VARIEDADES DIFERENCIABLES	Cuestiones de Topología

Curso 2017/18 **Fecha de entrega:** 09/10/17.

Responder a las siguientes cuestiones:

1. Sean (X, T) un espacio topológico y A, B dos subconjuntos de X tales que $A \subseteq B \subseteq X$. Probar:
   (a) $(T|_B)|_A = T|_A$.
   (b) Si $A \in T$, entonces $A \in T|_B$.
   (c) El recíproco de (b) no es cierto en general, pero sí cuando B es abierto (es decir, si $A \in T|_B$ y $B \in T$, entonces $A \in T$).

2. Probar que un conjunto es abierto si y sólo si es entorno de todos sus puntos. Utilizar esta caracterización para probar que $[0, 1)$ no es abierto euclídeo de $\mathbf{R}$.

3. Sean (X, T) un espacio topológico y $\mathcal{B} \subseteq T$. Probar que $\mathcal{B}$ es base de T si y sólo si $\forall G \in T$ y $\forall p \in G$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $p \in B \subseteq G$.

4. Sean X un conjunto y Ω una familia de subconjuntos de X. Sean $\mathcal{B}_\Omega = \{X\} \cup \{\text{intersecciones finitas de elementos de } \Omega\}$ y $T_\Omega = \{\emptyset\} \cup \{\text{uniones cualesquiera de elementos de } \mathcal{B}_\Omega\}$. Probar que T_Ω es la menor topología sobre X que contiene a Ω. Probar también que $\mathcal{B}_\Omega$ es base de T_Ω.

5. Sean $(X, T_X), (Y, T_Y)$ dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación biyectiva. Probar que son equivalentes:
   (a) f^{-1} es continua.
   (b) f es abierta.
   (c) f es cerrada.

   Utilizar este resultado para caracterizar los homeomorfismos.

6. Sean (X, T_X) un espacio topológico y $f : (X, T_X) \to Y$ una aplicación biyectiva. Probar que $T_Y = \{f(G) \ / \ G \in T_X\}$ coincide con la topología final de f (es decir, $\{U \subseteq Y \ / \ f^{-1}(U) \in T_X\}$) y es la única topología sobre Y que convierte a f en un homeomorfismo.

7. Sean (Y, T_Y) un espacio topológico y $f : X \to (Y, T_Y)$ una aplicación biyectiva. Probar que $T_X = \{G \subseteq X \ / \ f(G) \in T_Y\}$ coincide con la topología inicial de f (es decir, $\{f^{-1}(U) \ / \ U \in T_Y\}$) y es la única topología sobre X que convierte a f en un homeomorfismo.

8. Probar que todo homeomorfismo local es una aplicación abierta.