奇异值分解　SVD算法的原理推导

假设有 $m\times n$ 的非方阵矩阵A，对其进行矩阵分解的表达式为：

$$A=U\Lambda V^T$$

其中U为 $m\times m$ 矩阵，Λ 为 $m\times n$ 对角矩阵，V为 $n\times n$ 矩阵。U和V均为酉矩阵，

$$U^TU=E$$

$$V^TV=E$$

在方阵中我们通过求解齐次方程来计算矩阵特征值和特征向量。

由于矩阵A是非方阵矩阵，因此我们对矩阵A的转置矩阵 A^T 与矩阵A做矩阵乘法运算，可得 $m\times m$ 矩阵 A^TA，然后对该矩阵求解。

$$(A^TA)u_i=\lambda_i u_i$$

由上式可得方阵 A^TA 的m个特征值和特征向量，该m个特征向量即可构成特征矩阵U。我们将这m个特征向量称为矩阵A的左奇异向量，特征矩阵U也称为A的左奇异矩阵。

同理我们对矩阵A与其转置矩阵 A^T 做矩阵乘法运算，同样可得 $n\times n$ 矩阵 AA^T，然后对该矩阵求特征值和特征向量：

$$(AA^T)v_i=\lambda_i v_i$$

由上式可求得方阵 AA^T 的n个特征和特征向量，我们把这n个特征向量称为矩阵A的右奇异向量，特征矩阵V也称矩阵A的右奇异矩阵。

接下来求奇异值矩阵 Λ：

$$A=U\Lambda V^T$$

$$AV=U\Lambda V^TV$$

$$AV=U\Lambda$$

$$Av_i=\sigma_i u_i$$

$$\sigma_i=Av_i/u_i$$

按照上述推导，我们可计算奇异值而得到奇异值矩阵。实际上，通过推导特征值与奇异值之间的关系，也可由特征值来计算奇异值。

$$A = U\Lambda V^T$$

$$A^T = V\Lambda U^T$$

$$A^TA = V\Lambda U^TU\Lambda V^T = V\Lambda^2V^T$$

由上式可知，特征值矩阵为奇异值矩阵的平方，即特征值是奇异值的平方。