El teorema de Chevalley-Weil

Y la (fallida) extensión a puntos algebraicos

José Cuevas Barrientos

Resumen. El objetivo de esta charla es presentar el teorema de Chevalley-Weil que permite «elevar puntos racionales en recubrimientos étale» y mostrar como el análogo en puntos algebraicos (es decir, definidos en extensiones algebraicas de grado acotado) falla.

1. Teorema de Chevalley-Weil

Éste resultado, en el caso más clásico, dice lo siguiente:

Teorema 1.1 (Chevalley-Weil): Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo no ramificado entre variedades propias sobre un cuerpo global K. Entonces existe una extensión finita L/K tal que para todo $y \in Y(K)$ existe $x \in X(L)$ con $f(x) = y$.

Nótese que ninguna de las hipótesis puede ser relajada: la máquina de contraejemplos son los morfismos de curvas X de tipo general hacia $\mathbb{P}^1_K$. Si relajamos la condición de no ramificado, entonces falla ya que X siempre tendrá finitos puntos en cualquier cuerpo numérico por la conjetura de Mordell; y si relajamos que X sea propia, entonces podemos borrar los puntos de ramificación.

En realidad, lo que demostraremos es el siguiente enunciado:

Teorema 1.2: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo no ramificado entre variedades propias sobre un cuerpo global K. Entonces existe $d \in \mathcal{O}_K$ tal que todo punto racional $y \in Y(K)$ es la imagen de un punto racional $x \in X(L)$ sobre una extensión finita L/K cuyo discriminante $\mathfrak{d}_{L/K} \mid d\mathcal{O}_K$.

En efecto, basta agrupar todas las extensiones con discriminante $\mathfrak{d}_{L/K} \mid d\mathcal{O}_K$, las cuales serán finitas por el teorema de Hermite-Minkowski.

1.1. Demostración.

Seguiremos la prueba en [**2**] (el lector también se le recomienda ver las pruebas en Lang [**7,** págs. 45 ss.], §2.8 y Bombieri y Gubler [**1,** págs. 335 ss.], §10.3). En lugar de las hipótesis mencionadas (vid.

Fecha: 4 de abril de 2025.

obs. 1.4.1 más abajo), supondremos que X, Y son normales, cuasiproyectivas y que K es un cuerpo numérico.

He aquí la definición formal de no ramificado. Asociado a un morfismo entre esquemas $f\colon X \to S$ tenemos el haz de diferenciales relativos $\Omega^1_{X/S}$ el cual es cuasicoherente y, en abiertos afines $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$, posee un isomorfismo natural

$$\operatorname{Hom}_B(\Gamma(\operatorname{Spec} B, \Omega^1_{X/S}), M) \cong \operatorname{Der}_A(B, M),$$

donde M recorre los B-módulos y $\operatorname{Der}_A(B, M)$ corresponde al módulo de A-derivaciones (vid. **[Stacks],** `Section 00RM` y `Section 01UM`).

Decimos que f es *no ramificado* si es localmente de tipo finito y $\Omega^1_{X/S} = 0$; y que es *étale* si es no ramificado y suave (o equivalentemente, no ramificado y plano). Si X, Y son variedades normales (e.g., suaves) y f es un recubrimiento topológico, entonces f es étale.

Antes de presentar el resultado central hemos de dar una definición de «punto S-entero»:

Definición 1.3: Sea K un cuerpo global y $S \subseteq \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K)$ un conjunto finito de lugares primos. Dada una variedad cuasiproyectiva X con un encaje $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_K$, diremos que un punto racional $P \in X(K)$ es un punto S-entero, denotado $P \in X(\mathcal{O}_{K,S})$, si la reducción modulo $\mathfrak{p}$ de P en $\mathbb{P}^N_K$ (dado por elegir $P = [a_0 : a_1 : \cdots : a_N]$, donde $\mathfrak{p} \nmid a_j$ para todo j y reducir después) cae en la reducción módulo $\mathfrak{p}$ de X (dado por tomar ecuaciones polinomiales que se anulen en X a coeficientes enteros coprimos y reducir) para todo $\mathfrak{p} \notin S$.

Más generalmente, diremos que un punto geométrico $P \in X(L)$ es S-entero, donde L/K es una extensión finita, si es $\overline{S}$-entero, donde $\overline{S} \subseteq \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_L)$ es el conjunto de primos $\mathfrak{P}$ tales que $\mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_K \in S$.

La manera esquemática de realizar el proceso anterior, es invocar el criterio valuativo de ser propio (vid. **[Stacks],** `Section 0BX4`).

Teorema 1.4 (Chevalley-Weil para puntos enteros): Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo finito no ramificado entre variedades cuasiproyectivas sobre un cuerpo numérico K. Existe un conjunto finito de lugares $S \subseteq M^0_K$ tal que para todo $y \in Y(\mathcal{O}_{K,S})$ existe un punto algebraico $x \in X(K^{\mathrm{alg}})$ tal que $f(x) = y$ y la extensión $\Bbbk(x)/K$ se ramifica sólo en primos de S.

Demostración: Vamos a separar por casos:

(i) Supongamos que f es un recubrimiento de Galois, es decir, f es étale y $\deg f = |\operatorname{Aut}_Y(X)|$. Sea $G := \operatorname{Aut}_Y(X)$, entonces para un punto geométrico $x \in X(\mathbb{C})$, vemos que G actúa fiel y transitivamente sobre la fibra $X_{f(x)}$ pues hay tantos elementos en G como puntos en la fibra, y un automorfismo de $X(\mathbb{C})$ que respeta a $f(\mathbb{C})$ con un punto fijo ha de ser la identidad (esto es un ejercicio de topología; sino cfr. [**4,** pág. 71]).

Ahora, construya $\mathcal{O}_K$-modelos de tipo finito de X e Y (i.e., tras elegir polinomios con $X = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_r)$, limpie denominadores) de modo que tengamos un $\mathcal{O}_K$-morfismo $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ cuya fibra genérica es f; sea $S \subseteq \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K)$ el conjunto finito de primos en donde la reducción de F no es un morfismo suave. Así, G actúa sobre $\overline{F}\colon \overline{X} \to \overline{Y}$, donde $\overline{X}$ es la restricción al abierto $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{K,S}) = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K) \smallsetminus S$.

Podemos agrandar S de modo que $\overline{X} \to \overline{Y}$ siga siendo un recubrimiento étale finito (la razón es que $\Omega^1_{\overline{X}/\overline{Y}} = 0$ y $\overline{F}$ es suave en abiertos densos). Así la acción de G en $\overline{X} \to \overline{Y}$ no tiene puntos fijos geométricos.

Sea $Q \in Y(\mathcal{O}_{K,S})$ y sea $P \in X$ tal que $f(P) = Q$. Queremos ver que Q es S-entero. Como bien señalamos antes, que Q sea S-entero equivale a ver que la función

$$\overline{Q}\colon \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{K,S}) \longrightarrow \overline{Y}, \qquad \mathfrak{p} \longmapsto Q \mod \mathfrak{p}$$

determina un $\mathcal{O}_{K,S}$-morfismo. Sea $L := \Bbbk(P)$ y $\overline{S} \subseteq \operatorname{Spec} \mathcal{O}_L$ los primos sobre S, entonces el criterio valuativo de ser propio nos da el siguiente diagrama conmutativo (donde las flechas rojas son inclusiones de anillos):

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} L \arrow[r, red] \arrow[dd, "\overline{P}"'] & \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{L,S}) \arrow[d, red] \arrow[ddl, dashed, "P"'] \\
& \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{K,S}) \arrow[d, "\overline{Q}"] \\
\overline{X} \arrow[r, "\overline{F}"'] & \overline{Y}
\end{tikzcd}$$

Por lo que, P es S-entero.

Finalmente, sea N la clausura normal de $\Bbbk(P)/K$ (la mínima extensión de Galois que lo contiene), sea $\Gamma := \operatorname{Gal}(N/K)$, sea $\mathfrak{Q} \in \mathcal{O}_N$ tal que $\mathfrak{Q} \cap \mathcal{O}_K \notin S$ y sea $\mathfrak{P} := \mathfrak{Q} \cap \mathcal{O}_L$. Queremos ver que L/K es no ramificada en $\mathfrak{P}$.

En caso contrario, sea $I := I_{\mathfrak{Q}}(N/K) \leq \Gamma$ el subgrupo de inercia (cfr. Neukirch [**10,** pág. 168]); si I fija a P (note que Γ actúa sobre la fibra X_Q por conjugación en las coordenadas), entonces $I = \{1\}$ es trivial y ganamos (ya que contiene al subgrupo de ramificación), por lo que supondremos que hay $\sigma \in I$ con $P^\sigma \neq P$. Como G actúa fiel y transitivamente en la fibra X_Q, existe un único $g \in G$ tal que $g(P) = P^\sigma$, y como $P^\sigma \equiv P \pmod{\mathfrak{P}}$, vemos que $g(P) \equiv P \pmod{\mathfrak{P}}$. Pero como P es S-entero, se cumple que $P \mod \mathfrak{P}$ yace en $\overline{X}$, por lo que $\overline{G}$ no es fiel en $\overline{X}$ lo que es absurdo.

(ii) En general, sabemos que existe un recubrimiento étale $\pi\colon X' \to X$ tal que $\pi \circ f\colon X' \to Y$ es de Galois. (Este resultado es análogo a como dada una extensión separable finita K/k, existe otra L/K tal que la torre L/k es de Galois.) ∎

De esta versión se siguen ambas versiones del teorema de Chevalley-Weil clásico empleando, nuevamente, el teorema de Hermite-Minkowski que dice que hay finitas extensiones que son no ramificadas fuera de un conjunto finito de primos fijo (cfr. [**10,** pág. 203], Th. III.2.13).

Observación 1.4.1: Un comentario sobre las hipótesis del teorema de Chevalley-Weil. Tanto [**7**] como [**2**] exigen que las variedades sean proyectivas, mientras que [**1**] solo exige propio. Por lo demás, [**7**] exige que sean normales. La generalidad de [**2**] es que, en lugar de exigir que los morfismos sean no ramificados, exige en cambio que exista un lugar $\sigma\colon K \to \mathbb{C}$, mediante el cual $f_\sigma\colon X(\mathbb{C}) \to Y(\mathbb{C})$ sea un recubrimiento topológico, lo cual es estrictamente más débil que «ser no ramificado» (allí se incluye un ejemplo) aunque coincide cuando X e Y son normales.

2. Contraejemplo(s)

Antes de presentar el contraejemplo, veamos un par de invariantes:

Definición 2.1: Sea X un esquema algebraico definido sobre un cuerpo k. Para un entero $d \geq 1$, denotamos

$$X(k^{\mathrm{alg}}_{\leq d}) := \{x \in X(k^{\mathrm{alg}}) : [\Bbbk(x) : k] \leq d\}$$

al conjunto de puntos geométricos de grado acotado por d. Denotaremos por $\operatorname{a.irr}_k(X)$ al mínimo d tal que $X(k^{\mathrm{alg}}_{\leq d})$ es infinito, y denotaremos por $\operatorname{a.irr}(X)$ al ínfimo de $\operatorname{a.irr}_L(X)$, donde L recorre las extensiones finitas de k.

Definición 2.2: Sea X una curva conexa sobre un cuerpo k. Definimos la (k-)***gonalidad*** $\gamma_{X/k}$ como el mínimo grado de un k-morfismo dominante $f\colon X \to \mathbb{P}^1_k$. Si $\deg f = \gamma_{X/k}$, entonces decimos que el morfismo f es ***gonal***. Definimos la gonalidad (geométrica) γ_X como $\gamma_X = \gamma_{X/k^{\mathrm{alg}}}$.

Observación 2.2.1: Un resultado de Frey da la cota $\operatorname{a.irr}_K(X) \geq \frac{1}{2}\gamma_{X/K}$.

Sea K un cuerpo numérico cualquiera. Elijamos un polinomio mónico irreducible $f \in K[x]$ de grado ≥ 15, y construyamos la curva hiperelíptica dada por (la clausura proyectiva de)

$$C\colon \qquad y^2 = f(x).$$

Se sigue, pues, que C es suave (por el criterio del jacobiano, esto equivale a que f y f' no compartan factores comunes) y es geométricamente íntegra. Aplicando la fórmula de Riemann-Hurwitz a la función racional $(x, y) \mapsto y$ que induce un morfismo gonal $C \to \mathbb{P}^1_K$ de grado 2, obtenemos que

$$2g(C) - 2 = -4 + \sum_{P \in C} (e_P - 1)[\Bbbk(P) : K],$$

donde un punto $P = (x, y) \in C(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$ es de ramificación syss o bien es el único punto al infinito, o bien tiene $y = 0$. Como f es irreducible, no tiene raíces repetidas, así que hay $\deg(f) + 1$ puntos de ramificación, por lo que,

$$g(C) = \left\lfloor \frac{\deg(f) + 1}{2} \right\rfloor - 1 \geq 7.$$

Ahora bien, conviene calcular el grupo fundamental étale de C. Esta es una tarea difícil, por lo que haremos el siguiente truco: sobre los complejos, el grupo fundamental topológico $\pi_1^{\mathrm{top}}(C(\mathbb{C}))$ cuyo cociente de abelianización corresponde al primer grupo de homología $H_1(C(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g(C)}$ (teorema de Poincaré-Hurewicz, cfr. [**4,** pág. 181], §2.14.3) y, así mismo, este grupo posee por cociente a los grupos $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ para todo $N \geq 1$. Esto implica que $C(\mathbb{C})$ admite un recubrimiento topológico de grado N (vid. [**4,** pág. 75], §1.6.12) y, por tanto, $C_{\mathbb{C}}$ posee un recubrimiento étale de grado N (por GAGA); finalmente, como $\pi_1^{\text{ét}}(C/\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}) \cong \pi_1^{\text{ét}}(C/\mathbb{C})$, vemos que este recubrimiento étale está definido en algún cuerpo numérico L. En resumen, para todo entero fijo $n \geq 1$ existe un cuerpo numérico L tal que C_L posee un recubrimiento étale X_L de grado n.

Podemos suponer que X_L no es hiperelíptica (por un teorema de Maclachlan, en general; vid. §**??**) y que $n = p \geq 5$ es un número primo impar. Ahora bien, sea $F\colon X_L \to \mathbb{P}^1_L$ un morfismo gonal, y sea $G\colon X \to C \to \mathbb{P}^1_L$ la composición del recubrimiento étale con el morfismo gonal de C. Si F y G no son independientes, entonces se factorizan por un morfismo dominante $h\colon X_L \to Y_L$ lo que implica que $\deg F = [K(X) : h^\sharp K(Y)][h^\sharp K(Y) : F^\sharp K(\mathbb{P}^1)]$ no es coprimo con $\deg G = 2p$, así que, $\gamma_{X/L} = p$.

Si, por el contrario, F y G sí son independientes, aplicamos la desigualdad de Castelnuovo-Severi para obtener que

$$g(X) \leq (\gamma_{X/K} - 1)(2p - 1) \iff \gamma_{X/K} \geq 1 + \frac{p(g(C) - 1) + 1}{2p - 1},$$

donde sustuimos $g(X) = p(g(C)-1)+1$ por la fórmula de Riemann-Hurwitz.

Finalmente, la función $n \mapsto \frac{an+1}{2n-1}$ es estrictamente decreciente, por lo que para todo n se cumple que $\frac{an+1}{2n-1} > a/2$, es decir

$$\gamma_{X/K} \geq \left\lceil 1 + \frac{g(C) - 1}{2} \right\rceil \geq 5.$$

Pero por el teorema de Frey, se sigue que $\operatorname{a.irr}_K(X) \geq 3$. Así que el morfismo no ramificado $X \to C$ no puede satisfacer un «principio de tipo Chevalley-Weil».

Apéndice A. Preliminares

A.1. Herramientas aritméticas. Recordemos que existe una inyección desde los puntos K-algebraicos de grado d en una curva X hacia los puntos K-racionales del producto simétrico $X^{(d)} := X^d/S_d$. Tras fijar un punto racional $o \in X(K)$, denotaremos por $\Phi\colon X^{(d)} \to \operatorname{Jac}_K(X)$ al morfismo de

Hilbert-Chow cuya imagen es la subvariedad cerrada W_d. Este está definido como la composición del isomorfismo $X^{(d)} \to \mathbf{Hilb}^d_{X/K}$ con el esquema de Hilbert dado por identificar puntos en $X^{(d)}$ con divisores *efectivos* de grado d, con el morfismo $\mathbf{Hilb}^d_{X/K} \to \mathrm{Jac}_K(X)$ dado, en puntos K-racionales, por $D \mapsto D - d[o]$.

Lema A.1: Para una curva proyectiva, suave y geométricamente íntegra X sobre un cuerpo numérico K, se cumple que:

1. Si $\Phi \restriction X^{(d)}(K)$ no es inyectivo, entonces existe un K-morfismo $X \to \mathbb{P}^1_K$ de grado $\leq d$.
2. Si existe un punto racional $\boldsymbol{P} \in W_d(K)$ y $b_1, \dots, b_{3^d} \in \mathrm{Jac}(X)(K^{\mathrm{alg}})$ puntos distintos, tales que cada $\boldsymbol{P} \pm b_j \in W_d(K^{\mathrm{alg}})$, entonces existe un K-morfismo dominante $X \to \mathbb{P}^1_K$ de grado $\leq 2d$.

Demostración:

1. Como Φ no es inyectivo, existen divisores efectivos $D_1 \neq D_2 \in \mathrm{Div}^+(X)$ de grado d tales que $D_1 - d[o] \sim D_2 - d[o]$ en $\mathrm{Pic}\, X$. Luego, existe $f \in K(X)$ tal que $\mathrm{div}\, f = D_1 - D_2$ y, como $\deg(\mathrm{div}\, f)_0 \leq \deg D_1 = d$, entonces $f \colon X \to \mathbb{P}^1_K$ tiene grado $\leq d$.
2. Sean $Q_j^{(\ell)}, R_j^{(\ell)} \in X(K^{\mathrm{alg}})$ puntos geométricos (con $1 \leq j \leq d$) tales que
$$\Phi\left(\sum_{j=1}^d Q_j^{(\ell)}\right) = \Phi(\boldsymbol{P}) + b_\ell, \qquad \Phi\left(\sum_{j=1}^d R_j^{(\ell)}\right) = \Phi(\boldsymbol{P}) - b_\ell.$$
Así, $2\boldsymbol{P} \sim \sum_{j=1}^d ([Q_j^{(\ell)}] + [R_j^{(\ell)}])$.
Supongamos que se cumple que
$$\forall \ell, \qquad 2\boldsymbol{P} = \sum_{j=1}^d [Q_j^{(\ell)}] + \sum_{j=1}^d [R_j^{(\ell)}]. \tag{1}$$
Así, vemos que el divisor $\sum_{j=1}^d [R_j^{(\ell)}]$ solo depende de las elecciones de $Q_j^{(\ell)}$. Si $\boldsymbol{P} = \sum_{j=1}^d P_j$ es tal que los P_j's son distintos dos a dos, entonces sea $\epsilon_j \in \{0, 1, 2\}$ la cantidad de veces que aparece P_j en $(Q_1, \dots, Q_d)$; así vemos que los Q_j's están completamente determinados por los ϵ_j los cuales satisfacen que
$$\sum_{j=1}^d \epsilon_j = d.$$
La cantidad de ϵ_j's que satisfacen la ecuación anterior son menos que 3^d, por lo que no puede darse la igualdad (1) siempre; así que ha de existir un morfismo $f \colon X \to \mathbb{P}^1_K$ dominante de grado $\leq 2d$ tal que la diferencia es $\mathrm{div}\, f$. $\square$

El siguiente resultado aparece en **[5]**.

Proposición A.2 (Faltings-Frey): Para una curva proyectiva, suave y geométricamente íntegra X sobre un cuerpo numérico K, se cumple que

$$\frac{1}{2}\gamma_{X/K} \leq \operatorname{a.irr}_K(X) \leq \gamma_{X/K}.$$

Más aún, las desigualdades son agudas en virtud de Smith y Vogt **[11]**, Th. 1.

Demostración: Nótese que la desigualdad $\operatorname{a.irr}_K(X) \leq \gamma_{X/K}$ siempre se cumple, ya que dado un morfismo gonal $X \to \mathbb{P}^1_K$, la preimagen de cualquier punto racional de $\mathbb{P}^1(K)$ ha de ser un punto de grado $\leq \gamma_{X/k}$.

Fijemos $d := \operatorname{a.irr}_K(X)$, entonces el producto simétrico $X^{(d)} := X^d/S_d$ tiene infinitos puntos K-racionales. Consideremos el morfismo de Hilbert-Chow $\Phi\colon X^{(d)} \to W_d \subseteq \operatorname{Jac}_K(X)$.

Si $\Phi \restriction C^{(d)}(K)$ no es inyectivo, entonces concluimos por la proposición anterior que $\gamma_{X/k} \leq \operatorname{a.irr}_K(X)$. Así, podemos suponer que sí es inyectivo, por lo que, $W_d(K)$ es infinito y, por el «teorema grande de Faltings» (cfr. [**3**]), concluimos que hay $x_1, \dots, x_n \in W_d(K)$ y subvariedades abelianas $A_n \subseteq \operatorname{Jac}_K(X)$ tales que

$$W_d(K) = \bigcup_{j=1}^{n} (x_j + A_j(K)),$$

como $W_d(K)$ es infinito, algún A_j ha de serlo, así que concluimos por el segundo inciso del lema anterior. □

A.2. Herramientas geométricas.

Definición A.3: Sean X, Y, Z curvas íntegras sobre un cuerpo K. Se dice que un par de K-morfismos dominantes $f\colon X \to Y$ y $g\colon X \to Z$ son ***independientes*** si no existe un K-morfismo $h\colon X \to X'$ de grado ≥ 2 tal que factorice a ambos.

Corolario A.3.1: Un par de morfismos dominantes $f\colon X \to Y$ y $g\colon X \to Z$ entre curvas proyectivas íntegras sobre un cuerpo son independientes syss X es birracional a su imagen mediante $(f, g)\colon X \to Y \times_K Z$.

Demostración: Llamemos $\phi := (f, g)$. Es claro que si f, g no son independientes y se factorizan a través de $h\colon X \to X'$, entonces ϕ también, de modo que $\phi\colon X \to X' \to \phi[X]$ tiene grado ≥ 2, por lo que, no es birracional; lo que prueba «$\Longleftarrow$».

Recíprocamente, si $\phi\colon X \to \phi[X]$ no es birracional, entonces $X' := \phi[X]$ factoriza a f y a g mediante las proyecciones π_1 y π_2 resp. □

Presentaremos la desigualdad de Castelnuovo-Severi. Para ello, hemos de recordar que entre los divisores de una superficie propia S sobre un cuerpo K (no necesariamente algebraicamente cerrado) hay una forma bilineal simétrica $(-.-)$ dada por el símbolo de intersección con la propiedad de que si dos curvas íntegras $C, D \subset S$ se cruzan transversalmente, entonces $(C.D) = |(C \cap D)(K^{\mathrm{alg}})|$. El núcleo de dicha forma bilineal corresponde a los divisores numéricamente triviales los que conforman un subgrupo $\operatorname{Pic}^\tau(S) \le \operatorname{Pic} S$ y se define $\operatorname{Num}(S) := \operatorname{Pic} S / \operatorname{Pic}^\tau S$.

Así, $(-.-)$ es no degenerada sobre $\operatorname{Num}(S) \otimes \mathbb{R}$. La ley de inercia de Sylvester dice entonces que $\operatorname{Num}(S)_{\mathbb{R}}$ se descompone en suma directa en un espacios donde la forma es definida positiva de dimensión p y otro donde es definida negativa de dimensión $n-p$. El teorema del índice de Hodge, probado en Grothendieck **[6]**, dice que $p = 1$.

La siguiente demostración la adaptamos de **[6]**.

Teorema A.4 (desigualdad de Castelnuovo-Severi): Sean X, Y, Z curvas geométricamente íntegras, proyectivas y suaves sobre un cuerpo K. Sean $f\colon X \to Y$ y $g\colon X \to Z$ un par de K-morfismos dominantes independientes. Entonces

$$g(X) \le g(Y)\deg f + g(Z)\deg g + (\deg f - 1)(\deg g - 1).$$

Demostración: Como f y g son independientes, sea $\phi := (f, g)\colon X \to Y \times_K Z$ y consideremos a $X' := \phi[X]$ como un divisor en la superficie $S := Y \times_K Z$. Por otro lado, llamemos $H_Y := Y \times_K \{z\}$ a un divisor horizontal y $V_Z := \{y\} \times_K Z$ a un divisor vertical; como la autointersección sólo depende de la clase en $\operatorname{Num}(S)$, nos percatamos que $H_Y \equiv H'_Y = Y \times_K \{z'\}$ con $z = z'$, por lo que

$$(H_Y)^2 = (H_Y.H'_Y) = 0,$$

y análogamente $(V_Z)^2 = 0$. Más aún, H_Y y V_Z se intersectan transversalmente, por tanto, $(H_Y.V_Z) = 1$.

Sea $L := (X'.V_Z)[H_Y] + (X'.H_Y)[V_Z]$ y $D := X' - L$, de modo que $D \in \langle H_Y, V_Z\rangle^\perp$ y, en particular, $(D.L) = 0$. Nótese que el símbolo de intersección en $\langle H_Y, V_Z\rangle$ no puede ser definido negativo, así que por el teorema del índice de Hodge, debe contener a algún elemento de autointersección positiva; por tanto, $D^2 \le 0$ y

$$(X')^2 = L^2 + D^2 = 2(X'.H_Y)(X'.V_Z) + D^2 \le 2(\deg f)(\deg g). \tag{2}$$

Como el género aritmético es un invariante birracional, la fórmula de adjunción en superficies (cfr. Liu **[8,** pág. 390], Th. 9.1.37) nos dice que

$$g(X) = p_a(X') = 1 + \frac{1}{2}(X')^2 + (X'.K_S), \tag{3}$$

donde K_S es el divisor canónico. Por adjunción y cambio de base ([**8,** pág. 239], Th. 6.4.9) tenemos la siguiente descripción de haces canónicos

$$\omega_{Y\times_K Z/K} \simeq \pi_1^*\omega_{Y/K} \otimes \pi_2^*\omega_{Z/K}.$$

De modo que

$$\begin{aligned}(X'.K_S) &= \deg(K_Y)(X'.V_Z) + \deg(K_Z)(X'.H_Y) \\ &= (2g(Y)-2)\deg f + (2g(Z)-2)\deg g. \end{aligned} \tag{4}$$

Finalmente el enunciado se sigue de combinar las igualdades (3) y (4), con la desigualdad (2). □

Recordemos que:

Definición A.5: Una ***curva hiperelíptica*** sobre un cuerpo k es una curva geométricamente íntegra, suave y proyectiva C con un morfismo dominante $C \to \mathbb{P}^1_k$ que es separable y de grado 2.

Como consecuencia de la definición, en característica nula, toda curva hiperelíptica posee una carta afín en donde es de la forma $y^2 = f(x)$, con f un polinomio separable (i.e., sin raíces repetidas en k^{alg}). En particular, las curvas elípticas son un ejemplo, aunque las excluiremos en los dos siguientes resultados.

Teorema A.6 (Maclachlan [9], Th. 2): Sea C una curva hiperelíptica de género $g \geq 2$ sobre un cuerpo de característica 0. Si un recubrimiento étale $f\colon C' \to C$ sigue siendo una curva hiperelíptica, entonces $\deg f \mid 4$ y, de hecho,

$$\operatorname{Aut}(C'/C) \in \{0, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}.$$

En consecuencia, si $\deg f > 1$ es impar, entonces C' no es hiperelíptica.

Referencias

1. Bombieri, E. y Gubler, W. *Heights in Diophantine Geometry* (Cambridge University Press, 2006).
2. Corvaja, P., Turchet, A. y Zannier, U. Around the Chevalley–Weil theorem. *Enseign. Math.* **68,** 217-235. doi:10.4171/LEM/1027 (2022).

Stacks. De Jong, A. J. *et al. Stacks project* https://stacks.math.columbia.edu/.

3. Faltings, G. Diophantine approximation on abelian varieties. *Ann. of Math. (2)* **133,** 549-576. doi:10.2307/2944319 (1991).
4. Fomenko, A. T. y Fuchs, D. B. *Homotopical Topology* (Springer International Publishing, 2016).
5. Frey, G. Curves with infinitely many points of fixed degree. *Israel J. Math.* **85,** 79-83. doi:10.1007/BF02758637 (1994).
6. Grothendieck, A. Sur une note de Mattuck-Tate. *J. Reine Angew. Math.* **200,** 208-215. doi:10.1515/crll.1958.200.208 (1958).
7. Lang, S. *Fundamentals of Diophantine Geometry* (Springer-Verlag, 1983).

8. Liu, Q. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves* (Oxford University Press, 2002).
9. Maclachlan, C. Smooth coverings of hyperelliptic surfaces. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **22,** 117-123. doi:10.1093/qmath/22.1.117 (1971).
10. Neukirch, J. *Algebraic Number Theory* trad. del alemán por Schappacher, N. (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999). Trad. de *Algebraische Zahlentheorie* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992).
11. Smith, G. y Vogt, I. Low degree points on curves. *Int. Math. Res. Not. IMRN,* 422-445. doi:10.1093/imrn/rnaa137 (2022).

Correo electrónico: josecuevasbtos@uc.cl

Departamento de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile. Facultad de Matemáticas, 4860 Av. Vicuña Mackenna, Macul, RM, Chile

URL: josecuevas.xyz