

Homework 2. Kuramoto model

Myrov V.

October 2020

1 Модель Курамото

Модель Курамото состоит из N осцилляторов, каждый из которых обладает единственным параметром - частотой (ω). Динамика задается следующим дифференциальным уравнением

$$\frac{\Delta\phi_i}{\Delta t} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_i - \phi_j) + N(0, \sigma) \quad (1)$$

Где ϕ - фаза осциллятора, K - параметр самосинхронии всей модели, N - шум. Финальный сигнал модели считается как среднее фаз всех осцилляторов в некий момент t . При практической реализации модели надо учесть нормировку на Δt .

Чтобы получить из фазового представления сигнала аналитический можно воспользоваться формулой Эйлера и предположением, что модуль осциллятора всегда равен единице, следовательно получаем формулу $e^{i\phi}$ где i - мнимая единица, а ϕ - непосредственно фаза. Полученный таким образом сигнал можно анализировать.

1. Необходимо реализовать модель Курамото, состоящую из 500 осцилляторов, где частота задается равномерными значениями в пределах $[frequency * 0.75; frequency * 1.25]$.
2. Используя соответственно параметризованные модели, необходимо симулировать 20 сигналов: 10 с частотой 10Гц, 5 с частотой 15Гц и 5 с частотой 25Гц.
3. Используя соответственно параметризованные модели, необходимо симулировать сигнал с частотой 10Гц в промежутке 0-15секунд, 20Гц с промежутке 15-30с, 25Гц в 30-45с и 10Гц в промежутке 45-60. Модель должна сохранять свое состояние между сменами частот, поэтому надо только обновить параметры ω . Для получения устойчивых оценок, просимулируйте сигнал несколько раз.

Язык программирования: Python.

2 Анализ

Построить графики для каждой симуляции и сделать выводы:

1. Посчитайте и нарисуйте Power Spectrum Density для обоих сигналов. Можно воспользоваться соответствующими функциями из библиотеки `scipy`, для отображения PSD в основном пользуются `loglog` шкалой. Если не получается пик в области центральной частоты - попробуйте увеличить K .
2. Посчитайте фазовую синхронию полученных сигналов используя $PLV = |\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t * y_t^*|$, где x_t - значение комплексного сигнала x в точке t , а y_t^* - комплексно сопряженное значение сигнала y в точке t .
3. Для данных из задания 1.3 посчитайте PSD во времени. Для этого побейте сигнал на окна равной длины, посчитайте PSD в них и отобразите как `heatmap`.

3 Результат

Ссылка на репозиторий с кодом модели, симуляций и построения графиков. Выводы положить в отдельный `md` файл.