8.2. Esquemas de ramificación y acotación

En esta sección se muestra un algoritmo para hallar la solución óptima de un problema de programación entera

$$\begin{array}{llll} \text{(PE)} & z_{\text{PE}} = & \text{máx} & c'x \\ & & s.a: & Ax = b \\ & & & x \in \mathbb{Z}_+^n. \end{array}$$

El algoritmo se basa en la proposición siguiente.

Proposición 8.2.1 *Consideremos el problema* $z = \text{máx}\{c'x : x \in X\}$, *con* $c \in \mathbb{R}^n$ *y* $X \subset \mathbb{R}^n$. *Sea* $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_K$ *una descomposición de* X *en conjuntos más pequeños y sea* $z^k = \text{máx}\{c'x : x \in X_k\}$ *para* $k = 1, \ldots, K$. *Entonces* $z = \underset{k=1,\ldots,K}{\text{máx}} z^k$.

Algoritmo de ramificación y acotación (Branch and Bound-B&B)

Paso 1: Obtener el valor óptimo z^*_{LP} y la solución óptima x^*_{LP} del problema relajado lineal (LP) asociado al problema de programación entera. Establecer $(P_0) = \text{(LP)}$, la solución $x^* = x^*_{\text{LP}}$ y el valor $z^* = z^*_{\text{LP}}$ como elementos del nodo raíz n_0. Tomar $z_{\text{LB}} = -\infty$ (en el árbol completo) y $z_{\text{UB}} = \lfloor z^* \rfloor$ (en el árbol completo).

Paso 2: 2.1) Si $x^* \in \mathbb{Z}_+^n$: STOP. La solución óptima del problema de programación entera es x^*.

2.2) Si $x^* \notin \mathbb{Z}_+^n$: Entonces existe al menos una componente x_i^* de x^* tal que $x_i^* \notin \mathbb{Z}_+$. Establecer dos ramas que conecten el nodo n_0, por un lado, con el nodo n_1 constituido por el problema (P_1) resultante de añadir al problema (P_0) la restricción $x_i \le \lfloor x_i^* \rfloor$, la solución óptima $(x^1)^*$ de (P_1) y el valor óptimo z_1^* de (P_1), y por otro lado, con el nodo n_2 constituido por el problema (P_2) resultante de añadir al problema (P) la restricción $x_i \ge \lceil x_i^* \rceil$, la solución óptima $(x^2)^*$ de (P_2) y el valor óptimo z_2^* de (P_2).

- Si (P_i), $i = 1$ ó 2, es infactible podamos la rama que conecta n_0 con n_i.
- Si $z_i^* < z_{\text{LB}}$, $i = 1$ ó 2, podamos la rama que conecta n_0 con n_i.
- Si $(x^i)^* \notin \mathbb{Z}_+^n$, $i = 1$ ó 2, tomar $z_{\text{LB}} = \lfloor z_i^* \rfloor$ (en el subárbol que se va a generar) y repetir el Paso 2.2 tomando n_i como n_0.
- Si $(x^i)^* \in \mathbb{Z}_+^n$, $i = 1$ ó 2, establecemos n_i como nodo hoja. Si $z_i^* = z_{\text{UB}}$ entonces $(x^i)^*$ es la solución óptima del problema de programación entera. En caso contrario y si $z_i^* > z_{\text{LB}}$ (en el árbol completo) establecer $z_{\text{LB}} = z_i^*$.

Convergencia: El algoritmo termina en un número finito de pasos. Si todos los nodos hojas ofrecen soluciones no enteras entonces el problema es infactible. En otro caso, o bien la solución óptima se ha encontrado en el desarrollo del algoritmo o, de lo contrario, la solución (o soluciones) óptima es la correspondiente al nodo tal que $z^* = z_{\text{LB}}$.

Ejemplo 8.2.2 Consideremos el problema

$$\begin{array}{llrrl} (P) & \text{máx} & 4x_1 & -x_2 & \\ & sa: & 7x_1 & -2x_2 & \leq 14 \\ & & & x_2 & \leq 3 \\ & & 2x_1 & -2x_2 & \leq 3 \\ & & x_1, & x_2 & \in \mathbb{Z}_+. \end{array}$$

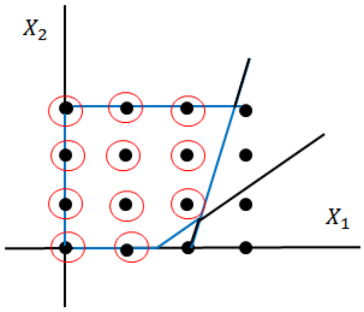


Figura 8.2: Región factible de (P)

Al aplicar el algoritmo de ramificación y acotación al problema (P) se obtiene el árbol:

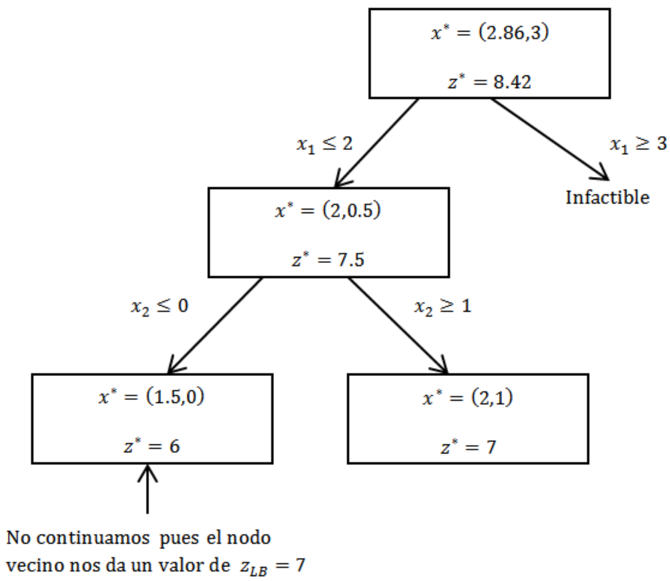


Figura 8.3: Aplicación del algoritmo B&B a (P)

luego la solución óptima de (P) es $x_1 = 2$ y $x_2 = 7$.

Ejemplo 8.2.3 Consideremos el problema

$$\begin{aligned} &\text{máx } 13x_1 + 8x_2 \\ &\text{s.a: } x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ &\quad 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ &\quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned}$$

Lo resolveremos mediante ramificación y acotación. Esto da lugar al siguiente árbol de subproblemas.

8.3. Algoritmos de planos de corte

Consideremos el problema:

$$\begin{array}{llrrl} (P) & \text{máx} & 7x_1 & +9x_2 & \\ & s.a: & -x_1 & +3x_2 & \leq 6 \\ & & 7x_1 & +x_2 & \leq 35 \\ & & x_1, & x_2 & \in \mathbb{Z}_+. \end{array}$$

La solución óptima del problema relajado lineal asociado a (P) es:

$$x^* = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

la cual claramente no es la solución del problema entero (P). Obsérvese que al añadir la restricción $7x_1 + 9x_2 \leq 55$ a (P) la región factible del mismo permanece inalterada, además se consigue sacar a x^* de la región factible del problema relajado lineal y se consigue un nuevo vértice entero en dicho problema ($x' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}$).

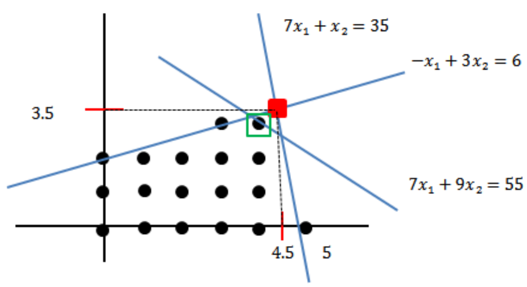
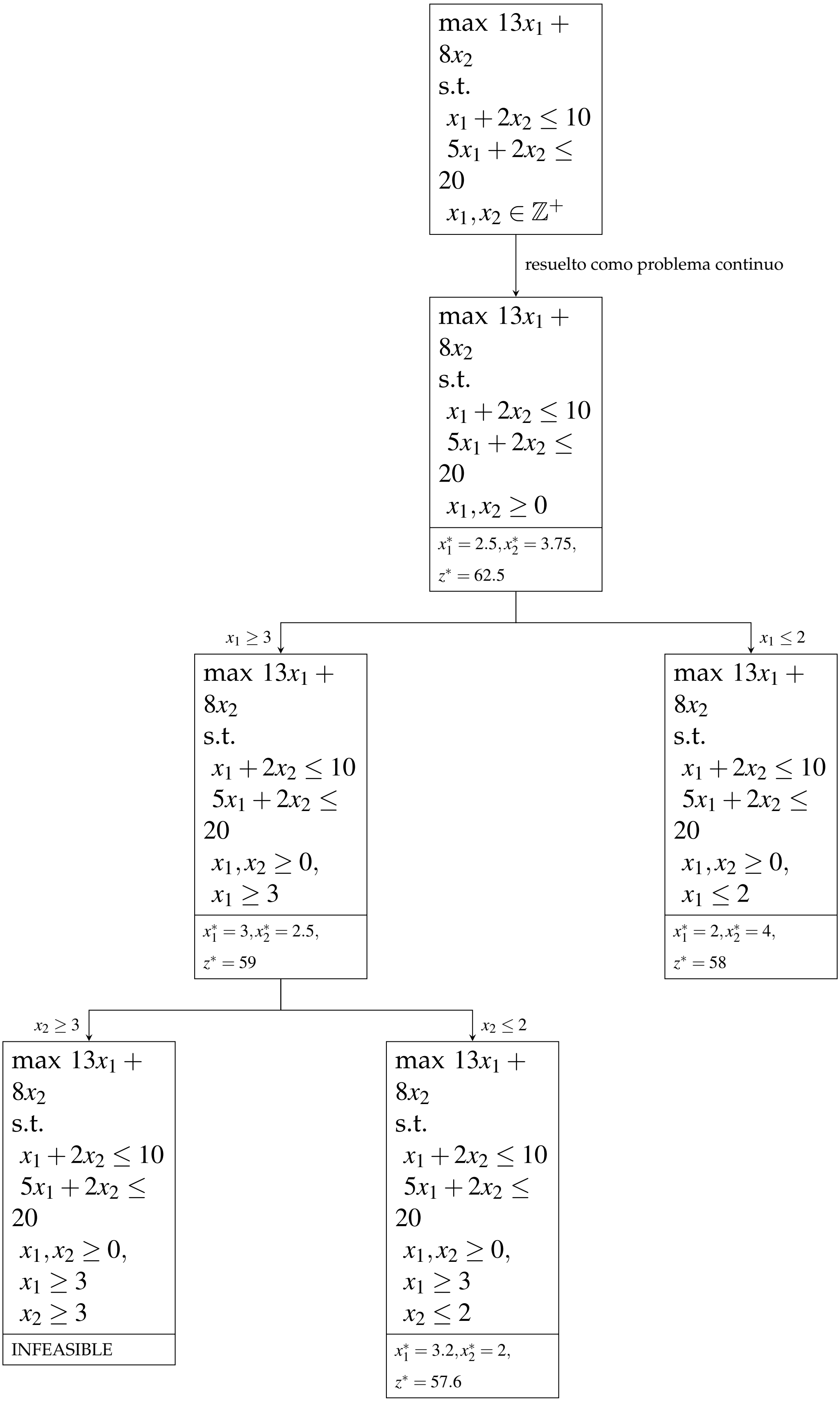


Figura 8.4: Región factible de (LP) al añadir a (P) la nueva restricción


max $13x_1 + 8x_2$
s.t.
$x_1 + 2x_2 \leq 10$
$5x_1 + 2x_2 \leq 20$
$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$
resuelto como problema continuo
max $13x_1 + 8x_2$
s.t.
$x_1 + 2x_2 \leq 10$
$5x_1 + 2x_2 \leq 20$
$x_1, x_2 \geq 0$
$x_1^* = 2.5, x_2^* = 3.75,$
$z^* = 62.5$
$x_1 \geq 3$
max $13x_1 + 8x_2$
s.t.
$x_1 + 2x_2 \leq 10$
$5x_1 + 2x_2 \leq 20$
$x_1, x_2 \geq 0,$
$x_1 \geq 3$
$x_1^* = 3, x_2^* = 2.5,$
$z^* = 59$
$x_1 \leq 2$
max $13x_1 + 8x_2$
s.t.
$x_1 + 2x_2 \leq 10$
$5x_1 + 2x_2 \leq 20$
$x_1, x_2 \geq 0,$
$x_1 \leq 2$
$x_1^* = 2, x_2^* = 4,$
$z^* = 58$
$x_2 \geq 3$
max $13x_1 + 8x_2$
s.t.
$x_1 + 2x_2 \leq 10$
$5x_1 + 2x_2 \leq 20$
$x_1, x_2 \geq 0,$
$x_1 \geq 3$
$x_2 \geq 3$
INFEASIBLE
$x_2 \leq 2$
max $13x_1 + 8x_2$
s.t.
$x_1 + 2x_2 \leq 10$
$5x_1 + 2x_2 \leq 20$
$x_1, x_2 \geq 0,$
$x_1 \geq 3$
$x_2 \leq 2$
$x_1^* = 3.2, x_2^* = 2,$
$z^* = 57.6$

En esta idea de dejar fuera de la región factible del problema relajado lineal asociado a un problema de programación entera la solución óptima fraccional del mismo, al mismo tiempo que se introduce un nuevo vértice entero, se basan los métodos siguientes para resolver problemas de programación entera.

8.3.1. Corte fraccional de Gomory

Este método es aplicable solo si todas las variables de decisión son enteras, además todos los coeficientes que aparezcan en el problema deben ser enteros, es decir, solo es aplicable a problemas del tipo:

$$\begin{array}{lllll} (P) & \text{mín} & c'x & & c \in \mathbb{Z}^n \\ & s.a: & Ax = b & & A \in \mathbb{Z}^{m\times n} \\ & & x \in \mathbb{Z}^n_+ & & b \in \mathbb{Z}^m. \end{array}$$

Supongamos que resolvemos el relajado lineal de (P) y obtenemos una solución óptima x^* con alguna componente fraccional $(\exists k : x^*_k \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z})$. Sea B la base asociada a la solución óptima x^*, $x^*_B = B^{-1}b = \bar{b} \geq 0$, $x^*_N = 0$. Dado que:

$$Ax = b \equiv \begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \equiv Bx_B + Nx_N = b$$

cualquier solución factible x del problema (P) se puede representar de la forma:

$$x_B = \underbrace{B^{-1}b}_{\bar{b}} - \underbrace{B^{-1}N}_{Y} x_N = \bar{b} - Yx_N.$$

Si denotamos $w = x_N$ entonces:

$$\begin{aligned} x_B &= \bar{b} - Yw \\ x_k &= \bar{b}_k - \sum_{j\in N} y_{kj}w_j \end{aligned}$$

además podemos hacer la descomposición:

$$\begin{aligned} \bar{b}_k &= \lfloor \bar{b}_k \rfloor + f_k \text{ con } f_k > 0 \\ y_{kj} &= \lfloor y_{kj} \rfloor + f_{kj} \text{ con } f_{kj} \geq 0 \end{aligned}$$

con lo que se tendría:

$$x_k = \lfloor \bar{b}_k \rfloor + f_k - \sum_{j\in N} (\lfloor y_{kj} \rfloor + f_{kj})w_j = \lfloor \bar{b}_k \rfloor - \sum_{j\in N} \lfloor y_{kj} \rfloor w_j + (f_k - \sum_{j\in N} f_{kj}w_j)$$

lo que implica que:

$$f_k - \sum_{j\in N} f_{kj}w_j \in \mathbb{Z}$$

pues x_k es factible y $\lfloor \bar{b}_k \rfloor - \sum_{j\in N} \lfloor y_{kj} \rfloor w_j \in \mathbb{Z}$. Como $\sum_{j\in N} \lfloor y_{kj} \rfloor w_j \geq 0$:

$$f_k - \sum_{j\in N} f_{kj} w_j \leq f_k < 1$$

por tanto:

$$f_k - \sum_{j\in N} f_{kj} w_j \leq 0.$$

Finalmente, si añadimos una variable de holgura $s_k \in \mathbb{Z}_+$ podemos escribir la restricción:

$$s_k - \sum_{j\in N} f_{kj} w_j = -f_k.$$

Al evaluar x^* sobre esta restricción tenemos que $x_N^* = w = 0$, lo que implica

$$s_k = -f_k!!!$$

lo cual es una contradicción pues $s_k \in \mathbb{Z}_+$ y $f_k \in (0,1)$, luego x^* no verifica la restricción.

El método consiste en reforzar el problema entero añadiendo restricciones como la anterior hasta que se obtiene una solución óptima en variables entera. Esto se consigue en un número finito de pasos.

Ejemplo 8.3.1 Consideremos el problema

$$\begin{array}{rrrrl} \text{mín} & -x_1 & +3x_2 & -3x_3 & \\ s.a: & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq 4 \\ & 4x_1 & -3x_2 & & \leq 2 \\ & -3x_1 & +2x_2 & & \leq 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \in \mathbb{Z}_+. \end{array}$$

La tabla óptima del problema relajado lineal asociado es:

x_B	c_B	-1	3	-3	0	0	0	$\bar{b}$
x_4	0	0	$\frac{9}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{15}{2}$
x_1	-1	1	$-\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
x_3	-3	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{9}{2}$
$c_j - z_j$		0	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	3	

observemos que ninguna de las componentes de la solución óptima es entera. Vamos a aplicar un corte fraccional de Gomory a partir de la fila correspondiente al elemento básico x_3. En dicha fila:

$$\begin{aligned}
&\bar{b}_3 = \frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2} \Rightarrow f_3 = \frac{1}{2}\\
&y_{32} = -\frac{1}{4} = -1 + \frac{3}{4} \Rightarrow f_{32} = \frac{3}{4}\\
&y_{35} = \frac{3}{4} = 0 + \frac{3}{4} \Rightarrow f_{35} = \frac{3}{4}\\
&y_{36} = 1 = 1 + 0 \Rightarrow f_{36} = 0
\end{aligned}$$

luego la restricción que debemos añadir al problema es:

$$s_7 - \frac{3}{4}x_2 - \frac{3}{4}x_5 - 0x_6 = -\frac{1}{2}$$

obteniéndose la tabla:

x_B	c_B	-1	3	-3	0	0	0	0	$\bar{b}$
x_4	0	0	$\frac{9}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{15}{2}$
x_1	-1	1	$-\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$
x_3	-3	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{9}{2}$
s_7	0	0	$-\frac{3}{4}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	0	1	$-\frac{1}{2}$
$c_j - z_j$		0	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	3	0	

aplicamos el algoritmo del simplex dual, sustituimos en la base a_7 $(-\frac{1}{2} < 0)$ por a_2 $(\text{mín}\{\frac{\frac{3}{2}}{|-\frac{3}{4}|}, \frac{\frac{5}{2}}{|-\frac{3}{4}|}\} = 2)$:

x_B	c_B	-1	3	-3	0	0	0	0	$\bar{b}$
x_4	0	0	0	0	1	-2	1	3	-6
x_1	-1	1	0	0	0	1	0	-1	1
x_3	-3	0	0	1	0	1	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{14}{3}$
x_2	3	0	1	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$c_j - z_j$		0	0	0	0	1	3	2	

ahora aplicamos un corte fraccional de Gomory a partir de la fila correspondiente al elemento básico x_2 ($\bar{b}_2 \notin \mathbb{Z}_+$). En dicha fila:

$$\begin{array}{l} \bar{b}_2 = \frac{2}{3} = 0 + \frac{2}{3} \Rightarrow f_3 = \frac{2}{3} \\ y_{25} = 1 = 1 + 0 \Rightarrow f_{25} = 0 \\ y_{26} = 0 = 0 + 0 \Rightarrow f_{26} = 0 \\ y_{27} = -\frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} \Rightarrow f_{27} = \frac{2}{3} \end{array}$$

luego la restricción que añadimos al problema es:

$$s_8 - 0x_5 - 0x_6 - \frac{2}{3}x_7 = -\frac{2}{3}$$

obteniéndose la tabla:

x_B	c_B	-1	3	-3	0	0	0	0	0	$\bar{b}$
x_4	0	0	0	0	1	-2	1	3	0	6
x_1	-1	1	0	0	0	1	0	-1	0	1
x_3	-3	0	0	1	0	1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{14}{3}$
x_2	3	0	1	0	0	1	0	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
s_8	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$
$c_j - z_j$		0	0	0	0	1	3	2	0	

aplicamos el algoritmo del simplex dual, sustituimos en la base a_8 ($-\frac{2}{3} < 0$) por a_7 ($\text{mín}\{\frac{2}{|-\frac{2}{3}|}\} = 3$):

x_B	c_B	-1	3	-3	0	0	0	0	0	$\bar{b}$
x_4	0	0	0	0	1	-2	1	0	$\frac{9}{2}$	3
x_1	-1	1	0	0	0	1	0	0	$-\frac{3}{2}$	2
x_3	-3	0	0	1	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	5
x_2	3	0	1	0	0	1	0	0	-1	2
s_7	0	0	0	0	0	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	1
$c_j - z_j$		0	0	0	0	1	3	0	0	

paramos pues hemos encontrado una solución óptima entera, dicha solución es $x_1^* = 2$, $x_2^* = 2$, $x_3^* = 5$, $x_4^* = 3$, $x_5^* = 0$, $x_6^* = 0$, $s_7^* = 1$ y $s_8^* = 0$.

8.3.2. Corte mixto de Gomory

Este método se aplica a problemas del tipo:

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{mín} & c_1'x_1 + c_2'x_2 \\ & s.a: & A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = b \\ & & x_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}, x_2 \in \mathbb{R}_+^{n_2}. \end{array}$$

Diremos que las variables de decisión que pertenecen a $\mathbb{Z}_+^{n_1}$ constituyen el Grupo 1 y las que pertenecen a $\mathbb{R}_+^{n_2}$ el Grupo 2. Supongamos que resolvemos el relajado lineal de (P) y obtenemos una solución óptima x^* con alguna componente fraccional $x_k^* \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, perteneciendo x_k al Grupo 1. Si B es la base asociada a la solución óptima x^*, aplicando la representación que realizamos anteriormente, toda solución factible x verifica que:

$$\begin{aligned} x_k &= \bar{b}_k - \sum_{j \in N} y_{kj} w_j \\ x_k &= \lfloor b_k \rfloor + f_k - \sum_{j \in N} y_{kj} w_j \\ x_k - \lfloor b_k \rfloor &= f_k - \sum_{j \in N} y_{kj} w_j \end{aligned}$$

como $x_k - \lfloor b_k \rfloor \in \mathbb{Z}$, sólo uno de los siguientes casos puede darse:

$$\begin{array}{ll} (1) & f_k - \sum_{j \in N} y_{kj} w_j \leq 0 \\ (2) & f_k - \sum_{j \in N} y_{kj} w_j \geq 1 \end{array}$$

o lo que es lo mismo, solo uno de los casos siguientes puede ocurrir:

$$\begin{array}{ll} (1) & -\sum_{j \in N} y_{kj} w_j \leq -f_k \\ (2) & -\sum_{j \in N} y_{kj} w_j \geq 1 - f_k \end{array}$$

si $J_1 = \{j \in N : y_{kj} > 0\}$ y $J_2 = \{j \in N : y_{kj} < 0\}$ entonces:

$$\begin{array}{ll} (1) & -\sum_{j \in N} y_{kj} w_j \leq -f_k \equiv -\sum_{j \in J_1} y_{kj} w_j \leq -f_k \\ (2) & -\sum_{j \in N} y_{kj} w_j \geq 1 - f_k \equiv \dfrac{-f_k}{f_k - 1} \sum_{j \in J_2} y_{kj} w_j \leq -f_k. \end{array}$$

De (1) y (2) se obtiene:

$$-\sum_{j \in J_1} y_{kj} w_j - \frac{f_k}{f_k - 1} \sum_{j \in J_2} y_{kj} w_j \leq -f_k,$$

si añadimos la variable de holgura $s_k \in \mathbb{Z}_+$ tenemos la restricción:

$$s_k - \sum_{j\in J_1} y_{kj}w_j - \frac{f_k}{f_k-1}\sum_{j\in J_2} y_{kj}w_j = -f_k.$$

Evaluando x^* sobre la restricción se tiene $x_N = w = 0$, luego al igual que en el caso anterior:

$$s_k = -f_k < 0\,!!!$$

Explotando esta idea, los cortes finales son de la forma:

$$s_k - \sum_{j\in N} \lambda_j w_j = -f_k$$

donde:

$$\lambda_j = \begin{cases} y_{kj} & \text{si } y_{kj} \geq 0,\ w_j \notin \text{Grupo 1} \\[2ex] \dfrac{f_k}{f_k-1} y_{kj} & \text{si } y_{kj} < 0,\ w_j \notin \text{Grupo 1} \\[2ex] f_{kj} & \text{si } f_{kj} \leq f_k,\ w_j \in \text{Grupo 1} \\[2ex] \dfrac{-1}{1-f_k}(1-f_{kj}) & \text{si } f_{kj} > f_k,\ w_j \in \text{Grupo 1}. \end{cases}$$

Ejemplo 8.3.2 Consideremos el problema

$$\begin{array}{lllllll} \text{mín} & & 5x_2 & & +10x_4 & & \\[2ex] s.a: & x_1 & -\frac{5}{3}x_2 & & -\frac{1}{5}x_4 & = & \frac{5}{3} \\[2ex] & & -\frac{4}{3}x_2 & +x_3 & +\frac{11}{3}x_4 & = & \frac{7}{3} \\[2ex] & x_1, & x_2 \geq 0, & x_3, & x_4 & \in & \mathbb{Z}_+ \end{array}$$

la tabla óptima del problema relajado lineal asociado a este problema es:

x_B	c_B	0	5	0	10	$\bar{b}$
x_1	0	1	$-\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
x_3	0	0	$-\frac{4}{3}$	1	$\frac{11}{3}$	$\frac{7}{3}$
$c_j - z_j$		0	5	0	10	

observemos que $x_3^* \notin \mathbb{Z}_+$ mientras que en el problema original $x_3 \in \mathbb{Z}_+$. Vamos a aplicar un corte mixto de Gomory a partir de la fila correspondiente al elemento básico x_3. En dicha fila:

$$\bar{b}_3 = \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} \Rightarrow f_3 = \frac{1}{3}$$
$$y_{32} = -\frac{4}{3} = -2 + \frac{2}{3} < 0 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - 1}(-\frac{4}{3}) = \frac{2}{3}$$
$$y_{34} = \frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3} \Rightarrow f_{34} = \frac{2}{3} > f_3 = \frac{1}{3} \Rightarrow \lambda_4 = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}(1 - \frac{2}{3}) = \frac{1}{6}$$

luego la restricción que debemos añadir al problema es:

$$s_5 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{6}x_4 = -\frac{1}{3}$$

obteniéndose la tabla:

x_B	c_B	0	5	0	10	0	$\bar{b}$
x_1	0	1	$-\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
x_3	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{11}{3}$	0	$\frac{7}{3}$
s_5	0	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	1	$-\frac{1}{3}$
$c_j - z_j$		0	5	0	10	0	

aplicamos el algoritmo del simplex dual, sustituimos en la base a_5 ($-\frac{1}{3} < 0$) por a_2 ($\text{mín}\{\frac{5}{|-\frac{2}{3}|}, \frac{10}{|-\frac{1}{6}|}\} = \frac{15}{2}$):

x_B	c_B	0	5	0	10	0	$\bar{b}$
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{10}{3}$
x_3	0	0	0	1	4	2	3
x_2	5	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$c_j - z_j$		0	0	0	$\frac{35}{4}$	$\frac{15}{2}$	

paramos pues hemos encontrado una solución óptima de forma que cada variable de decisión pertenece al grupo correspondiente, dicha solución es $x_1^* = \frac{10}{3}$, $x_2^* = \frac{1}{3}$, $x_3^* = 3$, $x_4^* = 0$ y $s_5 = 0$.