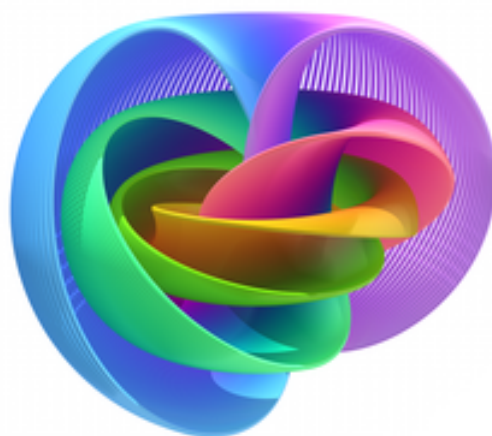


# Topología de Superficies

Antonio Rafael Quintero Toscano

Javier Aguilar Martín



Esta obra está licenciada bajo la Licencia Creative Commons Atribución 3.0 España. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/es/> o envíe una carta a Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

6 de septiembre de 2022

## Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
1.1. Espacios Topológicos . . . . .	4
1.1.1. Espacios métricos . . . . .	5
1.2. Numerabilidad . . . . .	6
1.3. Compacidad y separabilidad . . . . .	6
1.4. Conexión . . . . .	7
1.5. Espacio Cociente . . . . .	8
1.6. Suspensión de espacios . . . . .	13
1.7. Espacios Proyectivos . . . . .	15
1.8. Modelos Topológicos . . . . .	20
1.9. Acciones de Grupos . . . . .	21
 <b>2. Clasificación de Superficies I</b>	 <b>23</b>
2.1. Teorema de Clasificación de Superficies . . . . .	23
2.2. Suma Conexa . . . . .	27
2.2.1. Tipo I . . . . .	28
2.2.2. Tipo II . . . . .	29
2.3. Mezclando tipos . . . . .	29
2.4. Orientabilidad. Asas y gorros cruzados. . . . .	30
2.4.1. Orientabilidad en las superficies de tipo I y II . . . . .	30
2.4.2. Asas y gorros cruzados . . . . .	30
 <b>3. Teoría de Homotopía</b>	 <b>34</b>
3.1. Homotopía . . . . .	34
3.2. Caminos y equivalencia de caminos . . . . .	39
3.3. Grupo Fundamental . . . . .	43
 <b>4. Cálculo del Grupo Fundamental</b>	 <b>51</b>
4.1. Grupo fundamental de $S^1$ . . . . .	51
4.2. Aplicaciones . . . . .	57

<b>5. Teorema de Seifert-Van Kampen</b>	<b>61</b>
5.1. Presentación de grupos.	
Teorema de Seifert-Van Kampen . . . . .	61
5.1.1. Uso del teorema de Seifert-Van Kampen . . . . .	65
5.2. Separación del plano por curvas cerradas . . . . .	73
<b>6. Clasificación de Superficies.</b>	
<b>Conclusión</b>	<b>76</b>
6.1. El grupo fundamental de una superficie de tipo I . . . . .	76
6.2. El grupo fundamental de una superficie de tipo II . . . . .	77
6.3. Fin del teorema de clasificación de superficies.	
Triangulación . . . . .	78
6.4. Característica de Euler-Poincaré . . . . .	84
<b>Bibliografía</b>	<b>85</b>

# Tema 1

## Introducción

Los espacios que vamos a tratar están contenidos en algún espacio euclídeo, es decir  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  (espacio euclídeo n-dimensional). No obstante, recordaremos algunos conceptos generales del curso de Topología.

### 1.1. Espacios Topológicos

**Definición 1.1.1.** Una **topología** es una colección  $\mathcal{T}$  de subconjuntos de  $X$  verificando las siguientes propiedades:

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ .
2. Si  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}$  entonces  $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}$ .
3. Si  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset \mathcal{T}$  entonces  $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \mathcal{T}$ .

Al par  $(X, \mathcal{T})$  se le denomina **espacio topológico**. A los conjuntos de  $\mathcal{T}$  se les llama **abierto**s de  $(X, \mathcal{T})$  y a sus complementarios **cerrados** de  $(X, \mathcal{T})$ .

**Nota 1.1.2.** Por abuso de lenguaje a menudo se identificará  $(X, \mathcal{T})$  con  $X$ .

**Ejemplo 1.1.3.** Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, su topología asociada es

$$\mathcal{T}_d = \{A \subseteq X \mid \forall a \in A \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } B_d(a, \varepsilon) \subseteq A\} \cup \{\emptyset\}.$$

Algunos ejemplos de distancia son los siguientes:

- $d_e \equiv$  distancia euclídea,  $d_e((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ .
- $d_{max} \equiv$  distancia del máximo  $d_{max}((x, y), (x', y')) = \max\{|x - x'|, |y - y'|\}$ .
- $d_{taxi} \equiv$  distancia taxi  $d_{taxi}((x, y), (x', y')) = |x - x'| + |y - y'|$  (Taxicab Geometry).

**Definición 1.1.4.** Sean  $x \in B \subseteq X$ . Diremos que  $x$  es **punto interior** de  $B$  (o que  $B$  es **entorno** de  $x$ ) si  $\exists U \in \mathcal{T}$  tal que  $x \in U \subseteq B$ . Diremos que es **adherente** a  $B$  si para todo  $U \in \mathcal{T}$  con  $x \in U$ ,  $U \cap B \neq \emptyset$ .

**Proposición 1.1.5.** Un conjunto  $A$  es abierto si y solo si todos sus puntos son interiores. Un conjunto  $B$  es cerrado si y solo si coincide con el conjunto de sus puntos adherentes.

**Definición 1.1.6.** Dado un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$ , se llama **topología restricción o relativa** a  $A \subseteq X$  a la topología sobre  $A$

$$\mathcal{T}_A = \{G \cap A \mid \forall G \in \mathcal{T}\}.$$

A  $(A, \mathcal{T}_A)$  se le llama **subespacio topológico** de  $(X, \mathcal{T})$ . Nótese que si  $A$  es un conjunto abierto de  $X$  entonces  $\mathcal{T}_A$  está formada por los abiertos de  $\mathcal{T}$  que están contenidos en  $A$ .

**Definición 1.1.7.** Una aplicación  $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  entre dos espacios topológicos diremos que es **continua** si  $\forall x$  adherente a  $A$  en  $(X, \mathcal{T})$ ,  $f(x)$  es adherente a  $f(A)$  en  $(X', \mathcal{T}')$ .

**Proposición 1.1.8.** Una aplicación  $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  es continua si y solo si  $\forall U \in \mathcal{T}'$  se tiene que  $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ .

**Definición 1.1.9.** Diremos que  $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  es **homeomorfismo** (equivalencia topológica) si  $f$  es biyectiva, continua y con inversa continua.

**Definición 1.1.10.** Una aplicación que lleva conjuntos abiertos (respectivamente cerrados) en abiertos (cerrados) se denomina **abierto (cerrado)**.

**Proposición 1.1.11.** Una aplicación es biyectiva, continua y abierta (o cerrada) si y solo si es homeomorfismo.

**Proposición 1.1.12.** La convergencia se hereda por aplicaciones continuas, es decir, si  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  converge a  $x$  entonces  $\{f(x_n)\}_{n \geq 1}$  converge a  $f(x)$ .

**Definición 1.1.13.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico. Diremos que  $\{x_n\}$  **converge** a  $x$  si  $\forall U \in \mathcal{T}$  con  $x \in U$ ,  $\exists n_0$  tal que  $x_n \in U \forall n \geq n_0$ .

### 1.1.1. Espacios métricos

**Proposición 1.1.14** (Criterio  $\varepsilon - \delta$ ). Una aplicación  $f: (X, d) \rightarrow (X', d')$  entre espacios métricos es continua si  $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que  $d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon$ .

**Proposición 1.1.15** (Criterio de convergencia). La sucesión  $\{x_n\}$  converge en el espacio métrico  $(X, d)$  a  $x$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0$  tal que  $d(x, x_n) < \varepsilon \forall n \geq n_0$ .

## 1.2. Numerabilidad

**Definición 1.2.1.** Dado un espacio topológico  $X$  y un punto  $x \in X$ , denotemos por  $\mathcal{V}(x)$  al conjunto de entornos de  $x$ . Decimos entonces que un subconjunto  $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$  es una **base de entornos** si  $\forall V \in \mathcal{V}(x) \exists B \in \mathcal{B}(x)$  con  $B \subseteq V$ .

**Definición 1.2.2.** Sea  $X$  un espacio topológico. Decimos que la colección de abiertos  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  es una **base** si para todo  $U \subseteq X$  abierto existe una familia de índices  $J \subseteq \Lambda$  tal que podemos escribir  $U = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ .

**Definición 1.2.3.** Un espacio topológico  $X$  se dice **primero numerable** ( $1^\circ N$ ) si todo punto posee una base numerable de entornos. Se dice **segundo numerable** ( $2^\circ N$ ) si existe una base para la topología de  $X$  de cardinal numerable.

**Proposición 1.2.4.** Los homeomorfismos preservan los axiomas de numerabilidad. Estos axiomas son además hereditarios, es decir, si un espacio los cumple, también lo cumplen sus subespacios.

## 1.3. Compacidad y separabilidad

**Definición 1.3.1.** Sea un espacio  $X$  y  $A \subseteq X$ . Un **recubrimiento** por abiertos de  $A$  es una colección de abiertos  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  tal que  $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ .

**Definición 1.3.2.** Si para todo recubrimiento  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  de  $A$  existen  $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$  (subrecubrimiento finito) tal que  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$  decimos que  $A$  es **compacto**.

**Definición 1.3.3.** Un espacio  $X$  se dice que tiene la propiedad de **separación de Hausdorff** (o que es  $T_2$ ) si dados  $x, y \in X$  con  $x \neq y$  existen abiertos  $U, V$  con  $x \in U, y \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

**Proposición 1.3.4.** Todo subconjunto cerrado de un conjunto compacto es a su vez compacto. Otra forma de decirlo es: la compacidad es hereditaria en cerrados.

**Proposición 1.3.5.** En todo espacio  $X$  con propiedad de Hausdorff los conjuntos compactos son cerrados.

**Proposición 1.3.6.** Cualquier aplicación continua de un compacto a un Hausdorff es cerrada.

**Teorema 1.3.7** (Tychonoff). El producto de compactos es compacto.

**Teorema 1.3.8.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre espacios topológicos. Si  $K \subseteq X$  es compacto, entonces  $f(K)$  también es compacto.

**Demostración.** Sea  $\mathcal{U}$  un recubrimiento por abiertos de  $f(K)$  en  $Y$ . Como  $f$  es continua, se tiene que  $f^{-1}(U)$  es abierto para todo  $U \in \mathcal{U}$ . Por tanto, el conjunto  $\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$  es un recubrimiento por abiertos de  $K$ , puesto que si  $x \in K$ , entonces  $f(x)$  pertenece a algún abierto de  $\mathcal{U}$ . Como  $K$  es compacto, podemos hallar un subrecubrimiento finito  $\{f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_n)\}$ . Del hecho de que  $f(f^{-1}(U)) \subseteq U$  se sigue que  $\{U_1, \dots, U_n\}$  es un subrecubrimiento finito por abiertos de  $f(K)$ . ■

## 1.4. Conexión

**Definición 1.4.1.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico. Diremos que  $C \subseteq X$  es **conexo** si y solo si dados  $A, B \in \mathcal{T}$  cumpliendo  $A \cap B \cap C = \emptyset, C \subseteq A \cup B$  se tiene que o bien  $C \subseteq A$  o bien  $C \subseteq B$ .

**Proposición 1.4.2.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico. Son equivalentes:

- $X$  es conexo.
- $X$  no puede ser dividido en dos abiertos (cerrados) disjuntos no vacíos.
- Los únicos subconjuntos de  $X$  que son cerrados y abiertos simultáneamente son  $X$  y el vacío.

**Definición 1.4.3.**  $(X, \mathcal{T})$  será **conexo por caminos** si  $\forall x, y \in X \exists \alpha: ([0, 1], \mathcal{T}_e) \rightarrow (X, \mathcal{T})$  continua tal que  $\alpha(0) = x$  y  $\alpha(1) = y$ .

**Definición 1.4.4.** Un espacio  $X$  se dice **localmente conexo (por caminos)** si para todo  $x \in X$  y todo entorno  $N$  de  $x$  existe otro entorno de  $N' \subseteq N$  tal que  $N'$  es conexo (por caminos).

**Proposición 1.4.5.** Todo espacio conexo por caminos es conexo. Recíprocamente, todo espacio conexo y localmente conexo por caminos es conexo por caminos.

**Definición 1.4.6.** Dado un espacio  $X$ , se llama **componente conexa (por caminos)** de  $x$  al mayor subespacio conexo (por caminos) de  $X$  que contiene a  $x$ .

**Proposición 1.4.7.** Si  $X$  es localmente conexo por caminos entonces la componente conexa de  $x$  coincide con su componente conexa por caminos y es un conjunto abierto y cerrado de  $X$ .

**Definición 1.4.8.** Dado un subconjunto  $A \subseteq X$  conexo (por caminos) diremos que  $x \in A$  es un **punto de corte** si  $A \setminus \{x\}$  no es conexo (por caminos). El número de componentes conexas (por caminos) de  $A \setminus \{x\}$  se llama **orden de corte** de  $x$ .

## 1.5. Espacio Cociente

Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico y  $\mathcal{R}$  una relación de equivalencia. En el espacio cociente  $X/\mathcal{R}$  consideramos la siguiente topología: sea  $\pi: X \rightarrow X/\mathcal{R}$  la aplicación proyección  $\pi(x) = [x]$ . Se define la siguiente topología:

$$\mathcal{T}_\pi = \{G \subseteq X/\mathcal{R} \mid \pi^{-1}(G) \in \mathcal{T}\}$$

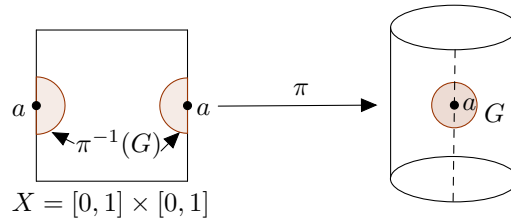
Esta topología se llama **topología cociente** para la relación  $\mathcal{R}$ . Al par  $(X/\mathcal{R}, \mathcal{T}_\pi)$  se le llama **espacio cociente** por la relación  $\mathcal{R}$ .

**Lema 1.5.1.**  $\mathcal{T}_\pi$  es topología de  $(X/\mathcal{R}, \mathcal{T}_\pi)$

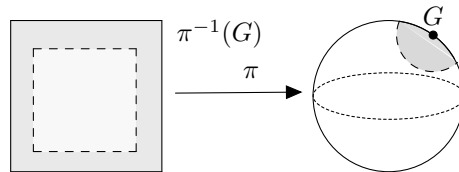
**Demostración.** Tenemos que verificar las tres propiedades de una topología.

1.  $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  que es abierto de  $X \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{T}_\pi$   
 $\pi^{-1}(X/\mathcal{R}) = X$  que es abierto de  $X \Rightarrow X/\mathcal{R} \in \mathcal{T}_\pi$ .
2. Sean  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}_\pi$  entonces  $\pi^{-1}(A_i)$  es abierto de  $X \forall i = 1 \dots n$ .  
 Como  $\pi^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \bigcap_{i=1}^n \pi^{-1}(A_i)$ , que es abierto de  $X$  por ser intersección finita de abiertos, entonces se tiene que  $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}_\pi$ .
3. Sea  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{T}_\pi$ . Se tiene que  $\pi^{-1}(A_i)$  es abierto de  $X \forall \alpha \in \Lambda$ .  
 Como  $\pi^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_i\right) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \pi^{-1}(A_i)$ , que es abierto de  $X$  se tiene que  $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_i \in \mathcal{T}_\pi$ . ■

**Ejemplo 1.5.2.**



Se identifican los lados verticales del cuadrado para obtener el cilindro.





El borde del cuadrado se identifica a un punto. El área sombreada es lo que corresponde a un casquete esférico.

**Definición 1.5.3.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico,  $Y$  un conjunto y  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación sobreyectiva entre conjuntos. Se llama **topología final** de  $f$  a  $\mathcal{T}_f = \{H; f^{-1}(H) \text{ es abierto de } X\}$ .

**Observación 1.5.4.** Con  $\mathcal{T}_f$ ,  $f$  se vuelve continua por definición. En particular, la topología cociente es la topología final de la proyección canónica  $\pi: X \rightarrow X/\mathcal{R}$ , luego es continua. De hecho, toda topología final puede verse como una topología cociente como se verá en la siguiente proposición.

**Proposición 1.5.5.** Dada una aplicación sobreyectiva  $f: X \rightarrow Y$  se define  $\mathcal{R}_f$  sobre  $X$  como  $x\mathcal{R}_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ . Se cumple entonces que  $(X/\mathcal{R}_f, \mathcal{T}_\pi)$  y  $(Y, \mathcal{T}_f)$  son homeomorfos.

**Demostración.**

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{T}_f) \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ (X/\mathcal{R}_f, \mathcal{T}_\pi) & \xleftarrow{\tilde{f}^{-1}} & \end{array}$$

Sea  $\tilde{f}([x]) = f(x)$ . Entonces  $\tilde{f}$  es biyectiva pues tiene por inversa a  $\tilde{f}^{-1}(y) = [z]$  con  $z$  tal que  $f(z) = y$ .

Veamos que  $\tilde{f}$  es continua:

Sea  $W$  abierto de  $(Y, \mathcal{T}_f)$ , entonces  $f^{-1}(W)$  es abierto de  $X$ . Tenemos que ver que  $\tilde{f}^{-1}(W)$  es abierto de  $\mathcal{T}_\pi$ , lo cual es cierto si y solo si  $\pi^{-1}(\tilde{f}^{-1}(W))$  es abierto de  $X$ . Como  $\tilde{f} \circ \pi = f$ ,  $\pi^{-1}(\tilde{f}^{-1}(W)) = f^{-1}(W)$ , que es abierto de  $X$ .

Resta ver que  $\tilde{f}$  es abierta:

Sea  $\Omega$  abierto de  $(X/\mathcal{R}_f, \mathcal{T}_\pi)$ , tenemos que ver que  $\tilde{f}(\Omega)$  es abierto de  $(Y, \mathcal{T}_f)$ . Esto es si y solo si  $f^{-1}(\tilde{f}(\Omega))$  es abierto de  $X$ . Basta comprobar que  $\pi^{-1}(\Omega) = f^{-1}(\tilde{f}(\Omega))$ , pues sabemos que  $\pi^{-1}(\Omega)$ . Lo haremos por doble inclusión.

$$\boxed{\subseteq} \text{ Sea } x \in \pi^{-1}(\Omega) \Rightarrow \pi(x) = [x] \in \Omega \Rightarrow \tilde{f}(\Omega) \ni \tilde{f}([x]) = f(x) \in \tilde{f}(\Omega) \Rightarrow x \in f^{-1}(\tilde{f}(\Omega)).$$

$$\boxed{\supseteq} \text{ Sea } x \in f^{-1}(\tilde{f}(\Omega)) \Rightarrow f(x) = \tilde{f}([x]) \in \tilde{f}(\Omega) \Rightarrow \tilde{f}^{-1}(f(x)) \in \Omega \Rightarrow [x] \in \Omega \Rightarrow x \in \pi^{-1}([x]) \subseteq \pi^{-1}(\Omega) \Rightarrow x \in \pi^{-1}(\Omega). \quad \blacksquare$$

**Definición 1.5.6.** A  $\mathcal{R}_f$  en la proposición 1.5.5 se le llama la **relación inducida por  $f$** . En general, una relación  $\sim$  sobre  $X$  se dice **compatible** con  $f$  si  $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$

**Proposición 1.5.7** (Propiedad universal). Sea  $\mathcal{R}$  una relación de equivalencia sobre el espacio topológico  $X$  y sea  $f: X \rightarrow Z$  una aplicación continua compatible con  $\mathcal{R}$ . Se define  $\tilde{f}: X/\mathcal{R} \rightarrow Z$  como  $\tilde{f}([x]) = f(x)$ , entonces  $\tilde{f}: (X/\mathcal{R}, \mathcal{T}_\pi) \rightarrow Z$  es continua.

**Demostración.**

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Z \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ (X/\mathcal{R}_f, \mathcal{T}_\pi) & & \end{array}$$

Sea  $W$  abierto de  $Z$ . Como  $f$  es continua,  $f^{-1}(W)$  es abierto de  $X$ . Además  $\tilde{f}^{-1}(W)$  es abierto de  $X/\mathcal{R} \Leftrightarrow \pi^{-1}(\tilde{f}^{-1}(W))$  es abierto de  $X$ . Como  $f = \tilde{f} \circ \pi$ ,  $\pi^{-1}(\tilde{f}^{-1}(W)) = f^{-1}(W)$ , que ya sabíamos que era abierto. ■

**Proposición 1.5.8.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  continua y sobreyectiva. Sea  $\mathcal{R}_f$  la relación inducida por  $f$ . Supongamos que  $Y$  tiene la propiedad de separación de Hausdorff y supongamos además que  $X$  es compacto. Entonces  $\tilde{f}: X/\mathcal{R}_f \rightarrow Y$  es homeomorfismo.

**Demostración.** Vamos a ver que  $\tilde{f}$  cumple las tres propiedades para ser homeomorfismo.

- a) Por la Proposición 1.5.7, dado que  $\mathcal{R}_f$  es compatible con  $f$ , deducimos que  $\tilde{f}$  es continua.
- b)  $\tilde{f}$  es sobreyectiva porque lo es  $f$ . Veamos que es inyectiva:

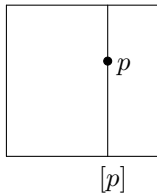
$$\tilde{f}([x]) = \tilde{f}([x']) \Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow x' \mathcal{R}_f x \Rightarrow [x] = [x'].$$

- c) Solo resta ver que  $\tilde{f}^{-1}$  es continua, para lo cual veremos que  $\tilde{f}$  es cerrada. Por las hipótesis sobre  $X$  e  $Y$  y la Proposición 1.3.6 deducimos que  $f$  es cerrada. Sea  $F$  un cerrado de  $X/\mathcal{R}_f \Rightarrow \pi^{-1}(F)$  es cerrado de  $X$ . Por ser  $f$  cerrada,  $f(\pi^{-1}(F))$  es cerrado, pero precisamente  $\tilde{f}(F) = f(\pi^{-1}(F))$ , luego  $\tilde{f}$  es cerrada y, por tanto, homeomorfismo. ■

**Nota 1.5.9.** Si la aplicación  $f$  es abierta o cerrada, no necesitamos las hipótesis de compacidad y Hausdorff.

**Corolario 1.5.10** (Versión para espacios métricos). Sea  $f: X \rightarrow Y$  continua y sobreyectiva entre espacios métricos compactos. Entonces  $\tilde{f}: X/\mathcal{R}_f \rightarrow Y$  es homeomorfismo.

**Ejemplo 1.5.11.**



Sea  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  y  
 $p \mathcal{R} q \Leftrightarrow$  están en la misma vertical.

Vamos a ver que el cociente es  $Y = [0, 1]$ . Basta tomar  $f: X \rightarrow Y \mid f(t, s) = t$  continua. Sean  $p = (t, s)$  y  $q = (t', s')$ . Solo tenemos que comprobar lo siguiente

$$p \mathcal{R}_f q \Leftrightarrow f(p) = f(q) \Leftrightarrow t = t' \Leftrightarrow p \mathcal{R} q$$

**Ejemplo 1.5.12** (Cilindro). Sea  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  y  $\mathcal{R}$  definida como  $p\mathcal{R}q \begin{cases} p = q \\ \text{ó} \\ p = (0, t), q = (1, t) \end{cases}$ .

Vamos a considerar el cilindro  $Y = S^1 \times [0, 1]$  y  $f: X \rightarrow Y \mid f(t, s) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), s)$ . Sean  $p = (t, s)$  y  $q = (t', s')$ . Se tiene por definición que  $p\mathcal{R}_f q \Leftrightarrow f(p) = f(q)$ , esto es,

$$f(p) = f(q) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2\pi t) = \cos(2\pi t') \\ \sin(2\pi t) = \sin(2\pi t') \\ s = s' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = s' \text{ y } t = t' \\ \text{ó} \\ s = s', t = 0, t' = 1 \text{ o } s = s', t = 1, t' = 0 \end{cases}$$

Por tanto  $\mathcal{R}$  es la relación inducida por  $f$ , luego, aplicando la proposición 1.5.5,  $X/\mathcal{R}$  y el cilindro son homeomorfos.

**Ejemplo 1.5.13** (Toro). La ecuación paramétrica de la superficie tórica  $T \subset \mathbb{R}^3$  generada al girar la circunferencia  $(x - 2)^2 + z^2 = 1$  alrededor del eje  $OZ$  es

$$\begin{aligned} x &= (2 + \cos \theta) \cos \varphi \\ y &= (2 + \cos \theta) \sin \varphi \\ z &= \sin \theta \\ 0 &\leq \theta, \varphi \leq 2\pi \end{aligned}$$

Sea  $X = [0, 1] \times [0, 1]$ , busquemos una relación  $\mathcal{R}$  tal que  $X/\mathcal{R} \cong T$ . Para ello definimos

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow T \\ f(t, s) &= ((2 + \cos(2\pi t)) \cos(2\pi s), (2 + \cos(2\pi t)) \sin(2\pi s), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

Se tiene que  $f$  es continua y que  $T$  es un compacto Hausdorff. Vamos a buscar una expresión explícita

de la relación  $\mathcal{R}_f$  (esta es la relación que buscamos)

$$f(s, t) = f(s', t') \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}(2\pi t) = \text{sen}(2\pi t') \\ (2 + \cos(2\pi t)) \cos(2\pi s) = (2 + \cos(2\pi t')) \cos(2\pi s') \\ (2 + \cos(2\pi t)) \text{sen}(2\pi s) = (2 + \cos(2\pi t')) \text{sen}(2\pi s') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t, s) = (t', s') \\ \text{ó} \\ s = 0, s' = 1, t = t' \\ \text{ó} \\ s = 1, s' = 0, t = t' \\ \text{ó} \\ s = s', t = 0, t' = 1 \\ \text{ó} \\ s = s', t = 1, t' = 0 \end{cases}$$

**Ejemplo 1.5.14** (Banda de Möbius). Consideremos la circunferencia dada por

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos \theta \\ y &= 2 \text{sen} \theta \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Vamos a considerar el segmento  $V_\theta$  centrado en el punto de esa circunferencia de ángulo  $\theta$  de longitud 2 girado un ángulo  $\frac{\theta}{2}$  respecto al eje  $OZ$ . Al a unión  $M = \bigcup_{0 \leq \theta \leq \pi} V_\theta$  se le llama **banda de Möbius**.

De esta forma, las ecuaciones paramétricas de nuestra banda de Möbius  $M$  son

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos \theta + \lambda \cos \theta \text{sen} \frac{\theta}{2} = \cos \theta (2 + \lambda \text{sen} \frac{\theta}{2}) \\ y &= 2 \text{sen} \theta + \lambda \text{sen} \theta \text{sen} \frac{\theta}{2} = \text{sen} \theta (2 + \lambda \text{sen} \frac{\theta}{2}) \\ z &= \lambda \cos \frac{\theta}{2} \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi, \quad |\lambda| \leq 1 \end{aligned}$$

Queremos encontrar  $\mathcal{R}_f$  sobre  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  tal que  $X/\mathcal{R}_f \cong M$ . Para ello definimos

$$f(t, s) = ((2 + (2s - 1)\text{sen}(\pi t)) \cos(2\pi t), (2 + (2s - 1)\text{sen}(\pi t)) \text{sen}(2\pi t), (2s - 1) \cos(\pi t)).$$

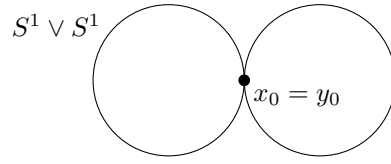
Se puede comprobar que

$$(t, s)\mathcal{R}_f(t', s') \Leftrightarrow \begin{cases} (t, s) = (t', s') \\ \text{ó} \\ t = 0, t' = 1, s = 1 - s' \\ \text{ó} \\ t = 1, t' = 0, s' = 1 - s \end{cases}$$

**Nota 1.5.15.** Los resultados obtenidos en los dos últimos ejemplos son los utilizados para construir los modelos topológicos que veremos más adelante.

**Definición 1.5.16.** Dados dos espacios topológicos disjuntos  $X$  e  $Y$ , sean  $x_0 \in X, y_0 \in Y$ . Consideremos sobre  $X \sqcup Y$  la relación de equivalencia según la cual  $x_0 \sim y_0$  y todos los demás puntos de  $X$  e  $Y$  solo están relacionados consigo mismos. Definimos entonces la **unión por un punto** como el cociente  $(X \sqcup Y)/\sim$  y la denotamos  $X \vee Y$ .

**Ejemplo 1.5.17.**



**Ejemplo 1.5.18.** Se define en  $\mathbb{R}$  la relación  $x \sim x' \Leftrightarrow x - x' = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Se cumple que  $\mathbb{R}/\sim \cong S^1$ . El modelo es una circunferencia de radio 1 centrada en el origen. Basta comprobar la compatibilidad de  $f(t) = (\sin t, \cos t)$ , que se deja como ejercicio.

**Definición 1.5.19.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y sea  $A \subseteq X$  un subespacio. Sea  $f: A \rightarrow Y$  una función continua. Se define el **espacio de adjunción**  $X \cup_f Y$  como el cociente  $X \sqcup Y/\sim$  bajo la relación generada por  $x \sim f(x) \forall x \in A$ . A este espacio también se le conoce con el nombre de espacio de pegamiento.

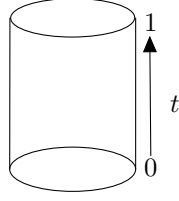
## 1.6. Suspensión de espacios

**Definición 1.6.1.** Se define la **topología producto** sobre  $X \times Y$  donde  $(X, \mathcal{T}_1), (Y, \mathcal{T}_2)$  son espacios topológicos como

$$\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2 = \{\emptyset\} \cup \{H \subseteq X \times Y : \forall (x, y) \in X \times Y \exists U \in \mathcal{T}_1, \exists V \in \mathcal{T}_2 \mid (x, y) \in U \times V \subseteq H\}$$

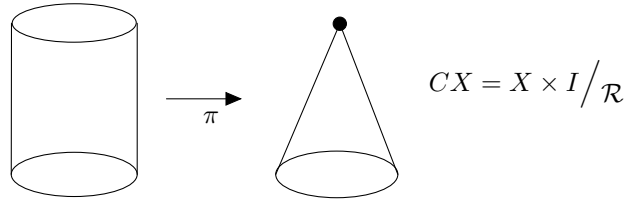
**Ejercicio 1.6.2.** Probar que si  $\mathcal{T}$  = topología euclídea de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathcal{T}'$  = topología euclídea de  $\mathbb{R}^m$ , entonces  $\mathcal{T} * \mathcal{T}'$  coincide con la topología euclídea de  $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .

**Definición 1.6.3.** Llamamos **cilindro** de un espacio  $X$  a  $X \times I$  con la topología producto, siendo  $I$  un intervalo, generalmente el  $[0, 1]$ .



**Definición 1.6.4.** A partir del cilindro, definimos el **cono** de un espacio  $X$ , denotado  $CX$ , con la relación

$$(x, t)\mathcal{R}(x', t') \Leftrightarrow \begin{cases} t = t' = 1 \\ \text{ó} \\ (x, t) = (x', t') \end{cases}$$

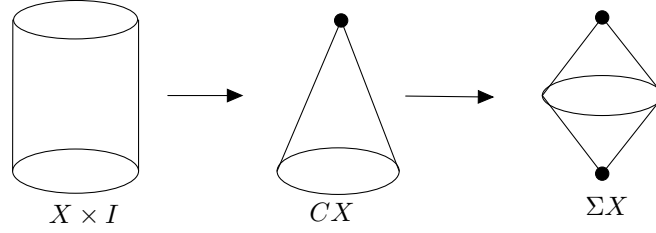


**Ejemplo 1.6.5.** Sea  $X = S^1$ , entonces  $CS^1 \cong B^2$  (círculo de radio 1). Para probarlo buscamos una aplicación  $f: S^1 \times I \longrightarrow B^2$  continua y sobreyectiva tal que  $\mathcal{R}_f = \mathcal{R}$  sea la relación inducida por  $f$ . Escogemos  $f(x, t) = (1 - t)x \in \mathbb{R}^2$ . Claramente es continua y  $f(S^1 \times I) = B^2$ . Veamos que  $\mathcal{R}_f = \mathcal{R}$ :

$$(x, t)\mathcal{R}_f(x', t') \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x, t) = f(x', t') \Leftrightarrow (1 - t)x = (1 - t')x' \Leftrightarrow \begin{cases} t = t' = 1 \\ \text{ó} \\ x = x', t = t' \end{cases}$$

**Definición 1.6.6.** Definimos en  $X \times I$  la **suspensión** de un espacio, denotada  $\Sigma X$ , a través de la relación  $\mathcal{R}$  tal que

$$(x, t)\mathcal{R}(x', t') \Leftrightarrow \begin{cases} t = t' = 1 \\ \text{ó} \\ t = t' = 0 \\ \text{ó} \\ (x, t) = (x', t') \text{ si } t, t' \neq 0, 1 \end{cases}$$



**Ejemplo 1.6.7.** Sea  $X = S^1$ , entonces  $\Sigma X = \Sigma S^1 \cong S^2$ . Se prueba de forma análoga al ejemplo anterior con  $f(x_1, x_2, t) = (\sqrt{1 - (2t - 1)^2}x_1, \sqrt{1 - (2t - 1)^2}x_2, 2t - 1)$ . Se pueden generalizar las fórmulas a dimensiones arbitrarias

$$CS^n \cong B^{n+1} \quad \Sigma S^n \cong S^{n+1}.$$

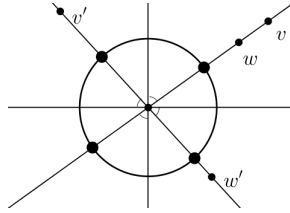
## 1.7. Espacios Projectivos

El espacio proyectivo  $\mathbb{P}_n \mathbb{R}$  se entiende como el conjunto de direcciones de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Más formalmente, se define  $\mathbb{P}_n \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ , donde dados  $v, w \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ,  $v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 \mid v = \lambda w$ . Con esta estructura tenemos la proyección  $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim = \mathbb{P}_n \mathbb{R}$ . Por lo tanto, dotaremos a  $\mathbb{P}_n \mathbb{R}$  con la topología cociente en la proyección  $\pi$ .

**Ejemplo 1.7.1.**

$\mathbb{P}_1 \mathbb{R}$  Sea  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow S^1$  definida por  $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$  y sea  $g: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  la inclusión  $g(y) = y$ . En  $S^1$  consideramos la relación  $\mathcal{R}$  definida por  $y \mathcal{R} y' \Leftrightarrow y = \pm y'$ . Sea entonces la aplicación cociente  $\pi': S^1 \longrightarrow S^1 / \mathcal{R}$ . Teníamos que  $v \sim w \Leftrightarrow v = \lambda w$  por lo que

$$f(v) = \frac{v}{\|v\|} = \frac{\lambda w}{\|\lambda w\|} = \frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{w}{\|w\|} = \pm f(w)$$



Luego  $v \sim w \Leftrightarrow f(v) \mathcal{R} f(w) \Leftrightarrow \pi'(f(v)) = \pi'(f(w))$ . Entonces, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{f} & S^1 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}_1 \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & S^1 / \mathcal{R} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathbb{P}_1 \mathbb{R} \end{array}$$

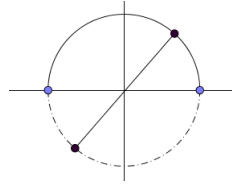
Las aplicaciones  $\tilde{f}([v]) = [f(v)]$  y  $\tilde{g}([x]) = [g(x)]$  son continuas por la proposición 1.5.7. Además

$$\tilde{g}(\tilde{f}([v])) = [g(f(v))] = \left[ \frac{v}{\|v\|} \right] = [v] \Rightarrow \tilde{g} \circ \tilde{f} = Id$$

$$\tilde{f}(\tilde{g}([v])) = [f(g(v))] = [v] \Rightarrow \tilde{f} \circ \tilde{g} = Id$$

Por todo ello,  $\tilde{f}$  es homeomorfismo.

Tenemos entonces que todos los puntos de la parte de abajo de  $S^1$  tienen un único representante arriba (salvo los extremos  $(0, 1)$  y  $(0, -1)$ , que representan el mismo punto de  $\mathbb{P}_1\mathbb{R}$ ), así que si los identificamos  $S^1/\mathcal{R} \cong S^1$ .



Para ello definimos  $h: S^1 \rightarrow S^1$  de modo que si  $e^{i\theta} \in S^1$  con  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  entonces  $h(e^{i\theta}) = e^{i2\theta}$ . Observemos lo siguiente:

$$e^{i2\theta} = e^{i2\psi} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2\theta) = \cos(2\psi) \\ \sin(2\theta) = \sin(2\psi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{o bien} & 2\theta = 2\psi \Rightarrow \theta = \psi \\ \text{o bien} & 2\theta = 2\psi + 2k\pi \Rightarrow \theta = \psi + \pi \end{cases}$$

Podemos definir entonces  $\mathcal{R}_h$  de modo que dos puntos de la circunferencia están relacionados si y solo si son el mismo o son opuestos. Luego, con  $\tilde{h}$  como homeomorfismo,  $\mathbb{P}_1\mathbb{R} = S^1/\mathcal{R} \cong S^1$ .

$\mathbb{P}_2\mathbb{R}$  Análogamente al ejemplo anterior, definimos  $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow S^2$  |  $f(v) = \frac{v}{\|v\|}$  y  $g: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  |  $g(x) = x$ . Tendremos pues el siguiente diagrama donde para  $x, y \in S^2$ ,  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = \pm y$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} & \xrightarrow{f} & S^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}_2\mathbb{R} & \xrightarrow[\cong]{\tilde{f}} & S^2/\mathcal{R} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathbb{P}_2\mathbb{R} \end{array}$$

Además, si denotamos por  $E^+$  a la semiesfera superior y sobre ella la relación  $x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow x = y$  ó  $x, y \in S^1$  (el borde de la semiesfera) con la relación antipodal, se tiene un homeomorfismo

$$\mathbb{P}_2\mathbb{R} \xrightarrow{\tilde{f}} S^2/\mathcal{R} \xrightarrow{(1)} E^+/\mathcal{R}'$$

Para encontrar el homeomorfismo (1) consideramos las aplicaciones  $k: E^+ \hookrightarrow S^2$  y  $h: S^2 \rightarrow E^+$ , donde  $k$  es la inclusión y  $h(x, y, z) = (x, y, |z|)$ . Entonces es inmediato que  $\mathcal{R}'$  es compatible



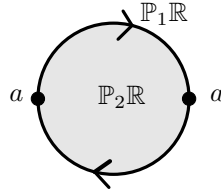
con  $\pi \circ k$  y que  $\mathcal{R}$  lo es con  $\pi \circ h$ , por lo que tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} E^+ & \xrightarrow{k} & S^2 & \xrightarrow{h} & E^+ \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ E^+/\mathcal{R}' & \xrightarrow{\tilde{k}} & S^2/\mathcal{R} & \xrightarrow{\tilde{h}} & E^+/\mathcal{R}' \end{array}$$

donde  $\tilde{h}$  y  $\tilde{k}$  son continuas y además  $\tilde{h} \circ \tilde{k} = Id$  y  $\tilde{k} \circ \tilde{h} = Id$ , por lo que son homeomorfismos.

En lugar de  $E^+$  podemos tomar la bola cerrada  $B^2$ , pues ambos espacios son homeomorfos, y la relación correspondiente a  $\mathcal{R}'$  sobre  $B^2$ ,  $p\mathcal{R}''q \Leftrightarrow p = q$  ó  $p, q \in S^1$  y  $p = \pm q$ . Vamos ahora al caso general.

$\boxed{\mathbb{P}_n\mathbb{R}}$  Tendremos en general el cociente  $B^n / \sim$  con  $p \sim q \Leftrightarrow p = q$  ó  $p, q \in S^{n-1}$  y  $p = \pm q$ . De esta forma  $\mathbb{P}_n\mathbb{R} \cong B^n / \sim$ . Nótese que en el borde de la bola aparece  $\mathbb{P}_{n-1}\mathbb{R}$ .



**Ejercicio 1.7.2.** (Importante)  $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$  se puede “ver” en  $\mathbb{R}^4$ . Sea  $f: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \mid f(x, y, z) = (xy, yz, xz, x^2 + 2y^2 + 3z^2)$

1. Probar que  $f(p) = f(q) \Leftrightarrow p = \pm q$ .
2. Deducir que  $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$  es homeomorfo a un subespacio de  $\mathbb{R}^4$ .

*Solución.*

1.  $\boxed{\Leftarrow}$  Sean  $(x, y, z) = \pm(x', y', z') \Rightarrow f(x, y, z) = (xy, yz, xz, x^2 + 2y^2 + 3z^2) = f(x', y', z')$ .
- $\boxed{\Rightarrow}$  Para esta implicación diferenciaremos varios casos.

■  $x, y, z \neq 0$

$$f(x, y, z) = f(x', y', z') \Rightarrow \begin{cases} xy = x'y' \\ yz = y'z' \\ xz = x'z' \end{cases} \Rightarrow x', y', z' \neq 0$$

Esto implica

$$\frac{x}{x'} = \frac{y'}{y}; \quad \frac{y}{y'} = \frac{z'}{z};$$

$$\frac{x}{x'} = \frac{z'}{z} = \frac{y}{y'} = \frac{x'}{x} \Rightarrow x^2 = (x')^2 \Rightarrow x = \pm x'$$

Por lo que o bien

$$x = x' \Rightarrow y = y', z = z'$$

o bien

$$x = -x' \Rightarrow y = -y', z = -z'$$

- $x = 0, y, z \neq 0$

En primer lugar, como  $(x, y, z) \in S^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 2 + z^2$ .

Ahora

$$f(x, y, z) = f(x', y', z') \Rightarrow \begin{cases} 0 = xy = x'y' \\ 0 = xz = x'z' \\ 0 \neq yz = y'z' \end{cases}$$

De las dos últimas expresiones deducimos que  $x' = 0$ , luego

$$2 + (z')^2 = 2 + z^2 \Rightarrow z = \pm z' \Rightarrow y = \pm y'.$$

- $x = y = 0, z \neq 0$

Como  $(x, y, z) \in S^2 \Rightarrow z = \pm 1$ . Entonces

$$xy = x'y' = 0$$

$$yz = y'z' = 0$$

$$xz = x'z' = 0$$

$$0 + 0 + 3z^2 = 3 = (x')^2 + 2(y')^2 + 3(z')^2 = 1 + (y')^2 + 2(z')^2 \Rightarrow 2 = (y')^2 + 2(z')^2$$

Ahora bien,  $z' \neq 0$  porque si lo fuera,  $|y'| = \sqrt{2} > 1$ . Aplicando esto a las igualdades anteriores y despejando  $z'$  de esta última, llegamos a que

$$x' = 0, y' = 0, z' = \pm 1$$

2.  $X = f(S^2) \subseteq \mathbb{R}^4$  es un compacto Hausdorff y  $f: S^2 \rightarrow X$  es sobreyectiva. Por la propiedad universal esto significa que  $\tilde{f}: S^2/\mathcal{R}_f \rightarrow X$  es homeomorfismo. □

**Ejercicio 1.7.3.** Probar que el cociente  $\mathbb{R}/\mathcal{R}$  no es Hausdorff, donde  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$  ó  $x, y \in \mathbb{Q}$ .

*Solución.* RA Sean  $[x], [y] \in \mathbb{R}/\mathcal{R}$  con  $[x] \in U$  abierto,  $[y] \in V$  abierto, y  $U \cap V = \emptyset$ . Por definición de topología cociente, si denotamos  $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathcal{R}$  a la proyección canónica, entonces  $\pi^{-1}(U)$  y  $\pi^{-1}(V)$  son abiertos. Además,  $U \cap V = \emptyset \Rightarrow \pi^{-1}(U \cap V) = \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \emptyset$ . Se tiene

- $\pi^{-1}(U)$  abierto  $\Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} \mid q \in \pi^{-1}(U) \Rightarrow [q] \in U$ .
- $\pi^{-1}(V)$  abierto  $\Rightarrow \exists q' \in \mathbb{Q} \mid q' \in \pi^{-1}(V) \Rightarrow [q'] \in V$ .

Pero  $[q] = [q'] \in U \cap V$ , con lo que hemos llegado a una contradicción. □

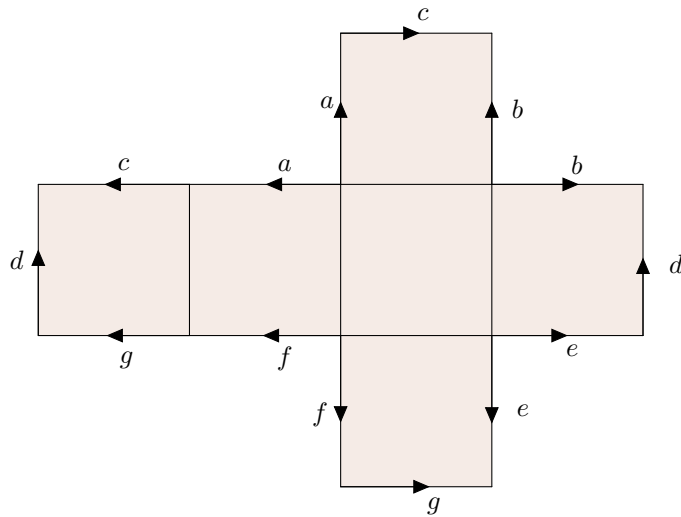
**Nota 1.7.4.** Si  $A \subseteq X$  y  $\mathcal{R}$  es la relación  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$  ó  $x, y \in A$ , se suele escribir  $X/A$ .

**Ejercicio 1.7.5.** Probar que  $\mathbb{R}^2/D^2$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , siendo  $D^2$  la bola unidad cerrada. Ayuda: usar la función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida a trozos como  $f(D^2) = 0$  y  $f(x) = \frac{\|x\| - 1}{\|x\|}x \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus D^2$ .

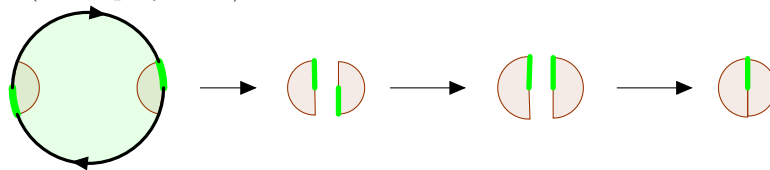
## 1.8. Modelos Topológicos

Antes de comenzar con la clasificación de superficies es importante familiarizarse con los modelos usados para representarlas. Estos modelos son una especie de “instrucciones” sobre cómo se construye la superficie. Resultan especialmente importantes cuando tratamos con superficies que no pueden ser representadas en 3 dimensiones. Veamos algunos ejemplos.

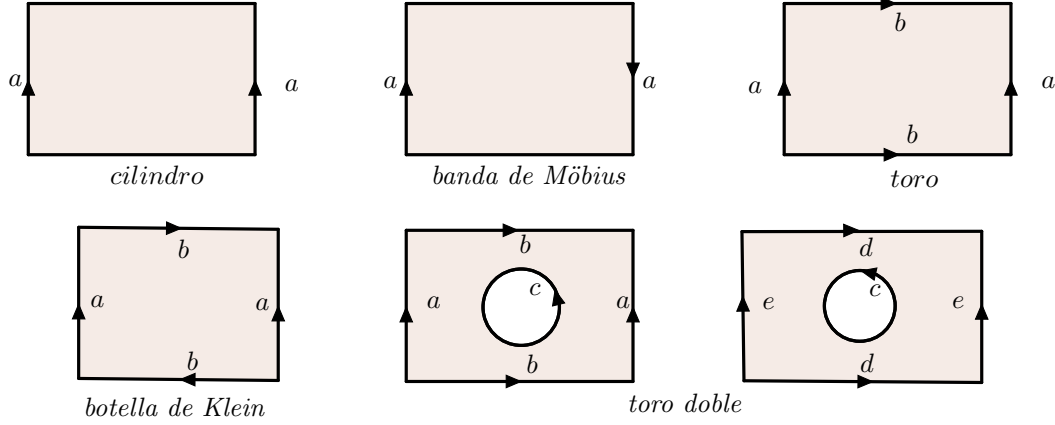
**Ejemplo 1.8.1** (Modelo de una caja).



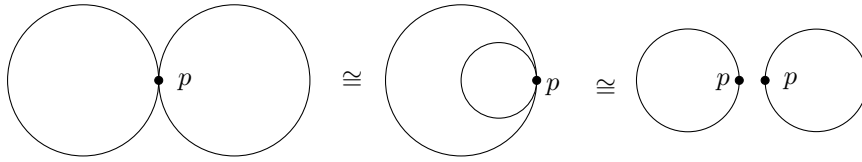
**Ejemplo 1.8.2** (Plano proyectivo).



**Ejemplo 1.8.3** (Otros modelos habituales).



**Ejemplo 1.8.4.** Distintos modelos pueden representar el mismo objeto.



## 1.9. Acciones de Grupos

Dado que buena parte de esta asignatura está dedicada a presentar la topología algebraica, es necesario introducir también el concepto de acción de un grupo sobre un espacio topológico. Antes de definirlo comencemos con un ejemplo sencillo. Consideremos  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{Z}$ . Fijado  $z \in \mathbb{Z}$  podemos construir la aplicación  $x \in \mathbb{R} \mapsto x + z \in \mathbb{R}$ . Si la generalizamos de modo que a cada par  $(n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$  se le haga corresponder  $x + n \in \mathbb{R}$  diremos que  $\mathbb{Z}$  *actúa* sobre  $\mathbb{R}$ . Nótese que  $(n, x + m)$  tiene la misma imagen que  $(n + m, x)$  para todo  $n, m \in \mathbb{Z}$  y  $x \in \mathbb{R}$ . Pasemos ya a la definición formal.

**Definición 1.9.1.** Sea  $G$  un grupo discreto y sea  $X$  un espacio topológico. Se llama **acción** de  $G$  sobre  $X$  a cualquier aplicación

$$f: G \times X \longrightarrow X$$

$$(g, x) \mapsto f(g, x) := gx \text{ (notación)}$$

cumpliendo las siguientes propiedades:

1.  $1x = x$ , donde 1 denota el elemento neutro de  $G$ .
2.  $\forall g, h \in G \ g(hx) = (gh)x$ .
3. La aplicación  $f_g: X \rightarrow X$  definida como  $f_g(x) = gx$  es continua  $\forall g \in G$ .

**Nota 1.9.2.** La noción general de acción de grupo no requiere la última propiedad, pero aquí se está exigiendo por tratarse de espacios topológicos. En cualquier caso es habitual exigirle que sea un morfismo de la categoría correspondiente.

**Proposición 1.9.3.** La relación generada por  $x \sim gx \ \forall x \in X, \forall g \in G$  es de equivalencia. Al cociente por esta relación se lo llama **espacio de órbitas** de la acción de  $G$  en  $X$ , denotado como  $X/G$ , y las clases de equivalencia se llaman **órbitas**.

**Definición 1.9.4.** Dado  $x \in X$ , los elementos de  $g \in G$  tales que  $gx = x$  constituyen el **grupo de isotropía** de  $x$ .

**Ejercicio 1.9.5.** Comprobar que efectivamente el grupo de isotropía es un grupo.

**Definición 1.9.6.** Si la acción de  $G$  no tiene puntos fijos, esto es,  $\nexists x \in X \mid gx = x \ \forall g \in G$ , se dice que es **libre**.

**Ejemplo 1.9.7.**  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$  y la acción es libre. El grupo de isotropía de todo elemento de  $\mathbb{R}$  es  $\{0\}$ .

**Ejemplo 1.9.8.** Sean  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{Z}_4$ . Definimos la acción  $ax$  como dar un giro de  $a\frac{\pi}{2}$ . En este caso  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_4 \cong CS^1$  abierto por abajo (o bien, el cono infinito).

# Tema 2

## Clasificación de Superficies I

En topología, clasificar la familia de espacios que cumplen una propiedad topológica (es decir, invariante por homeomorfismos)  $P$  consiste en alcanzar los siguientes objetivos:

- ① Encontrar modelos  $X_1, \dots, X_n, \dots$  de forma que todo espacio topológico con la propiedad  $P$  es homeomorfo a algún  $X_i$ .
- ② Dar un método de “distinguibilidad”, es decir, un procedimiento o técnica que distinga cuándo dos espacios  $X$  e  $Y$  con la propiedad  $P$  no son homeomorfos. Para ello, bastará distinguir los modelos  $X_i$ .

Algunas de las propiedades conocidas desde el curso de Topología de 1º son:

- Compacidad.
- Conexión.
- Número de componentes conexas (por caminos).
- Número y orden de puntos de corte.

### 2.1. Teorema de Clasificación de Superficies

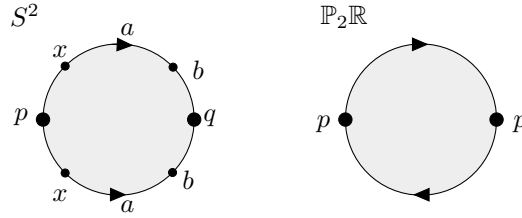
**Definición 2.1.1.** Una **superficie sin borde** es un espacio topológico  $X$  cumpliendo el axioma de separación  $T_2$  y el segundo axioma de numerabilidad, tal que todo  $x \in X$  posee un entorno homeomorfo a una bola abierta de  $\mathbb{R}^2$  con la topología euclídea.

**Definición 2.1.2.** Una **superficie con borde** es un espacio topológico  $X$  cumpliendo el axioma de separación  $T_2$  y el segundo axioma de numerabilidad, tal que todo  $x \in X$  posee un entorno homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$  o a  $\mathbb{R}_+^2$ . Los puntos que poseen un entorno de este último tipo pero no poseen uno homeomorfo  $\mathbb{R}^2$  forman la **frontera** de la superficie, denotada  $\partial X$ .

**Teorema 2.1.3** (de inmersión de Whitney). Toda superficie  $M$  admite una inmersión en  $\mathbb{R}^4$ . En particular,  $M$  posee topología euclídea.

**Nota 2.1.4.** Este resultado es más general; para una variedad topológica (este concepto se verá en el próximo curso) de dimensión  $m$  siempre existe una inmersión en  $\mathbb{R}^{2m}$ .

Ya hemos visto que la esfera y el plano proyectivo tienen los siguientes modelos dados como espacios cociente.

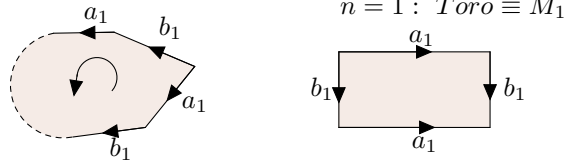


El siguiente teorema proporcionará modelos para todas las demás superficies.

**Teorema 2.1.5.** Una superficie compacta conexa y sin borde distinta de  $S^2$  y  $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$  es homeomorfa a un espacio cociente de alguno de los siguientes tipos o a una suma conexa finita de ellos (esta operación se verá más adelante):

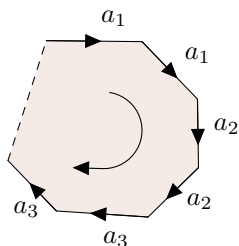
- **Tipo I** ( $M_n$ ) El resultado de identificar los lados de un polígono (llamado polígono fundamental) de  $4n$  lados de acuerdo al código  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$ . A una superficie de este tipo se la llama **superficie orientable de género  $n$** . La esfera se considera orientable de género 0.

Recordemos que esto significa que, fijado un sentido de giro sobre el polígono, las aristas indicadas con la misma letra e índice deben identificarse de manera que, por ejemplo,  $a_i$  indica que los puntos de la arista van apareciendo en el sentido del giro, mientras que esos mismos puntos en  $a_i^{-1}$  se ven aparecer en el sentido opuesto.

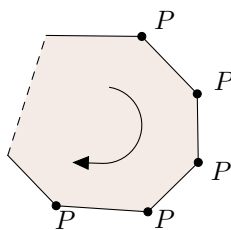


- **Tipo II** ( $N_n$ ) El resultado de identificar los lados de un polígono de  $2n$  lados ( $n \geq 2$ ) por el código  $a_1 a_1 \dots a_n a_n$ . A una superficie de este tipo se la llama **superficie no orientable de género  $n$** .

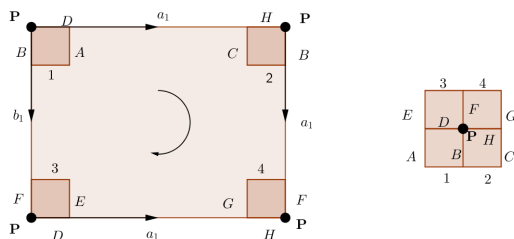




**Observación 2.1.6.** Tanto en los modelos de tipo I como en los de tipo II, los vértices representan un mismo punto.



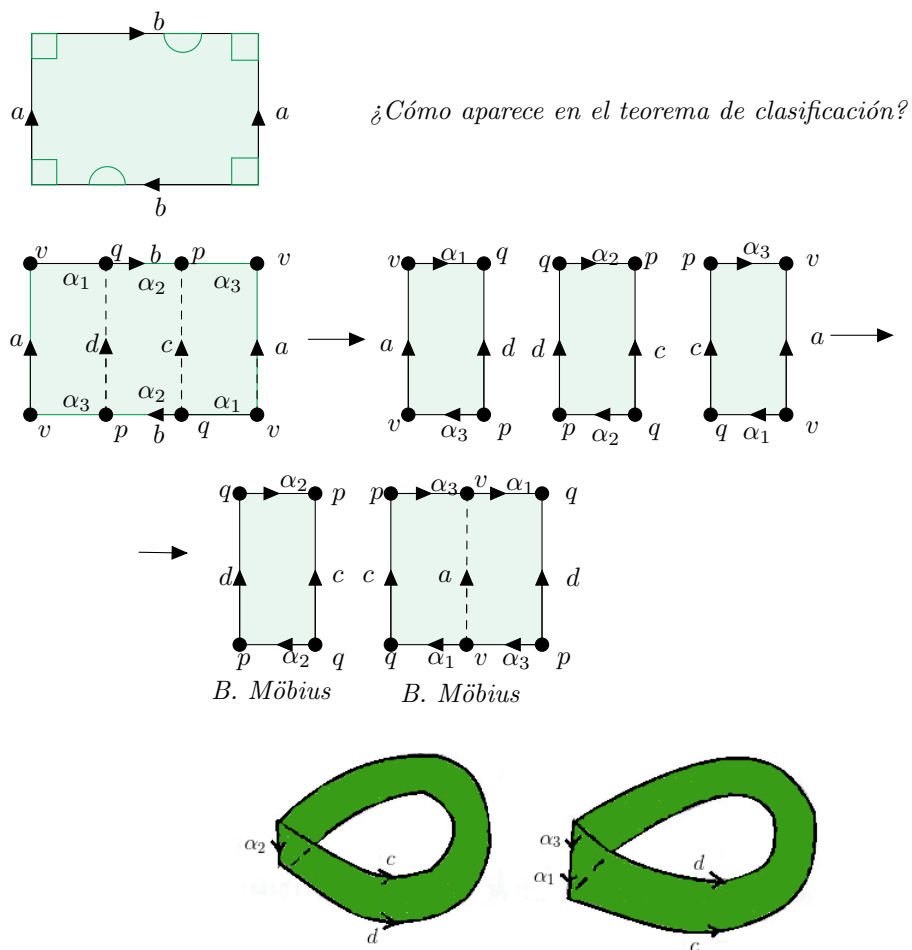
Los entornos pequeños de  $P$  son entonces el resultado de pegar las esquinas del polígono, obteniéndose un entorno del plano euclídeo.



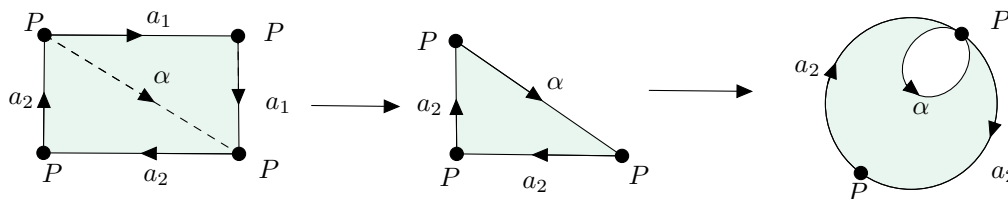
Para que el teorema tenga sentido es necesario que todas las superficies compactas sin borde puedan ser expresadas tal como hemos definido los dos tipos. Esto es cierto también para las compactas con borde. Por ello, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.7.** Toda superficie compacta puede obtenerse como un espacio cociente de un polígono fundamental.

**Ejemplo 2.1.8** (Botella de Klein).

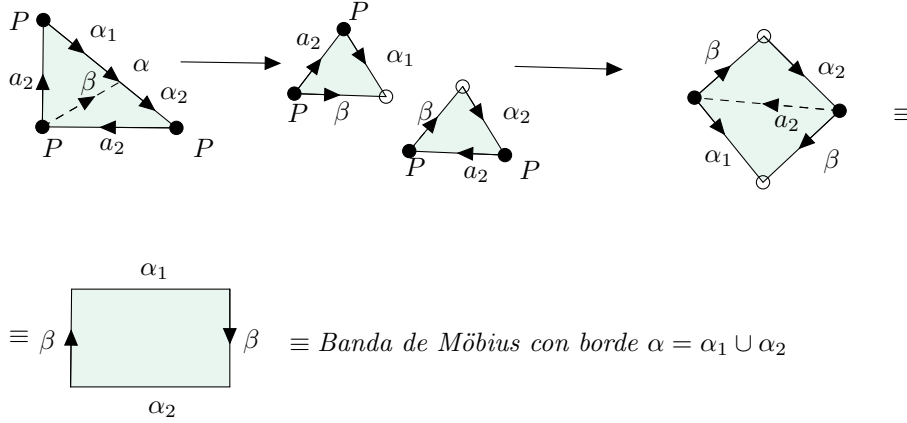


Una botella de Klein aparece al unir dos bandas de Möbius por el borde. Ahora veremos que esto mismo le ocurre a la superficie  $N_2$ .



Nos hemos fijado solo en una mitad, la otra daría el mismo resultado. Esto es,  $N_2$  es la unión por el borde de dos planos proyectivos con un agujero. Ahora bien,

**Observación 2.1.9** (Importante). El plano proyectivo con un agujero es una banda de Möbius cuyo borde es el borde del agujero.



Luego la botella de Klein resulta ser homeomorfa al modelo  $N_2$ .

## 2.2. Suma Conexa

Veamos con más detalle la operación que hemos realizado para demostrar que  $N_2$  es la botella de Klein.

**Definición 2.2.1.** La **suma conexa** de dos superficies compactas sin borde  $S$  y  $S'$  es una nueva superficie compacta sin borde  $S \# S'$  que resulta al eliminar un disco abierto en cada una de ellas y pegarlas por las circunferencias de los bordes. Más formalmente, si tenemos dos discos cerrados  $D \subseteq S$  y  $D' \subseteq S'$ , podemos considerar un homeomorfismo  $f: \partial D \rightarrow \partial D'$ . Entonces la suma conexa es el cociente  $(S \setminus \mathring{D}) \cup_f (S' \setminus \mathring{D}')$ .

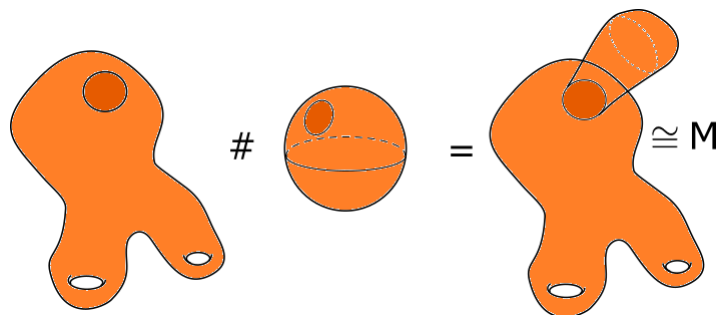
**Nota 2.2.2.** La suma conexa no depende de qué disco se elimine ni del tipo de homeomorfismo.

**Propiedades 2.2.3.** La suma conexa cumple las siguientes propiedades:

1. Es conmutativa.
2. Es asociativa.
3.  $S^2$  es el elemento neutro.

Estas propiedades dotan al conjunto de superficies compactas sin borde de estructura de monoide abeliano.

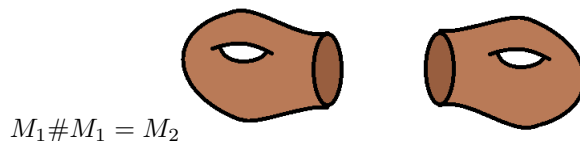
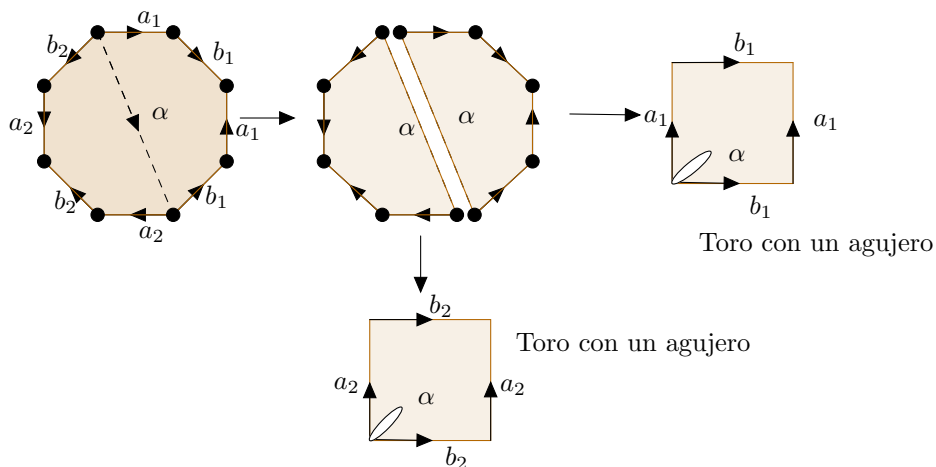
**Ejemplo 2.2.4.** La esfera  $S^2$  actúa como elemento neutro de la suma conexa. Esto es, si  $M$  una superficie,  $M \# S^2$  es homeomorfa a  $M$  ya que  $S^2$  con un agujero es homeomorfa a un disco, como vemos en el siguiente dibujo.



Veamos ahora cómo es la suma conexas de los tipos de superficies presentados.

### 2.2.1. Tipo I

$$M_2 = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}.$$



$M_2 \equiv$  Pegar dos toros ( $M_1$ ) con un agujero por el borde del agujero.

$\vdots$

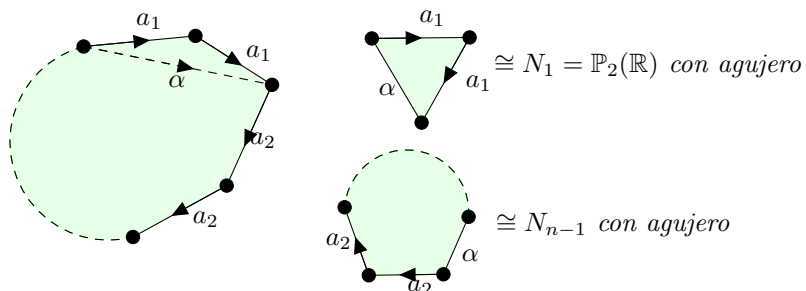
$M_n \equiv$  Pegar  $M_{n-1}$  con agujero con  $M_1$  con agujero por el borde del agujero. Es decir,

$M_n = M_1 \# \dots \# M_1$  ( $n$  veces).

### 2.2.2. Tipo II

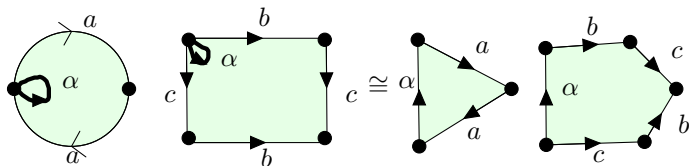
Ya hemos visto en el ejemplo 2.1.8 que  $N_2$  (botella de Klein) es la suma conexa de dos copias del plano proyectivo  $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ . Si hacemos  $N_1 = \mathbb{P}_2\mathbb{R}$  tenemos en general:

$$N_n = N_{n-1} \# N_1 = N_1 \# \dots \# N_1 \text{ (n veces).}$$

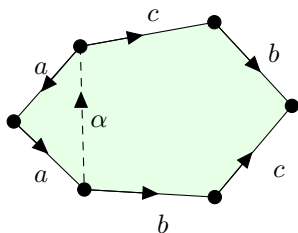


### 2.3. Mezclando tipos

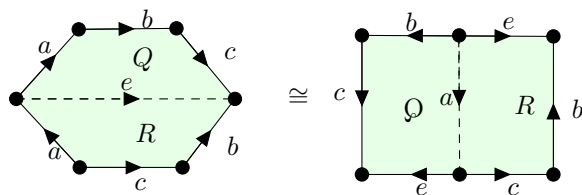
¿Qué superficie es  $\mathbb{P}_2\mathbb{R} \# T$ , esto es,  $N_1 \# M_1$ ?



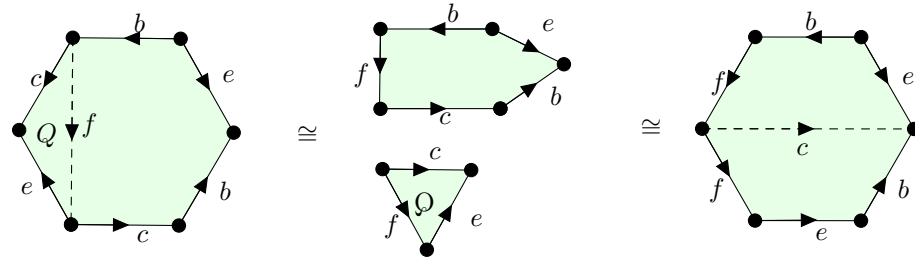
■ 1<sup>er</sup> paso:



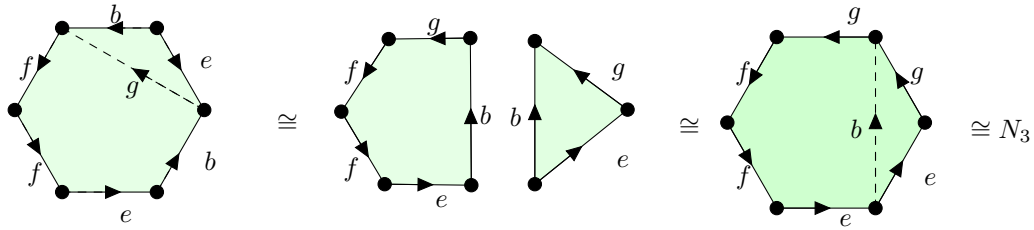
■ 2 paso:



■ 3<sup>er</sup> paso:



■ 4 paso:



Tenemos así  $\mathbb{P}_2\mathbb{R}\#T = N_1\#M_1 = N_3 = N_1\#N_1\#N_1 = \text{Botella de Klein}\#\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ .

## 2.4. Orientabilidad. Asas y gorros cruzados.

### 2.4.1. Orientabilidad en las superficies de tipo I y II

**Definición 2.4.1.** Una superficie es **orientable** si el vector normal a la superficie es constante a lo largo de cada curva cerrada contenida en ella.

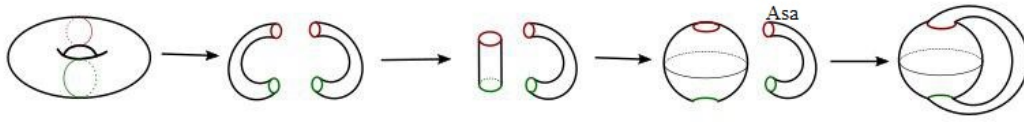
**Teorema 2.4.2.** Tenemos las siguientes dos caracterizaciones:

1. Una superficie es de tipo I si y sólo si es orientable.
2. Una superficie es de tipo II si y sólo si es no orientable. Además toda superficie de este tipo contiene al menos una banda de Möbius.

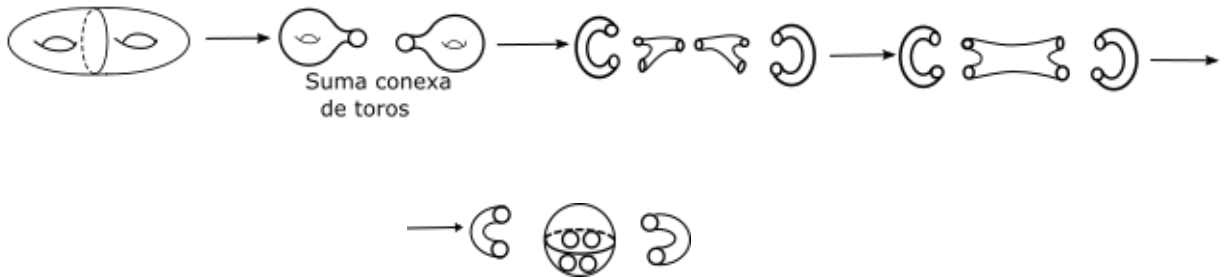
### 2.4.2. Asas y gorros cruzados

#### Tipo I

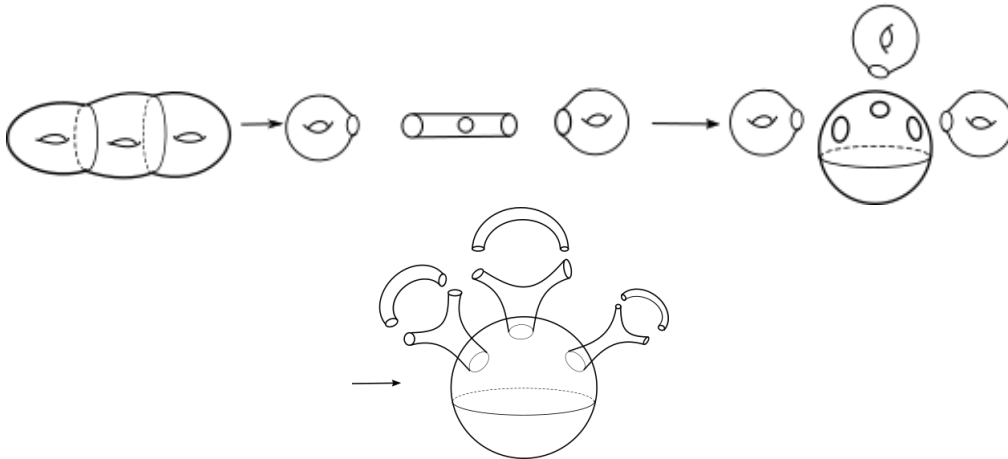
Sea  $M_1$  y lo cortamos como se indica en la figura. Un toro es equivalente a pegar un “asa” a  $S^2$ , esto es, se hacen dos agujeros en  $S^2$  y se pegan los bordes de un cilindro en ellos.



Sea  $M_2$  un toro doble



Así, el doble toro es el resultado de pegar dos “asas” a  $S^2$ . Consideramos ahora el triple toro  $M_3$

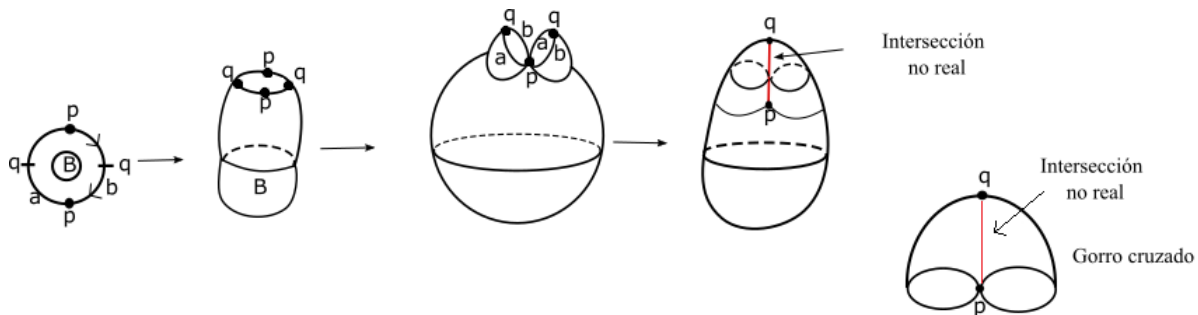


Tenemos que  $M_3$  se obtiene al pegar tres “asas” a  $S^2$ . En general,

**Teorema 2.4.3.** La superficie de tipo I  $M_n$  es el resultado de pegar  $n$  “asas” a  $S^2$ .

**Tipo II**

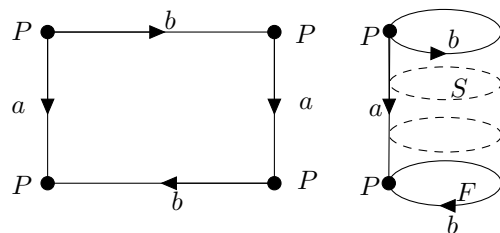
Consideremos  $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$



**Teorema 2.4.4.** La superficie  $N_k$  de tipo II es resultado de pegar  $k$  gorros cruzados a  $S^2$ .

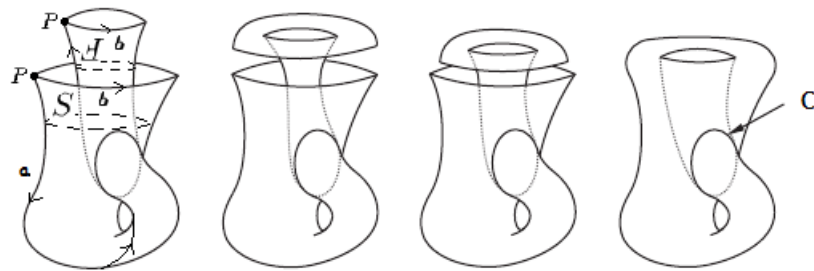
**Observación 2.4.5.** Un gorro cruzado no es más que la banda de Möbius  $\mathbb{P}_2\mathbb{R} \setminus B$  con la circunferencia del borde colocada en un plano. Así pues, la intersección aparente del gorro cruzado desaparece si retorremos el borde del disco  $B$ , pero entonces no podemos pegar  $B$  a ese borde retorcido y, a la vez, quedarnos en el espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$  sin introducir una intersección aparente.

Debido a la imposibilidad de sumergir  $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^3$ , cualquier representación tridimensional de  $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$  debe contener puntos dobles. Lo mismo ocurre para el resto de superficies de tipo II. Por ejemplo, si queremos representar la botella de Klein en  $\mathbb{R}^3$



$C$  es la intersección aparente necesaria para tener este modelo de la botella de Klein en  $\mathbb{R}^3$ .





# Tema 3

## Teoría de Homotopía

### 3.1. Homotopía

Vamos a introducir el concepto de deformación de curvas cerradas (“lazos”). La idea es fijar un punto y variar el lazo de manera continua sin mover el punto. Comenzamos formalizando la idea de deformar una función en otra con el tiempo.

**Definición 3.1.1.** Sean  $f, g: X \rightarrow Y$  funciones continuas y sea  $I = [0, 1]$ . Decimos que  $f$  y  $g$  son **homotópicas** ( $f \simeq g$ ) si  $\exists H: X \times I \rightarrow Y$  continua tal que  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x)$ . A la aplicación  $H$  la llamamos **homotopía** entre  $f$  y  $g$ . Si una de las funciones es constante, decimos que la otra es **nul-homotópica**. Si  $A \subseteq X$ , decimos que  $f$  y  $g$  son **homotópicas relativamente** a  $A$  si la homotopía  $H$  cumple además  $H(a, t) = f(a) = g(a) \forall a \in A$ . Si  $A$  es un conjunto unitario hablamos de homotopía **basada**. En contraposición a la homotopía relativa, a la homotopía que no cumple esa condición se le llama homotopía **libre**.

**Nota 3.1.2.** Si tomamos  $A = \emptyset$ , la homotopía relativa a  $A$  coincide con la homotopía libre.

**Lema 3.1.3.** Ser homotópicas es una relación de equivalencia (también serlo relativamente).

**Demostración.**

- Reflexiva:  $f \simeq f$  por  $H(x, t) = f(x)$ .
- Simétrica: si  $f \simeq g$  por  $H \Rightarrow g \simeq f$  por  $\tilde{H}(x, t) = H(x, 1 - t)$ . Se cumplen

$$\tilde{H}(x, 0) = H(x, 1) = g(x)$$

$$\tilde{H}(x, 1) = H(x, 0) = f(x)$$

Se deja como ejercicio probar que  $\tilde{H}$  es continua.

- Transitiva: sea  $f \simeq g$  por  $F$  y  $g \simeq h$  por  $G$ . Entonces,  $f \simeq h$  por

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} H(x, 0) = F(x, 0) = f(x) \\ H(x, 1) = G(x, 1) = h(x) \end{cases}$$

Está bien definida en  $t = \frac{1}{2}$  pues  $F(x, 1) = g(x) = G(x, 0)$ . Se deja como ejercicio probar la continuidad de  $H$  y adaptar la demostración al caso relativo. ■

**Lema 3.1.4.** La relación de homotopía es compatible con la composición, es decir, se tienen las siguientes propiedades (que también valen para la homotopía relativa):

- a) Sean  $f, g: X \rightarrow Y$ ,  $h: Y \rightarrow Z$  continuas. Si  $f \simeq g$  entonces  $h \circ f \simeq h \circ g$ .
- b) Si  $h: Z \rightarrow X$  y  $f, g: X \rightarrow Y$  continuas con  $f \simeq g$ , entonces  $f \circ h \simeq g \circ h$ .
- c) Si  $h, h': Z \rightarrow X$  y  $f, g: X \rightarrow Y$  con  $f \simeq g$  y  $h \simeq h'$ , entonces  $f \circ h \simeq g \circ h'$ .

**Demostración.**

- a) Sea  $H$  homotopía entre  $f$  y  $g$ . Sea  $\tilde{H} = h \circ H: X \times I \rightarrow Z$ . Se tiene

$$\begin{aligned}\tilde{H}(x, 0) &= h(H(x, 0)) = h(f(x)) = (h \circ f)(x) \\ \tilde{H}(x, 1) &= h(H(x, 1)) = h(g(x)) = (h \circ g)(x)\end{aligned}$$

- b) Sea  $\hat{H}: Z \times I \rightarrow Y$  definida como  $H \circ (h \times Id)$ . Entonces

$$\begin{aligned}\hat{H}(x, 0) &= H(h(x), 0) = f(h(x)) = (f \circ h)(x) \\ \hat{H}(x, 1) &= H(h(x), 1) = g(h(x)) = (g \circ h)(x)\end{aligned}$$

- c)  $f \circ h \underset{a)}{\simeq} f \circ h' \underset{b)}{\simeq} g \circ h'$ . Por transitividad de la relación de homotopía  $f \circ h \simeq g \circ h'$

■

**Definición 3.1.5.** Una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  se dice **equivalencia de homotopía** si  $\exists g: Y \rightarrow X$  continua tal que  $f \circ g \simeq Id_Y$  y  $g \circ f \simeq Id_X$ .  $X$  e  $Y$  se dicen entonces **homotópicamente equivalentes**. En tal caso se dice que  $f$  y  $g$  son **inversas homotópicas**.

**Nota 3.1.6.** Si  $f$  es homeomorfismo, es equivalencia de homotopía, con su inversa como función  $g$ .

**Ejemplo 3.1.7.**  $\mathbb{R}^n$  y  $\{p\}$  son homotópicamente equivalentes.

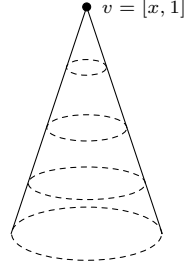
*Solución.* Sea  $c: \mathbb{R}^n \rightarrow \{p\}$  la función constante  $c(x) = p$  y sea  $f: \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  también constante  $f(p) = x_0$ . Fijamos por comodidad  $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ . Se tiene trivialmente  $c \circ f = Id_{\{p\}} \simeq Id_{\{p\}}$ . Vamos a probar que  $f \circ c \simeq Id_{\mathbb{R}^n}$ . Para ello tenemos que definir una homotopía  $H: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Así pues, definimos la homotopía  $H(x, t) = (1 - t)x$ , con la que se tiene el resultado. □

El mismo tipo de aplicación  $H(x, t) = (1 - t)x$  muestra que todo espacio vectorial normado es homotópicamente equivalente a  $\{p\}$ . Obsérvese que basta que se trate de un espacio vectorial  $V$  dotado de una topología para la cual la aplicación  $(v, \lambda) \in V \times \mathbb{R} \mapsto \lambda v \in V$  sea continua.

**Definición 3.1.8.** Un espacio  $X$  se dice **contráctil** o **contractible** si es homotópicamente equivalente a un punto.

**Nota 3.1.9.** Todos los espacios vectoriales normados son contráctiles.

**Ejercicio 3.1.10.** El cono de cualquier espacio  $X$  es contráctil.

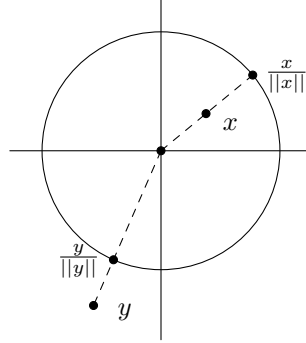


*Solución.* Si  $[x, t] \in CX$  es la clase de  $(x, t) \in X \times I$ , se define  $H: CX \times I \rightarrow CX$  por  $H([x, t], s) = [x, (1-s)t + s]$ . Entonces  $H([x, t], 0) = [x, t]$  y  $H([x, t], 1) = [x, 1] = v$ . Queda verificar la continuidad, que se deja como ejercicio.  $\square$

**Ejemplo 3.1.11.** Cualquier convexo  $X$  es contráctil, pues basta tomar la homotopía  $H(x, t) = (1-t)x + x_0$ , con  $x_0 \in X$  fijo. Esta aplicación está bien definida por ser  $X$  convexo.

**Ejemplo 3.1.12.**  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  es homotópicamente equivalente a  $S^1$ .

*Solución.* Sea  $i$  la inclusión  $i: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  y sea  $r: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^1$  dada por  $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ . Tenemos que probar que  $r \circ i \simeq Id_{S^1}$  y que  $i \circ r \simeq Id_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$ .



La primera es trivial pues  $r \circ i = Id_{S^1}$ . Para la segunda definimos  $H(x, t) = (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}$  que cumple  $H(x, 0) = x = Id(x)$  y  $H(x, 1) = \frac{x}{\|x\|} = i(r(x))$ .  $\square$

**Observación 3.1.13.** Si  $a \in S^1$ ,  $H(a, t) = a \forall t \in [0, 1] \Rightarrow H$  es relativa a  $S^1$ . Vamos a darle nombre a esta situación que nos hemos encontrado.

**Definición 3.1.14.** Si  $X$  es un espacio topológico y  $A \subseteq X$ , decimos que  $A$  es un **retracto** de  $X$  si existe una aplicación continua  $r: X \rightarrow A$  tal que  $r(a) = a \ \forall a \in A$  ( $r \circ i = Id_A$  con  $i: A \hookrightarrow X$  la inclusión). Se dice **retracto de deformación** si además  $i \circ r \simeq Id_X$ . Se dice **retracto de deformación fuerte** si además se puede encontrar una homotopía  $i \circ r \simeq Id_X$  relativa a  $A$ . A la aplicación  $r$  se le llama **retracción**.

**Nota 3.1.15.** Un retracto de deformación es siempre equivalencia de homotopía pues  $r$  y  $i_A$  son inversas homotópicas.

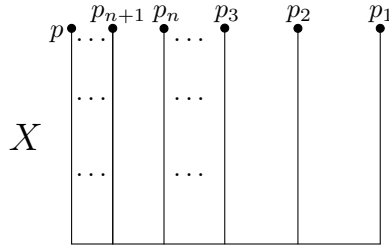
**Consecuencia 3.1.16.**  $S^1$  es retracto de deformación fuerte de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

**Ejemplo 3.1.17.**

$$\begin{aligned} S^1 \times S^1 &\longrightarrow S^1 \times \{y_0\} \\ (x, y) &\longmapsto (x, y_0) \end{aligned}$$

Es retracto, pero como veremos más adelante no es de deformación.

**Ejemplo 3.1.18.**



El subespacio  $X \subset \mathbb{R}^2$  dado por  $X = (I \times \{0\}) \cup (\{0\} \times I) \cup \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\} \times I \right)$ , con  $I = [0, 1]$ , tiene a  $p = (0, 1)$  como retracto de deformación. En efecto, sea  $H: X \times I \rightarrow X$  la aplicación

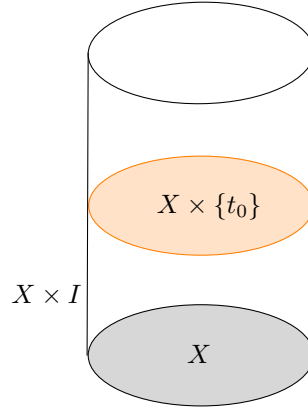
$$H(x, y, t) = \begin{cases} (x, (1 - 3t)y) & 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ ((2 - 3t)x, 0) & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ (0, 3t - 2) & \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es continua (verificarlo) y  $H(x, y, 0) = (x, y)$ , mientras que  $H(x, y, 1) = (0, 1) = p$ . La aplicación  $H$  baja los puntos en el primer tercio del tiempo a  $I \times \{0\}$ , después recoge  $I \times \{0\}$  en  $\theta = (0, 0)$  en el segundo tercio y finalmente desplaza  $\theta$  hasta  $p$  a lo largo de  $\{0\} \times I$  en el tercer tercio.

Obsérvese que  $H|_{\{p\} \times I}$  no es constante, lo cual se requiere para que  $\{p\}$  sea retracto de deformación fuerte. De hecho no existe ninguna homotopía  $F: X \times I \rightarrow X$  tal que  $F(p, t) = p$  para todo  $t \in I$ . Intuitivamente es claro pues la sucesión de puntos  $p_n = (\frac{1}{n}, 1)$  converge a  $p$  y como  $F|_{\{p_n\} \times I}$  es un camino de  $p_n$  a  $p$  debe bajar hasta el nivel 0 en el transcurso de la homotopía, lo que no se puede hacer dejando quieto a  $p$ . Veámoslo de manera más rigurosa.

De existir la homotopía  $F$ ,  $F|_{\{p_n\} \times I}$  es una aplicación continua de  $[0, 1]$  en  $X$ , esto es, un camino que empieza en  $p_n$  y acaba en  $p$ . Por la conexión de  $[0, 1]$  necesariamente debe pasar por  $I \times \{0\}$ . Para cada  $n$  sea  $t_n \in [0, 1]$  con  $F(p_n, t_n) \in I \times \{0\}$ . Por la compacidad de  $[0, 1]$  existe una subsucesión  $\{t_{n_k}\}_{k \geq 1}$  convergiendo a algún  $t_0 \in I$ . Entonces, por la continuidad de  $F$  y ser  $I \times \{0\}$  compacto (y por tanto cerrado)  $p = F(p, t_0) \in I \times \{0\}$ , lo que es una contradicción.

**Ejemplo 3.1.19.** Cualquier copia de  $X$ ,  $X \times \{t_0\}$ , en el cilindro  $X \times I$  es retracto de deformación fuerte de  $X \times I$ . Tendríamos  $H((x, t), s) = (x, (1 - s)t + st_0)$  donde  $t$  es la altura fijada del cilindro y  $s$  el parámetro habitual de la homotopía.



**Ejercicio 3.1.20.**  $X$  es homotópicamente equivalente a un punto si y solo si  $Id_X \simeq cte x_0$  para todo  $x_0 \in X$ .

*Solución.*

$\Rightarrow$  Por hipótesis existen  $f: \{p\} \rightarrow X$  y  $c: X \rightarrow \{p\}$  tales que  $c \circ f \simeq Id_{\{p\}}$  (de hecho son iguales) y  $f \circ c \simeq Id_X$ . Sea  $f(p) = x_1$  y  $H$  una homotopía entre  $Id_X$  y  $f \circ c$ . Entonces

$$F(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(x_0, 2 - 2t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es continua pues  $F(x, \frac{1}{2}) = H(x, 1) = x_1 = H(x_0, 1)$ . Además,  $F(x, 0) = H(x, 0) = x$  y  $F(x, 1) = H(x_0, 0) = x_0$ . Esto es,  $Id_X \simeq cte x_0$ .

$\boxed{\Leftarrow}$  Sean  $f: X \rightarrow \{p\}$  (necesariamente constante igual a  $p$ ) y  $g: \{p\} \rightarrow X$  dada por  $g(p) = x_0 \in X$ . Tenemos  $f \circ g \simeq Id_{\{p\}}$  (de hecho son iguales) y  $g \circ f = cte x_0 \simeq Id_X$  por hipótesis.  $\square$

**Ejercicio 3.1.21.** Sean  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  funciones continuas entre espacios topológicos, siendo  $Y$  contráctil. Probar que  $g \circ f$  es nul-homotópica.

*Solución.* De la hipótesis sobre  $Y$  obtenemos que  $Id_Y \simeq cte y_0$ . Así pues, consideremos el siguiente esquema:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{Id_Y} Y \xrightarrow{g} Z$$

Por el lema 3.1.4 apartado a) tenemos que  $g \circ Id_Y \simeq g(y_0) = z_0$ . Aplicando ahora el apartado b) del mismo lema obtenemos  $g \circ Id_Y \circ f \simeq z_0 \circ f = z_0$ . Como  $g \circ Id_Y \circ f = g \circ f$ , ya hemos demostrado lo que queríamos.

**Ejercicio 3.1.22.** Probar que un retracto de un espacio contráctil es contráctil.

*Solución.* Sabemos por el ejercicio anterior que  $A$  es contráctil si y solo si  $Id_A \simeq cte$ . Además, por hipótesis, sabemos que  $Id_X \simeq cte = x_0$ . Además, por propiedades del retracto es claro que  $r \circ i = Id_A$ , donde  $i$  es la inmersión de  $A$  en  $X$ . Se tiene pues que:

$$Id_X \simeq x_0 \Rightarrow r \circ Id_X \simeq r(x_0) = a_0 \Rightarrow Id_A = r \circ i = r \circ Id_X \circ i \simeq a_0$$

$\square$

## 3.2. Caminos y equivalencia de caminos

Recordemos del curso de Topología que dado un espacio topológico  $X$ , un **camino** entre  $x$  e  $y \in X$  es una aplicación continua  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  |  $\alpha(0) = x$  y  $\alpha(1) = y$ . Se dice que  $\alpha$  es un **lazo** si  $\alpha(0) = \alpha(1)$ .

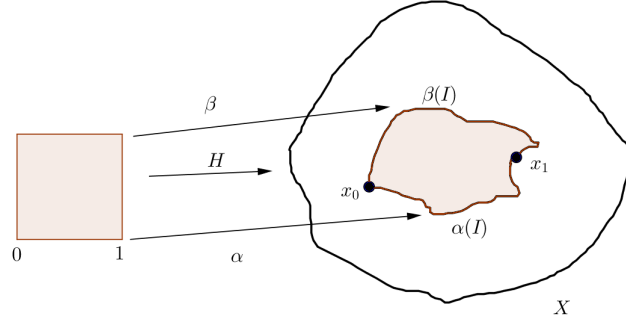
**Ejercicio 3.2.1** (Importante). Si  $H: X \times I \rightarrow Y$  es homotopía entre  $f$  y  $g$ , entonces,  $\forall x \in X$  la restricción  $H|_{\{x\} \times I}$  es un camino entre  $f(x)$  y  $g(x)$ . En particular, si  $X$  es un espacio contráctil, entonces  $X$  es conexo por caminos.

**Definición 3.2.2.** Dados  $\alpha, \beta: I \rightarrow X$  dos caminos con  $\alpha(0) = x, \alpha(1) = \beta(0) = y, \beta(1) = z$ , se llama **yuxtaposición** de  $\alpha$  y  $\beta$  al camino definido como

$$\alpha * \beta(t) \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

**Nota 3.2.3.** La yuxtaposición está bien definida en  $t = \frac{1}{2}$  porque  $\alpha(1) = \beta(0) = y$ .

**Definición 3.2.4.** Dos caminos se dicen **equivalentes** si existe una homotopía relativa al  $\{0, 1\}$   $H: I \times I \rightarrow X$ , esto es,  $H(t, 0) = \alpha(t)$ ,  $H(t, 1) = \beta(t)$  y por ser relativa  $H(0, s) = x_0$ ,  $H(1, s) = x_1$ .



**Nota 3.2.5.** Si  $\alpha$  y  $\beta$  son equivalentes escribimos  $\alpha \sim \beta$  en lugar de  $\alpha \simeq \beta$  relativamente a  $\{0, 1\}$ .

**Lema 3.2.6.** La yuxtaposición es compatible con la equivalencia de caminos.

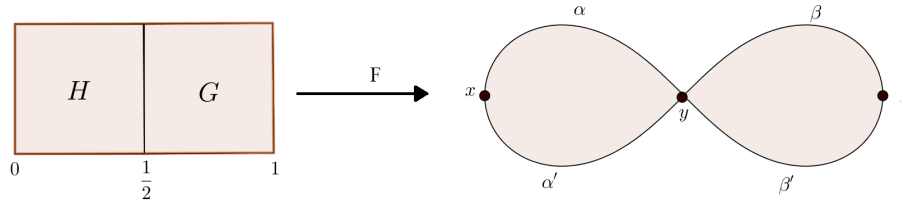
**Demostración.** Sean  $\alpha \sim \alpha'$  y  $\beta \sim \beta'$  con  $\alpha(0) = \alpha'(0) = x$ ,  $\alpha(1) = \alpha'(1) = \beta(0) = \beta'(0) = y$  y  $\beta(1) = \beta'(1) = z$ .

$\alpha \sim \alpha' \Rightarrow \exists H$  homotopía entre  $\alpha$  y  $\alpha'$  relativa a  $\{0, 1\}$ .

$\beta \sim \beta' \Rightarrow \exists G$  homotopía entre  $\beta$  y  $\beta'$  relativa a  $\{0, 1\}$ .

Sea  $F: I \times I \rightarrow X$  la homotopía resultante de “unir” las dos anteriores

$$F(t, s) = \begin{cases} H(2t, s) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t - 1, s) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



$F(\frac{1}{2}, s)$  está bien definida pues, al ser  $H$  y  $G$  relativas al  $\{0, 1\}$  se tiene que  $H(1, s) = y = G(0, s)$ .

Finalmente,

$$F(t, 0) = \begin{cases} H(2t, 0) = \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t - 1, 0) = \beta(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



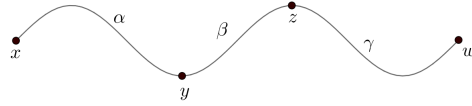
que es justamente la yuxtaposición de  $\alpha$  y  $\beta$ . Análogamente  $F(t, 1) = (\alpha' * \beta')(t)$ . Finalmente,

$$\left. \begin{array}{l} F(0, s) = H(0, s) = x \\ F(1, s) = G(1, s) = z \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$$

■

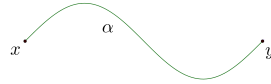
**Proposición 3.2.7.** Se cumplen las siguientes propiedades de la yuxtaposición con respecto a la equivalencia de caminos.

1. Propiedad asociativa:  $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$



2. Elemento neutro: si  $c_x$  es el camino constante  $x$  y  $\alpha$  es un camino entre  $x$  e  $y$ , entonces

$$c_x * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * c_y.$$

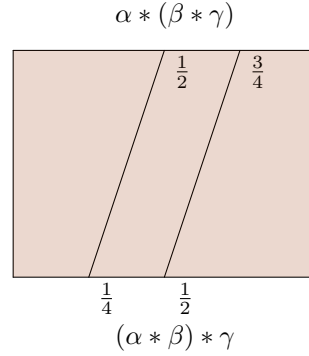


3. Elemento inverso: si  $\alpha$  es un camino entre  $x$  e  $y$  y  $\bar{\alpha}: I \rightarrow X$  es el camino  $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$  (camino opuesto), entonces  $\alpha * \bar{\alpha} \sim c_x$  y  $\bar{\alpha} * \alpha \sim c_y$ .

**Demostración.** Por definición tenemos

$$1. \alpha * (\beta * \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta * \gamma(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(4t - 2) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \gamma(4t - 3) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$(\alpha * \beta) * \gamma(t) = \begin{cases} (\alpha * \beta)(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4t - 1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



Sea por lo tanto

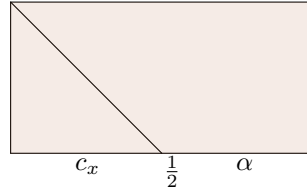
$$F(t, s) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{4t}{s+1}\right) & si \quad 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ \beta(4t - (s+1)) & si \quad \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ \gamma\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right) & si \quad \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Se tiene que  $F$  es una homotopía relativa a  $\{0, 1\}$  entre  $F(t, 0) = (\alpha * \beta) * \gamma(t)$  y  $F(t, 1) = \alpha * (\beta * \gamma)(t)$ .

2. Para probar  $c_x * \alpha \sim \alpha$  definimos la homotopía

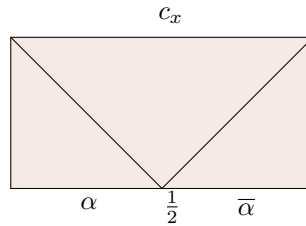
$$F(t, s) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ \alpha\left(\frac{2t+s-1}{s+1}\right) & si \quad \frac{1-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\alpha$



La relación  $\alpha \sim \alpha * c_y$  se demuestra de manera análoga.

3. Se tiene  $\alpha * \bar{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \bar{\alpha}(2t - 1) = \alpha(2 - 2t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$



Entonces la ecuación

$$F(t, s) = \begin{cases} \alpha(2t) & si \quad 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ \alpha(1-s) & si \quad \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ \alpha(2-2s) & si \quad \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

define una homotopía relativa a  $\{0, 1\}$  entre  $\alpha * \bar{\alpha}$  y  $c_x$ . Análogamente se encuentra una homotopía relativa a  $\{0, 1\}$  entre  $\bar{\alpha} * \alpha$  y  $c_y$ .

### 3.3. Grupo Fundamental

Sea  $\Omega(X, x_0)$  el conjunto de lazos en  $x_0$  de  $X$ , esto es  $\{\alpha: I \rightarrow X; \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}$ . Definimos a continuación el conjunto cociente  $\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0) / \sim$  por la relación de equivalencia de caminos. Definimos además el producto de clases  $[\alpha][\alpha'] = [\alpha * \alpha']$ , el cual está bien definido pues hemos visto que  $\alpha \sim \beta$  y  $\alpha' \sim \beta' \Rightarrow \alpha * \alpha' \sim \beta * \beta'$ .

**Proposición 3.3.1.**  $\pi_1(X, x_0)$  es un grupo.

**Demostración.**

1. Asociatividad:

$$[\alpha]([\beta][\gamma]) = [\alpha * (\beta * \gamma)] = [(\alpha * \beta) * \gamma] = ([\alpha][\beta])[\gamma]$$

2. Elemento neutro:  $[c_{x_0}]$

$$[\alpha][c_{x_0}] = [\alpha * c_{x_0}] = [\alpha] = [c_{x_0} * \alpha] = [c_{x_0}][\alpha]$$

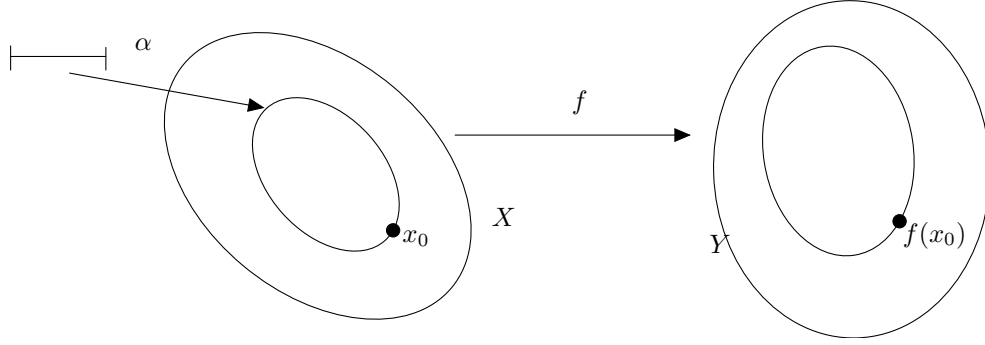
3. Elemento inverso:  $[\bar{\alpha}]$

$$[\alpha][\bar{\alpha}] = [\alpha * \bar{\alpha}] = [c_{x_0}] = [\bar{\alpha} * \alpha] = [\bar{\alpha}][\alpha]$$

**Definición 3.3.2.** A  $\pi_1(X, x_0)$  se le llama grupo fundamental del espacio  $X$  en  $x_0$ .

**Proposición 3.3.3.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación continua. Entonces  $f$  induce un homomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned} f_*: \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(Y, f(x_0)) \\ f_*[\alpha] &= [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

**Demostración.**

- $f_*$  está bien definida, pues la relación de homotopía relativa a  $\{0, 1\}$  es compatible con la composición:

$$f \circ \alpha \simeq f \circ \alpha' \text{ relativamente a } \{0, 1\} \Rightarrow f\alpha \sim f\alpha' \Leftrightarrow [f\alpha] = [f\alpha']$$

- $f_*$  es homomorfismo, pues la yuxtaposición de caminos es compatible con la composición:

$$f_*([\alpha][\alpha']) = f_*([\alpha * \alpha']) = [f \circ (\alpha * \alpha')] = [f\alpha * f\alpha'] = [f\alpha][f\alpha'] = f_*[\alpha]f_*[\alpha']$$

■

**Proposición 3.3.4.** Se cumplen

1. Si  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  entonces  $(g \circ f)_* = g_* f_*$ .
2.  $Id_* = Id$

**Demostración.** 1.  $(g \circ f)_*[\alpha] = [gf\alpha] = g_*[f\alpha] = g_*f_*[\alpha]$

2.  $Id_*[\alpha] = [Id\alpha] = [\alpha]$

■

**Consecuencia 3.3.5.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es homeomorfismo entonces  $f_*$  es isomorfismo.

**Demostración.** Sea  $f^{-1}: Y \rightarrow X$ . Se tiene el siguiente diagrama.

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{(f^{-1})_*} \pi_1(X, x_0)$$

Se cumple

$$f_* \circ (f^{-1})_* = (f \circ f^{-1})_* = Id_* = Id$$

$$(f^{-1})_* \circ f_* = (f^{-1} \circ f)_* = Id_* = Id$$

Por lo tanto  $f_*$  es isomorfismo y su inversa es  $(f^{-1})_*$ .

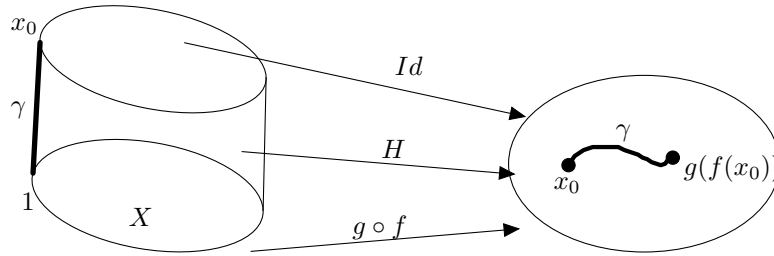
■

**Nota 3.3.6.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es una equivalencia de homotopía, entonces  $\exists g: Y \rightarrow X$  continua tal que  $f \circ g \simeq Id_X$  y  $g \circ f \simeq Id_Y$

$$x_0 \xrightarrow{f} f(x_0) \xrightarrow{g} g(f(x_0))$$

Nótese que  $g(f(x_0))$  no tiene por qué ser  $x_0$ . Tenemos entonces

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g(f(x_0)))$$



Si  $H$  es una homotopía entre  $Id_X$  y  $g \circ f$ , tenemos que  $\gamma(t) = H(x_0, t)$  es un camino entre  $x_0$  y  $g(f(x_0))$ .

**Proposición 3.3.7.** Sea  $\gamma: I \rightarrow X$  un camino entre  $x_0$  y  $x_1$ . Entonces existe un isomorfismo

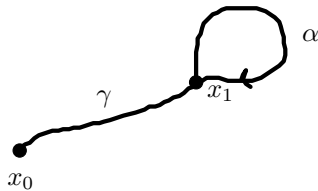
$$\gamma_{\#}: \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

dado por

$$\gamma_{\#}([\alpha]) = [(\gamma * \alpha) * \bar{\gamma}] = [\gamma * (\alpha * \bar{\gamma})].$$

Además, si  $\gamma$  es equivalente a  $\gamma'$ ,  $\gamma_{\#} = \gamma'_{\#}$ .

**Demostración.**



La aplicación  $\gamma_{\#}$  está bien definida:  $\alpha \sim \alpha' \Rightarrow \gamma * \alpha * \bar{\gamma} \sim \gamma * \alpha' * \bar{\gamma}$ . Vamos a comprobar que es

homomorfismo:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\#}([\alpha][\alpha']) &= \\
 &= \gamma_{\#}([\alpha * \alpha']) = [\gamma * (\alpha * \alpha') * \bar{\gamma}] = [\gamma * \alpha * \underbrace{\bar{\gamma} * \gamma}_{\sim c_{x_0}} * \alpha' * \bar{\gamma}] = \\
 &\stackrel{(1)}{=} [(\gamma * \alpha * \bar{\gamma}) * (\gamma * \alpha' * \bar{\gamma})] = \gamma_{\#}[\alpha]\gamma_{\#}[\alpha'].
 \end{aligned}$$

En (1) se usa la asociatividad de la yuxtaposición. Para probar que es isomorfismo veamos que  $\gamma_{\#}^{-1} = \bar{\gamma}_{\#}$ :

$$\gamma_{\#} \cdot \bar{\gamma}_{\#}([\alpha]) = \gamma_{\#}([\bar{\gamma} * \alpha * \bar{\gamma}]) = \underbrace{[\gamma * \bar{\gamma}]}_{\parallel_{\gamma}} * \underbrace{\alpha}_{\sim c_{x_0}} * \underbrace{[\gamma * \bar{\gamma}]}_{\sim c_{x_0}} = [c_{x_0} * \alpha * c_{x_0}] = [\alpha].$$

Análogamente se prueba que  $\bar{\gamma}_{\#}\gamma_{\#}([\alpha]) = [\alpha]$ . ■

**Corolario 3.3.8.** Todo lazo  $\gamma$  en  $x_0$  induce un automorfismo de  $\pi_1(X, x_0)$  dado por conjugación, es decir, a cada elemento  $[\alpha]$  se le hace corresponder  $[\gamma][\alpha][\gamma]^{-1}$ .

**Proposición 3.3.9.** Sea  $H$  una homotopía  $H: X \times I \rightarrow Y$  entre  $f, g: X \rightarrow Y$ . Dado  $x_0 \in X$ , sea  $\gamma: I \rightarrow X$  el camino  $\gamma(t) = H(x_0, t)$ . Este camino va de  $f(x_0) = H(x_0, 0)$  a  $g(x_0) = H(x_0, 1)$ . Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, f(x_0)) \\
 \downarrow g_* & \swarrow \cong & \uparrow \bar{\gamma}_{\#} \\
 \pi_1(Y, g(x_0)) & \xleftarrow{\gamma_{\#}} & 
 \end{array}$$

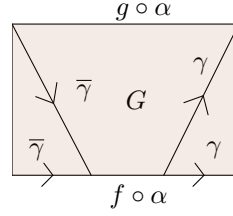
**Demostración** (con la inversa,  $\bar{\gamma}_{\#}$ ). Sea  $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ . Sea  $G = H \circ (\alpha \times Id)$

$$\begin{array}{ccccc}
 \boxed{\phantom{I \times I}} & \xrightarrow{\alpha \times Id} & X \times I & \xrightarrow{H} & Y \\
 I \times I & & & & 
 \end{array}$$

Se define  $F: I \times I \rightarrow Y$  de la siguiente forma

$$F(t, s) = \begin{cases} \bar{\gamma}(2t) & si \quad 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ G\left(\frac{4t+2s-2}{3s+1}, s\right) & si \quad \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{s+3}{4} \\ \gamma(4t-3) & si \quad \frac{s+3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$F$  hace que  $\bar{\gamma} * ((f \circ \alpha) * \gamma) \sim g \circ \alpha \xRightarrow[def]{=} \bar{\gamma}_{\#}f_*[\alpha] = g_*[\alpha]$ .



**Corolario 3.3.10.** Si  $f \simeq Id$ , entonces  $f_* = \gamma_\#$ .

**Corolario 3.3.11.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es una equivalencia de homotopía, entonces  $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$  es isomorfismo.

**Demostración.** Como  $f$  es equivalencia de homotopía  $\exists g: Y \rightarrow X$  tal que

- $f \circ g \stackrel{G}{\simeq} Id_Y$
- $g \circ f \stackrel{F}{\simeq} Id_X$

Tenemos para el camino  $\gamma(t) = F(x_0, t)$  que  $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = \gamma_\#$  por el Corolario 3.3.10.

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, f(x_0)) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(X, g(f(x_0))) \\ & & \searrow (g \circ f)_* = \gamma_\# & \nearrow & \end{array}$$

Entonces  $g_* \circ f_*$  isomorfismo  $\Rightarrow f_*$  inyectiva y  $g_*$  sobreyectiva. Análogamente, para el camino  $\eta(t) = G(f(x_0), t)$  tenemos que  $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = \eta_\#$ .

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(Y, f(x_0)) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(X, g(f(x_0))) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, f(g(f(x_0)))) \\ & & \searrow (f \circ g)_* = \eta_\# & \nearrow & \end{array}$$

por lo que  $g_*$  inyectiva y  $f_*$  sobreyectiva. En consecuencia, tanto  $g_*$  como  $f_*$  son biyectivas, ergo isomorfismos. ■

**Corolario 3.3.12.** Si  $A \subseteq X$  es un retracto de deformación de  $X$ , entonces la inclusión  $i: A \hookrightarrow X$  induce un isomorfismo  $i_*: \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ . En particular, los lazos que representan generadores de  $\pi_1(A, x_0)$  también representan generadores de  $\pi_1(X, x_0)$ .

**Demostración.** Sea  $i: A \hookrightarrow X$  la inclusión y  $r: X \rightarrow A$  la correspondiente retracción. Si probamos que las composiciones indicadas en los siguientes diagramas

$$\pi_1(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{r_*} \pi_1(A, x_0)$$

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{r_*} \pi_1(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0)$$

son la identidad, deduciremos que  $r_*$  tiene a  $i_*$  como inversa y que por lo tanto es isomorfismo. En primer lugar, usando la definición de retracto

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = Id_* = Id.$$

En segundo lugar, usamos que  $i \circ r \simeq Id$

$$i_* \circ r_* = (i \circ r)_* = [i \circ r] = [Id] = Id_* = Id.$$

■

Si  $X$  es contráctil entonces tiene el mismo tipo de homotopía que un espacio unipuntual  $\{p\}$  y por tanto,

**Corolario 3.3.13.** Si  $X$  es contractil entonces  $\pi_1(X, p) \cong \pi_1(\{p\}, p) = \{1\}$ .

**Definición 3.3.14.** Si  $X$  es un espacio conexo por caminos y  $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ , entonces se dice que  $X$  es **simplemente conexo** o **1-conexo**.

**Ejercicio 3.3.15.** Si  $r : X \rightarrow A$  es una retracción e  $i : A \hookrightarrow X$  es la inclusión, entonces  $i_*$  es inyectiva y  $r_*$  es sobreyectiva.

*Solución.* Por ser  $r$  una retracción se tiene que  $r \circ i = Id_A$ , por lo que  $r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = Id_{\pi_1(A)}$ . De este hecho se deducen los dos resultados. Por un lado  $r_*$  es sobreyectiva por tener inversa a la derecha y por otro lado  $i_*$  es inyectiva por tener inversa a la izquierda. □

**Proposición 3.3.16.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos, entonces

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

**Demostración.** Sea  $\alpha : I \rightarrow X \times Y$  un lazo y las correspondientes proyecciones  $p_1$  y  $p_2$

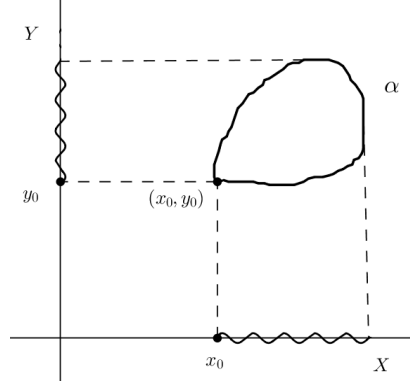
$$\begin{array}{c} X \times Y \xrightarrow{p_1} X \\ \downarrow p_2 \\ Y \end{array}$$

dadas por  $p_1(x, y) = x$  y  $p_2(x, y) = y$ . Ambas son continuas para la topología producto (probar como ejercicio). Consideremos los siguientes homomorfismos:

$$p_{1*} : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0),$$

$$p_{2*} : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(Y, y_0).$$





Sea

$$\begin{aligned}\psi: \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0), \\ [\alpha] &\longmapsto (p_{1*}[\alpha], p_{2*}[\alpha]) = ([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]).\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que  $\psi$  es homomorfismo para el producto  $(a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb')$ . Veamos que es isomorfismo:

■  $\psi$  sobreyectiva.

Sean  $[\varepsilon] \in \pi_1(X, x_0), [\eta] \in \pi_1(Y, y_0)$ . Definimos  $\varepsilon \times \eta: I \longrightarrow X \times Y$  como  $(\varepsilon \times \eta)(t) = (\varepsilon(t), \eta(t))$  que es continua para la topología producto (comprobar como ejercicio). Se cumple

$$(\varepsilon \times \eta)(0) = (\varepsilon(0), \eta(0)) = (x_0, y_0) = (\varepsilon \times \eta)(1),$$

por lo que  $\varepsilon \times \eta$  es un lazo en  $X \times Y$  de punto base  $(x_0, y_0)$  para el cual

$$\psi([\varepsilon \times \eta]) = ([p_1 \circ (\varepsilon \times \eta)], [p_2 \circ (\varepsilon \times \eta)]) = ([\varepsilon], [\eta]).$$

■  $\psi$  inyectiva.

Supongamos que  $\psi([\alpha]) = \psi([\beta])$ . Esto implica lo siguiente:

$$\begin{aligned}[p_1 \circ \alpha] &= [p_1 \circ \beta] \Rightarrow p_1 \alpha \sim p_1 \beta, \\ [p_2 \circ \alpha] &= [p_2 \circ \beta] \Rightarrow p_2 \alpha \sim p_2 \beta.\end{aligned}$$

Por tanto existen homotopías  $F, G: I \times I \longrightarrow X$  tales que

$$\begin{aligned}F(t, 0) &= p_1 \alpha(t), F(t, 1) = p_1 \beta(t) \text{ y } F(0, s) = x_0 = F(1, s), \\ G(t, 0) &= p_2 \alpha(t), G(t, 1) = p_2 \beta(t) \text{ y } G(0, s) = y_0 = G(1, s).\end{aligned}$$

Sea  $H: I \times I \longrightarrow X \times Y$  definida como  $H(t, s) = (F(t, s), G(t, s))$  (como ejercicio, probar que es continua para la topología producto). Se cumplen

$$H(t, 0) = (p_1\alpha(t), p_2\alpha(t)) = \alpha(t),$$

$$H(t, 1) = (p_1\beta(t), p_2\beta(t)) = \beta(t),$$

$$H(0, s) = (x_0, y_0) = H(1, s).$$

Por todo ello,  $\alpha \sim \beta$ , es decir  $[\alpha] = [\beta]$ , como queríamos demostrar. ■

# Tema 4

## Cálculo del Grupo Fundamental

Conocer el grupo fundamental de la circunferencia junto a la herramienta de cálculo que proporciona el teorema de Seifert-Van Kampen permite determinar el grupo fundamental de una gran variedad de ejemplos. Nuestro interés está centrado en las superficies.

### 4.1. Grupo fundamental de $S^1$

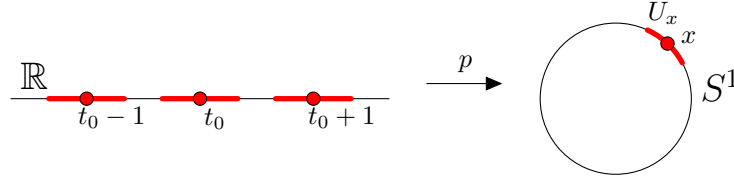
Vamos a empezar recalcando un *hecho crucial*. Sea  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$   $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ , entonces  $\forall x \in S^1 \exists$  un abierto  $U_x \subseteq S^1$  tal que  $p^{-1}(U_x)$  es unión disjunta de abiertos  $V_a$ , uno por cada  $a \in p^{-1}(x)$  y, además para cada  $a$

$$p_a = p|_{V_a} : V_a \rightarrow U_x$$

es homeomorfismo.

**Definición 4.1.1.** Llamamos **fibra** de  $x$  a  $p^{-1}(x)$  y **cubierta** de  $U_x$  a cada  $V_a$  (que contiene a  $a$ ).

Por ejemplo, si  $x = (\cos(2\pi t_0), \sin(2\pi t_0))$  con  $0 \leq t_0 < 1$ , entonces la fibra de  $x$  la forman los puntos  $t_0 + k$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , y si  $U_x = \{y \in S^1; y = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)); |t - t_0| < \varepsilon\}$  donde  $\varepsilon < 1 - t_0$ , las cubiertas que componen  $p^{-1}(U_x)$  son  $(k + t_0 - \varepsilon, k + t_0 + \varepsilon)$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .



**Lema 4.1.2** (Lema de Lebesgue). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto, y  $\mathcal{U}$  un recubrimiento por abiertos de  $X$ . Entonces existe un  $\delta > 0$  tal que todo subconjunto de  $X$  con diámetro menor que  $\delta$  está contenido en algún abierto del recubrimiento.

**Demostración.** Como  $X$  es compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito  $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathcal{U}$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  sea  $C_i = X \setminus A_i$ , y definimos la función  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  como

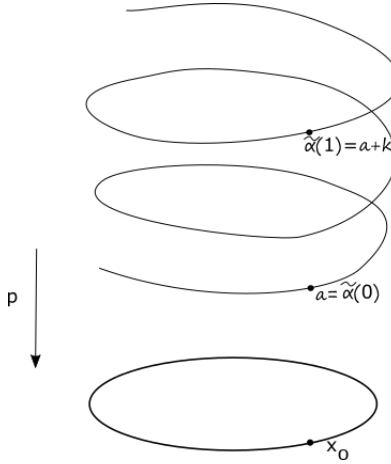
$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(x, C_i)$$

Dado que  $f$  es una función continua en un compacto, alcanza un mínimo  $\delta > 0$ . Ahora, si  $Y \subseteq X$  tiene diámetro menor que  $\delta$ , existe  $x_0 \in X$  tal que  $Y \subseteq B(x_0, \delta)$ . Como  $f(x) \geq \delta$  debe existir al menos un  $i$  de modo que  $d(x_0, C_i) \geq \delta$ . Pero esto significa que  $B(x_0, \delta) \subseteq A_i$ , y en particular,  $Y \subseteq A_i$ . ■

**Teorema 4.1.3.**  $\pi_1(S^1, (1, 0)) \cong \mathbb{Z}$

**Demostración.** Consistirá en alcanzar los siguientes objetivos:

- ① Dados un camino  $\alpha: I \rightarrow S^1 \mid \alpha(0) = x_0$  y  $\alpha(1) = x_1$ , y cualquier  $a \in p^{-1}(x_0)$ ,  $\exists!$  camino  $\tilde{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{R} \mid \tilde{\alpha}(0) = a$  y  $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$  ( $\Rightarrow \tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(x_1)$ ) llamado elevación de  $\alpha$  por  $a$ . En particular, si  $\alpha$  es la aplicación constante  $x_0$ ,  $\tilde{\alpha}$  es la constante  $a$ . Por otro lado, si  $\alpha$  es un lazo en  $x_0 = (1, 0)$ , entonces  $\tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(x_0) \Rightarrow \tilde{\alpha}(1) = a + k, k \in \mathbb{Z}$ . A  $k$  se le llama grado de  $\alpha$  ( $grad(\alpha) = k$ ).



- ② Si  $\alpha \sim \beta$  son caminos equivalentes entre  $x_0$  y  $x_1$ , entonces también lo son sus elevaciones por  $a$ ,  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$ . En particular, si  $\alpha$  y  $\beta$  son lazos en  $x_0 = (1, 0)$  entonces  $grad(\alpha) = grad(\beta)$ .
- ③ Definir

$$\Phi: \pi_1(S^1, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\Phi([\alpha]) = grad(\alpha)$$

- ④  $\Phi$  es isomorfismo. En particular,  $\alpha(t) = e^{2\pi it}$  es un lazo en  $S^1$  que representa un generador de  $\pi_1(S^1, x_0)$ .

Pasamos ahora a demostrar estos puntos, con lo que quedará probado el teorema.

- ① Sea  $\mathcal{U}$  un recubrimiento de  $S^1$  por abiertos que admiten cubiertas. Por el lema de Lebesgue existe una partición de  $[0, 1]$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ , tal que para todo  $i = 0, \dots, n-1$  existe  $U_i \in \mathcal{U}$  con  $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$ . Tenemos  $x_0 \in U_0$  y sea  $V_a$  la cubierta de  $U$  con  $a \in V_a$ . Por ser  $p_a$  homeomorfismo podemos definir

$$\tilde{\alpha}|_{[0, t_1]} = p_a^{-1} \circ \alpha|_{[0, t_1]}.$$

Ahora  $\alpha(t_1) \in U_1$  y si  $V_{a_1}$  es la cubierta de  $U_1$  con  $a_1 = \tilde{\alpha}(t_1) \in V_{a_1}$ , tomamos

$$\tilde{\alpha}|_{[t_1, t_2]} = p_{a_1}^{-1} \circ \alpha|_{[t_1, t_2]}.$$

Siguiendo este proceso, llegamos a construir un camino  $\tilde{\alpha}: I \rightarrow S^1$  con  $\tilde{\alpha}(0) = a$  y  $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ . Veamos que es único:

Supongamos que  $\hat{\alpha}$  es otra elevación que cumple  $\hat{\alpha}(0) = a$  y  $p \circ \hat{\alpha} = \alpha$ . Sea  $A = \{t : \tilde{\alpha}(t) = \hat{\alpha}(t)\}$ . Se tiene  $A \neq \emptyset$  pues  $\tilde{\alpha}(0) = \hat{\alpha}(0) = a$ . Además, vamos a ver que  $A = \overline{A}$ . Si  $t \in \overline{A} \Rightarrow \exists \{t_n\} \subseteq A$  convergiendo hacia  $t$ . Como  $t_n \in A$ ,  $\tilde{\alpha}(t_n) = \hat{\alpha}(t_n)$ , y por continuidad  $\tilde{\alpha}(t) = \hat{\alpha}(t) \Rightarrow t \in A$ .

Por último vamos a ver que  $A$  es abierto. Sea  $t \in A \Rightarrow \tilde{\alpha}(t) = \hat{\alpha}(t)$ . Sea  $U \in \mathcal{U}$ , abierto admitiendo cubiertas, con  $\alpha(t) \in U$ . Por continuidad  $\exists \varepsilon > 0 \mid \alpha((t - \varepsilon, t + \varepsilon)) \subseteq U$ . Ahora consideramos  $\hat{\alpha}((t - \varepsilon, t + \varepsilon))$  y  $\tilde{\alpha}((t - \varepsilon, t + \varepsilon))$ . Se tiene que ambos están contenidos en  $p^{-1}(U)$  y son conexos por ser imagen continua de conexos. Como  $p^{-1}(U)$  es unión disjunta de cubiertas,  $\hat{\alpha}((t - \varepsilon, t + \varepsilon))$  y  $\tilde{\alpha}((t - \varepsilon, t + \varepsilon))$  están contenidos cada uno en una cubierta, pero como además comparten un punto ( $\tilde{\alpha}(t) = \hat{\alpha}(t)$ ), están en la misma, la cual llamaremos  $V_{a'}$ . Tenemos que  $p_{a'}$  es homeomorfismo y  $p_{a'} \circ \tilde{\alpha}((t - \varepsilon, t + \varepsilon)) = p_{a'} \circ \hat{\alpha}((t - \varepsilon, t + \varepsilon)) = \alpha((t - \varepsilon, t + \varepsilon)) \Rightarrow \tilde{\alpha}(t') = \hat{\alpha}(t') \forall t' \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \Rightarrow (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subseteq A \Rightarrow t \in \text{int}(A) \Rightarrow A$  es abierto.

$A \neq \emptyset$ ,  $A$  abierto y cerrado en el espacio conexo  $[0, 1] \Rightarrow A$  es  $[0, 1]$ .

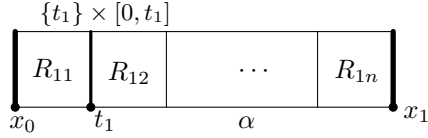
- ② Supongamos que  $\alpha \sim \beta \Rightarrow \exists H: I \times I \rightarrow S^1$  homotopía relativa a  $\{0, 1\}$  entre  $\alpha$  y  $\beta$ .

$$\begin{array}{ccc} \boxed{I \times I} & \xrightarrow{H} & S^1 \\ 0 & & 1 \end{array}$$

Sea  $\mathcal{U}$  un recubrimiento de  $S^1$  por abiertos admitiendo cubiertas como en ①. Por el lema de Lebesgue existe una partición de  $I \times I$  en cuadrados  $R_{ij}$  tal que  $\forall R_{ij} \exists U_{ij} \in \mathcal{U}$  con  $H(R_{ij}) \subseteq U_{ij}$ . Denotemos por  $H_{ij}$  a la restricción  $H|_{R_{ij}}$ .

$R_{n1}$	$\cdots$	$R_{nn}$
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$R_{11}$	$\cdots$	$R_{1n}$

Vamos a definir una homotopía  $\tilde{H}: I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$  entre  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$ .



Sea  $V_a$  la cubierta de  $U_{11}$  conteniendo a  $a$ . Elegimos  $\tilde{H}_{11} = p_a^{-1} \circ H_{11}$ . En particular, como  $H_{11}(0, s) = x_0$  y  $H_{11}(t, 0) = \alpha(t) \forall t, s \in [0, 1]$ , se sigue por la unicidad de elevaciones que  $\tilde{H}_{11}(0, s) = a$  y  $\tilde{H}_{11}(t, 0) = \tilde{\alpha}(t) \forall t, s \in [0, 1]$ .

Sea ahora  $V_{a_1}$  la cubierta de  $U_{12}$  con  $a_1 = \tilde{\alpha}(t_1) \in V_{a_1}$ . Se define  $\tilde{H}_{12} = p_{a_1}^{-1} \circ H_{12}$ . Hay que ver que  $\tilde{H}_{11}$  y  $\tilde{H}_{12}$  coinciden en  $R_{11} \cap R_{12} = \{t_1\} \times [0, t_1]$ . Esto es cierto, pues las restricciones  $\tilde{H}_{11}$  y  $\tilde{H}_{12}$  a dicha intersección son elevaciones del camino  $\gamma: [0, t_1] \longrightarrow S^1$  dado por  $\gamma(s) = H(t_1, s)$  que valen  $\tilde{\alpha}(t_1)$  para  $s = 0$ , por lo que la unicidad de elevaciones nos da  $\tilde{H}_{11} = \tilde{H}_{12}$  sobre  $R_{11} \cap R_{12}$ . Ahora seguimos inductivamente hasta conseguir una aplicación continua

$$\tilde{H}_1: \bigcup_{k=1}^n R_{1k} = [0, 1] \times [0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que  $\tilde{H}_1(t, 0) = \tilde{\alpha}(t)$ ,  $\tilde{H}_1(0, s) = \tilde{H}_{1n}(0, s) = a$  y  $\tilde{H}_1(1, s) = \tilde{H}_{11}(1, s) = \tilde{\alpha}(1)$  para  $t \in [0, 1]$  y  $s \in [0, t_1]$ . En la última igualdad se usa de nuevo la unicidad de elevación de caminos y el hecho de que  $H(1, s) = \alpha(1) = x_1 \forall s \in [0, t_1]$ .

Ahora se va subiendo inductivamente nivel a nivel hasta conseguir una aplicación continua  $\tilde{H}: I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$  con  $\tilde{H}(t, 0) = \tilde{\alpha}(t)$ ,  $\tilde{H}(0, s) = a$  y  $\tilde{H}(1, s) = \tilde{\alpha}(1) \forall s, t \in [0, 1]$ . Más aún, como  $\tilde{H}(0, 1) = a$ ,  $\tilde{H}(t, 1)$  es una elevación de  $H(t, 1) = \beta(t)$ , que empieza en  $a$  y por ello es  $\tilde{\beta}$ . Se ha probado así que  $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$ .

- ③ La buena definición de  $\Phi$  es una consecuencia inmediata de ②.
- ④ Veamos primero que  $\Phi$  es homomorfismo, esto es:

$$\Phi([\alpha][\beta]) = \Phi([\alpha * \beta]) = \text{grad}(\alpha * \beta) = \text{grad}(\alpha) + \text{grad}(\beta).$$

Esto es consecuencia de la igualdad  $\widetilde{\alpha * \beta} = \tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$  donde  $\tilde{\beta}$  es la elevación de  $\beta$  por  $\tilde{\alpha}(1)$ . Obsérvese que, por la elección de  $\tilde{\beta}$ , existe la yuxtaposición de  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$ . Además, la compatibilidad de esta yuxtaposición con la composición nos da

$$p \circ (\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}) = p \circ \tilde{\alpha} * p \circ \tilde{\beta} = \alpha * \beta.$$

Por unicidad de elevaciones esto implica que la elevación de  $\alpha * \beta$  empezando por  $\tilde{\alpha}(0)$  es  $\widetilde{\alpha * \beta} = \tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$ . Así que

$$\widetilde{\alpha * \beta}(1) = \tilde{\alpha} * \tilde{\beta}(1) = \tilde{\beta}(1) = \text{grad}(\beta) + \tilde{\alpha}(1) = \text{grad}(\beta) + \text{grad}(\alpha).$$

Veamos ahora que  $\Phi$  es isomorfismo.

■  $\Phi$  sobre:

Dado  $k \in \mathbb{Z}$  sea,  $\alpha_k(t) = (\cos(2\pi kt), \sin(2\pi kt))$ . Entonces la elevación  $\tilde{\alpha}_k$  empezando en  $0 \in \mathbb{R}$  es el camino  $\tilde{\alpha}_k(t) = kt$  y por tanto

$$\text{grad}(\alpha_k) = \tilde{\alpha}_k(1) = k.$$

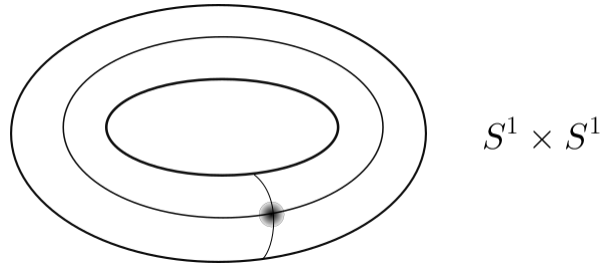
■  $\Phi$  inyectiva:

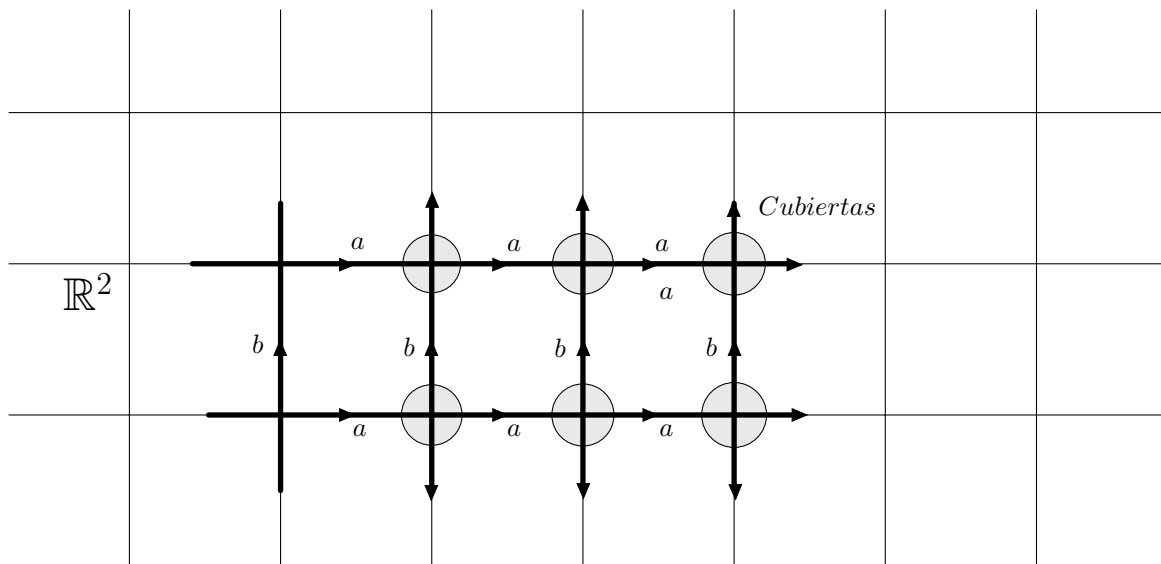
$\Phi([\alpha]) = 0 \Rightarrow \text{grad}(\alpha) = 0$ . Por tanto,  $\tilde{\alpha}$  es un lazo en  $0 \Rightarrow [\tilde{\alpha}] = 0 \in \pi_1(\mathbb{R}, 0) = \{0\}$ . Así que, para  $p_*: \pi_1(\mathbb{R}, 0) \rightarrow \pi_1(S^1, (1, 0))$  tenemos  $p_*[\tilde{\alpha}] = [p \circ \tilde{\alpha}] = [\alpha] \Rightarrow 0 = [\alpha]$ . ■

**Nota 4.1.4.** El resultado es válido sea cual sea el punto sobre el que se calcula el grupo fundamental de  $S^1$ .

**Nota 4.1.5.** Hay otros muchos ejemplos de lo que hemos llamado “hecho crucial”, a partir de los cuales se desarrolla la llamada teoría de cubiertas:

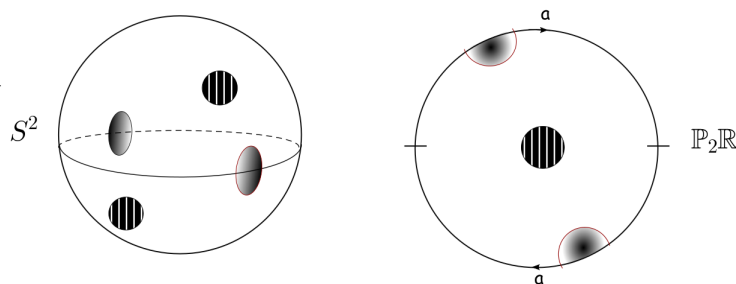
(A) Sea  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$  (toro) dada por  $p(t, s) = ((\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)))$





Vemos en el plano las cubiertas del entorno abierto indicado en la figura.

(B)  $S^2 \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$



Vemos en la esfera las dos cubiertas de los abiertos de  $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ .

Para profundizar más en esta teoría consultar [2].

La homotopía  $\tilde{H}$  definida en (2) es un ejemplo de la siguiente propiedad.

**Definición 4.1.6.** Dada una función continua  $p : E \rightarrow B$  entre espacios topológicos y un espacio  $X$ , se dice que el par  $(X, p)$  tiene la **propiedad de levantamiento de homotopía** si para toda homotopía  $H : X \times I \rightarrow B$  y para toda elevación  $\tilde{\alpha} : X \rightarrow E$  de  $\alpha(t) = H(t, 0)$  existe una homotopía  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow E$  elevando  $H$  (esto es,  $p\tilde{H} = H$ ) tal que  $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{H}(t, 0)$ .

En el caso particular que hemos abordado, tendríamos que  $X = I$ ,  $E = \mathbb{R}$  y  $B = S^1$ . Como  $(I, p)$  posee la propiedad de levantamiento de homotopía se tiene el siguiente resultado.



**Demostración.** Si  $\alpha \sim \beta$  mediante una homotopía  $F$ , por la propiedad de levantamiento de homotopía se tiene que  $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$  mediante  $\tilde{F}$ . Nótese que efectivamente esta última homotopía es relativa a  $\{0, 1\}$ , como vamos a probar. Por la definición del levantamiento de la homotopía tenemos que  $\tilde{H}(t, 0) = \tilde{\alpha}(t)$  y  $\tilde{H}(t, 1) = \tilde{\beta}(t)$ . Como ambas elevaciones se dan por  $a$ , se tiene que  $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = a$ . Además,  $\tilde{F}(1, s)$  es un camino entre  $\tilde{\alpha}(1)$  y  $\tilde{\beta}(1)$ . Por otro lado,  $F(1, s) = (1, 0)$ , luego  $\tilde{F}(1, s) \in p^{-1}((1, 0))$ , que tiene la topología discreta, por lo que  $\tilde{F}(1, s)$  es constante, de lo que se deduce que  $\tilde{F}(1, s) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ . El mismo razonamiento es válido para  $\tilde{F}(0, s)$ .

**Teorema 4.2.1 (Teorema de no retracción).** No existe retracción de  $B^2$  sobre  $S^1$ .

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(B^2, x_0) = \{1\} \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$$


**Demostración.** Sea  $g: B^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  definida como

$$g(x) = \begin{cases} (2\|x\| - 1)x - (2 - 2\|x\|)f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{si } \|x\| \geq \frac{1}{2} \\ -f(4\|x\|x) & \text{si } \|x\| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Si  $\|x_0\| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -f(4\|x_0\|x_0) = 0 \Rightarrow f(y) = 0$  en  $y = 4\|x_0\|x_0$ .

- Si  $\|x_0\| \geq \frac{1}{2} \Rightarrow (2\|x\| - 1)x_0 - (2 - 2\|x_0\|)f\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right) = \frac{2\|x_0\| - 1}{2 - 2\|x_0\|}x_0$ . Si tomamos  $z = \frac{x_0}{\|x_0\|}$ , llegamos a que

$$f(z) = \frac{\|x_0\|(2\|x_0\| - 1)}{2 - 2\|x_0\|}z = \lambda z \text{ para } \lambda = \frac{\|x_0\|(2\|x_0\| - 1)}{2 - 2\|x_0\|} > 0.$$

■

**Proposición 4.2.3.** Sea  $f: B^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , entonces  $\exists$  punto fijo  $f(x) = x$  o existe  $z \in S^1 \mid f(z) = \lambda z, \lambda > 1$ .

**Demostración.** Supongamos que  $f(x) \neq x \forall x$ . Sea  $h: B^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid h(x) = f(x) - x$ . Entonces  $h(x) \neq 0$  y por la proposición anterior,  $\exists z \in S^1 \mid h(z) = \mu z$  con  $\mu > 0$ , es decir,  $f(z) - z = \mu z \Rightarrow f(z) = (1 + \mu)z$ . Basta tomar  $\lambda = 1 + \mu$ . ■

**Teorema 4.2.4 (Punto fijo de Brouwer).** Toda  $f: B^2 \rightarrow B^2$  tiene un punto fijo.

**Demostración.** Sea  $f: B^2 \rightarrow B^2 \subseteq \mathbb{R}^2$  y supongamos que no tiene ningún punto fijo. Por la proposición anterior,  $\exists z \in S^1 \mid f(z) = \lambda z$  con  $\lambda > 1$ . Por lo tanto,  $\|f(z)\| = \lambda\|z\| = \lambda > 1$ , pero  $f(z) \in B^2 \Rightarrow \|f(z)\| \leq 1$ , luego hemos llegado a una contradicción. ■

**Teorema 4.2.5.** Todo polinomio  $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$  en  $\mathbb{C}$  tiene al menos una raíz.

**Demostración.** En primer lugar definimos  $f_n: S^1 \rightarrow S^1$  como  $f_n(z) = z^n$ . Obsérvese que  $z^n = e^{2\pi nti} = \cos(2\pi nt) + i \sin(2\pi nt)$ . De esta forma, el homomorfismo inducido por  $f_n$ ,

$$f_{n*}: \pi_1(S^1, (1, 0)) \rightarrow \pi_1(S^1, (1, 0))$$

lleva el generador  $[\alpha]$  representado por  $\alpha(t) = e^{2\pi it}$  en la clase de  $\alpha_n(t) = e^{2\pi int}$  cuyo grado es  $n$ . Así que  $f_{n*}[\alpha] = [\alpha_n] = n[\alpha]$ .

Ahora pasamos a razonar por reducción al absurdo. Supongamos que  $p(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$ . Podemos suponer que  $p(z)$  es mónico, pues en caso contrario bastaría con dividir por el término líder. Es decir, vamos a trabajar con  $p(z) = z^n + \cdots + a_0$ . Sea  $M = \max\{1, |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|\}$ . Si  $|z| \geq M$ , entonces  $|z|^j \leq |z|^{n-1}$  para  $j \leq n-1$ . Además,

$$|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0| \leq |a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_0| \leq (|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|)|z|^{n-1} \leq M|z|^{n-1} \leq |z|^n.$$

Definimos ahora las homotopías  $F: S^1 \times I \rightarrow S^1$  y  $G: S^1 \times I \rightarrow S^1$  de la siguiente forma

$$F(z, t) = \frac{p(Mtz)}{|p(Mtz)|} \quad G(z, t) = \frac{H(z, t)}{|H(z, t)|},$$

donde  $H: \mathbb{C} \times I \rightarrow \mathbb{C}$  es la función  $H(z, t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)$ . Se tiene que  $F$  es continua porque suponemos  $p(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$ . La continuidad de  $G$  es inmediata pues el denominador no se anula nunca. En efecto, al ser  $|z| \geq M$

$$\begin{aligned} H(z, t) = 0 &\Rightarrow z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0) = 0 \Rightarrow \\ z^n &= -t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0) \Rightarrow |z|^n = t|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0| \end{aligned}$$

Pero esto significaría que para  $0 < t < 1$ ,  $|z|^n < |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0| \leq |z|^n$ , con lo que hemos llegado a una contradicción. Observemos ahora lo siguiente

$$\begin{aligned} F(z, 0) &= \frac{p(0)}{|p(0)|} = 1 \text{ (cte)} & F(z, 1) &= \frac{p(Mz)}{|p(Mz)|} \\ G(z, 0) &= \frac{z^n}{|z|^n} = z^n = f_n(z) & G(z, 1) &= \frac{p(Mz)}{|p(Mz)|} \end{aligned}$$

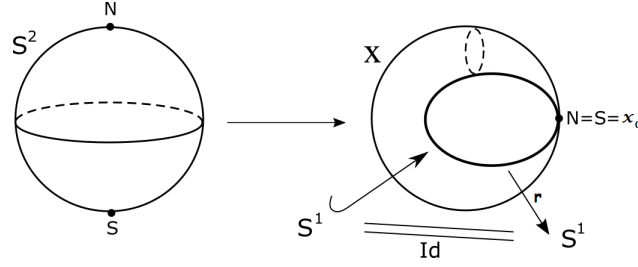
Por transitividad de la relación de homotopía  $\text{cte} \simeq f_n(z)$ . Este resultado nos conduce, considerando el camino  $\gamma(t) = H((1, 0), t)$  al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, (1, 0)) & \xrightarrow{f_{n*}} & \pi_1(S^1, (1, 0)) \\ \text{cte}_* \downarrow & \nearrow \gamma_\# & \\ \pi_1(S^1, q) & & \end{array}$$

Pero esto es una contradicción porque  $f_{n*} \neq 0$ , y  $\text{cte}_*$  es el homomorfismo trivial. ■

**Ejercicio 4.2.6.** Probar que si identificamos dos puntos de  $S^2$ , el espacio cociente  $X$  tiene grupo fundamental no trivial.

*Solución.* Si el grupo fundamental de  $X$  fuese trivial y nos fijamos en la circunferencia  $S^1$  en trazo grueso tenemos que  $X$  se retrae sobre  $S^1$  (ver dibujo).



$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0) \cong \{1\} \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$$

$(r \circ i)_* = Id_* = Id$

Ello implicaría que la identidad de  $\mathbb{Z}$  sería el homomorfismo nulo, lo que es una contradicción.  $\square$

**Ejercicio 4.2.7.** Probar que  $S^1$  es retracto del toro  $S^1 \times S^1$  pero no de deformación.

*Solución.* Es obvio que la proyección

$$r : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times \{y_0\} \cong S^1$$

$$(x, y) \longmapsto (x, y_0)$$

es una retracción. Pero no existe una retracción con deformación  $r$ . Si existiera, sería una equivalencia de homotopía y por tanto induciría un isomorfismo  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1 \times S^1, (x, y)) \cong \pi_1(S^1, p) \cong \mathbb{Z}$ , donde  $p = r(x, y)$ . Y no existen isomorfismos de  $\mathbb{Z}$  en  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .  $\square$

# Tema 5

## Teorema de Seifert-Van Kampen

### 5.1. Presentación de grupos.

#### Teorema de Seifert-Van Kampen

**Definición 5.1.1.** Sea  $G$  un grupo. Se llama **presentación** de  $G$  a un par  $\langle S|R \rangle$  donde  $S$  es un conjunto de generadores (esto es, todo elemento de  $G$  se puede escribir como un producto de elementos y sus inversos de  $S \subseteq G$ ). Los productos de elementos de  $S$  (y sus inversos) se llaman **palabras** de  $S$ .

Por su parte,  $R$  es un conjunto de palabras de  $S$  que son iguales al elemento neutro  $e \in G$ , las palabras en  $R$  se llaman **relaciones** de  $G$ . Además, el conjunto  $R$  es elegido para que si dos palabras  $p_1$  y  $p_2$  de  $S$  representan el mismo elemento de  $G$ , entonces se puede pasar de una a otra por operaciones deducidas a partir de las igualdades  $r^{\pm 1} = e$  con  $r \in R$  y las relaciones obvias del grupo  $G$ .

En el caso particular de que  $R = \emptyset$ , se dice que  $\langle S|\emptyset \rangle$  es un **grupo libre** con base  $S$ .

**Nota 5.1.2.** En la presentación del grupo no se suelen incluir relaciones triviales como, por ejemplo,  $aa^{-1} = e$ , que se suponen dadas implícitamente por la estructura del grupo.

**Nota 5.1.3** (Importante). Obsérvese que, dado un grupo  $H$ , para determinar que una aplicación  $f: G = \langle S|R \rangle \rightarrow H$  es un homomorfismo de grupos bastará comprobar que  $f(s^{-1}) = f(s)^{-1}$  y  $f(s_1^{\pm 1} \cdot s_2^{\pm 1}) = f(s_1)^{\pm 1} \cdot f(s_2)^{\pm 1}$  para  $s, s_1, s_2 \in S$ , y que los elementos de  $R$  van todos al neutro de  $H$ . En efecto, cualquier  $g \in G$  puede ser escrito como  $g = s_1^{\pm 1} \cdots s_m^{\pm 1}$  con  $s_i \in S$ . Entonces  $f(g) = f(s_1)^{\pm 1} \cdots f(s_m)^{\pm 1}$  no depende de la palabra de  $S$  elegida para representar  $g$ , de pues si  $g$  puede ser representado por otra palabra de  $S$ , las transformaciones por medio de elementos de  $R$  (sus inversos y las relaciones triviales de  $G$ ) se corresponden por  $f$  con operar con el elemento neutro, por lo que las dos posibles imágenes por  $f$  de las dos palabras que representan a  $g$  son coincidentes.

**Ejemplo 5.1.4.** Algunos ejemplos de presentaciones son:

$$1. \mathbb{Z} \begin{cases} \langle a | \rangle \text{ grupo libre de base } \{a\} \\ \langle a, b | ab^{-1} \rangle \end{cases} \quad \text{Son presentaciones equivalentes.}$$

2.  $\mathbb{Z}_n : \langle a | a^n \rangle$ .
3.  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle$ . En este caso  $R$  expresa la conmutatividad, que no se considera relación trivial, ya que trabajamos con grupos no necesariamente abelianos. Nótese que además  $R$  coincide con la identificación de las aristas en el polígono fundamental del toro.
4.  $\underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n \text{ veces}} : \langle a_1, \dots, a_n | a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1} \ 1 \leq i \leq j \leq n \rangle$ . Más generalmente, una presentación del grupo abeliano finitamente generado  $A = \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$  es

$$\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k | b_s^{n_s}, a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1}, a_j b_s a_j^{-1} b_s^{-1}, \ 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq s \leq k \rangle.$$

**Definición 5.1.5.** Sea  $G$  un grupo con presentación  $\langle S | R \rangle$ . Se llama **abelianización** de  $G$  al grupo abeliano  $G^{ab}$  con presentación  $\langle S | R \cup R_{ab} \rangle$  donde  $R_{ab} = \{s_i s_j s_i^{-1} s_j^{-1}, s_i, s_j \in S\}$ . Las expresiones  $s_i s_j s_i^{-1} s_j^{-1}$  se suelen abreviar como  $[s_i, s_j]$ , lo que se conoce como **conmutador** de  $s_i$  y  $s_j$ .

**Ejemplo 5.1.6.**  $\mathbb{Z} = \langle a | \rangle \Rightarrow \mathbb{Z}^{ab} = \langle a | a a a^{-1} a^{-1} \rangle = \langle a | \rangle = \mathbb{Z}$ . En general, si  $A$  es abeliano  $A^{ab} = A$ . En particular  $(\mathbb{Z}^n)^{ab} = \mathbb{Z}^n$ .

**Definición 5.1.7.** Sean  $G_1 = \langle S_1 | R_1 \rangle$  y  $G_2 = \langle S_2 | R_2 \rangle$  dos grupos disjuntos con elementos neutros  $e_1$  y  $e_2$ . Se llama **producto libre** de  $G_1$  y  $G_2$  al grupo denotado  $G_1 * G_2$  con presentación

$$\langle S_1 \cup S_2 | R_1 \cup R_2 \cup \{e_1, e_2\} \rangle.$$

Esto es, se identifican los elementos neutros de  $G_1$  y  $G_2$  con el de  $G_1 * G_2$  y se opera en  $G_1 * G_2$  con las relaciones de  $G_1$  y  $G_2$  por separado, de manera que solo se fusionan elementos de  $G_1$  o elementos de  $G_2$  no nulos de los grupos originales.

**Nota 5.1.8.**

1. Habitualmente se presupone que los elementos neutros son el mismo y se escribe simplemente  $\langle S_1 \cup S_2 | R_1 \cup R_2 \rangle$  para la presentación de  $G_1 * G_2$ .
2. Dados dos grupos  $G$  y  $H$  siempre se pueden encontrar grupos isomorfos disjuntos:  
Sea  $G' = G \times \{0\}$  con la operación  $(g, 0) \cdot (g', 0) = (gg', 0)$  y  $H' = H \times \{1\}$  con la operación análoga  $(h, 1) \cdot (h', 1) = (hh', 1)$ .
3. Obsérvese que hay definidos unos homomorfismos inyectivos  $k_i : G_i \longrightarrow G_1 * G_2$   $k_i(g) = g$  para cada  $g \in G_i$ . Más aún, dos homomorfismos cualesquiera  $h_1 : G_1 \longrightarrow H$  y  $h_2 : G_2 \longrightarrow H$ , llegando al mismo grupo  $H$  determinan un homomorfismo  $h : G_1 * G_2 \longrightarrow H$  por  $h(g_i) = h_i(g_i)$  y por tanto  $h_i = h \circ k_i$  ( $i = 1, 2$ ).

**Ejemplo 5.1.9.**

1.  $\underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n \text{ veces}} : \langle a_1, \dots, a_n \mid \rangle$ . Grupo libre con base  $a_1, \dots, a_n$ .
2.  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 : \langle a, b \mid b^2 \rangle$ .
3.  $\mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m : \langle a, b \mid a^n, b^m \rangle$ .
4.  $(G_1 * G_2)^{ab} = G_1^{ab} \times G_2^{ab}$ . Probarlo como ejercicio.

El producto libre es un caso particular de la siguiente construcción.

**Definición 5.1.10.** Sea el siguiente diagrama de homomorfismos de grupos:

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{f_1} & G_1 \\ f_2 \downarrow & & \\ G_2 & & \end{array}$$

donde  $G_i$  tiene presentación  $\langle S_i \mid R_i \rangle$  ( $i = 0, 1, 2$ ). Se llama **producto amalgamado** del diagrama del grupo  $G$  con presentación

$$\langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_{12} \rangle$$

con  $R_{12} = \{f_1(s)f_2(s)^{-1}, s \in S_0\}$ , esto es,  $f_1(s) = f_2(s)$  en  $G$ . Es decir, el producto amalgamado es el resultado de introducir las relaciones  $R_{12}$  en el producto libre  $G_1 * G_2$ .

**Nota 5.1.11** (Importante). Todo diagrama conmutativo de grupos

$$\begin{array}{ccc} \langle S_0 \mid R_0 \rangle = G_0 & \xrightarrow{f_1} & G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle \\ f_2 \downarrow & & \downarrow f'_1 \\ \langle S_2 \mid R_2 \rangle = G_2 & \xrightarrow{f'_2} & H \end{array}$$

induce un homomorfismo  $\varphi: G \longrightarrow H$  donde  $G = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_{12} \rangle$  es el producto amalgamado del diagrama con flechas en línea continua. El homomorfismo inducido está definido como  $\varphi(s_i) = f'_i(s_i)$  para  $s_i \in S_i$  ( $i = 1, 2$ ) pues, por ser  $f'_i$  homomorfismo,  $f'_i(R_i) = e \in H$  y por la conmutatividad del diagrama, para todo  $s \in S_0$

$$\varphi(f_1(s)f_2(s)^{-1}) = f'_1f_1(s)f'_2f_2(s)^{-1} = e \in H;$$

así pues,  $\varphi(R_{12}) = e \in H$ .

**Ejemplo 5.1.12.** Tres casos particulares de interés:

1. Si  $G_0 = \{1\}$ , el producto amalgamado es  $G_1 * G_2$ .

2. Si  $G_0$  es cualquiera y  $G_1 = G_2 = \{1\} = \langle \mid \rangle$ , el producto amalgamado vuelve a ser el grupo trivial  $\{1\} = \langle \mid \rangle$ .
3. Si  $G_2 = \{1\}$  y  $f: G_0 \longrightarrow G_1$  es sobreyectivo, entonces el producto amalgamado es también el grupo trivial. Ejercicio.

**Teorema 5.1.13 (Teorema de Seifert-Van Kampen).** Sea  $X$  un espacio topológico tal que  $X = X_1 \cup X_2$  con  $X_1, X_2$  abiertos y  $X_1 \cap X_2$  conexo por caminos. Entonces, si  $x_0 \in X_1 \cap X_2$  tenemos el diagrama conmutativo de grupos

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) & \xrightarrow{i_{1*}} & \pi_1(X_1, x_0) \\ i_{2*} \downarrow & & \downarrow j_{1*} \\ \pi_1(X_2, x_0) & \xrightarrow{j_{2*}} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{ccc} X_1 \cap X_2 & \xhookrightarrow{i_1} & X_1 \xhookrightarrow{j_1} X \\ X_1 \cap X_2 & \xhookrightarrow{i_2} & X_2 \xhookrightarrow{j_2} X \end{array}$$

son las correspondientes inclusiones. Bajo estas hipótesis,  $\pi_1(X, x_0)$  es isomorfo al producto amalgamado del diagrama de flechas en trazo continuo  $G$ .

Más aún, el homomorfismo  $\varphi: G \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$  inducido por  $j_{1*}: \pi_1(X_1, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$  y  $j_{2*}: \pi_1(X_2, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$  es un isomorfismo.

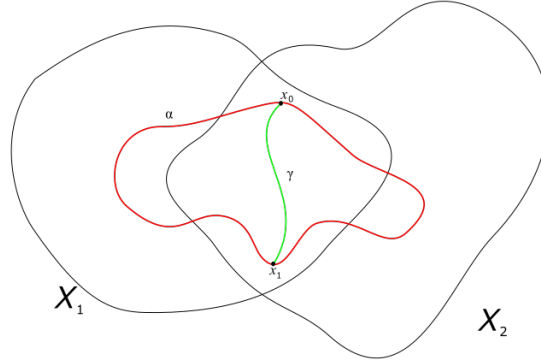
**Idea del teorema:** Sea  $\alpha: I \longrightarrow X$  un lazo en  $x_0$  que es la yuxtaposición de un camino  $\alpha|_{[0, t_1]}$  en  $X_1$  y otro  $\alpha|_{[t_1, 1]}$  en  $X_2$ . Consideramos  $\gamma$  un camino en  $X_1 \cap X_2$  entre  $x_0 = \alpha(0) = \alpha(1)$  y  $x_1 = \alpha(t_1)$ . Ahora  $\alpha$  puede descomponerse como yuxtaposición de dos lazos

$$\underbrace{(\alpha|_{[0, t_1]} * \bar{\gamma})}_{\text{En } X_1} * \underbrace{(\gamma * \alpha|_{[t_1, 1]})}_{\text{En } X_2}$$

el primero en  $j_{1*}(\pi_1(X_1, x_0))$  y el otro en  $j_{2*}(\pi_1(X_2, x_0))$ .

Para una prueba completa consultar [2].





### 5.1.1. Uso del teorema de Seifert-Van Kampen

A partir del Teorema de Seifert-Van Kampen es posible obtener una presentación explícita del grupo fundamental  $\pi_1(X, x_0)$  siguiendo el siguiente procedimiento.

① Si  $\pi_1(X_1 \cap X_2) = \langle S_0 | R_0 \rangle$  y  $\pi_1(X_i, x_0) = \langle S_i | R_i \rangle$  ( $i = 1, 2$ ) entonces sabemos que el producto amalgamado  $G$  del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) & \xrightarrow{i_{1*}} & \pi_1(X_1, x_0) \\ i_{2*} \downarrow & & \\ \pi_1(X_2, x_0) & & \end{array}$$

tiene presentación  $\langle S_1 \cup S_2 | R_1 \cup R_2 \cup R_{12} \rangle$ .

② En las relaciones  $i_{1*}(s)i_{2*}(s)^{-1}$  de  $R_{12}$ , donde  $s \in S_0$ , se busca cómo expresar  $i_{1*}(s)$  e  $i_{2*}(s)$  en función de los generadores en  $S_1$  y  $S_2$  respectivamente. Una vez hecho esto, todas las relaciones de  $R_1 \cup R_2 \cup R_{12}$  estarán escritas explícitamente con los elementos de  $S_1 \cup S_2$ .

③ Como  $\varphi: G \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  es un isomorfismo, teniendo en cuenta la definición de  $\varphi$ ,  $\pi_1(X, x_0)$  tiene como presentación a

$$\langle \varphi(S_1) \cup \varphi(S_2) | \varphi(R_1) \cup \varphi(R_2) \cup \varphi(R_{12}) \rangle = \langle j_{1*}(S_1) \cup j_{2*}(S_1) | j_{1*}(R_1) \cup j_{2*}(R_2) \cup \varphi(R_{12}) \rangle$$

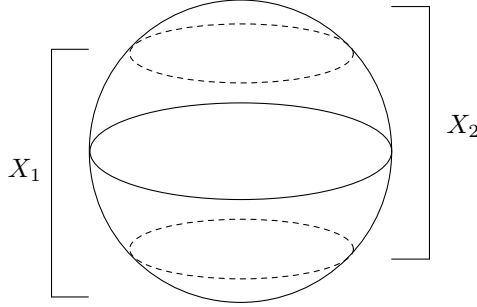
④ Finalmente, un elemento  $s \in S_k$  ( $k = 1, 2$ ) es la clase de un lazo  $\alpha$  en  $X_k$  basado en  $x_0$ , por tanto  $j_{k*}(\alpha)$  es la clase de ese mismo lazo  $\alpha$  pero ahora en  $X$ , ya que  $j_{k*}[\alpha] = [j_k \circ \alpha]$ . Análogamente, cualquier relación  $r \in R_k$  es un producto de clases de lazos en  $X_k$  basados en  $x_0$ , por tanto, como  $j_{k*}$  es homomorfismo,  $j_{k*}(r)$  es un producto de las clases de esos mismos lazos pero ahora en  $X$ .

⑤ Por último, cada relación  $i_{1*}(s)i_{2*}(s)^{-1} \in R_{12}$  ( $s \in S_0$ ), que ya tenemos escrita como un producto de elementos de  $S_1 \cup S_2$ , se transforma por  $\varphi$  en un producto de imágenes por  $j_{1*}$  y  $j_{2*}$  de esos elementos (por  $j_{1*}$  si el elemento es de  $S_1$  y por  $j_{2*}$  si está en  $S_2$ ). Así pues, las relaciones en

$\varphi(R_{12})$  son ahora productos de elementos de  $j_{1*}(S_1) \cup j_{2*}(S_2)$  que, recordemos, eran las clases en  $X$  de los lazos que representaban a los elementos de  $S_1 \cup S_2$ .

**Ejemplo 5.1.14.**

①  $\pi_1(S^2, x_0)$

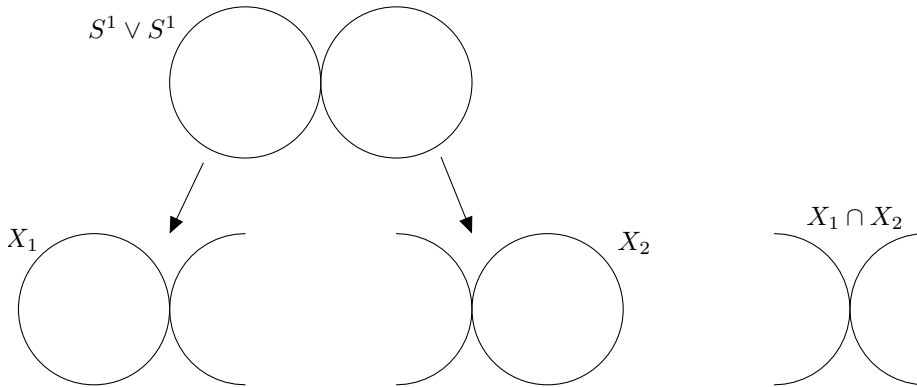


Tal como lo hemos elegido,  $X_1 \cap X_2$  es conexo por caminos y tiene al ecuador como retracts de deformación fuerte, por lo que  $\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \cong \pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ . Por otro lado, tanto  $X_1$  como  $X_2$  son homeomorfos a un disco abierto, que es contráctil, luego  $\pi_1(X_1, x_0) = \pi_1(X_2, x_0) = \{1\}$ . El teorema de Seifert-Van Kampen (5.1.13) nos da el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \cong \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_1(X_1, x_0) = \{1\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X_2, x_0) = \{1\} & \dashrightarrow & \pi_1(S^2, x_0) = \{1\} \end{array}$$

Por lo tanto, el grupo fundamental de  $S^2$  es el grupo trivial.

②  $\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0)$



En este caso,  $X_1 \cap X_2$  es contráctil, por lo que  $\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) = \{1\}$ . Por otro lado, tanto  $X_1$  como  $X_2$  tienen a  $S^1$  como retracts de deformación fuerte, por lo que las inclusiones  $k_1: S^1 \rightarrow$

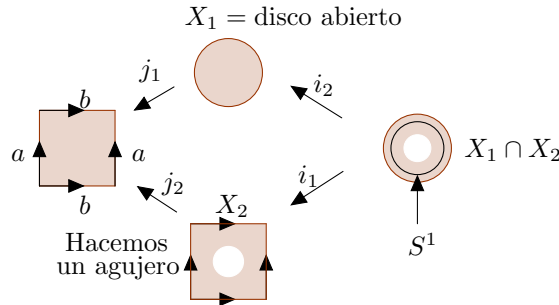
$X_1$  y  $k_1: S^1 \rightarrow X_2$  inducen isomorfismos  $k_{1*}: \pi_1(S^1, x_0) \rightarrow \pi_1(X_1, x_0)$  y  $k_{2*}: \pi_1(S^1, x_0) \rightarrow \pi_1(X_2, x_0)$ . Por tanto,  $\pi_1(X_1, x_0) = \pi_1(X_2, x_0) \cong \mathbb{Z}$ , siendo los generadores las clases  $\varepsilon_i \in \pi_1(X_i, x_0)$  de las vueltas canónicas  $t \mapsto e^{2\pi i t}$  de las circunferencias completas de  $X_1$  y  $X_2$ , respectivamente. El diagrama resultante del teorema de Seifert-Van Kampen (5.1.13) es el siguiente

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \cong \{1\} & \xrightarrow{i_1*} & \pi_1(X_1, x_0) = \langle \varepsilon_1 \rangle \\ i_2* \downarrow & & \downarrow j_1* \\ \langle \varepsilon_2 \rangle = \pi_1(X_2, x_0) & \xrightarrow{j_2*} & \pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) = \langle j_{1*}(\varepsilon_1), j_{2*}(\varepsilon_2) \rangle \end{array}$$

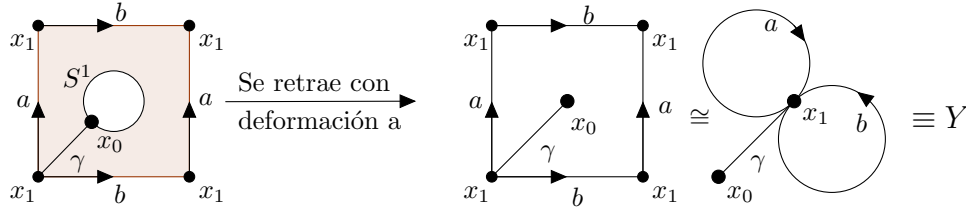
El resultado es el grupo libre con dos generadores que son las clases en  $\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0)$  de las vueltas canónicas de las dos circunferencias que componen  $S^1 \vee S^1$ . Nótese que no es abeliano.

En general  $\pi_1(S^1 \vee \dots \vee S^1, x_0) \cong \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ , donde  $S^1 \vee \dots \vee S^1$  es el resultado de unir una cantidad finita de circunferencias por un solo punto común a todas.

③  $\pi_1(T, x_0)$  (Toro)



Obsérvese que  $X_1$  es contráctil, así que  $\pi_1(X_1, x_0) = \{1\}$ . Por otra parte,  $X_1 \cap X_2$  tiene a  $S^1$  como retracts de deformación fuerte, por lo que  $\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) = \langle [\alpha^0] \rangle \cong \mathbb{Z}$ , siendo  $\alpha^0(t) = e^{2\pi i t}$  la vuelta canónica en  $S^1$  y la clase es la de  $\alpha^0$  en  $\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)$ , ya que la inclusión  $i: S^1 \rightarrow X_1 \cap X_2$  induce un isomorfismo  $i_*: \pi_1(S^1, x_0) \rightarrow \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)$ . Vamos a ver con más detalle lo que le ocurre a  $X_2$ .

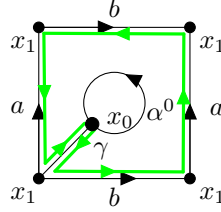


Claramente  $Y$  tiene a  $S^1 \vee S^1$  como retracts de deformación fuerte, por lo que  $\pi_1(Y, x_1) = \langle [\alpha^a], [\alpha^b] \rangle$ , siendo  $\alpha^a$  y  $\alpha^b$  las vueltas canónicas  $t \mapsto e^{2\pi i t}$  de las circunferencias de  $S^1 \vee S^1$ .

Esto se debe a que la inclusión  $k_Y: S^1 \vee S^1 \rightarrow Y$  induce un isomorfismo. Por otro lado el isomorfismo de cambio de punto de base  $\gamma_\#: \pi_1(Y, x_1) \rightarrow \pi_1(Y, x_0)$  lleva  $[\alpha^a]$  y  $[\alpha^b]$  en  $[\gamma * \alpha^a * \bar{\gamma}]$  y  $[\gamma * \alpha^b * \bar{\gamma}]$  respectivamente. Como a su vez  $X_2$  tiene a  $Y$  como retracts de deformación fuerte, las clases de los lazos  $\gamma * \alpha^a * \bar{\gamma}$  y  $\gamma * \alpha^b * \bar{\gamma}$  en  $\pi_1(X_2, x_0)$  son también generadores, pues la inclusión  $k_2: Y \rightarrow X_2$  induce un isomorfismo  $\pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(X_2, x_0)$ . Denotemos por  $\varepsilon_2^a$  y  $\varepsilon_2^b$  a esas clases, de forma que  $\pi_1(X_2, x_0) = \langle \varepsilon_2^a, \varepsilon_2^b \rangle$ . El diagrama del teorema de Seifert-Van Kampen (5.1.13) es el siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) = \langle \varepsilon_0 \rangle & \xrightarrow{i_{1*}} & \pi_1(X_1, x_0) = \{1\} = \langle \mid \rangle \\ i_{2*} \downarrow & & \downarrow j_{1*} \\ \pi_1(X_2, x_0) = \langle \varepsilon_2^a, \varepsilon_2^b \rangle & \xrightarrow{j_{2*}} & \pi_1(T, x_0) \end{array}$$

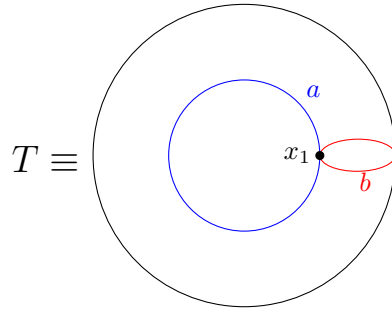
Necesariamente  $i_{1*}(\varepsilon_0) = 1$ . Vamos a ver cuánto vale  $i_{2*}(\varepsilon_0)$ . Para ello nos vamos a ayudar del siguiente dibujo que indica cómo se transforma el lazo  $\alpha^0$  por el retracts de deformación fuerte  $r: X_2 \rightarrow Y$ .



Así pues, tenemos lo siguiente ya que  $k_{2*} \circ r_* = Id$ ,

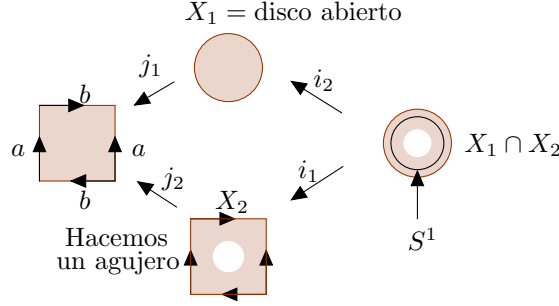
$$\begin{aligned} i_{2*}(\varepsilon_0) &= k_{2*} r_* i_{2*}[\alpha^0] = k_{Y*}[r \circ \alpha^0] = k_{2*}[\gamma * \alpha^b * \alpha^a * \bar{\alpha}^b * \bar{\alpha}^a * \bar{\gamma}] = \\ &= k_{2*}[\gamma * \alpha^b * \bar{\gamma} * \gamma * \alpha^a * \bar{\gamma} * \gamma * \bar{\alpha}^b * \bar{\gamma} * \gamma * \bar{\alpha}^a * \bar{\gamma}] = \varepsilon_2^b \varepsilon_2^a (\varepsilon_2^b)^{-1} (\varepsilon_2^a)^{-1}. \end{aligned}$$

En definitiva,  $\pi_1(T, x_0) = \langle \varepsilon^a, \varepsilon^b | \varepsilon^a \varepsilon^b (\varepsilon^a)^{-1} (\varepsilon^b)^{-1} \rangle = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , donde  $\varepsilon^a = j_{2*}(\varepsilon_2^a)$  y  $\varepsilon^b = j_{2*}(\varepsilon_2^b)$  son las clases de  $\gamma * \alpha^a * \bar{\gamma}$  y  $\gamma * \alpha^b * \bar{\gamma}$  en  $\pi_1(T, x_0)$ .

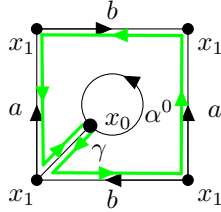


Deshaciendo el cambio de punto de base para tener ahora  $x_1$  como punto base, obtenemos  $\pi_1(T, x_1) = \langle \eta^a, \eta^b | \eta^a \eta^b (\eta^a)^{-1} (\eta^b)^{-1} \rangle$ , donde  $\eta^a$  y  $\eta^b$  son las clases de las vueltas canónicas  $\alpha^a$  y  $\alpha^b$  en las circunferencias  $a$  y  $b$ .

④  **$X$  = Botella de Klein.** Operamos de manera similar al anterior ejemplo.

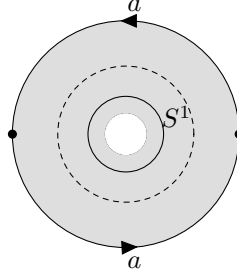


Se tiene que  $X_1 \cap X_2$  tiene por retracto de deformación fuerte a  $S^1$ , así que  $\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) = \langle \varepsilon_0 | \rangle \cong \mathbb{Z}$ , donde  $\varepsilon_0$  es la clase de la vuelta canónica  $\alpha^0$  de la circunferencia  $S^1$ . Además,  $X_1$  es contráctil, con lo que  $\pi_1(X_1, x_0) = \{1\}$ . Para  $X_2$  basta con hacer el mismo razonamiento que para el toro y concluimos que  $\pi_1(X_2, x_0) = \langle \varepsilon_2^a, \varepsilon_2^b | \rangle$  donde  $\varepsilon_2^a$  y  $\varepsilon_2^b$  son las clases en  $\pi_1(X_2, x_0)$  de los lazos  $\gamma * \alpha^a * \bar{\gamma}$  y  $\gamma * \alpha^b * \bar{\gamma}$ . Aquí,  $\alpha^a$  y  $\alpha^b$  son las vueltas canónicas de las circunferencias  $a$  y  $b$ . Ahora, por el teorema de Seifert-Van Kampen (5.1.13) y teniendo en cuenta que  $i_{1*}(\varepsilon_0) = 1$  se llega a que  $\pi_1(X, x_0) = \langle j_{2*}(\varepsilon_2^a), j_{2*}(\varepsilon_2^b) | j_{2*}(i_{2*}(\varepsilon_0))^{-1} \rangle$ . Por último, calculamos  $i_{2*}(\varepsilon_0)$  de forma análoga a como lo hicimos para el toro.

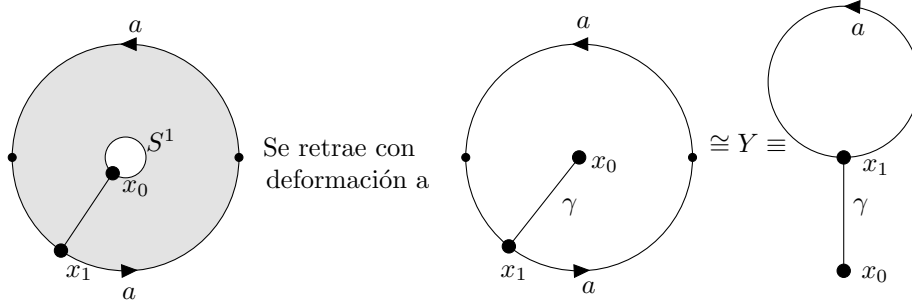


$$i_{2*}(\varepsilon_0) = [\gamma * \bar{\alpha}^b * \alpha^a * \bar{\alpha}^b * \bar{\alpha}^a * \bar{\gamma}] = (\varepsilon_2^b)^{-1} \varepsilon_2^a (\varepsilon_2^b)^{-1} (\varepsilon_2^a)^{-1}.$$

Por ello,  $\pi_1(X, x_0) = \langle \varepsilon^a, \varepsilon^b | \varepsilon^a \varepsilon^b (\varepsilon^a)^{-1} (\varepsilon^b)^{-1} \rangle$ , donde  $\varepsilon^a = j_{2*}(\varepsilon_2^a)$  y  $\varepsilon^b = j_{2*}(\varepsilon_2^b)$  son las clases de  $\gamma * \alpha^a * \bar{\gamma}$  y  $\gamma * \alpha^b * \bar{\gamma}$  en  $\pi_1(X, x_0)$ . Si, como en el caso del toro, se deshace el cambio de punto base a  $x_1$ , tenemos  $\pi_1(X, x_1) = \langle \eta^a, \eta^b | \eta^a \eta^b (\eta^a)^{-1} (\eta^b)^{-1} \rangle$ , donde  $\eta^a$  y  $\eta^b$  son las clases de las vueltas canónicas de las circunferencias  $a$  y  $b$ .

⑤  $X = \mathbb{P}_2 \mathbb{R}$  Plano proyectivo

Tomamos como  $X_1$  un disco abierto, que al ser contráctil cumple que  $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ . El conjunto  $X_2$  será el resultado de eliminar un disco cerrado de  $X$ . Por tanto,  $X_1 \cap X_2$  tendrá como retracto de deformación fuerte a  $S^1$ , es decir,  $\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) = \langle \varepsilon_0 \rangle$ , donde  $\varepsilon_0$  es la clase de la vuelta canónica de  $S^1$ . En  $X_2$  observemos lo siguiente



Como se puede observar,  $\pi_1(Y, x_0) \cong \mathbb{Z}$  está generado por la clase del lazo  $\gamma * \alpha^a * \bar{\gamma}$ , donde  $\alpha^a$  es la vuelta canónica de la circunferencia  $a$ . Por tanto, como la inclusión  $k: Y \rightarrow X_2$  induce un isomorfismo  $\pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(X_2, x_0)$ , tenemos que  $\pi_1(X_2, x_0) \cong \mathbb{Z}$  generado por la clase  $\varepsilon_2$  del lazo  $\gamma * \alpha^a * \bar{\gamma}$  en  $\pi_1(X_2, x_0)$ . Del teorema 5.1.13 de Seifert-Van Kampen obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) = \langle \varepsilon_0 \rangle & \xrightarrow{i_1^*} & \pi_1(X_1, x_0) = \{1\} = \langle \mid \rangle \\
 i_2^* \downarrow & & \downarrow j_1^* \\
 \pi_1(X_2, x_0) = \langle \varepsilon_2 \rangle & \xrightarrow{j_2^*} & \pi_1(X, x_0)
 \end{array}$$

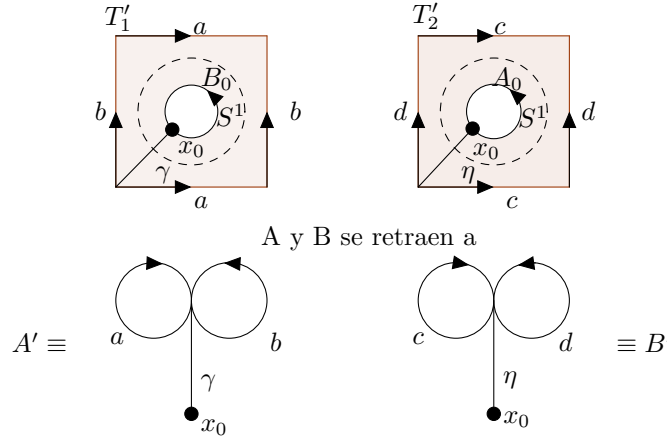
Como  $i_{1*}(\varepsilon_0) = 1$ , solo tenemos que calcular  $i_{2*}(\varepsilon_0)$ , que de manera análoga al toro y a la botella de Klein nos da

$$i_{2*}(\varepsilon_0) = [i_2 \circ \alpha^0] = [\gamma * \alpha^a * \alpha^a * \bar{\gamma}] = [\gamma * \alpha^a * \bar{\gamma} * \gamma * \alpha^a * \bar{\gamma}] = \varepsilon_2 \varepsilon_2 = \varepsilon_2^2$$

Esto quiere decir que  $\pi_1(X, x_0) = \langle \varepsilon | \varepsilon^{-2} \rangle = \langle \varepsilon | \varepsilon^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ , donde  $\varepsilon = j_{2*}(\varepsilon_2)$  es la clase de  $\gamma * \alpha^a * \bar{\gamma}$  en  $\pi_1(X, x_0)$ . Si deshacemos el cambio de punto base, tenemos  $\pi_1(X, x_1) = \langle \eta | \eta^2 \rangle$ , donde  $\eta$  es la clase de  $\alpha^a$ , la vuelta canónica de la circunferencia  $a$ .

⑥ **Suma conexa de dos toros  $\mathbf{X} = \mathbf{T}_1 \# \mathbf{T}_2$**

Llamamos  $T'_i$  al resultado de eliminar un disco abierto de cada  $T_i$  como se observa en la figura, de forma que  $T_1 \# T_2 = T'_1 \cup T'_2$ .



Sean  $A_0$  y  $B_0$  las coronas circulares que se indican en la misma figura. Vamos a tomar  $A = T'_1 \cup A_0$  y  $B = T'_2 \cup B_0$ . Claramente  $A \cap B = A_0 \cup B_0$ , que tiene a la circunferencia  $S^1$  por donde se realiza la suma conexa como retracto de deformación fuerte. También se tiene que  $A$  y  $B$  se retraen con deformación fuerte a las figuras indicadas como  $A'$  y  $B'$ . Sean  $\alpha^a, \alpha^b, \alpha^c$  y  $\alpha^d$  las vueltas canónicas de las circunferencias  $a, b, c$  y  $d$ . Vamos a denotar  $\varepsilon'_1 = \gamma_\#[\alpha^a]$ ,  $\varepsilon'_2 = \gamma_\#[\alpha^b]$ ,  $\varepsilon'_3 = \eta_\#[\alpha^c]$ ,  $\varepsilon'_4 = \eta_\#[\alpha^d]$  las clases correspondientes en  $A$  y  $B$ , que son generadores pues las inclusiones  $A' \hookrightarrow A$  y  $B' \hookrightarrow B$  inducen isomorfismos  $\pi_1(A', x_0) \cong \pi_1(A, x_0)$  y  $\pi_1(B', x_0) \cong \pi_1(B, x_0)$ . Tenemos lo siguiente, donde  $\varepsilon$  es la clase de la vuelta canónica de  $S^1$ ,

$$\pi_1(A \cap B, x_0) = \langle \varepsilon | \rangle \quad \pi_1(A, x_0) = \langle \varepsilon'_1, \varepsilon'_2 | \rangle \quad \pi_1(B, x_0) = \langle \varepsilon'_3, \varepsilon'_4 | \rangle.$$

Notemos ahora que  $i_{1*}(\varepsilon) = \varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \varepsilon'^{-1}_1 \varepsilon'^{-1}_2$  y que  $i_{2*}(\varepsilon) = \varepsilon'_3 \varepsilon'_4 \varepsilon'^{-1}_3 \varepsilon'^{-1}_4$ . Por tanto ya solo tenemos que aplicar el teorema 5.1.13 de Seifert-Van Kampen para concluir que

$$\pi_1(X, x_0) = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 | \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1} \varepsilon_2^{-1} \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_3^{-1} \varepsilon_4^{-1} \rangle,$$

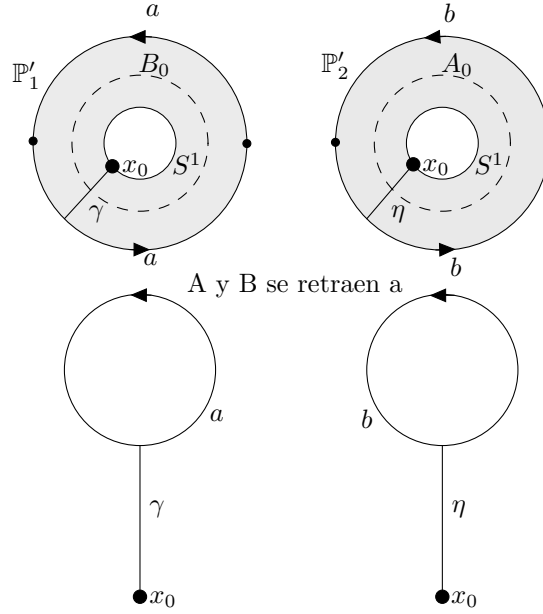
donde  $\varepsilon_1 = j_{1*}(\varepsilon'_1)$ ,  $\varepsilon_2 = j_{1*}(\varepsilon'_2)$ ,  $\varepsilon_3 = j_{2*}(\varepsilon'_3)$  y  $\varepsilon_4 = j_{2*}(\varepsilon'_4)$  para las inclusiones  $j_1 : A \hookrightarrow X$  y  $j_2 : B \hookrightarrow X$ .

Usando conmutadores, el grupo que hemos calculado queda como

$$\pi_1(X, x_0) = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 | [\varepsilon_1, \varepsilon_2][\varepsilon_4, \varepsilon_3] \rangle.$$

⑦  $\mathbf{X} = \mathbb{P}_2\mathbb{R} \# \mathbb{P}_2\mathbb{R}$  (Sabemos que es homeomorfo a la botella de Klein).

Como se hizo para la suma conexa de dos toros, sean  $\mathbb{P}'_1$  y  $\mathbb{P}'_2$  el resultado de quitar un disco abierto en cada plano proyectivo de forma que  $\mathbb{P}_2\mathbb{R} \# \mathbb{P}_2\mathbb{R} = \mathbb{P}'_1 \cup \mathbb{P}'_2$ . Sean  $A_0$  y  $B_0$  las coronas circulares indicadas en la figura.



Tomamos  $A = \mathbb{P}'_1 \cup A_0$  y  $B = \mathbb{P}'_2 \cup B_0$ . Se tiene que  $A \cap B = A_0 \cup B_0$ , que tiene como retracts de deformación fuerte a la circunferencia  $S^1$  por la que se hace la suma conexa. Sea  $\varepsilon_0$  representado por su vuelta canónica en  $\pi_1(S^1, x_0)$ . Denotamos  $\varepsilon'_1 = \gamma_\#[\alpha^a]$  y  $\varepsilon'_2 = \eta_\#[\alpha^b]$ , donde  $\alpha^a$  y  $\alpha^b$  son las vueltas canónicas de las circunferencias  $a$  y  $b$ , y las clases están en  $\pi_1(A, x_0)$  y  $\pi_1(B, x_0)$ , respectivamente. Tenemos lo siguiente:

$$\pi_1(A \cap B, x_0) = \langle \varepsilon_0 | \rangle \quad \pi_1(A, x_0) = \langle \varepsilon'_1 | \rangle \quad \pi_1(B, x_0) = \langle \varepsilon'_2 | \rangle$$

Como  $i_{1*}(\varepsilon_0) = (\varepsilon'_1)^2$  y  $i_{2*}(\varepsilon_0) = (\varepsilon'_2)^2$ , el teorema de Seifert-Van Kampen (5.1.13) nos da

$$\pi_1(X, x_0) = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 | \varepsilon_1 \varepsilon_2^{-2} \rangle$$

donde  $\varepsilon_i = j_{i*}(\varepsilon'_i)$  para las inclusiones  $j_1 : A \hookrightarrow X$  y  $j_2 : B \hookrightarrow X$ .



**Nota 5.1.15.** Hemos calculado en (4) que el grupo fundamental de la Botella de Klein es  $\langle a, b | aba^{-1}b \rangle$ , mientras que en (7) nos aparece la presentación  $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 | \varepsilon_1 \varepsilon_2^{-2} \rangle$ . Tenemos así dos presentaciones del mismo grupo (salvo isomorfismo). Veamos cómo pasar de una a la otra. Sea  $b' = a^{-1}b$ , de modo que  $b = ab'$ . Como  $a$  y  $b$  son generadores, entonces  $a$  y  $b'$  también lo son. Así pues,

$$aba^{-1}b = a^2(a^{-1}b)(a^{-1}b) = a^2(a^{-1}b)^2 = ab'^2$$

Por lo tanto, efectivamente, representan el mismo grupo. Basta tomar  $a = \varepsilon_1$  y  $b' = \varepsilon_2^{-1}$ .

En el siguiente tema calcularemos de forma general los grupos fundamentales de los tipos de superficies estudiados en el tema 2 utilizando estrategias similares a las de estos últimos ejemplos. Pero antes vamos a ver otras aplicaciones del teorema 5.1.13.

## 5.2. Separación del plano por curvas cerradas

Como una aplicación del teorema de Seifert-Van Kampen se probará que toda curva cerrada simple separa al plano. Empezamos con el siguiente lema.

**Lema 5.2.1.** Sea  $A$  un espacio compacto y  $g: A \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  una aplicación continua. Si  $0$  está en la componente no acotada de  $\mathbb{R}^2 \setminus g(A)$  entonces  $g$  es homotópicamente trivial.

Antes de empezar la demostración observamos que  $\mathbb{R}^2$  es localmente conexo por caminos y por ello también lo es el abierto  $\mathbb{R}^2 \setminus g(A)$ . Por tanto, las componentes conexas y conexas por caminos de  $\mathbb{R}^2 \setminus g(A)$  coinciden y son abiertos de  $\mathbb{R}^2 \setminus g(A)$  y, por tanto, de  $\mathbb{R}^2$ .

**Demostración.** Por la observación anterior y la hipótesis podemos elegir un camino  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus g(A)$  de  $0$  a un punto  $p$  fuera de una bola  $B$  que contenga a  $g(A)$ . La aplicación  $G: A \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus g(A)$  dada por  $G(x, t) = g(x) - \alpha(t)$  define una homotopía entre  $g$  y la aplicación  $h(x) = g(x) - p$ . Nótese que  $G(x, t) \neq 0$  pues  $\alpha(I) \cap g(A) = \emptyset$ . Ahora sea  $H: A \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus g(A)$  la aplicación  $H(x, t) = tg(x) - p$ . Así pues,  $H$  define una homotopía entre  $h$  y la aplicación constante  $-p$ . Entonces, por la propiedad transitiva de la relación de homotopía,  $g$  es homotópica a una aplicación constante. Nótese que  $H(x, t) \neq 0$  pues  $\|tg(x)\| \leq \|g(x)\| \leq r < \|p\|$  donde  $r$  es el radio de la bola  $B$ . ■

**Lema 5.2.2.** Sea  $A \subset S^2$  compacto y  $a, b \in S^2$ . Dada una aplicación continua  $f: A \rightarrow S^1 \setminus \{a, b\}$ , si  $a$  y  $b$  están en la misma componente de  $S^2 \setminus f(A)$  entonces  $f$  es homotópicamente trivial.

**Demostración.** Es consecuencia del lema anterior si tomamos la proyección estereográfica

$$\rho: S^2 \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

seguida de la traslación  $t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que lleva  $\rho(b)$  en 0. Entonces, decir que  $a$  y  $b$  están en la misma componente de  $S^2 \setminus f(A)$  es equivalente a decir que 0 está en la componente no acotada de  $\mathbb{R}^2 \setminus t\rho(f(A))$ . ■

**Proposición 5.2.3.** Sea  $f: S^1 \rightarrow S^2$  una inyección continua. Entonces la imagen  $\Sigma = f(S^1)$  divide a  $S^2$ , es decir,  $S^2 \setminus \Sigma$  tiene al menos dos componentes.

Nótese que  $f: S^1 \rightarrow \Sigma$  es homeomorfismo.

**Demostración.** Ya hemos comentado que las componentes conexas coinciden con las componentes conexas por caminos de  $\mathbb{R}^2 - \Sigma$ .

Vamos a suponer que  $S^2 - \Sigma$  es conexo por caminos y escribimos  $\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$ , donde  $\Sigma_{\pm}$  es la imagen de la semicircunferencia  $E_{\pm}$  ( $E_+ = \{(x, y) \in S^1 : y \geq 0\}$ ,  $E_- = \{(x, y) \in S^1 : y \leq 0\}$ ). Si  $\Sigma_+ \cap \Sigma_- = \{a, b\}$ , es inmediato que  $S^2 \setminus \{a, b\} = (S^2 \setminus \Sigma_+) \cup (S^2 \setminus \Sigma_-)$ . Además  $(S^2 \setminus \Sigma_+) \cap (S^2 \setminus \Sigma_-) = S^2 \setminus \Sigma$ , que hemos supuesto que es conexo por caminos.

Entonces podemos aplicar el teorema de Seifert-Van Kampen (5.1.13) y tenemos que  $\pi_1(S^2 \setminus \{a, b\}, x_0)$  es el producto amalgamado del diagrama de flechas continuas

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x_0) & \xrightarrow{i_1*} & \pi_1(U, x_0) \\ i_2* \downarrow & & \downarrow j_1* \\ \pi_1(V, x_0) & \dashrightarrow_{j_2*} & \pi_1(S^2 \setminus \{a, b\}, x_0) \end{array}$$

donde  $U = S^2 \setminus \Sigma_+$  y  $V = S^2 \setminus \Sigma_-$ .

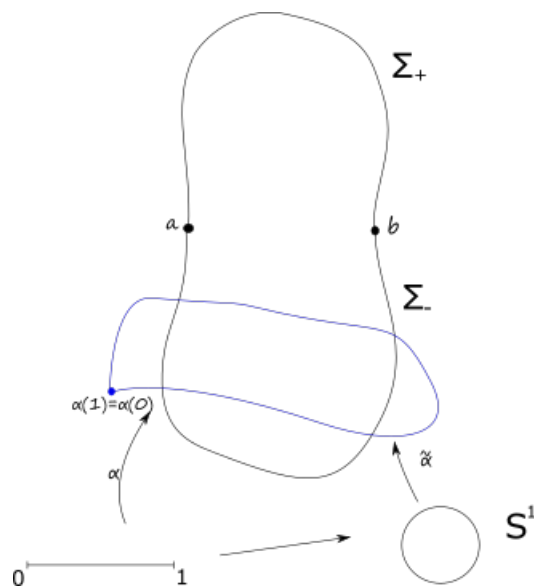
Veamos que los homomorfismos  $j_{1*}$  y  $j_{2*}$  son triviales, de donde se deducirá que  $\pi_1(S^2 \setminus \{a, b\}, x_0) = \{1\}$  es el grupo trivial, llegando a una contradicción pues  $\pi_1(S^2 \setminus \{a, b\}, x_0) \cong \mathbb{Z}$  (ya que  $S^2 \setminus \{a, b\}$  es homeomorfo al plano menos un punto mediante la proyección estereográfica).

Para ver que  $j_{1*}$  es trivial ( $j_{2*}$  se hace análogamente) procedemos de la siguiente manera. Sea  $[\alpha] \in \pi_1(U, x_0)$ . Como  $\alpha: [0, 1] \rightarrow U$  cumple  $\alpha(0) = \alpha(1)$ ,  $\alpha$  induce una aplicación  $\tilde{\alpha}: S^1 \rightarrow U$  con  $\tilde{\alpha}(e^{2\pi it}) = \alpha(t)$  como se puede ver en la figura más abajo. Es decir,  $\tilde{\alpha}_*: \pi_1(S^1, (1, 0)) \rightarrow \pi_1(U, x_0)$  lleva el generador  $\varepsilon$  representado por la vuelta canónica de  $S^1$  en  $[\alpha]$ . Entonces  $j_{1*}[\alpha] = (j_{1*} \circ \tilde{\alpha})_*(\varepsilon)$ . Tenemos  $j_1 \circ \tilde{\alpha}: S^1 \rightarrow U \rightarrow S^2 \setminus \{a, b\}$ . Además  $a, b \in \Sigma_+$  y  $\Sigma_+ \cap j_1 \circ \tilde{\alpha}(S^1) = \emptyset$ , por lo que  $a$  y  $b$  están en la misma componente de  $S^1 \setminus j_1 \circ \tilde{\alpha}(S^1)$  y por el lema 5.2.2  $j_1 \circ \tilde{\alpha}$  es homotópicamente trivial, así que

$$j_{1*}[\alpha] = j_{1*} \circ \tilde{\alpha}_*(\varepsilon) = (j \circ \tilde{\alpha})_*(\varepsilon) = 1.$$

Es decir,  $j_{1*}$  es el homomorfismo trivial.

El resultado anterior se puede reformular en el plano. Esto es, se tiene



**Proposición 5.2.4** (Teorema de Jordan). Si  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una inyección continua, su imagen divide a  $\mathbb{R}^2$ .

Este resultado es equivalente a la proposición anterior, pues podemos ver  $S^2$  como  $\mathbb{R}^2$  con el punto del infinito por medio de la proyección estereográfica. Entonces, por la proposición anterior, además de la componente  $C$  del punto de  $S^2$  que corresponde al  $\infty$  de  $\mathbb{R}^2$ , existe otra componente  $C'$ . Ahora bien, como  $C$  y  $C'$  son abiertos de  $S^2$ , tenemos que la clausura  $\overline{C'} \subseteq C' \cup f(S^1)$  es un compacto de  $S^2$  que no contiene al  $\infty$  y, por tanto, al pasar a  $\mathbb{R}^2$ ,  $C'$  está acotada. Por el contrario, al pasar de  $C$  a  $\mathbb{R}^2$ ,  $C$  contiene circunferencias arbitrariamente grandes y no está acotada. Así pues, hay al menos dos componentes en  $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ .

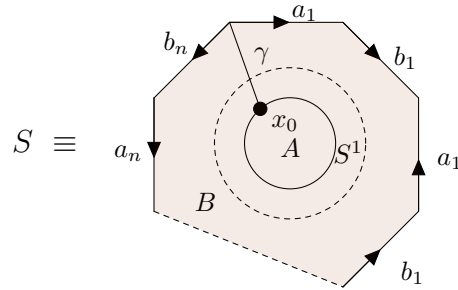
# Tema 6

## Clasificación de Superficies.

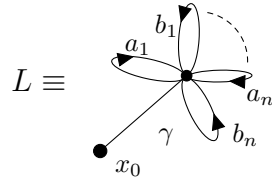
## Conclusión

### 6.1. El grupo fundamental de una superficie de tipo I

Sea  $S$  una superficie de tipo I. Recordemos que estas superficies vienen representadas por un modelo que tiene el código  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$ . Esto es,  $S$  está representada por la identificación de los lados de un polígono regular de  $4n$  lados de acuerdo con el siguiente gráfico:



Procedemos de manera similar a los ejemplo del capítulo anterior: descomponemos  $S$  como la unión  $S = A \cup B$  donde  $A$  es un disco abierto, por lo que es contráctil, esto es,  $\pi_1(A, x_0) = \{1\}$ , y  $B$  es  $S$  menos un disco cerrado contenido en  $A$ . En particular,  $B$  se retrae al siguiente grafo:



Por otro lado,  $A \cap B$  se retrae con deformación fuerte a la circunferencia  $S^1$ . Sea  $\varepsilon$  la clase de la vuelta canónica de  $S^1$ . Sea  $k_*: \pi_1(L, x_0) \rightarrow \pi_1(B, x_0)$  el isomorfismo inducido por la inclusión  $k: L \rightarrow B$ . Sabemos que  $\pi_1(L, x_0)$  es el grupo libre engendrado por las clases de los lazos  $\gamma * a_i * \bar{\gamma}$  y  $\gamma * b_i * \bar{\gamma}$ , donde  $a_i$  y  $b_i$  son las vueltas canónicas indicadas de la misma manera. Por tanto las clases, que denotamos  $\alpha'_i$  y  $\beta'_i$  respectivamente, de esos mismos lazos en  $B$  generan  $\pi_1(B, x_0)$ . Tenemos el

siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(A \cap B, x_0) = \langle \varepsilon \rangle & \xrightarrow{i_{1*}} & \pi_1(A, x_0) = \{1\} \\
 i_{2*} \downarrow & & \downarrow j_{1*} \\
 \pi_1(B, x_0) = \langle \alpha'_1, \beta'_1, \dots, \alpha'_n, \beta'_n \rangle & \xrightarrow{j_{2*}} & \pi_1(S, x_0)
 \end{array}$$

Como se ha hecho repetidas veces ya, en este diagrama se comprueba que  $i_{2*}(\varepsilon) = [\alpha'_1, \beta'_1] \cdots [\alpha'_n, \beta'_n]$ , donde  $[\alpha'_i, \beta'_i]$  indica la relación de conmutación. Además, como  $i_{1*}(\varepsilon) = 1$ , usando el teorema de Seifert-Van Kampen, se llega a

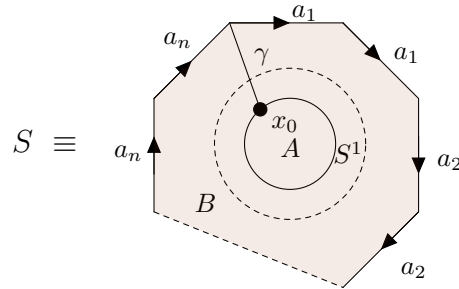
$$\pi_1(S, x) = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n | [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_n, \beta_n] \rangle,$$

donde  $\alpha_i = j_{2*}(\alpha'_i)$  y  $\beta_i = j_{2*}(\beta'_i)$  son las clases de los lazos  $\gamma * a_i * \bar{\gamma}$  y  $\gamma * b_i * \bar{\gamma}$  en  $X$ . Ahora, al abelianizar la relación del grupo, que es un producto de conmutadores, se vuelve trivial y nos queda el grupo abeliano libre

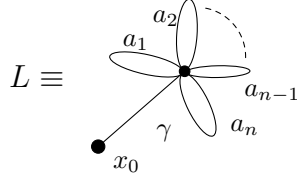
$$\begin{aligned}
 (\pi_1(S, x))^{ab} &= \langle \alpha_i, \beta_i | [\alpha_i, \beta_i], [\alpha_i, \beta_j], 1 \leq i, j \leq n \rangle = \\
 &\langle \alpha_i, \beta_i | [\alpha_i, \beta_j], [\alpha_i, \alpha_j], [\beta_i, \beta_j], 1 \leq i, j \leq n \rangle \cong \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{2n \text{ veces}}.
 \end{aligned}$$

## 6.2. El grupo fundamental de una superficie de tipo II

Una superficie  $S$  de tipo II viene representada por el código  $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$ . Esto es,  $S$  es el resultado de identificar los lados de un polígono de  $2n$  lados de acuerdo con el siguiente gráfico:



Como en el caso anterior, escribimos  $S = A \cup B$ , donde  $A$  es un disco abierto, por lo que es contráctil, esto es,  $\pi_1(A, x_0) = \{1\}$ , y  $B$  es  $S$  menos un disco cerrado contenido en  $A$ , por lo que  $B$  se retrae al siguiente grafo:



Por otro lado,  $A \cap B$  se retrae con deformación fuerte a la circunferencia  $S^1$ . Sean  $\alpha'_i = \gamma_\# [a_i]$  las clases de los lazos  $\gamma * a_i * \bar{\gamma}$  ya vistos en  $B$ , que al representar generadores de  $\pi_1(L, x_0)$  también son representantes de generadores de  $\pi_1(B, x_0)$ . Tenemos el siguiente diagrama, donde  $\varepsilon$  la clase de la vuelta canónica de  $S^1$  en  $A \cap B$ ,

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A \cap B, x_0) = \langle \varepsilon \rangle & \xrightarrow{i_{1*}} & \pi_1(A, x_0) = \{1\} \\ i_{2*} \downarrow & & \downarrow j_{1*} \\ \pi_1(B, x_0) = \langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_n \rangle & \xrightarrow{j_{2*}} & \pi_1(S, x_0) \end{array}$$

Se tiene que  $i_{1*}(\varepsilon) = 1$  y  $i_{2*}(\varepsilon) = \alpha'_1 \alpha'_1 \cdots \alpha'_n \alpha'_n = \alpha'^2_1 \cdots \alpha'^2_n$ , así que sin más que aplicar el teorema de Seifert-Van Kampen obtenemos

$$\pi_1(S, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n | \alpha_1^2 \cdots \alpha_n^2 \rangle,$$

donde  $\alpha_i = j_{2*}(\alpha'_i)$  son las clases de los lazos  $\gamma * a_i * \bar{\gamma}$  en  $X$ . Ahora, abelianizando

$$(\pi_1(S, x))^{ab} = \langle \alpha_i | \alpha_1^2 \cdots \alpha_n^2, [\alpha_i, \alpha_j] \ 1 \leq i, j \leq n \rangle.$$

Si ahora llamamos  $\beta_i = \alpha_i$  para  $1 \leq i \leq n-1$  y  $\beta_n = \alpha_1 \cdots \alpha_n$  nos queda

$$(\pi_1(S, x))^{ab} = \langle \beta_i | [\beta_i, \beta_j], \beta_n^2, \ 1, i \leq j \leq n-1 \rangle \cong \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n-1 \text{ veces}} \times \mathbb{Z}_2$$

### 6.3. Fin del teorema de clasificación de superficies.

#### Triangulación

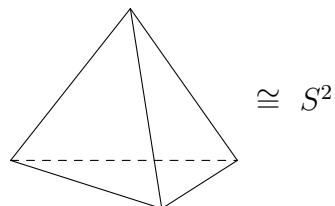
Los grupos abelianizados de modelos diferentes no son isomorfos. Por tanto, representan modelos de superficies no homeomorfas. Para terminar la clasificación de superficies queda probar que toda superficie conexa y compacta es homeomorfa a algún modelo. Para ello, hacemos uso de la idea triangulación.

**Definición 6.3.1.** Una **triangulación** de una superficie  $S$  es un conjunto de vértices, aristas y triángulos  $K$  en algún  $\mathbb{R}^n$  cumpliendo:

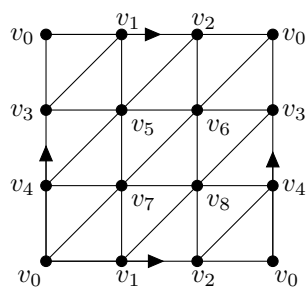
1. Si  $\sigma \in K$ , entonces todas sus caras están en  $K$ .
2. Si  $\sigma, \tau \in K$ , entonces  $\sigma \cap \tau$  es una cara común, posiblemente vacía.
3.  $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subseteq \mathbb{R}^n$  es homeomorfo a  $S$ .

**Ejemplo 6.3.2.**

1. El borde de un tetraedro triangula a  $S^2$ .



2. Triangulación del toro.

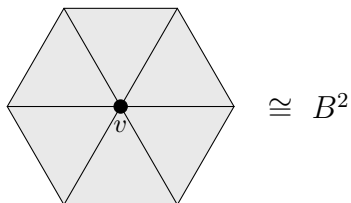


Observar que la triangulación aquí descrita no es plana pues las caras exteriores son iguales dos a dos. Al identificar tenemos una triangulación en el espacio tridimensional.

**Nota 6.3.3.** Se puede hablar de triangulación de espacios que no son superficies, por ejemplo, de grafos.

**Proposición 6.3.4.** Toda triangulación de una superficie tiene las dos propiedades siguientes.

1. Toda arista de  $K$  está exactamente en dos triángulos de  $K$ .
2. Dado un vértice  $v \in K$ , la unión de todos los triángulos que contienen a  $v$  es homeomorfa a un disco.



**Teorema 6.3.5.** Toda superficie es triangulable.

La demostración de este teorema no es sencilla. Existen varios métodos para probarlo. Una demostración puramente topológica puede encontrarse en [3] o [4], que usa técnicas topológicas más refinadas. Otra demostración de tipo geométrico basada en la existencia de geodésicas puede consultarse en [5]. Alternativamente puede verse en [6] una demostración basada en la caracterización por Kuratowski de los grafos planos.

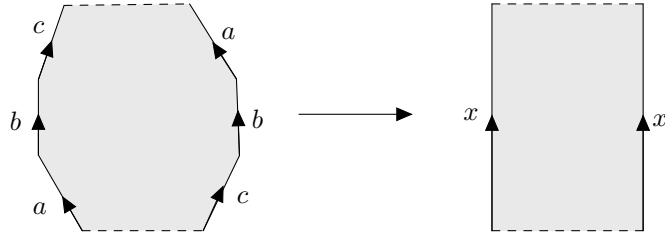
Una vez que sabemos que toda superficie admite una triangulación, estamos en condiciones de completar el teorema de clasificación de las superficie con el siguiente resultado aún pendiente.

**Teorema 6.3.6.** Toda superficie conexa y compacta es homeomorfa a un modelo.

**Demostración.** Sea  $K$  una triangulación de  $S$ . Ordenando los triángulos  $t_1, \dots, t_n$  (sólo hay una cantidad finita por compacidad) de forma que  $t_i$  tenga alguna arista en común con  $t_j$  para algún  $j < i$ . Ahora se forma una región plana de la siguiente manera: empezamos con una copia de  $t_1$  en  $\mathbb{R}^2$  y le pegamos una copia de  $t_2$  por una arista común. Tomamos  $t_3$ , que tiene una arista en común con  $t_1$  o con  $t_2$  y la pegamos a  $t_1 \cup t_2$ . Si hay más de una arista común,  $t_1 \cup t_2 \cup t_3$  es homeomorfo a  $B^2$ . Seguimos hasta pegar todos los triángulos (sólo por una arista cada vez). Toda la unión es un polígono en cuyo perímetro faltan por identificar las aristas.

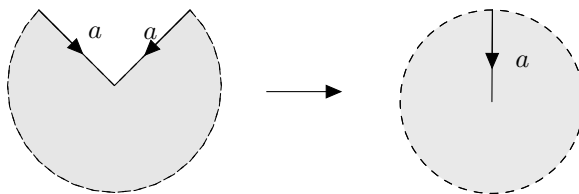
Vamos a llegar a uno de los tipos I o II mediante una serie de operaciones. Empezamos orientando la región eligiendo un sentido de recorrido del perímetro, y como las aristas deben quedar emparejadas por la proposición 6.3.4, nos encontramos con que cada arista  $a$  del perímetro aparece dos veces. (Además, el sentido de recorrido, fijado uno de los sentidos sobre  $a$ , pueden coincidir en las dos apariciones de  $a$  o ser uno opuesto del otro). Se forma así un código de letras y, posiblemente, sus inversos. El objetivo es demostrar que este código se puede “normalizar” a uno de los dos tipos I y II del teorema de clasificación, de forma que los pasos que se den representen homeomorfismos. Todo ello se alcanza al aplica una o varias veces cada una de las siguientes operaciones:

- ① Simplificar grupos de letras que aparecen repetidas varias veces:  $abc \dots a^{-1}b^{-1}c^{-1} \longrightarrow x \dots x^{-1}$ .

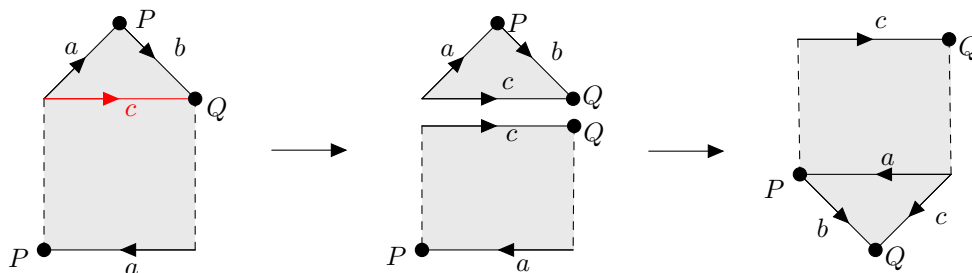




- ② Reducción, esto es, la eliminación de las apariciones de una arista con los dos sentidos de identificación distintos de manera consecutiva:

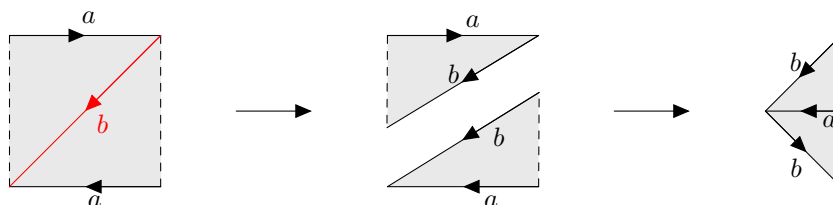


- ③ Quedarse con un solo vértice:

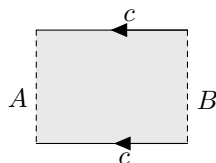


Ahora  $P$  aparece una vez menos y  $Q$  una vez más. Reiteramos hasta acabar con  $P$  y si queda otro vértice distinto de  $Q$  se reitera este procedimiento hasta obtener un solo vértice.

- ④ Dejar consecutivos los lados con sentidos de identificación iguales:



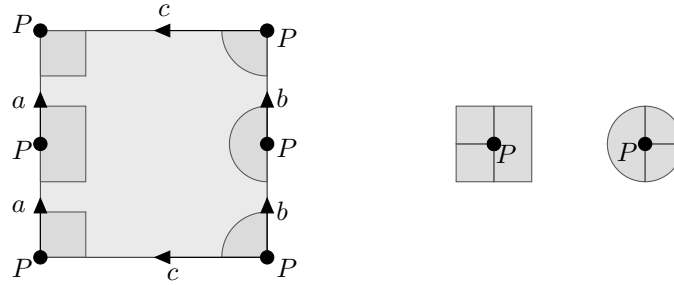
Si todas eran parejas de símbolos iguales hemos terminado con una superficie de tipo II suponemos ahora que aparecen parejas con símbolos opuestos (digamos,  $c$  y  $c^{-1}$ ) y que todas las parejas de símbolos iguales son ya consecutivas. Afirmamos ahora que existe otra pareja de símbolos opuestos separada por las apariciones del lado  $c$ .



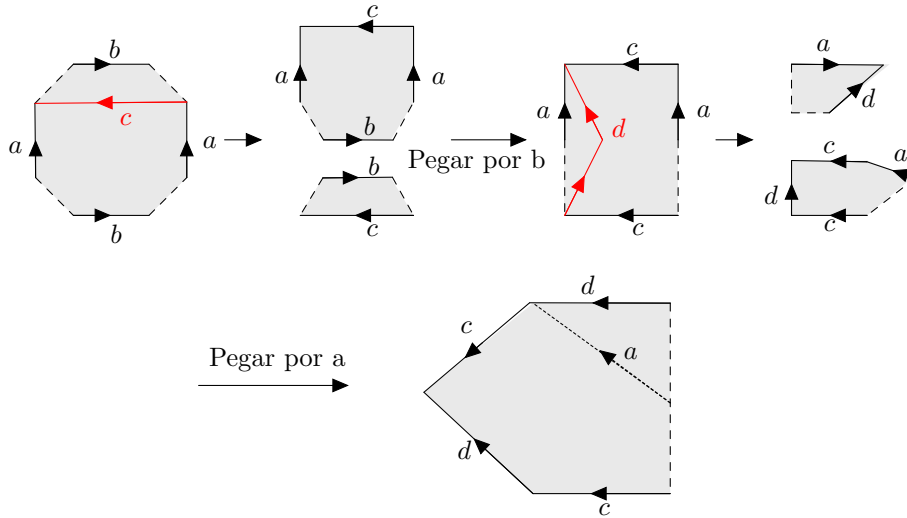
Si esto no ocurriera, las partes  $A$  y  $B$  se identificarían por un vértice  $P$  y ya no tendríamos una superficie en  $P$ . En efecto, al identificar pequeños entornos de los vértices del polígono se

forma un entorno de  $P$  en el espacio cociente. Este entorno estaría formado por dos partes: una correspondiente a las identificaciones de la parte  $A$  y otra a las de  $B$ . Sean estas  $Z$  e  $Y$ , respectivamente. Tenemos que  $Z \cap Y$  se reduce al punto  $P$  mientras que, por ser  $P$  un punto de superficie, debe existir un pequeño disco de centro  $P$ ,  $D$ , contenido en  $Z \cup Y$ . Como  $D - \{P\}$  es conexo debería estar contenido en  $Z - \{P\}$  o en  $Y - \{P\}$ . En el primer caso (igualmente en el segundo)  $Z$  sería entonces un entorno de  $P$  en la superficie, pero esto no es posible pues todo entorno de  $P$  en la superficie contiene puntos de  $B$  distintos de  $P$ .

Más precisamente  $Z$  e  $Y$  son discos de forma que  $Z \cup Y$  resulta ser el espacio formado por dos discos pegados por sus centros, que nunca podrás un punto de superficie; ver dibujo para un caso particular.



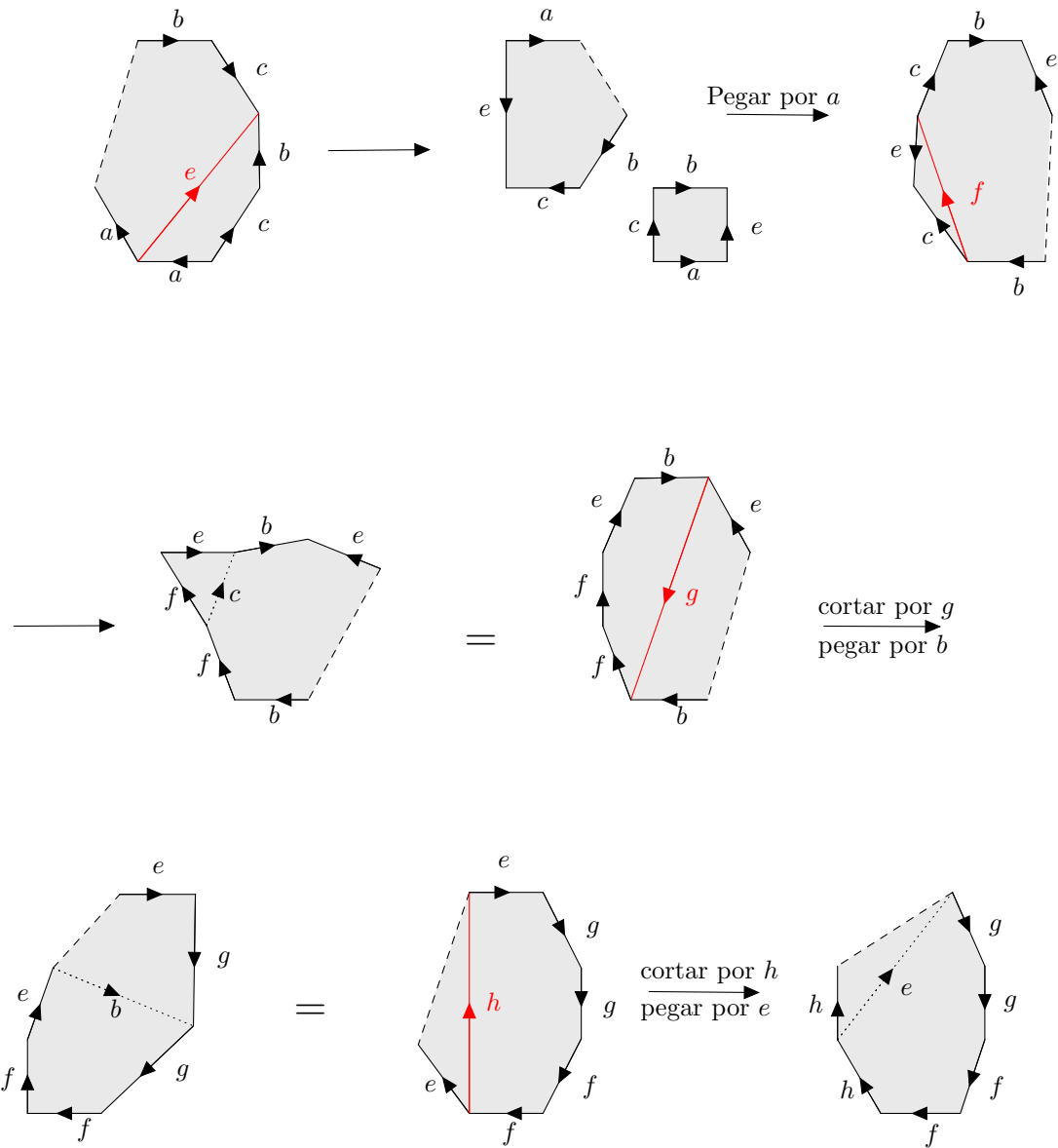
- ⑤ Poner juntos los grupos de cuatro lados con símbolos opuestos dos a dos.



Con esto llegaríamos a una superficie de Tipo I, a menos que aparezcan mezclados pares del mismo sentido de identificación con grupos de dos pares con sentidos de identificación opuestos.

- ⑥ Si aparecen pares con el mismo símbolo ( $aa$ ) seguidos de grupos de cuatro de la forma  $bcb^{-1}c^{-1}$ ,

pasamos todo a pares del mismo símbolo, es decir, nos lo llevamos a una superficie de tipo II.



Esto termina la demostración. ■

## 6.4. Característica de Euler-Poincaré

**Definición 6.4.1.** Sea  $K$  una triangulación de una superficie, se denomina **característica de Euler-Poincaré** al número entero  $\chi(K) = V - E + T$  donde  $V$  es el número de vértices,  $E$  el número de aristas y  $T$  el número de triángulos.

El hecho sorprendente del número entero  $\chi(K)$  es que es independiente de la triangulación  $K$  y sólo depende de la topología de la superficie  $S$ . De hecho, tenemos los siguientes teoremas.

**Teorema 6.4.2.** Si  $K$  es una triangulación de una superficie  $M_n$  (Tipo I), entonces  $\chi(K) = 2 - 2n$ . En particular, si  $n = 0$ ,  $\chi(K) = 2$ , es decir, la característica de la esfera es 2.

**Teorema 6.4.3.** Si  $K$  es una triangulación de una superficie  $N_n$  (Tipo II), entonces  $\chi(K) = 2 - n$ .

Para las esferas el resultado fue publicado por primera vez por Euler en 1752 y para las demás superficies fue Poincaré el primero en descubrir estos teoremas en la última década del siglo XIX. Se puede decir que la característica de Euler es el germen de la topología algebraica, pues su descubrimiento y la búsqueda de una demostración rigurosa de los teoremas anteriores dio lugar al nacimiento y desarrollo de la especialidad de la topología. De hecho, hubo que esperar hasta mediados de la década de 1930 para dar una demostración precisa de la invariancia topológica de la característica de Euler para triangulaciones de espacios arbitrarios.

Este teorema se verá en general en 4º (Homología Simplicial), probándose que si  $K$  es un complejo simplicial en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\chi(K)$  solo depende del tipo de homotopía del poliedro  $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ .

**Nota 6.4.4.** De acuerdo con los teoremas anteriores, una vez conocido el tipo, la característica de Euler determina a la variedad. Además, como el tipo se corresponde con la orientabilidad, se tiene que las superficies quedan clasificadas por la orientabilidad (existencia de una banda de Möbius en la superficie) y su característica de Euler. Una demostración de la clasificación de superficies usando estos dos parámetros puede verse en [1]. Si se quiere una referencia bastante completa sobre el teorema de clasificación de superficies y su historia, se puede consultar [7].

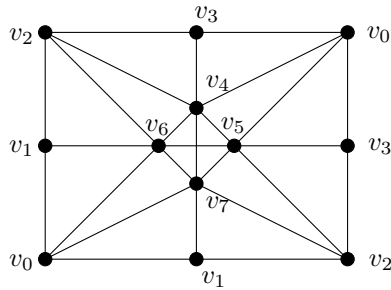
### Ejemplo 6.4.5.

1. Toro. Basándonos en la triangulación del ejemplo 6.3.2

$$\chi(K) = 9 - 27 + 18 = 0.$$

Lo cual era de esperar pues el toro es la superficie  $M_1$ .

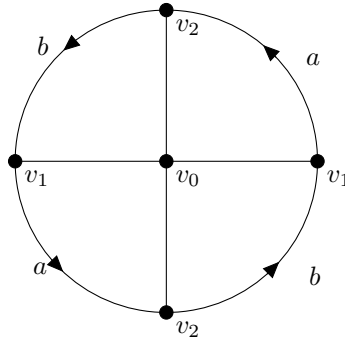
2. Plano proyectivo: Tenemos la siguiente triangulación de  $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ .



$$\chi(K) = 8 - 21 + 14 = 1.$$

Lo que es coherente con el teorema 6.4.3 pues  $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$  es la superficie  $N_1$

**Nota 6.4.6.** La siguiente descomposición en triángulos del plano proyectivo no sería una triangulación, pues los triángulos comparten una cara y un vértice.



Sin embargo si se extiende de manera natural la definición de la característica de Euler a descomposiciones de triángulos  $\mathcal{C}$  que se cortan en uniones de caras, seguimos teniendo  $\chi(\mathcal{C}) = 1$ . Esto permite flexibilizar la definición de triangulación en aquellas condiciones que lo requieran.

# Bibliografía

- [1] E. C. Zeeman, *An Introduction to Topology. The Clasification theorem for Surfaces*.  
<http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/surgery/zeeman.pdf>
- [2] A. Hatcher, *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.  
<https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>
- [3] E. E. Moise, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*. Springer-Verlag, 1977.
- [4] P. H. Doyle & D. A. Moran, *A Short Proof that Compact 2-Manifolds Can Be Triangulated*.  
Inventiones math. 5 (1968), 160-162.  
<http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/doylemoran.pdf>
- [5] E. D. Bloch, *A First Course in Geometric Topology and Differential Geometry*. Birkhäuser, 1977.
- [6] B. Mohar & C. Thomassen, *Graphs on Surfaces*. Johns Hopkins University Press, 2001.
- [7] J. Gallier & D. Xu, *A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces*. Springer, 2013.
- [8] A. Cañas, *El grupo fundamental como clasificador de superficies compactas*. Trabajo de Fin de Grado, Universidad de La Rioja, 2013. [http://biblioteca.unirioja.es/tfe\\_e/TFE000323.pdf](http://biblioteca.unirioja.es/tfe_e/TFE000323.pdf)
- [9] M. A. Armstrong, *Topología Básica*. Reverte, 1987.
- [10] J. R. Munkres, *Topología*. Pearson Educación, 2002.  
<https://psm73.files.wordpress.com/2009/11/topologia-munkres.pdf>