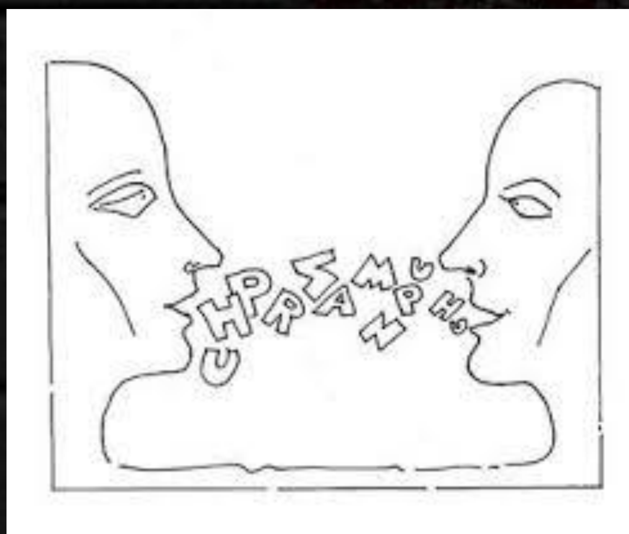
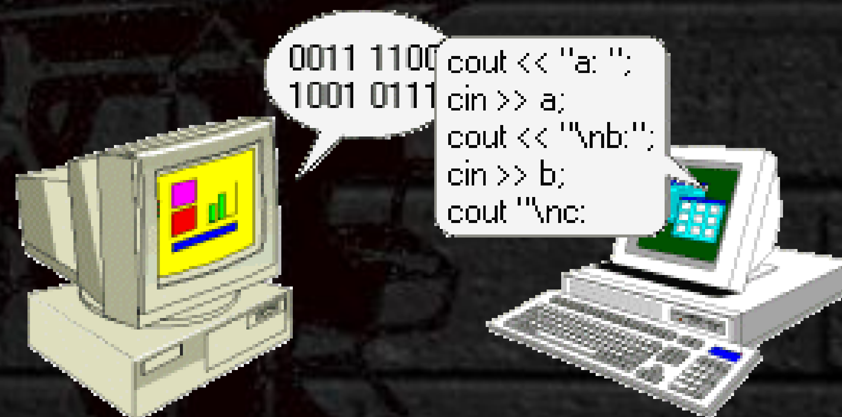
Lenguajes





Contenido

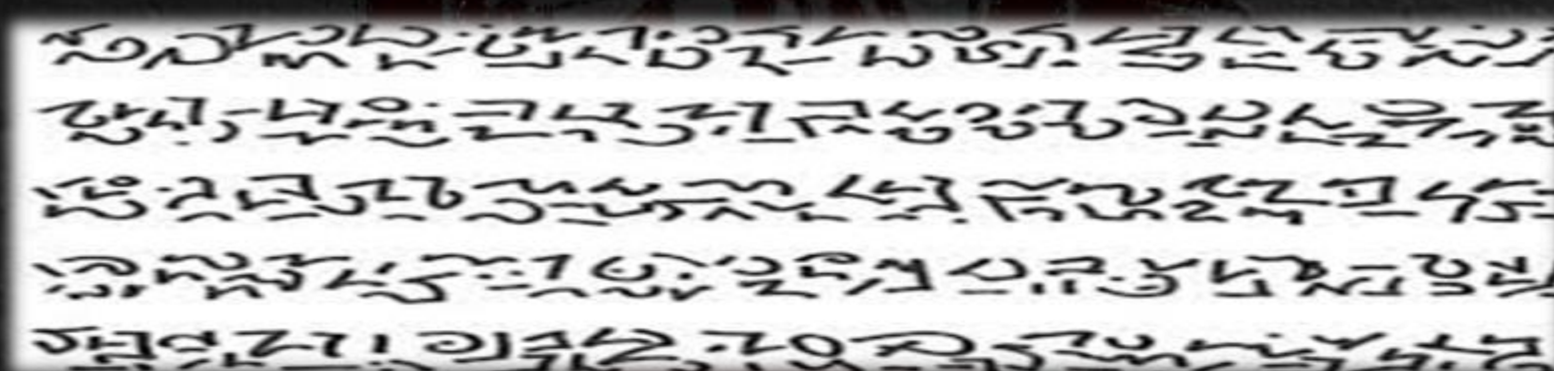
- **Lenguaje**
- **Operaciones entre lenguajes**
  - **Unión o alternativa**
  - **Concatenación**
  - **Potencia de un lenguaje**
  - **Cierre o clausura positiva**
  - **Cierre u operación estrella (cerradura de Kleene)**
  - **Reflexión de lenguajes**
- **Ejercicios: Lenguajes**

Lenguaje

- **Un <u>lenguaje es un conjunto de palabras</u> *(cadenas) de un determinado alfabeto Σ*.**

- **Formalmente: Se llama lenguaje sobre un alfabeto a todo subconjunto del lenguaje universal de Σ.**

$$\mathbf{L} \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^*$$



Lenguaje

- **En particular, el conjunto vacío *Φ* es un subconjunto de Σ* y se llama por ello lenguaje vacío. Este lenguaje no debe confundirse con el que tiene como único elemento la palabra vacía {λ}, que también es un subconjunto (diferente) de Σ*. Para distinguirlos, hay que fijarse en su carnalidad (número de símbolos).**

$$C(\Phi)=0$$
$$C(\{\lambda\})=1$$

Lenguaje

- **Obsérvese que tanto Φ como $\{\lambda\}$ son lenguajes sobre cualquier alfabeto.**
- **Por otra parte, un alfabeto puede considerarse también como uno de los lenguajes generados por él mismo: el que contiene todas las palabras de una sola letra (un solo símbolo).**

Operaciones entre lenguajes

1. ***Unión o alternativa:*** **Sean dos lenguajes definidos sobre el mismo alfabeto, $L1 \subseteq \Sigma^*$, $L2 \subseteq \Sigma^*$ se denomina unión de los dos lenguajes $L1 \cup L2$ al conjunto formado por las cadenas que pertenezcan indistintamente a uno u otro de los dos lenguajes.**

$$L_1 \cup L_2$$

La unión de lenguajes tiene las siguientes propiedades:

i. Operación cerrada: la unión de dos lenguajes sobre el mismo alfabeto es también un lenguaje sobre dicho alfabeto.

ii. Propiedad asociativa: $(L_1 \cup L_2) \cup L_3 = L_1 \cup (L_2 \cup L_3)$.

iii. Existencia de un elemento neutro: cualquiera que sea el lenguaje L, el lenguaje vacío Φ cumple que $\Phi \cup L = L \cup \Phi = L$

La unión de lenguajes tiene las siguientes propiedades:

iv. Propiedad conmutativa: cualesquiera que sean L_1 y L_2, se verifica que $L_1 \cup L_2 = L_2 \cup L_1$.

v. Propiedad idempotente: cualquiera que sea L, se verifica que $L \cup L = L$.

ESCOM

2. ***Concatenación:*** **Sean dos lenguajes definidos sobre el mismo alfabeto $L_1 \subseteq \Sigma^*$, $L_2 \subseteq \Sigma^*$, se denomina concatenación de los dos lenguajes $L_1 \cap L_2$ (L_1L_2) al conjunto de todas las cadenas formadas concatenando una palabra del primer lenguaje con una del segundo.**

$$L_1 L_2$$

- **La definición anterior sólo es valida si L_1 y L_2 contienen al menos un elemento. Para la concatenación de L con el lenguaje vacío Φ se tiene que: $\Phi L = L\Phi = \Phi$**

- En general AB != BA.

  Ejemplo

- Si $\Sigma = \{a, b, c\}$, $A = \{a, ab, ac\}$, $B = \{b, b^2\}$, entonces
- $AB = \{ab, ab^2, \underline{ab^2}, ab^3, acb, acb^2\}$.
- $BA = \{ba, bab, bac, b^2a, b^2ab, b^2ac\}$

- La concatenación de lenguajes tiene las siguientes propiedades:

i. Operación cerrada: la concatenación de dos lenguajes sobre el mismo alfabeto es también un lenguaje sobre el mismo alfabeto.

ii. Propiedad asociativa: $(L_1 L_2)L_3 = L_1(L_2L_3)$.

iii. Existencia de un elemento neutro: cualquiera que sea el lenguaje L, el lenguaje de la palabra vacía cumple que: $\{\lambda\}L=L\{\lambda\}=L$

3. ***Potencia de un lenguaje:*** **Desde el punto de vista estricto esta no es una nueva operación, sino un caso particular de la anterior, Se denomina potencia *i-ésima* de un lenguaje a la operación que consiste en concatenarlo consigo mismo i-veces.**

$$L^i = LLL\ldots L \text{ (i veces)}$$

- **Definiremos también:**
  - $L^1=L$
  - $L^{i+1}=L^i L=L L^i \; (i > 0)$
  - $L^i L^j=L^{i+j} \; (i, j > 0)$
  - $L^0=\{\lambda\}$

4. *Cierre o clausura positiva:* La operación de cierre positivo de un lenguaje L es otro lenguaje L^+ obtenido uniendo el lenguaje L con todas sus potencias posibles, excepto L^0.

$$L^+ = \{L\} \cup \{LL\} \cup \{LLL\} \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n$$

- Ninguna clausura positiva contiene la palabra vacía, a menos que dicha palabra este en L.

- Puesto que el alfabeto Σ es también un lenguaje sobre Σ, puede aplicársele esta operación.

$$\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\lambda\}$$

5. *Cierre u operación estrella (cerradura de Kleene):* La operación cierre de un lenguaje L es otro L* obtenido uniendo el lenguaje L con todas sus potencias posibles, incluso L^0.

$$L^* = \{\lambda\} \cup \{L\} \cup \{LL\} \cup \{LLL\} \ldots = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$$

- Puesto que el alfabeto Σ es también un lenguaje sobre Σ, puede aplicársele esta operación.

- **Son evidentes las siguientes identidades:**
  - **$L^{*} = L^{+} \cup \{\lambda\}$**
  - **$L^{+} = L L^{*} = L^{*} L$**

6. ***Reflexión de lenguajes:*** **Sea L un lenguaje cualquiera. Se llama *lenguaje reflejo* o *inverso* de L, y se representa con L^{-1}: $\{x^{-1} \mid x \in L\}$**

L^{-1} es el lenguaje que contiene todas las palabras inversas de L.

Ejercicios: Lenguajes

1. Sea:

   Σ_1 ={a,b,c,d,…,z}

   – L_1 ={anita, lava, la, tina}
   – L_2 ={hola, mundo}
   – L_3={uno, dos, tres, cuatro, cinco}
   – Obtener:
     - $(L_1 \cup L_2) L_3$
     - $(L_1 L_2) \cup L_3$
     - L_1^2
     - L_2^+
     - L_2^*
     - L_2^{-1}

2. Sea:

- $\Sigma_1 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,F\}$
- $L_1 = \{001AF, 10FFAA, 109012, 667800\}$
- $L_2 = \{00,10,12,45,66,77\}$
- $L_3 = \{1,0,3,5,6,F,A,B,C\}$
- Obtener:
  - $(L_1 \cup L_2)\ L_3$
  - $(L_1\ L_2) \cup L_3$
  - L_1^2
  - L_2^+
  - $L_2^{-1} \cup (L_1 \cup L_3)$
  - L_2^{-1}