Problemas de Variedades Diferenciables. Curso 2017–2018

1 Definición de Variedad Diferenciable.

Problema 1.1 En $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ se considera la relación de equivalencia:

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists \lambda \neq 0 \text{ tal que } x = \lambda y.$$

Al espacio cociente $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}/\sim$ se le denota por $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ y se le llama *Espacio Proyectivo Real n–dimensional.* Dotarlo de una estructura de variedad diferenciable.

Problema 1.2 Sea $\mathbf{S}^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}/x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ la esfera unidad de $\mathbf{R}^{n+1}$.

1. Probar que las proyecciones estereográficas desde los puntos de $\mathbf{S}^n$ a $\mathbf{R}^n$ dotan a $\mathbf{S}^n$ de una estructura de variedad diferenciable de dimensión n. ¿Cuál es el número mínimo de proyecciones necesario para obtener un atlas? Construir uno concreto.

2. Sean $U_i^+ = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{S}^n/x_i > 0\}$ y $U_i^- = \{(x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbf{S}^n/x_i < 0\}$ los hemisferios de $\mathbf{S}^n$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ y sea la bola unidad de $\mathbf{R}^n$, $B^n = \{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbf{R}^n/u_1^2 + \cdots + u_n^2 < 1\}$. Para cada $i = 1, \ldots, n+1$ se consideran las aplicaciones $\varphi_i : U_i^+ \longrightarrow B^n$ y $\psi_i : U_i^- \longrightarrow B^n$ dadas por

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}),$$

$$\psi_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})$$

   (proyecciones ortogonales de los hemisferios sobre la bola). Probar que $\mathcal{A} = \{(U_i^+, \varphi_i), (U_i^-, \psi_i)\}_{i=1,\ldots,n+1}$ es un atlas de dimensión n en $\mathbf{S}^n$ que la dota de una estructura diferenciable que es la misma que la del apartado anterior.

3. Si $n = 1$, probar que la estructura diferenciable de $\mathbf{S}^1$ (circunferencia unidad) como curva regular es la misma que la de los apartados anteriores.

Problema 1.3 Sea

$$E = \{(\operatorname{sen} 2s, \operatorname{sen} s) \in \mathbf{R}^2/s \in \mathbf{R}\}$$

el lazo o figura ocho. Dotar a E de dos estructuras de variedad diferenciable distintas.

Problema 1.4 Dotar al Grupo General Lineal $Gl(n, \mathbf{R})$ (conjunto de las matrices reales cuadradas de dimensión n y determinante no nulo) de una estructura de variedad diferenciable.

Problema 1.5 Resolver los siguientes apartados:

1. Justificar si puede dotarse o no de estructura de variedad diferenciable al siguiente subconjunto de $\mathbf{R}^2$, dotado de la topología euclídea:

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / xy = 0\}.$$

2. Sean $U = \{(s, 0) \in \mathbf{R}^2 / s < 0\}$, $V = \{(s, 0) \in \mathbf{R}^2 / s > 0\}$, $W = \{(0, s) \in \mathbf{R}^2 / s \in \mathbf{R}\}$ y:

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}^- : (s, 0) \mapsto s;$$
$$\psi : V \longrightarrow \mathbf{R}^+ : (s, 0) \mapsto s;$$
$$\xi : W \longrightarrow \mathbf{R} : (0, s) \mapsto s.$$

Dotar a M de una estructura de variedad diferenciable tal que

$$\mathcal{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi), (W, \xi)\}$$

sea un atlas para dicha estructura.

Problema 1.6 Sea $S = (0, 1) \times (0, 1)$. Para cada $s \in (0, 1)$, se considera

$$V_s = \{s\} \times (0, 1)$$

y

$$\phi_s : V_s \longrightarrow (0, 1) : (s, t) \longmapsto t.$$

¿Se puede dar a S una topología que la convierta en una variedad diferenciable de dimensión 1, donde (V_s, ϕ_s) sean cartas locales, $\forall s \in (0, 1)$?

Problema 1.7 Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea $p \in M$. Probar que existe una carta local (U, φ), admisible en la estructura diferenciable, tal que $p \in U$ y $\varphi(U) = \mathbf{R}^n$.

Problema 1.8 Probar que una variedad diferenciable es conexa si y sólo si es conexa por caminos.

Problema 1.9 Sea $\alpha : (a, b) \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3 : u \mapsto (f(u), 0, g(u))$ una curva simple, diferenciable, regular, contenida en el plano OXZ y que no corta al eje OZ. Sea S el conjunto de puntos de $\mathbf{R}^3$ obtenido al girar la curva α alrededor del eje OZ. Probar que, dado cualquier intervalo abierto $(c, d) \subset \mathbf{R}$ de longitud 2π, la aplicación

$$\vec{x} : (a, b) \times (c, d) \longrightarrow S : (u, v) \mapsto (f(u) \cos v, f(u) \operatorname{sen} v, g(u))$$

define una carta local en S, de la que debe darse explícitamente su dominio de definición. Además, probar que dos cualesquiera de tales cartas están relacionadas, con lo que el atlas maximal definido por ellas proporciona una estructura de variedad diferenciable sobre S. ¿De qué dimensión es esta estructura?

2 Aplicaciones Diferenciables.

Problema 2.1 Utilizando el correspondiente teorema para una función de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}$, deducir el Teorema del Valor Medio en variedades para una función $f \in \mathcal{F}(p)$.

Problema 2.2 Sean M una variedad diferenciable y (U, φ) una carta local de M. Probar que φ y φ^{-1} son aplicaciones diferenciables y, por tanto, difeomorfismos.

Problema 2.3 Sea $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : x \mapsto x^3$. Probar que:

1. h dota a $\mathbf{R}$ de estructura de variedad diferenciable de dimensión 1, distinta de la estructura estándar.
2. $\mathrm{id} : (\mathbf{R}, \mathrm{id}) \longrightarrow (\mathbf{R}, h)$ es diferenciable, pero que $\mathrm{id} : (\mathbf{R}, h) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathrm{id})$ no lo es.
3. $h : (\mathbf{R}, h) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathrm{id})$ es un difeomorfismo. Sin embargo, $h : (\mathbf{R}, \mathrm{id}) \longrightarrow (\mathbf{R}, h)$ no lo es.

Problema 2.4 Sea M un espacio topológico T_2 y $2^o N$ y sean $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ dos atlas sobre M tales que la familia de funciones diferenciables sea la misma para ambas estructuras. Probar que los dos atlas son equivalentes.

Problema 2.5 Sea N una variedad diferenciable y $f : M \longrightarrow N$ una biyección. Probar que se puede dotar a M de una única estructura de variedad diferenciable que convierte a f en un difeomorfismo. ¿De qué dimensión?

Problema 2.6 Sean M, N dos variedades. Probar que las proyecciones de $M \times N$ son aplicaciones diferenciables.

Problema 2.7 Sean M_1, M_2, N_1 y N_2 cuatro variedades diferenciables y sean $f_i \in \mathcal{F}(M_i, N_i)$, $i = 1, 2$. Probar que la aplicación

$$f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \longrightarrow N_1 \times N_2 : (x, y) \mapsto (f_1(x), f_2(y))$$

es diferenciable.

Problema 2.8 Sea M una variedad diferenciable. Probar que la aplicación

$$\Delta : M \longrightarrow M \times M : x \mapsto (x, x)$$

es diferenciable.

Problema 2.9 Sean N, M_1 y M_2 tres variedades diferenciables.

1. Probar que $f \in \mathcal{F}(N, M_1 \times M_2)$ si y sólo si $\pi_i \circ f \in \mathcal{F}(N, M_i)$, $i = 1, 2$.

2. Sean $f_i \in \mathcal{F}(N, M_i)$, $i = 1, 2$. Probar que

$$(f_1, f_2) : N \longrightarrow M_1 \times M_2 : x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$$

es diferenciable.

3. Probar que existe una correspondencia biyectiva entre $\mathcal{F}(N, M_1 \times M_2)$ y $\mathcal{F}(N, M_1) \times \mathcal{F}(N, M_2)$.

4. Sea $\Phi \in \mathcal{F}(M_1 \times M_2, N)$. Dado $a \in M_1$, se define $\Phi_a : M_2 \longrightarrow N$ por $\Phi_a(x) = \Phi(a, x)$. Probar que Φ_a es diferenciable.

Problema 2.10 Sea G un grupo. Se dice que G es un *Grupo de Lie* si es una variedad diferenciable y las aplicaciones

$$\mu : G \times G \longrightarrow G : (x, y) \mapsto xy; \;\; \lambda : G \longrightarrow G : x \mapsto x^{-1}$$

son diferenciables. Probar:

1. Una variedad difrenciable G que sea un grupo es un Grupo de Lie si y sólo si la aplicación

$$\nu : G \times G \longrightarrow G : (x, y) \mapsto xy^{-1}$$

es diferenciable.

2. Si G es un Grupo de Lie, entonces, para todo $g \in G$, las aplicaciones

$$L_g : G \longrightarrow G : h \mapsto gh$$

son difeomorfismos.

3 Espacios Tangentes. Diferencial de Aplicaciones.

Problema 3.1 Dada una v.d. M y un punto $p \in M$, se define un subconjunto $\mathcal{H}(p)$ de $\mathcal{F}(p)$ de modo que una función $f \in \mathcal{F}(p)$ está en $\mathcal{H}(p)$ si en algún entorno de p, $f = c + \sum_i f_i g_i$, donde c es una función constante y el segundo término es una suma finita de producto de funciones $f_i, g_i \in \mathcal{F}(p)$, tales que $f_i(p) = g_i(p) = 0$. Probar que un operador lineal $\Lambda : \mathcal{F}(p) \longrightarrow \mathbf{R}$ es un vector tangente en p si y sólo si es cero en $\mathcal{H}(p)$.

Problema 3.2 Sean M una variedad diferenciable, p un punto de M, $f \in \mathcal{F}(M)$ y sea $f(p) = t \in \mathbf{R}$.

1. Establecer un isomorfismo entre $T_t(\mathbf{R})$ y $\mathbf{R}$.
2. Identificando $v \in T_t(\mathbf{R})$ con el número real correspondiente según el apartado anterior, probar que las aplicaciones $f_{*p} : T_p(M) \longrightarrow T_t(\mathbf{R})$ y $(df)_p : T_p(M) \longrightarrow \mathbf{R}$ pueden identificarse.

Problema 3.3 Sea E el *ocho* con la estructura diferenciable dada por

$$\varphi : E \longrightarrow (0, 2\pi) : (\operatorname{sen} 2s, \operatorname{sen} s) \longmapsto s, \ 0 < s < 2\pi$$

y E' el *ocho* con la otra estructura diferenciable dada por:

$$\psi : E' \longrightarrow (-\pi, \pi) : (\operatorname{sen} 2s, \operatorname{sen} s) \longmapsto s, \ -\pi < s < \pi.$$

Denotemos por j y j' a las inclusiones de E y E', respectivamente, en R^2. Calcular el espacio tangente a $j(E)$ y $j'(E')$ en $(0, 0)$.

Problema 3.4 Probar que el ocho con cualquiera de las dos estructuras conocidas es una subvariedad de $\mathbf{R}^2$. ¿Es subvariedad regular?

Problema 3.5 Sean α y β dos curvas regulares en una variedad diferenciable M que son tangentes en un punto $p \in M$. Probar que si $\phi : M \longrightarrow N$ es un difeomorfismo, entonces $\phi \circ \alpha$ y $\phi \circ \beta$ son curvas regulares en N que son tangentes en $\phi(p)$.

Problema 3.6 Probar que la proyección canónica $\pi : \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$, dada por $\pi(z) = [z]$, es una sumersión.

Problema 3.7 Sea M una variedad diferenciable, con $\dim(M) \geq 2$. Una aplicación continua $f : U \longrightarrow M$, $U \subseteq \mathbf{R}^2$ abierto, se dice que es una *superficie* en M si es diferenciable y se dice que es una *superficie simple* en M si, además, es inyectiva y $\dim f_{*p} T_p(U) = 2$, $\forall p \in U$.

1. Probar que una aplicación continua $f : U \longrightarrow M$, $U \subseteq \mathbf{R}^2$ abierto, es una superficie si y sólo si $\forall (V, \varphi)$ carta en M, con $f^{-1}(V) \neq \emptyset$, se cumple que $\varphi \circ f|_{f^{-1}(V)}$ es diferenciable.

2. Probar que toda superficie simple de $\mathbf{R}^3$ (en el sentido clásico) es una superficie simple de $\mathbf{R}^3$ (en el sentido ahora definido).

3. Sea $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ una aplicación lineal, inyectiva y diferenciable y considérese $g : \mathbf{R}^2 - \{0\} \longrightarrow \mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ definida por $g(x, y) = [f(x, y)]$.

   (i) Probar que f es una superficie simple.

   (ii) Probar que g está bien definida y que es una superficie. ¿Es simple?

Problema 3.8 En todo este problema, $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}^2$ se consideran variedades diferenciables dotadas con la estructura euclídea habitual. Sea $M = (\mathbf{R} \times \{0\}) \cup (\mathbf{R} \times \{1\}) \subseteq \mathbf{R}^2$, dotado de la topología euclídea relativa de la de $\mathbf{R}^2$.

1. Se definen las aplicaciones $f : \mathbf{R} \times \{0\} \longrightarrow \mathbf{R} : (s, 0) \mapsto s$ y $g : \mathbf{R} \times \{1\} \longrightarrow \mathbf{R} : (s, 1) \mapsto s$. Probar que $(\mathbf{R} \times \{0\}, f)$ y $(\mathbf{R} \times \{1\}, g)$ son cartas locales de dimensión 1 sobre M y concluir que dotan a M de una estructura de variedad diferenciable de dimensión 1.

2. Se consideran las aplicaciones
$$\phi : \mathbf{R} \longrightarrow M : s \mapsto \phi(s) = \begin{cases} (s, 1) & \text{si} \quad s \neq 0; \\ (0, 0) & \text{si} \quad s = 0, \end{cases}$$
   y
$$\psi : M \longrightarrow \mathbf{R} : (s, i) \mapsto \psi((s, i)) = s, \ i = 0, 1.$$
   Probar que ψ y $\psi \circ \phi$ son diferenciables, pero que ϕ no lo es.

3. Probar que ψ es una inmersión. ¿Es (M, ψ) una subvariedad de $\mathbf{R}$?

4. Sea $i : M \hookrightarrow \mathbf{R}^2$ la inclusión. Probar que (M, i) es una subvariedad de $\mathbf{R}^2$. ¿Es una subvariedad regular?

Problema 3.9 En todo este problema, $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}^2$ se considerán variedades diferenciables dotadas con la estructura euclídea habitual. Sea $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, y) \in \mathbf{R}^2 / 1 < y < 2\}$. Sean las aplicaciones:
$$\varphi : M \longrightarrow \mathbf{R} : \begin{cases} \varphi(0, y) = 1 - y & \text{si} \quad 1 < y < 2, \\ \varphi(\text{sen} 2\pi s, \cos 2\pi s) = s & \text{si} \quad 0 \leq s < 1 \end{cases} ;$$
$$\psi : M \longrightarrow \mathbf{R} : \begin{cases} \psi(0, y) = 1 - y & \text{si} \quad 1 < y < 2, \\ \psi(\text{sen} 2\pi s, \cos 2\pi s) = 1 - s & \text{si} \quad 0 < s \leq 1 \end{cases} .$$

1. Probar que (M, φ) y (M, ψ) son cartas locales de dimensión 1 en M que no están relacionadas y concluir que definen dos estructuras de variedad diferenciable de dimensión 1 en M distintas.

2. ¿Es (M, i), siendo $i : M \hookrightarrow \mathbf{R}^2$ la inclusión, con alguna de las estructuras anteriores, subvariedad de $\mathbf{R}^2$?

3. Probar que (M, φ) es una subvariedad de $\mathbf{R}$. ¿Es subvariedad regular?

Problema 3.10 Sean M una variedad diferenciable y $\alpha : (a,b) \longrightarrow M$ una curva regular inyectiva. Probar que $((a,b),\alpha)$ y $(\alpha(a,b),i)$, siendo $i : \alpha(a,b) \hookrightarrow M$ la inclusión, son subvariedades de dimensión 1 de M difeomorfas.

Problema 3.11 1. Probar que toda superficie regular es una subvariedad regular de $\mathbf{R}^3$.

2. Probar que la hélice circular es una subvariedad regular del cilindro circular.

Problema 3.12 (a) Sean M una variedad diferenciable y $f : M \longrightarrow M$ una aplicación diferenciable. Sea (P,i) una subvariedad regular de M. Si P es invariante por f, probar que $f|_P : P \longrightarrow P$ es diferenciable.

(b) Probar que

$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 : (x,y,z) \mapsto (xcos\alpha(z) - ysen\alpha(z), xsen\alpha(z) + ycos\alpha(z), z)$$

es un difeomorfismo de la esfera S^2 en sí misma, cualquiera que sea la función diferenciable $\alpha(z)$.

Problema 3.13 Dada la aplicación

$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (ax, by, cz),$$

con $a,b,c \in \mathbf{R}$ y no nulos, probar que $f|_{S^2} : S^2 \longrightarrow E$ es un difeomorfismo, donde E es el elipsoide $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$.

Problema 3.14 Sea $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ la aplicación $f(x,y,z,t) = (xz - yt, xt + yz)$. Sea $M = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \subseteq \mathbf{R}^4$. Probar que $f|_M : M \longrightarrow \mathbf{S}^1$ es diferenciable.

Problema 3.15 Probar que una aplicación $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ diferenciable no puede ser inyectiva.

Problema 3.16 Demostrar que el hiperboloide, $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, $(a > 0)$, es una subvariedad regular de $\mathbf{R}^3$. ¿Qué ocurre si $a = 0$?

Problema 3.17 Demostrar que el conjunto de puntos de $\mathbf{R}^3$ que satisface $x^3 + y^3 + z^3 = 2xyz + 1$ puede dotarse de una estructura de variedad para la que es subvariedad de $\mathbf{R}^3$.

Problema 3.18 Probar que el conjunto $M = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 / x^2 - y^2 + 2xz - 2yz + 1 = 0; 2x - y + z = 0\}$ admite una estructura de variedad diferenciable de dimensión 1.

Problema 3.19 Sean M y N variedades y $f \in \mathcal{F}(M,N)$. Sea $q \in N$ tal que $P = f^{-1}(\{q\}) \neq \emptyset$ y que f_{*p} es sobreyectiva, $\forall p \in P$. Probar que si $i : P \longrightarrow M$ es la inclusión, $\ker f_{*p} = i_{*p}(T_p(P))$, $\forall p \in P$.

Problema 3.20 En $\mathbf{R}^3$ con coordenadas (x, y, z), se considera el vector tangente:

$$X_p = (x^2 - 1)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + xy\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + xz\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \in T_p(\mathbf{R}^3),\ p \in \mathbf{R}^3.$$

Demostrar que $X_p \in T_p(S^2),\ \forall p \in S^2$.

Problema 3.21 Sean $M(n, \mathbf{R})$ el conjunto de la matrices reales cuadradas de orden n, $Gl(n, \mathbf{R}) \subseteq M(n, \mathbf{R})$ el conjunto de las matrices cuadradas de orden n y determinante no nulo, $S(n, \mathbf{R})$ el conjunto de las matrices simétricas de orden n, $Sl(n, \mathbf{R})$ el conjunto de las matrices simétricas de orden n y determinante no nulo y $O(n, \mathbf{R}) \subseteq Gl(n, \mathbf{R})$ el conjunto de las matrices ortogonales de orden n.

1. Dotar a $M(n, \mathbf{R})$ de una estructura de variedad diferenciable de dimensión n^2.
2. Probar que $Gl(n, \mathbf{R})$ es una subvariedad abierta de $M(n, \mathbf{R})$.
3. Probar que $S(n, \mathbf{R})$ es una subvariedad regular de $M(n, \mathbf{R})$, de dimensión $\frac{1}{2}n(n+1)$.
4. Probar que $Sl(n, \mathbf{R})$ es una subvariedad regular de $Gl(n, \mathbf{R})$, de dimensión $\frac{1}{2}n(n+1)$.
5. Probar que $O(n, \mathbf{R})$ es una subvariedad regular de $Gl(n, \mathbf{R})$, de dimensión $\frac{1}{2}n(n-1)$.

4 Campos de Vectores.

Problema 4.1 Sea S^2 con las cartas $(U, \varphi = (x_1, x_2))$ y $(V, \psi = (y_1, y_2))$, correspondientes a la proyección estereográfica. Sea X el campo vectorial en S^2 dado por:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} \quad &\text{en} \quad U, \\ (-y_1 - y_2)\frac{\partial}{\partial y_1} + (y_1 - y_2)\frac{\partial}{\partial y_2} \quad &\text{en} \quad V. \end{aligned}$$

Probar que, efectivamente, es un campo diferenciable en toda la variedad.

Problema 4.2 En el plano proyectivo, sean (U_i, φ_i), $(i = 1, 2, 3)$ las cartas locales del atlas. Probar que el campo X definido por

$$\begin{aligned} x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial}{\partial x_2} \quad &\text{en} \quad U_1, \\ -y_1\frac{\partial}{\partial y_1} - 2y_2\frac{\partial}{\partial y_2} \quad &\text{en} \quad U_2, \\ z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + 2z_2\frac{\partial}{\partial z_2} \quad &\text{en} \quad U_3, \end{aligned}$$

es, efectivamente, un campo diferenciable en toda la variedad.

Problema 4.3 Sea $\mathbf{R}^2$. Se consideran los campos:

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Calcular $[X, Y]$.

Problema 4.4 Sea $M = \mathbf{R}^3$. Se consideran los campos:

$$\begin{aligned} e_1 &= (2 + y^2)e^z\frac{\partial}{\partial x} \\ e_2 &= 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (2 + y^2)\frac{\partial}{\partial y} \\ e_3 &= -2xy^2\frac{\partial}{\partial x} - y(2 + y^2)\frac{\partial}{\partial y} + (2 + y^2)\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

1. Probar que $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base del $\mathcal{F}(M)$–módulo de campos diferenciables sobre M.
2. Expresar $[e_i, e_j]$ en función de los e_k.
3. Verificar la identidad de Jacobi.

Problema 4.5 Sean M una variedad diferenciable y $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$. Si en un punto $p \in M$, $X_p = Y_p$ y $Z|_U = W|_U$, donde U es un entorno abierto de p, ¿es $[X, Z]_p = [Y, W]_p$? Razonar la respuesta.

Problema 4.6 Sean $\mathbf{R}^3$, $X \in \mathcal{X}(\mathbf{R}^3)$ dado por $X = x\frac{\partial}{\partial x} + e^z \frac{\partial}{\partial y}$ y sea $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (x + y, y, 7)$. ¿Está X f–relacionado con X?

Problema 4.7 Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable. Probar:

1. Si f es sobreyectiva, entonces, $\forall X \in \mathcal{X}(M)$ fijo, existe a lo más un campo de vectores $Y \in \mathcal{X}(N)$ tal que X está f–relacionado con Y.
2. Si f es una inmersión, entonces, $\forall Y \in \mathcal{X}(N)$, existe a lo más un campo de vectores $X \in \mathcal{X}(M)$ tal que X está f–relacionado con Y.
3. Si f es una inmersión, entonces, dado $Y \in \mathcal{X}(N)$, existe $X \in \mathcal{X}(M)$, f–relacionado con Y si y sólo si $\forall p \in M$, $Y_{f(p)} \in f_{*p}(T_p(M))$.

Problema 4.8 Se considera la variedad diferenciable $\mathbf{R}^3$. Sea $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}^3$ un punto fijo y sea $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 : p \mapsto p + p_0$.

1. Hallar los campos $Y \in \mathcal{X}(\mathbf{R}^3)$ invariantes por g, es decir, tales que $g_* Y = Y$.
2. Sea $Y = 7\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial z} \in \mathcal{X}(\mathbf{R}^3)$. Probar que Y es invariante por g. ¿Cuál es el cardinal del conjunto de campos diferenciables $Z \in \mathcal{X}(\mathbf{R}^3)$ tales que $Y \overset{g}{\sim} Z$?

Problema 4.9 Sea M una variedad diferenciable. Una *Conexión Afín* en M es una aplicación $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$, cumpliendo:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;
2. $\nabla_X(fY + gZ) = (Xf)Y + (Xg)Z + f\nabla_X Y + g\nabla_X Z$,

$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $\forall f, g \in \mathcal{F}(M)$, donde se está denotando $\nabla(X, Y) \equiv \nabla_X Y$.
Sea $f : M \longrightarrow N$ un difeomorfismo de variedades diferenciables. Se pide:

(a) Probar que $f_*(gX) = (g \circ f^{-1}) f_* X$.

(b) Si $\bar{\nabla}$ es una conexión afín en N, probar que

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M),$$

definida por

$$(\nabla_X Y)(p) = f_{*p}^{-1}(\bar{\nabla}_{f_* X} f_* Y)(f(p)),$$

para todo punto $p \in M$, es una conexión afín en M.

5 Campos de Tensores.

Problema 5.1 En $\mathbf{R}^3$ se consideran los campos de vectores diferenciables

$$X = xe^z \frac{\partial}{\partial x} + (1+xyz)\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}, \; Y = 2z\frac{\partial}{\partial x} + \cos y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

y los campos de tensores covariantes diferenciables:

$$T = x^2 \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}z + e^x \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}x + y\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}z + x\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z,$$

$$S = x^3 y \mathrm{d}x + \cos z \mathrm{d}y + y\mathrm{d}z.$$

1. Calcular $T \otimes S$, $S(X)$, $T(X,Y)$ y $(T \otimes S)(X,Y,X)$.
2. Calcular $\omega = Alt(T)$ y $\theta = Alt(S)$.
3. Calcular $\omega \wedge \theta$, $\theta(X)$, $\omega(X,Y)$ y $(\omega \wedge \theta)(X,Y,X)$.

Problema 5.2 Sea M una variedad diferenciable. Una *Derivación* (respectivamente, una *Anti–derivación*) en M es un operador $\mathbf{R}$–lineal, $D : \Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(M)$ tal que, si $\omega, \theta \in \Lambda(M)$:

$$D(\omega \wedge \theta) = D\omega \wedge \theta + \omega \wedge D\theta$$

(respectivamente,

$$D(\omega \wedge \theta) = D\omega \wedge \theta + (-1)^{\mathrm{grado}(\omega)} \omega \wedge D\theta).$$

1. Probar que si D es una derivación y $\omega^1, \ldots, \omega^r \in \Lambda_1(M)$, entonces:
$$D(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^r) = \sum_{k=1}^{r} \omega^1 \wedge \cdots D\omega^k \wedge \cdots \omega^r.$$
2. Probar que si D es una anti–derivación y $\omega^1, \ldots, \omega^r \in \Lambda_1(M)$, entonces:
$$D(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^r) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \omega^1 \wedge \cdots D\omega^k \wedge \cdots \omega^r.$$
3. Si D_1 y D_2 son derivaciones, ¿es $[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$ una derivación?
4. Si D_1 y D_2 son anti–derivaciones, ¿es $[D_1, D_2]$ una derivación? ¿Es una anti–derivación?
5. Si D_1 y D_2 son anti–derivaciones, ¿bajo qué condiciones es $D_1 D_2 + D_2 D_1$ una derivación?
6. Si D es una anti–derivación, ¿bajo qué condiciones es D^2 una derivación? ¿Bajo qué condiciones es también una anti–derivación?

Problema 5.3 Sea M una variedad diferenciable y $\alpha \in \Lambda_r(M)$, $r \leq \dim(M)$.

1. Probar que si r es impar, entonces $\alpha \wedge \alpha = 0$.
2. Probar que si $\alpha = \beta \wedge \gamma$, siendo γ de orden impar, entonces $\alpha \wedge \alpha = 0$.
3. Determinar una forma diferencial en $\mathbf{R}^4$ tal que su cuadrado sea no nulo.
4. Sea $\gamma \in \Lambda_1(M)$. Calcular $\Lambda^k(\alpha + \beta \wedge \gamma)$, donde $\Lambda^k\omega$ denota el producto exterior de ω por sí misma k veces.

Problema 5.4 Sea M una variedad diferenciable de dimensión m y sea la familia de 1–formas independientes en $M\{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$. Si $\{\theta_1, \ldots, \theta_r\}$ es otra familia de 1–formas tales que

$$\sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \theta_i = 0,$$

probar que existe una colección de funciones $f_{ij} \in \mathcal{F}(M)$, $1 \leq i, j \leq r$, tales que $f_{ij} = f_{ji}$, para todos i, j y que, para todo $i = 1, \ldots, r$:

$$\theta_i = \sum_{j=1}^{r} f_{ij}\omega_j.$$

Problema 5.5 Una *Métrica Riemanniana* en una variedad diferenciable es un campo de tensores $g \in T_2(M)$ simétrico y definido positivo. Sean M y N dos variedades diferenciables, $f \in \mathcal{F}(M, N)$ una inmersión y g una métrica Riemanniana en N. Probar que f^*g es una métrica Riemanniana en M.

Problema 5.6 Sea $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ la aplicación $f(x, y, z) = (x^2, yz)$. Se consideran las formas $\omega = v^2 \mathrm{d}u + \mathrm{d}v$ y $\theta = uv\mathrm{d}u + \mathrm{d}v$. Calcular $\omega \wedge \theta$, $f^*\omega$, $f^*\theta$ y $f^*(\omega \wedge \theta)$.

Problema 5.7 Sea $\omega = y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z \in \Lambda_1(\mathbf{R}^3)$ y sea la aplicación $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ por:

$$f(u, v) = (\operatorname{sen} u \cos v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u).$$

Calcular $f^*\omega$.

Problema 5.8 Sean M y N dos variedades diferenciables, $f \in \mathcal{F}(M, N)$, $g \in \mathcal{F}(M)$, $h \in \mathcal{F}(N)$ y $\omega \in \Lambda_r(N)$. Probar que $f^*(g(p)\omega) = g(p)f^*\omega$ y que $f^*(h\omega) = (h \circ f)f^*\omega$. ¿Hay alguna contradicción entre estos hechos? ¿Qué consecuencia se puede sacar de ellos?