1) + T(n-2) + T(n-3) + \mathcal{O}(n)$$

$$T(0) = T(1) = T(2) = \mathcal{O}(n)$$

Nehme  $T(n) = \alpha^n$  an, forme um nach  $\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ , finde reale Nullstelle mit  $\alpha \in [1, 2)$ .

#### 4.1.2 Beispiel: Max-IS

**Maximum Independent Set Problem Max-IS** <sup>20</sup>

Eingabe:  $G = (V, E)$

Lösungen:  $\mathcal{M}(G) = \{S \subseteq \mathcal{M} \mid \{u, v\} \notin E \text{ for all } u, v \in S, u \neq v\}$

Kosten:  $\text{cost}(S, G) = |S|$

Ziel: max

**Algorithmus: Branch-Max-IS**

1. if  $V = \emptyset$ : return  $\emptyset$
2. let  $v \leftarrow \min_{u \in V} \deg_G(u)$
3. let  $N[v] = \{u_1, \dots, u_k\}$  be the *closed* neighbourhood<sup>21</sup> of  $v$
4. return the largest set from the family  $\{\{u_i\} \cup \text{Branch-Max-IS}(G - N[u_i]) \mid i \in \{1, \dots, k\}\}$

**Theorem** Branch-Max-IS löst Max-IS in Zeit  $\mathcal{O}^*(3^{n/3}) \subseteq \mathcal{O}^*(1.4423^n)$ .

Korrektheit: Per Konstruktion (wegen Beobachtung dass  $\forall v \in V$  mindestens ein  $u \in N[v]$  in der optimalen, maximum Lösung enthalten sein muss).

Laufzeit: Ziel: beschränke Anzahl Knoten des Rekursionsbaumes. Es gilt:

$$T(G) \leq 1 + T(G - N[v]) + \sum_{i=2}^k T(G - N[u_i])$$

$$T(n) = \max_{\substack{G=(V,E) \\ |V|=n}} T(G)$$

<sup>20</sup>Recall: maximal == nicht erweiterbar. maximum == grösstes mögliches.

<sup>21</sup>Oft nehmen wir o.B.d.A. an dass  $u_1 := v$ .

Ausserdem gilt Monotonie  $T(n) \leq T(n+1)$  und  $T(0) = 1$ .

Sei  $\delta_{\min}(G)$  der minimale Grad in  $G$ . Es gilt:

$$\begin{aligned}
 T(G) &\leq 1 + T(n - \delta_G(v) - 1) + \sum_{i=2}^k T(n - \delta_G(u_i) - 1) \\
 &\stackrel{(1)}{\leq} 1 + T(n - \delta_{\min}(G) - 1) + \delta_{\min}(G) \cdot T(n - \delta_{\min}(G) - 1) \\
 &= 1 + (1 + \delta_{\min}(G)) \cdot T(n - (\delta_{\min}(G) + 1)) \\
 &\leq 1 + \max_{1 \leq s \leq n} s \cdot T(n - s) \\
 T(n) &\stackrel{(2)}{\leq} 1 + \max_{1 \leq s \leq n} s \cdot T(n - s)
 \end{aligned}$$

wobei (1) aus der Monotonie folgt. (2) können wir schreiben, da die rechte Seite nicht mehr von einem bestimmten Graphen  $G$  abhängt, sondern nur noch von der Grösse der Eingabe.

Auflösen dieser letzten Ungleichung siehe Buch Kapitel 5.2, Seite 109f.

## 4.2 Dynamische Programmierung

### Travelling Salesman Problem TSP

Eingabe: (O.B.d.A. vollständiger) Graph  $G = (V, E)$ , Kostenfunktion  $c : E \mapsto \mathbb{N}$

Ausgabe: Hamiltonkreis  $H$  in  $G$

Kosten:  $\text{cost}(H, G) = \sum_{e \in H} c(e)$

Ziel: min

Problem:  $\mathcal{O}(n!) = \mathcal{O}^*(2^{n \log n})$  viele mögliche Lösungen

**Dyn-Prog-TSP / Held-Karp Algorithmus** Für alle  $S \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$  und jeden Knoten  $x \in S$  berechne  $l(S, x)$  als die minimalen Kosten eines Pfades der in  $v_1$  startet, in  $x \in S$  endet und genau alle Knoten aus  $S$  je einmal besucht.

1. Initialisierung:  $l(\{v_i\}, v_i) \leftarrow c(\{v_1, v_i\})$  für alle  $i \in \{2, \dots, n\}$
2. Für alle  $j \in \{2, \dots, n-1\}$ , für alle  $S \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$  mit  $|S| = j$ , für alle  $x \in S$  berechne:

$$l(S, x) \leftarrow \min_{y \in (S - \{x\})} \{l(S - \{x\}, y) + c(\{y, x\})\}$$

3. Finde Lösung:

$$l_{\min} \leftarrow \min_{v_i \in \{v_2, \dots, v_n\}} \{l(\{v_2, \dots, v_n\}, v_i) + c(\{v_i, v_1\})\}$$

Return  $l_{\min}$ .

**Theorem** Held-Karp löst das TSP in Zeit  $\mathcal{O}^*(2^n)$ .

Beweis: Korrektheit trivial. Schritte 1 und 3 in  $\mathcal{O}(n)$ . Schritt 2:  $\mathcal{O}(2^n)$  viele Teilmengen  $S$ , für jede wählen wir  $x, y \implies \mathcal{O}(n^2 \cdot 2^n)$ .

**Graph Coloring Problem (Graphfärbung)** Sei  $G$  ein ungerichtet, ungewichteter Graph und  $k \in \mathbb{N}$ . Eine  $k$ -Färbung ( $k$ -coloring) von  $G$  ist eine Funktion  $c: V \mapsto \{1, \dots, k\}$  so dass

$$\{x, y\} \in E \implies c(x) \neq c(y)$$

Die Menge  $C_i := \{x \in V \mid c(x) = i\}$  heisst  $i$ -te *color class* von  $c$ . Die *chromatische Zahl* (*chromatic number*)  $\chi(G)$  von  $G$  ist das kleinste  $k$  so dass  $G$  eine  $k$ -Färbung besitzt.

Eingabe:  $G = (V, E)$

Ausgabe:  $\chi(G)$

Bruteforce:  $\mathcal{O}^*(n^n)$  da  $\chi(G) \leq n$

**Algorithmus: Dyn-Prog-Coloring** Beobachtungen: 1) Jeder Farbklass ist ein independent set in  $G$ . 2) Wenn  $C_i$  kein maximales IS ist, dann existiert ein  $x \in V - C_i$  dass zu  $i$  umgefärbt werden kann.

1. Initialisierung:  $\chi(\emptyset) \leftarrow 0$

2. Für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ , für alle  $X \subseteq V$  mit  $|X| = i$  berechne:

$$\chi(X) \leftarrow 1 + \min\{\chi(X - I) \mid I \text{ ist ein maximales IS in } G[X]\}$$

Return  $\chi(G) \leftarrow \chi(V)$

**Theorem** Dyn-Prog-Coloring löst das Graphfärbungsproblem in Zeit  $\mathcal{O}^*(2.4423^n)$ .

Beweis: Verwende Variante von Branch-Max-IS<sup>22</sup> um in  $\mathcal{O}^*(3^{i/3})$  alle maximalen IS der Grösse  $i$  zu finden. Insgesamt:

$$\mathcal{O}^* \left( \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \cdot 3^{i/3} \cdot 1^{(n-i)/3} \right) = \mathcal{O}^* \left( \left(1 + 3^{1/3}\right)^n \right) \in \mathcal{O}^*(2.4423^n)$$

unter Anwendung des Binomischen Satzes.

### 4.3 Measure-and-Conquer

**Idee** Ähnlich zu Branching-Algorithmen: Teile das Problem in Teilinstanzen auf. Bei der Analyse betrachte aber nicht eine Rekursionsgleichung in der Eingabegrösse, sondern analysiere eine andere Grösse. D.h. entwerfe keine neuen Algorithmen, sondern verbessere die Analyse.

**Definition** Es gibt zwei Arten von Regeln, die wir auf die Eingabe anwenden:

1. (*data*) *reduction rules*, welche eine Instanz zu einer äquivalenten, kleineren Instanz reduzieren.
2. *branching rules*, welche eine Instanz in mehrere kleinere Teilinstanzen aufteilen.

Eine branching rule reduziert eine Instanz der Grösse  $n$  in  $l$  viele Teilinstanzen der Grössen  $n - k_1, \dots, n - k_l$ .  $(k_1, \dots, k_l) \in \mathbb{Q}^+$  heisst *branching vector* der branching rule.

<sup>22</sup>Betrachtet geschlossene Nachbarschaft aller Knoten, nicht nur die von minimalem Grad, und gibt alle maximalen IS zurück (nicht nur das grösste).

**Lemma (branching factor)** Sei  $\mathcal{A}$  ein Algorithmus mit einer branching rule mit branching vector  $(k_1, \dots, k_l)$ . Nehme an, dass die Anwendung einer Regel (und das Testen ihrer Anwendbarkeit!) in Polynomzeit möglich ist. Beobachte ausserdem, dass Datenreduktionsregeln nur polynomiell oft angewendet werden können.

Dann ist die Laufzeit von  $\mathcal{A}$  auf eine Eingabe der Grösse  $n$  in Zeit  $\mathcal{O}^*(\alpha^n)$ ; dabei ist  $\alpha$  die eindeutige positive Nullstelle des Polynoms

$$x^n - x^{n-k_1} - x^{n-k_2} - \dots - x^{n-k_l}$$

$\alpha$  heisst *branching factor* der branching rule, auch notiert als  $\alpha(k_1, \dots, k_l)$ .

Falls  $\mathcal{A}$  mehrere branching rules verwendet, schätze jede Regel einzeln ab und nehme den worst case als obere Schranke.

### Beobachtung

- (a)  $\alpha(k_1, \dots, k_l) = \alpha(k_{i_1}, \dots, k_{i_l})$  für jede Permutation  $(i_1, \dots, i_l)$  von  $(1, \dots, l)$ .
- (b)  $\alpha(k_1, k_2, \dots, k_l) > \alpha(k'_1, k_2, \dots, k_l)$  für jedes  $k'_1 > k_1$
- (c)  $\alpha(k_1, k_2) > \alpha(k_1 + s, k_2 - s)$

Intuitiv: Der branching factor wird kleiner wenn ein Element des branching vectors grösser wird, oder wenn der Vektor “balancierter” wird. Ein kleinerer branching factor ist besser.

**Algorithmus: Max-Degree-Branch-Max-IS** Ähnlich Branch-Max-IS, aber branched auf Knoten von maximalen (anstatt minimalem) Grad.

1. If  $\exists v \in V : \deg_G(v) \leq 1$ : return  $1 + \text{MAX-DEGREE-BRANCH-MAX-IS}(G - N[v])$
2. If  $\exists v \in V : \deg_G(v) \geq 3$ : let  $v$  be a vertex of maximum degree. return  $\max\{1 + \text{MAX-DEGREE-BRANCH-MAX-IS}(G - N[v]), \text{MAX-DEGREE-BRANCH-MAX-IS}(G - v)\}$
3. If  $\exists v \in V : \deg_G(v) = 2$ : compute a max IS in polynomial time on the remaining trees+cycles

**Theorem** Max-Degree-Branch-Max-IS löst Max-IS in Zeit  $\mathcal{O}^*(1.3803^n)$

Beweis: Korrektheit: offensichtlich (Schritt 1: sichere Datenreduktionsregel).

Laufzeit: der branching vector in Schritt 2 ist  $(1, 1 + \deg_G(v))$  bzw. im worst case  $(1, 4)$  (siehe Beobachtung).

$\implies$  branching factor  $\alpha(1, 4) < 1.3803$ .

**Measure-and-Conquer Analyse** Idee: Die branching-rule-Analyse betrachtet alle Knoten, aber ignoriert dass Knoten mit kleinem Grad “nicht so schlimm” sind für die Laufzeit. Seien  $n_{\leq 1}, n_2, n_{\geq 3}$  die Anzahl Knoten von entsprechendem Grad. Definiere eine Gewichtsfunktion (arbiträr):

$$w(v) := \begin{cases} 0 & \text{if } \deg_G(v) \leq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{if } \deg_G(v) = 2 \\ 1 & \text{if } \deg_G(v) \geq 3 \end{cases}$$

Das Gesamtgewicht des Graphen ist dann:

$$w(G) = \sum_{v \in V} w(v) = n_{\leq 1} \cdot 0 + n_2 \cdot \frac{1}{2} + n_{\geq 3} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot n_2 + n_{\geq 3}$$

In den neuen Teilinstanzen betrachte nun die Gewichts-Verringerung (anstatt der Knotenanzahl-Verringerung). Sei  $G_{in} = G - N[v]$  und  $G_{out} = G - v$ . Seien  $w_{in}, w_{out}$  die Werte, um die sich die Gewichte verringern:

$$w(G_{in}) \leq w(G) - w_{in} \quad w(G_{out}) \leq w(G) - w_{out}$$

Der branching vector ist also  $(w_{in}, w_{out})$ .

Da in beiden Fällen mindestens  $v$  entfernt wird, wissen wir dass  $w_{in}, w_{out} \geq 1$ .

Jeder Knoten  $u \in N(v)$  mit  $\deg_G(u) = 2$  wird entweder entfernt ( $G_{in}$ ) oder verliert seinen Nachbarn  $v$  ( $G_{out}$ ). In beiden Fällen verringert sich das Gewicht um  $\frac{1}{2}$ , in der Summe also um 1.

Jeder Knoten  $u \in N(v)$  mit  $\deg_G(u) \geq 3$  wird in  $G_{in}$  entfernt, d.h. der Graph verliert Gewicht 1. Über  $G_{out}$  können wir in diesem Fall nichts sagen, das Gewicht von  $u$  bleibt schlimmstenfalls gleich.

Zusammengefasst: In beiden Fällen wird  $v$  entfernt (wobei  $w(v) = 1$  sonst würden wir nicht auf  $v$  branchen). Ausserdem wird via die Nachbarschaft  $N(v)$  über  $G_{in}, G_{out}$  hinweg  $d := \deg_G(v)$ -mal das Knotengewicht 1 entfernt. Also gilt in der Summe:

$$w_{in} + w_{out} \geq 2 + d$$

Aus der vorherigen Beobachtung folgt, dass im schlimmsten Fall  $w_{in}, w_{out}$  unbalanciert sind, also der branching vector  $(1, 1 + d)$  ist.

Fallunterscheidung:

$d = 3$  Der Graph hat nur Knoten von Grad 2 oder 3. Damit wissen wir, dass sich sowohl in  $G_{in}$  als auch in  $G_{out}$  das Gewicht aller Nachbarn von  $v$  um mindestens  $\frac{1}{2}$  verringert:

$$w_{in}, w_{out} \geq 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 2.5$$

$$\implies \alpha(2.5, 2.5) < 1.3196.$$

$$d \geq 4 \implies \alpha(1, 5) < 1.3248.$$

Wegen der Beobachtung wissen wir, dass  $\alpha(1, 4) > \alpha(1, 5)$ . Diese Fallunterscheidung erlaubt es uns den Fall  $d = 3$  besser abzuschätzen als mit  $\alpha(1, 4)$ . Da für grössere  $d$  der branching factor  $\alpha$  nur kleiner wird, können wir folgern:

**Theorem** Max-Degree-Branch-Max-IS löst Max-IS in Zeit  $\mathcal{O}^*(1.3248^n)$ .

## 5 Approximations-Algorithmen

### Konzepte

- Relativer Fehler, Approximationsgüte
- Beispiele: 2-Approximation Min-VCP, Spannbaum-TSP, Christofides (metrisches TSP)
- Nichtapproximierbarkeit

**Motivation** Schwere Optimierungsprobleme: Statt Abstriche bei der Laufzeit zu machen (Parametrisierung, exponentiell aber mit kleiner Basis), machen wir Abstriche bei der Optimalität. Ein Approximationsalgorithmus berechnet eine zulässige Lösung (feasible solution), dessen Qualität nicht weit von der Qualität einer optimalen Lösung abweicht.

**Definitionen** Sei  $U = (L, \mathcal{M}, cost, goal)$  ein Optimierungsproblem und sei  $\mathcal{A}$  ein Algorithmus für  $U$ .

- Für alle  $I \in L$  ist der *relative Fehler von  $\mathcal{A}$  auf  $I$*

$$\varepsilon_{\mathcal{A}}(I) := \frac{|cost(\mathcal{A}(I)) - Opt_U(I)|}{\min\{Opt_U(I), cost(\mathcal{A}(I))\}}$$

- Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist der *relative Fehler von  $\mathcal{A}$*

$$\varepsilon_{\mathcal{A}}(n) := \max_{I \in L} \{\varepsilon_{\mathcal{A}}(I) \mid |I| = n\}$$

- Für alle  $I \in L$  ist die *Approximationsgüte (approximation ratio) von  $\mathcal{A}$  auf  $I$*

$$R_{\mathcal{A}}(I) := \max \left\{ \frac{cost(\mathcal{A}(I))}{Opt_U(I)}, \frac{Opt_U(I)}{cost(\mathcal{A}(I))} \right\}$$

- Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist die *Approximationsgüte (approximation ratio) von  $\mathcal{A}$*

$$R_{\mathcal{A}}(n) := \max_{I \in L} \{R_{\mathcal{A}}(I) \mid |I| = n\}$$

- Für alle positiven reellen  $\delta > 1$  heisst  $\mathcal{A}$   $\delta$ -Approximationsalgorithmus für  $U$  falls gilt

$$\forall I \in L . R_{\mathcal{A}}(I) \leq \delta$$

- Für jede Funktion  $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^+$  heisst  $\mathcal{A}$   $f(n)$ -Approximationsalgorithmus für  $U$  falls gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} . R_{\mathcal{A}}(I) \leq f(n)$$

Wobei die Definitionen sowohl  $goal = \min$  als auch  $goal = \max$  sinnvoll beschreiben.

**Beispiel: 2-Approximationsalgorithmus für Min-VCP** Idee: berechne ein maximales Matching  $M$  und ein approximiertes vertex cover  $C$ .

1. Initialisierung: Sei  $C \leftarrow \emptyset, M \leftarrow \emptyset, E' \leftarrow E$ .
2. while  $E' \neq \emptyset$  do:  
Wähle eine beliebige Kante  $\{u, v\} \in E'$ .  
Update:  $C \leftarrow C \cup \{u, v\}, M \leftarrow M \cup \{\{u, v\}\}, E' \leftarrow E' - \{\text{all edges incident to } u \text{ or } v\}$

**Theorem** Obiger Algorithmus ist ein 2-Approximationsalgorithmus für das Min-VCP.

Beweis: Korrektheit: nur Kanten die mindestens einen Nachbarn in  $C$  haben werden entfernt, daher ist  $C$  ein vertex cover.

Laufzeit: Linearzeit,  $\mathcal{O}(|E|)$ .

2-Approximation:  $|C| = 2 \cdot |M|$ . Um  $|M|$  viele Kanten in  $M$  (und damit auch in  $G$ , da  $M \subseteq E$ ) zu überdecken, werden  $\geq |M|$  viele Knoten benötigt.

$\implies \text{Opt}_{\text{Min-VCP}}(G) \geq |M| \iff |C| \leq 2 \cdot \text{Opt}_{\text{Min-VCP}}(G)$ .

**Beispiel: Metrisches-TSP ( $\Delta$ -TSP)** Eingabe: vollständiger, gewichteter Graphen  $G = (V, E)$  und Kostenfunktion  $c : E \mapsto \mathbb{N}^+$ . Metrisch == Dreiecksungleichung gilt:

$$\forall u, v, w \in V : c(\{u, v\}) \leq c(\{u, w\}) + c(\{w, v\})$$

**Spannbaum-Algorithmus für  $\Delta$ -TSP** Idee: minimum Hamiltonkreise zu berechnen ist schwer, aber minimale Spann bäume sind einfach (Polynomzeit).

1. Berechne einen MST  $T$  von  $G$
2. Wähle einen beliebigen  $v \in V$ . Berechne eine DFS in  $T$  ausgehend von  $v$  und ordne dabei die Knoten in Besuchsreihenfolge  $\overline{H}$ .
3. return Hamiltonkreis  $H = \overline{H}, v$

**Theorem** Der Spannbaum-Algorithmus ist ein 2-Approximationsalgorithmus für das  $\Delta$ -TSP.

Beweis: Korrektheit: offensichtlich.

Laufzeit: polynomiell, z.B.  $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$  mit Kruskal-MST.

2-Approximation: Sei  $H_{\text{Opt}}$  ein optimaler Hamiltonkreis, d.h.  $\text{cost}(H_{\text{Opt}}) = \text{Opt}_{\Delta\text{-TSP}}(I)$ . Dann gilt:

$$\text{cost}(T) = \sum_{e \in E(T)} c(e) \leq \text{cost}(H_{\text{Opt}})$$

da  $H_{\text{Opt}}$  durch Entfernen einer Kante zu einem Spannbaum wird und  $T$  ein minimaler Spannbaum ist.

Sei  $W$  die Eulertour die  $\mathcal{A}$  auf dem Multigraphen  $T_2$  läuft (wobei  $T_2$  aus  $T$  durch Verdoppeln aller Kanten gebildet wird). Die Kosten von ausgegebenen  $H$  ist eine E

$$\text{cost}(W) = 2 \cdot \text{cost}(T) \leq 2 \cdot \text{cost}(H_{\text{Opt}})$$

Wenn in  $H$  noch doppelt vorkommende Knoten abgekürzt werden, gilt dank der Dreiecksungleichung:

$$\text{cost}(H) \leq \text{cost}(W)$$

Insgesamt gilt also  $\text{cost}(H) \leq 2 \cdot \text{cost}(H_{\text{Opt}})$ , also ist  $\mathcal{A}$  eine 2-Approximation.

**Lemma** In jedem Graphen  $T$  ist die Anzahl Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Beweis: Summe  $t$  aller Grade ist  $2 \cdot |E|$  (gerade), Summe  $e$  aller geraden Grade ist gerade, also ist die Differenz  $o = t - e$  auch gerade. Da alle Summanden in der Summe  $o$  aller ungeraden Grade ungerade sind muss die Anzahl Summanden (und damit die Anzahl Knoten mit ungeradem Grad) gerade sein.



**Christofides-Algorithmus für  $\Delta$ -TSP** Idee: für eine Eulertour braucht jeder Knoten geraden Grad. Berechne ein perfektes Matching auf den Knoten mit ungeradem Grad und vereinige es mit dem MST.

1. Berechne eine MST  $T$  von  $G$
2. Sei  $S \leftarrow \{v \in V \mid \deg_T(v) \text{ ungerade}\}$
3. Berechne ein perfektes Matching  $M$  auf  $S$  in  $G$  mit minimalen Kosten
4. Berechne eine Eulertour  $\omega$  auf dem Multigraphen  $G' = (V, E(T) \cup M)$
5. Verkürze  $\omega$  zu einem Hamiltonkreis  $H$  in  $G$  und gebe  $H$  aus

**Theorem** Der Christofides-Algorithmus ist ein 1.5-Approximationsalgorithmus für das  $\Delta$ -TSP.

Beweis: Korrektheit: offensichtlich.

Laufzeit: nicht-trivial (insbesondere perfektes Matching), aber in Polynomzeit  $\mathcal{O}(n^4)$ .

1.5 Approximation: Es gilt ( $\star$  wegen der Dreiecksungleichung):

$$\text{cost}(H) \stackrel{\star}{\leq} \text{cost}(\omega) = \text{cost}(G') = \sum_{e \in E(T) \cup M} c(e) = \text{cost}(T) + \text{cost}(M)$$

Und wie beim Spannbaum-Algorithmus gilt  $\text{cost}(T) \leq \text{cost}(H_{\text{Opt}})$ .

Zeige nun dass  $\text{cost}(M) \leq \frac{1}{2} \cdot \text{cost}(H_{\text{Opt}})$  gilt:

Sei  $S = \{v_1, \dots, v_{2m}\}$  die Menge von Knoten mit ungeradem Grad in  $T$ , o.B.d.A. so dass sie in dieser Reihenfolge in  $H_{\text{Opt}}$  vorkommen:

$$H_{\text{Opt}} = v_1, \alpha_1, v_2, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m-1}, v_{2m}, \alpha_{2m}, v_1$$

wobei  $\alpha_i$  die (womöglich leeren) Pfade zwischen den  $v_i$  in  $H_{\text{Opt}}$  sind.

Betrachte die disjunkten Matching  $M_1, M_2$ :

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \dots, \{v_{2m-1}, v_{2m}\}\} \\ M_2 &:= \{\{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \dots, \{v_{2m-2}, v_{2m-1}\}, \{v_{2m}, v_1\}\} \end{aligned}$$

Dann gilt ( $\star$  wegen der Dreiecksungleichung und den übersprungenen  $\alpha_i$ ):

$$\text{cost}(M_1) + \text{cost}(M_2) = \sum_{i=1}^{2m} \text{cost}(v_i, v_{(i+1) \bmod 2m}) \stackrel{\star}{\leq} \text{cost}(H_{\text{Opt}})$$

Ausserdem gilt  $\text{cost}(M) \leq \text{cost}(M_1), \text{cost}(M_2)$  da  $M_1, M_2$  ebenfalls perfekte Matchings in  $S$  sind (aber  $M$  ein min-cost perfektes Matching ist). Es folgt:

$$\text{cost}(M) \leq \min\{\text{cost}(M_1), \text{cost}(M_2)\} \stackrel{\star}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \text{cost}(H_{\text{Opt}})$$

wobei  $\star$  gilt weil nicht beide grösser als  $\frac{1}{2} \cdot \text{cost}(H_{\text{Opt}})$  sein können.

## 5.1 Nichtapproximierbarkeit

**Theorem** Es existiert kein (polynomieller)  $2^n$ -Approximationsalgorithmus für das allgemeine TSP, es sei denn  $P=NP$ .

Beweis: Reduktion von einem NP-schweren (Entscheidungs-)Problem (z.B. Hamiltonkreisproblem) auf das Problem eine approximierte TSP-Lösung zu finden.

Reduktionsidee: Füge fehlende Kanten hinzu, so dass  $G'$  vollständig ist. Definiere Kantengewichte:

$$c(e) = \begin{cases} 1 & \text{if } e \in E \\ n \cdot 2^n + 1 & \text{if } e \notin E \end{cases}$$

Sei  $\mathcal{A}$  ein Approximationsalgorithmus der auf Eingabe  $(G', c)$  eine  $2^n$ -Approximation berechnet.  
Fallunterscheidung:

1.  $\exists$  Hamiltonkreis in  $G \implies \exists$  Hamiltonkreis in  $G'$  mit Kosten  $n$
2.  $\nexists$  Hamiltonkreis in  $G \implies \forall$  Hamiltonkreise in  $G'$  haben Kosten  $\geq (n-1) + (n \cdot 2^n + 1) > 2^n \cdot n$

Ist die Ausgabe von  $\mathcal{A}$  nun  $> 2^n \cdot n$  dann weiss man, dass kein Hamiltonkreis der Kosten  $n$  in  $G$  existiert, da  $\mathcal{A}$  ein  $2^n$ -Approximationsalgorithmus ist. Also kann  $\mathcal{A}$  genutzt werden um das Hamiltonkreisproblem zu lösen, was ein Widerspruch zu  $P \neq NP$  ist.