Programación Matemática. Relación 4 Curso 2016/17.

Problema 1

Construye un poliedro no vacío sin direcciones extremas ni puntos extremos.

Problema 2

Construye, si es posible, un problema de progración lineal factible

1. con valor objetivo acotado, pero sin soluciones óptimas
2. con exactamente una solución óptima
3. con exactamente dos soluciones óptimas
4. con exactamente un segmento de soluciones óptimas
5. con toda la región factible como solución óptima

Problema 3

Sean dos conjuntos no vacíos $A := \{a_1, \ldots, a_p\}$, $B := \{b_1, \ldots, b_q\} \subset \mathbb{R}^n$.

1. Escribe un problema de programación lineal que es factible sii $co(A) \cap co(B) \neq \emptyset$.
2. Usando el lema de Farkas, demuestra que $co(A) \cap co(B) = \emptyset$ sii existe $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u^\top a_i > u^\top b_j \; \forall i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$.

Problema 4

Representa el conjunto factible y las líneas de nivel del siguiente problema de *Programación Lineal*. Resuelve el problema usando el método simplex en formato tabla.

$$
\begin{array}{rrrcr}
max & x_1 & +x_2 & & \\
\text{sa}: & x_1 & -2x_2 & \leq & 1 \\
 & -3x_1 & +x_2 & \leq & 1 \\
 & 4x_1 & +x_2 & \leq & 13 \\
 & -x_1 & +x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1, & x_2, & \geq & 0
\end{array}
$$

Determina las soluciones óptimas para la nueva función objetivo $2x_1 + \frac{1}{2}x_2$. ¿Qué tipo de solución óptima obtienes?

Problema 5

Representa el conjunto factible del siguiente problema y resuélvelo usando el *método de las dos fases* del simplex en formato tabla.

$$
\begin{array}{rrrcr}
max & x_1 & +3x_2 & & \\
\text{sa}: & x_1 & +x_2 & \geq & 2 \\
 & x_1 & & \geq & 1 \\
 & x_1 & +2x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1, & x_2, & \geq & 0
\end{array}
$$

Problema 6

El siguiente problema es infactible. Aplica el método de las dos fases del simplex.

$$\begin{array}{rrrrcl} max & x_1 & +x_2 & +x_3 & & \\ \text{sa}: & -x_1 & +2x_2 & -x_3 & \geq & 5 \\ & x_1 & +x_2 & +2x_3 & \geq & 2 \\ & & +3x_2 & +x_3 & \leq & 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & \geq & 0 \end{array}$$

Problema 7

Aplica el método de las dos fases del simplex.

$$\begin{array}{rrrcl} max & x_1 & +x_2 & & \\ \text{sa}: & -3x_1 & +x_2 & \leq & 1 \\ & 2x_1 & +3x_2 & \leq & 5 \\ & x_1 & +2x_2 & \geq & 3 \\ & x_1, & x_2, & \geq & 0 \end{array}$$

Problema 8

El siguiente problema posee una restricción redundante. Comprueba que en la primera fase del método simplex se detecta esta situación y que en la segunda fase se certifica que el problema no tiene solución óptima acotada.

$$\begin{array}{rrrrcl} max & x_1 & +x_2 & +x_3 & & \\ \text{sa}: & -x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 5 \\ & -x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ & -2x_1 & +3x_2 & & = & 7 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & \geq & 0 \end{array}$$

Problema 9

Para cada uno de los siguientes problemas de programación lineal,

1. Hallar la solución óptima.
2. Hallar el rango de valores del coeficiente de la variable x_1 en la función objetivo para los que su base asociada sigue siendo óptima.
3. Idem para x_2.

a)
$$\begin{array}{rrrrl} \max & 3x_1 & +4x_2 & +x_3 & \\ s.a: & x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 50 \\ & 2x_1 & -x_2 & +x_3 & \geq 15 \\ & x_1 & +x_2 & & = 10 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrrrcl} \max & x_1 & +2x_2 & +5x_3 & -3x_4 & & \\ s.a. & x_1 & +2x_2 & +4x_3 & -x_4 & \leq & 6 \\ & 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & \leq & 4 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rrrcl} \min & 3x_1 & -x_2 & & \\ s.a. & x_1 & -3x_2 & \geq & -3 \\ & 2x_1 & +x_2 & \geq & -2 \\ & x_1 & +x_2 & \leq & 8 \\ & 4x_1 & -x_2 & \leq & 16 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rrrcl} \max & x_1 & +3x_2 & & \\ s.a. & x_1 & -2x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & +x_2 & \leq & 16 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

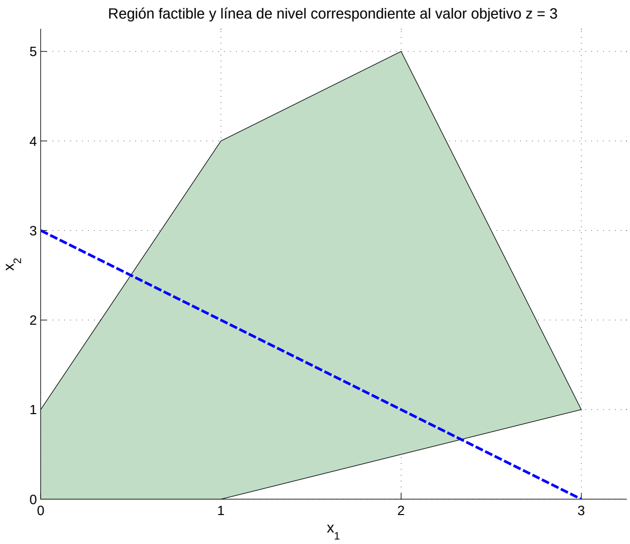
Problema 10

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$2x_1 - x_2 + x_3 = -1,\ x_1 + 2x_2 = 0,\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3,$$

mediante el algoritmo del simplex.

Solución del problema 4:



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
x_3	1	-2	1	0	0	0	1
x_4	-3	1	0	1	0	0	1
x_5	4	1	0	0	1	0	13
x_6	-1	1	0	0	0	1	3
$-z$	1	1	0	0	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
x_1	1	-2	1	0	0	0	1
x_4	0	-5	3	1	0	0	4
x_5	0	9	-4	0	1	0	9
x_6	0	-1	1	0	0	1	4
$-z$	0	3	-1	0	0	0	-1

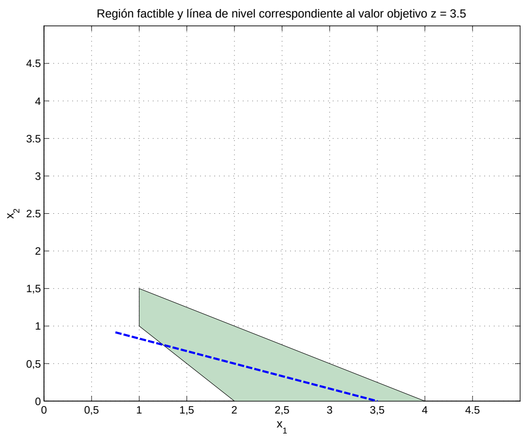
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
x_1	1	0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	0	3
x_4	0	0	$\frac{7}{9}$	1	$\frac{5}{9}$	0	9
x_2	0	1	$\frac{-4}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	0	1
x_6	0	0	$\frac{5}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	1	5
$-z$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	0	-4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
x_1	1	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{-1}{5}$	2
x_4	0	0	0	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{-7}{5}$	2
x_2	0	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	5
x_3	0	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$	9
$-z$	0	0	0	0	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-3}{5}$	-7

Resuelva el problema de nuevo con la función objetivo $2x_1 + \frac{1}{2}x_2$. Calculando los costes reducidos respecto de la nueva función objetivo y pivotando se obtiene:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
x_1	1	0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	0	3
x_4	0	0	$\frac{7}{9}$	1	$\frac{5}{9}$	0	9
x_2	0	1	$\frac{-4}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	0	1
x_6	0	0	$\frac{5}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	1	5
$-z$	0	0	0	0	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{-13}{2}$

Solución del problema 5:



$$
\begin{array}{rccccc}
max & x_1 & +3x_2 & & \\
\text{sa}: & x_1 & +x_2 & \geq & 2 \\
 & x_1 & & \geq & 1 \\
 & x_1 & +2x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1, & x_2, & \geq & 0
\end{array}
$$

En la Fase I se resuelve el problema auxiliar

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
min & x_6 & +x_7 & & & & & & & \\
\text{sa}: & x_1 & +x_2 & -x_3 & & & +x_6 & & = & 2 \\
 & x_1 & & & -x_4 & & & +x_7 & = & 1 \\
 & x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & & & = & 4 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
x_6	1	1	−1	0	0	1	0	2
x_7	1	0	0	−1	0	0	1	1
x_5	1	2	0	0	1	0	0	4
$-z$	2	1	−1	−1	0	0	0	3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
x_6	0	1	−1	1	0	1	−1	1
x_1	1	0	0	−1	0	0	1	1
x_5	0	2	0	1	1	0	−1	3
$-z$	0	1	−1	1	0	0	−2	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
x_2	0	1	−1	1	0	1	−1	1
x_1	1	0	0	−1	0	0	1	1
x_5	0	0	2	−1	1	−2	1	1
$-z$	0	0	0	0	0	−1	−1	0

Ahora comienza la FASE II, se eliminan las variables artificiales x_6 y x_7 y se calcula el renglón z de acuerdo a la formulación del problema original.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_2	0	1	−1	1	0	1
x_1	1	0	0	−1	0	1
x_5	0	0	2	−1	1	1
$-z$	0	0	3	−2	0	−4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_1	1	0	0	−1	0	1
x_3	0	0	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-z$	0	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-11}{2}$

Solución del problema 6:

Ejemplo de problema infactible.

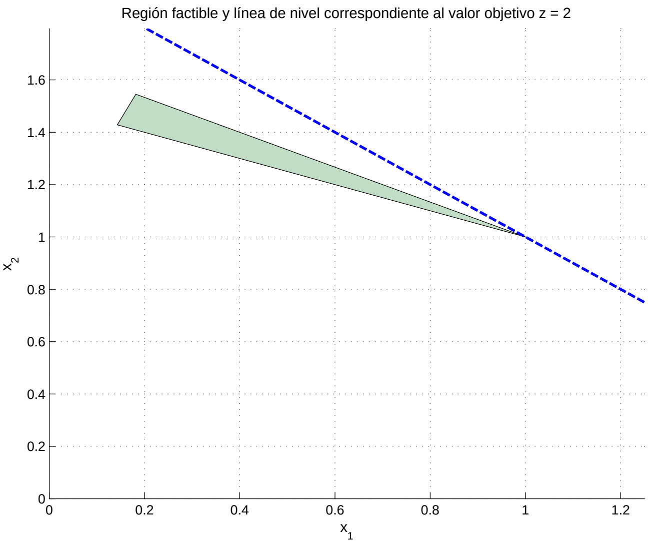
$$
\begin{array}{rrrrcl}
max & x_1 & +x_2 & +x_3 & & \\
\text{sa}: & -x_1 & +2x_2 & -x_3 & \geq & 5 \\
 & x_1 & +x_2 & +2x_3 & \geq & 2 \\
 & & +3x_2 & +x_3 & \leq & 3 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & \geq & 0
\end{array}
$$

Solución:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
x_7	-1	2	-1	-1	0	0	1	0	5
x_8	1	1	2	0	-1	0	0	1	2
x_6	0	3	1	0	0	1	0	0	3
z	0	3	1	-1	-1	0	0	0	7

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
x_7	-1	0	$\frac{-5}{3}$	-1	0	$\frac{-2}{3}$	1	0	3
x_8	1	0	$\frac{5}{3}$	0	-1	$\frac{-1}{3}$	0	1	1
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1
z	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	4

Solución del problema 7:



$$
\begin{array}{rrrcl}
max & x_1 & +x_2 & & \\
\text{sa}: & -3x_1 & +x_2 & \leq & 1 \\
 & 2x_1 & +3x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1 & +2x_2 & \geq & 3 \\
 & x_1, & x_2, & \geq & 0
\end{array}
$$

En la FASE I se resuelve el problema auxiliar

$$\begin{array}{rrrrrrrcl}
min & & & & & & x_6 & & \\
\text{sa}: & -3x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & = & 1 \\
 & 2x_1 & +3x_2 & & +x_4 & & & = & 5 \\
 & x_1 & +2x_2 & & & -x_5 & +x_6 & = & 3 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
x_3	-3	1	1	0	0	0	1
x_4	2	3	0	1	0	0	5
x_6	1	2	0	0	-1	1	3
$-z$	1	2	0	0	-1	0	3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
x_2	-3	1	1	0	0	0	1
x_4	11	0	-3	1	0	0	2
x_6	7	0	-2	0	-1	1	1
$-z$	7	0	-2	0	-1	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
x_2	0	1	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{-3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{7}$
x_4	0	0	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{11}{7}$	$\frac{-11}{7}$	$\frac{3}{7}$
x_1	1	0	$\frac{-2}{7}$	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
$-z$	0	0	0	0	0	-1	0

Ahora comienza la FASE II, se elimina la variable artificial x_6 y se calcula el renglón z de acuerdo a la formulación del problema original.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_2	0	1	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{-3}{7}$	$\frac{10}{7}$
x_4	0	0	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{11}{7}$	$\frac{3}{7}$
x_1	1	0	$\frac{-2}{7}$	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{1}{7}$
$-z$	0	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{4}{7}$	$\frac{-11}{7}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_2	0	1	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	0	$\frac{17}{11}$
x_5	0	0	$\frac{1}{11}$	$\frac{7}{11}$	1	$\frac{3}{11}$
x_1	1	0	$\frac{-3}{11}$	$\frac{1}{11}$	0	$\frac{2}{11}$
$-z$	0	0	$\frac{1}{11}$	$\frac{-4}{11}$	0	$\frac{-19}{11}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_2	0	1	0	-1	-2	1
x_3	0	0	1	7	11	3
x_1	1	0	0	2	3	1
$-z$	0	0	0	-1	-1	-2

Solución del problema 8:

Ejemplo de restricción redundante (eliminada en la FASE I) y problema sin solución óptima (la función objetivo crece indefinidamente a lo largo de una de las aristas no acotadas del poliedro factible).

$$
\begin{array}{rrrrcl}
max & x_1 & +x_2 & +x_3 & & \\
\text{sa}: & -x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 5 \\
 & -x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\
 & -2x_1 & +3x_2 & & = & 7 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & \geq & 0
\end{array}
$$

Solución:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
x_4	-1	2	-1	1	0	0	5
x_5	-1	1	1	0	1	0	2
x_6	-2	3	0	0	0	1	7
$-z$	-4	6	0	0	0	0	14

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
x_4	1	0	-3	1	-2	0	1
x_2	-1	1	1	0	1	0	2
x_6	1	0	-3	0	-3	1	1
$-z$	2	0	-6	0	-6	0	2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
x_1	1	0	-3	1	-2	0	1
x_2	0	1	-2	1	-1	0	3
x_6	0	0	0	-1	-1	1	0
$-z$	0	0	0	-2	-2	0	0

	x_1	x_2	x_3	LD
x_1	1	0	-3	1
x_2	0	1	-2	3
$-z$	0	0	6	-4

Teniendo en cuenta que la variable x_3 verifica $c_3 - z_3 = 6 > 0$ y $y_{\bullet 3} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} \leq 0$ se tiene que la función objetivo crece indefinidamente a lo largo de la arista no acotada del poliedro factible dada por el punto extremo asociado a la tabla final y al vector de dirección $\begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} -y_{\bullet 3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$ Por tanto la arista de ilimitación es

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda \geq 0.$$

Solución del problema 9:

$$\begin{array}{lrrrcr} max & 3x_1 & +4x_2 & +x_3 & & \\ \text{sa :} & x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq & 50 \\ & 2x_1 & -x_2 & +x_3 & \geq & 15 \\ & x_1 & +x_2 & & = & 10 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & \geq & 0 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
x_4	1	1	1	1	0	0	0	50
x_6	2	-1	1	0	-1	1	0	15
x_7	1	1	0	0	0	0	1	10
$-z$	3	0	1	0	-1	0	0	25

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
x_4	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{85}{2}$
x_1	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{15}{2}$
x_7	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$
$-z$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
x_4	0	0	1	1	0	0	-1	40
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{25}{3}$
x_2	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$
$-z$	0	0	0	0	0	-1	-1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_4	0	0	1	1	0	40
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{25}{3}$
x_2	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
$-z$	0	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-95}{3}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_4	-3	0	0	1	1	15
x_3	3	0	1	0	-1	25
x_2	1	1	0	0	0	10
$-z$	-4	0	0	0	1	-65

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_5	-3	0	0	1	1	15
x_3	0	0	1	1	0	40
x_2	1	1	0	0	0	10
$-z$	-1	0	0	-1	0	-80

$$\begin{array}{rrrrrcl} max & x_1 & +2x_2 & +5x_3 & -3x_4 & & \\ \text{sa :} & x_1 & +2x_2 & +4x_3 & -x_4 & \leq & 6 \\ & 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & \leq & 4 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & \geq & 0 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
x_5	1	2	4	-1	1	0	6
x_6	2	3	-1	1	0	1	4
z	1	2	5	-3	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
x_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}$
x_6	$\frac{9}{4}$	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{11}{2}$
z	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{-7}{4}$	$\frac{-5}{4}$	0	$\frac{-15}{2}$

$$\begin{array}{rrrrrcl} max & -3x_1 & +3x_2 & +x_3 & -x_4 & & \\ sa: & -x_1 & +x_2 & +3x_3 & -3x_4 & \leq & 3 \\ & -2x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & \leq & 2 \\ & x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & \leq & 8 \\ & 4x_1 & -4x_2 & -x_3 & +x_4 & \leq & 16 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & \geq & 0 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
x_5	-1	1	3	-3	1	0	0	0	3
x_6	-2	2	-1	1	0	1	0	0	2
x_7	1	-1	1	-1	0	0	1	0	8
x_8	4	-4	-1	1	0	0	0	1	16
$-z$	-3	3	1	-1	0	0	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
x_5	0	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{-7}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	0	0	2
x_2	-1	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1
x_7	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	9
x_8	0	0	-3	3	0	2	0	1	20
$-z$	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{-5}{2}$	0	$\frac{-3}{2}$	0	0	-3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
x_3	0	0	1	-1	$\frac{2}{7}$	$\frac{-1}{7}$	0	0	$\frac{4}{7}$
x_2	-1	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	0	$\frac{9}{7}$
x_7	0	0	0	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{4}{7}$	1	0	$\frac{61}{7}$
x_8	0	0	0	0	$\frac{6}{7}$	$\frac{11}{7}$	0	1	$\frac{152}{7}$
$-z$	0	0	0	0	$\frac{-5}{7}$	$\frac{-8}{7}$	0	0	$\frac{-31}{7}$

$$\begin{array}{rrrcr}
max & x_1 & +3x_2 & & \\
sa: & x_1 & -2x_2 & \leq & 4 \\
 & -x_1 & +x_2 & \leq & 16 \\
 & x_1, & x_2, & \geq & 0
\end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
x_3	1	-2	1	0	4
x_4	-1	1	0	1	16
z	1	3	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
x_3	-1	0	1	2	36
x_2	-1	1	0	1	16
z	4	0	0	-3	-48

Solución del problema 10:

$$\begin{array}{rrrrrrrcr}
max & 0 & & & & & & & \\
sa: & -2x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & -x_5 & +x_6 & = & 1 \\
 & x_1 & -x_2 & +2x_3 & -2x_4 & & & = & 0 \\
 & 3x_1 & -3x_2 & +x_3 & -x_4 & +2x_5 & -2x_6 & = & 3 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & \geq & 0
\end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	LD
x_7	-2	2	1	-1	-1	1	1	0	0	1
x_8	1	-1	2	-2	0	0	0	1	0	0
x_9	3	-3	1	-1	2	-2	0	0	1	3
z	2	-2	4	-4	1	-1	0	0	0	4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	LD
x_7	$\frac{-5}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	-1	1	1	$\frac{-1}{2}$	0	1
x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1	-1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
x_9	$\frac{5}{2}$	$\frac{-5}{2}$	0	0	2	-2	0	$\frac{-1}{2}$	1	3
z	0	0	0	0	1	-1	0	-2	0	4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	LD
x_7	$\frac{-5}{4}$	$\frac{5}{4}$	0	0	0	0	1	$\frac{-3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1	-1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
x_5	$\frac{5}{4}$	$\frac{-5}{4}$	0	0	1	-1	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
z	$\frac{-5}{4}$	$\frac{5}{4}$	0	0	0	0	0	$\frac{-7}{4}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{5}{2}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	LD
x_2	-1	1	0	0	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{2}{5}$	2
x_3	0	0	1	-1	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1
x_5	0	0	0	0	1	-1	1	-1	1	4
z	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
x_2	-1	1	0	0	0	0	2
x_3	0	0	1	-1	0	0	1
x_5	0	0	0	0	1	-1	4
z	0	0	0	0	0	0	0