

**RESUMEN DE LA ASIGNATURA
VARIEDADES DIFERENCIABLES**
Curso 2017-2018

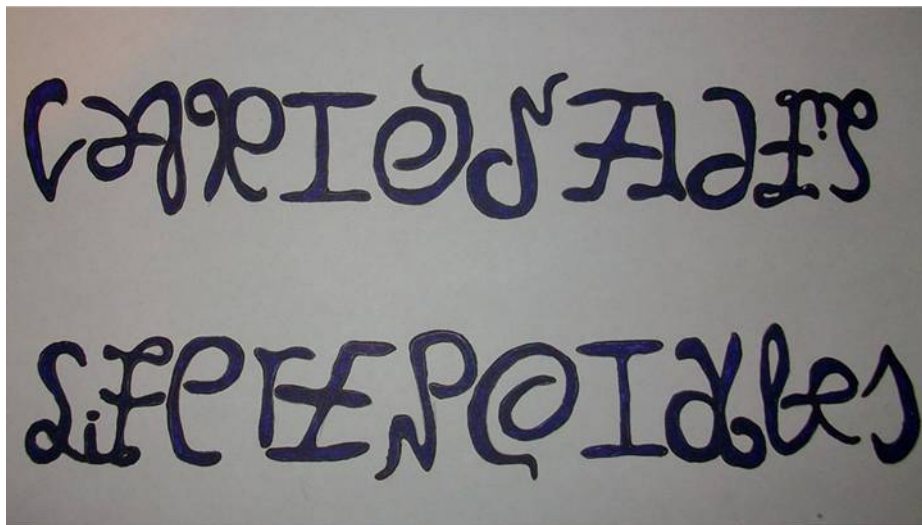


Ilustración: ambigrama de simetría central, creado por Manuel Jesús Pérez García (noviembre de 2010).



Departamento de Geometría y Topología
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Índice

0	Complementos de Topología General	3
0.1	Espacios Topológicos.	3
0.2	Aplicaciones entre Espacios Topológicos. Homeomorfismos. . . .	6
0.3	Construcción de Topologías mediante aplicaciones. Topologías Producto y Cociente.	7
0.4	Axiomas de Separación.	8
0.5	Axiomas de Numerabilidad.	9
0.6	Compacidad.	9
0.7	Conexión.	10
1	Variedades Diferenciables	12
1.1	Introducción.	12
1.2	Cartas Locales, Atlas, Estructuras Diferenciables.	13
1.3	Ejercicios.	15
2	Aplicaciones Diferenciables entre Variedades Diferenciables	17
2.1	Aplicaciones Diferenciables.	17
2.2	Ejercicios.	19
3	Espacio Tangente a una Variedad Diferenciable en un Punto	20
3.1	Introducción.	20
3.2	Vectores Tangentes en un Punto de una Variedad Diferenciable. .	21
3.3	Espacio Cotangente.	25
3.4	Ejercicios.	25
4	Aplicación Diferencial de una Aplicación Diferenciable	26
4.1	Aplicación Diferencial y Aplicación Codiferencial de una Apli- cación Diferenciable.	26
4.2	Noción de Subvariedad.	28
4.3	El Teorema de la Función Inversa.	29
4.4	Factorización de Aplicaciones. Unicidad de Subvariedades. . . .	32
4.5	Teorema de la Función Implícita. Teorema de Whitney.	34
4.6	Ejercicios.	34

5	Campos de Vectores sobre una Variedad Diferenciable	36
5.1	Campos de Vectores Diferenciables.	36
5.2	Campos f -relacionados	38
5.3	Ejercicios.	39
6	Campos de Tensores Covariantes Diferenciables sobre una Variedad Diferenciable	40
6.1	Campos de Tensores Covariantes Diferenciables.	40
6.2	Formas Diferenciales.	42
6.3	Acción de Aplicaciones sobre los Campos de Tensores.	44
6.4	Ejercicios.	45
	Apéndice A. Teoremas de Extensión.	46
A.1	Lema de Extensión de Funciones Diferenciables.	46
A.2	Lema de Extensión de Campos Diferenciables.	48
A.3	Lema de Extensión de Campos Diferenciables de Tensores Covariantes.	48
	Apéndice B. Teorema de la Función Implícita.	50
B.1	Teorema de la Función Implícita.	50
	Apéndice C. Álgebras Tensorial y Exterior de un Espacio Vectorial.	52
C.1	Álgebra Tensorial de un Espacio Vectorial.	52
C.2	Álgebra Exterior de un Espacio Vectorial.	56

Lección 0

Complementos de Topología General

0.1 Espacios Topológicos.

Definición 0.1.1. *Un **Espacio Topológico** es un par (X, T) , donde X es un conjunto y T una familia de subconjuntos de X , llamada una **Topología sobre X** y cuyos elementos son llamados **Conjuntos Abiertos**, verificándose las siguientes propiedades:*

1. *El conjunto vacío \emptyset y el propio X son (conjuntos) abiertos.*
2. *La intersección de cualquier cantidad finita de abiertos es un abierto.*
3. *La unión de cualquier cantidad de abiertos es un abierto.*

Definición 0.1.2. *Un **Espacio Topológico** es un conjunto X tal que para cada punto $x \in X$ existe una familia \mathcal{N}_x de subconjuntos de X , llamados **Entornos del punto x** , cumpliéndose:*

1. *Cada punto está en todos sus entornos.*
2. *La intersección de dos entornos de un punto es también entorno de ese punto.*
3. *Un conjunto que contenga a un entorno de un punto es, a su vez, entorno de dicho punto.*
4. *Dado un entorno N de un punto x , existe otro entorno M de x tal que N es entorno de todos los puntos de M .*

Teorema 0.1.1. *Las dos definiciones anteriores son equivalentes.*

Nota 0.1.1. Según se elija una u otra de las definiciones anteriores, las siguientes afirmaciones se tendrán bien como definición, bien como proposición:

1. Un conjunto es entorno de un punto si y sólo si existe un abierto conteniendo al punto y contenido en el conjunto.
2. Un conjunto es abierto si y sólo si es entorno de todos sus puntos.

Proposición 0.1.1. *Un conjunto es abierto si y sólo si para cada punto suyo existe otro abierto que contiene al punto y está contenido en el conjunto.*

Definición 0.1.3. *Sea (X, T) un espacio topológico. Una familia de subconjuntos de X , $\mathcal{B} \subseteq T$, se dice que es una **Base de la Topología** si todo abierto es unión de elementos de \mathcal{B} .*

Teorema 0.1.2. *Sea $\mathcal{B} \subseteq T$. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. \mathcal{B} es base de T .
2. Para cada abierto y para cada punto suyo, existe un elemento de \mathcal{B} que contiene al punto y está contenido en el abierto.

Definición 0.1.4. *Sea (X, T) un espacio topológico y x un punto de X . Una familia \mathcal{B}_x de entornos de x se dice **Base de Entornos** de x si todo entorno de x contiene algún elemento de la familia.*

Definición 0.1.5. *En un espacio topológico (X, T) , los conjuntos complementarios de los conjuntos abiertos se llaman **Conjuntos Cerrados** y la familia de los conjuntos cerrados se denota por \mathcal{F} .*

Proposición 0.1.2. *La familia \mathcal{F} de los conjuntos cerrados de un espacio topológico (X, T) verifica las siguientes propiedades:*

1. El conjunto vacío \emptyset y el propio conjunto X son (conjuntos) cerrados.
2. La unión de cualquier cantidad finita de cerrados es un cerrado.
3. La intersección de cualquier cantidad de cerrados es un cerrado.

Teorema 0.1.3. *Sea X un conjunto y \mathcal{F} una familia de subconjuntos de X que verifican las mismas propiedades que una familia de conjuntos cerrados, recogidas en la proposición anterior. Entonces, existe una única topología sobre X , definida por*

$$T = \{G \subseteq X / X - G \in \mathcal{F}\},$$

para la que \mathcal{F} es la familia de cerrados.

A continuación, se van a presentar un resultado que permite construir una topología sobre un conjunto X a partir de cualquier familia de sus subconjuntos.

Teorema 0.1.4. *Sea X un conjunto y sea \mathcal{A} una familia de subconjuntos de X . Entonces la familia formada por el conjunto vacío \emptyset , el propio conjunto X y todas las uniones posibles que se puedan realizar con todas las intersecciones finitas de elementos de \mathcal{A} es una topología sobre X , que contiene a \mathcal{A} y que, además, es la topología más pequeña de las que contienen a \mathcal{A} .*

Ejercicios 0.1.1. 1. Escribanse con terminología matemática todas las definiciones y resultados anteriores. Sería también conveniente probar dichos resultados.

2. ¿Bajo qué condiciones una familia \mathcal{A} de subconjuntos de un conjunto X es base de la topología que se obtiene según el proceso descrito en el Teorema 0.1.4 (partiendo de la propia \mathcal{A})?

3. Sea X un conjunto y d una métrica sobre él. Probar que existe una topología sobre X para la que las bolas abiertas de d forman base. Dicha topología se llama **Topología Métrica asociada a d** .

Ejemplos 0.1.1. 1. Sea X un conjunto cualquiera y $T_{dis} = \mathcal{P}(X)$. T_{dis} es una topología sobre X , llamada **Topología Discreta** y es la topología mayor, es decir, con más elementos, que puede construirse sobre X . Además, la familia formada por el conjunto vacío \emptyset y todos los conjuntos unitarios es base de dicha topología.

2. En el conjunto de los números reales \mathbf{R} , considérese la familia formada por todos los intervalos abiertos y constrúyase la menor topología que contiene a tal familia, siguiendo el proceso descrito en el Teorema 0.1.4. Dicha topología se llama **Topología Euclídea de \mathbf{R}** , es la topología métrica asociada a la métrica euclídea y tiene a la familia de todos los intervalos abiertos como base.

3. En \mathbf{R}^m considérese la topología métrica asociada a la métrica euclídea. Dicha topología se llama **Topología Euclídea de \mathbf{R}^m** y las bolas abiertas (por ejemplo, en \mathbf{R}^2 son los discos abiertos) forman una base de ella.

Definición 0.1.6. Sea (X, T) un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Se dice que:

1. x es un **Punto Adherente** a A si todo abierto que contenga a x corta a A . Al conjunto de los puntos adherentes a A se le llama la **Clausura** de A y se denota por \bar{A} .

2. x es un **Punto de Acumulación** de A si todo abierto que contenga a x corta a A en algún punto distinto de x . Al conjunto de los puntos de acumulación de A se le llama el **Derivado** de A y se denota por A' .

3. x es un **Punto Interior** de A si hay algún abierto que contenga a x contenido en A . Al conjunto de los puntos interiores de A se le llama el **Interior** de A y se denota por $\text{int}(A)$.

Proposición 0.1.3. Sea (X, T) un espacio topológico. Entonces:

1. La clausura de un conjunto es el menor cerrado que lo contiene. Por tanto, un conjunto es cerrado si y sólo si coincide con su clausura.

2. El interior de un conjunto es el mayor abierto contenido en él. Por tanto, un conjunto es abierto si y sólo si coincide con su interior.

Definición 0.1.7. Sea (X, T) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Se llama **Topología Relativa** o **Topología Inducida** de X a A a:

$$T_A = \{G \cap A / G \in T\}.$$

Al par (A, T_A) se le llama **Subespacio Topológico** de (X, T) . Una propiedad se dice que es **Hereditaria** para una clase de subconjuntos de X si la verifica el espacio topológico (X, T) y cualquier subespacio (A, T_A) , con A perteneciendo a la clase especificada.

Ejercicio 0.1.1. Probar que, efectivamente, T_A es una topología sobre A .

0.2 Aplicaciones entre Espacios Topológicos. Homeomorfismos.

Definición 0.2.1. Una aplicación entre dos espacios topológicos $f : (X, T_X) \longrightarrow (Y, T_Y)$ se dice **Continua en un punto** $x \in X$ si para cualquier abierto $G \in T_Y$ entorno de $f(x)$, se tiene que $f^{-1}(G)$ es entorno de x y se dice **Continua** si lo es en todo punto de X .

Teorema 0.2.1. Sea $f : (X, T_X) \longrightarrow (Y, T_Y)$ una aplicación. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. f es continua.
2. La anti-imagen por f de cualquier abierto de Y es abierto de X .
3. La anti-imagen por f de cualquier cerrado de Y es cerrado de X .

Definición 0.2.2. Una aplicación $f : (X, T_X) \longrightarrow (Y, T_Y)$ se dice **Abierta** (respectivamente, **Cerrada**) si la imagen por f de cualquier abierto de X (respectivamente, de cualquier cerrado) es un abierto de Y (respectivamente, un cerrado).

Definición 0.2.3. Una aplicación $f : (X, T_X) \longrightarrow (Y, T_Y)$ se dice que es un **Homeomorfismo** si es biyectiva, continua y su inversa es también continua.

Teorema 0.2.2. Sea $f : (X, T_X) \longrightarrow (Y, T_Y)$ una aplicación biyectiva. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. f es un homeomorfismo.
2. f es continua y abierta.
3. f es continua y cerrada.

Definición 0.2.4. Una propiedad se dice **Propiedad Topológica** o **Invariante Topológico**, si se conserva por homeomorfismos, es decir, si de verificarla un espacio topológico la verifican todos los espacios topológicos homeomorfos a él.

Definición 0.2.5. Una aplicación $f(X, T_X) \longrightarrow (Y, T_Y)$ continua se dice que es un **Homeomorfismo Local** si para todo punto $x \in X$, existe un entorno abierto $U_x \in T_X$ de x tal que $f(U_x)$ es abierto en Y y $f|_{U_x} : U_x \longrightarrow f(U_x)$ es un homeomorfismo.

Proposición 0.2.1. Todo homeomorfismo local es una aplicación abierta.

0.3 Construcción de Topologías mediante aplicaciones. Topologías Producto y Cociente.

Proposición 0.3.1. Sean X un conjunto, $\{(Y_i, T_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos y $\{f_i : X \longrightarrow Y_i / i \in I\}$ una familia de aplicaciones. Entonces, existe la menor topología T sobre X que hace continuas a todas las aplicaciones f_i , llamada **Topología Inicial** de las f_i y que es la generada, siguiendo el proceso descrito en el Teorema 0.1.4, por la familia \mathcal{A} de subconjuntos de X :

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \{f_i^{-1}(G) / G \in T_i\}.$$

Corolario 0.3.1. Sean X un conjunto, (Y, T_Y) un espacio topológico y $f : X \longrightarrow (Y, T_Y)$ una aplicación. Entonces, $T = \{f^{-1}(G) / G \in T_Y\}$ es la menor topología sobre X que hace continua a la aplicación f y se llama **Topología Inicial** de f . Además, si f es biyectiva, la topología inicial la convierte en un homeomorfismo.

Definición 0.3.1. Dada una familia de espacio topológicos $\{(X_i, T_i)\}_{i \in I}$ y dado su producto cartesiano $X = \prod_{i \in I} X_i$, a la topología inicial sobre X de las proyecciones $\pi_i : X \longrightarrow X_i$ se le llama la **Topología Producto** de las T_i y se denota por T_{\prod} y al espacio topológico (X, T_{\prod}) se le llama **Espacio Producto**.

Nota 0.3.1. En el caso de un número finito de factores, una base de la topología producto está formada por los productos de abiertos de cada uno de los factores. Además, también en este caso, la topología relativa de una producto es la topología producto de las relativas de cada uno de los factores.

Proposición 0.3.2. Sea $\{(X_i, T_i)\}_{i=1, \dots, m}$ una familia finita de espacios topológicos y sea $X = \prod_{i=1}^m X_i$, dotado de la topología producto. Dado otro espacio topológico (Y, T_Y) , una aplicación $f : (Y, T_Y) \longrightarrow (X, T_{\prod})$ es continua si y sólo si $\pi_i \circ f : (Y, T_Y) \longrightarrow (X_i, T_i)$ es continua, para todo $i = 1, \dots, m$.

Proposición 0.3.3. Sean X un conjunto, $\{(Y_i, T_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos y $\{f_i : Y_i \longrightarrow X / i \in I\}$ una familia de aplicaciones. Entonces, existe la mayor topología T sobre X que hace continuas a todas las aplicaciones f_i , llamada **Topología Final** de las f_i .

Corolario 0.3.2. Sean X un conjunto, (Y, T_Y) un espacio topológico y $f : (Y, T_Y) \longrightarrow X$ una aplicación. Entonces, $T = \{G \subseteq X / f^{-1}(G) \in T_Y\}$ es

la mayor topología sobre X que hace continua a la aplicación f y se llama **Topología Final** de f . Además, si f es biyectiva, la topología final la convierte en un homeomorfismo.

Definición 0.3.2. Sean (X, T) un espacio topológico y \mathcal{R} una relación de equivalencia sobre X . Si $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ es la proyección canónica, entonces la topología final de π sobre el espacio cociente X/\mathcal{R} , denotada por $T_{\mathcal{R}}$ se llama **Topología Cociente** y al espacio topológico $(X/\mathcal{R}, T_{\mathcal{R}})$ se le llama **Espacio Cociente** sobre X por la relación \mathcal{R} .

Proposición 0.3.4. Sean (X, T) un espacio topológico, $(X/\mathcal{R}, T_{\mathcal{R}})$ un espacio cociente sobre X , (Y, T_Y) otro espacio topológico y $f : (X/\mathcal{R}, T_{\mathcal{R}}) \rightarrow (Y, T_Y)$ una aplicación. Entonces, f es continua si y sólo si $f \circ \pi : (X, T) \rightarrow (Y, T_Y)$ es continua.

0.4 Axiomas de Separación.

Definición 0.4.1. Sea (X, T) un espacio topológico. Se dice que es:

1. T_1 si todo par de puntos distintos de X se puede separar por conjuntos abiertos, es decir, si para cada uno de los puntos existe un abierto que lo contiene y no contiene al otro punto.
2. T_2 o de **Hausdorff** si todo par de puntos distintos de X se puede separar por abiertos disjuntos.
3. **Regular** si todo conjunto cerrado y todo punto que no pertenezca a él se pueden separar por abiertos disjuntos.
4. T_3 si es regular y T_1 .
5. **Normal** si todo par de cerrados disjuntos se puede separar por abiertos disjuntos.
6. T_4 si es normal y T_1 .

Proposición 0.4.1. 1. El axioma T_i implica el axioma T_j , para todo $i > j$.

2. Los axiomas de separación son propiedades topológicas.
3. Los axiomas T_1 y T_2 son propiedades hereditarias para todo subespacio.
4. Un espacio topológico es T_1 si y sólo si todo conjunto unitario es cerrado.
5. Un espacio topológico es regular si y sólo si para todo abierto G y para todo punto $x \in G$, existe otro abierto U tal que $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq G$.
6. Un espacio topológico es normal si y sólo si para todo abierto G y para todo cerrado F que lo contenga, existe otro abierto U tal que $G \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq F$.

Teorema 0.4.1. (Lema de Uryshon). *Un espacio topológico (X, T) es normal si y sólo si para cada par de cerrados disjuntos F_1 y F_2 de X , existe una aplicación continua $f : (X, T) \rightarrow [0, 1]$ (con la topología euclídea) tal que $f(F_1) = 0$ y $f(F_2) = 1$.*

0.5 Axiomas de Numerabilidad.

Definición 0.5.1. *Sea (X, T) un espacio topológico. Un subconjunto D de X se dice **Denso** si $\overline{D} = X$.*

Definición 0.5.2. *Se dice que un espacio topológico (X, T) es:*

1. **Primero Numerable** (1^oN) *si todo punto de X tiene una base de entornos numerable.*
2. **Segundo Numerable** (2^oN) *si T tiene una base numerable.*
3. **De Lindeloff** *si todo recubrimiento de X por abiertos admite un subrecubrimiento numerable.*
4. **Separable** *si existe un subconjunto de X denso y numerable.*

Proposición 0.5.1. 1. *Los axiomas de numerabilidad son propiedades topológicas.*

2. *El axioma 2^oN implica a todos los demás.*
3. *Los axiomas 1^oN y 2^oN son propiedades hereditarias para cualquier subespacio.*
4. *Todo espacio topológico regular y de Lindeloff es normal.*

0.6 Compacidad.

Definición 0.6.1. *Un espacio topológico (X, T) se dice **Compacto** si de todo recubrimiento de X por abiertos se puede extraer un subrecubrimiento finito.*

Proposición 0.6.1. 1. *La compacidad se conserva por aplicaciones continuas. En consecuencia, es una propiedad topológica.*

2. *La compacidad es una propiedad hereditaria para subespacios cerrados.*
3. *En un espacio topológico T_2 , todo subespacio compacto es cerrado.*
4. *Toda aplicación continua y biyectiva de un espacio topológico compacto en un espacio topológico T_2 es un homeomorfismo.*
5. *Todo espacio topológico T_2 y compacto es T_4 .*

Definición 0.6.2. Un espacio topológico (X, T) se dice **Localmente Compacto** si todo punto de X tiene una base de entornos formada por conjuntos compactos.

Teorema 0.6.1. Un espacio topológico T_2 es localmente compacto si y sólo si todo punto tiene un entorno compacto.

Proposición 0.6.2. 1. La compacidad local es una propiedad topológica.

2. La compacidad local es una propiedad hereditaria para subespacios abiertos y para subespacios cerrados.

3. Todo espacio T_2 y localmente compacto es T_3 .

Proposición 0.6.3. Sea (X, T) un espacio topológico T_2 y localmente compacto. Entonces, para todo abierto G y para todo punto $p \in G$, existe otro abierto H de clausura compacta y tal que $p \in H \subseteq \overline{H} \subseteq G$.

0.7 Conexión.

Definición 0.7.1. Un espacio topológico (X, T) se dice **Conexo** si no existen dos subconjuntos propios abiertos (o cerrados) de X , disjuntos y que recubran a X .

Teorema 0.7.1. Sea (X, T) un espacio topológico. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. (X, T) es conexo.
2. Los únicos subconjuntos de X que son a la vez abiertos y cerrados son el conjunto vacío \emptyset y el propio X .
3. Toda aplicación continua de (X, T) en \mathbf{R} que tome dos valores, toma todos los valores intermedios.

Proposición 0.7.1. La conexión no es, en general, una propiedad hereditaria. Además, se conserva por aplicaciones continuas, con lo que, en consecuencia, es una propiedad topológica.

Definición 0.7.2. En un espacio topológico (X, T) , se llama **Componente Conexa** del punto $x \in X$ al mayor subconjunto conexo de X que contenga a x .

Proposición 0.7.2. Las componentes conexas de un espacio topológico (X, T) son subconjuntos cerrados y forman una partición de X . Además, el número de componentes conexas es una propiedad topológica.

Definición 0.7.3. Sea (X, T) un espacio topológico y $x \in X$. Se llama **Orden de Conexión** de x en X al número de componentes conexas de $C_x - \{x\}$, donde C_x denota la componente conexa de x en X .

Proposición 0.7.3. Sea $f : (X, T_X) \longrightarrow (Y, T_Y)$ un homeomorfismo. Entonces, para todo $x \in X$, x y $f(x)$ tiene el mismo orden de conexión. En consecuencia, el orden de conexión de los puntos es una propiedad topológica.

Definición 0.7.4. Un espacio topológico (X, T) se dice **Localmente Conexos** si todo punto de X tiene una base de entornos formada por conjuntos conexos.

Proposición 0.7.4. La conexión local es una propiedad topológica y hereditaria para abiertos. Además, las componentes conexas de un espacio topológico localmente conexo son también conjuntos abiertos.

Definición 0.7.5. Un **Arco** en un espacio topológico (X, T) es la imagen por un homeomorfismo f de $[0, 1]$ (con la topología euclídea) en (X, T) . Dados dos puntos $x, y \in X$, se llama **Arco desde x hasta y** a un arco en X tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.

Nota 0.7.1. Obsérvese que los arcos son, por definición, subconjuntos conexos de X . Por otra parte si la aplicación f es sólo continua (y no un homeomorfismo), surge la noción de **Camino** en X y todas las definiciones y resultados tienen su versión paralela.

Definición 0.7.6. Un espacio topológico (X, T) se dice **Conexo por Arcos** o **Arcoconexo**, si dados dos puntos cualesquiera de X , existe un arco en X desde uno de los puntos hasta el otro.

Proposición 0.7.5. 1. La conexión por arcos es una propiedad topológica.

2. Todo espacio topológico conexo por arcos es conexo.

Lección 1

Variedades Diferenciables

1.1 Introducción.

La Geometría Diferencial consiste en el estudio de aquellos problemas geométricos que pueden ser tratados usando el Cálculo Diferencial e Integral. Por tanto, los objetos básicos a trabajar deben ser espacios en los cuales nociones como la diferenciación e integración tengan sentido. Dichos espacios serán denominados *Variedades Diferenciables*. En pocas palabras, una variedad diferenciable es un espacio topológico localmente homeomorfo (en realidad, difeomorfo, pero habrá que precisar esta noción) a un espacio euclídeo. Así, los primeros ejemplos de variedad diferenciable lo constituyen los propios espacios euclídeos. Además, las curvas regulares y las superficies regulares son también variedades diferenciables. Recuérdese que un subconjunto $M \subseteq \mathbf{R}^3$ se dice que es una superficie regular si para cualquier punto $p \in M$ existe un entorno V de p en \mathbf{R}^3 y una aplicación $\vec{x} : U \subseteq \mathbf{R}^2 \longrightarrow V \subseteq M$ de un abierto U de \mathbf{R}^2 sobre M , tales que (a) \vec{x} es un homeomorfismo diferenciable y (b) la diferencial $(D\vec{x})_q : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ es inyectiva en todo punto $q \in U$.

A la aplicación \vec{x} se le denomina parametrización de M en p . La consecuencia más importante de la definición de superficie regular es el hecho de que el cambio de parámetros es un difeomorfismo. Por consiguiente, una superficie regular es, intuitivamente, una reunión de abiertos de \mathbf{R}^3 organizados de tal forma que cuando dos de tales abiertos se intersectan la transición de uno a otro se realiza de manera diferenciable. Como consecuencia, tiene sentido hablar, en una superficie regular, de funciones diferenciables y aplicar los métodos del Cálculo Diferencial.

El defecto más importante de la definición de superficie regular es su dependencia respecto de \mathbf{R}^3 . La idea natural de superficie debiera ser la de un conjunto bidimensional (en un sentido a precisar) y al que se le pueda aplicar el Cálculo Diferencial de \mathbf{R}^2 ; la presencia innecesaria de \mathbf{R}^3 es, simplemente, una imposición de nuestra naturaleza física.

Aunque la necesidad de una idea abstracta de superficie (esto es, sin in-

volucrar ningún espacio ambiente) fue intuita por Gauss en 1827 en su trabajo titulado “*Disquisitiones generales circa superficies curvas*”, se hizo necesario el paso de algo más de un siglo para que tal idea tuviera una forma definitiva, pues la formulación explícita del concepto de variedad diferenciable tal y como se conoce actualmente y que contiene como caso particular a la noción de superficie regular abstracta, no apareció hasta 1932, en el libro de Veblen y Whitehead titulado “*Foundations of Differential Geometry*”. Una de las razones de esta demora estuvo en el hecho de que el papel fundamental del cambio de parámetros no fue bien comprendido.

1.2 Cartas Locales, Atlas, Estructuras Diferenciables.

En todo lo que sigue y salvo mención explícita en contra, se supondrá que M es un espacio topológico T_2 y 2^{\aleph_1} .

Definición 1.2.1. Una **Carta Local de dimensión m en M** es un par (U, φ) tal que:

1. U es un abierto de M , denominado **Dominio de la carta**.
2. φ es un homeomorfismo de U en un abierto $\varphi(U)$ de \mathbf{R}^m , llamado **Aplicación Coordenada de la carta**.

Definición 1.2.2. Dada una carta local (U, φ) de M de dimensión m y dado $p \in U$, a las coordenadas $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ de $\varphi(p) \in \varphi(U) \subseteq \mathbf{R}^m$ se les llama **Coordenadas Locales** de p respecto de la carta (U, φ) . Por esta razón, también se denomina a las cartas **Sistemas Locales de Coordenadas (s.l.c.)**.

Considerando las proyecciones canónicas $u_i : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, m$ (en particular, se pueden pensar con dominio en $\varphi(U)$) y denotando por x_i a la función $x_i = u_i \circ \varphi : U \rightarrow \mathbf{R}$, se tiene que $\varphi(p) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (x_1(p), \dots, x_m(p))$, pues, para cualquier $i = 1, \dots, m$, $\lambda_i = u_i(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = u_i(\varphi(p)) = x_i(p)$.

Definición 1.2.3. Dada una carta local (U, φ) de M , las funciones x_i , $i = 1, \dots, m$, se llaman **Funciones Componentes** (o **Funciones Coordenadas**) de la carta y se escribe $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$.

Ejemplos 1.2.1. 1. Sea $C \subset \mathbf{R}^3$ una curva regular alabeada (podría hacerse del mismo modo con una curva plana) “sin cruces”, dotada de la topología inducida por la euclídea y sea $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbf{R} \rightarrow C$ una parametrización local inyectiva. Se sabe que α es un difeomorfismo (en particular, un homeomorfismo) del intervalo (a, b) en $\alpha(a, b)$, que es abierto de C . Llamando φ a la aplicación α^{-1} de $\alpha(a, b)$ en (a, b) , se tiene que $(\alpha(a, b), \varphi)$ es una carta local de dimensión 1 en C .

¹En la literatura es posible encontrar definiciones de variedades diferenciables no T_2 ni 2^{\aleph_1} . Para los objetivos de este curso, dichas variedades se considerarán casos patológicos.

2. Sea M una superficie regular de \mathbf{R}^3 y sea $\vec{x} : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow M$ una superficie simple de M . Se sabe que $\vec{x}(U)$ es un abierto de M y que \vec{x} es un difeomorfismo de U en $\vec{x}(U)$. Llamando φ a la aplicación \vec{x}^{-1} de $\vec{x}(U)$ en U , se tiene que $(\vec{x}(U), \varphi)$ es una carta local de dimensión 2 en M .
3. Sea \mathbf{R}^m y $\varphi = \text{id} : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$. Entonces, (\mathbf{R}^m, φ) es una carta local de dimensión m de \mathbf{R}^m , con funciones coordenadas las proyecciones canónicas u_1, \dots, u_m .

Definición 1.2.4. Se dice que dos cartas locales de dimensión m sobre M , (U, φ) y (V, ψ) están **Relacionadas** si se verifica una de las dos condiciones siguientes:

1. $U \cap V = \emptyset$, ó
2. Si $U \cap V \neq \emptyset$, entonces las aplicaciones (llamadas **Aplicaciones de Transición** o **Aplicaciones de Cambio** de las cartas),

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

y

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$$

son de clase \mathcal{C}^∞ .

Obsérvese que tanto $\varphi(U \cap V)$ como $\psi(U \cap V)$ son abiertos de \mathbf{R}^m .

Ejemplos 1.2.2. 1. Probar que dos parametrizaciones locales inyectivas de una misma curva regular dan lugar a dos cartas locales de dicha curva que están relacionadas.

2. Probar que dos superficies simples de una misma superficie regular dan lugar a dos cartas locales de dicha superficie que están relacionadas.

Definición 1.2.5. Un **Atlas** (de dimensión m) en M es una familia de cartas locales (de dimensión m) sobre M tales que sus dominios recubren a M y que dos a dos están relacionadas. Un atlas se dice **Maximal** si no está propiamente contenido en otro atlas.

Ejemplos 1.2.3. 1. Las parametrizaciones locales inyectivas de una curva regular forman un atlas de dimensión 1 sobre la curva y las superficies simples de una superficie regular forman un atlas de dimensión 2 sobre la superficie.

2. $\{(\mathbf{R}^m, \text{id})\}$ es un atlas de dimensión m sobre \mathbf{R}^m .

Definición 1.2.6. Una carta local (de dimensión m) se dice **Admisible** en un atlas (de dimensión m) si está relacionada con todas las cartas de dicho atlas.

En particular, todas las cartas de un atlas son admisibles en él. Además, si (U, φ) es una carta admisible en un atlas \mathcal{A} , entonces $\mathcal{A} \cup \{(U, \varphi)\}$ es otro atlas.

Proposición 1.2.1. Todo atlas está contenido en un único atlas maximal.

Definición 1.2.7. *Dos atlas de la misma dimensión sobre M se dicen **Compatibles** o **Equivalentes** si su unión es otro atlas.*

Como consecuencia de esta definición se tiene que dos atlas son compatibles si y sólo si están contenidos en un mismo atlas maximal. Además, las cartas de dos atlas compatibles están relacionadas todas entre sí.

Proposición 1.2.2. *La relación de compatibilidad entre atlas de la misma dimensión es una relación de equivalencia.*

Definición 1.2.8. *Una **Variedad Diferenciable** de dimensión m es un par (M, \mathcal{A}) donde M es un espacio topológico T_2 y $2^{\mathbb{N}}$ y \mathcal{A} un atlas de dimensión m sobre M . A la clase de equivalencia por la relación anterior del atlas \mathcal{A} (o, por abuso del lenguaje, al propio atlas \mathcal{A}) se le llama **Estructura Diferenciable** de la variedad.*

Cuando no haya lugar a confusión, se dirá que M es la variedad diferenciable, omitiendo nombrar explícitamente el atlas.

Por otra parte y en virtud de la definición de atlas, dado un punto p de una variedad diferenciable M , siempre existe una carta local (U, φ) de la estructura diferenciable tal que $p \in U$. Esta carta se denomina **Carta Entorno de p** .

1.3 Ejercicios.

1. Sean \mathcal{A} un atlas sobre M y $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ una carta local. Si $V \subseteq U$ es un abierto, probar que $(V, \varphi|_V)$ es una carta local admisible en \mathcal{A} .
2. Sea M una variedad diferenciable. Probar que, dado cualquier $p \in M$, existe una carta local (U, φ) de la estructura diferenciable centrada en p (es decir, tal que $\varphi(p) = 0$).
3. Sea M una variedad diferenciable y \mathcal{A} el atlas maximal de la estructura diferenciable. Probar que los dominios de las cartas locales de \mathcal{A} forman base de la topología de M .
4. Sea (M, \mathcal{A}) una variedad diferenciable y $G \subseteq M$ un abierto. Probar que, dando a G la topología relativa de la de M ,

$$\mathcal{B} = \{(G \cap U, \varphi|_{G \cap U})\}_{(U, \varphi) \in \mathcal{A}}$$

es un atlas sobre G que lo dota de estructura de variedad diferenciable de la misma dimensión que M , llamada **Estructura de Subvariedad Abierta** de G .

5. Probar que todo espacio vectorial real m -dimensional admite una estructura diferenciable canónica de dimensión m .
6. Probar que \mathbb{C}^m es una variedad diferenciable de dimensión $2m$.

7. Probar que el producto cartesiano de dos variedades diferenciables M y N es una variedad diferenciable de dimensión la suma de las dimensiones de las variedades factores. De hecho, si (U, φ) es una carta de M y (V, ψ) una carta de N , se verifica que $(U \times V, \varphi \times \psi)$ es una carta sobre $M \times N$.

Lección 2

Aplicaciones Diferenciables entre Variedades Diferenciables

2.1 Aplicaciones Diferenciables.

Definición 2.1.1. Sean M y N dos variedades diferenciables y $G \subseteq M$ un abierto. Una aplicación continua $f : G \longrightarrow N$, se dice **Diferenciable en un punto** $p \in G$ si existe una carta local (U, φ) en M entorno de p y existe una carta local (V, ψ) en N entorno de $f(p)$ tales que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(G \cap U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \psi f(G \cap U \cap f^{-1}(V))$$

es diferenciable en un entorno de $\varphi(p)$ contenido en $\varphi(G \cap U \cap f^{-1}(V))$. La aplicación f se dice diferenciable en G si es diferenciable en todos los puntos de G .

Proposición 2.1.1. La definición anterior no depende de las cartas elegidas entornos de p y $f(p)$, respectivamente.

Obsérvese que, por definición, toda aplicación diferenciable es continua. Al conjunto de las aplicaciones continuas de G en N y diferenciables en G se denota por $\mathcal{F}(G, N)$. En particular, si $G = M$, se tiene el conjunto $\mathcal{F}(M, N)$ de las aplicaciones diferenciables de todo M en N .

Proposición 2.1.2. Una aplicación continua $f : M \longrightarrow N$ pertenece a $\mathcal{F}(M, N)$ si y sólo si para cualesquiera cartas locales (U, φ) en M y (V, ψ) en N tales que $U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ se tiene que:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \psi f(U \cap f^{-1}(V))$$

es diferenciable.

Hagamos notar cómo la aplicación de la proposición anterior es la que “va por debajo” en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 M & & \xrightarrow{f} & & N \\
 (U, \varphi) & & & & (V, \psi) \\
 \varphi \downarrow & & & & \downarrow \psi \\
 \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \subseteq \varphi(U) & \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} & & & \psi(V)
 \end{array}$$

Definición 2.1.2. Una aplicación biyectiva $f \in \mathcal{F}(M, N)$ se dice que es un **Difeomorfismo** si $f^{-1} \in \mathcal{F}(N, M)$. Dos variedades diferenciables se dicen **Difeomorfas** si existe un difeomorfismo entre ambas.

Cuando la variedad N es \mathbf{R} con su estructura euclídea, las aplicaciones de M en \mathbf{R} se suelen llamar funciones. Así, a una función continua $f : G \rightarrow \mathbf{R}$, si es diferenciable (en el sentido de la Definición 2.1.1) en un punto $p \in M$, se llama **Función Diferenciable en p** y al conjunto de tales funciones se denota por $\mathcal{F}(p)$ y si es diferenciable en todo G (que podría ser el propio M), se llama **Función Diferenciable en G** y el conjunto de tales funciones se denota por $\mathcal{F}(G)$, verificándose que:

$$\mathcal{F}(G) = \bigcap_{p \in G} \mathcal{F}(p).$$

Proposición 2.1.3. Dado un abierto $G \subseteq M$, una aplicación continua $f : G \rightarrow \mathbf{R}$ es diferenciable en G si y sólo si para toda carta local (U, φ) de M , tal que $U \cap G \neq \emptyset$, $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap G) \rightarrow \mathbf{R}$ es diferenciable.

Proposición 2.1.4. Dado $G \subseteq M$ abierto, $\mathcal{F}(G)$ es un álgebra asociativa, conmutativa y con elemento unidad para las operaciones suma y producto de funciones y producto por números reales.

Ejemplos 2.1.1. Sea $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ un s.l.c. Entonces:

1. $x_i \in \mathcal{F}(U)$, para todo $i = 1, \dots, m$.
2. Sea $f \in \mathcal{F}(U)$. Dado cualquier $i = 1, \dots, m$ se define:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : p \in U \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_p = \left(\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i} \right)_{\varphi(p)} \in \mathbf{R}.$$

Se cumple que $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{F}(U)$, $i = 1, \dots, m$.

Proposición 2.1.5. (Lema de Extensión de Funciones Diferenciables). Sea $h \in \mathcal{F}(G)$, donde G es un abierto conteniendo a $p \in M$. Entonces, existen un entorno abierto V de p , con $\bar{V} \subseteq G$ y una función $f \in \mathcal{F}(M)$ tales que $f \equiv h$ en V y $f \equiv 0$ en $M - G$.

Teorema 2.1.1. Una aplicación continua $f \in \mathcal{F}(M, N)$ si y sólo si para toda función $g \in \mathcal{F}(N)$, $g \circ f \in \mathcal{F}(M)$.

2.2 Ejercicios.

1. Sean M y N dos variedades diferenciables y $G \subseteq M$ un abierto.
 - (a) Si $f \in \mathcal{F}(G, N)$ y $H \subseteq G$ es un abierto, probar que $f|_H \in \mathcal{F}(H, N)$.
 - (b) Si $f : G \rightarrow N$ es una aplicación y $\{G_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento por abiertos de G (es decir, $G = \bigcup_{i \in I} G_i$) tal que $f|_{G_i} \in \mathcal{F}(G_i, N)$, para todo $i \in I$, probar que $f \in \mathcal{F}(G, N)$.
2. Sean M una variedad diferenciable y $G \subseteq M$ un abierto. Probar que la aplicación inclusión $i : G \hookrightarrow M$ es diferenciable.
3. Probar que la composición de aplicaciones diferenciables es una aplicación diferenciable.
4. Probar que la aplicación identidad entre una variedad diferenciable y ella misma es un difeomorfismo.
5. Sean (M, \mathcal{A}_1) y (M, \mathcal{A}_2) dos variedades diferenciables. ¿Bajo qué condiciones es $\text{Id} : (M, \mathcal{A}_1) \rightarrow (M, \mathcal{A}_2)$ una aplicación diferenciable? ¿Cuándo es un difeomorfismo?
6. Probar que cualquier aplicación constante es diferenciable.

Lección 3

Espacio Tangente a una Variedad Diferenciable en un Punto

3.1 Introducción.

Una de las ideas fundamentales en el estudio de las variedades diferenciables es la de *aproximación lineal*. Esta es un concepto familiar cuyo origen está en el cálculo diferencial en espacios euclídeos, donde, por ejemplo, una aplicación de \mathbf{R}^m a \mathbf{R}^n puede ser aproximada por su derivada total. También es sabido que a las curvas y a las superficies regulares se les asocia en cada punto un espacio vectorial de su misma dimensión, formados por sus vectores tangentes en el punto, que son vectores de \mathbf{R}^3 , es decir, que pueden ser pensados como “flechas” de origen el punto y, por tanto, tienen una clara interpretación física. En el caso de las variedades diferenciables y debido a su definición abstracta (es decir, no existiendo el espacio euclídeo ambiente de las curvas y superficies), la situación es más compleja. Así, para que tenga sentido hablar de aproximaciones lineales a una variedad diferenciable, será necesario introducir la noción de espacio tangente a la variedad en un punto, que será una especie de “modelo lineal” para la variedad “alrededor” del punto.

Para comprender un poco mejor el por qué de la definición de vector tangente a una variedad en un punto que se va a dar en esta lección, es necesario recordar dos hechos. El primero de ellos es que todo vector tangente a una superficie regular en un punto es el vector tangente a una curva contenida en la superficie que pasa por el punto. Aunque la idea de curva diferenciable en una variedad es bastante intuitiva, no lo es tanto la de vector tangente a una tal curva. Puesto que la definición de variedad diferenciable se construye sobre la cuestión de identificar qué funciones son diferenciables, la propiedad de un vector tangente geométrico más fácilmente generalizable es su acción sobre

funciones diferenciables. Así, un vector tangente en un punto a una curva diferenciable contenida en una variedad diferenciable puede ser considerado como la derivación de las funciones diferenciables en el punto que toma la derivada de cada función a lo largo de la curva.

Por otra parte, hay que observar que en \mathbf{R}^m un vector \underline{v} en un punto p , $\underline{v} = (v_1, \dots, v_m)$ puede interpretarse como un operador de funciones diferenciables. Esto quiere decir que si f es una función diferenciable en un entorno U de p , $f : U \subseteq \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}$, entonces \underline{v} asigna a f el número real $\underline{v}(f)$ que es la derivada (direccional) de f en la dirección de \underline{v} valorada en p , dada por:

$$\underline{v}(f) = \sum_{i=1}^m v_i \left(\frac{\partial f}{\partial u_i} \right)_p \in \mathbf{R}.$$

Esta operación satisface las siguientes dos propiedades:

$$\underline{v}(\lambda f + \mu g) = \lambda \underline{v}(f) + \mu \underline{v}(g),$$

$$\underline{v}(fg) = f(p)\underline{v}(g) + g(p)\underline{v}(f),$$

donde f y g son funciones diferenciables en p y λ y μ números reales. La primera propiedad dice que \underline{v} es un operador lineal (\mathbf{R} -lineal) y la segunda que es una derivación. Debe hacerse notar que la operación de derivar depende sólo de las propiedades locales de las funciones en entornos suficientemente pequeños del punto.

La unión de estos dos hechos permite obtener una definición general de vector tangente a una variedad en un punto.

3.2 Vectores Tangentes en un Punto de una Variedad Diferenciable.

Definición 3.2.1. Una **Curva Diferenciable** en una variedad diferenciable M es una aplicación diferenciable $\alpha \in \mathcal{F}((a, b), M)$, donde (a, b) es un intervalo abierto (degenerado o no) de la recta real.

Recuérdese que $\alpha \in \mathcal{F}((a, b), M)$ quiere decir que para toda carta (U, φ) en M , tal que $\alpha^{-1}(U) \neq \emptyset$, se verifica que la aplicación $\varphi \circ \alpha : \alpha^{-1}(U) \longrightarrow \mathbf{R}^m$ es diferenciable.

Definición 3.2.2. Sea $\alpha \in \mathcal{F}((a, b), M)$ una curva diferenciable en M y $t_0 \in (a, b)$. Se llama **Vector Tangente** a la curva α en $\alpha(t_0)$ a la aplicación

$$\alpha'(t_0) : \mathcal{F}(\alpha(t_0)) \longrightarrow \mathbf{R} : f \mapsto \alpha'(t_0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t_0}.$$

Una curva diferenciable $\alpha : (a, b) \longrightarrow M$ en una variedad diferenciable M se dice **Regular** si $\alpha'(t) \neq 0$, para cualquier $t \in (a, b)$.

Debe observarse que, si $f \in \mathcal{F}(\alpha(t_0))$, entonces f está definida en un abierto $U \subseteq M$ tal que $\alpha(t_0) \in U$. Por tanto, $f \circ \alpha$ está definida en $\alpha^{-1}(U)$, que es abierto de (a, b) (por la continuidad de α). Además, como

$$\alpha'(t_0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(\alpha(t)) - f(\alpha(t_0))}{t - t_0},$$

el vector tangente mide la variación de la velocidad sobre la curva mediante la función f .

La siguiente proposición, cuya demostración se sigue inmediatamente de la definición y de las propiedades de la derivada usual, permite interpretar, por similitud con lo que ocurre en \mathbf{R}^m , el vector tangente a una curva en un punto como una derivación (direccional) en dicho punto.

Proposición 3.2.1. Sean $\alpha \in \mathcal{F}((a, b), M)$ una curva diferenciable en M , $t_0 \in (a, b)$, $f, g \in \mathcal{F}(\alpha(t_0))$ y $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Entonces, el vector tangente a α en $\alpha(t_0)$ verifica las siguientes propiedades:

1. $\alpha'(t_0)(\lambda f + \mu g) = \lambda \alpha'(t_0)f + \mu \alpha'(t_0)g$.
2. $\alpha'(t_0)(fg) = f(\alpha(t_0))\alpha'(t_0)g + g(\alpha(t_0))\alpha'(t_0)f$.

Proposición 3.2.2. Sean $\alpha \in \mathcal{F}((a, b), M)$ una curva diferenciable en M , $t_0 \in (a, b)$ y $f, g \in \mathcal{F}(\alpha(t_0))$ tales que coinciden en un entorno de $\alpha(t_0)$. Entonces $\alpha'(t_0)f = \alpha'(t_0)g$.

Definición 3.2.3. Sea $p \in M$. Se llama **Vector Tangente** a M en p al vector tangente en p a cualquier curva diferenciable en M que pase por p . Al conjunto de los vectores tangentes a M en p se le llama **Espacio Tangente** a M en p .

Siempre existen curvas diferenciables en M que pasan por p . Por ejemplo, la curva constante $\alpha : \mathbf{R} \rightarrow M : t \mapsto \alpha(t) = p$, cuyo vector tangente es $\alpha'(t) = 0$, para todo $t \in \mathbf{R}$.

Por otra parte, si $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ es un s.l.c. entorno de p , entonces $\varphi(p) = (p_1, \dots, p_m) \in \varphi(U) \subseteq \mathbf{R}^m$. Para cada $i = 1, \dots, m$, sea $\epsilon > 0$ tal que

$$(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + t, p_{i+1}, \dots, p_m) \in \varphi(U),$$

con $|t| < \epsilon$, que existe ya que $\varphi(U)$ es abierto. Entonces

$$\alpha_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M : t \mapsto \varphi^{-1}((p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + t, p_{i+1}, \dots, p_m))$$

es una curva diferenciable en M , con $\alpha_i(0) = p$ y $\alpha'_i(0)$ es, por tanto, un vector tangente a M en p , que se denotará por:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p.$$

Esta notación está justificada porque si $f \in \mathcal{F}(p)$, se tiene que

$$(f \circ \alpha_i)(t) = (f \circ \varphi^{-1})((p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + t, p_{i+1}, \dots, p_m)) = (f \circ \varphi^{-1} \circ h_i)(t),$$

donde $h_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \varphi(U) : t \mapsto h_i(t) = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + t, p_{i+1}, \dots, p_m)$. Ahora bien, $h_i(0) = \varphi(p)$ y, por la Regla de la Cadena en espacios euclídeos:

$$\begin{aligned} \alpha'_i(0)f &= \left. \frac{d(f \circ \alpha_i)}{dt} \right|_{t=0} = (\nabla(f \circ \varphi^{-1}))_{h_i(0)} \cdot h'_i(0) = \\ &= \left(\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i} \right)_{\varphi(p)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_p. \end{aligned}$$

A partir de ahora, se denotará:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_p, \quad i = 1, \dots, m.$$

Por las propiedades de los vectores tangentes a curvas, se deduce que todo vector tangente a M en p es una aplicación $u : \mathcal{F}(p) \rightarrow \mathbf{R}$, verificando:

1. $u(\lambda f + \mu g) = \lambda u(f) + \mu u(g)$, $f, g \in \mathcal{F}(p)$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ (condición de \mathbf{R} -linealidad);
2. $u(fg) = f(p)u(g) + g(p)u(f)$, $f, g \in \mathcal{F}(p)$ (Condición de Leibnitz);
3. $u(f) = u(g)$, si $f, g \in \mathcal{F}(p)$ coinciden en un entorno de p .

Si se denota por $T_p(M)$ al conjunto de las aplicaciones $u : \mathcal{F}(p) \rightarrow \mathbf{R}$ que son \mathbf{R} -lineales y que satisfacen la Condición de Leibnitz, se puede probar que dicho conjunto es, realmente, el espacio tangente a M en p .

Lema 3.2.1. Sean M una variedad diferenciable, $p \in M$, $f \in \mathcal{F}(p)$ y $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ un s.l.c. entorno de p . Entonces, en un cierto entorno de p se verifica que

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^m f_i \cdot (x_i - x_i(p)),$$

$$\text{donde } f_i \in \mathcal{F}(p) \text{ y } f_i(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_p.$$

Lema 3.2.2. Sean M una variedad diferenciable, $p \in M$ y $u \in T_p(M)$.

1. Si $\mathbf{c} \in \mathcal{F}(M)$ es la función constante dada por $\mathbf{c}(q) = c$ para todo $q \in M$ y $c \in \mathbf{R}$, entonces, se verifica que $u(\mathbf{c}) = 0$.
2. Si $f \in \mathcal{F}(p)$ se anula en un entorno de p , entonces $u(f) = 0$.
3. Si $f, g \in \mathcal{F}(p)$ coinciden en un entorno de p , entonces $u(f) = u(g)$.

Sea ahora un s.l.c. $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ entorno de p . Dados $u \in T_p(M)$ y cualquier función $f \in \mathcal{F}(p)$, en virtud de los lemas anteriores se tiene que:

$$u = \sum_{i=1}^m u(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p.$$

En particular, si $\alpha : (a, b) \longrightarrow M$ es una curva sobre M con $\alpha(t_0) = p$, como $\alpha'(t_0) \in T_p(M)$:

$$\alpha'(t_0) = \sum_{i=1}^m \alpha'(t_0) x_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \sum_{i=1}^m \frac{d(x_i \circ \alpha)}{dt} \Big|_{t_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p.$$

Usando esta expresión, puede deducirse que, dado $u \in T_p(M)$ y considerando la curva diferenciable en M ,

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M : t \mapsto \varphi^{-1}((p_1 + tu(x_1), \dots, p_m + tu(x_m))),$$

para cierto $\epsilon > 0$ que existe por la continuidad de φ , donde $(p_1, \dots, p_m) = \varphi(p)$, se verifica que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = u$.

Teorema 3.2.1. *El conjunto de los vectores tangentes a una variedad diferenciable M en un punto p es $T_p(M)$, es decir, los vectores tangentes a M en p son las aplicaciones \mathbf{R} -lineales de dominio $\mathcal{F}(p)$ con valores reales que verifican la Condición de Leibnitz.*

Ahora, en el conjunto de las curvas diferenciables en M que pasan por p y que se denota por $\mathcal{C}(p)$, se puede definir una relación de equivalencia \mathcal{R} por: $\alpha \mathcal{R} \beta$ si y sólo si α y β tienen el mismo vector tangente en p .

Proposición 3.2.3. *Los conjuntos $\mathcal{C}(p)/\mathcal{R}$ y $T_p(M)$ están en correspondencia biyectiva.*

De forma natural se definen en $T_p(M)$ la suma y producto por números reales que lo convierten en un espacio vectorial real. A continuación se va a encontrar una base (y, por tanto, a saber la dimensión) de este espacio vectorial. Para ello, la expresión anterior de $\alpha'(t_0)$ indica el camino a seguir.

Teorema 3.2.2. *Dado un punto p de una variedad diferenciable M y una carta local $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ entorno de p , los vectores tangentes*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p, \quad i = 1, \dots, m,$$

forman una base de $T_p(M)$, con lo que $\dim(T_p(M)) = m$.

Como consecuencia, se obtiene que hay tantas bases de $T_p(M)$ como cartas locales entorno de p . Además, si $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ y $(V, \psi = (y_1, \dots, y_m))$ son dos de tales cartas, entonces el cambio de bases viene dado por:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p.$$

Debe observarse que la matriz de cambio de bases es, realmente, la matriz jacobiana de la aplicación de transición $\varphi \circ \psi^{-1}$ en $\psi(p)$, pues:

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right)_p = \left(\frac{\partial(u_i \circ \varphi \circ \psi^{-1})}{\partial u_j} \right)_{\psi(p)}.$$

3.3 Espacio Cotangente.

Definición 3.3.1. Dado un punto p de una variedad diferenciable M , se llama **Espacio Cotangente** a M en p al espacio vectorial dual del espacio tangente a M en p , que se denota por $T_p^*(M)$ y a cuyos elementos se llaman **Covectores** en p .

Recuérdese que $T_p^*(M) = \{u^* : T_p(M) \longrightarrow \mathbf{R}/u^* \text{ es lineal}\}$.

Definición 3.3.2. Sea $f \in \mathcal{F}(p)$. Se llama **Diferencial** de f en p a la función $(df)_p : T_p(M) \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que $(df)_p u = u(f)$, para cualquier vector $u \in T_p(M)$.

Proposición 3.3.1. Dada $f \in \mathcal{F}(p)$, entonces $(df)_p \in T_p^*(M)$.

Dado $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ un s.l.c. entorno de p , en virtud de la proposición anterior se tiene que $(dx_i)_p \in T_p^*(M)$, para cualquier $i = 1, \dots, m$. Además, se puede comprobar fácilmente que $\{(dx_i)_p\}_{i=1, \dots, m}$ es una base de $T_p^*(M)$, dual de la base $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right\}_{i=1, \dots, m}$ de $T_p(M)$.

Proposición 3.3.2. Todo covector en p es la diferencial de alguna función diferenciable en p .

3.4 Ejercicios.

- Sean M una variedad diferenciable, $p \in M$ y $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$, $(V, \psi = (y_1, \dots, y_m))$ dos s.l.c. entorno de p , tales que $x_1 = y_1$. ¿Es $(\frac{\partial}{\partial x_1})_p = (\frac{\partial}{\partial y_1})_p$?
- Sean M una variedad diferenciable, $p \in M$, W un entorno abierto de p y $f, g \in \mathcal{F}(W)$. Probar que:
 - Si $\forall q \in W$ y $\forall u \in T_q(M)$ se tiene que $u(f) = 0$, entonces f es constante en un entorno de p .
 - Si $\forall q \in W$ y $\forall u \in T_q(M)$ se verifica que $u(f) = u(g)$, entonces $f - g$ es constante en un entorno de p .
- Sean M una variedad diferenciable, $p \in M$ y $\alpha : I \longrightarrow M$ una curva diferenciable pasando por p (es decir, se puede suponer que $0 \in I$ y que $\alpha(0) = p$). Si $\alpha'(0) = 0$, probar que la aplicación

$$L : \mathcal{F}(p) \longrightarrow \mathbf{R} : f \longmapsto L(f) = \left. \frac{d^2(f \circ \alpha)}{dt^2} \right|_{t=0}$$

define un vector tangente a M en p .

- Sean M una variedad diferenciable, $p \in M$ y $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ un s.l.c. entorno de p . Dado cualquier covector $\omega \in T_p^*(M)$, calcular su expresión en función de la base $\{(dx_i)_p\}_{i=1, \dots, m}$.

Lección 4

Aplicación Diferencial de una Aplicación Diferenciable

La definición de espacio tangente en cada punto de una variedad diferenciable y, por tanto, la idea de “aproximar” la variedad en el punto por un espacio vectorial, permite, a su vez, dada una aplicación diferenciable entre dos variedades diferenciables, definir la noción de diferencial de tal aplicación en cada punto de la variedad dominio como una aplicación lineal entre los espacios tangentes del punto y del punto imagen, que generaliza a la bien conocida entre espacios euclídeos. El conocimiento de las propiedades de tales aplicaciones es de gran utilidad, pues están directamente relacionadas con la naturaleza diferenciable de la aplicación de partida.

4.1 Aplicación Diferencial y Aplicación Codiferencial de una Aplicación Diferenciable.

Definición 4.1.1. Sean M y N dos variedades diferenciables, $f \in \mathcal{F}(M, N)$ y $p \in M$. Se llama **Diferencial** de f en p a la aplicación $f_{*p} : T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$ definida de la siguiente forma: si $u \in T_p(M)$ es cualquier vector tangente a M en p y $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ es una curva diferenciable que pasa por p y cuyo vector tangente en p es u (es decir, si existe $t_0 \in (a, b)$ con $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = u$), entonces $f_{*p}u = (f \circ \alpha)'(t_0)$.

Obsérvese que, desde luego, $f_{*p}u$ es un vector tangente a N en $f(p)$, pues $f \circ \alpha : (a, b) \rightarrow N$ es una curva diferenciable en N , que pasa por $f(p)$, ya que $f(\alpha(t_0)) = f(p)$ y, por tanto, $(f \circ \alpha)'(t_0) \in T_{f(p)}(N)$. Además, la definición anterior no depende de la curva α elegida pasando por p y con vector tangente en p igual a u . En efecto, si $\beta : (c, d) \rightarrow M$ es otra curva en las mismas

condiciones, entonces existe $\tau_0 \in (c, d)$ tal que $\beta(\tau_0) = p$ y $\beta'(\tau_0) = u$. Es claro que $f \circ \beta : (c, d) \rightarrow N$ es una curva diferenciable que pasa por $f(p)$, ya que $(f \circ \beta)(\tau_0) = f(p)$ y su vector tangente en $f(p)$ es $f_{*p}u$, pues dada cualquier $g \in \mathcal{F}(f(p))$, se tiene que:

$$\begin{aligned} (f \circ \beta)'(\tau_0)g &= \frac{d(g \circ (f \circ \beta))}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_0} = \frac{d((g \circ f) \circ \beta)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_0} = \\ &= \beta'(\tau_0)(g \circ f) = u(g \circ f) = \alpha'(t_0)(g \circ f) = \\ &= \frac{d((g \circ f) \circ \alpha)}{dt} \Big|_{t=t_0} = \frac{d(g \circ (f \circ \alpha))}{dt} \Big|_{t=t_0} = (f \circ \alpha)'(t_0)g = (f_{*p}u)g. \end{aligned}$$

Proposición 4.1.1. Si $f \in \mathcal{F}(M, N)$, $p \in M$, $u \in T_p(M)$ y $g \in \mathcal{F}(f(p))$, entonces se verifica:

$$(f_{*p}u)g = u(g \circ f).$$

Proposición 4.1.2. (Propiedades de la Diferencial).

1. **(Regla de la Cadena).** Sean $f \in \mathcal{F}(M, N)$ y $g \in \mathcal{F}(N, P)$. Entonces, para cualquier $p \in M$ se verifica que $(g \circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p}$.
2. Dado $p \in M$, entonces $(\text{Id}_M)_{*p} = \text{Id}_{T_p(M)}$.
3. Si $f, g \in \mathcal{F}(M, N)$ y $f \equiv g$ en un entorno de $p \in M$, entonces $f_{*p} = g_{*p}$.

Proposición 4.1.3. La diferencial en cada punto de una aplicación diferenciable es una aplicación lineal.

En consecuencia, cada diferencial tiene asociada una matriz. Para calcularla, sean $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ un s.l.c. de M entorno de p y $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$ un s.l.c. de N entorno de $f(p)$. Para estas cartas locales, las bases de $T_p(M)$ y $T_{f(p)}(N)$ son

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)_p \right\} \text{ y } \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)_{f(p)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right)_{f(p)} \right\},$$

respectivamente. Entonces, como

$$\begin{aligned} f_{*p} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p &= \sum_{j=1}^n \left[f_{*p} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (y_j) \right] \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{f(p)} = \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{\partial (y_j \circ f)}{\partial x_i} \right)_p \right] \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{f(p)}, \end{aligned}$$

la matriz de f_{*p} respecto de estas bases viene dada por

$$f_{*p} = \left[\left(\frac{\partial (y_j \circ f)}{\partial x_i} \right)_p \right],$$

que es la matriz jacobiana de la aplicación $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(f(U \cap f^{-1}(V)))$.

Definición 4.1.2. La matriz anterior se denomina **Matriz Jacobiana** de f en p respecto de las cartas dadas. En el caso en que $\dim(M) = \dim(N)$, el determinante de esta matriz se llama **Jacobiano** de f en p y se denota por $J_p(f)$.

Proposición 4.1.4. Si $f \in \mathcal{F}(M, N)$, siendo M conexa y $f_{*p} = 0$, para cualquier $p \in M$, entonces f es constante.

Definición 4.1.3. Una aplicación $f \in \mathcal{F}(M, N)$ se dice que es **No Singular** en $p \in M$ si f_{*p} es inyectiva, es decir, si $\ker f_{*p} = 0$. Al rango (dimensión de la imagen) de f_{*p} se le denomina **Rango** de f en p . El punto p se dice **Regular** para f si f_{*p} es sobreyectiva. En caso contrario, p se dice **Crítico**. Si p es crítico para f , el punto $q = f(p)$ se denomina **Valor Crítico**. De lo contrario se llama **Valor Regular**.

Obsérvese que si $\dim(M) = \dim(N)$, entonces $p \in M$ es regular para f si y sólo si f_{*p} es un isomorfismo, es decir, si y sólo si $J_p(f) \neq 0$.

Definición 4.1.4. Una aplicación $f \in \mathcal{F}(M, N)$ se dice que es una **Inmersión** si es no singular en todos los puntos de M , es decir, si su diferencial en cada punto es una aplicación inyectiva y se dice que es una **Sumersión** si todos los puntos de M son regulares para f , es decir, si su diferencial en cada punto es una aplicación sobreyectiva.

Definición 4.1.5. Sea $f \in \mathcal{F}(M, N)$ y $p \in M$. Se llama **Aplicación Codiferencial** de f en p a la aplicación dual de f_{*p} , denotada por f_p^* y dada por

$$f_p^* : T_{f(p)}^*(N) \longrightarrow T_p^*(M) : \omega \mapsto f_p^* \omega$$

tal que, para cualquier $u \in T_p(M)$, $(f_p^* \omega)u = \omega(f_{*p}u)$.

Proposición 4.1.5. (Regla de la Cadena de la Codiferencial). Sean $f \in \mathcal{F}(M, N)$, $g \in \mathcal{F}(N, P)$ y $p \in M$. Entonces, se verifica que $(g \circ f)_p^* = f_p^* \circ g_{f(p)}^*$.

Proposición 4.1.6. Sean $f \in \mathcal{F}(M, N)$ y $p \in M$. Entonces, se verifican:

1. f_{*p} es inyectiva si y sólo si f_p^* es sobreyectiva.
2. f_{*p} es sobreyectiva si y sólo si f_p^* es inyectiva.

4.2 Noción de Subvariedad.

La mayoría de los ejemplos familiares de variedades diferenciables son subconjuntos de otras variedades (puede pensarse en los abiertos de una variedad diferenciable, las superficies regulares en \mathbf{R}^3 o la figura ocho en \mathbf{R}^2). Cabe preguntarse cuándo la estructura diferenciable del subconjunto viene “inducida” de alguna manera por la de la variedad ambiente y cuál es la relación entre ambas estructuras. Esta relación tiene que ver con el hecho de que el espacio tangente a la variedad subconjunto sea subespacio del espacio tangente de la variedad ambiente en cada punto. Aparece así la noción de subvariedad.

Definición 4.2.1. Una **Subvariedad** de una variedad diferenciable N es un par (M, f) , donde M es otra variedad diferenciable y $f \in \mathcal{F}(M, N)$ es una inmersión inyectiva.

En los ejemplos antes mencionados (subvariedades abiertas, superficies regulares o la figura ocho con cualquiera de las dos estructuras conocidas), la inmersión inyectiva que las convierte en subvariedad es la inclusión. Sin embargo, esto no siempre ocurre. Por ejemplo, considérese el intervalo abierto $(-1, 1)$ dotado de la estructura diferenciable dada por la carta global $\varphi(t) = t^3$. Se tiene que $(-1, 1)$ es un subconjunto de \mathbf{R} con la estructura euclídea y la inclusión $i : (-1, 1) \hookrightarrow \mathbf{R}$ no es una inmersión, pues ni siquiera es diferenciable. Con todo, el par $((-1, 1), f)$, con $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ la inmersión $f(x) = x^3$ sí es una subvariedad de \mathbf{R} .

Proposición 4.2.1. Sea (M, f) una subvariedad de la variedad diferenciable N . Entonces, puede dotarse a $f(M)$ de una estructura de variedad diferenciable tal que $(f(M), i)$, con $i : f(M) \hookrightarrow N$ la inclusión, es una subvariedad de N .

Obsérvese que, en el resultado anterior, la topología de $f(M)$ es, en general, más fina que la topología relativa inducida por la de N , pues la inclusión, al ser diferenciable, es continua. Esto lleva a pensar que la noción de subvariedad es más sutil que la análoga para espacios topológicos. En efecto, como ya se ha dicho, el ocho con cualquiera de las dos estructuras conocidas es subvariedad de \mathbf{R}^2 con la inclusión como inmersión inyectiva y, sin embargo, no es subespacio topológico de \mathbf{R}^2 en ninguno de los dos casos.

Definición 4.2.2. Se dice que una aplicación $f \in \mathcal{F}(M, N)$ es una **Incrustación** si es un homeomorfismo sobre su imagen, dotada ésta de la topología relativa de N , es decir, si $f : M \rightarrow f(M) \subseteq N$ (dando a $f(M)$ la topología relativa de N) es una aplicación biyectiva, continua y abierta o cerrada.

Definición 4.2.3. Una subvariedad (M, f) de una variedad diferenciable N se dice que es una **Subvariedad Regular** si f es, además, una incrustación.

Por tanto, para subvariedades regulares, las imágenes de éstas por la inmersión, dotadas de la estructura dada por la Proposición 4.2.1, son también subespacios topológicos de la variedad ambiente. En el caso particular de considerar subvariedades que sean subconjuntos con la inclusión, se obtiene:

Proposición 4.2.2. Sean $M \subseteq N$ dos variedades diferenciables tales que, si $i : M \hookrightarrow N$ es la inclusión, (M, i) es subvariedad de N . Entonces, (M, i) es subvariedad regular de N si y sólo si M tiene la topología relativa de N .

4.3 El Teorema de la Función Inversa.

Dada una subvariedad (M, f) de una variedad diferenciable N , si $\dim(M) = \dim(N)$, la diferencial de f en cada punto de M es un isomorfismo de espacios vectoriales. Este hecho ocurre, en particular, si f es un difeomorfismo,

verificándose que dos variedades diferenciables difeomorfas son, cada una de ellas, subvariedad de la otra con inmersión el difeomorfismo o su inverso, según el caso.

Cabe preguntarse, entonces, por el recíproco de este resultado: Dada una subvariedad de una variedad diferenciable, ambas de la misma dimensión, ¿son difeomorfas a través de la inmersión? Más en general, si una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables cumple que su diferencial en cada punto es un isomorfismo, ¿es un difeomorfismo? La respuesta es negativa, pues basta considerar una subvariedad abierta de una variedad diferenciable (aquí la inmersión es la inclusión, que no es un difeomorfismo, al no ser sobreyectiva).

Sin embargo, sí puede probarse, mediante el Teorema de la Función Inversa en Variedades, que una tal aplicación es un difeomorfismo local. De este teorema se deducen importantes colorarios sobre las carta locales de ambas variedades. Por otra parte, la condición adicional que debe imponerse a la aplicación para que sí sea un difeomorfismo es la biyectividad.

Teorema 4.3.1. (Teorema de la Función Inversa en \mathbf{R}^m). Sean $G \subseteq \mathbf{R}^m$ un abierto, $f : G \longrightarrow \mathbf{R}^m$ una aplicación diferenciable y $p \in G$ tal que

$$\left| \left(\frac{\partial(u_i \circ f)}{\partial u_j} \right)_p \right| \neq 0.$$

Entonces, existe un abierto U , con $p \in U \subseteq G$, tal que $f(U)$ es abierto de \mathbf{R}^m y $f|_U : U \longrightarrow f(U)$ es un difeomorfismo.

Teorema 4.3.2. (Teorema de la Función Inversa en Variedades). Sean $f \in \mathcal{F}(M, N)$ y $p \in M$ tal que f_{*p} es un isomorfismo. Entonces, existe un abierto U , con $p \in U \subseteq M$, tal que $f(U)$ es abierto de N y $f|_U : U \longrightarrow f(U)$ es un difeomorfismo.

Corolario 4.3.1. Si $f \in \mathcal{F}(M, N)$ verifica que f_{*p} es un isomorfismo para todo $p \in M$, entonces f es un difeomorfismo local.

Definición 4.3.1. Un conjunto de funciones $\{f_1, \dots, f_k\}$ diferenciables en $p \in M$ se dice que es **Independiente** en p si sus diferenciales $(df_1)_p, \dots, (df_k)_p$ son linealmente independientes en $T_p^*(M)$.

Corolario 4.3.2. Sea $\{f_1, \dots, f_m\}$ un conjunto de funciones independiente en $p \in M$, con $\dim(M) = m$. Entonces, las funciones f_1, \dots, f_m son las funciones coordenadas de un s.l.c. en un entorno de p .

Corolario 4.3.3. Sea $\{f_1, \dots, f_k\}$ un conjunto de funciones independiente en $p \in M$, con $\dim(M) = m > k$. Entonces, las funciones f_1, \dots, f_k forman parte de un s.l.c. en un entorno de p .

Corolario 4.3.4. Sea $\{f_1, \dots, f_k\}$ un conjunto de funciones diferenciables en $p \in M$, $k > \dim(M)$, tales que $(df_1)_p, \dots, (df_k)_p$ generen $T_p^*(M)$. Entonces, un subconjunto de tales funciones forman un s.l.c. en un entorno de p .

Corolario 4.3.5. Sea $f \in \mathcal{F}(M, N)$ tal que f_{*p} es sobreyectiva, para cierto $p \in M$. Sea (y_1, \dots, y_n) un s.l.c. en un entorno de $f(p)$. Entonces, las funciones $y_1 \circ f, \dots, y_n \circ f$ forman parte de un s.l.c. en un entorno de p . Si f es una sumersión, las parejas de cartas así obtenidas para cada punto de M se denominan **Cartas Adaptadas a la Sumersión**.

Corolario 4.3.6. Sea $f \in \mathcal{F}(M, N)$ tal que f_{*p} es inyectiva, para cierto $p \in M$. Sea (y_1, \dots, y_n) un s.l.c. en un entorno de $f(p)$. Entonces, un subconjunto de las funciones $y_1 \circ f, \dots, y_n \circ f$ forman un s.l.c. en un entorno de p , siendo f inyectiva en este entorno. Si f es una inmersión, las parejas de cartas así obtenidas para cada punto de M se denominan **Cartas Adaptadas a la Inmersión**.

Una cuestión que surge de manera natural es averiguar qué condiciones debe cumplir una aplicación f tal que su diferencial en cada punto es un isomorfismo para ser un difeomorfismo. Dicha condición es la biyectividad, ya que, al ser la diferencial de f un isomorfismo en cada punto, f es un difeomorfismo local. Como es biyectiva, f^{-1} es diferenciable en cada punto de N , es decir, f es un difeomorfismo. Sin embargo, para variedades $2^o N$, la condición se puede debilitar algo. Para ello, serán necesarios algunos resultados de Teoría de la Medida en variedades.

Recuérdese que un subconjunto $A \subseteq \mathbf{R}^m$ se dice que tiene *Medida (de Lebesgue) Nula* si dado $\epsilon > 0$, existe $\{Q_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, familia numerable de cubos, tal que:

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbf{N}} Q_n \text{ y } \sum_{n \in \mathbf{N}} \text{vol}(Q_n) < \epsilon.$$

En estas condiciones se verifican las siguientes propiedades:

1. Cualquier subconjunto de un conjunto de medida nula es, a su vez, de medida nula.
2. La unión numerable de conjuntos de medida nula en \mathbf{R}^m es un conjunto de medida nula.
3. La imagen por una aplicación de clase \mathcal{C}^1 de \mathbf{R}^m en \mathbf{R}^m de un conjunto de medida nula es un conjunto de medida nula.
4. $\mathbf{R}^n \times \{x_0\}$, con $x_0 \in \mathbf{R}^{m-n}$, es de medida nula en \mathbf{R}^m .

Definición 4.3.2. Sea M una variedad diferenciable y $A \subseteq M$. Se dice que A tiene **Medida (de Lebesgue) Nula** si para toda familia de cartas locales $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ cuyos dominios recubran a A , se cumple que $\varphi_i(A \cap U_i)$ es de medida nula en \mathbf{R}^m , para todo $i \in I$.

Proposición 4.3.1. Sean M y N dos variedades diferenciables y $f \in \mathcal{F}(M, N)$. Entonces:

1. Si $A \subseteq M$ es un conjunto de medida nula en M , se cumple que $f(A)$ es un conjunto de medida nula en N .

2. Si $m < n$, se cumple que $f(M)$ es un conjunto de medida nula en N .

Se puede ahora probar el resultado buscado. Debe resaltarse que en todo el desarrollo anterior se ha usado que M verifica el axioma $2^o N$, por lo que la siguiente proposición y su corolario sólo son válidos para variedades diferenciables $2^o N$.

Proposición 4.3.2. Sea $f \in \mathcal{F}(M, N)$ una aplicación sobreyectiva y sea $p \in M$ tal que f_{*p} es inyectiva. Entonces, f_{*p} es un isomorfismo.

Corolario 4.3.7. Sea $f \in \mathcal{F}(M, N)$ una inmersión biyectiva. Entonces, f es un difeomorfismo

4.4 Factorización de Aplicaciones. Unicidad de Subvariedades.

Dada una variedad diferenciable N , una subvariedad de N es un par (M, f) donde M es otra variedad diferenciable y $f \in \mathcal{F}(M, N)$ es una inmersión inyectiva, es decir, es una aplicación diferenciable, inyectiva y tal que su diferencial es inyectiva en cada punto de M . Esto quiere decir que una misma variedad diferenciable tiene tantas subvariedades como inmersiones puedan establecerse a ella desde otras variedades diferenciables. En particular, todas las variedades difeomorfas a una dada son subvariedades de ella y debe recordarse que cualquier conjunto biyectivo con una variedad diferenciable puede dotarse de una estructura de variedad diferenciable que convierte a la biyección en un difeomorfismo. Por tanto, se hace necesario “controlar” de alguna forma la familia de las subvariedades de una variedad diferenciable.

Definición 4.4.1. Dos subvariedades (M_1, f_1) y (M_2, f_2) de una variedad N se dice que son **Equivalentes** si existe un difeomorfismo $f : M_1 \rightarrow M_2$ tal que $f_1 = f_2 \circ f$.

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f_1} & N \\ & \searrow f & \uparrow f_2 \\ & & M_2 \end{array}$$

Puede comprobarse sin dificultad que ésta es una relación de equivalencia en la clase de todas las subvariedades de N , que permite trabajar con más comodidad con dicha clase. Por tanto, es conveniente dar condiciones para la existencia de tal difeomorfismo. Para ello, se planteará un problema más general.

Sea $f \in \mathcal{F}(M, N)$ una aplicación diferenciable entre dos variedades diferenciables y sea (P, g) una subvariedad de N . Como g es inyectiva, si f factoriza a través de g , es decir si $f(M) \subseteq g(P)$, entonces se puede definir una única aplicación $f_0 : M \rightarrow P$ tal que $g \circ f_0 = f$. No siempre esta aplicación es diferenciable.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow f_0 & \uparrow g \\ & & P \end{array}$$

Teorema 4.4.1. (Lema de Factorización). *Sea $f \in \mathcal{F}(M, N)$ una aplicación diferenciable entre dos variedades diferenciables y sea (P, g) una subvariedad de N tal que f factoriza a través de g . Entonces:*

1. *Si f_0 es continua, entonces es diferenciable.*
2. *Si (P, g) es una subvariedad regular de N , entonces f_0 es continua.*

Proposición 4.4.1. *Cada clase de equivalencia de subvariedades de una variedad diferenciable N tiene un único representante de la forma (A, i) donde A es un subconjunto de N con estructura de variedad diferenciable y la inclusión $i : A \hookrightarrow N$ es una inmersión.*

Es habitual afirmar que existe una única subvariedad de una variedad diferenciable N cumpliendo cierta propiedad. Esta unicidad se entenderá salvo la equivalencia definida anteriormente. En particular, si las subvariedades de N se consideran como subconjuntos con estructura de variedad diferenciable tal que la inclusión correspondiente es una inmersión, la unicidad significa único subconjunto con única topología 2^2N y única estructura diferenciable. En general, dado un subconjunto $A \subseteq N$, no existe una única estructura diferenciable sobre A tal que (A, i) sea una subvariedad de N , si es que existe alguna. No obstante, se tienen dos teoremas de unicidad que imponen condiciones a la topología de A para tal situación

Teorema 4.4.2. (Primer Teorema de Unicidad). *Sean N una variedad diferenciable y $A \subseteq N$ un subconjunto. Fijada una topología sobre A , existe, a lo más, una estructura diferenciable en A tal que (A, i) es una subvariedad de N .*

Teorema 4.4.3. (Segundo Teorema de Unicidad). *Sean N una variedad diferenciable y $A \subseteq N$ un subconjunto. Si con la topología relativa A tiene una estructura diferenciable tal que (A, i) es una subvariedad de N , entonces A tiene estructura de variedad diferenciable única, es decir, que para que A sea subvariedad de N tiene que ser, precisamente, con la topología relativa y con la misma estructura diferenciable.*

4.5 Teorema de la Función Implícita. Teorema de Whitney.

Teorema 4.5.1. (Teorema de la Función Implícita). Sean $f \in \mathcal{F}(M, N)$ una aplicación diferenciable entre dos variedades diferenciables, $q \in N$ y $P = f^{-1}(\{q\}) \neq \emptyset$. Si f_{*p} es sobreyectiva, para cualquier $p \in P$, entonces P tiene una única estructura de variedad diferenciable tal que (P, i) es una subvariedad regular de M de dimensión $\dim(M) - \dim(N)$.

Corolario 4.5.1. Sea $f : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$ una aplicación diferenciable. Si el conjunto $P = \{p \in \mathbf{R}^m / f(p) = 0\}$ es no vacío y el rango de la matriz jacobiana de f vale n en todos los puntos de P , entonces P es una subvariedad regular de \mathbf{R}^m de dimensión $m - n$.

El Teorema de la Función Implícita puede generalizarse. Recordemos que, dados $f \in \mathcal{F}(M, N)$ y $p \in M$, se llama *rango* de f en p al rango (dimensión de la imagen) de f_{*p} . Así, se tiene:

Teorema 4.5.2. (Teorema del Rango o de la Subvariedad de Nivel). Sean $f \in \mathcal{F}(M, N)$ una aplicación diferenciable entre dos variedades diferenciables, $q \in N$ y $P = f^{-1}(\{q\}) \neq \emptyset$. Si f tiene rango constante k en un entorno abierto de cada $p \in P$, entonces P tiene una única estructura de variedad diferenciable tal que (P, i) es una subvariedad regular cerrada de M de codimensión k .

Teorema 4.5.3. Toda variedad diferenciable compacta es difeomorfa a una subvariedad cerrada de un espacio euclídeo de dimensión suficientemente grande, es decir, puede ser incrustada en un espacio euclídeo.

Teorema 4.5.4. (Teorema de Whitney). Toda variedad diferenciable para-compacta m -dimensional es difeomorfa a una subvariedad cerrada de un espacio afín $(2m + 1)$ -dimensional.

4.6 Ejercicios.

1. Probar que la diferencial de una aplicación $f : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$, considerada como aplicación entre variedades diferenciables, coincide con la diferencial habitual de \mathbf{R}^n .
2. Probar que si $f \in \mathcal{F}(M, N)$ es un difeomorfismo, entonces su diferencial en cada punto es un isomorfismo.
3. Probar que el rango de la diferencial de una aplicación diferenciable entre dos variedades diferenciables no depende de las cartas tomadas.
4. Probar que las proyecciones de un producto de variedades diferenciables en cada uno de los factores son sumersiones.

5. Sean $f \in \mathcal{F}(M, N)$, $p \in M$ y $g \in \mathcal{F}(f(p))$. Probar que

$$f_p^*((dg)_{f(p)}) = (d(g \circ f))_p.$$

6. Probar que toda superficie regular es una subvariedad regular de \mathbf{R}^3 .
7. Probar que cualquier subvariedad abierta de una variedad diferenciable es subvariedad regular.
8. Probar que S^n es subvariedad regular de \mathbf{R}^{n+1} .
9. Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$. Si $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ es una base de $T_p^*(M)$, probar que existe una carta local $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ entorno de p tal que $(dx_i)_p = \omega_i$, $i = 1, \dots, m$.
10. Probar que no existen inmersiones de S^1 en \mathbf{R} .
11. Sea $f \in \mathcal{F}(M, N)$ un difeomorfismo local inyectivo entre dos variedades diferenciables. Probar que f es un difeomorfismo de M en un cierto abierto de N .
12. Sean M subvariedad de \bar{M} y N subvariedad de \bar{N} . Sea $f : \bar{M} \rightarrow \bar{N}$ una aplicación diferenciable. ¿Bajo qué condiciones mínimas se puede asegurar que $f|_M : M \rightarrow N$ es diferenciable?
13. Probar que la relación “ser equivalentes” entre subvariedades de una variedad diferenciable es una relación de equivalencia.
14. Sean $M \subseteq N$ tales que (M, i) es subvariedad de N . Probar que M y N tienen la misma dimensión si y sólo si M es subvariedad abierta de N .
15. ¿Para qué valores de $a \in \mathbf{R}$ es el conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x^2 + y^2 - z + 2 = 0; z = a\}$$

una subvariedad regular de dimensión 1 de \mathbf{R}^3 ?

Lección 5

Campos de Vectores sobre una Variedad Diferenciable

5.1 Campos de Vectores Diferenciables.

Definición 5.1.1. Un **Campo de Vectores** X en un abierto $U \subseteq M$ de una variedad diferenciable es una ley que a cada punto $p \in U$ le asigna un vector tangente $X_p \in T_p(M)$.

Ejemplo 5.1.1. Sea $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ un s.l.c. en M . Entonces, para cualquier $i = 1, \dots, m$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : p \in U \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

es un campo de vectores en U .

Un campo de vectores X en U también puede interpretarse como una aplicación que envía funciones diferenciables en U en funciones de U , de la siguiente forma: si $f \in \mathcal{F}(U)$, se define $Xf : U \rightarrow \mathbf{R}$ por $(Xf)(p) = X_p f$.

Definición 5.1.2. Un campo de vectores en U se dice **Diferenciable** si para toda función $f \in \mathcal{F}(U)$ se tiene que $Xf \in \mathcal{F}(U)$. Al conjunto de campos diferenciables en U se denota por $\mathcal{X}(U)$.

Por tanto, un campo diferenciable en U puede interpretarse como una aplicación $X : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$. Esta aplicación verifica las dos siguientes propiedades:

1. $X(\lambda f + \mu g) = \lambda Xf + \mu Xg$, para cualesquiera $f, g \in \mathcal{F}(U)$ y $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ (\mathbf{R} -linealidad).
2. $X(fg) = gXf + fXg$, para cualesquiera $f, g \in \mathcal{F}(U)$.

Por esta razón, se dice que los campos diferenciables de vectores son derivaciones sobre el conjunto de las funciones diferenciables.

Por otra parte, si $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ es un s.l.c. en M , entonces, dado un campo de vectores X en U , para cualquier $p \in U$ se puede escribir

$$X_p = \sum_{i=1}^m (X_p(x_i)) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p,$$

es decir,

$$X = \sum_{i=1}^m f_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

para ciertas funciones $f_i : U \rightarrow \mathbf{R}$, donde $f_i = Xx_i$, para todo $i = 1, \dots, m$.

Proposición 5.1.1. *Sea X un campo de vectores en U . Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. $X \in \mathcal{X}(U)$.
2. Si $(V, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ es un s.l.c. con $V \subseteq U$, entonces

$$X|_V = \sum_{i=1}^m (X|_V x_i) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_V,$$

donde $X|_V x_i \in \mathcal{F}(V)$, para todo $i = 1, \dots, m$.

3. Para todo $p \in U$, existe $(V, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$, s.l.c. entorno de p , con $V \subseteq U$, tal que

$$X|_V = \sum_{i=1}^m (X|_V x_i) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_V,$$

donde $X|_V x_i \in \mathcal{F}(V)$, para todo $i = 1, \dots, m$.

En $\mathcal{X}(U)$ se pueden definir las siguientes operaciones:

1. Suma: si $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, $(X + Y)_p = X_p + Y_p$, para todo $p \in U$. Se tiene que $X + Y \in \mathcal{X}(U)$.
2. Producto por números reales: si $X \in \mathcal{X}(U)$ y $\lambda \in \mathbf{R}$, $(\lambda X)_p = \lambda X_p$, para todo $p \in U$. Se tiene que $\lambda X \in \mathcal{X}(U)$.
3. Producto por funciones diferenciables: si $X \in \mathcal{X}(U)$ y $f \in \mathcal{F}(U)$, $(fX)_p = f(p)X_p$, para todo $p \in U$. Se tiene que $fX \in \mathcal{X}(U)$.

Proposición 5.1.2. *$\mathcal{X}(U)$ es un espacio vectorial real con la suma y el producto de números reales y un $\mathcal{F}(U)$ -módulo con la suma y el producto por funciones diferenciables.*

Proposición 5.1.3. Si $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ es un s.l.c. en M , entonces el $\mathcal{F}(U)$ -módulo $\mathcal{X}(U)$ está finitamente generado y tiene como base:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}.$$

En $\mathcal{X}(U)$ puede definirse otra operación interna, llamada *Producto Corchete*, mediante $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$, para todos $X, Y \in \mathcal{X}(U)$ y $f \in \mathcal{F}(U)$. Esta operación tiene las siguientes propiedades:

Proposición 5.1.4. Dados $X, Y, Z \in \mathcal{X}(U)$ y $f, g \in \mathcal{F}(U)$, se verifica que:

1. $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$; $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$.
2. $[X, Y] = -[Y, X]$ (anticonmutatividad).
3. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Identidad de Jacobi).
4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$.

Corolario 5.1.1. $\mathcal{X}(U)$ con las operaciones suma, producto por escalares (números reales, que realmente son casos particulares de funciones diferenciables, las funciones constantes) y producto corchete es un Álgebra de Lie real.

Teorema 5.1.1. (Lema de Extensión de Campos Diferenciables). Sea $X \in \mathcal{X}(U)$ y $V \supseteq U$ otro abierto. Entonces, dado cualquier $p \in U$, existen $\overline{X} \in \mathcal{X}(V)$ y W abierto con $p \in W \subseteq U$ tales que $\overline{X}_q = X_q$, para todo $q \in W$ y $\overline{X} = 0$ en $V - U$.

5.2 Campos f -relacionados

Sean M y N dos variedades diferenciables, $f \in \mathcal{F}(M, N)$ y $U \subseteq M$ un abierto. Se podría pensar en definir un campo de vectores Y , imagen de X por f , escribiendo $Y_{f(p)} = f_{*p}X_p \in T_{f(p)}(N)$. Esto no es siempre posible por diferentes razones. En primer lugar, $f(U)$ no tiene por qué ser abierto. Además, si f no es inyectiva, puede haber puntos de N que tengan asignados más de un vector. En efecto, si $f(p) = f(q)$, siendo $p \neq q$, entonces, en general, $Y_{f(p)} = f_{*p}X_p \neq f_{*q}X_q = Y_{f(q)} = Y_{f(p)}$. En todo caso, aunque $f(U)$ sea abierto y f sea inyectiva, puede suceder que el campo de vectores Y no sea diferenciable.

Lo que se va a hacer es considerar campos de vectores en N que sean “imagen” de un campo diferenciable en M y a ambos se llamarán f -relacionados.

Definición 5.2.1. Sean M y N dos variedades diferenciables, $f \in \mathcal{F}(M, N)$ y $X \in \mathcal{X}(M)$ e $Y \in \mathcal{X}(N)$ dos campos. Se dice que X e Y están f -relacionados si $f_{*p}X_p = Y_{f(p)}$, para cualquier $p \in M$ y se escribe $X \overset{f}{\sim} Y$.

Proposición 5.2.1. Dados $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M)$, $Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(N)$, $f \in \mathcal{F}(M, N)$ y $g \in \mathcal{F}(N)$, se verifican las siguientes propiedades:

1. Si $X_1 \stackrel{f}{\sim} Y_1$ y $X_2 \stackrel{f}{\sim} Y_2$, entonces, para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $\lambda X_1 + \mu X_2 \stackrel{f}{\sim} \lambda Y_1 + \mu Y_2$.
2. Si $X_1 \stackrel{f}{\sim} Y_1$ y $X_2 \stackrel{f}{\sim} Y_2$, entonces $[X_1, X_2] \stackrel{f}{\sim} [Y_1, Y_2]$.
3. Si $X_1 \stackrel{f}{\sim} Y_1$, entonces $(g \circ f)X_1 \stackrel{f}{\sim} gY_1$.

Corolario 5.2.1. Dada $f \in \mathcal{F}(M, N)$, el conjunto de los campos diferenciables en N que están f -relacionados con algún campo diferenciable de M es un subálgebra de Lie de $\mathcal{X}(N)$.

En el caso de que $f \in \mathcal{F}(M, N)$ sea un difeomorfismo, se puede definir una aplicación $f_* : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(N)$, mediante $(f_*X)_q = f_{*f^{-1}(q)}X_{f^{-1}(q)}$, para todo $q \in N$. Puede comprobarse que f_* está bien definida, es decir, que f_*X es un campo diferenciable en N si X es un campo diferenciable en M . De hecho, $(f_*X)g = X(g \circ f) \circ f^{-1}$, para toda $g \in \mathcal{F}(N)$. Además, f_*X es el único campo de N que está f -relacionado con el campo X de M .

Proposición 5.2.2. Si $f \in \mathcal{F}(M, N)$ es un difeomorfismo, entonces f_* es un isomorfismo de álgebras de Lie.

Nota 5.2.1. Cabe preguntarse si todo automorfismo de $\mathcal{X}(M)$ proviene, mediante el proceso anterior, de una transformación (difeomorfismo) de M . Este es un problema abierto.

5.3 Ejercicios.

1. Dados una variedad diferenciable M , un punto $p \in M$ y un vector tangente $u \in T_p(M)$, probar que existe un campo $X \in \mathcal{X}(M)$ tal que $X_p = u$.
2. Si $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ es un s.l.c., probar que $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0$, para todos $i, j = 1, \dots, m$.
3. Dados $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ un s.l.c. y $X, Y \in \mathcal{X}(U)$ tales que

$$X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^m Y^j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

calcular $[X, Y]$ en función de la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}$.

Lección 6

Campos de Tensores Covariantes Diferenciab sobre una Variedad Diferenciable

6.1 Campos de Tensores Covariantes Diferenciab les.

Definición 6.1.1. Dada una variedad diferenciable M y un abierto $U \subseteq M$, un **Campo de Tensores r -Covariantes Diferenciable** sobre U es una aplicación r -lineal del $\mathcal{F}(U)$ -módulo $\mathcal{X}(U)$ en $\mathcal{F}(U)$, es decir, una aplicación

$$T : \mathcal{X}(U) \times \overset{r)}{\cdots} \times \mathcal{X}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$

r -lineal (con escalares las funciones diferenciables sobre U). Al conjunto de los campos de tensores r -covariantes diferenciables sobre U se denota por $T_r(U)$. Se conviene que $T_0(U) = \mathcal{F}(U)$.

Proposición 6.1.1. Sean $T \in T_r(U)$ y $X_1, \dots, X_r \in \mathcal{X}(U)$. Se verifican:

1. Si $V \subseteq U$ es un abierto e $i \in \{1, \dots, r\}$ es tal que $X_i|_V = 0$, entonces $T(X_1, \dots, X_r) = 0$ en V .
2. Si $p \in U$ e $i \in \{1, \dots, r\}$ es tal que $X_i(p) = 0$, entonces $T(X_1, \dots, X_r)(p) = 0$.
3. Si $Y_1, \dots, Y_r \in \mathcal{X}(U)$ verifican que $Y_i(p) = X_i(p)$, para cierto $p \in U$ y para cualquier $i \in \{1, \dots, r\}$, entonces $T(X_1, \dots, X_r)(p) = T(Y_1, \dots, Y_r)(p)$.

Nota 6.1.1. El nombre de campo de tensores r -covariantes proviene del hecho de que un tal objeto puede también interpretarse como una aplicación T que a cada punto $p \in U$ le hace corresponder un tensor r veces covariante¹ sobre $T_p(M)$, es decir, una aplicación

$$T_p : T_p(M) \times \cdots \times T_p(M) \xrightarrow{r} \mathbf{R}$$

r veces lineal (con escalares los números reales), definida por

$$T_p(u_1, \dots, u_r) = T(X_1, \dots, X_r)(p), \quad u_1, \dots, u_r \in T_p(M),$$

donde X_1, \dots, X_r son campos de vectores diferenciables sobre U tales que $X_i(p) = u_i$, $i = 1, \dots, r$ (por la proposición anterior, se sabe que el valor de $T(X_1, \dots, X_r)(p)$ no depende de la elección de los campos X_1, \dots, X_r en las condiciones requeridas). En este sentido, puede hablarse de restricciones de campos de tensores covariantes diferenciables a abiertos. En efecto, sea $T \in T_r(U)$ y $V \subseteq U$ un abierto. Se define $T|_V$ por

$$T|_V(X_1, \dots, X_r)(p) = T_p(X_1(p), \dots, X_r(p)) = T(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_r)(p),$$

para cualquier $p \in V$ y $X_1, \dots, X_r \in \mathcal{X}(V)$, siendo $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_r$ campos de vectores diferenciables en U , tales que $\bar{X}_i = X_i$ en un cierto entorno de p contenido en V , $i = 1, \dots, r$. Por otra parte, es inmediato observar que, dados $T, S \in T_r(U)$, $T = S$ si y sólo si $T_p = S_p$ para todo $p \in U$.

Proposición 6.1.2. Sea M una variedad diferenciable y $U \subseteq M$ un abierto. Se verifican:

1. Si $T \in T_r(U)$ y $V \subseteq U$ es un abierto, entonces $T|_V \in T_r(V)$.
2. Si

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i,$$

con U_i abierto para todo $i \in I$ y T es una aplicación r -lineal de $\mathcal{X}(U) \times \cdots \times \mathcal{X}(U)$ en el conjunto de las funciones de U en \mathbf{R} , tal que $T|_{U_i} \in T_r(U_i)$, para cualquier $i \in I$, entonces $T \in T_r(U)$.

Ejemplo 6.1.1. Sea $f \in \mathcal{F}(U)$. Se define $df : \mathcal{X}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ por $(df)X = Xf$. Es fácil comprobar que $df \in T_1(U)$ y se lee *diferencial de f* . El nombre y la notación se justifican en el hecho de que, según la nota anterior, si $p \in U$, se tiene que $(df)_p$ coincide con la diferencial de la función f en p , pues, dado $u \in T_p(M)$, $(df)_p u = ((df)X)(p) = (Xf)(p) = X_p f = u(f)$, para cualquier campo $X \in \mathcal{X}(U)$ tal que $X_p = u$, efectivamente.

En $T_r(U)$ se pueden definir las siguientes operaciones de modo natural: suma, producto por números reales y producto por funciones diferenciables.

¹Para obtener más información sobre tensores puede consultarse el Apéndice B del temario.

Se prueba sin dificultad que, dados $T, S \in T_r(U)$, $\lambda \in \mathbf{R}$ y $f \in \mathcal{F}(U)$, se tiene que $T + S, \lambda T, fT \in T_r(U)$. Además, dados $T \in T_r(U)$ y $S \in T_s(U)$, se define la operación *Producto Tensorial* de T y S , denotada por $T \otimes S$, mediante:

$$T \otimes S : \mathcal{X}(U) \times \overset{r+s}{\cdots} \times \mathcal{X}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U) :$$

$$(X_1, \dots, X_{r+s}) \mapsto (T \otimes S)(X_1, \dots, X_{r+s}) = T(X_1, \dots, X_r)S(X_{r+1}, \dots, X_{r+s}).$$

Se tiene que $T \otimes S \in T_{r+s}(U)$.

En estas condiciones, se verifica que, si $r > 0$, $T_r(U)$ con la suma y el producto por números reales es un espacio vectorial real, con la suma y el producto por funciones diferenciables es un $\mathcal{F}(U)$ -módulo y que

$$T(U) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} T_r(U)$$

es un álgebra asociativa, no conmutativa y con elemento unidad, llamada *Álgebra Tensorial* de U .

Proposición 6.1.3. *Sea $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ un s.l.c. en M . Entonces, la familia*

$$\{dx_{i_1} \otimes \cdots \otimes dx_{i_r} / i_1, \dots, i_r = 1, \dots, m\}$$

es una base de $T_r(U)$ como $\mathcal{F}(U)$ -módulo. Además, si $T \in T_r(U)$, en función de esa base se tiene que:

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^m T \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \right) dx_{i_1} \otimes \cdots \otimes dx_{i_r}.$$

Definición 6.1.2. *Dada una variedad diferenciable M y un abierto $U \subseteq M$, un **Campo de Tensores r -Covariantes y 1-Contravariantes Diferenciable** sobre U es una aplicación r -lineal del $\mathcal{F}(U)$ -módulo $\mathcal{X}(U)$ en $\mathcal{X}(U)$, es decir, una aplicación*

$$T : \mathcal{X}(U) \times \overset{r}{\cdots} \times \mathcal{X}(U) \longrightarrow \mathcal{X}(U)$$

r -lineal (con escalares las funciones diferenciables sobre U). Al conjunto de los campos de tensores r -covariantes y 1-contravariantes diferenciables sobre U se denota por $T_r^1(U)$.

6.2 Formas Diferenciales.

Definición 6.2.1. *Dada una variedad diferenciable M y un abierto $U \subseteq M$, una r -**Forma Diferencial** sobre U es un campo de tensores r -covariantes diferenciable y alternado sobre U , es decir, una aplicación*

$$\omega : \mathcal{X}(U) \times \overset{r}{\cdots} \times \mathcal{X}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$

r -lineal (con escalares las funciones diferenciables sobre U) alternada, esto es, verificando que

$$\omega(X_1, \dots, X_r) = \varepsilon(\sigma)\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}),$$

para cualquier $\sigma \in S_r$ y $X_1, \dots, X_r \in \mathcal{X}(U)$. Al conjunto de las r -formas diferenciales sobre U se denota por $\Lambda_r(U)$. Se conviene que $\Lambda_0(U) = \mathcal{F}(U)$.

Nota 6.2.1. Es fácil comprobar que $\Lambda_r(U)$ es un subespacio vectorial y un submódulo de $T_r(U)$. Además, $\Lambda_1(U) = T_1(U)$.

Definición 6.2.2. Dado $T \in T_r(U)$, se llama **Alternado** de T a la r -forma diferencial $Alt(T)$ definida mediante

$$Alt(T)(X_1, \dots, X_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon(\sigma) T(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}),$$

para cualesquiera $X_1, \dots, X_r \in \mathcal{X}(U)$.

Ejercicio 6.2.1. Probar que, efectivamente, $Alt(T) \in \Lambda_r(U)$, para cualquier $T \in T_r(U)$. Probar, además, que la aplicación $Alt : T_r(U) \rightarrow \Lambda_r(U)$ es lineal (con escalares las funciones diferenciables sobre U) y que restringido a $\Lambda_r(U)$ es la identidad.

Dadas $\omega \in \Lambda_r(U)$ y $\theta \in \Lambda_s(U)$, se define la operación *Producto Exterior* de ω y θ , denotada por $\omega \wedge \theta$, mediante

$$\omega \wedge \theta = \frac{(r+s)!}{r!s!} Alt(\omega \otimes \theta),$$

es decir, si $X_1, \dots, X_{r+s} \in \mathcal{X}(U)$:

$$\begin{aligned} & (\omega \wedge \theta)(X_1, \dots, X_{r+s}) = \\ &= \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \varepsilon(\sigma) \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}) \theta(X_{\sigma(r+1)}, \dots, X_{\sigma(r+s)}). \end{aligned}$$

Claramente, $\omega \wedge \theta \in \Lambda_{r+s}(U)$. Además, razonando por inducción, se tiene que si $\omega_i \in \Lambda_{r_i}(U)$, $i = 1, \dots, k$, entonces:

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = \frac{(r_1 + \dots + r_k)!}{r_1! \dots r_k!} Alt(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_k).$$

Proposición 6.2.1. Sean $\omega \in \Lambda_r(U)$ y $\theta \in \Lambda_s(U)$. Entonces $\omega \wedge \theta = (-1)^{rs} \theta \wedge \omega$. En consecuencia, si r es impar, $\omega \wedge \omega = 0$.

Proposición 6.2.2. Sean $\omega_1, \dots, \omega_r \in \Lambda_1(U)$. Entonces:

1. Para cualquier $\sigma \in S_r$, $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r = \varepsilon(\sigma) \omega_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{\sigma(r)}$.

2. Dados cualesquiera $X_1, \dots, X_r \in \mathcal{X}(U)$:

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r)(X_1, \dots, X_r) = \det(\omega_i(X_j)).$$

Proposición 6.2.3. Sea $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ un s.l.c. en M . Entonces, la familia

$$\{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} / 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m\}$$

es una base de $\Lambda_r(U)$ como $\mathcal{F}(U)$ -módulo. Además, si $\omega \in \Lambda_r(U)$, en función de esa base se tiene que:

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m} \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}.$$

Corolario 6.2.1. Si $r > m$, entonces $\Lambda_r(U) = \{0\}$.

Proposición 6.2.4. Se verifica que

$$\Lambda(U) = \bigoplus_{r=0}^m \Lambda_r(U)$$

con el producto exterior es un álgebra asociativa, no conmutativa y con elemento unidad.

6.3 Acción de Aplicaciones sobre los Campos de Tensores.

Definición 6.3.1. Sean M y N dos variedades diferenciables y $f \in \mathcal{F}(M, N)$. Dado $T \in T_r(N)$, se define $f^*T \in T_r(M)$ por $f^*T = T \circ f$, si $r = 0$ y $f^*T(X_1, \dots, X_r)(p) = T(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_r)(f(p))$, si $r > 0$, donde p es un punto de M , $X_1, \dots, X_r \in \mathcal{X}(M)$ y $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_r \in \mathcal{X}(N)$ son tales que $f_{*p}X_i(p) = \overline{X}_i(f(p))$, para todo $i = 1, \dots, r$. De manera equivalente, se puede definir

$$(f^*T)_p(u_1, \dots, u_r) = T_{f(p)}(f_{*p}u_1, \dots, f_{*p}u_r),$$

para todo $p \in M$ y todos $u_1, \dots, u_r \in T_p(M)$.

Esta definición permite, al ser extendida por linealidad, obtener una aplicación $f^* : T(N) \longrightarrow T(M)$, asociada a f .

Proposición 6.3.1. Dada $f \in \mathcal{F}(M, N)$, se verifican las siguientes propiedades:

1. $f^* : T_r(N) \longrightarrow T_r(M)$ es \mathbf{R} -lineal, para todo $r \geq 0$.
2. $f^*(gT) = (g \circ f)f^*T$, para cualquier $T \in T(N)$ y cualquier $g \in \mathcal{F}(N)$.
3. $f^*(T \otimes S) = f^*T \otimes f^*S$, para cualesquiera $T, S \in T(N)$.
4. $f^*(\text{Alt}(T)) = \text{Alt}(f^*T)$, para cualquier $T \in T(N)$.
5. $f^*(\omega \wedge \theta) = f^*\omega \wedge f^*\theta$, para cualesquiera $\omega, \theta \in \Lambda(N)$.
6. $f^*(dg) = d(f^*g)$, para cualquier $g \in \mathcal{F}(N)$.

6.4 Ejercicios.

1. Probar que la diferencial de cualquier función constante es nula.
2. Sea $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ un s.l.c. y $f \in \mathcal{F}(U)$. Probar que:

$$df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

3. Dadas $\omega \in \Lambda_r(U)$ y $\theta \in \Lambda_s(U)$, probar que $(\omega \wedge \theta)_p = \omega_p \wedge \theta_p$ (para la definición del segundo producto exterior, consúltase el Apéndice C).
4. Si M y N son dos variedades diferenciables, $f \in \mathcal{F}(M, N)$, $X_1, \dots, X_r \in \mathcal{X}(M)$, $Y_1, \dots, Y_r \in \mathcal{X}(N)$, tales que $X_i \stackrel{f}{\sim} Y_i$ para todo $i = 1, \dots, r$ y $T \in T_r(N)$, probar que $(f^*T)(X_1, \dots, X_r) = T(Y_1, \dots, Y_r) \circ f$.
5. Si M y N son dos variedades diferenciables, $f \in \mathcal{F}(M, N)$ y $T \in T_r(N)$, hallar la expresión local de f^*T .
6. Sean $f \in \mathcal{F}(M, N)$ y $g \in \mathcal{F}(N, P)$ dos aplicaciones diferenciables. Probar que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Apéndice A.

Teoremas de Extensión

A.1 Lema de Extensión de Funciones Diferenciables.

Lema 1. *Sea M una variedad diferenciable y sea $p \in U \subseteq M$, con U entorno abierto de p . Entonces, existen un entorno abierto de p , V y una función diferenciable $f \in \mathcal{F}(M)$, tales que:*

1. $\bar{V} \subseteq U$;
2. $0 \leq f \leq 1$; $f \equiv 1$ en \bar{V} ; $f \equiv 0$ en $M - U$.

DEMOSTRACIÓN: Obsérvese que basta probarlo en el caso de que U esté contenido en el dominio de una carta entorno de p . En efecto, si $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ es una tal carta, dado cualquier abierto U en las hipótesis, se prueba el Lema para $U \cap U_\alpha$ y se tendría $\bar{V} \subseteq U \cap U_\alpha \subseteq U$, $f \equiv 1$ en \bar{V} y $f \equiv 0$ en $M - (U \cap U_\alpha) \supseteq M - U$.

Ahora, se puede suponer que la mencionada carta está centrada en p . Denótese por (W, φ) , $\varphi(p) = 0$. Sean (x_1, \dots, x_m) sus funciones coordenadas y sea $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, tal que el cubo

$$Q = \{(u_1, \dots, u_m) \in \mathbf{R}^m / |u_i| \leq a\}$$

esté contenido en $\varphi(U)$. Sea $b \in \mathbf{R}$ con $a > b > 0$. Considérense los abiertos de U :

$$U_p = \{q \in U / |x_i(q)| < a, 1 \leq i \leq m\},$$

$$V_p = \{q \in U / |x_i(q)| < b, 1 \leq i \leq m\}.$$

Entonces, U_p y V_p son entornos abiertos de p , verificando $\bar{V}_p \subseteq U_p$ y $\bar{U}_p \subseteq U$. Sea $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una función \mathcal{C}^∞ con las propiedades: $g(t) = 1$ para $|t| \leq b$, $0 < g(t) < 1$ para $b < |t| < a$ y $g(t) = 0$ para $|t| \geq a$. Tal función se puede definir de la siguiente forma:

En primer lugar, sea $k : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$k(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

que es \mathcal{C}^∞ . Sea ahora

$$h(t) = \frac{k(t)}{k(t) + k(1-t)},$$

que también es \mathcal{C}^∞ y que verifica:

$$\begin{cases} h(t) = 0 & \text{si } t \leq 0, \\ 0 < h(t) < 1 & \text{si } 0 < t < 1, \\ h(t) = 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Finalmente, sea

$$g(t) = h\left(\frac{t+a}{a-b}\right)h\left(\frac{-t+a}{a-b}\right),$$

que es \mathcal{C}^∞ y cumple las condiciones requeridas (dibujar las gráficas de $k(t)$, $h(t)$ y $g(t)$). A partir de ella, se define $f_p : M \rightarrow \mathbf{R}$ por:

$$f_p(q) = \begin{cases} g(x_1(q)) \dots g(x_m(q)) & \text{si } q \in U, \\ 0 & \text{si } q \notin \overline{U}_p. \end{cases}$$

La función f_p es diferenciable (¡ejercicio!), pues lo es en U , en $M - \overline{U}_p$ (que son abiertos) y en la intersección es nula, ya que si $q \in U \cap (M - \overline{U}_p)$, entonces $q \notin \overline{U}_p$, es decir, existe i tal que $|x_i(q)| \geq a$. Por tanto, $g(x_i(q)) = 0$ y $f_p(q) = 0$.

En estas condiciones, como $\overline{U}_p \subseteq U$, tomando $V = V_p$, f_p es la buscada. En efecto, $f_p \equiv 1$ en \overline{V}_p . Además, $0 \leq f_p \leq 1$ en M , pues, junto con lo anterior se tiene que $0 < f_p < 1$ en $U_p - \overline{V}_p$ y $f_p \equiv 0$ en $M - U_p$. Finalmente, $f_p \equiv 0$ en $M - U$, ya que $f_p \equiv 0$ en $M - \overline{U}_p \supseteq M - U$. \square

Teorema 1. (Lema de Extensión de Funciones Diferenciables). *Sea $h \in \mathcal{F}(U)$, donde U es un abierto conteniendo a $p \in M$. Entonces, existen un entorno abierto V de p , con $\overline{V} \subseteq U$ y una función $g \in \mathcal{F}(M)$ tales que $g \equiv h$ en V y $g \equiv 0$ en $M - U$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea W un entorno abierto de p tal que $\overline{W} \subseteq U$. Aplicando el Lema 1 a W , se encuentran otro entorno V de p y una función diferenciable f de M cumpliendo las tesis de dicho Lema 1.

Ahora, sea $g : M \rightarrow \mathbf{R}$ definida por:

$$g(q) = \begin{cases} f(q)h(q) & \text{si } q \in U, \\ 0 & \text{si } q \in M - \overline{W}. \end{cases}$$

Para ver que $g \in \mathcal{F}(M)$ (¡ejercicio!) basta ver que está bien definida en $U \cap (M - \overline{W})$. Pero si $q \in U - \overline{W}$, entonces $q \notin \overline{W}$, esto es, $q \notin W$ y, por tanto, $f(q) = 0$ y $g(q) = 0$.

Finalmente, si $q \in V$, entonces $q \in \overline{V}$, luego $f(q) = 1$ y $g(q) = h(q)$. \square

A.2 Lema de Extensión de Campos Diferenciables.

Lema 2. *Sea K un compacto contenido en un abierto G de una variedad diferenciable M . Entonces, existe $f \in \mathcal{F}(M)$ tal que $0 \leq f \leq 1$, $f(K) \equiv 1$ y $f(M - G) \equiv 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $p \in K$. Aplicando el Lema 1 de la sección A.1, puesto que $p \in G$ que es abierto, existen V_p , entorno abierto de p y $f_p \in \mathcal{F}(M)$ tales que $\overline{V_p} \subseteq U$, $0 \leq f_p \leq 1$, $f_p \equiv 1$ en $\overline{V_p}$ y $f_p \equiv 0$ en $M - G$. Por tanto, la familia $\{V_p/p \in K\}$ es un recubrimiento por abiertos de K , que es compacto, luego puede extraerse un subrecubrimiento finito $\{V_{p_1}, \dots, V_{p_r}\}$.

Sean $f_{p_1}, \dots, f_{p_r} \in \mathcal{F}(M)$ las correspondientes funciones. Entonces, considerando $f = 1 - (1 - f_{p_1}) \cdots (1 - f_{p_r})$, se puede comprobar que f es la función buscada. \square

Teorema 2. (Lema de Extensión de Campos Diferenciables). *Sea $X \in \mathcal{X}(U)$ y $V \supseteq U$ otro abierto. Entonces, dado cualquier $p \in U$, existen $\overline{X} \in \mathcal{X}(V)$ y W abierto con $p \in W \subseteq U$ tales que $\overline{X}_q = X_q$, para todo $q \in W$ y $\overline{X} = 0$ en $V - U$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $p \in U$. Entonces, al ser M localmente compacta, existen abiertos W y G de clausura compacta tales que $p \in W \subseteq \overline{W} \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq U \subseteq V$ y existe una función, en virtud del lema anterior, $f \in \mathcal{F}(V)$ que vale 1 en \overline{W} y vale 0 en $V - G$. Sea ahora $q \in V$. Se define el campo de vectores \overline{X} por:

$$\overline{X}_q = \begin{cases} f(q)X_q & q \in U; \\ 0 & q \in V - \overline{G}. \end{cases}$$

\overline{X} está bien definido, pues si $q \in U \cap (V - \overline{G})$, entonces $q \notin G$ y $f(q) = 0$. Además, $\overline{X} \in \mathcal{X}(V)$, pues vale fX en U (con $fX \in \mathcal{X}(U)$) y 0 (diferenciable) en $V - \overline{G}$, siendo $V = U \cup (V - \overline{G})$. Finalmente, si $q \in W$, se tiene que $f(q) = 1$, es decir, $\overline{X}_q = X_q$ y, como $V - U \subseteq V - \overline{G}$, entonces $\overline{X} = 0$ en $V - U$. \square

A.3 Lema de Extensión de Campos Diferenciables de Tensores Covariantes.

Teorema 3. (Lema de Extensión de Campos Diferenciables de Tensores Covariantes). *Dados dos abiertos $V \subseteq U \subseteq M$ en una variedad diferenciable, si $T \in T_r(V)$, entonces, para cualquier $p \in V$ existe un entorno abierto de p , $W_p \subseteq V$ y existe $S \in T_r(U)$ tales que $S|_{W_p} = T|_{W_p}$. El mismo resultado se tiene en $\Lambda_r(V)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $(U', \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ un s.l.c de U , con $p \in U' \subseteq V$ y $T' = T|_{U'} \in T_r(U')$. Entonces:

$$T' = \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^m f_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \otimes \cdots \otimes dx_{i_r}.$$

Considerando funciones $g_{i_1 \dots i_r}, h_1, \dots, h_m \in \mathcal{F}(U)$ que coincidan con las funciones $f_{i_1 \dots i_r}, x_1, \dots, x_m$ en un cierto entorno abierto de p , $W_p \subseteq U' \subseteq V$ (que existen por el Lema de Extensión de Funciones Diferenciables) y definiendo S como

$$S = \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^m g_{i_1 \dots i_r} dh_{i_1} \otimes \dots \otimes dh_{i_r},$$

se tiene que:

$$S|_{W_p} = T'|_{W_p} = T|_{U'}|_{W_p} = T|_{W_p}.$$

Para probar el resultado en $\Lambda_r(U)$ basta cambiar los productos tensoriales por productos exteriores. \square

Apéndice B.

Teorema de la Función Implícita.

B.1 Teorema de la Función Implícita.

Teorema 4. Sea $f \in \mathcal{F}(M, N)$, $q \in N$ y $P = f^{-1}(\{q\}) \neq \emptyset$. Si f_{*p} es sobre, para todo $p \in P$, entonces P tiene estructura única de variedad diferenciable de dimensión $m - n$, tal que (P, i) es subvariedad regular de M , con $i : P \hookrightarrow M$ la inclusión.

DEMOSTRACIÓN: Sea $(V; y_1, \dots, y_n)$ una carta de N entorno de q . Si $p \in P$, entonces $p \in M$ y $f(p) = q$. Como f_{*p} es sobre, por el Corolario 2.1.5 del Teorema de la Función Inversa, existe

$$(U, \varphi = (y_1 \circ f, \dots, y_n \circ f, x_{n+1}, \dots, x_m))$$

carta local en M y se puede tomar $f(U) \subseteq V$.

Considérese en P la topología relativa de M ,

$$T_P = \{G \cap P / G \in T_M\}$$

y sea el abierto de P , $U \cap P$. Se define:

$$\bar{\varphi} : U \cap P \longrightarrow \mathbf{R}^{m-n} : z \mapsto \bar{\varphi}(z) = (x_{n+1}(z), \dots, x_m(z)).$$

Se tiene que $\bar{\varphi} = \pi \circ \varphi|_{U \cap P}$, donde $\pi : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^{m-n}$ es la proyección dada por $\pi(u_1, \dots, u_m) = (u_{n+1}, \dots, u_m)$. En estas condiciones, es fácil probar que:

$$\bar{\varphi}(U \cap P) = \pi(\varphi(U) \cap \{y_1(q), \dots, y_n(q)\} \times \mathbf{R}^{m-n}).$$

Como

$$\pi|_{\{y_1(q), \dots, y_n(q)\} \times \mathbf{R}^{m-n}} : \{y_1(q), \dots, y_n(q)\} \times \mathbf{R}^{m-n} \longrightarrow \mathbf{R}^{m-n}$$

es un homeomorfismo, se deduce que $\bar{\varphi}(U \cap P)$ es un abierto de \mathbf{R}^{m-n} . Además, se prueba sin dificultad que

$$\bar{\varphi} : U \cap P \longrightarrow \bar{\varphi}(U \cap P)$$

es biyectiva, continua (pues $\bar{\varphi} = \pi \circ \varphi$) y de inversa continua (puesto que $\bar{\varphi}^{-1} = \varphi^{-1} \circ j|_{\bar{\varphi}(U \cap P)}$, donde:

$$j : \mathbf{R}^{m-n} \longrightarrow \mathbf{R}^m : (u_{n+1}, \dots, u_m) \mapsto (y_1(q), \dots, y_n(q), u_{n+1}, \dots, u_m).$$

Por tanto, $(U \cap P, \bar{\varphi})$ es una carta local en P entorno de p de dimensión $m - n$. Haciendo variar p en P , se tiene la familia de cartas $\{(U_p \cap P, \bar{\varphi}_p)\}_{p \in P}$, cuyos dominios recubren a P . Con esta familia, P tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión $m - n$. Para ello, basta probar que, dos a dos, estas cartas están relacionadas, pero eso es fácil, ya que si $P \cap U_p \cap U_{p'} \neq \emptyset$, entonces

$$\bar{\varphi}_{p'} \circ \bar{\varphi}_p^{-1} = \pi \circ \varphi_{p'} \circ \varphi_p \circ j|_{\bar{\varphi}_p(U_p \cap U_{p'} \cap P)}$$

es diferenciable, por ser composición de diferenciables.

Ahora, se prueba que la inclusión $i : P \hookrightarrow M$ es diferenciable. Además, su diferencial, i_{*p} , es inyectiva, pues si $\bar{\varphi} = (z_{n+1}, \dots, z_m)$, entonces $z_k = x_k \circ i$ ($k = n + 1, \dots, m$) y

$$i_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right)_p = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial(x_j \circ i)}{\partial z_k}\right)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p,$$

con lo que i_{*p} transforma bases en vectores linealmente independientes. Por tanto, (P, i) es una subvariedad regular de M de dimensión $m - n$.

Finalmente, se tiene la unicidad de la estructura, según el teorema que dice que si un subconjunto de una variedad diferenciable tiene estructura de variedad con la topología relativa tal que con la inclusión es una subvariedad, entonces la estructura es única. \square

La demostración del Teorema del Rango es similar. Puede consultarse en: J. M. Lee. *Manifolds and Differential Geometry*. Graduate Studies in Mathematics Vol. 107. American Mathematical Society, 2009.

Apéndice C.

Álgebras Tensorial y Exterior de un Espacio Vectorial

C.1 Álgebra Tensorial de un Espacio Vectorial.

En este apéndice V denotará un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo de los números reales.

Definición 1. Dado $r \in \mathbf{N}$, sea $T_r^0(V) = \{f : V^r \rightarrow \mathbf{R} / f \text{ es } r\text{-lineal}\}$. Los elementos de $T_r^0(V)$ se llaman **Tensores Covariantes de Tipo $(0, r)$** .

Obsérvese que $T_1^0(V) = V^*$. Además, se tiene que la familia $\{T_r^0(V) / r \in \mathbf{N}\}$ es numerable y está formada por espacios vectoriales reales, pues la suma y el producto por un escalar de aplicaciones r -lineales es una aplicación r -lineal. Así, se puede considerar su suma directa,

$$\sum_{r=0}^{\infty} T_r^0(V),$$

que se denomina **Álgebra de los Tensores Covariantes** de V . A continuación, se va a justificar que, efectivamente, es un álgebra. En efecto, en dicha suma infinita (recuérdese que sus elementos tienen solo un número finito de sumandos no nulos) está definida de modo natural una suma y un producto por números reales, que la convierten en un espacio vectorial real.

Definición 2. Sean $\omega_r \in T_r^0(V)$, $\omega_s \in T_s^0(V)$. Se llama **Producto Tensorial** de ω_r y ω_s , que se denota por $\omega_r \otimes \omega_s$ a un elemento de $T_{r+s}^0(V)$, que será tal que si

$$(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+s}) \in V^{r+s},$$

entonces:

$$(\omega_r \otimes \omega_s)(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+s}) = \omega_r(v_1, \dots, v_r) \omega_s(v_{r+1}, \dots, v_{r+s}).$$

En particular, $T_0^0(V) = \mathbf{R}$ y si $\alpha \in T_0^0(V)$, se tiene que $\alpha \otimes \omega_r = \alpha \cdot \omega_r$. Con esto, es posible definir el producto \otimes , llamado producto tensorial, en los elementos de $\sum T_r^0(V)$, como:

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} \omega_r\right) \otimes \left(\sum_{s=0}^{\infty} \omega_s\right) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \omega_r \otimes \omega_s.$$

Proposición 1. *Se verifica que*

$$\sum_{r=0}^{\infty} T_r^0(V)$$

con las operaciones $(+, \cdot, \otimes)$ es un álgebra real, asociativa, no conmutativa y con elemento unidad.

DEMOSTRACIÓN: Es una comprobación engorrosa, pero fácil. \square

El siguiente paso consiste en buscar una base para $T_r^0(V)$. Para ello, sean $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V y $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ su base dual (base de V^* con $\theta^i(e_j) = \delta_{ij}$, $\forall i, j = 1, \dots, n$). Sean ahora $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$. Entonces, el producto tensorial $\theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_r}$ es un elemento de $T_r^0(V)$, precisamente es el que cumple:

$$(\theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_r})(v_1, \dots, v_r) = \theta^{i_1}(v_1) \dots \theta^{i_r}(v_r).$$

En estas condiciones, se puede probar el siguiente resultado:

Proposición 2. *La familia*

$$\{\theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_r} / i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}\}$$

es una base de $T_r^0(V)$ y, por tanto, $\dim T_r^0(V) = n^r$.

DEMOSTRACIÓN: ¡Ejercicio! \square

Obsérvese, entonces, que $\sum_{r=0}^{\infty} T_r^0(V)$ es de dimensión infinita.

Definición 3. Sea $r \in \mathbf{N}$. Entonces, a los elementos de $T_0^r(V) = T_r^0(V^*)$ se le llaman **Tensoros Contravariantes de Tipo $(r, 0)$** y al espacio

$$\sum_{r=1}^{\infty} T_0^r(V)$$

se denomina **Algebra de los Tensoros Contravariantes de V** .

En virtud de esta definición, un número real es un tensor covariante y no contravariante. Así,

$$\sum_{r=1}^{\infty} T_0^r(V)$$

es un álgebra asociativa, no conmutativa y sin elemento unidad. Además, $T_0^1(V) = T_1^0(V^*) = V$. Por tanto, se puede considerar el producto tensorial de dos vectores de V .

Se obtiene una igualdad curiosa al considerar $v_1, \dots, v_r \in V$ y $\omega^1, \dots, \omega^r \in V^*$. Entonces, $v_1 \otimes \dots \otimes v_r \in T_0^r(V)$ y $\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r \in T_r^0(V)$ y:

$$\begin{aligned} (v_1 \otimes \dots \otimes v_r)(\omega^1, \dots, \omega^r) &= v_1(\omega^1) \dots v_r(\omega^r) = \\ &= \omega^1(v_1) \dots \omega^r(v_r) = (\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r)(v_1, \dots, v_r). \end{aligned}$$

Igual que se hizo antes, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de V , se tiene que

$$\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} / i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}\}$$

es una base de $T_0^r(V)$ y si $T \in T_0^r(V)$, su expresión en esa base es:

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n T(\theta^{i_1}, \dots, \theta^{i_r}) e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}.$$

Se va a completar este estudio con la introducción de una nueva clase más general de tensores:

Definición 4. Sean $r, s \in \mathbf{N}$. Entonces, los elementos de

$$T_s^r(V) = \{f : V^s \times V^{*r} \longrightarrow \mathbf{R} / f \text{ es } (s+r)\text{-lineal}\}$$

se llaman **Tensores Mixtos de Tipo** (r, s) . Además, al conjunto

$$T(V) = \sum_{r,s \in \mathbf{N}} T_s^r(V)$$

se le denomina **Álgebra Tensorial de V** .

Se define el producto tensorial en $T(V)$ como sigue. Si $T \in T_s^r(V)$ y $S \in T_{s'}^{r'}$, entonces $T \otimes S \in T_{s+s'}^{r+r'}(V)$ viene dado por

$$\begin{aligned} (T \otimes S)(v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_{s+s'}, \omega^1, \dots, \omega^r, \omega^{r+1}, \dots, \omega^{r+r'}) &= \\ = T(v_1, \dots, v_s, \omega^1, \dots, \omega^r) S(v_{s+1}, \dots, v_{s+s'}, \omega^{r+1}, \dots, \omega^{r+r'}) \end{aligned}$$

y se extiende a $T(V)$ por linealidad:

$$\left(\sum_{r,s} T_{(r,s)} \right) \otimes \left(\sum_{r',s'} S_{(r',s')} \right) = \sum_{r,s,r',s'} T_{(r,s)} \otimes S_{(r',s')}.$$

Proposición 3. $T(V)$ es un álgebra asociativa, no conmutativa y con elemento unidad.

DEMOSTRACIÓN: Es una comprobación engorrosa pero fácil. \square

Una base de $T_s^r(V)$ viene dada por el conjunto de los tensores

$$\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \theta^{j_1} \otimes \cdots \otimes \theta^{j_s} / i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, n\}\}$$

y, por tanto, $\dim T_s^r(V) = n^{r+s}$. La expresión de $T \in T_s^r(V)$ en esta base es:

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s=1}^n T(e_{j_1}, \dots, e_{j_s}, \theta^{i_1}, \dots, \theta^{i_r}) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \theta^{j_1} \otimes \cdots \otimes \theta^{j_s}.$$

A continuación, se va a demostrar que las matrices pueden ser consideradas como una clase de tensores.

Proposición 4. $T_r^1(V)$ es isomorfo al espacio de todas las aplicaciones r -lineales de V^r en V , $\mathcal{L}(V^r, V)$.

DEMOSTRACIÓN: Considérense las aplicaciones

$$\varphi : \mathcal{L}(V^r, V) \longrightarrow T_r^1(V) : f \mapsto \varphi(f) / \varphi(f)(v_1, \dots, v_r, \omega) = \omega(f(v_1, \dots, v_r))$$

y

$$\psi : T_r^1(V) \longrightarrow \mathcal{L}(V^r, V) : T \mapsto \psi(T) / \psi(T)(v_1, \dots, v_r) = T(v_1, \dots, v_r, \bullet)$$

donde $T(v_1, \dots, v_r, \bullet) : V^* \longrightarrow \mathbf{R}$ es lineal, es decir, $\psi(T)(v_1, \dots, v_r) \in V^{**} = V$. Para terminar, debe probarse (¡hacerlo!) que φ y ψ son inversas una de la otra y que φ es un homomorfismo (¿por qué basta con esto?). \square

Corolario 1.

$$T_1^1(V) \simeq \text{End}(V).$$

Así, las matrices cuadradas de orden n pueden ser consideradas como tensores de tipo $(1, 1)$. En este sentido, los tensores son una generalización de las matrices. Por otra parte, en las matrices cuadradas se llama traza a la suma de los elementos de la diagonal principal. Este concepto se generaliza en los tensores como sigue. Sean $r, s \in \mathbf{N}$ y $T \in T_s^r(V)$. Entonces, para $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$, se tiene la siguiente definición:

Definición 5. Se llama **Contracción** (i, j) del tensor T al tensor

$$C_j^i(T) \in T_{s-1}^{r-1}(V),$$

que actúa como:

$$C_j^i(T)(v_1, \dots, v_{s-1}, \omega^1, \dots, \omega^{r-1}) = \sum_{k=1}^n T(v_1, \dots, v_{j-1}, e_k, v_j, \dots, v_{s-1}, \omega^1, \dots, \omega^{i-1}, \theta^k, \omega^i, \dots, \omega^{r-1}).$$

Existen, por tanto, rs contracciones de un tensor del tipo (r, s) . Sea, ahora, $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n . Se puede considerar $A \in T_1^1(V)$. Así, sólo existe una contracción de A , $C_1^1(A) \in T_0^0(V) = \mathbf{R}$,

$$C_1^1(A) = \sum_{k=1}^n A(e_k, \theta^k) = \sum_{k=1}^n \theta^k(Ae_k) = \sum_{k=1}^n \theta^k\left(\sum_{j=1}^n a_{jk}e_j\right) = \sum_{k=1}^n a_{kk},$$

que es, efectivamente, la traza de A .

Por último, se va a introducir otro concepto que también es una generalización de algo conocido. Se sabe que dado un homomorfismo entre dos espacios vectoriales, $f : V \rightarrow W$, existe un homomorfismo inducido entre los espacios duales $f^* : W^* \rightarrow V^*$, denominado homomorfismo dual, definido por $f^*(\omega)v = \omega(f(v))$. Como el dual de un espacio vectorial es el espacio vectorial de los tensores de tipo $(0, 1)$, se puede escribir $f^* : T_1^0(W) \rightarrow T_1^0(V)$. Esto se generaliza para cualquier $r \in \mathbf{N}$:

Definición 6. Si $f \in \text{Hom}(V, W)$, entonces $f^* : T_r^0(W) \rightarrow T_r^0(V)$, es el homomorfismo tal que a $T \in T_r^0(W)$ le asigna el tensor $f_r^*(T) \in T_r^0(V)$ definido como:

$$f_r^*(T)(v_1, \dots, v_r) = T(f(v_1), \dots, f(v_r)).$$

La aplicación f_r^* se denomina **Homomorfismo Inducido**. En particular, $f_1^* = f^*$.

C.2 Álgebra Exterior de un Espacio Vectorial.

Sean $r \in \mathbf{N}$ y \mathcal{S}_r el grupo de las permutaciones del conjunto $\{1, 2, \dots, r\}$. Si $\sigma \in \mathcal{S}_r$, $\epsilon(\sigma)$ representará el signo de σ .

Definición 7. Un tensor $f \in T_r^0(V)$, se dirá que es un **Tensor Alternado** si se verifica

$$f(v_1, \dots, v_r) = \epsilon(\sigma)f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}),$$

$\forall (v_1, \dots, v_r) \in V^r$ y $\forall \sigma \in \mathcal{S}_r$.

Los tensores alternados forman un subespacio vectorial de $T_r^0(V)$ que se denotará por $\Lambda_r(V)$. Claramente, $\Lambda_0(V) = \mathbf{R}$. Utilizando la definición anterior, también es obvio que $\Lambda_1(V) = T_1^0(V) = V^*$, es decir, todo tensor covariante de orden uno es necesariamente alternado (¿por qué?).

Definición 8. Al espacio

$$\Lambda(V) = \sum_{r=0}^{\infty} \Lambda_r(V)$$

se le llama **Álgebra Exterior** de V .

Evidentemente, $\Lambda(V)$ es un espacio vectorial. A continuación, se va a definir en él un producto que lo va a convertir en un álgebra. Para ello, será necesario un nuevo concepto que se pasa a definir.

Definición 9. Para $r \in \mathbf{N}$, sea la aplicación $Alt_r : T_r^0(V) \longrightarrow \Lambda_r(V)$, que actúa de la siguiente manera:

$$Alt_r(T)(v_1, \dots, v_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \epsilon(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}).$$

$Alt_r(T)$ se denomina **Alternación del Tensor** T .

En estas condiciones, se tiene la siguiente proposición, cuya demostración queda como ejercicio:

Proposición 5. (i) La aplicación Alt_r es, $\forall r \in \mathbf{N}$, un homomorfismo de espacios vectoriales y restringido a $\Lambda_r(V)$ es la identidad.

(ii) Si $Alt_r(T) = 0$, entonces, $\forall S \in T_s^0(V)$, $Alt_{r+s}(T \otimes S) = 0$.

De la (i), se deduce que

$$\Lambda_r(V) \simeq \frac{T_r^0(V)}{\text{Ker}(Alt_r)},$$

en virtud del Primer Teorema de Isomorfía de espacios vectoriales.

A partir de ahora y salvo en caso de confusión, se eliminará el subíndice de la notación.

Ahora, se va a definir el **Producto Exterior** de tensores covariantes alternados. Igual que en el caso del producto tensorial, se hará en dos etapas. En primer lugar, si $\omega \in \Lambda_r(V)$ y $\theta \in \Lambda_s(V)$, el producto exterior de ω por θ se denota por $\omega \wedge \theta$ y es, por definición, el elemento de $\Lambda_{r+s}(V)$, dado por:

$$\omega \wedge \theta = \frac{(r+s)!}{r!s!} Alt(\omega \otimes \theta).$$

Utilizando la definición de alternación, se tiene que:

$$(\omega \wedge \theta)(v_1, \dots, v_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{r+s}} \epsilon(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) \theta(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}).$$

A continuación, el producto de dos elementos genéricos

$$\sum_{r=0}^{\infty} \omega_r \text{ y } \sum_{s=0}^{\infty} \theta_s$$

de $\Lambda(V)$ se define a partir de lo anterior como:

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} \omega_r\right) \wedge \sum_{s=0}^{\infty} \theta_s = \sum_{r,s=0}^{\infty} \omega_r \wedge \theta_s.$$

Es fácil probar (¿por qué?) que si $\omega \in \Lambda_r(V)$ y $\theta \in \Lambda_s(V)$, entonces $\omega \wedge \theta = (-1)^{rs} \theta \wedge \omega$. Obsérvese que si r ó s es par, entonces $\omega \wedge \theta = \theta \wedge \omega$. En cambio, si r y s son impares, $\omega \wedge \theta = -\theta \wedge \omega$. En particular, si $\omega \in \Lambda_{2r+1}$, entonces $\omega \wedge \omega = 0$.

Proposición 6. $\Lambda(V)$ con el producto exterior es un álgebra asociativa, no conmutativa y con elemento unidad.

DEMOSTRACIÓN: ¡Ejercicio! □

Haciendo una prueba por inducción, se tiene la siguiente proposición:

Proposición 7. Si $\omega_i \in \Lambda_{r_i}(V)$, $i = 1, \dots, k$, entonces:

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = \frac{(r_1 + \dots + r_k)!}{r_1! \dots r_k!} \text{Alt}(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_k).$$

Otras propiedades del Algebra Exterior son las siguientes:

Proposición 8. (i) Si $\omega^1, \dots, \omega^r \in \Lambda_1(V)$ y $\sigma \in \mathcal{S}_r$, entonces:

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^r = \epsilon(\sigma) \omega^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \omega^{\sigma(r)}.$$

(ii) Si $v_1, \dots, v_r \in V$ y $\omega^1, \dots, \omega^r \in \Lambda_1(V)$, entonces:

$$(\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^r)(v_1, \dots, v_r) = \det(\omega^i(v_j)).$$

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, para (i):

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^r = -\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^{i-1} \wedge \omega^{i+1} \wedge \omega^i \wedge \omega^{i+2} \wedge \dots \wedge \omega^r.$$

Por tanto,

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^i \wedge \dots \wedge \omega^j \wedge \dots \wedge \omega^r = -\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^j \wedge \dots \wedge \omega^i \wedge \dots \wedge \omega^r$$

y, como toda permutación es producto de transposiciones, se tiene (i). Para (ii), se observa que:

$$\begin{aligned} (\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^r)(v_1, \dots, v_r) &= r! \text{Alt}(\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r)(v_1, \dots, v_r) = \\ &= r! \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \epsilon(\sigma) \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) = \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \epsilon(\sigma) \omega^1(v_{\sigma(1)}) \dots \omega^r(v_{\sigma(r)}) = \det(\omega^i(v_j)). \end{aligned} \quad \square$$

Proposición 9. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V y $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ su base dual. Considérense i_1, \dots, i_r , enteros tales que $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$. Entonces, los productos $\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_r}$, cuando i_1, \dots, i_r se eligen de todas las formas posibles en las condiciones anteriores, son una base de $\Lambda_r(V)$.

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar se probará que son generadores. Si $\omega \in \Lambda_r(V)$, entonces $\omega \in T_r^0(V)$ y, por tanto,

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_r},$$

lo que implica que:

$$\begin{aligned} \omega = \text{Alt}(\omega) &= \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) \text{Alt}(\theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_r}) = \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_r} = \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} a_{i_1 \dots i_r} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_r}. \end{aligned}$$

Además, son independientes. En efecto, si

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \lambda_{i_1 \dots i_r} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_r} = 0,$$

según la proposición anterior se tiene que

$$\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_r}(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \{i_1, \dots, i_r\} \neq \{j_1, \dots, j_r\}, \\ \epsilon(\sigma) & \text{si } \{i_1, \dots, i_r\} = \{j_1, \dots, j_r\}, \end{cases}$$

donde σ es la permutación $i_k \mapsto j_k$, $k = 1, \dots, r$. Por tanto:

$$\lambda_{j_1 \dots j_r} = 0, \forall j_1, \dots, j_r / 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n. \quad \square$$

Corolario 2. Sea $r \in \mathbf{N}$.

(i) Si $r > n$, entonces $\Lambda_r(V) = \{0\}$.

(ii) Si $r \leq n$, entonces $\dim(\Lambda_r(V)) = \binom{n}{r}$.

DEMOSTRACIÓN: Si $r > n$, todo elemento de la base es nulo, pues en todo producto de la forma $\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_r}$ hay elementos repetidos, con lo que el producto exterior es nulo. El caso $r \leq n$ se deduce directamente de la proposición anterior (¿por qué?). \square

Como consecuencia del corolario anterior, tenemos que $\Lambda(V)$ es suma directa de un número finito de espacios vectoriales,

$$\Lambda(V) = \mathbf{R} \oplus V^* \oplus \Lambda_2(V) \oplus \dots \oplus \Lambda_n(V),$$

lo que implica que:

$$\dim(\Lambda(V)) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n.$$