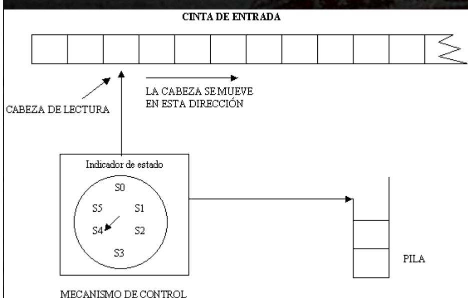
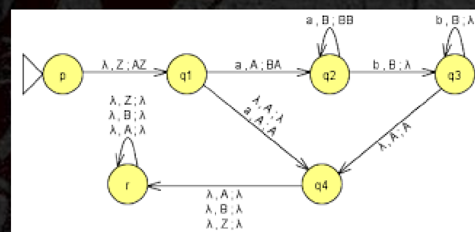
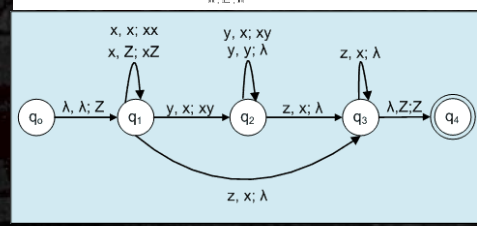
Autómata de Pila







Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

Autómata de Pila

Así como existe un autómata que define los lenguajes regulares, también existe un tipo de autómata que define los lenguajes independientes del contexto. Dicho autómata es el "Autómata de pila".

El autómata de pila es fundamentalmente un AFN-ε con la adición de una pila.

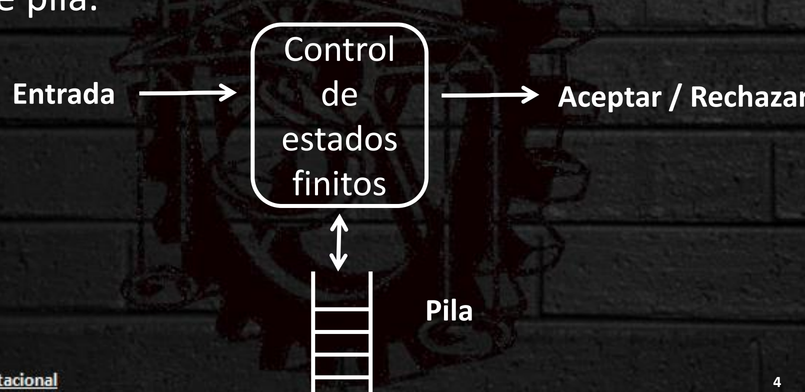
Teoría Computacional
Prof. Luis Enrique Hernández Olvera

Autómata de Pila

- La pila se puede leer, se pueden introducir elementos en ella y extraer sólo el elemento que está en la parte superior de la misma, exactamente igual que la estructura de datos de una “pila” (Li-Fo).
- La presencia de una pila significa que, a diferencia del autómata finito, el autómata a pila puede “recordar” una cantidad infinita de información.

Autómata de Pila

- Un autómata a pila es esencialmente un autómata finito con una estructura de datos de pila.



Funcionamiento del Autómata de Pila

- Un “control de estados finito” lee las entradas, un símbolo cada vez. El autómata a pila puede observar el símbolo colocado en la parte superior de la pila y llevar a cabo su transición basándose en el estado actual, **el símbolo de entrada y el símbolo que hay en la parte superior de la pila**. Alternativamente, puede hacer una transición “espontánea”, utilizando ε como entrada en lugar de un símbolo de entrada.

Funcionamiento del Autómata de Pila

- En una transición, el autómata de pila puede:
  – Consumir de la entrada el símbolo que usa en la transición. Si como entrada se utiliza ε , entonces no se consume ningún símbolo de entrada.
  – Pasa a un nuevo estado, que puede o no ser el mismo que el estado anterior.
  – Reemplaza el símbolo de la parte superior de la pila por cualquier cadena.

Funcionamiento del Autómata de Pila

- Para reemplazar símbolos de la parte superior de la pila se considera:
  - La cadena puede ser ε, lo que corresponde a una extracción de la pila.
  - Podría ser el mismo símbolo que estaba anteriormente en la cima de la pila (no hay cambios en la pila).
  - Podría reemplazar el símbolo de la cima de la pila por otro símbolo, lo que cambiaría la cima de la pila pero no añade ni extrae ningún símbolo.
  - el símbolo de la cima de la pila podría ser reemplazado por dos o más símbolos, lo que (posiblemente) tendría el efecto de cambiar el símbolo de la cima de la pila, añadiendo después uno o más nuevos símbolos a la pila.

Definición formal de Autómata de Pila

- La notación formal de un *autómata a pila* incluye siete componentes. Escribimos la especificación de un autómata a pila *P* de la forma siguiente:

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta , q_0, Z_0, F)$$

Definición formal de Autómata de Pila

$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

- Donde:
  - Q: Un conjunto finito de *estados.*
  - Σ: Un conjunto finito de *símbolos de entrada.*
  - Γ: Un *alfabeto de pila* finito. Es el conjunto de símbolos que pueden introducirse en la pila.
  - δ: La *función de transición*.
  - q_0: El *estado inicial*.
  - Z_0: El *símbolo inicial*. Inicialmente, la pila del autómata a pila consta de una instancia de este símbolo y de nada más.
  - F: El conjunto de *estados de aceptación* o *estados finales*.

Función de transición de un AP

δ controla el comportamiento del autómata. Formalmente, δ toma como argumento

$$\delta(q, \alpha, X)$$

- Donde:
  - q es un estado de Q.
  - α es cualquier símbolo de entrada de Σ o $\alpha = \varepsilon$, la cadena vacía, que se supone que no es un símbolo de entrada.
  - X es un símbolo de la pila, es decir, pertenece a Γ.

Función de transición de un AP

$\delta(q, \alpha, X) = (p, \gamma)$

- La salida de δ es un conjunto finito de pares de la forma (*p, γ*), donde *p* es el nuevo estado y γ es la cadena de símbolos de la pila que reemplaza *X* en la parte superior de la pila.
- Por ejemplo:
  - si $\gamma = \varepsilon$, entonces se extrae un elemento de la pila.
  - si $\gamma = X$, entonces la pila no cambia
  - si $\gamma = YZ$, entonces *X* se reemplaza por *Z* e *Y* se introduce en la pila.

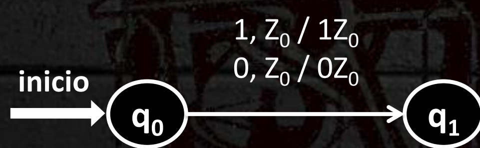
Diagrama de transición de un autómata de pila

Tenemos que:

- Una flecha etiquetada como *Inicio* indica el estado inicial
- Los estados con un círculo doble se corresponden con los estados de aceptación.
- Los arcos corresponden a las transiciones del autómata de pila de la forma siguiente:
  - un arco etiquetado con $\alpha, X/\gamma$ del estado *q* al estado *p* quiere decir que $\delta(q, \alpha, X)$ contiene el par (*p, γ*). Es decir, la etiqueta del arco nos indica qué entrada se utiliza y también proporciona los elementos situados en la cima de la pila nuevo y antiguo.

Diagrama de transición de un autómata de pila

$\delta (q_0, 0, Z_0) = \{(q_1, 0Z_0)\}$ y
$\delta (q_0, 1, Z_0) = \{(q_1, 1Z_0)\}$.



Ejemplo

Consideremos el lenguaje:

L_{wwr} = {ww^R / w pertenece a (**0**+**1**)*}

Este lenguaje, a menudo denominado "*w*-*w*-reflejo", son los palíndromos de longitud par sobre el alfabeto *{0,1}*.

Diseñemos un autómata de pila *P* para aceptar el lenguaje L_{wwr}

Ejemplo

Consideremos el lenguaje:

$P = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$

- Donde:
  - Q: $\{q_0, q_1, q_2\}$
  - Σ: $\{0, 1\}$
  - Γ: $\{0, 1, Z_0\}$
  - F: $\{q_2\}$
- Utilizaremos un símbolo de pila Z_0 para marcar el fondo de la pila.

Ejemplo

- Donde δ se define de acuerdo con las siguientes reglas:
  1. $\delta (q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 0Z_0)\}$ y $\delta (q_0, 1, Z_0) = \{(q_0, 1Z_0)\}$.
  2. $\delta (q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00)\}$, $\delta (q_0, 0, 1) = \{(q_0, 01)\}$, $\delta (q_0, 1, 0) = \{(q_0, 10)\}$ y $\delta (q_0, 1, 1) = \{(q_0, 11)\}$.
  3. $\delta (q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}$, $\delta (q_0, \varepsilon, 0) = \{(q_1, 0)\}$ y $\delta (q_0, \varepsilon, 1) = \{(q_1, 1)\}$.
  4. $\delta (q_1, 0, 0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ y $\delta (q_1, 1, 1) = \{(q_1, \varepsilon)\}$.
  5. $\delta (q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$.

Ejemplo

Significado de las reglas:

1. $\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 0Z_0)\}$ y
   $\delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_0, 1Z_0)\}$.

Se aplica una de estas reglas, si estamos en el estado q_0 y vemos el símbolo inicial Z_0 en la parte superior de la pila. Leemos la primera entrada y la introducimos en la pila, dejando Z_0 abajo para marcar la parte inferior.

Ejemplo

Significado de las reglas:

2. $\delta(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00)\}$, $\delta(q_0, 0, 1) = \{(q_0, 01)\}$,
   $\delta(q_0, 1, 0) = \{(q_0, 10)\}$ y $\delta(q_0, 1, 1) = \{(q_0, 11)\}$.

Estas cuatro reglas similares nos permiten permanecer en el estado q_0 y leer las entradas, introduciéndolas por la parte superior de la pila y dejando el símbolo de la cima de la pila anterior.

Ejemplo

Significado de las reglas:

3. $\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}$,
   $\delta(q_0, \varepsilon, 0) = \{(q_1, 0)\}$ y
   $\delta(q_0, \varepsilon, 1) = \{(q_1, 1)\}$.

Estas tres reglas permiten pasar del estado q_0 al estado q_1 de forma espontánea (para la entrada ε), dejando intacto cualquier símbolo que esté en la parte superior de la pila.

Ejemplo

Significado de las reglas:

4. $\delta(q_1, 0, 0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ y
   $\delta(q_1, 1, 1) = \{(q_1, \varepsilon)\}$.

En el estado q_1, podemos emparejar símbolos de entrada con los símbolos de la cima de la pila y extraerlos cuando se correspondan.

Ejemplo

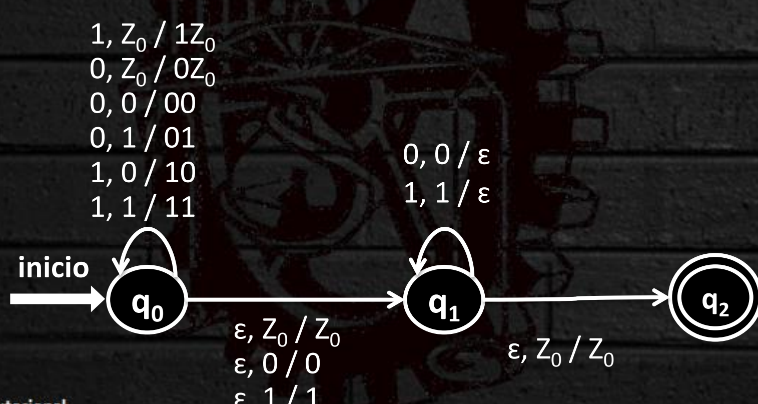
Significado de las reglas:

5. $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$.

Por último, si exponemos el marcador de la parte inferior de la pila Z_0 y estamos en el estado q_1, entonces hemos encontrado una entrada de la forma ww^R. Pasamos al estado q_2 y aceptamos.

Diagrama de transición de un autómata de pila

Diagrama del AP $P = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$



Descripciones instantáneas

- El autómata de pila pasa de una configuración a otra, en respuesta a los símbolos de entrada o ε, pero a diferencia del autómata finito, donde el estado es lo único que necesitamos conocer acerca del mismo, la configuración del autómata de pila incluye tanto el estado como el contenido de la pila.
- También resulta útil representar como parte de la configuración la parte de la entrada que resta por analizar.

Descripciones instantáneas

representaremos la configuración de un autómata a pila mediante (q, ω, γ'),

- donde:
  - q es el estado.
  - ω es lo que queda de la entrada.
  - γ' Es el contenido de la pila.

Especificamos la parte superior de la pila en el extremo izquierdo de γ' y la parte inferior en el extremo derecho. Este triplete se denomina *descripción instantánea.*

Descripciones instantáneas

- Para los autómatas a pila necesitamos una notación que describa los cambios en el estado, la entrada y la pila. Por tanto, adoptamos la notación "torniquete" ($\vdash$) para conectar pares de descripciones instantáneas que representan uno o más movimientos de un PDA.

Descripciones instantáneas

- Sea $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$
- Supongamos que $\delta(q, a, X)$ contiene (p, α) Entonces para todas las cadenas ω de Σ^* y β de Γ^* tenemos que:

$$(q, a\omega, X\beta) \vdash (p, \omega, \alpha\beta)$$

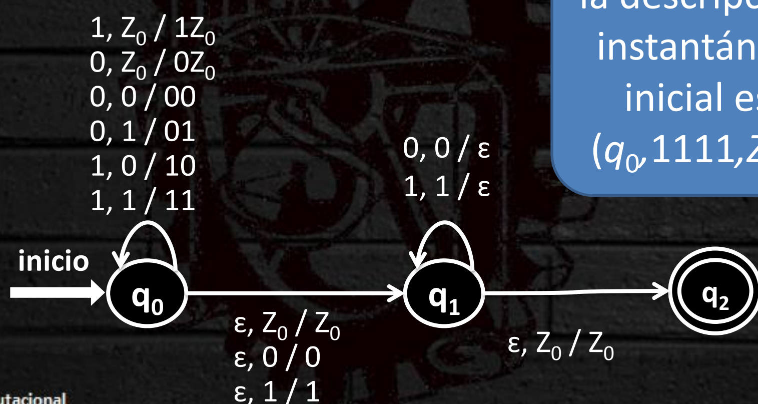
- consumiendo a (que puede ser ε) de la entrada y reemplazando X en la cima de la pila por α , podemos ir del estado q al estado p.

ESCOM

Ejemplo

- Consideremos la acción del autómata de pila para la entrada 1111 para:

la descripción instantánea inicial es $(q_0, 1111, Z_0)$.



ESCOM

Resultado

$(q_0, 1111, Z_0)$

$(q_0, 111, 1Z_0)$ $(q_1, 1111, Z_0) \rightarrow (q_2, 1111, Z_0)$

$(q_0, 11, 11Z_0)$ $(q_1, 111, 1Z_0) \rightarrow (q_1, 11, Z_0)$

$(q_0, 1, 111Z_0)$ $(q_1, 11, 11Z_0)$ $(q_2, 11, Z_0)$

$(q_0, ε, 1111Z_0)$ $(q_1, 1, 111Z_0)$ $(q_1, 1, 1Z_0)$

$(q_1, ε, 1111Z_0)$ $(q_1, ε, 11Z_0)$ $(q_1, ε, Z_0)$

$(q_2, ε, Z_0)$