Variedades abelianas e hipótesis de finitud

José Cuevas Barrientos

Resumen. En éste artículo se presentará un resumen de la teoría de variedades abelianas y encaminándose a la demostración de los teoremas de finitud que juegan un rol protagónico en las conjeturas de Tate.

1. Preliminares

Principalmente seguiremos el texto de Mumford **[4]**, y los preliminares geométricos serán citados de Hartshorne **[2]**.

Definición 1.1: Una ***variedad abeliana*** sobre un cuerpo k es una variedad (= esquema íntegro, de tipo finito) suave y propia A sobre k, que es además un grupo algebraico, vale decir, que viene dotado de un punto racional $o \in A(k)$ y dos morfismos de variedades

$$*\colon A \times A \longrightarrow A, \qquad [-1]_A\colon A \longrightarrow A$$

tal que para todo k-esquema S, la tupla $(A(S), *, [-1]_A, o)$ es un grupo.

El lector puede considerar a las variedades o bien en sentido clásico, o bien como esquemas íntegros de tipo finito sobre k. La última es preferible al hablar de divisores, pero la diferencia no es tan grave.

Al hablar de esquemas debe tener en consideración que $*$ no determina una operación de grupo sobre el conjunto A de puntos esquemáticos (¿qué sería sumar el punto genérico con cualquier otro?); es más sano, en cambio, pensar que para toda extensión de cuerpos K/k, el conjunto de puntos racionales $A(K)$ posee estructura de grupo y estas son compatibles («se van extendiendo las unas a las otras»).

El lector puede contrastar nuestra definición con la de su texto favorito. El siguiente resultado quizá aclare cierta confusión:

Teorema 1.2: Tome un término de cada uno de los siguientes tres conjuntos de propiedades:

- Propio, proyectivo.
- Geométricamente irreducible, irreducible, geométricamente conexo, conexo.
- Suave, geométricamente reducido.

Fecha: 12 de mayo de 2023 (actualizado: 3 de julio de 2025).

Entonces una variedad abeliana sobre un cuerpo k es equivalente a un esquema en grupos sobre k con dichas propiedades (e.g. «proyectivo, conexo y suave» es una definición equivalente).

Demostración: Cfr. [**Stacks**], Tag 0H2U. □

En particular, las variedades abelianas son proyectivas. Si extendemos la definición a un esquema base arbitrario S, esto último puede fallar.

Un ejemplo recurrente de morfismo de variedades que emplearemos son las traslaciones. Tras elegir un punto racional $x \in A(k)$, se define

$$T_x \colon A \longrightarrow A, \qquad y \longmapsto x + y.$$

Y recordar lo siguiente de geometría algebraica:

Definición 1.3: Sea $f \colon X \to Y$ un morfismo de variedades dominante (i.e., que $f[X]$ sea denso) y finito, entonces se le llama su ***grado*** a $\deg f := [K(X) : K(Y)]$, donde $k(Z)$ denota el cuerpo de funciones racionales sobre la variedad algebraica Z.

Todo morfismo finito es tal que cada punto $y \in Y$ posee finitas preimágenes (cf. [**2**], ex. II.3.4), luego sobre curvas se define $f^*[y] = \sum_{f(x)=y}[x]$, y así, la extensión determina una aplicación $f^* \colon \operatorname{Div} Y \to \operatorname{Div} X$.

Teorema 1.4 (del cuadrado): Sea A/k una variedad abeliana y $D \in \operatorname{Div} A$ un divisor. Entonces, para todo par de puntos $x, y \in A$ se tiene que

$$T_{x+y}^* D + D \equiv T_x^* D + T_y^* D,$$

donde $\equiv$ denota equivalencia linear. Así, para cada divisor fijo uno tiene el siguiente homomorfismo de grupos:

$$\phi_D \colon A \longrightarrow \operatorname{Pic} A, \qquad x \longmapsto [T_x^* D - D].$$

(cfr. [**4,** págs. 59-60]).

Del teorema del cuadrado vemos dos aplicaciones:

Corolario 1.4.1: Sea A/k una variedad abeliana, entonces:

1. ϕ_0 es el homomorfismo nulo.
2. Dados $D_1, D_2 \in \operatorname{Div} A$ se cumple que $\phi_{D_1} + \phi_{D_2} = \phi_{D_1+D_2}$.
3. Si $D_1 \equiv D_2$, entonces $\phi_{D_1} = \phi_{D_2}$.
4. Dado $x \in A$ se cumple $\phi_{T_x^* D} = \phi_D$.

Corolario 1.4.2: Sea A/k una variedad abeliana, sea $D \in \operatorname{Div} A$ un divisor efectivo y sea $\mathscr{L} := \mathscr{O}(D)$. Las siguientes son equivalentes:

1. El subgrupo $H = \{x \in A : T_x^* D = D\}$ es finito.
2. $\ker(\phi_D)$ es finito.
3. $\mathscr{L}$ es un haz amplio (cfr. [**4,** págs. 60-61]).

Definición 1.5: Se denota por $\operatorname{Pic}^0 A$ al subgrupo de $\operatorname{Pic} A$ dado por:

$$\operatorname{Pic}^0 A := \ker(D \mapsto \phi_D) = \{[D] \in \operatorname{Pic} A : \forall x \in A \quad T_x^* D \equiv D\}.$$

Así, es fácil comprobar que $\phi_D(x) \in \operatorname{Pic}^0 A$, de modo que tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \operatorname{Pic}^0 A & \longrightarrow & \operatorname{Pic} A & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(A(k), \operatorname{Pic}^0 A) \\ & & & D & \longmapsto & \phi_D. \end{array}$$

La asociación $S \mapsto \operatorname{Pic}(A \times_k S)$ es funtorial contravariante sobre k-esquemas S, pero no goza de buenas propiedades. En cambio $S \mapsto \operatorname{Pic}(A_S)/\operatorname{Pic}(S)$, donde $\operatorname{Pic}(S) \leq \operatorname{Pic}(A_S)$ mediante el morfismo estructural, goza de la propiedad de que corresponde con los puntos S-valuados de un k-esquema $\mathbf{Pic}_{A/k}$. Este esquema no es algebraico, pero por razones obvias; en el caso de curvas elípticas, se descompone como suma disconexa

$$\mathbf{Pic}_{E/k} = \coprod_{d \in \mathbb{Z}} \mathbf{Pic}_{E/k}^{(d)},$$

donde, para una extensión K/k de cuerpos, $\mathbf{Pic}_{E/k}^{(d)}(K)$ corresponde a los divisores de grado d salvo equivalencia lineal en E_K. Ahora sí, cada una de estas componentes conexas es una variedad suave proyectiva; esto último también aplica para variedades abelianas.

Teorema 1.6: Si $\mathscr{L}$ es un haz amplio, entonces $\phi_{\mathscr{L}} \colon A \to \mathbf{Pic}_{A/k}^0$ es sobreyectivo (cfr. [**4,** pág. 77]).

A fortiori, el grupo algebraico conmutativo $\mathbf{Pic}_{A/k}^0$ es isomorfo a la variedad abeliana $A/\ker(\phi_{\mathscr{L}})$. Más aún, esto caracteriza una estructura de variedad abeliana así:

Definición 1.7: Sea A/k una variedad abeliana. Se dice que un par $(\hat{A}, \mathscr{P})$ es un ***dual*** de A, si $\hat{A}$ es una variedad abeliana que «parametriza» al $\mathbf{Pic}_{A/k}^0$ (formalmente, existe un isomorfismo de grupos entre ellos) y si $\mathscr{P}$ es un haz invertible sobre $A \times \hat{A}$, llamado el ***haz de Poincaré***, tal que:

HP1. $\mathscr{P}|_{A \times_k \{L\}} \simeq \mathscr{L}$ para todo $\mathscr{L} \equiv L \in \operatorname{Pic}^0(A) = \mathbf{Pic}_{A/k}^0(k)$.
HP2. $\mathscr{P}|_{\{0\} \times \hat{A}} \simeq \mathscr{O}_{\hat{A}}$ es trivial.

Con la propiedad universal de que si $(T, \mathscr{L})$ es otro par, donde T es una variedad abeliana y $\mathscr{L}$ es un haz invertible sobre $A \times T$ que satisface HP1-2, entonces existe un k-morfismo $\alpha \colon T \to A$ tal que $(\operatorname{Id} \times \alpha)^* \mathscr{P} \cong \mathscr{L}$.

Las propiedades HP1-2 caracterizan el haz de Poincaré por el siguiente teorema:

Teorema 1.8 (del subibaja): Sea X una variedad completa, T una variedad arbitraria y $\mathscr{L}$ un haz invertible sobre $X \times T$. Entonces el conjunto

$$T_1 := \{t \in T : \mathscr{L}|_{A\times\{t\}} \text{ es trivial en } X \times \{t\}\}$$

es cerrado en T. Y si denotamos $\pi_2 \colon X \times T_1 \to T_1$ la proyección, entonces $\mathscr{L}|_{X\times T_1} \simeq \pi_2^*\mathscr{M}$ para algún haz invertible $\mathscr{M}$ sobre T_1 (cfr. [**4,** pág. 54]).

2. Hipótesis de finitud

Para finalizar querremos estudiar las hipótesis de finitud cuando k es finito:

Teorema 2.1 (Riemann-Roch): Sea A/k una variedad abeliana y sea $\mathscr{L} := \mathscr{O}(D)$ donde $D \in \operatorname{Div} A$, entonces:

$$\deg(\phi_D) = \chi(\mathscr{L})^2, \qquad \chi(\mathscr{L}) = (D^g)/g!,$$

donde $g := \dim A$ y (D^g) denota la auto-intersección de D consigo misma g veces.

Al $\chi(\mathscr{L})$ se le conoce como la ***característica de Euler*** del haz invertible y se define formalmente de la siguiente manera

$$\chi(\mathscr{L}) := \sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim_k H^i(X, \mathscr{L}),$$

(cfr. [**2,** pág. 230], ex. III.5.1) donde la suma es finita por el teorema de anulamiento de Grothendieck (cfr. [**2,** pág. 208], thm. III.2.7); pero se recomienda al lector tomar el teorema anterior como definición, puesto que la original por cohomologías no será relevante en lo sucesivo.

Teorema 2.2 (de Mumford): Sea A/k una variedad abeliana y sea $\mathscr{L}$ un haz amplio sobre A. Entonces $\mathscr{L}^{\otimes n}$ es muy amplio para $n \geq 3$ (cfr. [**4,** pág. 163]).

Recuérdese que:

Definición 2.3: Sea X un S-esquema. Un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ se dice ***muy amplio*** si existe una incrustación $f \colon X \to \mathbb{P}^n_S$ tal que $\mathscr{F} \simeq f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, el haz de torcimientos de Serre (cfr. [**2,** pág. 120]).

Una última definición previa:

Definición 2.4: Sea A/k una variedad abeliana. Una ***isogenia*** es un homomorfismo $f \colon A \to B$ que es un morfismo sobreyectivo y finito (luego tiene grado finito) o, equivalentemente, tal que $\ker f$ es finito. Una ***polarización*** es una k-isogenia $\lambda \colon A \to \hat{A}$ tal que al hacer cambio de base $\lambda_{k^{\text{alg}}} \colon A_{k^{\text{alg}}} \to \hat{A}_{k^{\text{alg}}}$ se cumple que $\lambda_{k^{\text{alg}}} = \phi_D$ para algún divisor $D \in \operatorname{Div}(A_{k^{\text{alg}}})$.

Así que con todo esto estamos listos para probar:

Teorema 2.5: Sea k un cuerpo finito. Fijos g, d existen (salvo k-isomorfismo) finitas variedades abelianas de dimensión g y con una polarización de grado d^2.

Demostración: Sea A/k con dimensión g y con una polarización λ de grado d^2, entonces extendiendo escalares tenemos que $\lambda = \phi_D$ donde $d = \chi(\mathscr{L}) = (D^g)/g!$, donde $\mathscr{L} = \mathscr{O}(D)$ es amplio; luego $\mathscr{L}^{\otimes 3}$ es muy amplio y $\chi(\mathscr{L}^{\otimes 3}) = (3D)^g/g! = 3^g d$.

Así vemos que A puede incrustarse en $\mathbb{P}(\Gamma(A, \mathscr{L}^{\otimes 3})) = \mathbb{P}^{3^g d-1}$ con grado $3^g d(g!)$, luego corresponde con una forma de Chow en conjuntos de $(g+1)$ polinomios homogéneos de grado $3^g d(g!)$ y $3^g d$ variables; pero como el cuerpo base es finito, sólo hay finitas formas de construir a A. $\square$

Cabe destacar que el famoso artículo de Faltings **[1]** (1983) demostró el teorema anterior con k cuerpo de números. El artículo referido es Tate **[5]** (1966).

Esta fue la demostración original que presenté en el seminario, aunque la necesidad de hacer un cambio de base resulta molesta ya que pueden vivir en extensiones sucesivamente más grandes. El siguiente resultado parcha dicha posibilidad:

Proposición 2.6: Sea A/k una variedad abeliana y $\varphi\colon A \to A^t$ una polarización. Entonces $2\varphi = \varphi_L$ para algún $L \in \operatorname{Pic} A$.

Demostración: Basta notar que $\mathscr{L} := (\mathrm{Id}_A, \varphi)^*\mathscr{P}$ (donde $\mathscr{P}$ es el haz de Poincaré) es un haz sobre A tal que $\varphi_{\mathscr{L}} = \varphi + \widehat{\varphi} = 2\varphi$, donde $\widehat{\varphi}$ denota el homomorfismo dual.

Ahora basta probar que $\widehat{\varphi} = \varphi$; para ello podemos pasar a la clausura algebraica y suponer que k es algebraicamente cerrado. Así $\varphi = \varphi_M$ para algún $M \in \operatorname{Pic} A$ y, entonces,

$$\varphi(a) = T_a^*\mathscr{M} \otimes \mathscr{M}^{-1} = (m^*\mathscr{M} \otimes \pi_1^*\mathscr{M} \otimes \pi_2^*\mathscr{M})|_{\{a\}\times_A A},$$

donde $m\colon A \times_k A \to A$ es el morfismo de multiplicación y $\pi_j\colon A \times_k A \to A$ es la proyección. Llamando $\Lambda(\mathscr{M}) := m^*\mathscr{M} \otimes \pi_1^*\mathscr{M} \otimes \pi_2^*\mathscr{M}$, vemos que $\widehat{\varphi}(a) \simeq \Lambda(\mathscr{M})|_{A\times_k\{a\}}$, el cual es exactamente el mismo haz (tras identificar las variedades). $\square$

Referencias

Stacks. De Jong, A. J. *et al.* *Stacks project* `https://stacks.math.columbia.edu/`.

1. Faltings, G. Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. *Invent. math.* **73,** 349-366. doi:10.1007/BF01388432 (1983). Reimp. como *Finiteness Theorems for Abelian Varieties over Number Fields* en *Arithmetic Geometry* (eds. Cornell, G. y Silverman, J. H.) (Springer-Verlag, 1986), 9-27.
2. Hartshorne, R. *Algebraic Geometry Graduate Texts in Mathematics* **52** (Springer-Verlag New York, 1977).
3. Milne, J. S. *Abelian Varieties* https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/av.html (16 de mar. de 2008).
4. Mumford, D. *Abelian Varieties* (Oxford University Press, 1970).
5. Tate, J. Endomorphisms of abelian varieties over finite fields. *Invent. math.* **2,** 134-144. doi:10.1007/BF01404549 (1966).

Correo electrónico: josecuevasbtos@uc.cl
URL: josecuevas.xyz