Las conjeturas de Weil, la cohomología étale y las conjeturas de Tate

José Cuevas Barrientos

Pontificia Universidad Católica de Chile

23 de noviembre de 2023

La función dseta de Riemann usual está definida por:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \operatorname{Re} s > 1.$$

Motivación

La función dseta de Riemann usual está definida por:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \qquad \operatorname{Re} s > 1.$$

Motivación

La función dseta de Riemann usual está definida por:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod_{\mathfrak{p} \text{ ideal primo}} \frac{1}{1 - |\mathbb{Z}/\mathfrak{p}|^{-s}}, \qquad \operatorname{Re} s > 1.$$

La función dseta de Riemann usual está definida por:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_{\mathfrak{p} \text{ ideal primo}} \frac{1}{1-|\mathbb{Z}/\mathfrak{p}|^{-s}}, \qquad \operatorname{Re} s > 1.$$

De modo que podemos generalizarla para un anillo (unitario conmutativo) A cualquiera (Emil Artin, 1921):

$$\zeta(A,s) := \prod_{\mathfrak{p}\in \operatorname{mSpec} A} \frac{1}{1-|A/\mathfrak{p}|^{-s}},$$

y por tanto, para un esquema X:

$$\zeta(X,s) := \prod_{x \in \operatorname{cl} X} \frac{1}{1-|\Bbbk(x)|^{-s}}, \qquad \Bbbk(x) := \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x;$$

donde $\operatorname{cl} X$ corresponde al conjunto de puntos cerrados de X.

Función Z latina

Si X es un esquema algebraico (e.g., una variedad algebraica) sobre un cuerpo k, podemos definir el ***grado*** de un punto cerrado $x \in \operatorname{cl} X$ como

$$\deg x := [\Bbbk(x) : k].$$

Para varios fines conviene definir el siguiente cambio de variables:

$$Z(X,t) := \zeta(X,s) = \prod_{x \in \operatorname{cl} X} \frac{1}{1 - t^{\deg x}}, \qquad t := q^{-s}.$$

Proposición

Sea X un esquema algebraico sobre $\mathbb{F}_q$, se cumple

$$t \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log Z(X,t) = \sum_{n=1}^{\infty} |X(\mathbb{F}_{q^n})|\, t^n.$$

Proposición

Sea X un esquema algebraico sobre $\mathbb{F}_q$, se cumple

$$t \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log Z(X,t) = \sum_{n=1}^{\infty} |X(\mathbb{F}_{q^n})|\, t^n.$$

Ejemplo. Considere $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$.

Proposición

Sea X un esquema algebraico sobre $\mathbb{F}_q$, se cumple

$$t \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log Z(X,t) = \sum_{n=1}^{\infty} |X(\mathbb{F}_{q^n})|\, t^n.$$

Ejemplo. Considere $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$. Sabemos que $|X(\mathbb{F}_{q^n})| = q^n + 1$.

Proposición

Sea X un esquema algebraico sobre $\mathbb{F}_q$, se cumple

$$t \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log Z(X,t) = \sum_{n=1}^{\infty} |X(\mathbb{F}_{q^n})|\, t^n.$$

Ejemplo. Considere $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$. Sabemos que $|X(\mathbb{F}_{q^n})| = q^n + 1$. Así que

$$t \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log Z(\mathbb{P}^1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (q^n + 1)t^n = \frac{qt}{1 - qt} + \frac{t}{1 - t}.$$

Y luego, concluimos que

$$Z(\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}, t) = \frac{1}{(1 - qt)(1 - t)}.$$

Teorema (André Weil, 1941)

Sea X una curva proyectiva, suave, geométricamente irreducible sobre $\mathbb{F}_q$ de género g. Entonces:

1. $Z(X,t)$ es una función racional, de hecho:

$$Z(X,t) = \frac{f(t)}{(1-t)(1-qt)} = \frac{\prod_{i=1}^{2g}(1-\omega_i t)}{(1-t)(1-qt)}. \tag{1}$$

   donde $f(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tiene $\deg f \leq 2g$ y coeficiente libre 1.

Teorema (André Weil, 1941)

Sea X una curva proyectiva, suave, geométricamente irreducible sobre $\mathbb{F}_q$ de género g. Entonces:

1. $Z(X,t)$ es una función racional, de hecho:

$$Z(X,t) = \frac{f(t)}{(1-t)(1-qt)} = \frac{\prod_{i=1}^{2g}(1-\omega_i t)}{(1-t)(1-qt)}. \quad (1)$$

   donde $f(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tiene $\deg f \leq 2g$ y coeficiente libre 1.

2. **Ecuación funcional:**
   - $Z(X, q^{-1}t^{-1}) = q^{1-g}t^{2-2g}Z(X,t)$.
   - $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$.
   - Los ω_i's en (1) satisfacen que $\omega_i \cdot \omega_{2g+1-i} = q$ para cada i.

Teorema

Para una curva proyectiva, suave, geométricamente irreducible X sobre $\mathbb{F}_q$ son equivalentes:

1. **Hipótesis de Riemann:** Los ceros s no triviales (con $\mathrm{Re}\, s > 0$) de $\zeta(X, s)$ tienen $\mathrm{Re}\, s = 1/2$.

2. $|X(\mathbb{F}_{q^n})| = q^n + O(q^{n/2})$.

Teorema

Para una curva proyectiva, suave, geométricamente irreducible X sobre $\mathbb{F}_q$ son equivalentes:

1. **Hipótesis de Riemann:** Los ceros s no triviales (con $\operatorname{Re} s > 0$) de $\zeta(X, s)$ tienen $\operatorname{Re} s = 1/2$.

1.* Los ω_i's en (1) tienen $|\omega_i| = q^{1/2}$.

2. $|X(\mathbb{F}_{q^n})| = q^n + O(q^{n/2})$.

DEMOSTRACIÓN. La 1 $\iff$ 1* sale de un cambio de variables.

Teorema

Para una curva proyectiva, suave, geométricamente irreducible X sobre $\mathbb{F}_q$ son equivalentes:

1. **Hipótesis de Riemann:** Los ceros s no triviales (con $\operatorname{Re} s > 0$) de $\zeta(X, s)$ tienen $\operatorname{Re} s = 1/2$.

1.* Los ω_i's en (1) tienen $|\omega_i| = q^{1/2}$.

2. $|X(\mathbb{F}_{q^n})| = q^n + O(q^{n/2})$.

DEMOSTRACIÓN. La 1 $\iff$ 1* sale de un cambio de variables.
1* $\implies$ 2. Basta tomar la derivada logarítmica de (1) y obtener

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log Z(X, t) = \sum_{i=1}^{2g} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log(1 - \omega_i t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log(1 - t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log(1 - qt)$$

Teorema (André Weil, 1941)

Sea X una curva proyectiva, suave, geométricamente irreducible sobre $\mathbb{F}_q$ de género g. Entonces:

1. $Z(X,t)$ es una función racional, de hecho:

$$Z(X,t) = \frac{f(t)}{(1-t)(1-qt)} = \frac{\prod_{i=1}^{2g}(1-\omega_i t)}{(1-t)(1-qt)}. \tag{1}$$

   donde $f(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tiene $\deg f \leq 2g$ y coeficiente libre 1.

2. **Ecuación funcional:**
   - $Z(X, q^{-1}t^{-1}) = q^{1-g}t^{2-2g}Z(X,t)$.
   - $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$.
   - Los ω_i's en (1) satisfacen que $\omega_i \cdot \omega_{2g+1-i} = q$ para cada i.

Teorema

Para una curva proyectiva, suave, geométricamente irreducible X sobre $\mathbb{F}_q$ son equivalentes:

1. **Hipótesis de Riemann:** Los ceros s no triviales (con $\operatorname{Re} s > 0$) de $\zeta(X, s)$ tienen $\operatorname{Re} s = 1/2$.

1.* Los ω_i's en (1) tienen $|\omega_i| = q^{1/2}$.

2. $|X(\mathbb{F}_{q^n})| = q^n + O(q^{n/2})$.

DEMOSTRACIÓN. La 1 $\iff$ 1* sale de un cambio de variables.
1* $\implies$ 2. Basta tomar la derivada logarítmica de (1) y obtener

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log Z(X,t) = \sum_{i=1}^{2g} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log(1-\omega_i t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log(1-t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log(1-qt)$$

Teorema

Para una curva proyectiva, suave, geométricamente irreducible X sobre $\mathbb{F}_q$ son equivalentes:

1. **Hipótesis de Riemann:** Los ceros s no triviales (con $\operatorname{Re} s > 0$) de $\zeta(X,s)$ tienen $\operatorname{Re} s = 1/2$.

1.* Los ω_i's en (1) tienen $|\omega_i| = q^{1/2}$.

2. $|X(\mathbb{F}_{q^n})| = q^n + O(q^{n/2})$.

Demostración. La 1 $\iff$ 1* sale de un cambio de variables.
1* $\implies$ 2. Basta tomar la derivada logarítmica de (1) y obtener

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log Z(X,t) &= \sum_{i=1}^{2g}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(1-\omega_i t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(1-t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(1-qt)\\ &= \sum_{i=1}^{2g}\frac{-\omega_i}{1-\omega_i t} + \frac{1}{1-t} + \frac{q}{1-qt}.\end{aligned}$$

Teorema

Para una curva proyectiva, suave, geométricamente irreducible X sobre $\mathbb{F}_q$ son equivalentes:

1. **Hipótesis de Riemann:** Los ceros s no triviales (con $\operatorname{Re} s > 0$) de $\zeta(X, s)$ tienen $\operatorname{Re} s = 1/2$.

1.* Los ω_i's en (1) tienen $|\omega_i| = q^{1/2}$.

2. $|X(\mathbb{F}_{q^n})| = q^n + O(q^{n/2})$.

DEMOSTRACIÓN. La 1 $\iff$ 1* sale de un cambio de variables.
1* $\implies$ 2. Basta tomar la derivada logarítmica de (1) y obtener

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log Z(X,t) &= \sum_{i=1}^{2g} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log(1-\omega_i t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log(1-t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log(1-qt) \\ &= \sum_{i=1}^{2g} \frac{-\omega_i}{1-\omega_i t} + \frac{1}{1-t} + \frac{q}{1-qt}. \end{aligned}$$

Luego expandimos $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ y comparamos los coeficientes de t^n para obtener

$$|X(\mathbb{F}_{q^n})| = \sum_{i=1}^{2g} -\omega_i^n + 1 + q^n = q^n + 1 + \epsilon, \qquad |\epsilon| \le 2g q^{n/2}.$$

$\square$

Teorema (A. Weil, 1941)

Las hipótesis de Riemann se satisfacen para curvas proyectivas, suaves, geométricamente irreducibles sobre cuerpos finitos.

Teorema (A. Weil, 1941)

Las hipótesis de Riemann se satisfacen para curvas proyectivas, suaves, geométricamente irreducibles sobre cuerpos finitos.

Demostración. Sea X una curva como en el enunciado sobre $\mathbb{F}_q$. Será conveniente estudiar el cambio de base $\overline{X} := X_{\mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}}$.

(i) Podemos definir el endomorfismo de Frobenius por

$$\mathrm{Frob}\colon \overline{X} \to \overline{X}, \qquad [a_0 : \cdots : a_n] \mapsto [a_0^q : \cdots : a_n^q].$$

Así, $\overline{X}(\mathbb{F}_{q^n}) = \mathrm{Fix}(\mathrm{Frob}^n)$.

Teorema (A. Weil, 1941)

Las hipótesis de Riemann se satisfacen para curvas proyectivas, suaves, geométricamente irreducibles sobre cuerpos finitos.

Demostración. Sea X una curva como en el enunciado sobre $\mathbb{F}_q$. Será conveniente estudiar el cambio de base $\overline{X} := X_{\mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}}$.

(i) Podemos definir el endomorfismo de Frobenius por

$$\mathrm{Frob}\colon \overline{X} \to \overline{X}, \qquad [a_0 : \cdots : a_n] \mapsto [a_0^q : \cdots : a_n^q].$$

Así, $\overline{X}(\mathbb{F}_{q^n}) = \mathrm{Fix}(\mathrm{Frob}^n)$.

(ii) Luego, contar $|X(\mathbb{F}_{q^n})| = |\Delta \cap F_n|$, donde $\Delta := \Gamma_{\mathrm{Id}_{\overline{X}}}$ es el gráfico de la identidad (o la diagonal) en $\overline{X} \times \overline{X}$ y $F_n := \Gamma_{\mathrm{Frob}^n}$ es el gráfico del Frobenius.

(iii) Nótese que $(\Delta . F_n) = |\Delta \cap F_n|$ pues Δ, F_n son divisores en $\overline{X} \times \overline{X}$ que se cruzan transversalmente. Esto se debe a que podemos calcular las derivadas de las ecuaciones que les definen y ver que sus pendientes difieren:

$$\begin{aligned} \Delta&: \qquad y = x \qquad && y' = 1, \\ F_n&: \qquad y = x^{q^n} \qquad && y' = q^n x^{q^n - 1} \end{aligned}$$

(iii) Nótese que $(\Delta . F_n) = |\Delta \cap F_n|$ pues Δ, F_n son divisores en $\overline{X} \times \overline{X}$ que se cruzan transversalmente. Esto se debe a que podemos calcular las derivadas de las ecuaciones que les definen y ver que sus pendientes difieren:

$$\begin{aligned} &\Delta: && y = x && y' = 1, \\ &F_n: && y = x^{q^n} && y' = q^n x^{q^n - 1} = 0. \end{aligned}$$

(III) Nótese que $(\Delta.F_n) = |\Delta \cap F_n|$ pues Δ, F_n son divisores en $\overline{X} \times \overline{X}$ que se cruzan transversalmente. Esto se debe a que podemos calcular las derivadas de las ecuaciones que les definen y ver que sus pendientes difieren:

$$\begin{array}{lll} \Delta: & y = x & y' = 1, \\ F_n: & y = x^{q^n} & y' = q^n x^{q^n - 1} = 0. \end{array}$$

(IV) Si $X = \mathbb{P}^1$, entonces podemos calcular $(-.-)$ con el *bigrado*, recordando que $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Para ello, denotemos H, V el divisor horizontal y vertical de $\overline{X} \times \overline{X}$, los que satisfacen $(H.H) = (V.V) = 0$ y $(H.V) = (V.H) = 1$.

(iii) Nótese que $(\Delta.F_n) = |\Delta \cap F_n|$ pues Δ, F_n son divisores en $\overline{X} \times \overline{X}$ que se cruzan transversalmente. Esto se debe a que podemos calcular las derivadas de las ecuaciones que les definen y ver que sus pendientes difieren:

$$\begin{aligned} \Delta &: & y &= x & y' &= 1, \\ F_n &: & y &= x^{q^n} & y' &= q^n x^{q^n - 1} = 0. \end{aligned}$$

(iv) Si $X = \mathbb{P}^1$, entonces podemos calcular $(-.-)$ con el *bigrado*, recordando que $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Para ello, denotemos H, V el divisor horizontal y vertical de $\overline{X} \times \overline{X}$, los que satisfacen $(H.H) = (V.V) = 0$ y $(H.V) = (V.H) = 1$. Nótese que $\Delta = H + V$, y contando intersecciones tenemos que $(F_n.V) = 1$ y $(F_n.H) = q^n$. Finalmente

$$(H + V.H + q^n V) = H^2 + (V.H) + (H.q^n V) + q^n V^2 = q^n + 1.$$

Teorema de la traza de Lefschetz

Sea X una variedad proyectiva y suave sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, sea H^* una teoría de cohomología de Weil sobre k, y sea $f\colon X \to X$ un k-morfismo de variedades. Entonces

$$(\Gamma_f . \Delta_{X/k}) = \sum_{r=0}^{2d} (-1)^r \operatorname{tr} H^r(f).$$

Teorema de la traza de Lefschetz

Sea X una variedad proyectiva y suave sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, sea H^* una teoría de cohomología de Weil sobre k, y sea $f\colon X \to X$ un k-morfismo de variedades. Entonces

$$(\Gamma_f . \Delta_{X/k}) = \sum_{r=0}^{2d} (-1)^r \operatorname{tr} H^r(f).$$

Proposición

Para todo $m \geq 1$ se cumple

$$N_m := |X(\mathbb{F}_{q^m})| = \sum_r (-1)^r \operatorname{tr} H^r(\mathrm{Frob}_{X/k}^m).$$

Teorema (racionalidad)

Sea X una variedad geométricamente íntegra, proyectiva, suave sobre un cuerpo finito k de dimensión d. Entonces

$$Z(X,t) = \frac{P_1(X,t)\cdot P_3(X,t)\cdots P_{2d-1}(X,t)}{P_0(X,t)\cdots P_{2d}(X,t)},$$

es una función racional, donde cada $P_r(X,t)$ es un polinomio.

DEMOSTRACIÓN.

$$Z(X,t) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} N_m \cdot \frac{t^m}{m}\right)$$

Teorema (racionalidad)

Sea X una variedad geométricamente íntegra, proyectiva, suave sobre un cuerpo finito k de dimensión d. Entonces

$$Z(X,t) = \frac{P_1(X,t) \cdot P_3(X,t) \cdots P_{2d-1}(X,t)}{P_0(X,t) \cdots P_{2d}(X,t)},$$

es una función racional, donde cada $P_r(X,t)$ es un polinomio.

Demostración.

$$Z(X,t) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} N_m \cdot \frac{t^m}{m}\right) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{2d} (-1)^r \operatorname{tr} H^r(\mathrm{Frob}^m) \frac{t^m}{m}\right)$$

Teorema (racionalidad)

Sea X una variedad geométricamente íntegra, proyectiva, suave sobre un cuerpo finito k de dimensión d. Entonces

$$Z(X,t) = \frac{P_1(X,t) \cdot P_3(X,t) \cdots P_{2d-1}(X,t)}{P_0(X,t) \cdots P_{2d}(X,t)},$$

es una función racional, donde cada $P_r(X,t)$ es un polinomio.

Demostración.

$$\begin{aligned} Z(X,t) &= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} N_m \cdot \frac{t^m}{m}\right) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{2d}(-1)^r \operatorname{tr} H^r(\mathrm{Frob}^m)\frac{t^m}{m}\right) \\ &= \prod_{r=0}^{2d} \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{tr} H^r(\mathrm{Frob}^m)\frac{t^m}{m}\right)^{(-1)^r} \end{aligned}$$

Teorema (racionalidad)

Sea X una variedad geométricamente íntegra, proyectiva, suave sobre un cuerpo finito k de dimensión d. Entonces

$$Z(X,t) = \frac{P_1(X,t) \cdot P_3(X,t) \cdots P_{2d-1}(X,t)}{P_0(X,t) \cdots P_{2d}(X,t)},$$

es una función racional, donde cada $P_r(X,t)$ es un polinomio.

Demostración.

$$Z(X,t) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} N_m \cdot \frac{t^m}{m}\right) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{2d}(-1)^r \operatorname{tr} H^r(\mathrm{Frob}^m)\frac{t^m}{m}\right)$$
$$= \prod_{r=0}^{2d} \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{tr} H^r(\mathrm{Frob}^m)\frac{t^m}{m}\right)^{(-1)^r} = \prod_{r=0}^{2d} P_r(X,t)^{(-1)^{r+1}},$$

donde $P_r(X,t)$ es el polinomio característico de Frob_*^m en $H^r(X)$. $\square$

Originalmente, Weil pensaba el H como siendo un análogo de la cohomología singular para cuerpos finitos (de ahí el uso del teorema de Lefschetz). Con el desarrollo de distintas teorías cohomológicas, ninguna tenía las exigencias que Weil esperaba, hasta la llegada de la ***cohomología étale*** de A. Grothendieck y M. Artin en 1963, y más precisamente las ***cohomologías ℓ-ádicas***.

(a) Alexander Grothendieck

(b) Michael Artin

Fijemos un cuerpo algebraicamente cerrado k de característica p (posiblemente $p = 0$). Dado un primo $\ell \neq p$, la cohomología ℓ-ádica para una variedad X sobre k está dada por

$$H^q(X, \mathbb{Z}_\ell) = \varprojlim_n H^q_{\text{ét}}(X, \underline{\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}}).$$

Fijemos un cuerpo algebraicamente cerrado k de característica p (posiblemente $p = 0$). Dado un primo $\ell \neq p$, la cohomología ℓ-ádica para una variedad X sobre k está dada por

$$H^q(X, \mathbb{Z}_\ell) = \varprojlim_n H^q_{\text{ét}}(X, \underline{\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}}).$$

Comparación de cohomología ℓ-ádica y de Betti

Sea X una variedad suave, proyectiva sobre $\mathbb{C}$. Entonces

$$H^q_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell) \cong H^q_{\text{sing}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_\ell).$$

Teorema

Sea X una variedad proyectiva sobre un cuerpo finito k. Son equivalentes:

1. La conjetura de Tate sobre divisores es cierta para X.
2. El orden del polo de $Z(X,t)$ en $t = q^{-1}$ es $= \operatorname{rang} \operatorname{Pic} X$.

Conjeturas de Tate (1965)

Teorema

Sea X una variedad proyectiva sobre un cuerpo finito k. Son equivalentes:

1. La conjetura de Tate sobre divisores es cierta para X.
2. El orden del polo de $Z(X,t)$ en $t = q^{-1}$ es $= \operatorname{rang} \operatorname{Pic} X$.

Teorema

Son equivalentes:

1. La conjetura de Tate sobre divisores es cierta para superficies proyectivas y suaves sobre cuerpos finitos.
2. La conjetura de Birch–Swinnerton-Dyer es cierta para variedades abelianas sobre cuerpos globales de característica prima.

BIBLIOGRAFÍA

1. HARTSHORNE, R. **ALGEBRAIC GEOMETRY.** Graduate Texts in Mathematics **52** (Springer-Verlag New York, 1977).
2. MILNE, J. S. **ÉTALE COHOMOLOGY.** (Princeton University Press, 1980).
3. POONEN, B. **RATIONAL POINTS ON VARIETIES.** (American Mathematical Society, 2017).
4. TATE, J. **CONJECTURES ON ALGEBRAIC CYCLES IN ℓ-ADIC COHOMOLOGY.** en Motives (eds. JANNSEN, U., KLEIMAN, S. L. y SERRE, J.-P.) (American Mathematical Society, 1994), 71-83.