Programación Matemática. Relación 3. Curso 2016/17.

Problema 1

Dados dos conjuntos convexos no vacíos A y B en $\mathbb{R}^n$ demuestra que son convexos los siguientes conjuntos:

1. $A \cap B$.
2. $A \times B$.
3. $M \cdot A := \{Ma : a \in A\}$ (M es una matriz $m \times n$ fija).
4. $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$.
5. $cl(A)$, la clausura de A.
6. $int(A)$, el interior de A.

Problema 2

Dado $C \subset \mathbb{R}^{p+q}$, convexo no vacío, demuestra que es convexo el conjunto $B = \{b \in \mathbb{R}^q : (a, b) \in C$ para algún $a \in \mathbb{R}^p\}$.

Problema 3

Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Demuestra que son convexos los siguientes conjuntos:

1. $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$
2. $\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\| \leq t\}$

Problema 4

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y cerrado, y sea $d \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que son equivalentes:

1. $\exists x_0 \in S$ tal que $x_0 + \lambda d \in S \ \forall \lambda \geq 0$.
2. $x_0 + \lambda d \in S \ \forall \lambda \geq 0, \forall x_0 \in S$.

¿Es cierto el resultado si S no es cerrado?

Problema 5

Prueba que un cono $K \subset \mathbb{R}^n$ es convexo sii $K + K = K$.

Problema 6

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cono convexo cerrado. Demuestra que K tiene puntos extremos si y sólo si K no contiene ninguna recta.

Problema 7

Describe la función π de proyección sobre los siguientes convexos

1. $S = co\left(\{(1,0),(0,4),(-1,-1),(0,-2)\}\right).$
2. $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x^\top x \le 1\right\}$
3. $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x = b\right\}.$

Problema 8

Identifica el conjunto de puntos extremos y el cono de direcciones de los siguientes conjuntos convexos:

1. $S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \ge 0 \ \forall i\}.$
2. $S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \ge 1 \ \forall i\}.$
3. $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x|_i \le 1\}$
4. $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x^\top x \le 1\right\}$
5. $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 \le 10,\ -x_1 - 2x_2 = 4,\ x_1, x_2, x_3 \ge 0\}$
6. $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 \ge 2,\ -x_1 + x_2 = 4,\ x_1, x_2 \ge 0\}$

Problema 9

Describe mediante restricciones lineales el poliedro $co(\{a_1, \dots, a_5\}) \subset \mathbb{R}^3$,

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	0	0	0	1
0	0	0	3	3
0	0	1	0	0

Problema 10

Demuestra el *teorema de Farkas*: Sea una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Se cumple exactamente una de las dos condiciones siguientes:

1. $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$, $x \ge 0$.
2. $\exists y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y^\top A \ge 0$, $y^\top b < 0$.

Problema 11

Demuestra el *teorema de Gordan*: Sea una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Se cumple exactamente una de las dos condiciones siguientes:

1. $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = 0$, $x \ge 0$, $x \ne 0$.
2. $\exists y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y^\top A > 0$.

Problema 12

Demuestra el *teorema de Gale*: Sea una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Se cumple exactamente una de las dos condiciones siguientes:

1. $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$.
2. $\exists y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y^\top A = 0$, $b^\top y = 1$.

Problema 13

Sean $A := \{a_1, \dots, a_p\} \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. Escribe un problema de programación lineal que es factible sii $x \in co(A)$, la envolvente convexa de A.