GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA DE SUPERFICIES 2016/17
RELACIÓN 3.

Ejercicio 1. Probar que si $f : X \longrightarrow S^n$ no es epiyectiva entonces es homotópica a la aplicación constante.

Ejercicio 2. Probar que todo retracto de un espacio métrico es un subespacio cerrado.

Ejercicio 3. Probar que A es retracto de X si y sólo si toda función continua de A en un espacio arbitrario Z admite una extensión continua sobre X.

Ejercicio 4. Probar que si A y B son retractos de deformación de X e Y respectivamente, entonces $A \times B$ es retracto de deformación de $X \times Y$.

Ejercicio 5. Probar que si A es retracto de deformación de X y B lo es de A, entonces B lo es de X.

Ejercicio 6. Dar un ejemplo de un espacio X y de dos subconjuntos A y B homeomorfos tales que A sea retracto de deformación de X y B no lo sea.

Ejercicio 7. Probar que S^{n-1} es retracto de deformación de $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Encontrar retractos de deformación (compactos) de los siguientes espacios.

(1) $\mathbb{R}^2 - \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$,
(2) $S^1 \times S^1 - \{*\}$ (el toro menos un punto),
(3) $\mathbb{R}^3 - OZ, \mathbb{R}^3 - S^1 \vee S^1$,
(4) la banda de Möbius y la banda de Möbius menos un punto,
(5) $\mathbb{R}^3 - (OZ \bigcup S^1)$,
(6) el complementario de un disco en el plano proyectivo y
(7) el complementario en $\mathbb{R}^3$ de dos rectas paralelas.

Ejercicio 8. Probar que si X es contráctil e Y arcoconexo, dos aplicaciones cualesquiera de X en Y son homotópicas.

Ejercicio 9. Indicar cuántos elementos tiene el conjunto de las clases de homotopía de aplicaciones continuas de $(S^1, \{1\})$ en $(X, *)$ rel. $\{1\}$, en los casos siguientes:

(1) X tiene la topología discreta.
(2) X tiene la topología indiscreta.

Ejercicio 10. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Sobre la unión disjunta $(X \times I) \sqcup Y$ se considera la relación de equivalencia generada por la relación resultante de identificar $(x, 1)$ con $f(x)$. El espacio cociente obtenido se llama *cilindro de la aplicación* f , y se denotará por M_f. Probar que Y es retracto de deformación de M_f.

Ejercicio 11. Probar que toda aplicación continua $f : Y_0 \longrightarrow Y_1$ da lugar a una aplicación $f_* : [X, Y_0] \longrightarrow [X, Y_1]$ con las siguientes propiedades :

(1) Si $f' : Y_0 \longrightarrow Y_1$ es homotópica a f, entonces $f_* = f'_*$.
(2) Para $id\ : Y \longrightarrow Y$ se tiene que id_* es la identidad.
(3) Si $g : Y_1 \longrightarrow Y_2$ es continua, entonces $(gf)_* = g_* f_*$.
(4) Si f es una equivalencia de homotopía, entonces f_* es biyectiva.

Ejercicio 12. (1) Si $f : Y_0 \longrightarrow Y_1$ es tal que f_* es biyectiva para todo X, entonces f es una equivalencia de homotopía.
(2) Si $g : X_0 \longrightarrow X_1$ es tal que g^* es biyectiva para todo Y, entonces g es una equivalencia de homotopía.

Ejercicio 13. Probar que las siguientes aplicaciones son equivalencias de homotopía :

(1) Toda aplicación continua que sea homotópica a una equivalencia de homotopía.
(2) Toda aplicación continua entre espacios contráctiles.

Ejercicio 14. Sean $f_1, g_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ y $f_2, g_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ aplicaciones continuas tales que $f_1 \sim g_1$ y $f_2 \sim g_2$. Probar que $f_1 \times f_2 \sim g_1 \times g_2$. Como consecuencia, si f_1 y f_2 son equivalencias de homotopía, también lo es $f_1 \times f_2$. Así pues, $X \times Y$ es contráctil si y sólo si X e Y lo son.

Ejercicio 15. Se dice que el par (X, A) tiene la *Propiedad de Extensión de Homotopía* (PEH) si para toda aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ en un espacio arbitrario Y y toda homotopía $F : A \times I \longrightarrow Y$ de la aplicación $f|A$, existe una homotopía $G : X \times I \longrightarrow Y$ que extiende a $F \cup f$. Probar que si A es cerrado, (X, A) tiene la PEH si y sólo si $(X \times 0) \bigcup A \times I$ es retracto de $X \times I$

Ejercicio 16. Sea $A \subseteq X$ cerrado y $*$ un punto de A considerado como punto base de X. Supongamos que (X, A) tiene la PEH y que $\{*\}$ es un retracto de deformación fuerte de A. Entonces $p : (X, *) \longrightarrow (X/A, [A])$ es una equivalencia de homotopía.

Ejercicio 17. Sea $\Pi_0(X)$ el conjunto de las componentes conexas por caminos de X. Dada una aplicación $f : X \to Y$ sea $f_* : \Pi_0(X) \to \Pi_0(Y)$ la aplicación que lleva la componente C_x en la componente $C_{f(x)}$. Probar las siguientes propiedades:
(1) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.
(2) Si f es homotópica a g entonces $f_* = g_*$.
(3) Si f es una equivalencia de homotopía entonces f_* es una biyección. Además C_x es del mismo tipo de homotopía que $C_{f(x)}$.

Ejercicio 18. Probar que un retracto de un espacio contráctil es contráctil.