Variedades abelianas e hipótesis de finitud

José Cuevas Barrientos

Resumen. En éste artículo se presentará un resumen de la teoría de variedades abelianas y encaminándose a la demostración de los teoremas de finitud que juegan un rol protagónico en las conjeturas de Tate.

1. Preliminares

Principalmente seguiremos el texto de Mumford **[4]**, y los preliminares geométricos serán citados de Hartshorne **[2]**.

Definición 1.1: Una ***variedad abeliana*** sobre un cuerpo k es una variedad proyectiva A/k que es además un grupo algebraico, vale decir, tal que las funciones:

$$+\colon A \times A \longrightarrow A, \qquad -\mathrm{Id}_A\colon A \longrightarrow A$$

son morfismos de variedades.

El lector puede considerar a las variedades o bien en sentido clásico, o bien como esquemas íntegros de tipo finito sobre k. La última es preferible al hablar de divisores, pero la diferencia no es tan grave.

A priori, las variedades abelianas son sólo objetos grupo entre variedades algebraicas, pero *a posteriori* uno puede probar que:

Proposición 1.2: Los puntos cerrados de una variedad abeliana con los morfismos de definición conforman grupos abelianos (cf. [**4**, pág. 41]).

Un ejemplo recurrente de morfismo de variedades que emplearemos son las traslaciones:

$$\begin{aligned} T_x\colon A &\longrightarrow A \\ y &\longmapsto x + y. \end{aligned}$$

Y recordar lo siguiente de geometría algebraica:

Definición 1.3: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de variedades dominante (i.e., que $f[X]$ sea denso) y finito, entonces se le llama su ***grado*** a $\deg f := [K(X) : K(Y)]$, donde $k(Z)$ denota el cuerpo de funciones racionales sobre la variedad algebraica Z.

Fecha: 12 de mayo de 2023.

Todo morfismo finito es tal que cada punto $y \in Y$ posee finitas preimágenes (cf. [**2**, ex. II.3.4), luego sobre curvas se define $f^*[y] = \sum_{f(x)=y}[x]$, y así, la extensión determina una aplicación $f^*\colon \operatorname{Div} Y \to \operatorname{Div} X$.

Teorema 1.4 (del cuadrado): Sea A/k una variedad abeliana y $D \in \operatorname{Div} A$ un divisor. Entonces, para todo par de puntos $x, y \in A$ se tiene que

$$T_{x+y}^* D + D \equiv T_x^* D + T_y^* D,$$

donde $\equiv$ denota equivalencia linear. Así, para cada divisor fijo uno tiene el siguiente homomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned} \phi_D \colon A &\longrightarrow \operatorname{Pic} A \\ x &\longmapsto [T_x^* D - D]. \end{aligned}$$

(cf. [**4**, págs. 59-60]).

Del teorema del cuadrado vemos dos aplicaciones:

Corolario 1.5: Sea A/k una variedad abeliana, entonces:

1. ϕ_0 es el homomorfismo nulo.
2. Dados $D_1, D_2 \in \operatorname{Div} A$ se cumple que $\phi_{D_1} + \phi_{D_2} = \phi_{D_1+D_2}$.
3. Si $D_1 \equiv D_2$, entonces $\phi_{D_1} = \phi_{D_2}$.
4. Dado $x \in A$ se cumple $\phi_{T_x^* D} = \phi_D$.

Corolario 1.6: Sea A/k una variedad abelian, sea $D \in \operatorname{Div} A$ un divisor efectivo y sea $\mathscr{L} := \mathscr{O}(D)$. Las siguientes son equivalentes:

1. El subgrupo $H = \{x \in A : T_x^* D = D\}$ es finito.
2. $\ker(\phi_D)$ es finito.
3. $\mathscr{L}$ es un haz amplio (cf. [**4**, págs. 60-61]).

Definición 1.7: Se denota por $\operatorname{Pic}^0 A$ al subgrupo de $\operatorname{Pic} A$ dado por:

$$\operatorname{Pic}^0 A := \ker(D \mapsto \phi_D) = \{[D] \in \operatorname{Pic} A : \forall x \in A \quad T_x^* D \equiv D\}.$$

Así, es fácil comprobar que $\phi_D(x) \in \operatorname{Pic}^0 A$, de modo que tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{Pic}^0 A & \longrightarrow & \operatorname{Pic} A & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(A, \operatorname{Pic}^0 A) \\ & & & & D & \longmapsto & \phi_D \end{array}$$

Teorema 1.8: Si $\mathscr{L}$ es un haz amplio, entonces $\phi_{\mathscr{L}}\colon A \to \operatorname{Pic}^0 A$ es sobreyectivo (cf. [**4**, pág. 77]).

A fortiori, el grupo abeliano $\operatorname{Pic}^0 A$ es isomorfo a la variedad abeliana $A/\ker(\phi_{\mathscr{L}})$. Más aún, esto caracteriza una estructura de variedad abeliana así:

Definición 1.9: Sea A/k una variedad abeliana. Se dice que un par $(\hat{A}, \mathscr{P})$ es un ***dual*** de A, si $\hat{A}$ es una variedad abeliana que «parametriza» al $\operatorname{Pic}^0 A$ (formalmente, existe un isomorfismo de grupos entre ellos) y si $\mathscr{P}$ es un haz invertible sobre $A \times \hat{A}$, llamado el ***haz de Poincaré***, tal que:

HP1. $\mathscr{P}|_{A\times\{b\}} \in \operatorname{Pic}^0(A_b)$ para todo $b \in A$.
HP2. $\mathscr{P}|_{\{0\}\times\hat{A}}$ es trivial.

Con la propiedad universal de que si $(T, \mathscr{L})$ es otro par, donde T es una variedad abeliana y $\mathscr{L}$ es un haz invertible sobre $A \times T$ que satisface HP1-2, entonces existe un morfismo regular $\alpha\colon T \to A$ tal que $(\operatorname{Id}\times\alpha)^*\mathscr{P} \cong \mathscr{L}$.

Las propiedades HP1-2 caracterizan el haz de Poincaré por el siguiente teorema:

Teorema 1.10 (de la sierra): Sea X una variedad completa, T una variedad arbitraria y $\mathscr{L}$ un haz invertible sobre $X \times T$. Entonces el conjunto

$$T_1 := \{t \in T : \mathscr{L}|_{A\times\{t\}} \text{ es trivial en } X \times \{t\}\}$$

es cerrado en T. Y si denotamos $\pi_2\colon X \times T_1 \to T_1$ la proyección, entonces $\mathscr{L}|_{X\times T_1} \simeq \pi_2^*\mathscr{M}$ para algún haz invertible $\mathscr{M}$ sobre T_1 (cf. [**4,** pág. 54]).

2. Hipótesis de finitud

Para finalizar querremos estudiar las hipótesis de finitud cuando k es finito:

Teorema 2.1 (Riemann-Roch): Sea A/k una variedad abeliana y sea $\mathscr{L} := \mathscr{O}(D)$ donde $D \in \operatorname{Div} A$, entonces:

$$\deg(\phi_D) = \chi(\mathscr{L})^2, \qquad \chi(\mathscr{L}) = (D^g)/g!,$$

donde $g := \dim A$ y (D^g) denota la auto-intersección de D consigo misma g veces.

Al $\chi(\mathscr{L})$ se le conoce como la ***característica de Euler*** del haz invertible y se define formalmente de la siguiente manera

$$\chi(\mathscr{L}) := \sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim_k H^i(X, \mathscr{L}),$$

(cf. [**2,** pág. 230], ex. III.5.1) donde la suma es finita por el teorema de anulamiento de Grothendieck (cf. [**2,** pág. 208], thm. III.2.7); pero se recomienda al lector tomar el teorema anterior como definición, puesto que la original por cohomologías no será relevante en lo sucesivo.

Teorema 2.2 (de Mumford): Sea A/k una variedad abeliana y sea $\mathscr{L}$ un haz amplio sobre A. Entonces $\mathscr{L}^{\otimes n}$ es muy amplio para $n \geq 3$ (cf. [**4,** pág. 163]).

Recuérdese que:

Definición 2.3: Sea X un S-esquema. Un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ se dice ***muy amplio*** si existe una incrustación $f\colon X \to \mathbb{P}^n_S$ tal que $\mathscr{F} \simeq f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, el haz de torcimientos de Serre (cf. [**2,** pág. 120]).

Una última definición previa:

Definición 2.4: Sea A/k una variedad abeliana. Una ***isogenia*** es un homomorfismo $f\colon A \to B$ que es un morfismo sobreyectivo y finito (luego tiene grado finito) o, equivalentemente, tal que $\ker f$ es finito. Una ***polarización*** es una k-isogenia $\lambda\colon A \to \hat{A}$ tal que al hacer cambio de base $\lambda_{k^{\text{alg}}}\colon A_{k^{\text{alg}}} \to \hat{A}_{k^{\text{alg}}}$ se cumple que $\lambda_{k^{\text{alg}}} = \phi_D$ para algún divisor $D \in \operatorname{Div}(A_{k^{\text{alg}}})$.

Así que con todo esto estamos listos para probar:

Teorema 2.5: Sea k un cuerpo finito. Fijos g, d existen (salvo k-isomorfismo) finitas variedades abelianas de dimensión g y con una polarización de grado d^2.

Demostración: Sea A/k con dimensión g y con una polarización λ de grado d^2, entonces extendiendo escalares tenemos que $\lambda = \phi_D$ donde $d = \chi(\mathscr{L}) = (D^g)/g!$, donde $\mathscr{L} = \mathscr{O}(D)$ es amplio; luego $\mathscr{L}^{\otimes 3}$ es muy amplio y $\chi(\mathscr{L}^{\otimes 3}) = (3D)^g/g! = 3^g d$.

Así vemos que A puede incrustarse en $\mathbb{P}(\Gamma(A, \mathscr{L}^{\otimes 3})) = \mathbb{P}^{3^g d - 1}$ con grado $3^g d(g!)$, luego corresponde con una forma de Chow en conjuntos de $(g+1)$ polinomios homogéneos de grado $3^g d(g!)$ y $3^g d$ variables; pero como el cuerpo base es finito, sólo hay finitas formas de construir a A. □

Cabe destacar que el famoso artículo de Faltings [**1**] (1983) demostró el teorema anterior con k cuerpo de números. El artículo referido es Tate [**5**] (1966).

Referencias

1. Faltings, G. Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. *Invent. math.* **73,** 349-366. doi:`10.1007/BF01388432` (1983).
2. Hartshorne, R. *Algebraic Geometry Graduate Texts in Mathematics* **52** (Springer-Verlag New York, 1977).
3. Milne, J. S. *Abelian Varieties* `https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/av.html` (16 de mar. de 2008).

4. MUMFORD, D. *Abelian Varieties* (Oxford University Press, 1970).
5. TATE, J. Endomorphisms of abelian varieties over finite fields. *Invent. math.* **2,** 134-144. doi:10.1007/BF01404549 (1966).

Correo electrónico: josecuevasbtos@uc.cl
URL: josecuevas.xyz