Programación Matemática. Relación 8 Curso 2016/17.

Problema 1

Examen de Diciembre'16 Aplicando las condiciones de Karush, Kuhn y Tucker, encuentra el punto del compacto S,

$$S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 \leq 1\right\}$$

cuya suma de coordenadas es mínima.

Problema 2

Encuentra el vector unitario $x^* \in \mathbb{R}^n$ que

1. maximiza $c^\top x$, donde $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$.
2. maximiza $x^\top Q x$, donde $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz simétrica.

Problema 3

Encuentra el punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ de mínima norma contenido en el conjunto S,

1. $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x = b\right\}$, donde $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$.
2. $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x \leq b\right\}$, donde $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$.
3. $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x = b,\, x_n \leq 1\right\}$, donde $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Problema 4

Dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$, con $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, resuelve el problema

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \\ \text{s.a.} & \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} = 1. \end{array}$$

Estudiando el valor óptimo del problema, demuestra la *desigualdad aritmético-geométrica*:

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad \forall x_1, \ldots, x_n \geq 0.$$

Problema 5

Dado $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$, encuentra el conjunto de puntos KKT del problema

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{s.a.} & x_i(1 - x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

Problema 6

Resuelve el problema

$$\begin{array}{llll} \min & x_2^2 - x_1 & & \\ \text{s.a.} & x_1^2 + x_2^2 & \leq & 1 \\ & x_1^2 + 4x_2^2 & \leq & 1 \end{array}$$

Problema 7

Un inversor desea invertir una cantidad C comprando acciones en n compañías. Si x_i denota la cantidad invertida en la compañía i, $i = 1, \ldots, n$, el beneficio obtenido es $B_i x_i$, donde B_i es una variable aleatoria, con $E(B_i) = \mu_i$, y covarianzas $cov(B_i, B_j) = \sigma_{ij}$.

1. Determina la inversión que minimiza la varianza del beneficio garantizando un beneficio esperado de μ^*.

2. Resuelve el caso particular con $n = 3$, $C = 1$, vector de beneficios esperados $\mu = (0.4, 0.4, 0.8)$, y matriz de covarianzas $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.