Capítulo 6

Dualidad en programación lineal

Algunas notas sobre dualidad en P.L.

6.1. Introducción

A cada problema de programación lineal

$$
\begin{array}{rlcccl}
(P) & \text{mín} & c_1'x_1 & +c_2'x_2 & c_3'x_3 & \\
(u') & sa: & A_{11}x_1 & +A_{12}x_2 & +A_{13}x_3 & \geq b_1 \\
(v') & & A_{21}x_1 & +A_{22}x_2 & +A_{23}x_3 & \leq b_2 \\
(w') & & A_{31}x_1 & +A_{32}x_2 & +A_{33}x_3 & = b_3 \\
& & x_1 & & & \geq 0 \\
& & & x_2 & & \leq 0 \\
& & & & x_3 & \text{libre}
\end{array}
$$

al que llamaremos primal (P) y donde x_1, x_2 y x_3 son vectores de variables de decisión, le vamos a asociar otro problema de programación lineal al que llamaremos dual (D) dado por la siguiente transformación:

$$
\begin{array}{rlcccl}
(D) & \text{máx} & u'b_1 & +u'b_2 & w'b_3 & \\
& sa: & u'A_{11} & +v'A_{12} & +w'A_{31} & \leq c_1' \\
& & u'A_{12} & +v'A_{22} & +w'A_{32} & \geq c_2' \\
& & u'A_{13} & +v'A_{32} & +w'A_{33} & = c_3' \\
& & u & & & \geq 0 \\
& & & v & & \leq 0 \\
& & & & w & \text{libre.}
\end{array}
$$

La transformación que lleva (P) en (D) crea por cada restricción de (P) una variable de decisión en (D) y por cada variable de decisión en (P) una restricción en (D) de la forma que se indica en la siguiente tabla:

mín	máx
restricción $\geq$	variable ≥ 0
restricción $\leq$	variable ≤ 0
restricción $=$	variable libre
variable ≥ 0	restricción $\leq$
variable ≤ 0	restricción $\geq$
variable libre	restricción $=$

como puede observarse la transformación que se realiza depende de si estamos calculando el dual de un problema de minimización o si por el contrario el problema es de maximización. A cada problema de minimización le corresponde por tanto un problema de maximización y a cada problema de maximización un problema de minimización. Más aún, como puede verse con los dos problemas genéricos anteriores, siguiendo la tabla de la transformación, el problema dual del dual es el primal, por tanto existe una biyección:

$$(P) \longleftrightarrow (D).$$

6.2. Casuística de problemas primal y dual

De acuerdo con los resultados anteriores, la siguiente tabla muestra la relación de factibilidad entre un problema primal y su problema dual correspondiente.

		Primal		
		Factible acotado	Factible ilimitado	Infactible
Dual	Factible acotado	x		
	Factible ilimitado			x
	Infactible		x	x

Ejemplo 6.2.1 A continuación se muestran diferentes ejemplos de la relación de factibilidad entre un problema primal y su problema dual correspondiente.

(1) (P) región factible no vacía y solución acotada y (D) región factible no vacía y solución acotada

$$
\begin{array}{llrrl}
(P) & \text{mín} & 4x_1 & +2x_2 & \\
 & sa: & x_1 & +x_2 & \geq 2 \\
 & & x_1 & -x_2 & \geq 1 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llrrl}
(D) & \text{máx} & 2u_1 & +u_2 & \\
 & sa: & u_1 & +u_2 & \leq 4 \\
 & & u_1 & -u_2 & \leq 2 \\
 & & u_1, & u_2 & \geq 0
\end{array}
$$

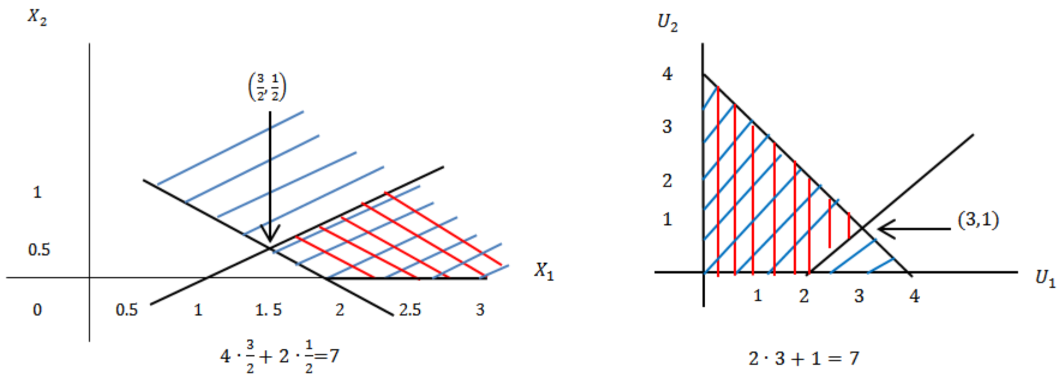

Figura 6.1: Primal y dual factibles acotados

(2) (P) región factible no vacía y solución ilimitada y (D) infactible

$$
\begin{array}{llrrl}
(P) & \text{mín} & -4x_1 & +2x_2 & \\
 & sa: & -x_1 & +x_2 & \geq 2 \\
 & & -x_1 & +x_2 & \geq 1 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llrrl}
(D) & \text{máx} & 2u_1 & +u_2 & \\
 & sa: & -u_1 & -u_2 & \leq -4 \\
 & & u_1 & +u_2 & \leq 2 \\
 & & u_1, & u_2 & \geq 0
\end{array}
$$

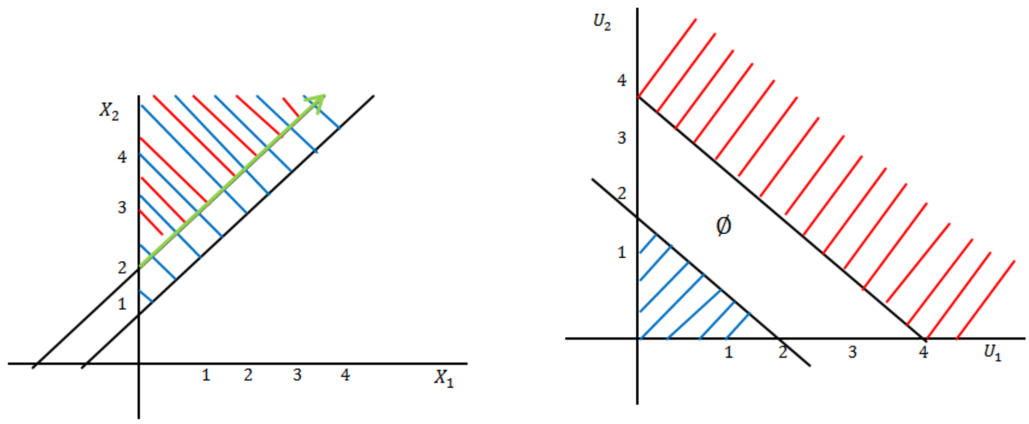

Figura 6.2: Primal factible ilimitado y dual infactible

(3) (P) infactible y (D) infactible

$$
\begin{array}{llrrl}
(P) & \text{mín} & -4x_1 & +2x_2 & \\
 & sa: & -x_1 & +x_2 & \geq 2 \\
 & & x_1 & -x_2 & \geq 1 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llrrl}
(D) & \text{máx} & 2u_1 & +u_2 & \\
 & sa: & -u_1 & +u_2 & \leq -4 \\
 & & u_1 & -u_2 & \leq 2 \\
 & & u_1, & u_2 & \geq 0
\end{array}
$$

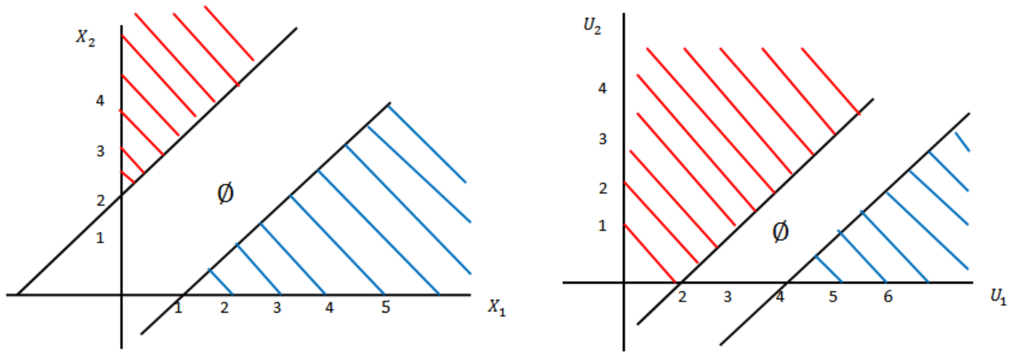

Figura 6.3: Primal y dual infactibles

6.3. Algoritmo del simplex dual

Cuando en una tabla del simplex hemos hallado una base B pero $\bar{b} \ngeq 0$ podemos continuar la búsqueda de la solución óptima del problema que estamos tratando de resolver mediante el siguiente algoritmo.

Algoritmo del simplex dual

Inicialización: Encontrar una base $B \subseteq A$ (**TAL QUE** $\bar{c}'_N = c'_N - c'_B \equiv c'_N - c'_B B^{-1} N \geq 0$ **?**).

Iteraciones: Calcular B^{-1}, $\bar{c}'_N = c'_N - z'_N \equiv c'_N - c'_B B^{-1} N$ y $\bar{b} = B^{-1} b$.

Si $\bar{b} \geq 0$: STOP. La solución óptima es $x^* = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$.

En caso contrario existe r tal que $b_r < 0$ (si hubiese más de uno elegir r tal que b_r sea el de menor valor). Calcular $y^r = e'_r B^{-1} N$ (fila r de $B^{-1}N$).

- Si $y^r \geq 0$: STOP. El problema es infactible.
- Si $y^r \ngeq 0$, obtener k tal que $\dfrac{\bar{c}_k}{y^r_k} = \text{mín}\{\dfrac{\bar{c}_j}{\left|y^r_j\right|} : y^r_j < 0\}$ y comenzar nuevamente las iteraciones con la base resultante de eliminar en B la columna a_r e introducir la columna a_k en su lugar.

Convergencia: El algoritmo termina en un número finito de pasos (el número de submatrices de A es finito).

Ejercicio 6.3.1 *Considérese el siguiente problema de programación lineal:*

$$\begin{array}{lrrrl} \text{máx} & 3x_1 & +4x_2 & +x_3 & \\ sa: & x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 50 \\ & 2x_1 & -x_2 & +x_3 & \geq 15 \\ & x_1 & +x_2 & & = 10 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0. \end{array}$$

1) Obtener la base óptima y la solución óptima del problema. Obtener la solución óptima del problema dual.

2) Realizar un análisis de sensibilidad cuando se varía el coefeciente de x_1 en la función objetivo.

3) Realizar un análisis de sensibilidad cuando se varía el coefeciente de x_2 en la función objetivo.

4) Realizar un análisis de sensibilidad cuando se varía el término independiente b_3.

5) Obtener la solución óptima del problema cuando se cambia el valor b_3 por 18.

6) Realizar un análisis de sensibilidad cuando se añade una nueva variable x_8 con $c_8 = 1$ y $a'_8 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

7) Si $a'_q x \leq b_q$ es la restricción $x_1 + x_3 \leq 20$ y B es la base óptima del problema que estamos considerando, ¿es $\hat{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ (a'_q)_B & 1 \end{bmatrix}$ la base óptima del problema resultante de añadir al problema considerado la restricción $a'_q x \leq b_q$?

Solución:

1) Como

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & c'x & = - & \text{mín} & -c'x \\ s.a: & x \in P & & s.a: & x \in P \\ & x \geq 0 & & & x \geq 0 \end{array}$$

la solución óptima del problema de maximización considerado puede obtenerse como la solución óptima del problema de minimización

$$\begin{array}{lrrrl} \text{mín} & -3x_1 & -4x_2 & -x_3 & \\ sa: & x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 50 \\ & 2x_1 & -x_2 & +x_3 & \geq 15 \\ & x_1 & +x_2 & & = 10 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0. \end{array}$$

el cual podemos expresar a su vez como

$$\begin{array}{lrrrrrl} \text{mín} & -3x_1 & -4x_2 & -x_3 & & & \\ sa: & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 50 \\ & 2x_1 & -x_2 & +x_3 & & -x_5 & = 15 \\ & x_1 & +x_2 & & & & = 10 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0. \end{array}$$

Para encontrar un punto extremo de la región factible del problema anterior con el que comenzar el algoritmo del simplex podemos aplicar el método de la M:

x_B	c_B	-3	-4	-1	0	0	M	M	$\bar{b}$
x_4	0	1	1	1	1	0	0	0	50
x_7	M	2	-1	1	0	-1	0	1	15
x_6	M	1	$\boxed{1}$	0	0	0	1	0	10
$c_j - z_j$		$-3-3M$	$\boxed{-4}$	$-1-M$	0	M	0	0	

observamos que podemos introducir a_2 en la base ($-4 < 0$, aunque también podemos introducir a_1 pues $-3-3M < 0$) en sustitución de a_6 ($\text{mín}\{\frac{50}{1}, \frac{10}{1}\} = 10$), lo hacemos y obtenemos la tabla

x_B	c_B	-3	-4	-1	0	0	M	M	$\bar{b}$
x_4	0	0	0	1	1	0	-1	0	40
x_7	M	3	0	$\boxed{1}$	0	-1	1	1	25
x_2	-4	1	1	0	0	0	1	0	10
$c_j - z_j$		$1-3M$	0	$\boxed{-1-M}$	0	M	4	0	

ahora podemos introducir a_3 en la base ($-1-M<0$) en sustitución de a_7 (mín$\{\frac{40}{1},\frac{25}{1}\}=25$), al hacerlo obtenemos la tabla

x_B	c_B	-3	-4	-1	0	0	M	M	$\bar{b}$
x_4	0	-3	0	0	1	$\boxed{1}$	-2	-1	15
x_3	-1	3	0	1	0	-1	1	1	25
x_2	-4	1	1	0	0	0	1	0	10
$c_j - z_j$		4	0	0	0	$\boxed{-1}$	$M+5$	$M+1$	

observemos que esta vez tenemos que introducir a_5 en la base ($-1<0$) en sustitución de a_4 (mín$\{\frac{15}{1}\}=15$), al hacerlo obtenemos la tabla

x_B	c_B	-3	-4	-1	0	0	M	M	$\bar{b}$
x_5	0	-3	0	0	1	1	-2	-1	$\boxed{15}$
x_3	-1	0	0	1	1	0	-1	0	$\boxed{40}$
x_2	-4	1	1	0	0	0	1	0	$\boxed{10}$
$c_j - z_j$		1	0	0	1	0	$M+3$	M	

paramos pues $c'_N - c'_B B^{-1} N \geq 0$*, la solución óptima es* $x_1^* = 0, x_2^* = 10, x_3^* = 40, x_4^* = 0$ *y* $x_5^* = 10$.
La base óptima es por tanto $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$*. La inversa de la base óptima es*
$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *por lo que la solución óptima del dual es:*

$$(u^*)' = (-c'_B)B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

donde $-c'_B$ *son los coeficientes básicos de la función objetivo del problema de maximización original.*

2) Si $c_1 = -3 \longrightarrow c_1 = -3 + \Delta$*, ¿para qué valores de* Δ *sigue siendo* B *base óptima del problema? Tenemos que calcular los nuevos costes reducidos:*

$$\begin{aligned} \bar{c}'_N &= c'_N(\Delta) - z'_N(\Delta) = (c'_N + \Delta \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}) - c'_B B^{-1} N = \\ &= (\begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix} + \Delta \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}) - \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -3+\Delta & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\Delta & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

por tanto B *seguirá siendo óptima si y solo si* $\begin{bmatrix} 1+\Delta & 1 \end{bmatrix} \geq 0$*, o lo que es lo mismo, si y solo si* $\Delta \geq -1$.

3) Si $c_2 = -4 \longrightarrow c_2 = -4 + \Delta$*, ¿para qué valores de* Δ *sigue siendo* B *base óptima del problema? Tenemos que calcular los nuevos costes reducidos:*

$$\begin{aligned} \bar{c}'_N &= c'_N(\Delta) - z'_N(\Delta) = c'_N - (c'_B + \Delta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) B^{-1} N = \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix} - (\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} + \Delta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -1 \end{bmatrix} - \Delta \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\Delta & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

por tanto B *seguirá siendo óptima si y solo si* $\begin{bmatrix} 1-\Delta & 1 \end{bmatrix} \geq 0$*, o lo que es lo mismo, si y solo si* $\Delta \leq 1$.

4) Si $b_3 = 10 \longrightarrow b_3 = 10 + \Delta$*, ¿para qué valores de* Δ *sigue siendo* B *base óptima del problema? Tenemos que calcular* $B^{-1}(b + \Delta e_3)$*:*

$$B^{-1}(b+\Delta e_3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 50 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix} + \Delta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 15 \\ 40 \\ 10 \end{bmatrix} + \Delta \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15-2\Delta \\ 40-\Delta \\ 10+\Delta \end{bmatrix}$$

como

$$\begin{bmatrix} 15-2\Delta \\ 40-\Delta \\ 10+\Delta \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \Delta \leq \frac{15}{2} \\ \Delta \leq 40 \\ \Delta \geq -10 \end{array}$$

B seguirá siendo óptima si y solo si $\Delta \in [-10, \frac{15}{2}]$.

5) En el apartado anterior hemos visto que los valores de Δ para los que B sigue siendo base óptima del problema al hacer el cambio $b_3 = 10 \longrightarrow b_3 = 10 + \Delta$ son $\Delta \in [-10, \frac{15}{2}]$, es decir, $b_3 \in [0, \frac{35}{2}]$. Dado que $18 \notin [0, \frac{35}{2}]$, B no va a seguir siendo base óptima en este caso. Como

$$B^{-1}\begin{bmatrix}50\\15\\18\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}50\\15\\18\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\32\\18\end{bmatrix}$$

la última tabla del simplex que obtuvimos cuando resolvimos el problema quedaría:

x_B	c_B	-3	-4	-1	0	0	$\bar{b}$
x_5	0	$\boxed{-3}$	0	0	1	1	$\boxed{-1}$
x_3	-1	0	0	1	1	0	32
x_2	-4	1	1	0	0	0	18
$c_j - z_j$		1	0	0	1	0	

si aplicamos el algoritmo del simplex dual tenemos que sustituir en la base a_5 $(-1 < 0)$ por a_1 $(\text{mín}\{\dfrac{1}{|-3|}\} = \dfrac{1}{3})$, lo hacemos y obtenemos la tabla

x_B	c_B	-3	-4	-1	0	0	$\bar{b}$
x_1	-3	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{1}{3}}$
x_3	-1	0	0	1	1	0	$\boxed{32}$
x_2	-4	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{53}{3}}$
$c_j - z_j$		0	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	

paramos pues $\bar{b} \geq 0$, la solución óptima es este caso $x_1^* = \dfrac{1}{3}$, $x_2^* = \dfrac{53}{3}$, $x_3^* = 32$, $x_4^* = 0$ y $x_5^* = 0$.

6) Para ver si B sigue siendo óptima en el nuevo problema calculamos:

$$c_8 - c'_B B^{-1} a_8 = 1 - \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,$$

como $c_8 - c'_B B^{-1} a_8 \geq 0$ la base B seguirá siendo óptima en el nuevo problema.

7) La restricción $x_1 + x_3 \leq 20$ puede expresarse como $x_1 + x_3 + x_8 = 20$ introduciendo una nueva variable de decisión $x_8 \geq 0$. Como

$$-(a'_q)_B B^{-1} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tenemos que

$$\hat{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -(a'_q)_B B^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculamos $\hat{B}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ b_q \end{bmatrix}$:

$$\hat{B}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ b_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -(a'_q)_B B^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 15 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 40 \\ 10 \\ -20 \end{bmatrix} \ngeq 0$$

por tanto $\hat{B}$ no es base óptima del nuevo problema.