FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Trabajo Práctico I

Teoría de Algoritmos I [75.29 / 95.06]
Primer cuatrimestre de 2021

Ghersi, Fontela, Kovnat, Rosenblatt
104330, 103924, 104429, 104105

Índice

1. Guía De Usuario **2**

2. Tiempo compartido **2**
2.1. Solución No Óptima . . . 2
2.2. Solución Óptima . . . 2
2.3. Análisis Algorítmico . . . 3
2.3.1. Complejidad Temporal . . . 3
2.3.2. Complejidad Espacial . . . 3
2.4. Optimalidad . . . 3
2.5. Ejemplos . . . 4
2.6. Análisis Gráfico . . . 4

3. Un rompecabezas cuadrado **4**
3.1. Datos . . . 4
3.2. Recubrimiento . . . 4
3.3. Algoritmo con División y Conquista . . . 5
3.4. Relación de Recurrencia . . . 6
3.5. Análisis Algorítmico . . . 6
3.5.1. Complejidad Temporal . . . 6
3.5.2. Complejidad Espacial . . . 6

1. Guía De Usuario

2. Tiempo compartido

2.1. Solución No Óptima

Primero vamos a demostrar lo pedido con un contraejemplo. La solución propuesta por la administración no es óptima, pues siguiendo el algorítmo introducido podriamos llegar a la siguiente situación.

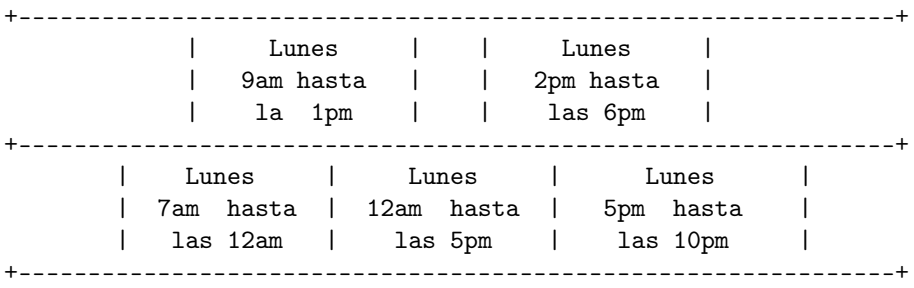
Si tenemos la siguiente distribución de contratos:

- Contrato A: Lunes 9am hasta la 1pm (duración 4 hs)
- Contrato B: Lunes 2pm hasta las 6pm (duración 4 hs)
- Contrato C: Lunes 7am hasta las 12am (duración 5 hs)
- Contrato D: Lunes 12am hasta las 5pm (duración 6 hs)
- Contrato E: Lunes 5pm hasta las 10pm (duración 5 hs)

El algorítmo tomaría primero el contrato A pues es el que comienza antes que dura menos. Por lo tanto luego podrá elegir entre B y E para continuar (el resto no, pues se superponen y son incompatibles).

Terminará eligiendo el contrato B pues dura menos que el contrato E y luego terminará la ejecución del algoritmo pues no tendrá más tareas compatibles para aceptar.

Esta aplicación del algoritmo resulta no devolver la solución óptima, pues elegir los contratos C, D y E brindaría un total de contratos (y horas) mayor al que brinda A y B.



Por lo tanto, como existe una solución mejor, podemos afirmar que el algorítmo no devuelve siempre la solución óptima.

2.2. Solución Óptima

El algorítmo que resuelve el problema de forma óptima se encuentra en el repositorio del trabajo y dejamos a continuación el extracto de código del mismo:

```
def obtenerCronogramaConMayorCantidadDeContratos(self):
    cronograma = []
    if not self.listaDeContratos:
        return cronograma
```

```
        self.listaDeContratos.sort(key=lambda c: c.t_final)
        cronograma.append(self.listaDeContratos[0])
        finalizacion = self.listaDeContratos[0].t_final

        for contrato in self.listaDeContratos[1:]:
            if not contrato.superponeCon(finalizacion):
                cronograma.append(contrato)
                finalizacion = contrato.t_final

        return cronograma
```

Podemos entender sin dificultades el algoritmo gracias a que Python, el lenguaje utilizado, es un lenguaje muy verboso.

2.3. Análisis Algorítmico

2.3.1. Complejidad Temporal

Para analizar la complejidad temporal podemos ver lo que ocurre en el pseudocódigo del algoritmo:

Primero ordenamos el conjunto de pedidos. Esto, con un buen algorítmo de ordenado, será $O(n \cdot log(n))$. Luego entramos en un ciclo donde loopeamos por cada elemento del conjunto de pedidos de tamaño n, (y todas las operaciones interna al mismo son $O(1)$) lo cual hace que el mismo sea $O(n)$ Por lo tanto la complejidad temporal total del algoritmo será $O(n \cdot log(n)) + O(n)$ lo cual se reduce a $O(n \cdot log(n))$ por propiedades de la cota Big O.

2.3.2. Complejidad Espacial

Analizar la complejidad espacial del algoritmo no resulta muy complicado, pues el set de soluciones, en el peor caso, tendrá tantos elemenos como pedidos ingresados. Esto podría ocurrir si, por ejemplo, todos los pedidos son consecutivos unos a otros y estos son todos compatibles entre si. Por lo tanto, la complejidad espacial es de $O(n)$.

2.4. Optimalidad

Aquí demostraremos que la solución programada por nosotros es óptima.

Para esto diremos que nuestro conjunto de pedidos es P tal que $|P| = n$, y al ejecutar nuestro algoritmo el resultado del mismo nos devuelve $A = A[1], ..., A[k]$ tal que $|A| = k$. También diremos que la solución óptima al problema se denominará $O = O[1], ..., O[m]$ tal que $|O| = m$.

Nosotros queremos demostrar que $A = O$, que es equivalente a $|A| = |O|$ (ya que nuestro objetivo es maximizar la cantidad de pedidos compatibles que podemos agrupar).

También tendremos una función F, la cual recibe un pedido y devuelve el horario en el que este finaliza y la función S que hace lo mismo que su contraparte pero para el horario de inicio del pedido.

En particular pedimos que el tiempo de finalización de cada tarea que elige nuestro algoritmo sea mejor o igual al que da la solución óptima $\implies$ Pedir que $|A| = |O|$ es equivalente a pedir $F(A[w]) \leq F(O[w])\ \forall\ w \in [1, k]$.

El resto de la demostración se realizará con inducción. Primero empezamos con $r = 1$. Acá sabemos que $A[1]$ (es decir, la primera tarea de nuestro resultado) terminá antes o a la vez que

$O[1]$ por la naturaleza de nuestro algoritmo $\implies F(A[1]) \leq F(O[1])$.

Ahora asumimos que con $r-1 \in [2, k]$ la condición se cumple, es decir, $F(A[r-1]) \leq F(O[r-1])$ (hipótesis inductiva).

Si $F(A[r-1]) \leq F(O[r-1]) \land F(O[r-1]) \leq S(O[r]) \implies F(A[r-1]) \leq S(O[r])$.

Esta última inecuación significa que cuando nuestro algorítmo elige el pedido $A[r]$ también estaba disponible para elegir al $O[r]$. Eso implica que, como el algorítmo seleccionó a $A[r]$, este "le convenía", es decir, finalizaba antes que $O[r] \implies F(A[r]) \leq F(O[r])$.

Podemos hacer el cambio de variables $r = w \implies F(A[w]) \leq F(O[w]) \; \forall \; w \in [1, k] \implies |A| = |O| \implies A = O \implies$ Nuestra solución es óptima.

2.5. Ejemplos

Los ejemplos de ejecución se encuentran en el repositorio de la materia.

2.6. Análisis Gráfico

Se puede apreciar en el siguiente ejemplo gráfico, cómo a medida que aumentan la cantidad de contratos, la curva que mappea al tiempo que tarda el algorítmo se asemeja a un $y = x \cdot log(x)$.

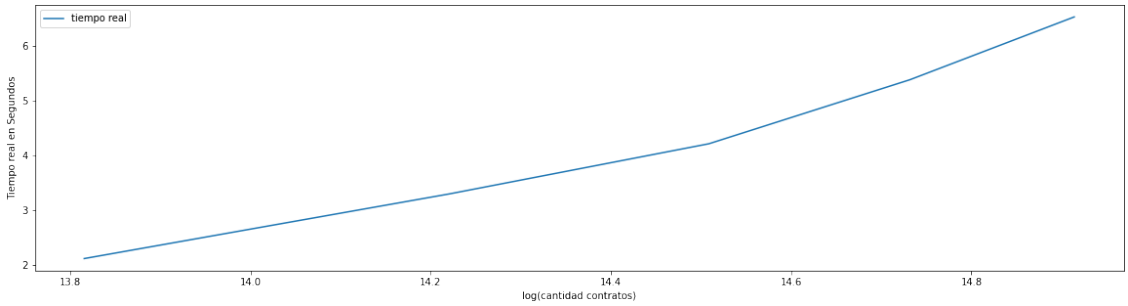


Figura 1: Plot del tiempo que tarda en ejecutar el programa en función del número de contratos

3. Un rompecabezas cuadrado

3.1. Datos

Conocemos que tenemos una superficie de $n \cdot n$ metros cuadrados, donde podemos cubrir con baldosas la superficie del mismo. Además conocemos n es potencia de 2. Estas balosas tienen forma de 'L' y están compuestas por 3 bloques de un metro cuadrado. Debemos plantear un algorítmo óptimo que pueda llenar la superficie, dado que que en una posición (x, y) se encuentra un bloque de un metro cuadrado que no debe ser tapado. Es conveniente pensar a la superficie a cubrir como una matriz de baldosas.

3.2. Recubrimiento

Antes de presentar el algorítmo que busque una solución, debemos demostrar que esta puede existir. Esto se logrará demostrando que los metros cuadrados de la superficie dada permiten po-

sicionar baldosas sin dejar espacios libres y sin hacer cortes entre baldosas.

La demostración seguirá los siguientes pasos:

- Primero sabemos que como la superficie tiene $n \cdot n$ metros cuadrados, necesitaremos n^2 baldosas de un metro cuadrado $\implies$ Necesitamos que n^2 mod $3 \equiv 0$ (ya que si esto cumple, cualquier superficie dada podrá ser recubierta de baldosas en 'L'). Utilizamos el operador % para reemplazar al módulo.
- Como n es una potencia de 2 $\implies$ $n = 2^k$ siendo k un número natural $\implies$ tendremos que recubrir la superficie con $n^2 - 1 = (2^k \cdot 2^k) - 1 = 2^{2k} - 1$ baldosas (el -1 aparece por la posición que no tenemos en cuenta por el sumidero).
- Por lo tanto tenemos que demostrar que $2^{2k} - 1 \,\%\, 3 = 0$. Lo podemos hacer por inducción:
  - Con $k = 0$ tenemos que $2^{2 \cdot 0} - 1 \,\%\, 3 = 1 - 1 \,\%\, 3 = 0 \,\%\, 3 = 0$ se cumple la propiedad.
  - Con $k = r$ asumimos que la propiedad se cumple (hipótesis inductiva) $\implies$ $2^{2r} - 1 \,\%\, 3 = 0$.
  - Con $k = r + 1$ podemos ver que $(2^{2 \cdot (r+1)} - 1) \,\%\, 3 = (2^{2r} \cdot 2^2 - 1) \,\%\, 3 = (4 \cdot 2^{2r} - 1) \,\% \, 3 = (4 \cdot 2^{2r} - 4 + 3) \,\%\, 3 = (4(2^{2r} - 1) + 3) \,\%\, 3 = (4(2^{2r} - 1) \,\%\, 3 + 3 \,\%\, 3) \,\%\, 3$ y como para $k = r$ la propiedad se cumple, $(4 \cdot 0 + 3 \,\%\, 3) \;\%\, 3 = (0 + 3 \,\%\, 3) \,\%\, 3 = 0 \,\%\, 3 = 0$.
- Entonces, como se cumple la propiedad para $k = r \wedge k = r + 1$ $\implies$ La propiedad se cumple para $\forall$ k.
- Como $(2^2k - 1) \,\%3 = 0$, podemos cubrir toda nuestra superficie de n^2 metros cuadrados con baldosas de 'L' sin realizar cortes $\implies$ Existe una solución al problema.

3.3. Algoritmo con División y Conquista

Antes de plantear el pseudocódigo, debemos explicar como funciona el algoritmo:

```
function TileSolver(n, p, x, y):

    if (n == 2):
        Completar el pequeño cuadrado con la baldosa en 'L' que falta en p.
        # Siempre tendremos una baldosa ocupada, ya sea por una de
        # 'L' que pusimos de la recursión anterior o por el sumidero.
        return

    Ubicar una baldosa en 'L' en el centro de la superficie
    dada, es decir, en el middle(p).

    Hacerlo de tal forma que el cuadrante que posee el
    sumidero no se lleve un tercio de nuestra baldosa en 'L'.

    # Lo hacemos así para que cada cuadrante tenga una
    # baldosa menos. Condición ya demostrada de ser
    # necesaria para obtener una solución válida en cada
    # cuadrante (y subcuadrante) del problema.

    TileSolver(n/2, p.superiorIzquierdo, x, y)
    TileSolver(n/2, p.superiorDerecho, x, y)
    TileSolver(n/2, p.inferiorIzquierdo, x, y)
    TileSolver(n/2, p.inferiorDerecho, x, y)

    return
```

3.4. Relación de Recurrencia

Como utilizamos un algoritmo de División y Conquista podemos plantear la siguiente relación de recurrencia para analizar el tiempo que tarda el algoritmo:

$T(n) = a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n)$

Siendo a, b constantes que representan las llamadas recursivas y las partes en que se dividen el algorítmo respectivamente. Para nuestro problema $a = 4$ por las 4 llamadas recursivas y $b = 2$ pues son las partes en que dividimos el problema.

Hasta ahora tenemos:

$T(n) = 4 \cdot T(\frac{n}{2}) + f(n)$

Pero no conocemos a $f(n)$ que representa el costo del resto de operaciones del algoritmo. Sabemos que no realizamos ningún tipo de operación pesada, es decir, verificar un caso base y ubicar una baldosa en el medio son operaciones $O(1)$. Esto implica que la relación de recurrencia resulta ser:

$T(n) = 4 \cdot T(\frac{n}{2}) + O(1)$

3.5. Análisis Algorítmico

3.5.1. Complejidad Temporal

Para el análisis temporal utilizaremos el teorema maestro.

- Primero vemos que como $f(n) = O(1)$, podremos encontrar la forma de $T(n)$ por el teorema maestro, si logramos afirmar que nuestra cota superior tenga la siguiente forma $O(1) = O(n^{log_a b - e}), e > 0$.
- Luego recordamos que $a = 4 \land b = 2 \implies O(1) = O(n^0) = O(n^{log_2 4 - e}) = O(n^{2-e}) \implies 0 = 2 - e \implies e = 2 \implies$ Se cumple la condición que pediamos antes; esta cota permite entonces llegar a un resultado.
- Por el teorema maestro $f(n) = O(n^{log_a b - e}), e > 0 \implies T(n) = \Theta(n^{log_a b}) \implies$ Reemplazando, $T(n) = \Theta(n^{log_2 4}) \implies T(n) = \Theta(n^2)$.

Por lo tanto podemos acotar superior e inferiormente el tiempo del algorítmo con $T(n) = \Theta(n^2)$.

3.5.2. Complejidad Espacial

Nuestro programa generará una matriz de exactamente n^2 valores. A lo largo del algoritmo, las únicas asignaciones que hacemos a memoria ocurren cuando plantamos una baldosa en 'L' en la matriz. Por lo tanto, sabemos que el uso de memoria, en función de n estará doblemente acotado.

Si definimos a $E(n)$ como la función que evalua el tamaño que ocupa el algorítmo en función de $n \implies E(n) = \Theta(n^2)$.