Programación Matemática. Relación 5 Curso 2016/17.

Problema 1

Se considera el problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.a.} & x \in X \end{array} \qquad (P)$$

donde

$$X = \left\{ \begin{array}{llcl} -x_1 & +3x_2 & \leq & 3 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 8 \\ x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array} \right\}.$$

1. Representa gráficamente el conjunto poliédrico X y determina sus puntos extremos.
2. Determina el conjunto de vectores de coeficientes de la función objetivo, c, tales que el problema (P) tiene solución única en $(x_1, x_2) = (3, 2)$.
3. Indica si el vector $(c_1, c_2) = (1, 1)$ es uno de los vectores en las condiciones del apartado anterior. En caso afirmativo escribe la tabla del símplex óptima, (T).
4. Calcula los precios sombra correspondientes a la tabla (T). Formula el problema dual de (P) y comprueba que el vector de precios sombra es su solución óptima.
5. Supongamos que ahora la segunda restricción de X es $2x_1 + x_2 \leq 8 - \Delta$. Determina Δ_0, el máximo valor de Δ para el que la base B óptima en (T), sigue siendo óptima. Justifica el valor obtenido usando la representación gráfica.
6. Determina la solución óptima para $\Delta = \frac{15}{2}$.

Problema 2

Se considera el problema de optimización P,

$$\begin{array}{llllllcl} \max & x_1 & +3x_2 & & & +5x_5 & & \\ \text{s.a.} & x_1 & & -\frac{1}{4}x_3 & +\frac{7}{4}x_4 & +x_5 & = & \frac{7}{2} \\ & & x_2 & +\vartheta x_3 & +\frac{1}{4}x_4 & +3x_5 & = & \frac{3}{2} \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0, & \end{array}$$

donde ϑ es un número real. Sea la tabla T,

$$\begin{array}{c|ccccc|c} \hline x_1 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} & 1 & \frac{7}{2} \\ x_2 & 0 & 1 & \vartheta & \frac{1}{4} & 3 & \frac{3}{2} \\ \hline \end{array}$$

Determina los valores de ϑ para los que el problema P tiene a la tabla T como tabla óptima; tiene solución ilimitada; tiene más de una solución básica factible óptima o es infactible.

Problema 3

Se considera el problema de optimización P,

$$\begin{array}{llllllc} \max & x_1 & +\vartheta x_2 & -5x_3 & & & \\ \text{s.a.} & x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & \leq & 2 \\ & & x_2 & +x_3 & +x_4 & \geq & 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & & \geq 0, & \end{array}$$

donde ϑ es un escalar fijo.

1. Resuelve P para $\vartheta = 1$.
2. Determina los valores de ϑ para los que el problema P ...
   (a) tiene una única solución óptima
   (b) tiene solución ilimitada
   (c) tiene más de una solución óptima
   (d) es infactible

Problema 4

Consideremos el problema:

$$\begin{array}{lll} \max & 2x_1 + x_2 + x_3 & \\ \text{s.a:} & x_1 + 0x_2 + x_3 & \leq 1 \\ & 0x_1 + x_2 + x_3 & \leq 2 \\ & x_1 + x_2 + 0x_3 & \leq 3 \\ & x_i \geq 0 & i = 1,2,3 \end{array}$$

1. Prueba que la solución básica x_1, x_2, x_3 es óptima y halla el valor de la variables en el óptimo.
2. Escribe explícitamente el problema dual y halla su solución óptima.
3. ¿Cual será la solución óptima si el valor del lado derecho de la tercera restricción se aumenta a $b_3 = 3.5$?
4. Halla la solución óptima si se añade al problema original la restricción $x_1+x_2+x_3 \leq 2.5$

Problema 5

Considérese el problema de Programación Lineal y su tabla óptima:

$$(P): \begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8 \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & x_i \geq 0,\ \forall\, i \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	2	1	1	0	8
x_5	0	3	3	1	1	12
	0	-3	-3	-2	0	

1. Escribir el dual de (P).
2. Hallar la nueva solución óptima si c_2 se cambia a 5. Hallar la solución si el coeficiente de x_3 en la segunda restricción se cambia a 1.
3. Hallar la nueva solución si se añade la nueva restricción $x_2 + x_3 \geq 2$. Igualmente si se añade una nueva variable x_6 con coeficiente en la función objetivo $c_6 = 4$ y vector de restricción $a_6^t = (1, 2)$.

Problema 6

Un móvil puede desplazarse en la dirección de los vectores $v_1 = (0, 1)$, $v_2 = (1, -1)$ y $v_3 = (-1, -1)$, tardando 1 segundo en alcanzar, respectivamente v_1, v_2 y v_3.

1. Formula como un problema de Programación Lineal el problema de encontrar el tiempo mínimo $T(p_1, p_2)$ necesario para desplazarse desde el origen a un punto (p_1, p_2) del plano.
2. Formula el dual del problema anterior.
3. Describe la función $\vartheta \mapsto T(\vartheta, 1)$.

Solución del problema 1

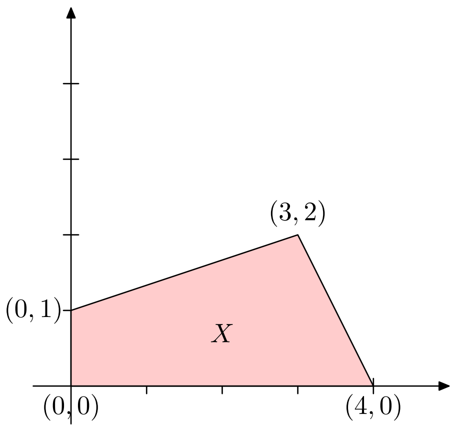

Figure 1: Conjunto factible X

1.

2. El conjunto C^* de vectores de coeficientes pedido es

$$C^* = \left\{ \begin{array}{llll} -c_1 & +2c_2 & > & 0 \\ 3c_1 & +c_2 & > & 0 \\ 3c_1 & +2c_2 & > & 0 \end{array} \right\}.$$

3.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & LD \\ \hline x_1 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 3 \\ x_2 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 2 \\ \hline -z & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & -5 \\ \hline \end{array} \qquad (T)$$

4. El vector u^* de precios sombra asociado a B es

$$c_B B^{-1} = -\frac{1}{7}[1,1] \left[\begin{array}{cc} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{array} \right] = [\frac{1}{7}, \frac{4}{7}]$$

Por otro lado, el problema (D) dual de (P) tiene la siguiente formulación

$$\begin{array}{lllll} \min & 3u_1 & +8u_2 & & \\ \text{s.a.} & -u_1 & +2u_2 & \geq & 1 \\ & 3u_1 & +u_2 & \geq & 1 \\ & u_1, & & \geq & 0 \\ & & u_2 & \geq & 0 \end{array} \qquad (D)$$

5. Al modificar el vector b de términos independientes, la columna del lado derecho de la tabla (T) se modifica del modo siguiente

$$B^{-1}\hat{b} = -\frac{1}{7} \left[\begin{array}{cc} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 3 \\ 8-\Delta \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 3 - \frac{3\Delta}{7} \\ 2 - \frac{\Delta}{7} \end{array} \right] \geq 0.$$

Por tanto $\Delta \leq 7$ y $\Delta \leq 14$, es decir, $\Delta_0 = 7$. Si representamos el conjunto $\hat{X}$ dado por

$$\hat{X} = \left\{ \begin{array}{llll} -x_1 & +3x_2 & \leq & 3 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 8 - \Delta_0 = 1 \\ x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array} \right\}.$$

queda

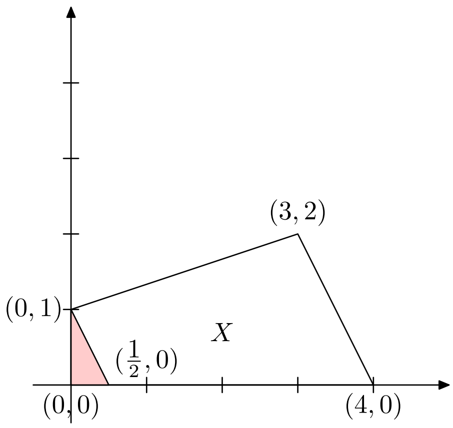

Figure 2: Conjunto factible ($\hat{X}$)

6.

	1	1	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
x_1	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{3}{14}$
x_2	0	1	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{13}{14}$
$-z$	0	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{10}{14}$

Haciendo un pivotaje dual...

	1	1	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
x_3	-7	0	1	-3	$\frac{3}{2}$
x_2	2	1	0	1	$\frac{1}{2}$
$-z$	-1	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$

Solución del problema 3

$$
\begin{array}{rrrrrrcl}
max & x_1 & +x_2 & -5x_3 & & & & \\
sa: & x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & -x_5 & \leq & 2 \\
 & & +x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & \geq & 1 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & \geq & 0
\end{array}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
x_6	1	1	-1	1	-1	1	0	0	2
x_8	0	1	1	1	-1	0	-1	1	1
$-z$	0	1	1	1	-1	0	-1	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
x_6	1	0	-2	0	0	1	1	-1	1
x_2	0	1	1	1	-1	0	-1	1	1
$-z$	0	0	0	0	0	0	0	-1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
x_6	1	0	-2	0	0	1	1	1
x_2	0	1	1	1	-1	0	-1	1
$-z$	1	0	-6	-1	1	0	1	-1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
x_1	1	0	-2	0	0	1	1	1
x_2	0	1	1	1	-1	0	-1	1
$-z$	0	0	-4	-1	1	-1	0	-2