Programación Matemática. Relación 6 Curso 2016/17.

Problema 1

(Problema de transporte) Consideremos un sistema de distribución, en el que m orígenes disponen de una cantidad conocida $O_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \ldots, m$ de un determinado producto indivisible, y n destinos demandan cantidades $D_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \ldots, n$ de ese mismo producto. Supondremos que $\sum_{i=1}^{m} O_i = \sum_{j=}^{n} D_j$. Se conoce que el coste unitario de enviar desde el origen i al destino j es $c_{ij} \geq 0$.

1. Formula el problema de encontrar el envío de coste mínimo que satisface los requerimientos de demanda de los destinos.
2. Prueba que este problema tiene una matriz de restricciones totalmente unimodular.
3. Formula el problema dual una vez eliminada la condición de integridad.
4. ¿Qué puede decirse si sobre cada par (i, j) existe una cota superior u_{ij} sobre la cantidad que se puede enviar del origen i al destino j? Formula el problema en este caso.
5. ¿Qué puede decirse si $\sum_{i=1}^{m} O_i > \sum_{j=}^{n} D_j$? Formula el problema en este caso.

Problema 2

(Problema de asignación) Supongamos que existen n tareas que deben ser realizadas por n individuos. El coste de que el individuo i realice la tarea j es c_{ij}. Todas las tareas deben ser realizadas y cada individuo solo puede realizar una tarea.

1. Formula el problema de encontrar la asignación de individuos a tareas que minimiza el coste total de la operación.
2. Prueba que este problema tiene una matriz de restricciones que es totalmente unimodular.
3. Escribe el dual del problema anterior, una vez eliminadas las restricciones de integridad.

Problema 3

(Problema del camino más corto) Consideremos una red conexa y dirigida $N = (V, A)$, donde V es el conjunto de nodos y A es el conjunto de arcos. Cada arco $(i,j) \in A$ tiene una longitud $d_{ij} > 0$. Existen dos nodos distinguidos, que llamamos o (origen) y d (destino), que están conectados al menos por una secuencia de arcos dirigidos de N.

1. Formula el problema de hallar el camino más corto en N de o a d.

2. Prueba que la matriz de restricciones es totalmente unimodular.

3. Formula el dual del problema anterior, una vez eliminadas las restricciones de integridad.

Problema 4

(Problema de flujo máximo) Consideremos una red conexa y dirigida $N = (V, A)$, donde V es el conjunto de nodos y A es el conjunto de arcos. A lo largo de cada arco $(i,j) \in A$ se puede transportar una capacidad máxima b_{ij} de un determinado producto, en unidades indivisibles. Existen dos nodos distinguidos, que llamamos o (origen) y d (destino), que están conectados al menos por una secuencia de arcos dirigidos de N. Se trata de encontrar la máxima cantidad de producto que se puede enviar desde o hasta d utilizando los arcos de la red N.

1. Formula el problema de determinación del flujo máximo origen-destino.

2. Prueba que la matriz de restricciones del mismo es totalmente unimodular.

Problema 5

(Problema del emparejamiento de máximo peso) Consideremos un grafo no dirigido $G = (V, A)$ donde V es el conjunto de nodos y A es el conjunto de arcos. Cada arco $e \in A$ tiene un peso asociado $w_e \geq 0$. Un *emparejamiento* M de los nodos del grafo G es un subconjunto de arcos de A con la propiedad de que todo nodo $i \in V$ puede pertenecer a lo sumo a un arco $e \in M$.

1. Formula el problema de hallar el emparejamiento de peso total máximo como un problema de programación lineal entera.

2. ¿Es la matriz de restricciones de su formulación totalmente unimodular?

3. Supongamos que el grafo es bipartito, es decir, que existe una partición de los nodos del grafo, V_1, V_2 tal que $V_1 \cup V_2 = V$ y verificando que para todo $(i,j) \in A$, $i \in V_1$ y $j \in V_2$. Formula el problema del emparejamiento de máximo peso en un grafo con estas características. ¿Será la matriz de restricciones del problema de emparejamiento de peso máximo totalmente unimodular cuando el grafo es bipartito?