Programación Matemática. Relación 7 Curso 2016/17.

Problema 1

Utilice el método de cortes de Gomory para resolver el siguiente problema de $p$rogramación lineal entera pura.

$$\begin{array}{lcccc} \max & x_1 & +3x_2 & & \\ \text{sa}: & & & & \\ & x_1 & +x_2 & \geq & 1 \\ & x_1 & +2x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, & x_2 & \in & \mathbb{Z}_+ \end{array}$$

Problema 2

Utilice el método de ramificación y acotación (Branch&Bound) para resolver el siguiente problema de $p$rogramación lineal entera mixta.

$$\begin{array}{lcccc} \max & x_1 & +2x_2 & & \\ \text{sa}: & & & & \\ & x_1 & & \geq & 1 \\ & -x_1 & & \geq & -5 \\ & -x_1 & -0'8x_2 & \geq & -5.8 \\ & x_1 & -0.8x_2 & \geq & 0.2 \\ & -x_1 & -8x_2 & \geq & -26 \\ & x_1, & x_2 & \in & \mathbb{Z}_+ \end{array}$$

Problema 3

Resuelve, usando el método de los planos de corte de Gomory, el siguiente problema de programación lineal entera:

$$\begin{array}{lcccc} \max & 2x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.} & 3x_1 & +2x_2 & = & 7 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0 \\ & x_1, & x_2 & \in & \mathbb{Z} \end{array}$$

Problema 4

Sea el problema de optimización lineal

$$\begin{array}{lcccccc} \max & x_1 & +x_2 & -x_3 & & & \\ \text{s.a.} & & \lambda x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & +\frac{1}{2}x_4 & = & 5/2 \\ & \lambda x_1 & & -x_3 & +x_4 & = & 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

donde λ es un número real.

1. Indica para qué valores de λ la matriz de restricciones es totalmente unimodular.
2. Indica para qué valores de λ la base formada por las dos primeras columnas es óptima, e indica, en tal caso, la solución óptima del dual.
3. Para $\lambda = 1$, resuelve por ramificación y acotación el problema obtenido al imponer que las variables son enteras.
4. Para $\lambda = \frac{1}{2}$, resuelve usando cortes de Gomory el problema obtenido al imponer que las variables son enteras y pares.

Problema 5

Resuelve el siguiente problema de programación entera mediante el algoritmo de ramificación y acotación.

$$
\begin{array}{lll}
1) & \min & x_1 - 2x_2 \\
 & \text{s.a:} & x_1 + x_2 \geq 2 \\
 & & -x_1 + x_2 \geq 1 \\
 & & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
2) & \min & 3x_1 - 7x_2 - 12x_3 \\
 & \text{s.a:} & -3x_1 + 6x_2 + 8x_3 \leq 12 \\
 & & 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 \leq 8 \\
 & & 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 25 \\
 & & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+
\end{array}
$$

Problema 6

Se considera el problema de optimización (P),

$$
\begin{array}{lrrrrcr}
\max & 2\vartheta x_1 & +\vartheta x_2 & +x_3 & -x_4 & & \\
\text{s.a.} & 6x_1 & +x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = & 6\vartheta \\
 & 4x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 5 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \in & \mathbb{Z}_+
\end{array} \qquad (P)
$$

donde ϑ es un número real.

1. Para $\vartheta = 1$, resuelve la relajación continua de (P) e identifica la base B óptima obtenida.
2. Determina el conjunto de valores de ϑ para los que la base B del apartado anterior es óptima para la relajación continua de (P).
3. Para $\vartheta = 1$, resuelve (P) por ramificación y acotación, indicando en cada etapa la tabla obtenida con el método símplex.

Problema 7

Se considera el problema lineal (P),

$$
\begin{array}{lrrrrrcr}
\max & -x_1 & +\lambda x_2 & +2x_3 & +x_4 & +x_5 & & \\
\text{s.a.:} & & \frac{1}{2}x_2 & +3x_3 & +x_4 & +x_5 & = & \frac{3}{2} \\
 & -x_1 & +x_2 & +x_3 & & +x_5 & = & 1 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0,
\end{array} \qquad (P)
$$

donde λ es un número real.

1. Resuelve el problema (P) para $\lambda = 0$ e identifica la base óptima.
2. Identifica el intervalo de valores de λ para los que la base obtenida en el apartado anterior sigue siendo óptima, e indica, para cada λ en dicho intervalo, una solución óptima del dual de (P).
3. Identifica el conjunto de valores de λ para los que, además de la base obtenida en el primer apartado, existe otra base óptima, que debes obtener.
4. Para $\lambda = 0$, resuelve (P) si añadimos a (P) la condición de que las variables $x_1, x_2, \ldots, x_5$ son enteras.

Solución del problema 1

$$
\begin{array}{lrrcr}
max & x_1 & +3x_2 & & \\
\text{sa:} & x_1 & +x_2 & \geq & 1 \\
 & x_1 & +2x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1, & x_2, & \geq & 0
\end{array}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_5	1	1	-1	0	1	1
x_4	1	2	0	1	0	3
z	1	1	-1	0	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_1	1	1	-1	0	1	1
x_4	0	1	1	1	-1	2
z	0	0	0	0	-1	0

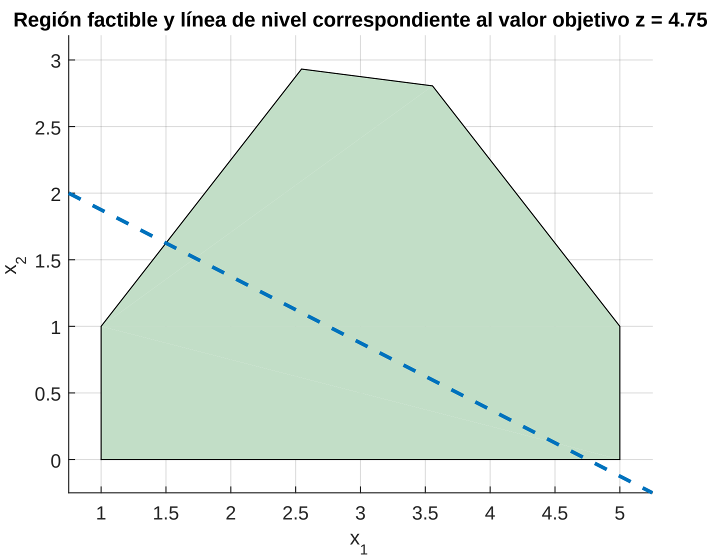
	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
x_1	1	1	-1	0	1
x_4	0	1	1	1	2
z	0	2	1	0	-1

	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
x_2	1	1	-1	0	1
x_4	-1	0	2	1	1
z	-2	0	3	0	-3

	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_3	$\frac{-1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
z	$\frac{-1}{2}$	0	0	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-9}{2}$

Solución del problema 2

$$
\begin{array}{rrrcr}
max & x_1 & +2x_2 & & \\
\text{sa:} & x_1 & & \geq & 1 \\
 & x_1 & & \leq & 5 \\
 & x_1 & +0.8x_2 & \leq & 5.8 \\
 & x_1 & -0.8x_2 & \geq & 0.2 \\
 & x_1 & +8x_2 & \leq & 26 \\
 & x_1, & x_2, & \in & \mathbb{Z}_+
\end{array}
$$



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	LD
x_8	1	0	-1	0	0	0	0	1	0	1
x_4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	5
x_5	1	$\frac{4}{5}$	0	0	1	0	0	0	0	$\frac{29}{5}$
x_9	1	$\frac{-4}{5}$	0	0	0	-1	0	0	1	$\frac{1}{5}$
x_7	1	8	0	0	0	0	1	0	0	26
z	2	$\frac{-4}{5}$	-1	0	0	-1	0	0	0	$\frac{6}{5}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	LD
x_8	0	$\frac{4}{5}$	-1	0	0	1	0	1	-1	$\frac{4}{5}$
x_4	0	$\frac{4}{5}$	0	1	0	1	0	0	-1	$\frac{24}{5}$
x_5	0	$\frac{8}{5}$	0	0	1	1	0	0	-1	$\frac{28}{5}$
x_1	1	$\frac{-4}{5}$	0	0	0	-1	0	0	1	$\frac{1}{5}$
x_7	0	$\frac{44}{5}$	0	0	0	1	1	0	-1	$\frac{129}{5}$
z	0	$\frac{4}{5}$	-1	0	0	1	0	0	-2	$\frac{4}{5}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	LD
x_6	0	$\frac{4}{5}$	-1	0	0	1	0	1	-1	$\frac{4}{5}$
x_4	0	0	1	1	0	0	0	-1	0	4
x_5	0	$\frac{4}{5}$	1	0	1	0	0	-1	0	$\frac{24}{5}$
x_1	1	0	-1	0	0	0	0	1	0	1
x_7	0	8	1	0	0	0	1	-1	0	25
z	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0

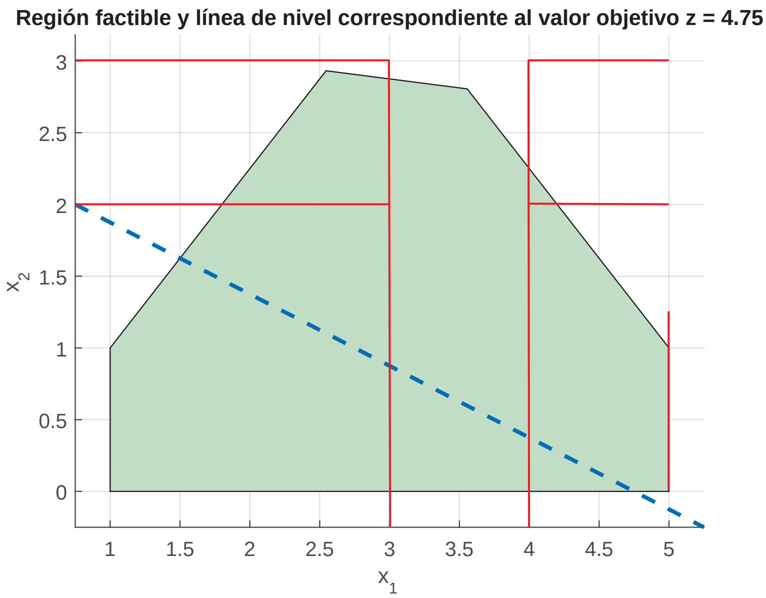
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
x_6	0	$\frac{4}{5}$	-1	0	0	1	0	$\frac{4}{5}$
x_4	0	0	1	1	0	0	0	4
x_5	0	$\frac{4}{5}$	1	0	1	0	0	$\frac{24}{5}$
x_1	1	0	-1	0	0	0	0	1
x_7	0	8	1	0	0	0	1	25
z	0	2	1	0	0	0	0	-1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
x_2	0	1	$\frac{-5}{4}$	0	0	$\frac{5}{4}$	0	1
x_4	0	0	1	1	0	0	0	4
x_5	0	0	2	0	1	-1	0	4
x_1	1	0	-1	0	0	0	0	1
x_7	0	0	11	0	0	-10	1	17
z	0	0	$\frac{7}{2}$	0	0	$\frac{-5}{2}$	0	-3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
x_2	0	1	0	0	0	$\frac{5}{44}$	$\frac{5}{44}$	$\frac{129}{44}$
x_4	0	0	0	1	0	$\frac{10}{11}$	$\frac{-1}{11}$	$\frac{27}{11}$
x_5	0	0	0	0	1	$\frac{9}{11}$	$\frac{-2}{11}$	$\frac{10}{11}$
x_1	1	0	0	0	0	$\frac{-10}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{28}{11}$
x_3	0	0	1	0	0	$\frac{-10}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{17}{11}$
z	0	0	0	0	0	$\frac{15}{22}$	$\frac{-7}{22}$	$\frac{-185}{22}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
x_2	0	1	0	0	$\frac{-5}{36}$	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{101}{36}$
x_4	0	0	0	1	$\frac{-10}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{13}{9}$
x_6	0	0	0	0	$\frac{11}{9}$	1	$\frac{-2}{9}$	$\frac{10}{9}$
x_1	1	0	0	0	$\frac{10}{9}$	0	$\frac{-1}{9}$	$\frac{32}{9}$
x_3	0	0	1	0	$\frac{10}{9}$	0	$\frac{-1}{9}$	$\frac{23}{9}$
z	0	0	0	0	$\frac{-5}{6}$	0	$\frac{-1}{6}$	$\frac{-55}{6}$

Aplicando el método de ramificación y acotación salen los cortes



Solución del problema 3

$$
\begin{array}{rcccl}
max & 2x_1 & +x_2 & & \\
\text{sa:} & 3x_1 & +2x_2 & = & 7 \\
 & x_1, & x_2, & \geq & 0
\end{array}
$$

	x_1	x_2	x_3	LD
x_3	3	2	1	7
z	3	2	0	0

	x_1	x_2	x_3	LD
x_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$
z	0	0	-1	-7

	x_1	x_2	LD
x_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$
z	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-14}{3}$