Geometría

José Cuevas Barrientos

24 de diciembre de 2021

Índice general

Preámbulo

Pre-requisitos. Éste libro está escrito de manera que no comprenda pre-requisitos, en algunos lados ocupamos notación relacionada a la teoría de conjuntos, pero no es requisito dominarla en ninguna forma. Sin embargo, la lectura del libro se recomienda hacerse en conjunto a otros libros de mi autoría, en el segundo capítulo utilizamos el concepto de "número real", pero en general, fuera de las típicas manipulaciones algebraicas escolares todo es comprensible para un lector general.

Métodos y objetivos. Si bien el libro no requiere demasiados conocimientos previos se asume que el lector es audaz; mi libro no comprende ejercicios, pero las demostraciones incompletas asumen que un lector vaya llenando detalles. Además de ello, el libro pretende ser formal, así que utilizamos un lenguaje que en ocasiones puede no ser fácil de digerir, dicho de otro modo, el libro no es divulgativo, ni semi-divulgativo, respeta su carácter como texto científico y no como literatura, y espero que mis lectores tampoco busquen literatura en él ya que para ello hay un universo de libros distintos.

Con respecto a lecciones universitarias siempre intento y creo lograr una profundización incluso mayor que aquellas que he recibido personalmente, de hecho, puede que incluso resulte pesado para el que busca un *resumen*, pues es mucho más completo que las exigencias usuales de un curso. Se recomienda leer con paciencia.

Orden y propósitos. En esta sección se explica a grandes rasgos cuales son los objetivos de cada capítulo así como sus relaciones entre sí:

1. **Geometría absoluta:** Se introducen los axiomas de Hilbert (similares a los principios de Euclides, pero con más detalle). Se introducen

los distintos tipos de grupos axiomáticos según necesidades (e.g., principio de Arquímedes, intersección con circunferencia, etc.). Se definen conceptos generales de la geometría (e.g., segmento, semirrecta, ángulo, triángulo). Se estudian los criterios de congruencia generales de los triángulos y todos los resultados neutros. Se estudian las propiedades de intersección con circunferencias.

2. **Geometría euclídea:** Éste capítulo es más pesado y tiene un itinerario claro: En primer lugar se estudia el axioma de Arquímedes y la medición de segmentos y ángulos. En segundo lugar se estudian los efectos del axioma de Euclides, de manera que se logra dar cierto panorama sobre la geometría hiperbólica. Luego se trabaja la geometría euclídea como tal, demostrando primero los teoremas clásicos sobre proporciones de triángulos (teorema de Tales y Pitágoras). Luego se estudian teoremas con arcos y cuerdas de circunferencias, se estudian teoremas relacionados a la *trigonometría*.

Introducción

Uno de los textos científicos más relevantes en la historia son *Los Elementos* de Euclides, el equivalente griego de *El Origen de las Especies* o *Principia Mathematica*. En él, Euclides se adelanta siglos exponiendo el primer intento (registrado) de una axiomatización de las matemáticas, esto es, mediante cinco sencillos postulados [axiomas] deduce una serie de resultados formales que hoy identificamos como la raíz de la geometría. En este sentido, podemos ver que la geometría es además la base de casi todas las matemáticas, y es una de las ramas más atractivas para personas no-matemáticas también. Sin embargo, hoy en día se cultiva un malentendimiento de la geometría como un concepto anticuado e incluso obsoleto. Esto no puede estar más lejos de la realidad, la verdad es que practicamente todos los tópicos matemáticos que gozan de popularidad hoy en día (e.g., el cálculo integral, las variedades diferenciales, el álgebra lineal) tienen una concepción en la geometría de Euclides. Esto es muy cierto, sólo que diferencia radica en que son novedosas perspectivas a la geometría clásica, pero que de hecho asumen conocimiento en ella; dicho de otro modo, puede que a un estudiante matemático le atraiga mucho más la geometría hiperbólica, pero es imposible aprenderla o entender el cómo se llega intelectualmente a ella sin primero conocer las posibilidades y limitaciones de la geometría euclídea, por eso mismo sostengo que su estudio es imprescindible para todo el alumnado, incluso aquellos que aspiran a pedagogías contemporáneas.

En el libro comenzamos por estudiar las ramificaciones contemporáneas de la geometría euclídea de forma sintética (es decir, sin ecuaciones como punto de partida), para luego ir introduciendo las nociones de vectores, coordenadas, etc.

Parte I.

Geometría sintética

1

Geometría absoluta de Hilbert

La geometría suele dividirse en dos categorías: euclidea y no-euclidiana, lo que corresponde a un desacuerdo en torno al quinto axioma propuesto por el griego Euclides; sin embargo, aún todos los sistemas comparten los cuatro primeros axiomas (y más) que podemos considerar como *absolutos.* A principios del siglo XX, varios matemáticos, entre ellos, Hilbert, Tarski y Coxeter describen sistemas de geometría axiomática absoluta. Este primer capítulo comprenderá una síntesis bastante desarrollada de la teoría propuesta en *The Foundations of Geometry* de Hilbert [5], adaptada para lo que algunos autores denominan *matemática moderna* –al ser más formal que la clásica–.

1.1. Axiomas de Hilbert

Aquí consideraremos un conjunto $\mathbb{E}$ llamado *espacio* y sus elementos llamados *puntos*, que usualmente denotaremos con letras mayúsculas. Toda figura es, entonces, nada más que subconjuntos del espacio.

§1.1.1 Axiomas de conexión (I). Aquí caracterizamos requisitos básicos para las nociones de “rectas” y “planos”.

Axioma I, 1: Para todo par de puntos A, B distintos existe una *recta* que los contiene. A una de esas rectas les denotamos AB.

Axioma I, 2: Sean A, B, C puntos tales que $AB = AC = r$ y $B \neq C$, entonces $BC = r$. Dicho de otro modo, la recta que pasa por A y B es única.

Tres puntos serán llamados *colineales* syss son distintos entre sí y pertenecen a una misma recta.

Diremos que dos rectas se intersecan si su intersección como conjuntos no es vacía.

Teorema 1.1: Si dos rectas se intersecan, entonces lo hacen en un solo punto.

Axioma I, 3: Por tres puntos no colineales A, B, C pasa un plano. A uno de ellos le denotamos ABC.

Axioma I, 4: Si A, B, C, D son no-colineales tres a tres de modo que $ABC = ABD = \Pi$, entonces $BCD = \Pi$. El plano que pasa por tres puntos es único.

Se dice de cuatro puntos que son *coplanares* syss son distintos entre sí y pertenecen a un mismo plano.

Axioma I, 5: Si A, B pertenecen a un plano común Π, entonces toda su recta está contenida en el mismo plano, es decir, $AB \subseteq \Pi$.

Axioma I, 6: Si dos planos comparten un punto en común, entonces comparten dos.

Teorema 1.2: Si dos planos se intersecan, entonces lo hacen en exactamente una recta.

Axioma I, 7: Toda recta contiene al menos dos puntos distintos. Toda plano contiene al menos tres no colineales. $\mathbb{E}$ contiene al menos cuatro puntos no coplanares.

Teorema 1.3: Una recta y un punto externo a ella, o dos rectas distintas que se cortan en un sólo punto determinan un único plano (por I2, I4 e I7)

Definición 1.4 – *Geometría de Hilbert*: Se dice que un conjunto $\mathbb{E}$ es una geometría de Hilbert si satisface todos los axiomas de conexión.

Nótese que con éstos axiomas, un conjunto de cuatro puntos es una geometría de Hilbert con las rectas siendo los subconjuntos de dos puntos y los planos los subconjuntos de tres puntos.

Ejemplo (geometría de cuatro puntos): Considere un conjunto de cuatro puntos $\mathbb{E} := \{a, b, c, d\}$ y definamos las rectas como cualquier subconjunto de cardinal 2 y los planos como cualquier subconjunto de cardinal 3. Nótese que cumple con todos los axiomas de incidencia, aunque es increiblemente sencilla.

§1.1.2 Axiomas de orden (II). Éstos axiomas nos permiten hablar de la ubicación de los puntos sobre una recta, por ejemplo, B está entre A y C; ésto último lo denotaremos como que $A - B - C$. Admitiremos que $A - B - C$ es falso si no son colineales o si se repiten puntos.

Axioma II, 1: Sean A, B, C colineales. Si $A - B - C$, entonces $C - B - A$.

Axioma II, 2: Sean A, B distintos. Existe un C tal que $A - B - C$.

Axioma II, 3: Dados A, B, C distintos y colineales, entonces uno y sólo uno está entre los otros dos.

Axioma II, 4 (de Pasch): Sean A, B, C no colineales y r una recta que no intersecta a ninguno y que pasa entre A y B (osea existe un punto P de r tal que $A - P - B$), entonces r pasa entre A y C o bien entre B y C.

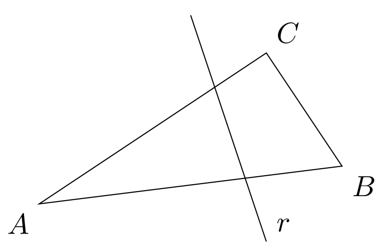


Figura 1.1. Axioma de Pasch.

> **Definición 1.5:** Una geometría de Hilbert $\mathbb{E}$ está *ordenada* si satisface los axiomas de orden.

Como consecuencia, nótese que la geometría de cuatro puntos no está ordenada

Pasch, quién en la obra de Hilbert es creditado como el real inventor de los axiomas de orden, afirmaba que el axioma II4 había sido utilizado inconscientemente por Euclides en su obra, a pesar de ser indemostrable con su conjunto original.

Definición 1.6 – *Segmento*: Definimos el segmento[a] $\overline{AB}$ como tal que contiene todos los puntos (de AB) entre A y B (estos últimos incluidos):

$$\overline{AB} := \{P \in \mathbb{E} : A - P - B\} \cup \{A, B\}.$$

Trivialmente se puede construir $\overline{AA} = \{A\}$ al que llamaremos *segmento trivial*. Usualmente llamamos a la recta AB como la *prolongación* de un segmento no-trivial $\overline{AB}$.

[a] la. *segmentum*: sacar una pieza de algo; de *secare*: cortar.

Proposición 1.7: Se cumple:

1. Si $A \neq B$, entonces $\overline{AB} = \overline{BA}$ (por II1).
2. Toda recta posee infinitos puntos (por II2). En particular, todo plano también.
3. Si $A \neq B$, entonces $\overline{AB} \subset AB$ (por II2 y II3).

Teorema 1.8 – *Primer teorema de Pasch*: Dada la situación en II4, entonces r sólo pasa por $\overline{AC}$ o $\overline{BC}$, no por ambos.

Demostración: Demostremos esto por contradicción. Supongamos que r intersecta $\overline{AB}$ en A', intersecta a $\overline{AC}$ en B' y a $\overline{BC}$ en C'. Veamos que A', B', C' deben ser distintos, por ejemplo, si $A' = B'$, entonces $A' = B' = A$ pues dos rectas se cortan en a lo más dos puntos y dijimos que A' estaba entre A y C, lo que sería una contradicción.

Cómo r no pasa por B los puntos B, A', C' no son colineales. La recta AC intersecta a B' que está entre $A'C'$, luego por axioma de Pasch, AC debe pasar entre $\overline{A'B}$ o $\overline{BC'}$. Sin embargo, $A'B = AB$ y $BC' = BC$, luego los únicos puntos por los que puede pasar son A o B, pero por II3 no se cumple ni $A' - A - B$ ni $B - C - C'$, contradicción. □

Teorema 1.9: Entre dos puntos siempre existe un tercero. En consecuencia, todo segmento posee infinitos puntos.

DEMOSTRACIÓN: Llamemos A, B dos puntos sobre un plano, por I7 existe un punto fuera de la recta X, por II2 existe C tal que $A - X - C$, asimismo, existe Y tal que $B - C - Y$, luego A, B, C son puntos no colineales e YX una recta que pasa por $\overline{AC}$, luego, pasa por $\overline{BC}$ o $\overline{AB}$ (además es claro que XY no pasa por A, B, C, de lo contrario, son colineales). Pero como B, C, Y son colineales, X tendría que estar en la misma recta para satisfacerlo y es evidente que no es así (de lo contrario $XY = BC$ y se llega a que A, B, C son colineales), finalmente, XY corta a $\overline{AB}$ y dicho punto está entre ambos (y no es ni A ni B). □

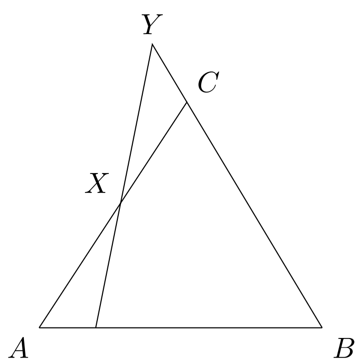


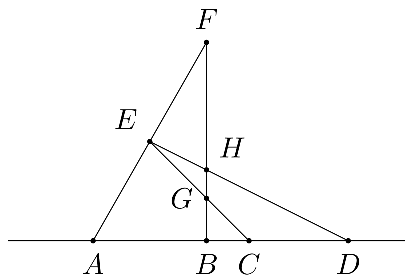
Figura 1.2. Teorema 1.9.

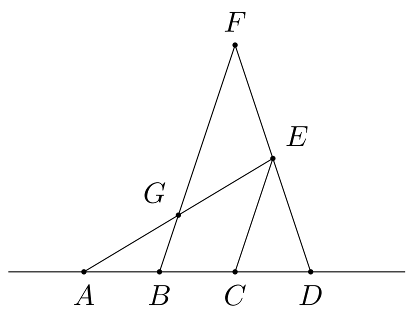
Teorema 1.10 – *Segundo teorema de Pasch*: Si A, B, C, D son distintos y colineales, entonces si cumplen una de las siguientes las cumplen todas:

1. $A - B - C$ y $B - C - D$.
2. $A - B - C$ y $A - C - D$.
3. $A - B - D$ y $B - C - D$.

En consecuencia, todo conjunto de cuatro puntos distintos y colineales pueden ser *etiquetados* de manera que las relaciones anteriores se cumplan.

DEMOSTRACIÓN: (1) $\implies$ (2)$\wedge$(3). Como $A-B-C$ y $B-C-D$, debemos probar que $A-B-D$ y que $A-C-D$. En particular, probaremos el primero ya que los casos son simétricos. Comenzamos por ver que debe existir $E \notin r$





(I7) y que también existe F tal que $A-E-F$ (II2). Luego, sabemos que FB intersecta a $\overline{AC}$ en B y que no puede intersectar a $\overline{AE}$ puesto que $A-E-F$, por lo que FB intersecta a $\overline{CE}$ en G (II4). Asimismo, sabemos que FB no puede intersectar a $\overline{CD}$ pues $B-C-D$, por lo que intersecta a $\overline{DE}$ en H (II4). Finalmente FB intersecta a $\overline{DE}$, pero no a $\overline{AE}$, por lo que debe intersectar a $\overline{AD}$ en B, osea, $A-B-D$.

(3) $\implies$ (1) $\implies$ (2). Sabemos que existen puntos que no pertenecen a r, así que llamemos E a uno de ellos, y luego F como un punto tal que $D-E-F$. Luego, sabemos que FB interseca a $\overline{AD}$ en B y que no puede intersecar a $\overline{ED}$ (pues $D-E-F$ y la intersección de rectas es única), por ende, interseca a $\overline{AE}$ en G. Ahora consideremos la recta BG y su relación a los puntos C, D, E. Evidentemente BG no interseca a $\overline{CD}$, puesto que dos rectas sólo se intersecan en punto, que en este caso es B y sabemos que $B-C-D$. BG tampoco interseca a $\overline{DE}$ por el mismo argumento, ya que $F \in BG$. Por ende, BG tampoco interseca a $\overline{CE}$. Finalmente, consideremos BG con A, C, E: interseca a $\overline{AE}$ en G, pero no a $\overline{CE}$, por ende, interseca a $\overline{AC}$ y debe ser en B. Es decir, $A-B-C$.

Finalmente (2) es análogo a (3), basta "voltear" los nombres de los puntos. $\square$

En contexto del teorema anterior denotamos $A-B-C-D$.

Teorema 1.11: Si $A - B - C$, entonces

$$\overline{AB} \cap \overline{BC} = \{B\}, \quad \overline{AB} \cup \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Semirrectas y semiplanos. Para la confección de las semirrectas y los semiplanos los definiremos como sectores "separados" ya sea por un punto o una recta respectivamente, y para ello empleamos el concepto de relación de equivalencia.

Teorema 1.12: Si r es una recta que contiene al punto X, entonces la relación $\sim_X$ sobre $r \setminus \{X\}$ dada por $P \sim_X Q$ syss no $P - X - Q$ es de equivalencia y determina exactamente dos clases de equivalencia.

Demostración: Claramente es reflexiva y simétrica (por II1), sólo basta probar que es transitiva. Si $P \sim_X Q$ y $Q \sim_X R$ entonces: o se repiten puntos (aplicar reflexividad y simetría) o son todos distintos. Si son todos distintos se puede dar que $P - Q - X$ y $Q - R - X$, (luego $P - Q - R - X$ con lo que $P - R - X$, por Pasch II), o se puede dar que $Q - P - X$ y $Q - R - X$, en cuyo caso puede darse o que $Q - P - R$ o que $Q - R - P$, pero no que $P - Q - R$ (pues entonces $P - Q - R - X$ y $P - Q - X$ por Pasch II); y en cualquier caso $P - R - X$ o $R - P - X$.

Para ver que son dos clases de equivalencia, por I7 existe $A \neq X$ y por II2 existe B tal que $A - X - B$, luego las clases de A y B son distintas y hay al menos dos. Si $P \in r \setminus \{X\}$ es distinto de A y B, entonces o $A - P - X$, o $P - A - X$ (y que P está en la clase de A) o $A - X - P$, luego analizando a P, B, X se da que $X - P - B$, o $X - B - P$ (y P está en la clase de B) pero no $B - X - P$ (pues entonces $A - B - X - P$ por Pasch II y $A - B - X$ lo que es una contradicción). □

Definición 1.13 – *Semirrecta*: Dado un punto O y otro A distinto de O denotamos $\overrightarrow{OA}$ a la clase de equivalencia sobre $OA \setminus \{O\}$ que contiene a A unida al punto $\{O\}$, en este caso O se dice el *origen* de la semirrecta $\overrightarrow{OA}$. Si $B - O - A$, entonces se dice que la semirrecta $\overrightarrow{OB}$ es *complementaria* a $\overrightarrow{OA}$. A la recta OA se le dice la *prolongación* de $\overrightarrow{OA}$.

Teorema 1.14: Si Π es un plano que contiene a una recta r, entonces la relación $\sim$ sobre $\Pi \setminus r$ dada por $P \sim_r Q$ syss $\overline{PQ}$ no corta a r es de equivalencia y determina exactamente dos clases de equivalencia.

Demostración: Claramente es reflexiva y simétrica, sólo basta probar que es transitiva. Si $P \sim_r Q$ y $Q \sim_r R$ se pueden dar varias cosas: que no sean distintos (lo cual correspondería a aplicar reflexividad y simetría), que sean distintos y colineales (ver que alguno, digamos Q está entre P y R y luego $\overline{PR} = \overline{PQ} \cup \overline{QR}$), o que no sean colineales (en cuyo caso basta aplicar el axioma de Pasch).

Sea $A \in \Pi \setminus r$, $X \in r$ y, por II2, B tal que $A - X - B$, por definición $A \nsim_r B$ luego hay al menos dos clases de equivalencia (la de A y la de B). Veremos que todo punto C en $\Pi \setminus r$ cumple que $A \sim_r C$ o $B \sim_r C$: Si C es colineal a A, B, entonces se reduce al segundo teorema de Pasch. Si C no es colineal a A, B, entonces por el primer teorema de Pasch se cumple que r corta exactamente a uno: a $\overline{AC}$ o $\overline{BC}$. Sin perdida de generalidad supongamos que corta a $\overline{BC}$, luego $A \sim_r C$. □

Definición 1.15 – *Semiplano*: Dado un plano Π y una recta r, las dos clases de equivalencia determinadas por el teorema anterior unidas a r se dicen *semiplanos*, y r se dice su *frontera*. Además dado un semiplano de frontera r, el restante se dice su *complementario* y la unión de ambos se dice su *prolongación*.

Definición 1.16: A un conjunto C de puntos se le dice *convexo*[a] syss para todo $P, Q \in C$ se cumple que si $P - X - Q$ entonces $X \in C$. De lo contrario se le dice *cóncavo*[b].

[a] la. *cum*: juntos; *veho*: llevar, cargar; *convexus*: cargar a un lugar.
[b] la. *cavus*: hueco.

Proposición 1.17: El espacio, las rectas, los segmentos, los planos, las semirrectas y los semiplanos son convexos.

§1.1.3 Axioma de las paralelas (III).

Éste es el más curioso de nuestro conjunto a tal punto que las geometrías se dividen si se asume o no dicho axioma.

Definición 1.18: Dadas dos rectas r y s se dice que

Se cruzan Si no son coplanares.

Son secantes[a] Si se cortan en un sólo punto.

Son paralelas[b] Si son coplanares y son iguales o no se cortan.

Si r y s son paralelas se denota por $r \parallel s$.

[a]la. *secare*: cortar.
[b]gr. παρά (para): al lado, ἀλλήλων (alelon): una de la otra.

Es claro que dos rectas caen en una y sólo una de las categorías anteriores.

Axioma de las Paralelas (III): Dada una recta r y un punto P, existe una única recta s que pasa por P y es paralela a r.

Teorema 1.19: Son equivalentes:

1. **El axioma de las paralelas**.
2. El paralelismo es transitivo, es decir, si $r \parallel s$ y $s \parallel t$, entonces $r \parallel t$.

Demostración: (1) $\implies$ (2). Lo haremos por contradicción. Sea α el plano que contiene a r y a s, y β el plano que contiene a s y a t.
Si $\alpha = \beta$, entonces r y t, al ser coplanares pero no paralelas se intersecan por P, pero eso contradice al axioma de las paralelas que dice que por P sólo pasa una recta paralela a s.
Si $\alpha \neq \beta$, entonces sea $Q \in t$ cualquiera y sea Π el plano que contiene a r y a Q. Luego sea r' la recta resultante de la intersección entre β y Π, veamos que $r' \parallel s$: si tuvieran un punto R en común entonces claramente $R \notin r$, pues r y s son disjuntos por ser paralelos, y luego $\Pi = \alpha$ pues ambos contienen a r y a R. Como r' es paralela a s y pasa por un punto de t, entonces concluimos que $t = r'$ por axioma de las paralelas, finalmente r y t son coplanares.

(2) $\implies$ (1). Sea r una recta y P un punto tal que s_1, s_2 son rectas distintas pero paralelas a r por P, entonces $s_1 \parallel r$ y $r \parallel s_2$, pero $s_1 \nparallel s_2$. □

§1.1.4 Axiomas de congruencia (IV). En lo sucesivo, se debe interpretar que la congruencia es algo así como la cualidad de ser iguales en medida y forma.

Axioma IV, 1: Todas las congruencias de figuras (denotadas por el signo $\equiv$) son relaciones de equivalencia.

Axioma IV, 2: Dado un par de puntos distintos A, B y una semirrecta s de origen C, existe un único $D \in s$ tal que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

Axioma IV, 3: Sean $A-B-C$ distintos y colineales; y sean $A'-B'-C$ distintos y colineales también, tales que

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \quad \overline{BC} \equiv \overline{B'C'},$$

entonces $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.

Definición 1.20 – *Ángulo*: Sean h, k dos rayos de mismo origen O, cuyas prolongaciones son r_1, r_2 respectivamente sobre un plano α. Definimos el *ángulo*[a] como un conjunto denotado $\angle(h,k)$ tal que corresponde a la intersección del semiplano de frontera r_1 que contiene a k y el semiplano de frontera r_2 que contiene a h. Usualmente a h, k le llamamos *lados* del ángulo, mientras que a O le llamamos el *vértice*[b].
Dados A, O, B no-colineales abreviamos $\angle AOB := \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Finalmente, sean h', k' los complementos de los rayos h, k respectivamente. A $\angle(h', k)$ y $\angle(h, k')$ les llaman *ángulos adyacentes*[c], mientras que a $\angle(h', k')$ le llamamos *ángulo opuesto por el vértice*.

[a] gr. ἀγκύλος: torcido, doblado.
[b] la. *vertere, versus*: girar, cambiar de sentido algo (e.g., un molino).
[c] la. *adiacens, adiacentis*: yacer uno al lado de otro.

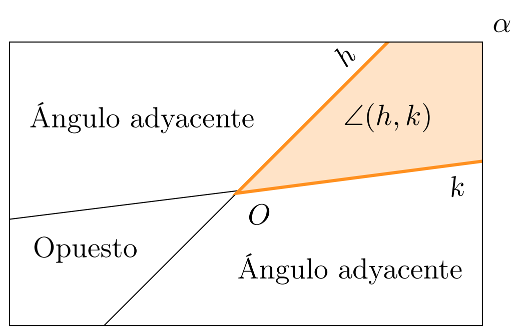
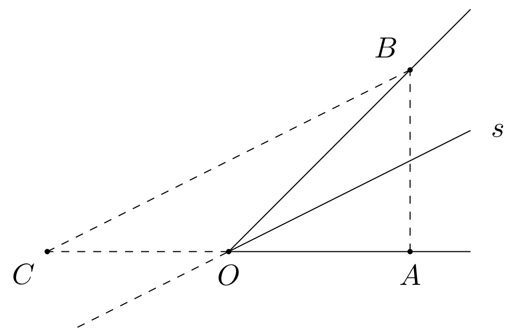


Figura 1.3. Ángulos.

Teorema 1.21 (Teorema de las barras cruzadas): Sea $\angle AOB$ contenido en α, una semirrecta de origen O está contenida en $\angle AOB$ syss intersecta a $\overline{AB}$.

Demostración: $\implies$. Por II2 existe C tal que $A-O-C$, luego A, B, C son no colineales y la prolongación de s corta a $\overline{AC}$ en O, por axioma de Pasch,



corta a $\overline{BC}$ o $\overline{AB}$. Mas, no puede intersectar a $\overline{BC}$ pues este pertenece al ángulo $\angle BOC$ que es adyacente a $\angle AOB$, esto debido, a que su semirrecta complementaria, como pasa por O, cruza ambos lados quedando así en el ángulo opuesto. Por ende, cruza a $\overline{AB}$ y debe ser s quién lo haga pues su complemento está en el ángulo opuesto.

$\Longleftarrow$. Supongamos que s intersecta a $\overline{AB}$ en C y sea $D \in s$ distinto de O, entonces la prolongación de $\overline{CD}$ corresponde a la prolongación de s. Como $O \notin \overline{CD}$ entonces está en los mismos semiplanos que los lados del ángulo, por ende, $\overline{CD} \subset \angle AOB$ y, en general, $s \in \angle AOB$ (puesto que todo punto $C \in s$ está en el ángulo). $\square$

Axioma IV, 4: Sea θ_1 un ángulo, y s una semirrecta de prolongación r y α un semiplano de frontera r que contiene a s; existe un único ángulo θ_2 en α tal que uno de sus lados sea s que satisface $\theta_1 \equiv \theta_2$.

Definición 1.22 – *Triángulo*: Sean A, B, C no colineales, entonces se define el *triángulo* denotado $\triangle ABC$ como la intersección entre $\angle ABC$, $\angle BCA$ y $\angle CAB$.

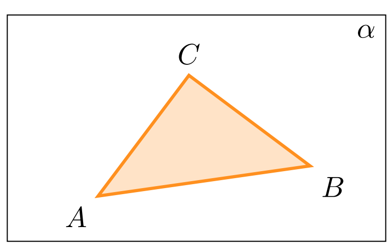


Figura 1.4. Triángulo.

En lo siguiente diremos que un par de triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son congruentes cuando sus lados y ángulos **respectivos** lo son:

$$\begin{array}{ccccccccc} \overline{AB} & \equiv & \overline{A'B'} & \overline{BC} & \equiv & \overline{B'C'} & \overline{CA} & \equiv & \overline{C'A'} \\ \angle A & \equiv & \angle A' & \angle B & \equiv & \angle B' & \angle C & \equiv & \angle C' \end{array}$$

Axioma IV, 5: Sea $\triangle ABC$ y A', B' un par de puntos tales que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, entonces dado un semiplano α de frontera $A'B'$, existe un único $C' \in \alpha$ tal que $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Definición 1.23: Se dice una geometría de Hilbert ordenada es *métrica* si satisface los axiomas de congruencia.

§1.1.5 Axioma de continuidad (V). Además de las asociaciones comúnes hay dos relaciones numéricas asociadas a la geometría, la primera es la propiedad de arquímedes que en esencia dice que todo punto está a una cierta distancia finita de otro, sin importar la medida escogida. El segundo axioma, que es una generalización de la propiedad arquimediana dice que los puntos y las posiciones en una recta geométrica corresponden exactamente a los números reales en la recta numérica, sin embargo, por supuesto tendremos que formalizar ciertas nociones antes de introducirlo.

Axioma de Continuidad de Arquímedes (V): Sean A, B, C colineales tales que $A - B - C$, entonces si $A_0 := A$, $A_1 := B$ y A_{n+2} es el primer punto tal que $A_n - A_{n+1} - A_{n+2}$ y $\overline{AB} \equiv \overline{A_{n+1}A_{n+2}}$, entonces existe un n natural tal que $A - C - A_n$.

1.2. Segmentos y triángulos

Ésta sección asume que el espacio es una geometría métrica de Hilbert, dicho de otro modo: no ocupa ni el axioma de las paralelas ni el axioma de Arquímedes.

Teorema 1.24: Dados dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ existen $P - R - Q$ tales que $\overline{AB} \equiv \overline{PR}$ y $\overline{CD} \equiv \overline{RQ}$.

Demostración: Se desprende inmediatamente del axioma IV 2; debido a que primero se elige P y otro punto cualquiera para construir una recta r y elegir de ella una semirrecta. Con ella, construimos R para que satisfaga el enunciado. Luego, construimos la semirrecta de r de origen R que no contiene a P para que apliquemos el axioma IV 2 y construyamos Q. □

Definición 1.25: En condiciones del teorema anterior, escribiremos

$$\overline{PQ} \equiv \overline{AB} + \overline{CD}$$

a lo que referiremos como *suma de segmentos*.

Corolario 1.26: $\overline{PQ} \equiv a+b$ syss existe un único $R \in \overline{PQ}$ tal que $\overline{PR} \equiv a$ y $\overline{RQ} \equiv b$.

Teorema 1.27: Sean a, b, c segmentos tales que $a + b \equiv a + c$, entonces, $b \equiv c$.

Demostración: Sea $a + b \equiv \overline{PQ}$, entonces existe $R \in \overline{PQ}$ tal que $a \equiv \overline{PR}$ y $b \equiv \overline{RQ}$. Por el mismo argumento, existe $R' \in \overline{PQ}$ tal que $a \equiv \overline{PR'}$ y $c \equiv \overline{R'Q}$, pero por unicidad de dicho punto tenemos que $R = R'$ con lo que se demuestra el resultado. □

Definición 1.28: Sean a, b segmentos cualesquiera, denotaremos que $a < b$ (léase "a menor que b") syss existe un segmento c tal que $b \equiv a+c$. También, escribiremos $a \leq b$ syss $a < b$ o $a \equiv b$.

Criterios de congruencia entre triángulos. En lo sucesivo presentaremos tres congruencias que nos serán de vital importancia. Cabe destacar que conservaremos el hábito de llamar a los ángulos de un triángulo por el punto de origen del mismo, excepto cuando sea absolutamente necesario.

Lema 1.29: Dados $\angle POA \equiv \angle POB$ contenidos en el mismo semiplano de frontera PO, entonces, O, A, B son colineales y pertenecen a la misma semirrecta de origen en O.

Demostración: Por IV4 son el mismo ángulo. Luego, sabemos que uno de los lados es igual ($\overrightarrow{OP}$), luego, el otro también debe serlo $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$, en particular, nuestro resultado. □

Desde aquí en adelante nombraremos los criterios usando las siglas de **L**ado y **Á**ngulo (sin tilde en la sigla).

Teorema 1.30 (Criterio LAL): Sean $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ tales que

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \quad \angle B \equiv \angle B', \quad \overline{BC} \equiv \overline{B'C'},$$

entonces, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Demostración: Consideremos el $\triangle ABC$, el plano $\alpha = A'B'C'$ y el segmento $\overline{A'B'}$, entonces existe un único punto P tal que $\triangle A'B'P \subset \alpha$ es congruente a $\triangle ABC$ (IV5). Como la congruencia es relación de equivalencia $\overline{B'C'} \equiv \overline{B'P}$ y $\angle A'B'C' \equiv \angle A'B'P$ (IV1), por el lema anterior, B', C', P pertenecen a la misma semirrecta de origen B', por IV2, tenemos que la unicidad del punto P, es decir, $C' = P$. □

Teorema 1.31 (Criterio ALA): Sean $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ tales que

$$\angle A \equiv \angle A', \quad \overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \quad \angle B \equiv \angle B'$$

entonces, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Demostración: Sea P en el semiplano de frontera $A'B'$ que contiene a C' tal que $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'P$. Por IV4, $\angle C'A'B' = \angle PA'B'$ y $\angle A'B'C' = \angle A'B'P$, por ende, $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'P}$ y $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'P}$. Finalmente, por unicidad de la intersección, $C' = P$. □

Teorema 1.32: Sean s_1, s_2, s_3 semirrectas de origen O que pueden ubicarse en un mismo semiplano cuya frontera incluya a O; s_1', s_2', s_3' semirrectas de origen O' en las mismas condiciones. Si $s_2 \in \angle(s_1, s_3)$, $\angle(s_1, s_2) \equiv \angle(s_1', s_2')$ y $\angle(s_1, s_3) \equiv \angle(s_1', s_3')$, entonces, $s_2' \in \angle(s_1', s_3')$ y $\angle(s_2, s_3) \equiv \angle(s_2', s_3')$.

Demostración: Escójase $A \in s_1$ y $B \in s_3$ cualesquiera (excepto O mismo), por teorema de las barras cruzadas sabemos que s_2 corta a $\overline{AB}$ en C. Luego, sean $A' \in s_1'$ y $B' \in s_3'$ tales que $\overline{OA} \equiv \overline{O'A'}$ y $\overline{OB} \equiv \overline{O'B'}$ (IV). Por LAL, $\triangle AOB \equiv \triangle A'O'B'$, por lo cual, $\angle OAB \equiv \angle O'A'B'$. Digamos que sea C' la intersección entre la prolongación de s_2' y $A'B'$, entonces, como $C' \in \overrightarrow{A'B'}$ se tiene que $\angle O'A'B' = \angle O'A'C'$, con lo que, por ALA $\triangle AOC \equiv \triangle A'O'C'$, de lo que se concluye que $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ que es menor a $\overline{A'B'}$, por lo que, s_2' intersecta a $\overline{A'B'}$.

Por cancelación de la suma de segmentos llegamos a probar que $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, y análogo a la prueba de la equivalencia de ángulos previamente dada vemos que $\angle OBC \equiv \angle O'B'C'$, lo que, por LAL, nos permite ver que

$\triangle OBC \equiv \triangle O'B'C'$; con lo que concluimos que $\angle(s_2, s_3) = \angle COB \equiv \angle C'O'B' = \angle(s_2', s_3')$ como se quería probar. $\square$

Teorema 1.33: Sean s_1, s_2, s_3 semirrectas de origen O en el mismo contexto que el teorema anterior. Si $\angle(s_1, s_2) \equiv \angle(s_1', s_2')$ y $\angle(s_2, s_3) \equiv \angle(s_2', s_3')$, entonces $\angle(s_1, s_3) \equiv \angle(s_1', s_3')$.

Demostración: Dada la prolongación de s_1' y el plano que contiene a s_2', construimos s_3'' como aquella semirrecta tal que $\angle(s_1, s_3) \equiv \angle(s_1', s_3'')$. Luego, como $\angle(s_1, s_2) \equiv \angle(s_1', s_2')$, por construcción, por el teorema anterior se comprueba que $\angle(s_2', s_3') \equiv \angle(s_2, s_3) \equiv \angle(s_2', s_3'')$. Y por unicidad de la semirrecta, $s_3' = s_3''$. $\square$

Definición 1.34: En lo sucesivo, diremos que un triángulo es *equilátero*[a] syss todos sus lados son congruentes entre sí; diremos que es *isósceles*[b] syss dos de sus lados son congruentes entre sí (en cuyo caso, llamaremos *base* al lado restante) o diremos que es *escaleno* si todos sus lados no son congruentes dos a dos.

[a] la. *aequus*: iguales, *latus, lateris*: lados, costados.
[b] gr. ἶσος: iguales, σκελή: piernas.

Teorema 1.35 (Criterio de los triángulos isósceles): Un triángulo $\triangle ABC$ es isósceles syss posee dos ángulos congruentes entre sí.

Demostración: $\Longrightarrow$. Sin perdida de generalidad asumimos que $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$, con lo que aplicando el criterio LAL demostramos que $\triangle ACB \equiv \triangle BCA$, por ende, $\angle A \equiv \angle B$.

$\Longleftarrow$. Sin perdida de generalidad asumimos que $\angle A \equiv \angle B$, con lo que aplicando el criterio ALA demostramos que $\triangle ACB \equiv \triangle BCA$, por ende, $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$. $\square$

Cabe notar que podemos aplicar el mismo argumento para notar que un triángulo es equilátero syss sus tres ángulos son congruentes entre sí.

Cabe destacar una especie de convenio en diagramas geométricos en el que se marcan con n palos ciertos segmentos y ángulos, de forma que todos los segmentos y ángulos en la figura que tienen el mismo número de palos son congruentes entre sí. En ciertos casos, el ángulo tendrá una marca, en otros se dibujaran las líneas las veces necesarias para indicar que son congruentes (como se muestra en la figura adjunta). Cabe notar que esta no es una técnica

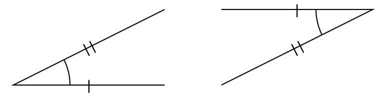
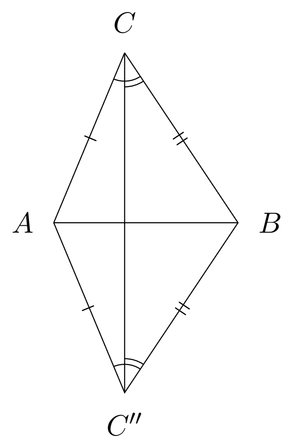


Figura 1.5



para formalizar las demostraciones ni nada, simplemente un truco para llevar un inventario de las relaciones conocidas.

Teorema 1.36 (Criterio LLL): Sean $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ tales que

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \quad \overline{BC} \equiv \overline{B'C'}, \quad \overline{CA} \equiv \overline{C'A'},$$

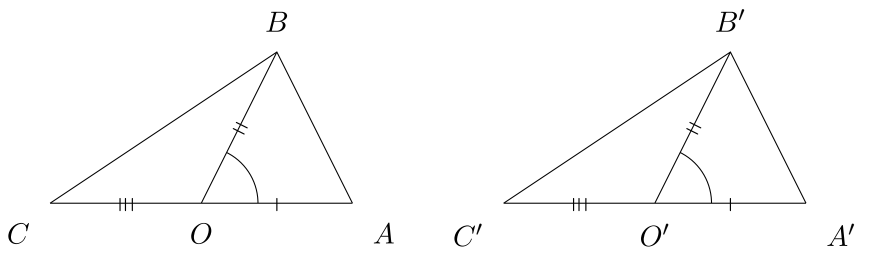
entonces, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Demostración: Veamos que dado $\triangle A'B'C'$, el semiplano complementario al de frontera AB que contiene a C y el segmento $\overline{AB}$ existe C'' tal que $\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC''$ (IV5).

Nótese que por teoremas 1.32 y 1.33, los triángulos $\triangle ACC''$ y $\triangle BCC''$ son isósceles de base $\overline{CC''}$, por lo cual, $\angle ACC'' \equiv AC''C$ y $\angle C''CB \equiv \angle CC''B$, con lo que, vemos que $\angle ACB \equiv \angle AC''B \equiv A'C'B'$, por lo que, por criterio LAL queda demostrado. $\square$

1.3. Ángulos

Teorema 1.37: Sean θ, θ' ángulos congruentes entre sí, entonces, sus ángulos adyacentes son también congruentes.



DEMOSTRACIÓN: Primero consideremos las semirrectas s_1, s_2 que forman a θ: digamos que se intersectan en O y que $A \in s_1$ como $B \in s_2$ (ambos distintos de O). Luego, sean las semirrectas s_1', s_2' las que forman a θ', O' es su intersección y se definen $A' \in s_1', B' \in s_2'$ tales que $\overline{OA} \equiv \overline{O'A'}, \overline{OB} \equiv \overline{O'B'}$. Sea C tal que $C - O - A$ y se define C' analogamente. Lo que queremos ver es que $\angle BOC \equiv \angle B'O'C'$.

La información nos permite ver que $\triangle AOB \equiv \triangle A'O'B'$ por LAL, con lo que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ y $\angle B \equiv \angle B'$. Por suma de segmentos $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, con lo que, $\triangle BAC \equiv \triangle B'A'C'$ por LAL, de lo que concluimos que $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$. Finalmente $\triangle BOC \equiv \triangle B'O'C'$ por LLL, lo que comprueba el teorema. □

Corolario 1.38: Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

***Definición 1.39 – Ángulos suplementarios*:** Decimos que dos ángulos θ, ϕ son suplementarios[a] syss uno es congruente a uno (y, por lo tanto, a ambos) de los ángulos adyacentes del otro.

[a]la. *sub*: por debajo, *pleo*: llenar. *Suppleo*: para completar.

Teorema 1.40: Dado cualquier par distinto de puntos A, B existe un único M (que llamaremos *punto medio*) colineal a ambos tal que $A - M - B$ y $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.

DEMOSTRACIÓN: Sea C un punto cualquiera externo a AB, existe D en el semiplano complementario tal que $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$. Por definición del semiplano, $\overline{CD}$ intersecta a AB en M. Por teoremas 1.32 y 1.33 $\angle CAD \equiv \angle CBD$, con lo que, por LAL $\triangle CAD \equiv \triangle DBC$, de lo que se deduce que $\angle ACD \equiv \angle BDC$.

Finalmente, por ALA $\triangle ACM \equiv BDM$, es decir, que $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$. Y debe darse que $A - M - B$, pues de lo contrario, sin perdida de generalidad

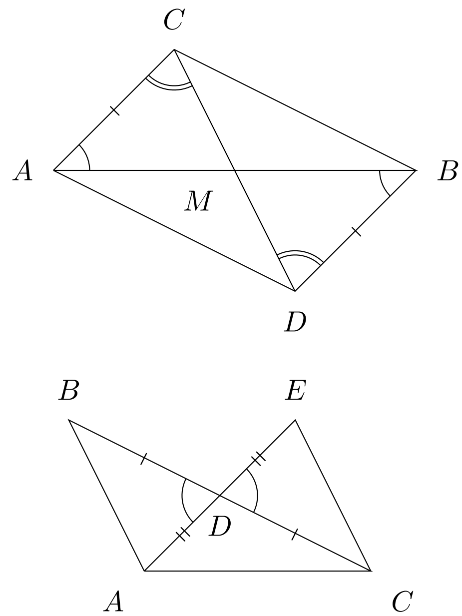


Figura 1.6. Demostración del teorema del ángulo externo.

podemos suponer que $A - B - M$, por ende, $\overline{AM} \equiv \overline{AB} + \overline{BM} \equiv \overline{AB} + \overline{AM}$, lo que sería absurdo. $\square$

Teorema 1.41 – *Teorema del ángulo externo*: En un triángulo el ángulo suplementario de uno es siempre mayor que los otros dos ángulos interiores restantes

Demostración: Vemos que sólo nos basta probarlo para un par de ángulos, por ejemplo, ver que $\angle B$ es menor que el suplementario de $\angle C$. Para ello, primero, consideraremos el punto intermedio D del segmento $\overline{BC}$ y sobre $\overrightarrow{AD}$ construimos E tal que $\overline{AD} \equiv \overline{DE}$. Sabemos que los ángulos opuestos por el vértice son congruentes, es decir, $\angle BDA \equiv \angle CDE$; con ello, $\triangle BDA \equiv \triangle CDE$ por LAL, comprobando así que $\angle B \equiv DCE$ el cuál está contenido en el ángulo adyacente de C. $\square$

Teorema 1.42 (Criterio AAL): Sean $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ tales que

$$\angle A \equiv \angle A', \ \angle B \equiv \angle B', \ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'},$$

entonces, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

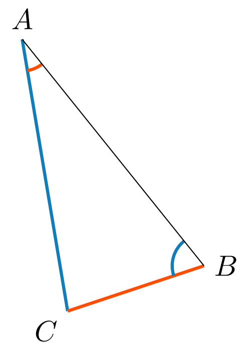


Figura 1.7

Demostración: Dado el semiplano de frontera $A'B'$ que contiene a C', existe C'' tal que $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C''$, por la unicidad de las congruencias de los ángulos deducimos que B', C' y C'' son colineales. Y no pueden ser distintos, puesto que de lo contrario podríamos formar el triángulo $\triangle A'C'C''$ cuyo ángulo suplementario de C' fuese igual al ángulo interno de C'', lo que es absurdo por el teorema anterior. □

La importancia de los criterios es que, ahora, podemos comprobar que dos triángulos son congruentes siempre que compartan la medida de un segmento y otros dos valores (sean segmentos o ángulos cualesquiera).

Teorema 1.43: Sea $\triangle ABC$, $\overline{BC} < \overline{AC}$ syss $\angle A < \angle B$.

Demostración: $\Longrightarrow$. Esto significa que existe $D \in \overline{BC}$ tal que $\overline{AC} \equiv \overline{DC}$, con lo que se forma $\triangle ACD$ isóceles de base $\overline{AD}$. Nótese que $\angle B < \angle ADC$ pues es un ángulo complementario de D en $\triangle ABD$. Y por ser isóceles

$$\angle B = \angle ABC < \angle ACD \equiv \angle CAD < \angle CAB = \angle A.$$

$\Longleftarrow$. Es aparente que si $\angle A < \angle B$ podemos realizar la misma construcción y llegar a que no se puede dar que $\overline{AC} \leq \overline{BC}$. □

Perpendicularidad.

Definición 1.44: Diremos que un *ángulo recto* es aquel que es congruente a su suplementario. Diremos que un *ángulo agudo* es aquel que es menor a un recto y un *ángulo obtuso* es mayor a un recto.

Nótese que como el suplementario de un ángulo agudo es obtuso

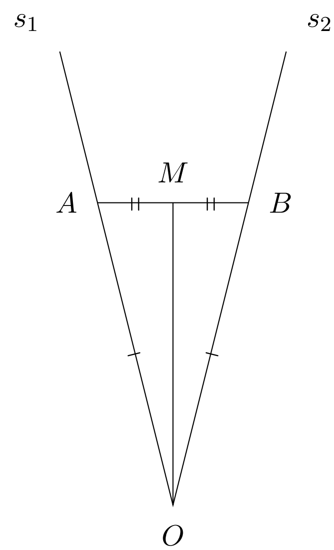


Figura 1.8. Demostración del teorema 1.45.

y viceversa, y por el teorema 1.41, entonces un triángulo debe tener siempre al menos dos ángulos agudos. Por lo tanto, los clasificaremos en: *obtusángulo* si posee un ángulo obtuso, *rectángulo* si posee un ángulo recto y *acutángulo* si todos sus ángulos son agudos.

Además, un par de rectas secantes a, b se dicen *perpendiculares*[a] (denotado como $a \perp b$) syss uno de los ángulos que se forman en su intersección es recto (por lo tanto, los cuatro lo son).

[a] la. *per*: atravesar, *pendere*: suspendido.

En los triángulos rectángulos llamamos *hipotenusa* al lado opuesto al ángulo recto y *catetos* al resto. En particular, el teorema 1.43 implica que la hipotenusa es mayor que los catetos.

Teorema 1.45: Existen ángulos rectos.

Demostración: Sea $\angle(s_1, s_2)$ un ángulo cualquiera, con s_1, s_2 semirrectas de origen común O. Sea $A \in s_1$ cualquiera distinto de O, luego existe $B \in s_2$ tal que $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$. Luego, definimos M como el punto medio de $\overline{AB}$ y por criterio LLL se comprueba que $\triangle AMO \equiv \triangle BMO$, probando que $\angle AMO \equiv \angle BMO$, es decir, que es recto. $\square$

Corolario 1.46: Los ángulos rectos son todos congruentes entre sí.

Hint: Deriva del hecho de que dos ángulos son congruentes syss sus suplementarios lo son. □

En lo sucesivo, dibujaremos los ángulos rectos con forma de cuadrado (pese a no definir formalmente está forma aún, nos permitiremos este lujo, pues es una mera ayuda visual).

Teorema 1.47: Dada una recta a y un punto P contenidos en un plano α, existe una única recta b en α tal que contiene a P y es perpendicular a a.

Demostración: Si P está en a entonces basta crear un ángulo recto en P.

Si P no está en a, entonces construimos primero un punto Q en el semiplano de α opuesto al de P con frontera a tal que el ángulo que genere r con $\overrightarrow{AP}$ sea congruente al que genere con $\overrightarrow{AQ}$ y además que $\overline{AP} \equiv \overline{AQ}$. Si $P - A - Q$ entonces PQ resulta ser la recta buscada. De lo contrario, PQ intersecta a a en B y por criterio LAL probamos que $\triangle PAB \equiv \triangle QAB$, y que, PQ resulta ser la perpendicular buscada.

La unicidad resulta de ser que, si existiése otra perpendicular, podría generarse un triángulo con dos ángulos rectos, lo que es imposible. □

En lo sucesivo llamaremos **pie** de la perpendicular a r que pasa por A y contenido en el plano, al punto por el cual se intersecta con r.

Pese a sonar contra-intuitivo vamos a redefinir la notación de un triángulo. Dado $\triangle ABC$, los lados opuestos a un ángulo serán denotados por su letra en minúsculas, es decir, $a \equiv \overline{BC}$ por ejemplo.

Teorema 1.48: Dado $\triangle ABC$, tal que $c \leq b$

$$b - c < a < b + c$$

Demostración: Por el teorema anterior consideraremos a r como la recta perpendicular a BC que pasa por A (en el plano ABC) y definiremos P como su intersección, con lo que distinguimos tres casos:

1. $P = B$ o $P = C$. Sin perdida de generalidad supondremos que $P = B$, lo que significa que $\triangle ABC$ es rectángulo en B, por ende, b es la hipotenusa y $a < b < b + c$.

2. $B - P - C$. En cuyo caso se forman dos triángulos rectángulos: $\triangle BAP$ y $\triangle PAC$, ambos en P; por ende, $\overline{BP} < c$ y $\overline{PC} < b$, es decir
$$a = \overline{BP} + \overline{PC} < b + c.$$

3. $P \notin \overline{BC}$. Sin perdida de generalidad, supondremos que $B - C - P$, con lo que se forman los triángulos rectángulos $\triangle APB$ y $\triangle APC$ ambos en P, con lo que $a + \overline{CP} < c$ y $\overline{CP} < b$, es decir
$$a < a + 2\overline{CP} < b + c.$$

La diferencia resulta de que, por las deducciones $b < a + c$, por lo tanto, despejando nos queda que $b - c < a$. $\square$

Lema 1.49: Sea r una recta perpendicular a dos rectas a, b en un plano α por O. Entonces r es perpendicular a toda recta que pase por O y que esté contenida en el plano α.

Demostración: Sea P otro punto de r y P' en la semirrecta complementaria a $\overrightarrow{OA}$ tal que $\overline{OA} \equiv \overline{OA'}$. Luego sean $A \in a$ y $B \in b$ distintos de O. Demostraremos que si una semirrecta s de origen O está contenida en $\angle AOB$ (y, por ende, en α) entonces r es perpendicular a su prolongación. En dicho caso, por teorema de las barras cruzadas, intersectará a $\overline{AB}$ en C.

Nótese que $\triangle POA \equiv \triangle P'OB$ y $\triangle POB \equiv \triangle P'OB$ por LAL. Luego, $\triangle PAB \equiv \triangle P'AB$ por LLL. Procedemos a ver que $\triangle PAC \equiv \triangle P'AC$ por LAL. Por lo que, finalmente, $\triangle POC \equiv \triangle P'OC$ por LLL, lo que significa que $\angle POC$ debe ser recto. $\square$

Definición 1.50: Diremos que una recta es perpendicular a un plano si no está contenido en él, lo intersecta en un solo punto y es perpendicular a todas las rectas de dicho plano que pasan por dicho punto.

Proposición 1.51: Sea r una recta y O un punto de ella, entonces la unión de todas las rectas perpendiculares a r en O es un plano.

Demostración: Sean α, γ dos planos tales que su intersección sea r, entonces, sabemos que por O pasa una única recta perpendicular a r en cada plano. Con ambas, formamos un plano γ, y sabemos que ha de ser subconjunto de la unión de rectas perpendiculares. Sea $s \perp r$ en O, probemos que siempre está contenida en γ. Con r y s podemos formar el plano δ, por lo que sabemos que s debe ser la única perpendicular a r por O en δ, pero δ se intersecta con γ y debe ser en s. Por lo tanto, γ debe ser la unión de perpendiculares por O. $\square$

Teorema 1.52: Dado un plano α y un punto A, existe una única recta perpendicular a α por A.

Demostración: $A \in \alpha$. Podemos elegir dos rectas de α que pasen por A y por ende, los planos que les son perpendiculares por A, los que se intersectan en un r tal que $r \perp \alpha$.

$A \notin \alpha$. Sea $s \subset \alpha$ con $B, C \in s$; además, sea D el pie de la perpendicular a s que pasa por A. Sea $r \perp s$ por D en α, definimos A' el punto en el semiplano complementario al de frontera r con A tal que $\angle(r, \overrightarrow{OA}) \equiv \angle(r, \overrightarrow{OA'})$ y que $\overline{OA} \equiv \overline{OA'}$.

Sea O la intersección entre AA' y r, se comprueba que $\triangle ADO \equiv \triangle A'DO$ (por LAL), $\triangle ADB \equiv \triangle A'DB$ y $\triangle ADC \equiv \triangle A'DC$ (por LAL, pues los ángulos en D son rectos), con lo que $\triangle ABO \equiv \triangle A'BO$ y $\triangle ACO \equiv \triangle A'CO$ (por LLL), con lo que se prueba que AA' es perpendicular a OB, OC y, por ende, a α. $\square$

1.4. Círculos y circunferencias

Definición 1.53 – *Círculos y circunferencias*: Dado un plano Π, un punto en ella $O \in \Pi$ (denominado *centro*[a]) y un segmento r (denominado *radio*) se define el círculo[b] como el conjunto de puntos

$$\omega := \{P \in \Pi : \overline{OP} \leq r\}$$

y la circunferencia[c] como el conjunto $\partial\omega := \{P \in \alpha : \overline{OP} \equiv r\}$.

También se le dice radio a cualquier segmento desde el centro a un punto de la circunferencia. Asimismo, se le denomina *cuerda* a un segmento entre dos puntos distintos cualesquiera de la circunferencia. Las cuerdas que pasan por el centro se denominan *diámetros*.

[a] gr. κέντρον: punto, punta.
[b] gr. κίρκος: anillo; κύηλος: círculo.
[c] la. *circum*: al rededor, *fero, ferre*: cargar.

Proposición 1.54: Toda cuerda de un círculo está completamente contenida en él. En consecuencia, los círculos son convexos.

Demostración: Sea ω un círculo de centro O y frontera $\partial\omega$, sean $A, B \in \partial\omega$ distintos. Hemos de probar que si $A - C - B$, entonces $\overline{OC} \leq \overline{OA}$. $\triangle OAB$ es isóceles de base $\overline{AB}$ por definición de circunferencia, de modo que $\angle OAB \equiv \angle OBA$. Notemos que $\angle OCB > \angle OAB$ por ser externo al triángulo $\triangle OAC$. Luego $\overline{OC} < \overline{OB}$ pues sus ángulos opuestos son $\angle OAB \equiv \angle OBC < \angle OCB$. □

Corolario 1.55: Los círculos poseen infinitos puntos.

Ojo que las circunferencias son una historia completamente distinta por el momento.

Definición 1.56 – *Tangencia (Euclides)*: Decimos que una recta r es *tangente*[a] a un círculo ω coplanar a él, syss lo intersecta en un único punto de la circunferencia. Similar, diremos que dos círculos (o circunferencias) coplanares son *tangentes* si la intersección de sus circunferencias es un único punto.

[a]la. *tango, tangere*: tocar.

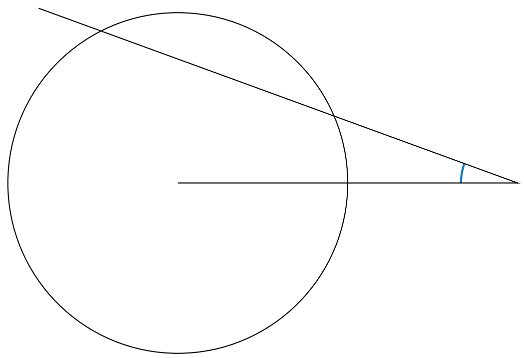
Esta es la definición de Euclides acerca de tangencia de figuras, sin embargo, más adelante generalizaremos este concepto en contextos de teorías modernas. Para que se entienda, la noción de tangencia tendrá más que ver con algo así como "balancear una recta sobre una curva" que intersectarla en un sólo punto.

Teorema 1.57: Una circunferenca $\partial\omega$ de centro O y una recta r coplanares tales que se intersectan en A son tangentes syss $r \perp OA$.

Demostración: $\implies$. Sabemos que $r \neq OA$ pues de lo contrario intersectaría a $\overline{\omega}$ en el $A' \in \overline{\omega}$ tal que $A' - O - A$. Definamos B como el pie de la perpendicular a r por O. Luego, si $B \neq A$ (por contradicción), definimos A' tal que $A - B - A'$ y $\overline{AB} \equiv \overline{BA'}$. Por ende, $\triangle OBA \equiv \triangle OBA'$ (por LAL), de lo que se desprende que $\overline{OA} \equiv \overline{OA'}$, es decir, $A' \in \overline{\omega}$, contradiciendo el que r es tangente.

$\impliedby$. Sea $B \in r$ distinto de A, el triángulo $\triangle OAB$ es rectángulo con hipotenusa $\overline{OB}$ lo que es mayor a sus catetos, por ende, $B \notin \overline{\omega}$. □

Teorema 1.58: Sea r una recta que corte a una circunferencia $\overline{\omega}$ del



mismo plano, pero sin ser tangente a ella, entonces la corta en dos puntos. Por ende, la intersección con ω es una cuerda de la misma.

Demostración: Supongamos que r corta a $\overline{\omega}$ en A, entonces definimos B como el pie de la perpendicular de r por O y a A' como el punto tal que $A - B - A'$ y $\overline{AB} \equiv \overline{BA'}$. Finalmente, $\triangle OBA \equiv \triangle OBA'$ por LAL, es decir, que $\overline{OA} \equiv \overline{OA'}$. □

En este contexto, diremos que r y ω son *secantes*.

Ejemplo (falsedad del criterio LLA): Por la proposición anterior se puede notar que es posible construir un escenario con dos triángulos no congruentes que compartiésen dos lados y un ángulo tercero.

Proposición 1.59: Sean ω y Ω círculos coplanares de centros O y O' resp., son tangentes en A syss O, O', A son colineares.

Demostración: $\Longleftarrow$. Demostraremos por contradicción que no pueden intersectarse en un punto B distinto. Sabemos que B no puede ser colineal al resto de puntos, por ende, separaremos los casos en dos:

1. $O - O' - A$. Supondremos que B existe, de forma que $\triangle ABO$ y $\triangle ABO'$ son isósceles de base $\overline{AB}$ y, por ende, $\angle ABO \equiv \angle ABO'$ lo que es contradictorio al axioma IV4.

2. $O - A - O'$. Nuevamente se forman $\triangle ABO$ y $\triangle ABO'$ isósceles de base $\overline{AB}$. Sabemos, además, que $\angle OAB$ y $\angle BAO'$ son suplementarios, por ende, $\angle OBA$ y $\angle ABO'$ también lo son, es decir, O, O', B son colineales, lo que es absurdo.

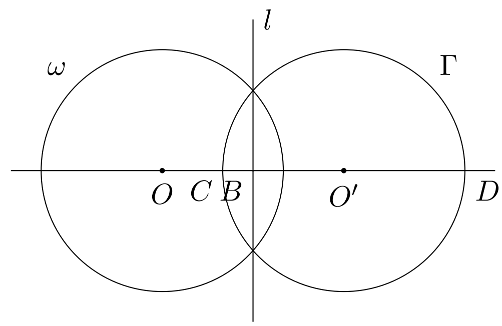


Figura 1.9

$\Longrightarrow$. Supongamos que no fuesen colineales, entonces, existe B en el semiplano complementario tal que $\triangle OO'A \equiv \triangle OO'B$, lo que confirma ser también ser un punto de intersección. □

Corolario 1.60: Dos circunferencias coplanares distintas que se intersectan sin ser tangentes, lo hacen en exactamente dos puntos.

Ahora, hay un axioma más que incluir en nuestra lista, puesto que es vital para nuestras construcciones y se ha comprobado como indemostrable:

Axioma sobre la Intersección de Circunferencias – IC: Dadas dos circunferencias coplanares ω y Γ que cumplen la condición de que una pasa por un punto interno y externo de la otra, entonces se intersectan en un punto.

De ahí, podemos ver que, al poseer un punto interno de la otra no pueden ser tangentes y, por ende, su intersección es en dos puntos.

Proposición 1.61 (Propiedad de intersección recta-circunferencia – IRC): Sean l, ω una recta y una circunferencia de radio r coplanares resp., l contiene un punto interno A de ω syss es secante a ω.

Demostración: $\Longrightarrow$. Primero, sea B el pie de la perpendicular a l por O (supondremos que $B \neq O$, pues dicho caso es trivial). Luego, definamos O' como el punto tal que $O - B - O'$ y $\overline{OB} \equiv \overline{BO'}$; con él, construimos una circunferencia Γ de radio r. Sean C y D los puntos de Γ en OO' (tales que $O - C - O'$ y $O - O' - D$). Demostraremos que C es interno a ω y D es externo.

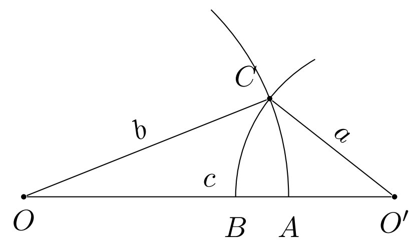


Figura 1.10. Construcción del triángulo en 1.63

Como $\overline{OA} < r$ (construcción) y $\overline{OB} < \overline{OA}$ (la hipotenusa es mayor que sus catetos), $\overline{OB} \equiv \overline{O'B} < r \equiv \overline{O'C}$, por lo que, $C{-}B{-}O'$. Como $O{-}B{-}O'$, el segundo teorema de Pasch sugiere que:

$O - C - B$. En cuyo caso, $\overline{OC} < \overline{OB} < r$.

$C - O - B$. En cuyo caso, $\overline{OC} < \overline{O'C} \equiv r$.

Asimismo, sabemos que D es externo pues $\overline{OD} > \overline{O'D} \equiv r$. Por ende, por el axioma V poseen dos intersecciones, llamemosle P y Q, de punto medio, M. Se demuestra facilmente que $\triangle OPM \equiv \triangle OQM$ (por LLL, análogo con O' en vez de O) y luego que $\triangle OPM \equiv \triangle O'PM$ (por LLA), lo que comprueba que M ha de ser el punto medio de $\overline{OO'}$, es decir, que $M = B$, por ende P y Q pertenecen a l. $\square$

Como consecuencia del IRC demuestre que:

Corolario 1.62: Las circunferencias poseen infinitos puntos.

Teorema 1.63: Dados, un conjunto de segmentos a, b, c tales que $b \leq c$ y que $c - b < a < b + c$ existe un triángulo cuyos lados son congruentes a ellos.

Demostración: Primero consideremos un plano α cualquiera, una semirrecta s (de prolongación r) contenida en él de origen O, existe O' tal que $c \equiv \overline{OO'}$. Como $b \leq c$ sabemos que existe un punto A tal que $O - A - O'$ y $b \equiv \overline{OA}$ y sea A' el otro punto de intersección de r con la circunferencia $\overline{\omega}$ de origen O y radio b. Luego construimos B perteneciente a la semirecta de origen O' que contiene a O tal que $a \equiv \overline{O'B}$. Como $c - b < a < b + c$, $B \in \overline{AA'}$, es decir, B es interno a ω. Luego, sea $\overline{\Omega}$ la circunferencia de centro O' y radio a, éstas se intersectan en dos puntos, sea C uno de ellos, entonces $\triangle OO'C$ es un triángulo que satisface las condiciones. $\square$

Corolario 1.64: Dada una longitud s, existe un triángulo equilatero de lado s.

Cabe destacar que esta última es la primera construcción en *Los Elementos* de Euclides [3]. Esto ofrece una comparación interesante, pues Euclides se interesaba en el como de las figuras, mientras que nosotros nos interesamos en el que de las mismas, en el si existen o no.

2

Geometría euclídea

Si hemos de hablar de matemática moderna no podemos dejar de lado a Euclides, quien con *Los Elementos* formalizó por primera vez las matemáticas siendo él el primero en intentar crear un sistema axiomático sobre el cual resolvía problemas principalmente de índole de construcción. Mas es también importante apreciar que la visión que Euclides le da a la geometría difiere bastante de la nuestra, él se interesaba en como manualmente construir una figura (y más adelante, sobre construcciones de regla y compás veremos que clase de figuras se pueden obtener a partir únicamente de estas herramientas básicas), mientras que a nosotros nos interesa la cualidad de existencia, que es mucho más formalista.

Esta distinción es clave para comprender y distinguir entre lo que se denomina *matemática clásica* y *moderna* pues, y como puede ver, va mucho más allá de una simple convención temporal. Asimismo, cabe destacar que eventualmente veremos como poder aplicar otras ramas de las matemáticas (por lo que se recomiendan lecturas de otro tipo de textos), tales como el álgebra y el análisis, para profundizar y obtener nuevos resultados.

Además de ello, este capítulo ofrece algunos axiomas nuevos (el de Arquímedes, el de continuidad y el de Euclides) que ayudaran a obtener más resultados y obtener una visión más concisa sobre que tipo de geometría tratamos.

2.1. Medición de segmentos y ángulos

En la sección 1.2 vimos que podemos definir el concepto de suma de segmentos, de modo que si tenemos un segmento no trivial $\overline{AB}$, nos permitimos, por recursión denotar

$$n\overline{AB} \equiv \underbrace{\overline{AB} + \cdots + \overline{AB}}_{n}.$$

Definición 2.1 – *Proporción de segmentos*: Sean u, v segmentos. Como ya hemos definido la suma de segmentos, podemos denotar $v \equiv nu$ si v resulta de sumar n veces el segmento u. Así mismo, podemos denotar $v \equiv (1/2^n)u$ si v es el segmento que resulta de dividir n veces el segmento u en 2 partes.

Se define

$$\mathbb{Q}_2 := \left\{ \frac{a}{2^b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$$

cuyos elementos llamamos *racionales diádicos*.

Si $0 < r \in \mathbb{Q}_2$, entonces denotamos ru el segmento dado por aplicar las operaciones anteriormente descritas. Así mismo, si $v \equiv ru$, entonces nos permitimos denotar $v/u = r$.

Proposición 2.2: Dados los segmentos u, v no triviales, y $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_2$ estrictamente positivos, se cumple:

1. $1u \equiv u$.
2. $\alpha(\beta u) \equiv (\alpha\beta)u$.
3. $\alpha(u + v) \equiv \alpha u + \alpha v$.
4. $(\alpha + \beta)u \equiv \alpha u + \beta u$.
5. $\alpha u \equiv \alpha v$ implica $u \equiv v$.
6. $\alpha u \equiv \beta u$ implica $\alpha = \beta$.
7. $\alpha < \beta$ implica $\alpha u < \beta u$.
8. $u < v$ implica $\alpha u < \alpha v$.

Aquí en adelante admitimos que (AR) significa axioma de Arquímedes, así vemos que se cumple

Proposición 2.3: Son equivalentes:

1. **El axioma de Arquímedes**.
2. Para todos u, v segmentos no triviales, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $v < nu$.
3. Para todos u, v segmentos no triviales, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(1/2^n)v < u$.

Teorema (AR) 2.4: Dados u, v, w segmentos no-triviales con $u < v$, existe $r \in \mathbb{Q}_2$ tal que $u < rw < v$.

Demostración: Por AR, existe n tal que $\frac{1}{2^n}w < v - u$ y que $\frac{1}{2^n}w < u$. Y también por AR existe m **máximo** tal que $\frac{m}{2^n}w \leq u$. De modo que $u < \frac{m+1}{2^n}u$. Pero claramente

$$u < \frac{m+1}{2^n}w < u + \frac{1}{2^n}w < u + (v - u) = v. \qquad \square$$

Definición 2.5: Si u, v son segmentos no-triviales, entonces denotamos

$$\frac{v}{u} := \sup\{r \in \mathbb{Q}_2 : r > 0 \land ru < v\} \in \mathbb{R}.$$

Notemos que el conjunto es no vacío y acotado por AR, de modo que la existencia de ésta razón es de hecho una equivalencia a AR.

Teorema (AR) 2.6: Sea $s := \overrightarrow{OP}$ una semirrecta, u un segmento no trivial y $Q, R \in s$ tales que

$$\frac{\overline{OQ}}{u} = \frac{\overline{OR}}{u},$$

entonces $Q = R$.

Definición 2.7 – *Recta graduada*: Si $P_0 \neq P_1$ entonces con $r := P_0P_1$ y con $u := \overline{P_0P_1}$, al que llamamos *unidad* de la recta, llamamos graduación $\mu_u : r \to \mathbb{R}$ la función tal que:

$$\mu(Q) := \begin{cases} 0, & Q = P_0 \\ \frac{\overline{P_0Q}}{u}, & Q \in \overrightarrow{P_0P_1} \\ -\frac{\overline{P_0Q}}{u}, & Q \notin \overrightarrow{P_0P_1} \end{cases}$$

Llamamos *números constructibles* de P_0P_1, denotado $\mathscr{C}_u$, a $\operatorname{Img}\mu$. Nótese que μ es inyectiva (si se asume AR) de manera que también nos permitimos denotar $P_r \in P_0P_1$ para $r \in \mathscr{C}_u$ al punto tal que $\mu(P_r) = r$. Sabemos que

Nótese que la definición es de hecho independiente de AR, pues nos restringimos a los puntos de la recta graduada para los que existe la proporción.

Proposición 2.8: Se cumple:

1. Dos rectas graduadas de unidades congruentes comparten conjuntos de números constructibles.

2. $\mathbb{Q}_2 \subseteq \mathscr{C}_u \subseteq \mathbb{R}$ para toda unidad no-trivial.

Teorema 2.9: Sea μ una aplicación que a cada segmento le aplica un número real positivo tal que para todo u, v no triviales se cumpla:

1. $\mu(u) = \mu(v)$ syss $u \equiv v$.

2. $\mu(u + v) = \mu(u) + \mu(v)$.

entonces se cumple que

$$\frac{\mu(u)}{\mu(v)} = \frac{u}{v}.$$

Demostración: Claramente para todo n se cumple que $\mu(nu) = n\mu(u)$. De modo que para todo n se cumple $\mu((1/2^n)u) = (1/2^n)\mu(u)$ y en conclusión, para todo $r \in \mathbb{Q}_2$ positivo se cumple que $\mu(ru) = r\mu(u)$.

Sean $u < v$, entonces por definición existe w no trivial tal que $u + w \equiv v$, de modo que $\mu(u) < \mu(u) + \mu(w) = \mu(v)$. De modo que si $v \equiv \alpha u$ entonces para todo $r, s \in \mathbb{Q}_2$ positivos tales que $r < \alpha < s$ se cumple

$$r = \frac{\mu(ru)}{\mu(u)} < \frac{\mu(\alpha u)}{\mu(u)} < \frac{\mu(su)}{\mu(u)} = s$$

por lo que

$$\frac{\mu(v)}{\mu(u)} = \frac{\mu(\alpha u)}{\mu(u)} = \alpha = \frac{v}{u}.$$

□

Definición 2.10 – *Medida de segmentos*: Una aplicación que satisface las condiciones anteriores se dice una *medida de segmentos*, y a los segmentos u tales que $\mu(u) = 1$ se les dicen *unidades* de la medida μ.

Corolario 2.11: Si μ, ν son medidas de segmentos, entonces la proporción

$$\frac{\mu(u)}{\nu(u)}$$

es invariante para cualquier segmento no trivial u.

Teorema (AR) 2.12 – *Propiedad arquimediana de ángulos*: Para todo par de ángulos θ, ϕ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\theta > \phi$ o $n\theta$ no está definido.

Demostración: Si $\theta \geq \phi$ entonces es trivial, por lo que asumiremos que $\theta < \phi$. Por axiomas de congruencia, $\phi \equiv \angle AOB$ con $\overline{AO} \equiv \overline{OB}$. Sea C el punto medio de $\overline{AB}$, de forma que $\angle AOC \equiv \angle COB$, por ende, $\angle ACO$ es recto y $\angle AOC \equiv (1/2)\phi$, por lo que podemos asegurar que la mitad de cualquier ángulo es agudo y puede pertenecer a un triángulo rectángulo, y que si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\theta > (1/2)\phi$ entonces $2n\theta > \phi$ o $2n\theta$ está indefinido. Así que, de ahora en adelante, ϕ es agudo.

Sea $\triangle ABC$ recto en A y tal que $\angle B \equiv \phi$. Defininiendo $A_0 := A$ y A_1 como un punto en $\overrightarrow{A_0B}$ tal que $\theta \equiv \angle A_0BA_1$, repitiendo el proceso recursivamente de manera que $\theta \equiv \angle A_iBA_{i+1}$ probaremos que $(\overline{A_0A_1}, \overline{A_1A_2}, \dots)$ es una sucesión creciente de segmentos de forma que la negación de la propiedad arquimediana de ángulos implique la negación para segmentos lo que es falso. Para esto utilizaremos múltiples veces el argumento de que un ángulo externo es mayor que los dos internos en un triángulo.

Sea $i \in \mathbb{N}$, llamaremos $\delta := \angle A_iA_{i+1}B$ y η su externo, como $\triangle A_0A_{i+1}B$ es recto en A_0, se da que δ es agudo, η obtuso, luego $\eta > \delta$ (ver fig. 2.1). Por ello, existe $D' \in BC$ tal que $\delta \equiv \angle BA_{i+1}D'$ y luego definimos D como la intersección entre $A_{i+1}D'$ y CA_{i+2} que de hecho cae en el segmento (¿por qué?). Por criterio LAL, se cumple que $\triangle A_iA_{i+1}B \equiv \triangle DA_{i+1}B$, por lo cual, $\gamma := \angle A_{i+2}DA_{i+1} > \delta$ (externo a $\triangle CA_{i+1}D$), mientras que $\delta > \epsilon := \angle A_{i+1}A_{i+2}B$ (externo a $\triangle CA_{i+1}A_{i+2}$), por lo que $\epsilon < \gamma$.

$\overline{A_{i+1}D} \equiv \overline{A_iA_{i+1}}$ es opuesto a ϵ y $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ es opuesto a γ en $\triangle A_{i+1}DA_{i+2}$, ergo, $\overline{A_iA_{i+1}} < \overline{A_{i+1}A_{i+2}}$. Por ende, si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumpliera que $n\theta < \phi$ entonces $n\overline{A_0A_1} < \overline{A_0A_n} < \overline{AB}$ contradiciendo AR. □

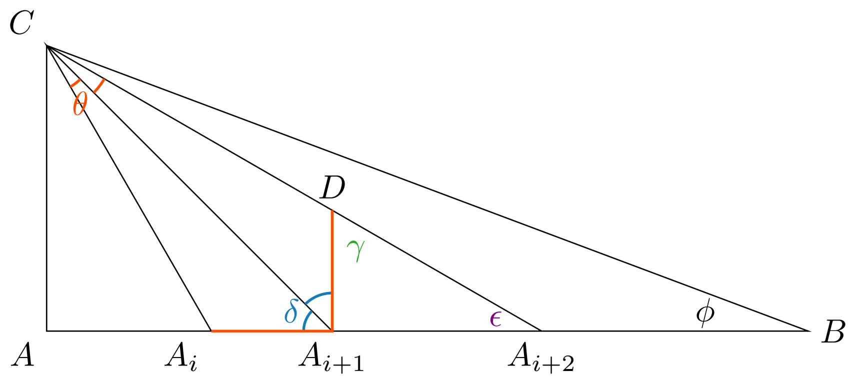


Figura 2.1. Construcción del teorema 2.12.

Teorema (AR) 2.13: Dados α, β, γ ángulos con $\alpha < \gamma$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}_2$ tal que $\alpha < r\beta < \gamma$.

Hint: Es análogo a la demostración para segmentos. □

Definición 2.14: Dados dos ángulos θ, ϕ se define:

$$\frac{\theta}{\phi} := \sup\{r \in \mathbb{Q}_2 : r > 0 \land r\phi < \theta\}$$

Teorema 2.15: Sea μ una aplicación que a cada ángulo le asigna un número real positivo tal que para todo θ, ϕ ángulos se cumpla que:

1. $\mu(\theta) = \mu(\phi)$ syss $\theta \equiv \phi$.
2. Si $\theta + \phi$ está definido, entonces $\mu(\theta + \phi) = \mu(\theta) + \mu(\phi)$.

entonces

$$\frac{\mu(\theta)}{\mu(\phi)} = \frac{\theta}{\phi}.$$

Definición 2.16: Una aplicación que satisface las condiciones anteriores, se dice una *medida de ángulos*. En particular, considerando π como un número real, entonces llamamos *medida en radianes* a aquella medida que al ángulo recto asigna el número $\pi/2$ y llamamos *medida en grados* a aquella que al ángulo recto asigna el número 90.

En general dado el ángulo $\angle ABC$ denotamos $\measuredangle ABC$ a su medida en radianes y las operaciones aritméticas que hagamos de aquí en adelante, entre ángulos será en radianes.

Nota. En ésta definición aún no hemos dicho nada de π como número, el lector puede estar familiarizado con él, pero de momento no es más que un símbolo.

Teorema 2.17: En un triángulo la suma de dos ángulos es siempre menor a π.

DEMOSTRACIÓN: Sean α, β ángulos internos de un triángulo, luego hemos visto que el suplementario de α es mayor que β de modo que $\alpha + \beta$ está definido, mientras que sabemos que no existe ángulo de medida mayor que π, por ende $\alpha + \beta < \pi$. □

Teorema (AR) 2.18 – *Teorema de Saccheri-Legendre*: La suma interna de ángulos en un triángulos es a lo más π.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que existe $\triangle ABC$ cuya suma interna de ángulos es $\pi + \epsilon$ donde $\epsilon > 0$. Sea D el punto medio de $\overline{BC}$, luego elijamos E tal que $A - D - E$ y $\overline{AD} \equiv \overline{DE}$, de modo que, por LAL, se cumple $\triangle ADC \equiv \triangle EDB$. Llamemos $\alpha := \measuredangle BAD$, $\beta := \measuredangle DAC$, $\gamma := \measuredangle ACB$ y $\delta := \measuredangle CBA$, donde notemos que $\measuredangle BAC = \alpha + \beta$ y por ende $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi + \epsilon$.

Nótese que el triángulo $\triangle ABE$ conserva la suma de ángulos internos pero ha de cumplirse que o $\alpha \leq (1/2)\measuredangle BAC$ o $\beta \leq (1/2)\measuredangle BAC$. Es decir, la creación de éste punto crea un ángulo interno menor a la mitad de otro eligido, de modo que podemos repetir el proceso para construir triángulos con la misma suma de ángulos y que poseen un ángulo de $(1/2^n)(\alpha + \beta)$, de modo que eventualmente, se obtiene un triángulo con un ángulo menor a ϵ cuyo suplemento es, por definición, menor a π pero donde la suma de los restantes debe ser mayor a π, lo que es una contradicción. □

Definición 2.19: Se dice que un geometría métrica que satisface AR es una geometría neutra.

Con ésto hemos establecido un gran número de propiedades de una geometría neutra.

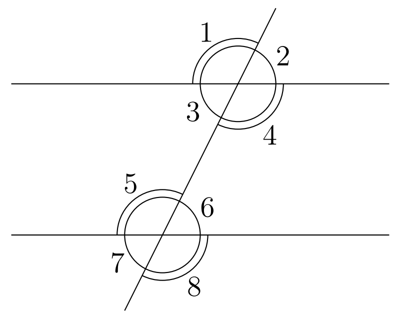


Figura 2.2

2.2. Equivalencias al axioma de las paralelas

Definición 2.20: Dadas dos rectas r_1, r_2 coplanares y otra s secante a ambas por A, B distintos, decimos que satisfacen la *condición de ángulos alternos* si considerando C, D en r_1, r_2 resp. en el mismo semiplano de frontera s se cumple que $\angle CAB$ y $\angle ABD$ son suplementarios (ver fig. 2.2). En cuyo caso se dice que los pares de ángulos $3/6$ y $4/5$ son *alternos internos*, los pares $1/8$ y $2/7$ son *alternos externos* y los pares $1/5$, $2/6$, $3/7$, $4/8$ son *alternos* (a secas). Si se da la condición de los ángulos alternos, todos esos pares son congruencias de ángulos.

Teorema 2.21: Si dos rectas r_1, r_2 coplanares cortadas por s satisfacen la condición de los ángulos alternos, entonces r_1 y r_2 son paralelas.

Demostración: Supongamos que r_1 y r_2 se cortan por s en A, B resp. Si, por contradicción, r_1 y r_2 fueran secantes y se cortasen en C, entonces se formaría el triángulo $\triangle ABC$ que cumple que el ángulo externo en A es congruente al ángulo interno en B lo que es absurdo. $\square$

Corolario 2.22: Dada una recta r_1 secante a otra s que pasa por $P \notin r_1$ existe una única recta r_2 que pasa por P tal que r_1, r_2 y s satisfacen la condición de los ángulos alternos.

Corolario 2.23: Dada una recta r y un punto P externo a ella, siempre existe una paralela s a r que pasa por P.

Notemos que por ende podría pasar más de una paralela a una recta por un mismo punto. En consecuencia, la condición de satisfacer la condición de los ángulos alternos es más fuerte que solo ser paralela.

Corolario 2.24: Dado un plano, por un punto siempre pasa un único plano paralelo a este.

Demostración: Sea α el plano original y P el punto elegido. Supongamos que β_1 y β_2 son paralelos a α por P, entonces β_1 y β_2 se intersectan en una recta r □

Teorema 2.25: Son equivalentes:

1. **El axioma de las paralelas**.
2. Dos rectas paralelas distintas cortadas por una tercera siempre satisfacen la condición de los ángulos alternos.

Definición 2.26 – *Polígono*: Se dice que una tupla ordenada de segmentos no triviales $(s_1, \dots, s_n)$ forman una *curva poligonal* si cumple que:

1. s_i comparte un solo punto con s_{i+1} que es un extremo de ambos denotado por P_i, donde P_0 es el extremo de s_1 que no comparte con s_2 y P_n el extremo de s_n que no comparte con s_{n-1}.
2. Si $P_0 = P_n$, en cuyo caso decimos que la curva es *cerrada*, o s_1 y s_n no se intersecan, en cuyo caso decimos que la curva es abierta.
3. Y si $s_i \cap s_j$ es vacío en otro caso.

A los puntos P_i les decimos los *vértices* y a los segmentos les decimos los *lados* de la curva. Llamamos *ángulos* de una curva poligonal a los ángulos $\angle P_{i-1}P_iP_{i+1}$ (o $\angle P_i$ para acortar) y si la curva es cerrada admitimos también a $\angle P_{n-1}P_nP_1$ como un ángulo de la curva. Naturalmente, a los pares de puntos P_i, P_{i+1}, a los pares de segmentos s_i, s_{i+1} y a los pares de ángulos $\angle P_i, \angle P_{i+1}$ les decimos *contiguos*.

Un n-gono es una curva poligonal cerrada de n lados contenida en un solo plano. En particular, para $n = 4$ la figura se llama *cuadrilátero*.

Ojo: ésta definición sólo nos da el *contorno* de un n-gono, por ejemplo, nuestra definición de triángulo nos otorgaba los puntos *interiores* del mismo, mientras que un triángulo en ésta definición no es más que la frontera.

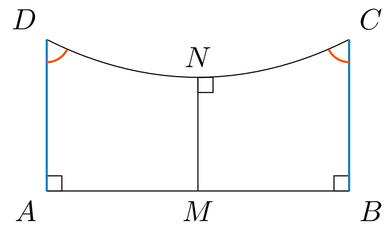


Figura 2.3. Un KS-cuadrilátero.

Definición 2.27: Un cuadrilátero es *birrecto* si posee dos ángulos rectos contiguos. El lado que comparten aquellos ángulos se llama *base*, el lado opuesto a éste se llama *cumbre*. Siempre que digamos "$ABCD$ es birrecto" se asume que AB es la base. Se le llama media-linea $\overline{MN}$ de un cuadrilátero birrecto al segmento de extremos M el punto medio de la base y N el punto medio de la cumbre.

Un cuadrilátero birrecto cuyos lados adyacentes a la base son congruentes se dice un *cuadrilátero de Khayyam-Saccheri* (o *KS-cuadrilátero*).

Lema 2.28: En un KS-cuadrilátero siempre se cumple que:

1. La media-línea es perpendicular a la base y a la cumbre.
2. La base y la cumbre siempre son parelalas.
3. Los ángulos de la cumbre son congruentes.

Demostración: Sea $ABCD$ un KS-cuadrilátero de media-línea $\overline{MN}$. Por criterio LAL $\triangle CAM \equiv \triangle DBM$ con lo que $\overline{CM} \equiv \overline{DM}$ y de manera similar se concluye que $\overline{AN} \equiv \overline{BN}$. Por criterio LLL se cumple que $\triangle CNM \equiv \triangle DNM$ con lo que $\angle CNM \equiv \angle DNM$ y se tiene que ambos han de ser rectos por lo que $MN \perp CD$. Análogamente se concluye que $MN \perp AB$. □

Definición 2.29: Un KS-cuadrilátero es de uno solo de los siguientes tipos:

Ágüdo Si los ángulos de la cumbre son ágüdos.

Recto Si los ángulos de la cumbre son rectos.

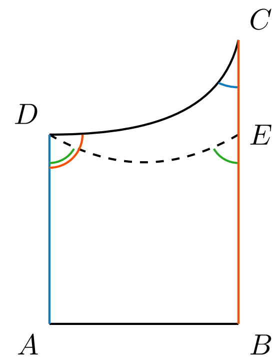


Figura 2.4. Cuadrilátero birrecto (teorema 2.31)

Obtuso Si los ángulos de la cumbre son obtusos.

Lema 2.30: Dos KS-cuadriláteros con bases y media-líneas congruentes son congruentes.

Demostración: Sean $ABCD$ y $A'B'C'D'$ dos KS-cuadriláteros de media-líneas $\overline{MN}$ y análogo para $\overline{M'N'}$. Por LAL vemos que $\triangle AMN \equiv A'M'N'$ de modo que por ejemplo sabemos que $\angle NAM \equiv \angle N'A'M'$ y $\angle MNA \equiv \angle M'N'A'$, y como $\angle DAN$ y $\angle DNA$ son complementarios a los ya comparados, entonces se cumple que son correspondientemente congruentes, luego $\triangle AND \equiv \triangle A'N'D'$ por ALA de lo que se concluye que $\angle ADN \equiv A'D'N'$, $\overline{AD} \equiv \overline{A'D'}$ y $\overline{DN} \equiv \overline{D'N'}$ que completa todas las congruencias restantes en un KS-cuadrilátero. □

Teorema 2.31: En un cuadrilátero birrecto, al ángulo de la cumbre más grande se le opone el mayor lado adyacente a la base.

Demostración: Sea $ABCD$ birrecto tal que $\overline{AD} < \overline{BC}$, entonces sea E tal que $ABED$ es un KS-cuadrilátero (ver fig. 2.4). Notemos que $\angle BED$ es opuesto en el vértice E del triángulo $\triangle DCE$, luego $\angle BED > \angle DCE$. Como $ABED$ es KS-cuadrilátero se cumple que $\angle ADE \equiv \angle BED$. Pero $\angle ADC \equiv \angle ADE + \angle EDC > \angle DCE = \angle DCB$, como se quería probar. □

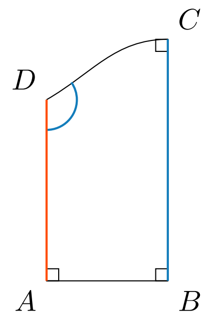


Figura 2.5. Un HL-cuadrilátero obtuso.

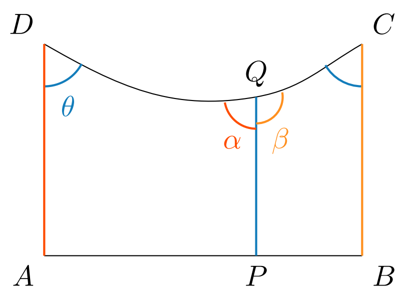


Figura 2.6

Definición 2.32: Se dice que un cuadrilátero es de *Haytham-Lambert* (o *HL-cuadrilátero*) si posee tres ángulos rectos. Si decimos $ABCD$ es un HL-cuadrilátero se asume que A, B, C son los ángulos internos rectos.

Corolario 2.33: Sea $ABCD$ un HL-cuadrilátero, entonces $\overline{AD} > \overline{BC}$ (resp. $\equiv$, $<$) syss $\angle D$ es agudo (resp. recto, obtuso).

Lema 2.34: Sea $ABCD$ un KS-cuadrilátero, con P un punto de la base (que no sea un extremo), Q un punto de la cumbre tales que $PQ \perp AB$. Entonces $\overline{PQ} < \overline{BC}$ (resp. $\equiv$, $>$) syss $ABCD$ es agudo (resp. recto, obtuso).

Demostración: Sea $\alpha := \measuredangle PQD$ y $\beta := \measuredangle PQC$ que son adyacentes, ergo, $\alpha + \beta = \pi$; y $\theta := \measuredangle ADC$. Luego $AQPD$ y $BQPC$ son birrectos, de modo que si $\overline{PQ} < \overline{BC} \equiv \overline{AD}$ entonces $\alpha > \theta$ y $\beta > \theta$, ergo, $\pi > 2\theta$, es decir, θ es agudo. $\square$

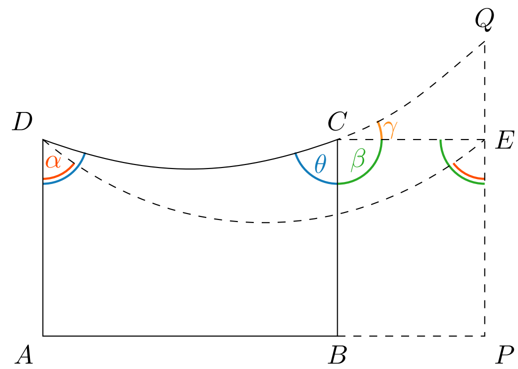


Figura 2.7. Demostración del lema 2.35 (caso agudo).

Lema 2.35: Sea $ABCD$ un KS-cuadrilátero, con $P \in AB \setminus \overline{AB}$ y $Q \in CD$ tales que $PQ \perp AB$. Entonces $\overline{PQ} > \overline{BC}$ (resp. $\equiv$, $<$) syss $ABCD$ es agudo (resp. recto, obtuso).

Demostración: Llamemos θ a los ángulos de la cumbre de $ABCD$. Supongamos, sin perdida de generalidad, que $A-B-P$ y construyamos $E \in \overrightarrow{PQ}$ de modo que $\overline{AD} \equiv \overline{PE}$. Así vemos que $ABED$ y $BPEC$ son KS-cuadriláteros; sean α y β los ángulos de sus cumbres resp. Si $E \neq Q$, entonces C, D, E no son colineales y $\gamma := \angle ECQ$.

Supongamos que $\overline{PQ} > \overline{BC}$ (ver fig. 2.7), entonces $P - E - Q$ y vemos que $\theta + \beta + \gamma = \pi$. Más aún, notemos que γ es externo a $\triangle CDE$, de modo que es mayor que el ángulo en C: $\theta - \alpha$. Además $\alpha < \beta$ pues $\beta = \measuredangle PEC$ y $\alpha = \measuredangle PED$. De modo que

$$\pi = \theta + \beta + \gamma > \theta + \alpha + (\theta - \alpha) = 2\theta.$$

Si $\overline{PQ} < \overline{BC}$, entonces $P - Q - E$ y vemos que $\theta + (\beta - \gamma) = \pi$, también vemos que $\alpha > \beta$ y $\gamma > \alpha - \theta$ por ser externo a $\triangle CDE$, de modo que

$$\pi = \theta + \beta - \gamma < \theta + \alpha - (\alpha - \theta) <= 2\theta.$$

El caso $\overline{PQ} \equiv \overline{BC}$ queda al lector. □

Corolario 2.36: Dos KS-cuadriláteros coplanares con misma media-línea son del mismo tipo.

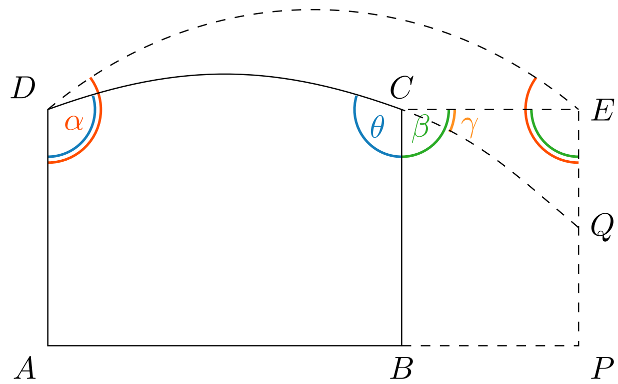


Figura 2.8. Demostración del lema 2.35 (caso obtuso).

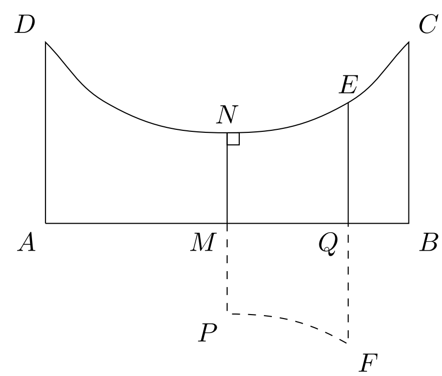


Figura 2.9. Demostración del teorema de los tres mosqueteros.

Teorema 2.37 – *Teorema de los tres mosqueteros*: Todos los KS-cuadriláteros de un mismo plano de son del mismo tipo.

Demostración: Sea $ABCD$ un KS-cuadrilátero de media-línea MN. Sea $A'B'C'D'$ otro KS-cuadrilátero en el mismo plano y de media-línea ℓ. Sea Q el punto en $\overrightarrow{MB}$ tal que $\overline{MQ} \equiv \ell$. P se define como el punto en la semirrecta complementaria a $\overrightarrow{MN}$ tal que $\overline{MN} \equiv \overline{MP}$. E es el punto de CD tal que $QE \perp AB$, y se define F como el punto en la semirrecta complementaria a $\overrightarrow{QE}$, tal que $\overline{QE} \equiv \overline{QF}$. Notemos que $QMNE$ es un HL-cuadrilátero del mismo tipo que $ABCD$, y por ende, $PNEF$ es un KS-cuadrilátero del mismo tipo a $ABCD$ y con la misma media-línea de $A'B'C'D'$. □

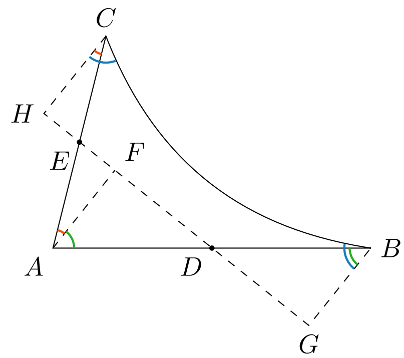


Figura 2.10. Construcción del lema 2.39.

Definición 2.38: Un triángulo $\triangle ABC$ cuya suma de ángulos internos es σ, se dice:

Hiperbólico Si $\sigma < \pi$.

Euclídeo Si $\sigma = \pi$.

Elíptico Si $\sigma > \pi$.

Lema 2.39: Para todo triángulo existe un KS-cuadrilátero tal que los ángulos de su cumbre sumen lo que los ángulos internos del triángulo.

Demostración: Sea $\triangle ABC$ y definamos D y E como los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ resp. Sean F, G, H los pies de las perpendiculares a DE por A, B y C resp. Con esto se forma el KS-cuadrilátero $GHCB$ cuyos ángulos en la cumbre medirán θ. Luego por AAL se tiene que $\triangle FEA \equiv \triangle HEC$ y $\triangle FDA \equiv GDB$. Con lo que $\angle EAF \equiv \angle ECH$ y $\angle DAF \equiv \angle DBG$ y se concluye que

$$\begin{aligned} \measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C &= \measuredangle EAF + \measuredangle FAD + \measuredangle B + \measuredangle C \\ &= \measuredangle ECH + \measuredangle GBD + (\theta - \measuredangle GBD) + (\theta - \measuredangle ECH) = 2\theta. \end{aligned}$$

□

Corolario 2.40: En un mismo plano, todos los triángulos son del mismo tipo. Por ello se dice de un plano que es hiperbólico (resp. euclídeo, elíptico) syss sus triángulos lo son.

Corolario 2.41: Un plano elíptico no es neutro, es decir, no satisface AR.

Teorema 2.42: Son equivalentes:

1. **El axioma de las paralelas**.
2. La existencia de un triángulo euclídeo.
3. Todos los triángulos son euclídeos.
4. La existencia de un rectángulo.
5. Todos los KS-cuadriláteros son rectángulos.
6. Existe un cuadrilátero convexo cuya suma interna de ángulos es 2π.

Demostración: Es claro que (2) $\iff$ (3) $\iff$ (4) $\iff$ (5) y como todos los triángulos en un plano son del mismo tipo, entonces (2) $\iff$ (6).

(1) $\implies$ (3). Sea $\triangle ABC$ cualquiera entonces construimos la paralela s a AB por C, luego como satisface la condición de los ángulos alternos podemos ver que la suma de ángulos internos mide π. $\square$

Proposición 2.43: En un plano hiperbólico, dada una recta r y un punto $P \notin r$ se cumple que existen infinitas paralelas a r por P.

Hint: Nótese que hay dos posibles demostraciones: una es usando los ángulos intermedios con la propiedad arquimediana, y hay otra que prescinde de ella. Realice ambas demostraciones. $\square$

Teorema 2.44 – *Criterio AAA*: En un plano no-euclídeo, dos triángulos que comparten respectivamente sus ángulos son congruentes.

Demostración: Sean $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ tales que sus ángulos correspondientes son congruentes ($\measuredangle A = \measuredangle A'$, y así). Supongamos que no son congruentes como triángulos, entonces todos sus pares de lados correspondientes son distintos (de lo contrario serían congruentes por el criterio LAL). Nótese que como hay tres pares de lados distintos, uno de los triángulos posee el lado mayor en al menos dos casos, sin perdida de generalidad, asumamos que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$ y $\overline{AC} > \overline{A'C'}$. Luego, existen $B'' \in \overrightarrow{AB}$ y $C'' \in \overrightarrow{AC}$ tales que $\overline{AB''} \equiv \overline{A'B'}$ y $\overline{AC''} \equiv \overline{A'C'}$, y por LAL, $\triangle B''AC'' \equiv \triangle B'A'C'$ de modo que los ángulos correspondientes también son congruentes. Por criterio de los ángulos alternos se tiene que $BC \parallel B''C''$, por ende $B''C''CB$ es un cuadrilatero convexo cuya suma interna de ángulos es 2π lo cual sería una contradicción, pues todos los cuadrilateros convexos son hiperbólicos y no euclídeos. □

2.3. Triángulos y proporciones

En esta sección veremos los principios básicos de la geometría euclídea, comenzando por el teorema de Tales. Toda esta sección asume que la geometría es euclídea, es decir, asume axioma de las paralelas y propiedad arquimediana.

Definición 2.45 – *Paralelogramo*: Sean A, B, C, D puntos coplanares no colineales tales que $AB \parallel CD$ y $AD \parallel BC$, entonces llamamos paralelogramo $ABCD$ cuyos vértices, lados y ángulos internos son los mismos que los suyos como polígono, y que en forma de conjunto corresponde a la intersección de los semiplanos de frontera las prolongaciones de los lados que contengan a los puntos restantes (e.g., el semiplano de frontera AB que contenga a C y D, y así sucesivamente).

Teorema 2.46: En un paralelogramo se cumple que:

1. Los pares de lados y ángulos opuestos son congruentes.
2. Los ángulos contiguos son suplementarios.
3. Las diagonales se cortan en su punto medio.

Demostración: Sea $ABCD$ un paralelogramo. Tracemos la diagonal $\overline{BD}$, notemos que $\triangle BDA \equiv \triangle DBC$ por ALA, donde un lado es común y los ángulos correspondientes son congruentes pues las paralelas satisfacen la condición de ángulos alternos. De ésto también se concluye la propiedad 2.
La tercera propiedad sale de una congruencia de triángulos que se deja al lector, recuerde probar primero que las diagonales (como segmentos) se cortan. □

Proposición 2.47: Si $ABCD$ es un cuadrilátero tal que $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $AB \parallel CD$, entonces es un paralelogramo.

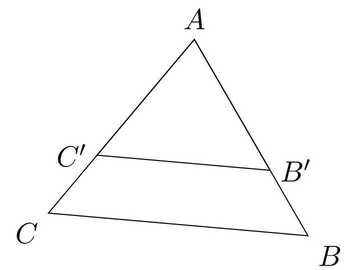


Figura 2.11. Triángulos en posición de Tales.

Definición 2.48: Un paralelogramo se dice un:

Rombo Si sus cuatro lados son congruentes.

Rectángulo Si sus cuatro ángulos son congruentes.

Cuadrado Si es un rombo y un rectángulo.

Corolario 2.49: En un rectángulo todos sus ángulos son rectos, por consecuente, también lo son en un cuadrado.

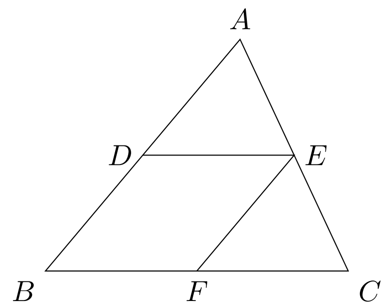
Definición 2.50: Se dice que dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son *semejantes*, denotado $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, si sus lados son correspondientemente proporcionales, i.e.,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

Se dice que $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ están en *posición de Tales* si se cumple que $A = A'$, $B' \in \overline{AB}$ y que $BC \parallel B'C'$ (ver fig. 2.11).

Proposición 2.51: La semejanza de triángulos es una relación de equivalencia.

Teorema 2.52: Si $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ están en posición de Tales, entonces $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ y $\angle C = \angle C'$. Si $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ satisfacen la condición anterior, entonces existe $\triangle A''B''C'' \sim \triangle A'B'C'$ tal que $\triangle ABC$ y $\triangle A''B''C''$ están en posición de Tales.



Demostración: La primera es trivial. Para la segunda comenzamos por ver si

$$r := \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

resulta menor o igual a 1, en cuyo caso podemos construir manualmente un triángulo congruente a él en posición de Tales. En caso contrario encontramos n tal que $r/2^n < 1$ y en base a esa proporción construimos el triángulo, que se puede por bisección de lados.

Para ver que aquí se conserva la proporción, veremos qué sucede al bisectar un triángulo: Dado $\triangle ABC$ construyamos D punto medio de $\overline{AB}$ y E la intersección entre la paralela a BC por D y AC. Luego si construimos F como la intersección entre la paralela a AB por E y BC, vemos que $DEFB$ es paralelogramo por construcción, por ende, $\triangle ADE \equiv \triangle EFC$ por ALA, probando así que $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. □

Lema 2.53: Sean $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ semirrectas. Dados $O - A - B$ sobre OP, construyamos A' (resp. B') como la intersección entre OQ y la paralela a PQ por A (resp. por B) Luego, la longitud $\mu(\overline{A'B'})$ depende solo de la longitud de $\mu(\overline{AB})$, no de las posiciones de A ni de B.

Demostración: Sea X la intersección entre $\overline{BB'}$ y la paralela a OQ por A (por Pasch). Luego $AXB'A'$ es paralelogramo, de modo que $\overline{A'B'} \equiv \overline{AX}$. Supongamos que C, D, C', D' están también construidos de manera análoga a A, B, A', B' y trazamos Y también. Basta probar que $\overline{CY} \equiv \overline{AX}$, pero ésto deriva de que $\triangle ABX \equiv \triangle CDY$ por ALA. □

Teorema 2.54 (División de segmentos): Dado $\overline{AB}$ no trivial y $n \in \mathbb{N}_{\neq 0}$, existe un segmento de medida $(1/n)\overline{AB}$. En consecuencia, $\mathbb{Q} \subseteq \mathscr{C}_u$.

Demostración: Sea C un punto cualquiera no colineal a A, B. Construyamos la sucesión $C_0 := A$, $C_1 := C$ y $C_{i+1} - C_i - A$ tal que $\overline{C_iC_{i+1}} \equiv \overline{AB}$. Construyamos C_nB, luego por Pasch, se construye la sucesión de puntos A_i definidos por la intersección entre $\overline{AB}$ y la paralela a BC_n por C_i, con $A_0 := A$ y $A_n := B$. Por el lema anterior, $\overline{A_iA_{i+1}} \equiv \overline{A_0A_1}$, y además, es claro que

$$\overline{AB} \equiv \overline{A_0A_1} + \overline{A_1A_2} + \cdots + \overline{A_{n-1}A_n} \equiv n\overline{A_0A_1}.$$

Que es lo que se quería probar. □

Teorema 2.55 – *Teorema de Tales*: Dos triángulos en posición de Tales son similares.

Demostración: Sean $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ en posición de Tales. Sean $A - P - Q$ sobre $\overrightarrow{AB}$ tales que $\overline{PQ} \equiv s$, luego llamemos $\nu(\overline{PQ})$ a la longitud bajo la medida μ del segmento trasladado por paralelas de P, Q sobre $\overrightarrow{AC}$. En particular, podemos ver que ν es una medida de segmentos (respeta la suma de segmentos y es invariante bajo congruencias). Y sabemos que $\nu(\overline{AB}) = \mu(\overline{AC})$ y $\nu(\overline{AB'}) = \mu(\overline{AC'})$, de modo que se cumple:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\nu(\overline{AB})}{\nu(\overline{AB'})} = \frac{\mu(\overline{AC})}{\mu(\overline{AC'})} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}.$$

Realizando el mismo procedimiento pero usando posición de Tales desde el vértice B, se llega a la otra igualdad. □

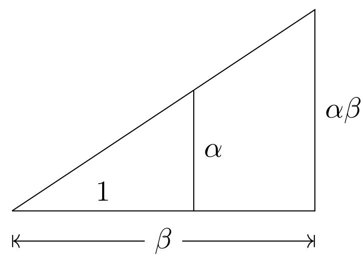
Corolario 2.56: Dos triángulos que comparten dos ángulos, comparten tres y por ende son similares.

Corolario 2.57: El conjunto de números constructibles es independiente de la unidad escogida.

Teorema 2.58 – *Teorema de Pitágoras*: En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es el cuadrado de la hipotenusa.

Demostración: Sea $\triangle ABC$ rectángulo en C. Llamemos D al pie de la perpendicular a AB por C, entonces podemos ver que $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ pues comparten dos ángulos (el recto y el ángulo en A), de modo que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \iff \overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AD}.$$



Así mismo, vemos que $\triangle BAC \sim \triangle BCD$ pues comparten dos ángulos, de modo que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \iff \overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BD}.$$

Finalmente vemos que

$$a^2 + b^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}\,(\overline{BD} + \overline{AD}) = \overline{AB}^2 = c^2. \qquad \square$$

Definición 2.59 – *Cuerpo pitagórico*: Un cuerpo $(K, +, \cdot)$ se dice *pitagórico* si para todo $a, b \in K$ existe $c \in K$ tal que $a^2 + b^2 = c^2$.

Proposición 2.60: El conjunto de números constructibles es un cuerpo pitagórico.

Demostración: Para ello queremos ver primero que es un cuerpo y luego que es pitagórico. Que los constructibles sean cerrados por suma es trivial, que lo sean por producto y divisiones. Consideremos una recta graduada cualquiera y sean $\alpha, \beta \in \mathscr{C}$, luego el siguiente diagrama por Tales comprueba lo exigido.

Para ver divisiones puede hacerse algo similar. Y lo de pitagórico es trivial con construir un triángulo rectángulo con los catetos eligidos. $\square$

Los reales son un ejemplo de cuerpo pitagórico, mientras que $\mathbb{Q}$ no pues $2 = 1^2 + 1^2$ no posee raíz racional. Como consecuencia podemos ver que todos los racionales son constructibles, pero no al revés.

Como extra incluímos la demostración del siguiente teorema contenida en [9]:

Teorema 2.61: Son equivalentes:

1. **El axioma de las paralelas**.

2. **El teorema de Pitágoras**.

Demostración: Ya hemos probado que 1 $\implies$ 2.

2 $\implies$ 1. Sea $\triangle ABC$ isóceles de base c y rectángulo en C. Construyamos D como el pie de la perpendicular a AB por C, de modo que $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$ son rectángulos en D. Como $\triangle ABC$ es isóceles se cumple que $a = b$ (en medida) de modo que por Pitágoras $c^2 = 2a^2$. Llamemos $h := \overline{CD}, x := \overline{AD}$ e $y := \overline{DB}$, de modo que por Pitágoras:

$$x^2 + h^2 = y^2 + h^2 = a^2$$

de modo que $x = y = c/2$. Haciendo el reemplazo $c = 2x$ se obtiene que $4x^2 = 2a^2$, esto es, $x^2 = a^2/2$ y por la ecuación anterior se tiene que $h^2 = a^2/2 = x^2$, de modo que $x = h$. Luego $\triangle ADC \equiv \triangle BDC$ por LAL y ambos son isóceles de bases $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ resp, de modo que

$$\measuredangle DAC = \measuredangle ACD = \measuredangle BCD = \measuredangle DBC.$$

Pero $\measuredangle ACD + \measuredangle BCD = \pi/2$ (por ser ángulo recto), de modo que $\measuredangle ACD = \pi/4$ y todos los triángulos involucrados son triángulos euclídeos, y vimos que si al menos un triángulo euclídeo existe entonces el plano satisface el axioma de las paralelas. $\square$

2.4. Circunferencias y arcos

Definición 2.62: Se dice que un ángulo está inscrito en una circunferencia ω de centro O si su vértice está sobre la circunferencia y sus lados cortan a la circunferencia. La intersección entre un ángulo inscrito y la circunferencia sin el vértice se dice un *arco*, éste si los puntos de los lados que delimitan el arco son A, B, entonces el arco se denota $\widehat{AB}$. Se dice que el arco es una *semicircunferencia* si $A - O - B$, el arco es *mayor* si contiene estrictamente a una semicircunferencia o menor de lo contrario. La *amplitud* de $\widehat{AB}$, denotado $|\widehat{AB}|$, se define como la medida $\measuredangle AOB$ si el arco es menor, π si $A - O - B$ o $2\pi - \measuredangle AOB$ si el arco es mayor.

Teorema 2.63: Dado un ángulo inscrito en una circunferencia, su medida es la mitad de su arco abarcado.

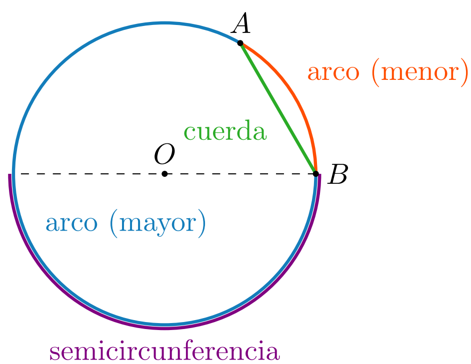


Figura 2.12. Diferencia entre cuerda y arco.

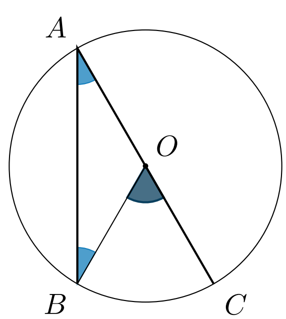


Figura 2.13. Teorema del ángulo inscrito (caso 1).

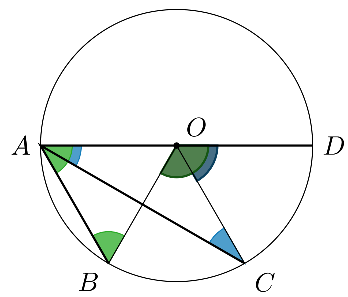


Figura 2.14. Teorema del ángulo inscrito (caso 3).

Demostración: Sea $\angle BAC$ el ángulo inscrito, de modo que $A, B, C \in \omega$ de centro O. Haremos el teorema por casos:

1. <u>O está en alguno de los lados:</u> Sin perdida de generalidad asumamos que $O \in AB$. Luego notemos que por definición de circunferencia $\triangle AOC$ es isóceles de base $\overline{AC}$, de modo que $\measuredangle CAO = \measuredangle ACO$ (ver fig. 2.13) y como la suma interna es π se tiene que

$$\measuredangle BOC = \pi - \measuredangle AOC = 2\measuredangle BAC.$$

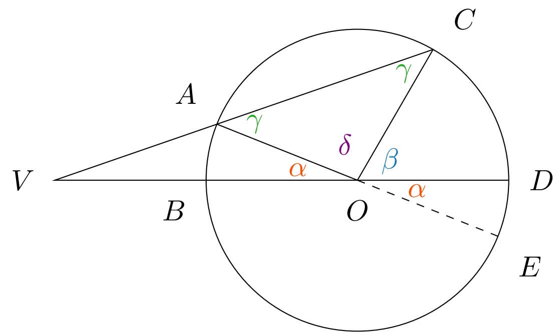
2. <u>O está dentro del ángulo:</u> Basta considerar $D \in \omega$ tal que $A - O - D$, luego vemos que las condiciones del caso 1 aplican para los ángulos $\angle BAD$ y $\angle DAC$, para concluir nuestro teorema.

3. <u>O está fuera:</u> Nuevamente consideramos $D \in \omega$ tal que $A - O - D$, luego vemos que $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{CD}$. Y tanto $\overset{\frown}{BD}$ como $\overset{\frown}{CD}$ satisfacen la condición 1, de modo que se comprueba el teorema para ellos y sumando todo se comprueba el caso 3. □

Corolario 2.64: Todos los ángulos inscritos en una circunferencia que comparten arco son congruentes.

Teorema 2.65: Dado un ángulo cuyos lados son secantes a una circunferencia, se cumple que la medida del ángulo es la semidiferencia de los arcos que abarca.

Demostración: Basta probar el caso cuando uno de sus lados pasa por el centro O de la circunferencia. Sean $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$ los arcos que abarca el ángulo tales que $B - O - D$. Llamemos $\alpha := \overset{\frown}{AB}$, $\beta := \overset{\frown}{CD}$ y $\gamma := \measuredangle ACO$. Notemos



que si $\overline{AE}$ es diámetro, entonces $\measuredangle DOE = \alpha$ por opuestos por el vértice, y por el teorema anterior se cumple que

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

El triángulo $\triangle AOC$ es isóceles de base $\overline{AC}$ de modo que si llamamos $\delta := \measuredangle AOC$ se cumple que

$$\delta + 2\gamma = \pi$$

Así mismo, el triángulo $\triangle VOC$ (donde V es el vértice del ángulo principal) cumple que

$$\measuredangle CVO + (\alpha + \delta) + \gamma = \pi$$

De modo que

$$\measuredangle CVO + \alpha = \gamma \iff \measuredangle CVO = \gamma - \alpha = \frac{\beta - \alpha}{2}. \qquad \square$$

Teorema 2.66: Dado un par de rectas que se intersecten dentro de un círculo, el ángulo que comprenden es la semisuma de los arcos que abarcan.

DEMOSTRACIÓN: Sea V la intersección de las dos rectas, y sean A, B, C, D las intersecciones de las rectas con la circunferencia de modo que $A - V - C$ y $\widehat{AB}$ sea un arco menor, luego llamemos $\gamma := \measuredangle AVB$ y queremos ver que

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

donde $\alpha := |\widehat{AB}|$ y $\beta := |\widehat{CD}|$, para ello basta ver la figura. $\square$

Teorema 2.67: Dado una circunferencia ω de centro O, dos puntos distintos $A, B \in \omega$ y $A - C - B$. Se cumple que

$$\overline{AC} \cdot \overline{CB} + \overline{OC}^2 = \overline{OB}^2.$$

Demostración: La demostración es algebraica, llamemos M al punto medio de $\overline{AB}$ de modo que en medida definimos:

$$u := \overline{AM}, \ d := \overline{MC}, \ h := \overline{OM}, \ r := \overline{OB}, \ x := \overline{OC}.$$

Por Pitágoras se cumple que

$$d^2 + h^2 = x^2, \quad u^2 + h^2 = r^2.$$

Supongamos que $A - M - C$, entonces $\overline{AC} = u + d$ y $\overline{CB} = u - d$, de modo que

$$\begin{aligned}
\overline{AC} \cdot \overline{CB} + \overline{OC}^2 &= (u+d)(u-d) + x^2 \\
&= u^2 - d^2 + x^2 \\
&= u^2 - d^2 + (d^2 + h^2) = u^2 + h^2 = r^2.
\end{aligned}$$

Que es lo que se quería probar. □

Corolario 2.68: Dada una circunferencia y dos cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que se corten en P, entonces se cumple

$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}.$$

2.5. Trigonometría

Definición 2.69: Dado $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo en C y sea $\theta := \measuredangle BAC$ (que no es recto), entonces definimos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
\sin\theta &:= \frac{a}{c}, & \cos\theta &:= \frac{b}{c}, & \tan\theta &:= \frac{a}{b}, \\
\csc\theta &:= \frac{c}{a}, & \sec\theta &:= \frac{c}{b}, & \cot\theta &:= \frac{b}{a};
\end{aligned}$$

cuyos nombres se leen seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente resp. Usualmente se suele priorizar por las primeras tres.

Proposición 2.70: Dado $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo en C y $\theta :=$ $\measuredangle BAC$, entonces se cumplen las relaciones en la fig 2.15.

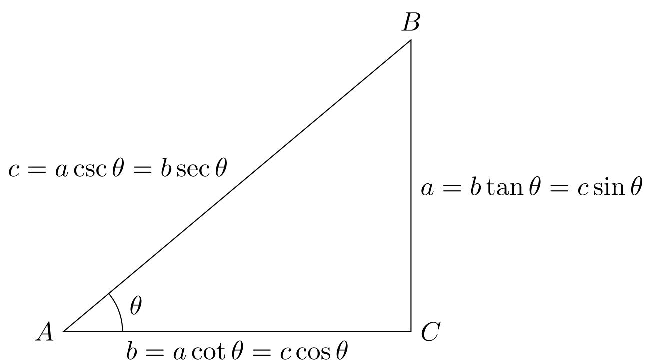


Figura 2.15

También es común y es útil ver las funciones trigonométricas dentro del círculo unitario o goniométrico:[1] Aquí trazamos un círculo de radio 1 y construimos un triángulo de ángulo θ en el vértice que corresponde al centro del círculo y entonces las funciones corresponden con la fig. 2.16, que también explica el por qué de los nombres.

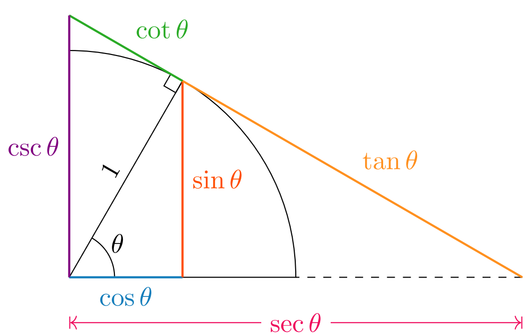


Figura 2.16. Círculo unitario.

Definición 2.71: En vista de lo que sucede con el círculo unitario admi-

[1]gr. γωνία: ángulo, μέτρον: medida.

timos las siguientes extensiones a las funciones trigonométricas (que están definidas actualmente para $\theta \in (0, \pi/2)$).

a) $\cos 0 = 1, \sin 0 = 0$.

b) Si $\theta \in [\pi/2, \pi)$, entonces $\cos\theta = -\sin(\theta - \pi/2), \sin\theta = \cos(\theta - \pi/2)$.

c) Si $\theta \in [\pi, 2\pi)$, entonces $\cos\theta = -\cos(\theta - \pi), \sin\theta = -\sin(\theta)$.

d) $\cos, \sin$ son funciones de periodo 2π, es decir, para todo $\theta \in [2\pi k, 2\pi(k+1))$ con $k \in \mathbb{Z}$ se cumple que $\cos\theta = \cos(\theta - 2\pi k), \sin\theta = \sin(\theta - 2\pi k)$.

Empleando el que

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

también se extienden las funciones, siempre que sus denominadores sean no nulos, en cuyo caso se consideran no definidas en dichos puntos.

También mediante el circulo goniométrico, podemos deducir las siguientes identidades trigonométricas:

Teorema 2.72: Para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple (siempre que las funciones estén bien definidas):

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \tag{2.1}$$
$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x, \tag{2.2}$$
$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x. \tag{2.3}$$

Hint: Las demostraciones salen de emplear el teorema de Pitágoras y comprobar en el resto de casos. También, como las funciones son periódicas, solo es necesario comprobarlo para $x \in [0, 2\pi)$. $\square$

2.6. Áreas y medidas

En ésta sección se quiere dar una teoría formal de nociones como el “área” y el “volumen”, para ello se debe advertir una de las grandes advertencias en la teoría de la medida: no todas las figuras son medibles, es decir, a no todas ellas se les puede asignar un número real como área o como volumen. El por qué es una pregunta mucho más profunda que ha sido respondida parcialmente por la teoría de la medida, el análisis matemático y por otra parte por la teoría de conjuntos, así que no nos ocuparemos de ella, pero si nos fundamentaremos en su idea para comenzar por definir una familia de figuras que sí se puedan medir.

Definición 2.73: Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos del espacio se dice un *anillo* si:

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$.
2. Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Además si $\mathbb{E} \in \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ se dice un *álgebra*. También consideramos el siguiente axioma:

3. Si $A_0, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ entonces $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Si un anillo (resp. un álgebra) cumple el axioma 3, entonces se dice un *σ-anillo* (resp. *σ-álgebra*). Dado un anillo prefijado sobre el espacio, las figuras que pertenecen al anillo se dicen *medibles*.

Dado un anillo $\mathcal{A}$ sobre el espacio, y sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ una aplicación tal que:

1. $\mu(\varnothing) = 0$.
2. Si A es medible, entonces $\mu(A) \geq 0$.
3. Si A, B son medibles disjuntos entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
4. Si A, B son ambos segmentos, ángulos o triángulos tales que $A \equiv B$, entonces $\mu(A) = \mu(B)$.

Entonces, decimos que μ es una *medida geométrica*.

Ejemplo. Sea $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\mathbb{E})$ (es decir, la familia de todas las figuras del espacio), definimos la medida de conteo μ como aquella que otorga la cantidad de puntos del conjunto si éste es finito, y ∞ si no lo es. Queda al lector ver que $\mathcal{A}$ es un anillo y que μ efectivamente es una medida geométrica. En cierta forma, la medida de conteo es la medida de "dimensión cero".

Cómo habíamos visto, todo segmento no trivial posee infinitos puntos, pero posee longitud no nula, por lo tanto, si s es un segmento no trivial, entonces $0 < \ell(s) < \infty = \mu(s)$ (donde μ es la medida de conteo y ℓ una longitud cualquiera).

Proposición 2.74: Sean A, B figuras medibles según una medida geométrica μ, entonces:

1. Si $A \subseteq B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.
2. Se cumple
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$
(ley de exclusión-inclusión).

Demostración: 1. Basta considerar que $B = A \cup C$ donde $C := B \setminus A$ es medible y disjunto de A, luego $\mu(B) = \mu(A) + \mu(C)$ y $\mu(C) \geq 0$ por definición de medida.

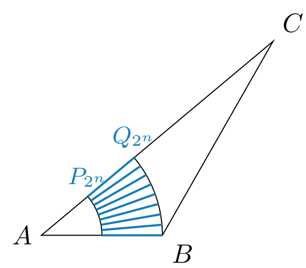
2. Sean $C_1 := B \setminus A$ y $C_2 := A \setminus B$, luego $A \cup B = C_1 \cup C_2 \cup (A \cap B)$ donde los conjuntos son disjuntos dos a dos. Luego $\mu(A \cup B) = \mu(C_1) + \mu(C_2) + \mu(A \cap B)$. Finalmente, nótese que $B = C_1 \cup (A \cap B)$ y que $A = C_2 \cup (A \cap B)$, donde los conjuntos son disjuntos, así que
$$\begin{aligned}\mu(A \cup B) &= \mu(C_1) + \mu(C_2) + \mu(A \cap B) = \mu(C_1) + \mu(A) \\ &= (\mu(C_1) + \mu(A \cap B)) + \mu(A) - \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B). \end{aligned} \qquad \square$$

En cierta forma, ya conocemos las medidas geométricas: la longitud de segmentos y la amplitud de ángulos son dos ejemplos hasta cierto punto. El problema es que para construir medidas geométricas se requiere de mucho esfuerzo, en primera para construir un anillo admisible y en segunda para construir la función como tal, así que al principio veremos propiedades que una medida geométrica tendría.

Teorema 2.75: Sea μ una medida geométrica tal que existe un triángulo $\triangle$ tal que $\mu(\triangle) \neq \infty$. Entonces, para todo segmento se cumple que $\mu(s) = 0$.

Demostración: Al igual que con los puntos, probaremos que hay infinitos segmentos disjuntos congruentes dentro de cualquier triángulo. Sea $\triangle$ de vértices A, B, C y sin perdida de generalidad supongamos que $r := \overline{AB}$ es el segmento de menor longitud, de modo que si trazamos la circunferencia ω_1 de centro A y radio r tiene un arco en el triángulo. Luego construyamos otra circunferencia ω_2 de centro A y radio $r/2$. Entonces para cualquier n natural, dividimos el ángulo $\angle BAC$ en 2^n partes y la i-ésima semirrecta intersecta en un punto dentro del triángulo a las circunferencias en P_i, Q_i para ω_2, ω_1 resp.

Luego $\overline{P_1Q_1}, \overline{P_2Q_2}, \dots, \overline{P_{2^n}Q_{2^n}}$ son 2^n segmentos congruentes disjuntos absolutamente construidos en el triángulo. $\square$



Otra conclusión que veremos es que las medidas generalizan la noción de longitud, área y volumen. ¿Cómo saber cuál es cuál? Consideramos un objeto "clásico" de determinada medida (e.g., un segmento, un rectángulo, un cubo, etc.) y vemos que su medida sea finita y no nula.

El área de un circulo. En ésta sección vamos a construir de manera formal el valor, como número real, de π, lo que define nuestra noción de radianes. Ésto, además, incluirá una fórmula para calcular el área de no sólo círculos sino sectores circulares cualesquiera, pero el proceso para llegar a ello, para poder ser riguroso, es largo y algo complicado de seguir.

Definición 2.76: Dado un ángulo α tal que su vértice cae en el centro O de un círculo contenido en el mismo plano $B_r^\Pi(O)$ de radio r. Se le llama sector circular al conjunto $\alpha \cap B_r^\Pi(O)$. Denotaremos por $\sigma_r(\alpha)$ al área del sector circular $\alpha \cap B_r^\Pi(O)$.

Una consecuencia básica:

Proposición 2.77: Sea $q \in \mathbb{Q}_2$ un racional diádico positivo tal que $q\alpha$ está definido, entonces $\sigma_r(q\alpha) = q\sigma_r(\alpha)$. En particular, σ_r, con algún r fijo, se comporta como una medida de ángulos.

Ésto sumado a que claramente podemos encuadrar un círculo de radio r en un cuadrado de radio $2r$, y que un triángulo está contenido en el círculo, nos permite deducir que de hecho tiene medida finita no nula; por lo tanto, la única cuestión por descubrir es si es que algún sector circular sea medible o no.

Consideremos un α y r cualesquiera, por conveniencia elegiré $\alpha = \pi/2$ y $r = 1$, sea A_n definido inductivamente así: dividamos el ángulo α en 2^n partes iguales, luego A_n corresponde a la unión de los 2^n triángulos internos de base $\cos(\alpha/2^n)$ y altura $\sin(\alpha/2^n)$. Asimismo, B_n son la unión de 2^n triángulos externos de base 1 y altura $\tan(\alpha/2^n)$.

3

Geometría analítica

En el presente y en el mundo educativo se suele obviar la enseñanza de la geometría sintética o clásica y optar por la geometría analítica. Al pensar en geometría analítica suelen venir a la cabeza la idea de parametrizar puntos (es decir, describirlos mediante coordenadas), aquí veremos todo el viaje riguroso hasta alcanzar dicho punto.

En éste capítulo se asume que se trabaja con una geometría euclídea.

3.1. Vectores

Los vectores son la idea central de la geometría analítica, pueden describirse adecuadamente como una especie de generalización de los segmentos pero que posee tres características principales: posee longitud, posee dirección y posee sentido. Cabe destacar que dependiendo de cómo se defina «dirección», ésta puede englobar también el sentido, pero bajo nuestras definiciones no es así aún.

En la geometría euclídea ya se domina la idea de longitud y dirección de segmentos, donde la dirección viene a ser la idea de paralelismo (por ésto también es importante que nuestro espacio sea euclídeo), así que formalicemos la idea de sentido.

Definición 3.1: Dados A, B distintos, entonces sobre $r = AB$ considerándolo como recta graduada con $P_0 = A$ y $P_1 = B$ se escribe que $X <_{AB} Y$ si $x < y$ (como números reales) donde $X = P_x$ y $Y = P_y$.

Teorema 3.2: Si $P, Q \in AB$ son distintos, entonces se cumple una y solo una de las siguientes:

1. $X <_{PQ} Y$ syss $X <_{AB} Y$.
2. $X <_{PQ} Y$ syss $X >_{AB} Y$.

Demostración: Llamemos μ_{AB} la graduación de AB tal que $\mu_{AB}(A) = 0$ y $\mu_{AB}(B) = 1$. Entonces para X, Y cualesquiera vamos a definir:

$$\alpha := \mu_{AB}(P),\ \beta := \mu_{AB}(Q),\ \gamma := \mu_{AB}(X),\ \delta := \mu_{AB}(Y)$$

Si $X <_{AB} Y$, entonces $\gamma < \delta$ y análogo con P, Q. Luego veamos como comprender la graduación $\mu_{PQ} = \mu_{AB} \circ f$:

$$f(\alpha) = 0 \wedge f(\beta) = 1$$

y como f es una función afín, nos queda que $f(x) = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$. Notemos que si $\gamma < \delta$, entonces $\gamma - \alpha < \delta - \alpha$, pero que $f(\gamma) < f(\delta)$ syss $\beta - \alpha > 0$, y que la desigualdad se da vuelta de lo contrario, que es justamente lo que se quería probar. $\square$

El teorema anterior se debe entender que el sentido u orientación $<_{AB}$ es independiente de los puntos elegidos, sino que toda recta sólo posee dos sentidos posibles.

Definición 3.3: Si $s \neq r$ pero $s \parallel r = AB$, entonces entendemos la orientación $<_{AB}$ como la orientación $<_{PQ}$ donde $P, Q \in s$ son distintos y satisfacen que $ABQP$ es un paralelogramo.

Nótese que existen infinitos pares ordenados de puntos (P, Q) tales que se cumple anterior, pero aplicando el teorema se concluye que siempre determinan la misma orientación, así que la definición no entra en problemas de unicidad.

Definición 3.4 – *Vectores*: Sean A, B, C, D puntos cualesquiera del espacio, denotamos $(A, B) \sim (C, D)$ syss:

1. $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.
2. Si $A \neq B$, entonces $AB \parallel CD$.
3. Si $A \neq B$, entonces $<_{AB} = <_{CD}$.

$\sim$ es una relación de equivalencia, de modo que podemos denotar $V := \mathbb{E}^2/\sim$ el espacio cociente, cuyos elementos llamamos *vectores*. Denotamos $\overrightarrow{AB} := [(A,B)]_\sim$ (i.e., la clase de equivalencia) y también denotamos que

$$A + \overrightarrow{AB} = B.$$

Usualmente denotamos los vectores como $\vec{u}$, también denotamos al vector $\vec{0} := \overrightarrow{AA}$. Además, definimos $-\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{BA}$.

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, entonces notemos que tiene asociado una serie de segmentos todos paralelos, de modo que nos permitimos denotar $r \parallel \vec{u}$ si r es paralelo a alguno (y, por lo tanto, a todos). También podemos denotar $\vec{u} \parallel \vec{v}$ por la misma razón, por definición el vector nulo es sólo paralelo a sí mismo. Del mismo modo, si fijamos una medida de segmentos μ, llamamos el *módulo* o *longitud* de un vector $\vec{u}$, denotado por $\|\vec{u}\|$, a la medida de cualquiera de sus segmentos (que todos miden lo mismo).

Aviso: Para evitar confusiones $\overrightarrow{AB}$ siempre representará un vector en éste capítulo y no una semirrecta.

Teorema 3.5: Dado $\vec{u} \in V$ y un punto A cualquiera, existen unos únicos P, Q tales que $\vec{u} = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QA}$.

Demostración: Sea r la única paralela a $\vec{u}$ que pasa por A (por axioma de Euclides), luego sobre r existen dos puntos a distancia $\|\vec{u}\|$ de A que denotaremos X, Y (cada uno correspondiente a una de las dos semirrectas de origen A). Notemos que $<_{AX}$ y $<_{AY}$ son las dos orientaciones posibles de r, de modo que $X = P$ e $Y = Q$, o $X = Q$ e $Y = P$. □

Como consecuencia de ésto, $A + \vec{u}$ siempre está definido para cualquier vector $\vec{u}$.

Proposición 3.6: Dados $\vec{u}, \vec{v} \in V$ y $A, B \in \mathbb{E}$:

1. $A + \vec{u} = A + \vec{v}$ syss $\vec{u} = \vec{v}$.
2. $A + \vec{u} = B + \vec{u}$ syss $A = B$.
3. $-(-\vec{u}) = \vec{u}$.
4. $\vec{u} = -\vec{u}$ syss $\vec{u} = \vec{0}$.

Definición 3.7 (Aritmética de vectores): Dados $\vec{u}, \vec{v} \in V$ y $A \in \mathbb{E}$, entonces denotamos por $\vec{u} + \vec{v} := \overrightarrow{AP}$ donde $P = (A + \vec{u}) + \vec{v}$.

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $r = AB$ está graduada, entonces dado un número λ constructible en el espacio, entonces denotamos por $\lambda \cdot \vec{u} := \overrightarrow{AQ}$ donde Q es el punto sobre r cuya graduación es λ.

Teorema 3.8: Dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathscr{C}$, entonces:

1. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
2. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.
3. $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$.
4. $\alpha\vec{u} + \beta\vec{u} = (\alpha + \beta)\vec{u}$.
5. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
6. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ y $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$.
7. $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$.
8. $\alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} = \alpha(\vec{u} + \vec{v})$.
9. $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \, \|\vec{u}\|$.
10. $\alpha\vec{u} = \vec{0}$ syss $\alpha = 0$ o $\vec{u} = \vec{0}$.

En conclusión, V es un $\mathscr{C}$-espacio vectorial.

Demostración: El orden de los items no es el convencional, pero si es el más útil, ya que al probar conmutatividad de suma se separa según si $\vec{u}, \vec{v}$ son o no paralelos. En caso de que sí lo dejamos al lector, pero si no sucede, entonces sea A cualquiera, $B := A + \vec{u}$ y $C := B + \vec{v}$, luego si $D := A + \vec{v}$, entonces es fácil comprobar que $ABCD$ es un paralelogramo, de modo que se comprueba que $\overrightarrow{DC} = \vec{u}$ con lo que se demuestra la conmutatividad.
La última proposición se deriva de la anterior si $\vec{u} \parallel \vec{v}$ o del teorema de Tales si no.
Casí todos los items acerca de producto escalar se derivan de datos conocidos sobre rectas graduadas. $\square$

El teorema se reduce a que V es un espacio vectorial sobre el cuerpo de números constructibles, pero de hecho debe entenderse al revés: los vectores (algebraícos) se definen con tales axiomas, porque los vectores (geométricos) los cumplen en primer lugar. De hecho, ahora $\mathscr{C}$ pasa a tener tal importancia que vamos a denotar $\Bbbk := \mathscr{C}$ en su lugar, donde $\Bbbk$ es cualquier cuerpo ordenado pitagórico (que contenga a $\mathbb{Q}$). Notemos que si $\mathbb{E}$ induce un $\Bbbk$-espacio vectorial, entonces bastaría con encontrar la dimensión del espacio para comprender la geometría del espacio por completo, a ello nos dedicaremos en la siguiente sección.

3.2. Variedades afines

En álgebra lineal la generalización de la recta y el plano son los (sub)espacios vectoriales, pero éstos tienen la facultad de que siempre pasan por el vector $\vec{0}$, de modo que si los vectores fueran puntos entonces sería inconveniente, pues queremos que nuestras rectas sean más generales, la respuesta reside en tomar un subespacio vectorial y elegir un punto A que funcione como origen.

Definición 3.9: Si $\vec{u} \in V$, entonces

$$\Bbbk\vec{u} := \{\lambda\vec{u} \in V : \lambda \in \Bbbk\}, \quad A + \Bbbk\vec{u} := \{A + \lambda\vec{u} \in \mathbb{E} : \lambda \in V\},$$

y así con otras combinaciones. Notemos que $\Bbbk\vec{0} = \{\vec{0}\}$.

Corolario 3.10: Si $\vec{u} \parallel \vec{v}$, entonces

$$\Bbbk\vec{u} = \Bbbk\vec{v}.$$

Corolario 3.11: Dados A, B distintos, entonces

$$A + \Bbbk \cdot \overrightarrow{AB} = AB.$$

Así mismo, si A, B, C no son colineales, entonces

$$A + \Bbbk \cdot \overrightarrow{AB} + \Bbbk \cdot \overrightarrow{AC} = ABC.$$

En otras palabras si $\vec{u} := \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} := \overrightarrow{AB}$, entonces para todo $D \in ABC$ existen $\alpha, \beta \in \Bbbk$ tales que

$$D = A + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v},$$

más aún, dichos α, β son únicos.

Éstas dos últimas van a motivar una generalización:

Definición 3.12 – *Variedad afín*: Se dice que un conjunto de puntos $U \subseteq \mathbb{E}$ es una *variedad afín* si para todo $P, Q \in U$ se cumple que $PQ \subseteq U$.

Proposición 3.13: Se cumplen:

1. $\varnothing$ y $\mathbb{E}$ son variedades afínes.
2. Sea A un punto, entonces $\{A\}$ es una variedad afín.
3. Las rectas y los planos son variedades afínes.
4. Las variedades afínes son convexas.
5. La intersección de variedades afínes es una variedad afín.
6. Si U, V son variedades afínes tales que $V \cup U$ es una variedad afín, entonces o $V \subseteq U$ o $U \subseteq V$.

DEMOSTRACIÓN: Probaremos la última: Supongamos que $U \nsubseteq V$, es decir, existe $P \in U \setminus V$. Para todo $Q \in V$ se cumple que $PQ \subseteq U \cup V$, notemos que si $P - R - Q$, entonces $R \notin V$, pues de lo contrario, $P \in RQ \subseteq V$, de modo que $R \in U$, pero $Q \in PR \subseteq V$, luego $V \subseteq U$ como se quería probar. $\square$

Corolario 3.14: Para todo conjunto de puntos $S \subseteq \mathbb{E}$ se cumple que existe una variedad afín U que es la mínima que contiene a S, es decir, si $S \subseteq V$ y V es variedad afín, entonces $U \subseteq V$.

DEMOSTRACIÓN: Definamos $\mathcal{F}$ la familia de variedades afínes que contienen a S. Notemos que $\mathcal{F}$ no es vacía pues $\mathbb{E} \in \mathcal{F}$, luego si definimos $U := \bigcap \mathcal{F}$ es una variedad afín por la proposición anterior. Además si $S \subseteq V$ y V es una variedad afín, entonces $V \in \mathcal{F}$ y luego $U \subseteq V$. $\square$

Definición 3.15: Si $S \subseteq \mathbb{E}$, entonces decimos que la variedad afín generada por S, denotada por $\mathbf{V}(S)$, es la mínima variedad afín que le contiene.

Se dice que S es *afínmente independiente* si para todo $P \in S$ se cumple que $P \notin \mathbf{V}(S_{\neq P})$. Dada una variedad afín U, decimos que S es un generador de U si $\mathbf{V}(S) = U$. Si S genera a U y S es afínmente independiente, entonces decimos que S es una *base* de U.

Proposición 3.16: Se cumple que

$$\mathbf{V}(S) = \left\{ P_0 + \sum_{\substack{i=0 \\ j=0}}^{n} \lambda_{ij} \cdot \overrightarrow{P_iP_j} : \lambda_{ij} \in \Bbbk \wedge P_i \in S \right\}$$

Proposición 3.17: Se cumple que:

1. U es una variedad afín syss $\mathbf{V}(U) = U$.
2. Si $A \neq B$ puntos, entonces $\mathbf{V}(A, B) = AB$.
3. Si A, B, C no son colineales, entonces $\mathbf{V}(A, B, C) = ABC$. De hecho, tres puntos son colineales syss son afínmente dependientes.
4. Cuatro puntos son coplanares syss son afínmente dependientes.

Teorema 3.18: Sea U una variedad afín con dos bases S_1, S_2:

1. Si S_1 es finito, entonces S_2 también y comparten cardinalidad.
2. (AE) Si S_1 es infinito, entonces S_2 también y comparten cardinalidad.

Demostración: La diferencia en ambos casos, es que uno asume el axioma de elección (AE), pero hago la distinción pues en geometría casí siempre trabajamos con variedades afínes con bases finitas. Para probar la finitud de S_2, basta notar que cada punto de S_1 viene generado por finitos puntos de S_2, luego como S_1 es finito, entonces puede ser generado por finitos puntos de S_2 y como S_2 es afínmente independiente, S_2 es en definitiva finito. □

Apéndice

A

Los números reales

En éste capítulo se expone la construcción de los números reales desde el concepto de cortes de Dedekind y el axioma del supremo. La otra construcción que poseo es mediante la completitud de Cauchy en mi libro *Topología y análisis*, éste acercamiento tiene más relación con la geometría, por ello le incluyo aquí, además se pretende introducir el axioma de continuidad (que se traduce en decir que todos los reales son números constructibles) y se demuestra cómo éste induce el axioma de Arquímedes, el axioma de intersección de circunferencia y la completitud de los ángulos, es decir, que todo número real tiene un ángulo constructible asociado.

A.1. El axioma del supremo

Existe una estricta relación entre la recta vista geométricamente y los números reales. Ya vimos como la recta numérica alberga más números que los racionales, el más clásico es $\sqrt{2}$, pero mediante gráficos podríamos ver que la recta racional está lleno de "agujeros", para lo cual debemos definir que es un agujero en el sentido estricto de la palabra, ésto se logra explotando el orden lineal de los números reales.

Definición A.1: Sea A un subconjunto no vacío de un conjunto linealmente ordenado $(X, \leq)$ (que pueden ser los racionales, los naturales, etc.), entonces se dice que $x \in X$ es *cota superior* (resp. *inferior*) de A si para todo $a \in A$ se cumple que $x \geq a$ (resp. $x \leq a$). Si x es cota superior (resp. inferior) de A y también **pertenece** a A, entonces decimos que es el máximo (resp. mínimo) de A. De existir, la mínima de las cotas superiores (resp. la máxima de las cotas inferiores) de A se le dice el *supremo* (resp. ínfimo) de A.

Nótese que si un conjunto posee máximo, éste es también su supremo pero no al revés. Por ejemplo, el intervalo abierto $(-\infty, 0)$ posee supremo 0, pero no posee máximo, ya que su supremo no pertenece al conjunto.

Definición A.2: Se dice que un conjunto A es una *sección inicial* de $\mathbb{Q}$ si:

1. Si dado $x \in \mathbb{Q}$ existe $a \in A$ tal que $x < a$, entonces $x \in A$.
2. Si A posee supremo, entonces éste pertenece a A.
3. $A \notin \{\varnothing, \mathbb{Q}\}$.

La última condición es opcional para algunos.

Definición A.3 – *Número real*: Denotamos por $\mathbb{R}$, al conjunto de todas las secciones iniciales de $\mathbb{Q}$, y a sus elementos llamamos *números reales*. Si $x := A, y := B \in \mathbb{R}$, denotamos que $x \leq y$ syss $A \subseteq B$. Si $r \in \mathbb{Q}$ denotamos por r al número real $(-\infty, r]$ y es claro que ésta aplicación respeta el orden de los números racionales. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces definimos:

$$x + y := \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad x - y := \{a - b : a \in A, b \in B\}.$$

Se denota por $-x := 0 - x$.

Proposición A.4: Se cumple que $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo abeliano y que $x \leq y$ syss para cualquier $z \in \mathbb{R}$ se cumple que $x+z \leq y+z$. En consecuencia, $x \geq 0$ syss $(-x) \leq 0$.

Demostración: Veamos que la conmutatividad, así como la asociatividad son triviales. Queremos ver que posee elemento neutro que esperamos que sea el $0_\mathbb{R}$ (denotado así para evitar confusiones con el 0 como racional): Para ello basta notar que si $x := A$ entonces $A' := A + 0_\mathbb{R}$ cumple ser A por doble contención. En primer lugar, si $a \in A$, entonces como $0_\mathbb{Q} \in 0_\mathbb{R}$ se cumple que $a + 0_{\mathbb{Q}} = a \in A'$. Así mismo, si $a \in A'$ existen $b \in A, c \in 0_{\mathbb{R}}$ tales que $b + c = a$, veamos que $c \leq 0$ (como racionales) luego $a = b + c \leq b$ de modo que por definición de sección inicial $a \in A$.

Luego queremos probar (y por razonamiento similar) que si $x+y-y = x$, con lo que se prueba que $-x$ es el inverso aditivo de x como real.

Finalmente probaremos el otro postulado, que la suma (y por ende también la resta) respeta las desigualdades. Para ello vemos que si $c \in (x + z)$, entonces existen $a \in x, b \in z$ tales que $c = a + b$. Pero como $x \leq y$ se cumple que $a \in y$, por lo que $c \in (y + z)$ como se quiere probar. □

Definición A.5: Sean $x = A$ e $y = B$ reales, se define:

$$x \cdot y := \begin{cases} 0_{\mathbb{R}} \cup \{ab : a \in A \wedge b \in B \wedge a, b \geq 0\}, & x \geq 0 \wedge y \geq 0 \\ -(-x) \cdot y, & x < 0 \wedge y \geq 0 \\ -x \cdot (-y), & x \geq 0 \wedge y < 0 \\ (-x) \cdot (-y), & x < 0 \wedge y < 0 \end{cases}$$

Y si $x \neq 0_{\mathbb{R}}$ se define:

$$x^{-1} := \begin{cases} 0_{\mathbb{R}} \cup \{a^{-1} : a \in A \wedge a > 0\}, & x > 0 \\ -(-x)^{-1}, & x < 0 \end{cases}$$

Teorema A.6: $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ es un cuerpo ordenado.

A.2. El axioma de continuidad

Definición A.7: Dada una recta r, entonces un par (s, t) se dice un *corte* de r si:

1. $s \cup t = r$ y $s \cap t = \varnothing$.
2. Ni s ni t son vacías.
3. s, t son convexas (es decir, contienen todo segmento).

Corolario A.8: Si (s, t) son un corte de una recta r, entonces si $A \in s$, $B \in t$ y $C - A - B$, entonces $C \in s$.

Axioma de Continuidad: Dado un corte (s, t) de una recta r, entonces s, t son semirrectas (tal vez sin el origen).

Notemos que el axioma de continuidad es el equivalente geométrico a la construcción por cortes de Dedekind.

Desde aquí en adelante, todos los teoremas asumen que la geometría cumple el axioma de continuidad.

Corolario A.9: Para toda unidad u se cumple $\mathscr{C}_u = \mathbb{R}$.

Hint: Basta notar que el axioma de continuidad se traduce en el axioma del supremo para números constructibles. □

Teorema A.10: La geometría continua es arquimediana.

Demostración: Sean u, v segmentos cualesquiera, y supongamos que violan el axioma de arquímedes, de modo que $v/u = \infty$ (ésto es pura notación). Podemos tomar una recta de modo que $\overline{PQ} \equiv u$ y sea $R \in \overrightarrow{PQ}$ tal que $\overline{PR} \equiv v$. Luego podemos considerar la graduación dada por $P_0 := P$ y $P_1 := Q$. Luego construyamos s como todos los puntos cuya graduación sea distinta de $+\infty$ y t su complemento, veamos que (s, t) sean un corte de PQ.

La primera condición deriva de la construcción de s, t. La segunda deriva del hecho de que $P, Q \in s$ y $R \in t$. La tercera es la más compleja, pero es claro que s es convexa, así que la pregunta queda en si t lo es. Sean $A, B \in t$ y sea $A - C - B$. Supongamos por contradicción que $C \in s$, veamos que $P - A - B$ o $P - B - A$. Si P estuviera entre A, B, entonces sabemos que la graduación de A o de B sería negativa, lo cual es absurdo.

Luego como s, t son semirrectas tienen un origen O, y aquí está la magia, sobre $\overrightarrow{OP}$ se construye T tal que $\overline{OT} \equiv u$, pero como $T \in s$, T tiene graduación $x < +\infty$, de modo que $P_{x+1} = O$ y $P_{x+2} \in t$ pero $x + 2 < +\infty$, lo que es una contradicción. □

Teorema A.11: La geometría continua satisface la condición IC.

Índice alfabético

Índice de notación

$\vee, \wedge$	Disyuntor, "o lógico" y conjuntor, "y lógico" respectivamente.
$\implies$	Implica, entonces.
$\iff$	Si y sólo si.
$\forall, \exists$	Para todo, existe respectivamente.
$\in$	Pertenencia.
$\subseteq, \subset$	Subconjunto, subconjunto propio resp.
$\cup, \cap$	Unión e intersección binaria respectivamente.
$A \setminus B$	Resta conjuntista, A menos B.
A^c	Complemento de A (respecto a un universo relativo).
$A \times B$	Producto cartesiano de A por B.
$A_{\neq x}$	Abreviación de $A \setminus \{x\}$.
$f : A \to B$	Función f de dominio A y codominio B.
$f \circ g$	Composición de f con g. $(f \circ g)(x) = g(f(x))$.
$\mathcal{P}(A)$	Conjunto potencia de A.
resp.	Respectivamente.

syss	Si y sólo si.
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$	Conjuntos de números naturales, enteros y racionales resp.
$\aleph_0$	Cardinal numerable, cardinalidad de $\mathbb{N}$.
AE	Axioma de elección.
DE, AEN	Axioma de elecciones dependientes, y de elecciones numerables resp.
ZF(C)	Teoría de Zermelo-Fraenkel. La C representa el axioma de elección.
$A - B - C$	El punto B está entre A y C en una misma recta, p. 5.
$\overline{AB}$	Segmento de extremos A y B, p. 6.
$\overrightarrow{OA}$	Semirrecta de origen O que contiene a A, p. 9.
$r \parallel s$	Las rectas r, s son paralelas, p. 11.
$\equiv$	Congruentes, p. 11.
$\angle(h,k), \angle AOB$	Ángulo de lados h, k, y ángulo de lados $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ resp., p. 12.
$\triangle ABC$	Triángulo de vértices A, B y C, p. 13.
$a < b$	Segmento a menor que b., p. 15.
$a \perp b$	a y b son perpendiculares, p. 22.
$\widehat{AB}$	Arco de extremos A, B de una determinada circunferencia, p. 52.

Bibliografía

Geometría euclídea

1. Chen, E. *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads* (The Mathematical Association of America, 2016).
2. Dillon, M. I. *Geometry Through History* (Springer, 2018).
3. Euclides y Casey, J. *The First Six Books of the Elements of Euclid. And Propositions I.-XXI. of Book XI., and an Appendix on the Cylinder, Sphere, Cone, etc.* https://www.gutenberg.org/ebooks/21076 (Project Gutenberg, 2007).
4. Greenberg, M. J. *Euclidean and Non-euclidean Geometries. Development and History* 3.ª ed. (W. H. Freeman y Company, 1993).
5. Hilbert, D. *The Foundations of Geometry* trad. por Townsend, E. J. http://www.gutenberg.org/ebooks/17384 (Project Gutenberg, 2005).
6. Ivorra Castillo, C. *Geometría* https://www.uv.es/=ivorra/Libros/Geometria2.pdf (2018).
7. Petrunin, A. *Euclidean plane and its relatives. A minimalist introduction* https://arxiv.org/abs/1302.1630 (2019).
8. Posamentier, A. S. *Advanced Euclidean Geometry* (2002).

Artículos

9. Brodie, S. E. *The Pythagorean Theorem is Equivalent to the Parallel Postulate* https://www.cut-the-knot.org/triangle/pythpar/PTimpliesPP.shtml.
10. Wilkins, D. R. *Selected Circle Theorems* https://www.maths.tcd.ie/~dwilkins/Courses/ET7246/LocalResources2018/SelectedCircleTheorems.pdf.
11. Wilkins, D. R. *Trigonometry* https://www.maths.tcd.ie/~dwilkins/Courses/ET7246/LocalResources2018/TrigonometryPresentation.pdf.