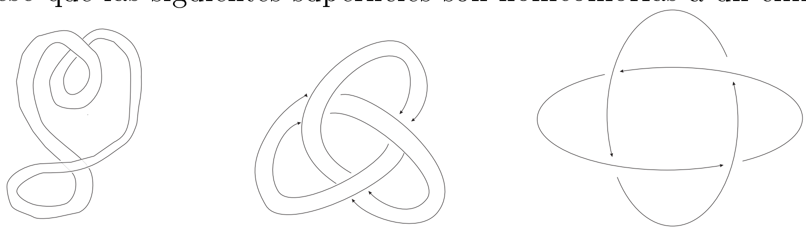
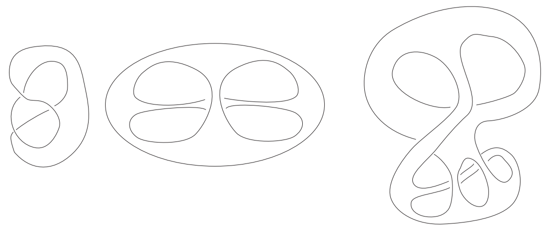
GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA DE SUPERFICES 2016/17
RELACIÓN 2.

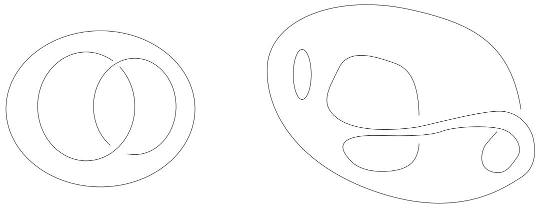
Ejercicio 1. Pruébese que las siguientes superficies son homeomorfas a un cilindro.



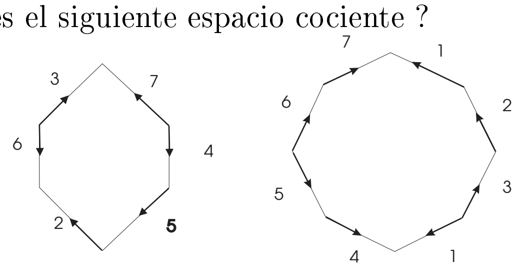
Ejercicio 2. Indíquese cuántas componentes tienen el borde de las siguientes superficies.



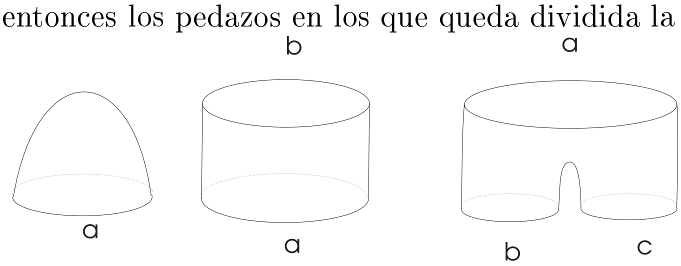
Ejercicio 3. ¿Son homeomorfas las siguientes superficies ?



Ejercicio 4. ¿Qué superficie es el siguiente espacio cociente ?



Ejercicio 5. Lo que sigue es una clasificación de las superficies orientables sin borde mediante la asignación de una *forma normal*. Möbius demostró que si la superficie está sumergida en $\mathbb{R}^3$ y la cortamos mediante una familia de planos paralelos lo suficientemente cercanos unos de otros y con la inclinación adecuada, entonces los pedazos en los que queda dividida la superficie son del tipo :



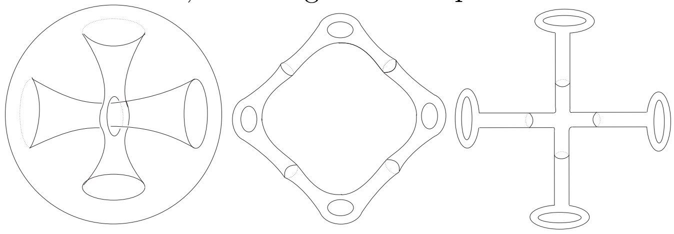
denotados por $(a), (ab)$ y (abc) respectivamente. De esta forma, podemos representar a una superficie como una suma formal de términos del tipo anterior, donde la suma indica un 'pegamiento' a través de una componente del borde común a los términos correspondientes.

(1) Siguiendo el procedimiento anterior, interpretar geométricamente la superficie dada por la suma formal $(a) + (abc) + (bcd) + (def) + (f) + (eg) + (g)$.

(2) En general, mediante el símbolo $(abcd...)$ representamos a una esfera con agujeros, siendo $a, b, c, d, ...$ las componentes del borde. Comprobar que las superficies $(xa_1a_2...) + (xb_1b_2...)$ y $(a_1a_2...b_1b_2...)$ son homeomorfas, donde $x, a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ...$ son todos diferentes.

(3) Comprobar que toda superficie orientable y sin borde se puede expresar (salvo homeomorfismo) como una suma formal $(a_1a_2...a_n) + (a_1a_2...a_n)$, siendo ésta su *forma normal.* Hallar la forma normal de la superficie dada en (a).

Ejercicio 6. Decidir, justificadamente, si las siguientes superficies son homeomorfas o no.



Ejercicio 7. Describir gráficamente cómo son los entornos de cada punto en el espacio cociente obtenido a partir de un hexágono en el que las aristas del borde quedan identificadas según la sucesión $aabba^{-1}b$. Aun no siendo superficies, a los espacios triangulables en los que todo punto posee un entorno de uno de los tres tipos anteriores se les llama "falsas superficies".

Ejercicio 8. Sea M la suma conexa de n toros y N la suma conexa de n planos proyectivos. ¿Qué superficie es $M\#N$? ¿Y si N es la suma conexa de n botellas de Klein?

Ejercicio 9. Probar que si A y B son dos superficies compactas tales que $A\sharp B \cong S^2$, entonces $A \cong B \cong S^2$.
(**Indicación :** considerar las sumas conexas infinitas $A\sharp B\sharp A\sharp B...$ y $B\sharp A\sharp B\sharp A...$).