

Álgebra

José Cuevas Barrientos

11 de marzo de 2022

Índice general

	INTRODUCCIÓN	VII
I	Álgebra abstracta	1
1	TEORÍA DE GRUPOS	3
1.1	Estructuras algebraicas	3
1.2	Ejemplos de grupos	12
1.2.1	Grupos simétrico y alternante	12
1.2.2	Grupo diedral	15
1.3	Representaciones de grupos finitos	16
1.3.1	Teoremas de isomorfismos y categorías	18
1.3.2	Productos directos y semidirectos de grupos	22
1.3.3	Acciones, ecuación de clases y p -grupos	26
1.4	Teoremas de Sylow	29
1.4.1	Acciones	29
1.4.2	Teoremas de Sylow	30
1.5	Otros tópicos de grupos	34
1.5.1	Grupos libres y presentación	34
1.5.2	Grupos resolubles	39
2	ANILLOS Y CUERPOS	47
2.1	Definiciones elementales	47
2.1.1	Teorema del binomio	54
2.2	Divisibilidad en anillos	56
2.3	Polinomios	62
2.4	Divisibilidad de polinomios	69
2.4.1	Raíces básicas	73

2.5	Números complejos	74
2.5.1	El teorema fundamental del álgebra I	76
II	Álgebra lineal	79
3	MÓDULOS	81
3.1	Módulos y vectores	81
3.2	Módulos libres y bases	85
3.2.1	Finitamente generados	85
3.2.2	Espacios de dimensión infinita	88
3.2.3	Fórmulas con la dimensión	90
3.3	Matrices y transformaciones lineales	91
3.4	Determinante	96
3.4.1	Rango de matrices	100
4	EXTENSIONES DE CUERPO	103
4.1	Extensiones algebraicas y transcendentales	103
4.2	Extensiones normales y separables	108
4.2.1	Cuerpos de escisión	108
4.2.2	Extensiones separables	110
4.3	Teoría y extensiones de Galois	112
4.4	Cuerpos algebraicamente cerrados	114
4.4.1	Aplicación: El teorema fundamental del álgebra II	115
5	TEORÍA ESPECTRAL	117
5.1	Diagonalización	117
5.1.1	El teorema fundamental del álgebra II	122
5.1.2	Teorema de Cayley-Hamilton	124
5.2	Espacios duales	125
5.3	Formas bilineales	127
5.3.1	Formas bilineales	127
5.3.2	Formas sesquilineales, producto interno y “geometría euclídea”	130
5.3.3	Formas hermitianas y espacios de producto interno	131
5.3.4	Formas cuadráticas	137
III	Geometría Algebraica	139
6	VARIEDADES AFÍN	141
6.1	Definiciones elementales	141
	ÍNDICE DE NOTACIÓN	145
	ÍNDICE ALFABÉTICO	149
	BIBLIOGRAFÍA	153
	Álgebra abstracta	153
	Álgebra lineal	153

Geometría algebraica	154
Artículos	154

Introducción

El álgebra es el estudio de las estructuras matemáticas, esto es, conjuntos dotados de relaciones y/u operaciones que satisfacen una serie de condiciones que lo dotan de una *forma*. Ésto tal vez en principio difiera con la imagen que uno pueda tener del álgebra, pero hay varias consideraciones que tener de esta sentencia, por ejemplo, las estructuras son bastante comunes, los conjuntos numéricos son el ejemplo más importante, de hecho, abren la puerta a una pregunta más fundamental: ¿qué es un número? El lector puede creer que esto es una pregunta trivial ya que conoce números como 1, 0, π o $\sqrt{2}$. ¿Y qué hay de \emptyset ? No, ésto es un conjunto. Sin embargo, von Neumann propone construir el conjunto de los naturales usando al conjunto vacío \emptyset como sinónimo del 0. En efecto, la teoría de conjuntos nos otorga “materiales” bajo los cuales construimos todo nuestro universo de objetos, en consecuencia los números como tal no han de ser más que conjuntos, luego no es la “composición” del objeto lo que determina su cualidad de número o no.

Veamos otra característica, podríamos decir que el 1 se define como el sucesor del 0 en los naturales. Ésta definición es independiente de cómo definamos 0 o 1, ya sea con conjuntos conocidos o raros, pero sino de cómo se relacionan los elementos de éste conjunto. En este sentido, el conjunto $S := \{1, 0, \pi, \sqrt{2}\}$ no es numérico, ya que carece de propiedades básicas como que $\pi + \pi = 2\pi \notin S$ (a menos claro que redefinamos $+$ para S). Pero ésto conlleva a una apreciación elemental, S puede ser numérico dependiendo de cómo se definen sus operaciones; a ésto es lo que se le dice una *estructura*. Ésto también nos obliga a definir una manera de decir que dos estructuras tienen la misma forma, pero pueden definir en composición, un ejemplo sería encontrar un método para señalar que los conjuntos $\{0, 1, 2, \dots\}$ y $\{\text{cero},$

uno, dos, ... } son, en esencia, la misma estructura. La sentencia empleada para señalar este hecho es “las estructuras son isomorfas”. Por supuesto cabe preguntarse ¿la misma estructura en qué sentido? Pues los conjuntos pueden “concordar” en la suma, pero “diferir” en el producto, a lo que se le añade un apellido al término de isomorfismo, por ejemplo: son isomorfas en orden, o isomorfas como espacios vectoriales, etc. Con éste preámbulo, el rol del álgebra se ve más claro, y también se comprende una división del álgebra respecto de las estructuras que estudia.

Para muchos fines, una de las estructuras más básicas (en términos de condiciones) son los *grupos* al que dedicamos un largo capítulo para ver en detalle. Algo de lo que el lector se va a percatar es que mientras más básicas sean las estructuras, más libertades poseen de modo que su estudio suele o verse fragmentado (según añadir más condiciones, como finitud o conmutatividad) o simplemente no puede profundizar demasiado; como es el caso con la teoría nativa de conjuntos, que eventualmente rota entre otros temas más específicos como números ordinales o cardinales para tener más información, pero es aún muy amplia en contextos genéricos, como el axioma de elección demuestra. Al igual que la teoría de conjuntos es vital para comprender o leer otros conceptos en matemáticas, la teoría de grupos es vital para escribir el resto del álgebra. A veces puede sentirse como innecesaria, pero vuelve en contextos inesperados, como en el grupo especial en la teoría de matrices, o el grupo de Galois en la teoría de extensión de cuerpos.

Parte I.

ÁLGEBRA ABSTRACTA

1

Teoría de grupos

Comenzaremos el capítulo con dar una breve introducción a la teoría de números, la cual servirá tanto para ilustrar como para poder definir ciertos conceptos que nos serán útiles.

1.1. Estructuras algebraicas

En el libro sobre teoría de conjuntos vimos como mediante variados modelos se pueden formalizar las matemáticas mediante el objeto de los conjuntos (o las clases). No obstante, varios matemáticos (incluidos Cantor mismo) describen a estos elementos como *amorfos* en el sentido de que podrían ser o representar cualquier cosa sin ninguna clase de patrón e importancia. En este sentido surge el concepto de las *estructuras algebraicas*, como conjuntos dotados de propiedades que generan objetos que resultan de interés y que son manejables. Se comenzará este libro analizando una de las estructuras más básicas (pero no menos importantes o interesantes):

Definición 1.1 – Grupos: Una función $\cdot : G^2 \rightarrow G$ sobre un conjunto G se dice que cumple:

Asociatividad Para todo $x, y, z \in G$ se cumple $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

Elemento neutro Existe $e \in G$ tal que para todo $x \in G$ se cumple $e \cdot x = x \cdot e = x$.

Conmutatividad Para todo $x, y \in G$ se cumple $x \cdot y = y \cdot x$.

Además se dice que un elemento $x \in G$ es *invertible* (donde G posee neutro e) si existe $y \in G$ tal que $x \cdot y = y \cdot x = e$, en cuyo caso al y le decimos una *inversa* de x .

Un par (G, \cdot) se dice:

Semigrupo Si \cdot es asociativa.

Monoide Si (G, \cdot) es semigrupo y posee neutro.

Grupo Si (G, \cdot) es monoide y todo elemento es invertible.

Además se agrega el sufijo *conmutativo* o *abeliano* si (G, \cdot) es conmutativo.

De aquí en adelante abreviaremos $xy = x \cdot y$.

Ejemplos. Son grupos:

1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}_n, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ y $(\mathbb{R}, +)$.
2. $(\mathbb{Q}_{\neq 0}, \cdot)$ y $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$.
3. Si p es primo, entonces $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot)$.
4. Si $X \neq \emptyset$, entonces $(\text{Sym}(X), \circ)$ [las biyecciones de X con la composición] es un grupo.

Curiosamente los primeros tres items son grupos abelianos.

Teorema 1.2: Sea (G, \cdot) una estructura algebraica:

1. Si posee elemento neutro es único.

Si es semigrupo:

2. La inversa de un elemento invertible es única, por lo que le denotamos como a^{-1} .
3. La inversa de un elemento a invertible es invertible y $(a^{-1})^{-1} = a$.
4. El producto de invertibles es invertible y

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}.$$

Si es grupo entonces:

5. Posee *cancelación* por la izquierda y derecha:

$$ab = ac \iff b = c, \quad ab = cb \iff a = c.$$

En virtud de este teorema, denotaremos 1 al neutro de un grupo en general para mantener la notación multiplicativa (excepto en ejemplos concretos claro).

Proposición 1.3: Sea (S, \cdot) un semigrupo tal que

1. Si para todo $a, b \in S$ existen $x, y \in S$ tales que $ax = b$ e $ya = b$, entonces S es un grupo.
2. Si es finito entonces es grupo syss posee cancelación por la izquierda y la derecha.

Definición 1.4 – Subgrupo: Sea $S \subseteq G$ un grupo. Se dice que S es subgrupo si $(S, \cdot|_{S^2})$ es grupo. Si S es subgrupo de G escribiremos $S \leq G$.

Notemos que $\{1\}$ siempre cumple ser un subgrupo, a éste le llamaremos subgrupo *trivial*. G mismo también es un subgrupo de G . A los subgrupos de G distintos de G y de $\{1\}$ les diremos *proprios*.

En general, dada cualquier tipo de estructura añadiremos el prefijo *sub*- para indicar que es subconjunto de otra estructura con la que comparte propiedades.

Teorema 1.5 (Criterio de subgrupos): $S \leq G$ syss es no vacío y para todo $x, y \in S$ se cumple que $xy^{-1} \in S$.

Corolario 1.6: La intersección arbitraria de subgrupos es un subgrupo. Además nunca es vacía pues 1 siempre pertenece a la intersección de subgrupos.

Definición 1.7: Si (G, \cdot) es un grupo de neutro e , y $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en G , vamos a definir por recursión:

$$\prod_{k=1}^1 a_k = a_1, \quad \prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \cdot a_{n+1}.$$

En este caso la expresión $\prod_{k=1}^n$ se lee como “producto de índice k desde 1 hasta n ”, donde el n se dice el super-índice o punto de fin. Si el punto de final es menor al de partida, entonces por definición el producto es el neutro.

Si la operación sobre G es $+$ usamos Σ en lugar de Π .

Proposición 1.8 (Asociatividad generalizada): Si $g_1, \dots, g_n \in G$ y $1 \leq k < n$, entonces

$$\prod_{i=1}^n g_i = \left(\prod_{i=1}^k g_i \right) \cdot \left(\prod_{i=k+1}^n g_i \right).$$

HINT: Se hace por inducción. □

Ésto nos dice que podemos hacer un producto finito en el orden que queramos.

Definición 1.9 – Subgrupo generado: Dado $S \subseteq G$ se denota $\langle S \rangle$

a

$$\langle S \rangle := \bigcap \{ H : S \subseteq H \leq G \}$$

Es decir, al mínimo subgrupo (bajo la inclusión) de G que le contiene. Si $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ nos permitiremos abreviar $\langle x_1, \dots, x_n \rangle := \langle S \rangle$.

Corolario 1.10: $S \leq G$ syss $\langle S \rangle = S$.

Proposición 1.11: Para todo $x \in \langle S \rangle$, se cumple que

$$x = x_1 x_2 \cdots x_n$$

donde para todo $i \leq n$ se cumple que x_i o x_i^{-1} pertenece a S .

Teorema 1.12: Sean $A, B \leq G$, tales que $A \cup B \leq G$, entonces $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

DEMOSTRACIÓN: Si son iguales, entonces el resultado está probado. De lo contrario, sin pérdida de generalidad supongamos que $a \in A \setminus B$, demostraremos que $B \subset A$.

Sea $b \in B$, como $A \cup B$ es grupo, entonces $ab \in A \cup B$, ergo, $ab \in A$ o $ab \in B$. No obstante, $ab \notin B$ pues de lo contrario como $b^{-1} \in B$ entonces $a \in B$, lo que es absurdo. Como $ab, a^{-1} \in A$ entonces $b \in A$. □

Proposición 1.13: Si $\{H_i : i \in I\}$ es una familia de subgrupos linealmente ordenado por inclusión¹ entonces $H := \bigcup_{i \in I} H_i$ es un subgrupo, y de hecho es el mínimo subgrupo que contiene a todos los H_i .

DEMOSTRACIÓN: Sea $x, y \in H$, por definición hay un par de subgrupos H_x y H_y en la familia tales que $x \in H_x$ e $y \in H_y$. Luego como es linealmente ordenado, entonces $H_x \subseteq H_y$ o $H_y \subseteq H_x$, luego $H_z := H_x \cup H_y$ pertenece a la familia y contiene a x, y , luego $xy^{-1} \in H_z \subseteq H$, por lo que $H \leq G$ por el criterio.

La parte de ser “el mínimo que contiene a la familia” queda al lector. \square

Definición 1.14 – Potencias y generadores: Sea $x \in G$ y $n \in \mathbb{Z}$, entonces se le llama n -ésima potencia de x a:

$$x^n = \begin{cases} \underbrace{x \cdot x \cdots x}_n & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ (x^{-1})^{-n} & n < 0 \end{cases}$$

En ciertos casos, también se denota nx en lugar de x^n . En general denotaremos x^n si la operación es \cdot y nx si la operación es $+$.

Se dice que B es una base si genera a G , i.e., si $\langle B \rangle = G$. Un grupo G que posee una base finita se dice un *grupo finitamente generado*. Un grupo se dice *cíclico* si posee una base singular, cabe destacar que los grupos cíclicos son abelianos. Se define el orden de un grupo cíclico $\langle x \rangle$ como el mínimo natural n tal que $x^n = 1$, de no existir ningún natural que satisfaga dicha condición se dice de orden 0. Denotaremos $\text{ord } x$ al orden de x .

Otros textos definen el orden como el cardinal del conjunto, reflexione, por qué ambas son equivalentes para grupos cíclicos finitos. $(\mathbb{Z}, +)$ es un ejemplo de grupo cíclico de generador 1 y de orden 0, de hecho, $(\mathbb{Z}_n, +)$ también es cíclico de generador 1 y orden n . Nótese que e es el único elemento de orden 1.

Teorema (AE) 1.15: Si G tiene una base finita, entonces todo subgrupo propio está contenido en un subgrupo maximal.

¹Es decir, tal que para todo $i, j \in I$ se cumple que $H_i \subseteq H_j$ o $H_j \subseteq H_i$.

DEMOSTRACIÓN: La demostración aplica el lema de Zorn. Sea $S \leq G$ y $B := \{g_1, \dots, g_n\}$ base de G , entonces sea $S_k := \langle S, g_1, g_2, \dots, g_k \rangle$ de modo que

$$S = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots \subseteq S_n = G.$$

Elijamos S_m como el subgrupo más grande distinto de G , luego sea

$$\mathcal{F} := \{H : S_m \leq H \leq G \wedge g_{m+1} \notin H\}$$

entonces \mathcal{F} es un conjunto parcialmente ordenado por la inclusión, y toda cadena tiene supremo por la proposición anterior (1.13), luego por el lema de Zorn tiene un elemento maximal M que es subgrupo no tiene a g_{m+1} (de modo que es distinto de G), contiene a S y es trivial ver que M es un subgrupo maximal. \square

Proposición 1.16: Dado $a \in G$ y $n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$, se cumple que

$$\text{ord}(a^n) = \frac{\text{ord } a}{\text{mcd}(\text{ord } a, n)} = \frac{\text{mcm}(\text{ord } a, n)}{n}.$$

Proposición 1.17: Si $a, b \in G$ conmutan, entonces

$$\text{ord}(ab) = \text{mcm}(\text{ord } a, \text{ord } b).$$

Proposición 1.18: Si G es un grupo tal que todo elemento no neutro tiene orden 2, entonces G es abeliano.

DEMOSTRACIÓN: Sean $g, h \in G$, luego

$$gh = gh(hg \cdot hg) = hg. \quad \square$$

Definición 1.19 – Morfismos: Decimos que una aplicación $\varphi : (G, \cdot) \rightarrow (H, \star)$ entre grupos es un *morfismo* de grupos si para todo $a, b \in G$:

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \star \varphi(b)$$

A esto se le agrega el prefijo *mono-*, *epi-* e *iso-* si es inyectiva, suprayectiva y biyectiva resp. Dos grupos se dicen *isomorfos* si existe un isomorfismo entre ambos, lo que se escribe como $G \cong H$. Cuando queramos decir que un morfismo es un mono- o epimorfismo diremos que es mónico o épico resp.

Si $\varphi : G \rightarrow G$ se le añade el prefijo *endo-* y si además resulta ser

biyectiva, entonces se le añade el prefijo *auto-*. Esta nomenclatura se aplica a todos los otros morfismos en álgebra.

Visualmente denotamos los monomorfismos por \hookrightarrow , los epimorfismos por \twoheadrightarrow y los isomorfismos por \cong (algunos usan $\xrightarrow{\sim}$).

Se le llama *kernel* (*núcleo* en alemán) a la preimagen del 1:

$$\ker \varphi := \varphi^{-1}[\{1\}] = \{g \in G : \varphi(g) = 1\}.$$

Es claro que la identidad es un automorfismo, y en un grupo, la función $f(x) = x^{-1}$ lo es también. En $(\mathbb{R}, +)$ se cumple que $f(x) = kx$ con $k \neq 0$ es también un automorfismo. En $(\mathbb{Z}, +)$ la función $f(x) = 2x$ es un endomorfismo mónico pero no épico, pues 1 no tendría preimagen.

Proposición 1.20: Si $\varphi : G \rightarrow H$ es un isomorfismo, entonces:

1. G y H comparten cardinalidad.
2. φ^{-1} es también un isomorfismo.
3. Para todo $g \in G$ se cumple que $\text{ord}(\varphi(g)) = \text{ord}(g)$.
4. G es abeliano si y sólo si H lo es.

Teorema 1.21: Sea $G = \langle g \rangle$, entonces:

1. Si es finito y $|G| = m$, entonces $G = \{1, g, g^2, \dots, g^{m-1}\}$ y $g^n = e$ si y sólo si $m \mid n$.
2. Si G es infinito, entonces $(G, \cdot) \cong (\mathbb{Z}, +)$.
3. Si G es finito, entonces $G \cong \mathbb{Z}_m$.

Definición 1.22 – Clases laterales: Dados dos subconjuntos A, B de G , se define

$$AB := \{xy : x \in A, y \in B\}$$

Si alguno es el conjunto singular $A = \{a\}$, omitiremos las llaves, de modo que $aB := \{a\} \cdot B$ y $Ab := A \cdot \{b\}$.

Lema 1.23: Sea $H \leq G$ y $a, b \in G$, entonces

1. $a \in aH$.

2. $aH = bH$ o $aH \cap bH = \emptyset$.
3. $a \equiv b$ (mód H_-) dado por $a^{-1}b \in H$ y $a \equiv b$ (mód H_+) dado por $ab^{-1} \in H$ son relaciones de equivalencia.
4. $|aH| = |bH| = |Hb| = |Ha|$.

DEMOSTRACIÓN: Probaremos la segunda, esto es que si no son disjuntos entonces son iguales. Sea $c \in aH \cap bH$, por definición, $c = ax = by$ con $x, y \in H$, luego $b = a(xy^{-1})$ donde $xy^{-1} \in H$ por el criterio de subgrupo. \square

Denotaremos G/H_- al conjunto cociente de G bajo la relación de equivalencia que es la congruencia módulo H_- . Denotamos $[G : H]$ al cardinal de G/H_- o de G/H_+ (que son iguales). Notemos que bajo estas definiciones, la notación \mathbb{Z}_n tiene sentido.

Teorema 1.24 – Teorema de Lagrange: Sea $H \leq G$ con G finito, entonces

$$|H| [G : H] = |G|.$$

En base al teorema de Lagrange, llamamos *índice* de un subgrupo H al valor de $[G : H]$.

Corolario 1.25: El orden de todo elemento de un grupo finito es un divisor de su cardinal.

Corolario 1.26: Todo grupo de cardinal p primo es cíclico y, en consecuencia, isomorfo a \mathbb{Z}_p .

Definición 1.27: Denotamos por \mathbb{Z}_n^\times (léase “grupo multiplicativo” o “unidades de n ”) al conjunto de todos los elementos coprimos a n de \mathbb{Z}_n . Queda al lector demostrar que $(\mathbb{Z}_n^\times, \cdot)$ es un grupo abeliano de neutro 1.

Llamamos $\phi : \mathbb{N}_{\geq 2} \rightarrow \mathbb{N}$ a la función ϕ o indicatriz de Euler que mide el cardinal del grupo multiplicativo de m , es decir:

$$\phi(n) := |\mathbb{Z}_n^\times|$$

Teorema 1.28 (Euler-Fermat): Si a coprimo a n , entonces

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Corolario 1.29 (Pequeño teorema de Fermat): Sea $a \in \mathbb{Z}_p$ no nulo, entonces

$$a^{p-1} \equiv 1, \quad a^p \equiv a \quad (\text{mód } p).$$

Teorema 1.30 – Teorema chino del resto: Si $(n; m) = 1$, entonces

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm},$$

donde un isomorfismo f es de la siguiente forma: dados p, q tales que $pn + qm = 1$, entonces

$$f(x, y) := ypn + xqm.$$

DEMOSTRACIÓN: Probemos que la función propuesta es, en efecto, un isomorfismo. La construcción utiliza la identidad de Bézout que requiere que los valores sean coprimos, veamos que f está bien definida: si $x' = x + an$ e $y' = y + bm$, entonces

$$\begin{aligned} f(x', y') &= (y + bm)pn + (x + an)qm \\ &= ypn + xqm + nm(aq + bp) \equiv f(x, y) \quad (\text{mód } nm). \end{aligned}$$

Ahora veamos que f es inyectiva: Si

$$\begin{aligned} f(a, b) &\equiv f(c, d) \\ aqm + bpn &\equiv cqm + dpn \\ (a - c)qm &\equiv np(d - b) \quad (\text{mód } nm). \end{aligned}$$

Osea $(a - c)qm = np(d - b) + snm = n(p(d - b) + sm)$, luego $n \mid (a - c)qm$, pero $(n; qm) = 1$, luego por lema de Euclides, $n \mid a - c$ lo que equivale a que $a \equiv c \pmod{n}$. Es análogo que $b \equiv d \pmod{m}$, que es lo que se quería probar.

Como f es inyectiva entre dos conjuntos finitos equipotentes, entonces es biyectiva, luego es isomorfismo. \square

Corolario 1.31: Si $(n; m) = 1$, entonces

$$\mathbb{Z}_n^\times \times \mathbb{Z}_m^\times \cong \mathbb{Z}_{nm}^\times,$$

en particular $\phi(n)\phi(m) = \phi(nm)$.

Proposición 1.32: Si p primo entonces $\phi(p^k) = p^{k-1}(p-1) = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.
Luego, si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$, entonces

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

1.2. Ejemplos de grupos

§1.2.1 Grupos simétrico y alternante. Dados nuestros conocimientos en teoría de conjuntos debería de ser fácil probar que $(\text{Func}(S), \circ)$ es siempre un monoide y para que cumpla ser un grupo debemos considerar el subgrupo de los elementos invertibles, es decir, el conjunto de las permutaciones de S , el cual denotamos por $\text{Sym}(S)$.

Es fácil probar que $\text{Sym}(S) \cong \text{Sym}(T)$ si y sólo si $|S| = |T|$, así que como representante general denotaremos S_n al grupo simétrico sobre $\{1, 2, \dots, n\}$.

Proposición 1.33: Se cumple:

1. $|S_n| = n!$
2. S_n no es abeliano con $n \geq 3$.
3. $S_i \leq S_j$ para todo $i < j$.

Teorema 1.34 – Teorema de Cayley: Para todo grupo finito G de cardinal n se cumple que

$$G \cong H \leq S_n.$$

DEMOSTRACIÓN: Vamos a definir $\varphi_a : G \rightarrow G$ como $f_a(x) = xa$. Sigue que

$$(f_a \circ f_b)(x) = f_b(f_a(x)) = f_b(xa) = (xa)b = x(ab) = f_{ab}(x).$$

Es decir, que $f_{ab} = f_a \circ f_b$. Nótese que las aplicaciones f_a son biyectivas pues admiten inversa f_a^{-1} . Finalmente $\varphi(a) = f_a$ es un monomorfismo cuya imagen forma un subgrupo de S_n , que es lo que se quería probar. \square

La importancia del teorema de Cayley, también y apropiadamente llamado teorema de representación de grupos finitos, es que nos permite describir a los grupos finitos en término de los grupos simétricos, destacando la importancia de éstos últimos.

Definición 1.35 (Órbitas y ciclos): Dado $\sigma \in \text{Sym}(S)$ y $a \in S$, diremos que la órbita de a es la tupla ordenada

$$(a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots)$$

En particular, como $\text{Sym}(S)$ es siempre de cardinal finito, entonces toda permutación es de orden finito, por ende, todas las órbitas lo son. Diremos que una órbita es trivial si posee un único elemento. Los elementos de órbitas triviales se llaman *puntos fijos*.

Diremos que una permutación es un *ciclo* si todas sus órbitas son triviales excepto una. En cuyo caso, denotaremos a la permutación mediante su órbita no-trivial, por ejemplo, la permutación

$$\{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 4), (5, 2), (6, 6)\} \in \text{Sym}(6)$$

se denotará como $(2, 3, 5)$, $(3, 5, 2)$ o $(5, 2, 3)$. **Ojo:** los ciclos están ordenados, no es lo mismo $(2, 3, 5)$ que $(5, 3, 2)$. Los ciclos de orden 2 se denominarán *trasposiciones*.

Dos ciclos se dicen *disjuntos* si sus órbitas no-triviales lo son.

Teorema 1.36: Se cumplen:

1. El orden de los ciclos es el cardinal de su órbita no trivial.
2. La inversa de un ciclo $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$ es $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1)$.
3. Dos ciclos disjuntos conmutan.
4. Toda permutación de S_n excepto Id, puede escribirse como el producto de ciclos disjuntos dos a dos.
5. El orden de un producto de ciclos disjuntos dos a dos es el mínimo común múltiplo de todos sus ordenes.
6. Las trasposiciones forman una base para S_n .
7. Si $\sigma \in S_n$ y (a_1, \dots, a_n) es un ciclo, entonces

$$\sigma^{-1}(a_1, \dots, a_n)\sigma = (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)).$$

DEMOSTRACIÓN: 4. Dada una permutación de S_n distinta de la identidad, luego posee alguna órbita no trivial. Finalmente se deduce que se puede escribir como la composición de todos los ciclos derivados de sus órbitas no triviales, los cuales son disjuntos dos a dos.

5. Queda al lector.
6. Por la 4, basta probar que todo ciclo está generado por trasposiciones, lo que se hace notando que

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2)(a_1, a_3) \cdots (a_1, a_n). \quad \square$$

Signo de una permutación.

Lema 1.37: Si $\sigma \in S_n$ cumple que

$$\sigma = \prod_{i=1}^n \tau_{1,i} = \prod_{i=1}^m \tau_{2,i}$$

donde $\tau_{j,i}$ es una trasposición, entonces $n \equiv m \pmod{2}$.

DEMOSTRACIÓN: En dicha situación podemos mover todo de un lado al otro y escribir:

$$1 = \left(\prod_{i=1}^n \tau_{1,i} \right) \left(\prod_{i=1}^m \tau_{2,(m-i+1)}^{-1} \right) = \tau_{1,1} \tau_{1,2} \cdots \tau_{1,n} \tau_{2,m}^{-1} \tau_{2,m-1}^{-1} \cdots \tau_{2,1}^{-1}.$$

Por ende, se reduce a probar que el producto de impares trasposiciones nunca es 1.

Supongamos que 1 puede ser el producto de un número impar de trasposiciones, entonces sea n el mínimo impar que lo cumpla. Es claro que n no puede ser 1, luego sea $(\tau_i)_{i=1}^n$ una sucesión de trasposiciones cuyo producto es 1, luego sean $(a_i, b_i) := \tau_i$ donde $a_i < b_i$ para que esté bien definido. Notemos que la primera trasposición mueve a a_1 a b_1 , así que alguna otra debe mover a b_1 , es decir, $b_1 = a_i$ o b_i para algún $i > 1$. Así usaremos que

$$(a, b)(c, d) = (c, d)(a, b), \quad (a, b)(b, c) = (b, c)(a, b)$$

Para mover ese a_i o b_i a la segunda trasposición, y de paso, renombraremos $a_2 := b_1$ y b_2 como aquél que le acompañaba. Ahora tenemos que

$$1 = (a_1, b_1)(b_1, b_2) \tau_3 \cdots \tau_n.$$

- a) Caso 1 ($b_2 = a_1$): En este caso $\tau_1 = \tau_2$ y luego se cancelan pues las trasposiciones son de orden dos, luego 1 se escribe con $n - 2$ trasposiciones con $n - 2$ impar, lo que contradice la minimalidad de n .

- b) Caso 2 ($b_2 \neq a_1$): Aquí utilizamos una de las propiedades señaladas para ver que

$$1 = (b_1, b_2)(a_1, b_2)\tau_3 \cdots \tau_n$$

luego iteramos el paso anterior y reordenamos de forma que $\tau_3 = (b_2, b_3)$. Como el producto es la identidad, podemos reordenar e iterar el proceso varias veces pero llega un punto en el que $b_i = a_1$ en cuyo caso las dos trasposiciones se cancelaran y contradicen la minimalidad de n . \square

Definición 1.38 (Signo de una permutación): Si una permutación σ se puede escribir como un producto de n trasposiciones, entonces $\text{sgn } \sigma := (-1)^n$. Las permutaciones de signo 1 se dicen *pares* y el resto *impares*.

Notemos que la identidad es par, y las trasposiciones impares. Un ciclo de longitud n es de paridad $(-1)^{n+1}$.

Proposición 1.39: Se cumple que $\text{sgn} : S_n \rightarrow (\{\pm 1\}, \cdot)$ es un homomorfismo, es decir, $\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn } \sigma \cdot \text{sgn } \tau$.

Corolario 1.40: El signo se conserva entre inversas y conjugados.

Como vimos, el signo es un morfismo de grupos, esto es importante porque significa que el kernel del signo, es decir el conjunto de permutaciones pares, es un subgrupo normal del simétrico. Luego denotamos

$$A_n := \{\sigma \in S_n : \text{sgn } \sigma = 1\}.$$

Proposición 1.41: Se cumple:

1. Para $n > 2$, se cumple que $|A_n| = \frac{n!}{2}$.
2. $A_i \leq A_j$ para todo $2 < i < j$.
3. A_4 es no abeliano y en consecuencia todo A_n con $n \geq 4$ lo es.

§1.2.2 Grupo diedral. Consideremos un polígono de n lados (o n -gono) regular y enumeremos sus vértices. Pongamos reglas: claramente no admitimos la posibilidad de deformar el polígono, de manera que, por ejemplo, el vértice 2 siempre está entre el vértice 1 y el vértice 3. Los vértices se “leen” en sentido horario y siempre hay un vértice líder o principal por el cuál se comienzan a enumerar el resto. Así, llamamos grupo diedral al conjunto de

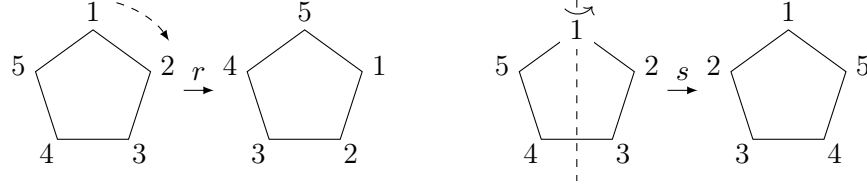


Figura 1.1. Ejemplo con un pentágono.

todas las isometrías posibles en el polígono, en particular, como indicamos que lo que nos interesa es el ordenamiento de los vértices, entonces traslaciones no afectan a la figura, sino que sólo lo hacen las rotaciones y las reflexiones:

En esencia esto representa a un grupo, sin embargo, hay que formalizar esta idea, y para ello, definiremos:

Definición 1.42 – Grupo diedral o diédrico: Fijado un $n > 2$, se definen $r := (1, 2, \dots, n)$ [una rotación] y

$$s = \begin{cases} (2, n)(3, n-1) \cdots (k, k+1) & n = 2k+1 \\ (2, n)(3, n-1) \cdots (k-1, k+1) & n = 2k \end{cases}$$

[una reflexión en torno al 1]. Luego $D_{2n} := \langle r, s \rangle$ es el grupo diedral.

Proposición 1.43: Para todo grupo diedral se cumple:

1. En D_{2n} se cumple que $\text{ord } r = n$ y $\text{ord } s = 2$.
2. $rs = sr^{-1}$ y más generalmente $r^k s = sr^{-k}$. Esto equivale a que $srs^{-1} = r^{-1}$ y que $\text{ord}(r^k s) = 2$.
3. El grupo no es abeliano, por ende tampoco es cíclico.
4. $|D_{2n}| = 2n$.

1.3. Representaciones de grupos finitos

Hemos visto ya que todo grupo finito de cardinal primo es isomorfo a un grupo cíclico \mathbb{Z}_p , entonces nos interesa ver si podemos usar otros grupos conocidos, como el simétrico y el diedral, para poder representar ciertos grupos finitos.

Definición 1.44 – Conjugado, subgrupo normal, centro: Dos elementos de un grupo $a, b \in G$ se dicen *conjugados* si existe $c \in G$ tal que $c^{-1}ac = b$ (y por ende, con $d := c^{-1}$ se cumple $d^{-1}bd = a$).

Se dice que un subgrupo $N \leq G$ es *normal* syss, para todo $x \in G$ se cumple que $xN = Nx$, en cuyo caso denotaremos $N \trianglelefteq G$. Esto es equivalente a decir que todos los conjugados de N pertenecen a N , i.e., para todo $x \in G$ se cumple $x^{-1}Nx = N$.

Se le llama *centralizador* $Z(S)$ de S al conjunto de todos los elementos que conmutan con todos los elementos de S , i.e.

$$Z(S) := \{x \in G : \forall g \in S (xg = gx)\},$$

al centralizador de todo G , se le dice el *centro*. Llamamos *normalizador* $N_G(S)$ de un conjunto S a los elementos que fijan al conjunto bajo conjugación, i.e.,

$$N_G(S) := \{x \in G : x^{-1}Sx = S\}.$$

Llamamos clase de conjugación $C_G(S)$ de S al conjunto de todos los conjugados de S .

Proposición 1.45: Todo subgrupo de índice dos es normal.

Proposición 1.46: Se cumple:

1. $N \trianglelefteq G$ syss $N_G(N) = G$ syss $C_G(N) = \{N\}$.
2. Si $S, T \subseteq G$, entonces $Z(S \cup T) = Z(S) \cap Z(T)$, en particular,

$$Z(S) = \bigcap_{g \in S} Z(g).$$

3. $H \leq G$ es abeliano syss $H \subseteq Z(H)$. Esto aplica también para G mismo.
4. $Z(g) = N(g)$.
5. Si $S \subseteq G$ entonces $Z(S) \leq N_G(S) \leq G$.
6. Si $H \leq G$ entonces $H \trianglelefteq N_G(H) \leq G$.
7. $N \leq Z(G)$ implica $N \trianglelefteq G$, en particular, $Z(G) \trianglelefteq G$.

8. $C_G(x) = \{x\}$ syss $x \in Z(G)$. Más generalmente $C_G(S) = \{S\}$ syss $S \subseteq Z(G)$.

Proposición 1.47: Se cumple:

1. Para todo $S \subseteq G$ se cumple que $|C_G(S)| = [G : N_G(S)]$.
2. El conjugado de la inversa es la inversa del conjugado. Más generalmente las potencias del conjugado son el conjugado de la potencia.
3. El orden se preserva bajo conjugados.

DEMOSTRACIÓN: 1. Veamos que $x \equiv y \pmod{Z(g)}$ implica $x^{-1}y \in Z(g)$, ergo

$$(x^{-1}y)g = g(x^{-1}y) \iff xgx^{-1} = ygy^{-1}.$$

Esto se traduce a decir que las clases de equivalencia determinadas por $Z(g)$ se componen de los elementos que generan el mismo conjugado. Es claro que todo conjugado puede escribirse como $x^{-1}gx$, y lo anterior prueba que se determinásemos una aplicación entre ambos conjuntos esta sería inyectiva y suprayectiva, i.e., biyectiva, luego los conjuntos son equipotentes.

2. Sea $a \in G$ y $c \in G$ arbitrario, de forma que $b := c^{-1}ac$, luego por la propiedad anterior se cumple que $b^k = c^{-1}a^k c$, por lo que si $n := \text{ord } a$, entonces $b^n = c^{-1}a^n c = c^{-1}ec = e$. Por lo que $\text{ord } b \leq \text{ord } a$. Pero notemos que $a = (c^{-1})^{-1}bc^{-1}$, por lo que $\text{ord } a \leq \text{ord } b$. En conclusión, $\text{ord } a = \text{ord } b$. \square

Proposición 1.48: Para $n \geq 3$ se cumple que $Z(S_n) = \langle 1 \rangle$ y que $Z(D_{2n}) = \langle 1 \rangle$ si n impar, y $Z(D_{2n}) = \langle r^{n/2} \rangle$ si n par.

DEMOSTRACIÓN: El centro de los grupos diedrales queda al lector. Sea $\sigma \in S_n$ no unitario, luego existe un par $i \neq j$ tales que $\sigma(i) = j$. Como $n \geq 3$ existe un k distinto de ambos, luego $(j, k)\sigma \neq \sigma(j, k)$, pues basta considerar la imagen de i en cada caso. \square

§1.3.1 Teoremas de isomorfismos y categorías. Éstos teoremas son herramientas casi-universales en el álgebra. Realizaremos la demostración en el contexto de teoría de grupos, pero no la repetiremos en el contexto de anillos ni módulos, pues son análogas.

Definición 1.49 (Sucesión exacta): Si se tiene una sucesión de morfismos:

$$\cdots \longrightarrow G_i \xrightarrow{\varphi_i} G_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} G_{i+2} \longrightarrow \cdots$$

es *exacta* si $\text{Im} \varphi_i = \ker \varphi_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ (para el cuál estén definidos). Una sucesión exacta se dice *corta* si es finita.

Proposición 1.50: Se cumple:

1. Si $H \trianglelefteq G$, entonces

$$H \xhookrightarrow{\iota} G \twoheadrightarrow^{\pi} G/H$$

es una sucesión exacta corta.

2. $f : G \rightarrow H$ es inyectiva syss $0 \longrightarrow G \xrightarrow{f} H$ es exacta
3. $f : G \rightarrow H$ es suprayectiva syss $G \xrightarrow{f} H \longrightarrow 0$ es exacta
4. Dados $f : H \rightarrow G$ y $g : G \rightarrow J$ morfismos de grupos, se cumple que

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} J \longrightarrow 0$$

es exacta syss existe $N \trianglelefteq G$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{f} & G & \xrightarrow{g} & J \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & N & \xhookrightarrow{\iota} & G & \twoheadrightarrow^{\pi} & G/N \longrightarrow 0 \end{array}$$

conmuta.

Teorema 1.51 – Primer teorema de isomorfismos: Sea $\varphi : G \rightarrow H$ un morfismo de grupos con $N := \ker \varphi \trianglelefteq G$, entonces $\bar{\varphi} : G/N \rightarrow \text{Im} \varphi$ dado por $\bar{\varphi}(x) := \varphi(xN)$ resulta ser un isomorfismo.

En figura de diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\varphi} & H \\
 \pi \downarrow & & \uparrow \iota \\
 G/\ker \varphi & \xrightarrow[\tilde{\varphi}]{} & \text{Img } \varphi
 \end{array}$$

Corolario 1.52: Si $\varphi : G \rightarrow H$ es epimorfismo, entonces $G/\ker \varphi \cong H$.

Teorema 1.53 – Segundo teorema de isomorfismos: Sean $H \leq G$ y $K \leq G$, entonces $H \cap K \leq H$ y de hecho

$$\frac{HK}{K} \cong \frac{H}{H \cap K}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\varphi : H \rightarrow HK/K$ definida por $\varphi(h) := hK$ es un epimorfismo de grupos pues $hkK \in HK/K$, pero $hkK = hK = \varphi(h)$.

Luego, busquemos el kernel de φ . Notemos que $1 \in \ker \varphi$ y $\varphi(1) = K$, asimismo, para todo $k \in K$ se cumple que $\varphi(k) = K$, luego $H \cap K \subseteq \ker \varphi$ y ya hemos visto que la otra implicancia también se da, luego por el primer teorema de isomorfismos se cumple el enunciado. \square

Teorema 1.54 – Tercer teorema de isomorfismos: Sean $K \leq H \leq G$ y $K \leq G$, entonces

$$\frac{G}{H} \cong \frac{G/K}{H/K}.$$

DEMOSTRACIÓN: Al igual que con la demostración del segundo teorema, vamos a tratar de aplicar el primer teorema:

Los elementos de $(G/K)/(H/K)$ son de la forma $gK(H/K)$, luego $\varphi : G \rightarrow (G/K)/(H/K)$ dado por $\varphi(g) := (gK)(H/K)$ es un epimorfismo de grupos, donde el $x \in G$ pertenece al kernel si y sólo si $gK \in H/K$, i.e, $g \in H$. \square

Si bien el segundo teorema de isomorfismos no se aplica en casos más generales, la relación entre cardinales si es generalizable:

Teorema 1.55: Sean, $H, K \leq G$ finito, entonces

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : H \times K \rightarrow HK$ dada por $f(h, k) = hk$. Claramente f es suprayectiva. Sean $(h_1, k_1); (h_2, k_2) \in H \times K$, luego $f(h_1, k_1) = f(h_2, k_2)$ implica que $u := k_1 k_2^{-1} = h_1^{-1} h_2 \in H \cap K$. Luego es trivial probar que $hk = h'k'$ syss existe $u \in H \cap K$ tal que $h' = hu$ y $k' = u^{-1}k$. Con lo que $|f^{-1}[hk]| = |(hu, u^{-1}k) : u \in H \cap K| = |H \cap K|$.

Luego se cumple que

$$H \times K = \bigcup_{x \in HK} f^{-1}[x] \implies |H| |K| = |HK| |H \cap K|.$$

□

Proposición 1.56: Si $H_1 \trianglelefteq G_1$ y $H_2 \trianglelefteq G_2$, entonces

$$\frac{G_1 \times G_2}{H_1 \times H_2} \cong \frac{G_1}{H_1} \times \frac{G_2}{H_2}.$$

DEMOSTRACIÓN: Se comienzan por definir los siguientes epimorfismos en base al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_1 & & \\ & \searrow & & \searrow & \\ G_1 \times G_2 & \twoheadrightarrow & G_1 & \twoheadrightarrow & \frac{G_1}{H_1} \end{array}$$

y análogamente con $\pi_2 : G_1 \times G_2 \rightarrow G_2/H_2$. Luego $\pi := (\pi_1, \pi_2)$ es un epimorfismo de kernel $H_1 \times H_2$ que por el primer teorema de isomorfismos prueba el enunciado. □

Teorema 1.57 – Cuarto teorema de isomorfismos: Si $\varphi : G \twoheadrightarrow H$, entonces

$$\begin{aligned} \Phi : \{S : S \leq H\} &\longrightarrow \{S : \ker \varphi \leq S \leq G\} \\ S &\longmapsto \varphi^{-1}[S] \end{aligned}$$

cumple las siguientes propiedades, para S_1, S_2 subgrupos de H :

1. Φ es biyectiva.
2. $S_1 \subseteq S_2$ implica $\Phi(S_1) \subseteq \Phi(S_2)$.
3. $S_1 \trianglelefteq S_2$ implica $\Phi(S_1) \trianglelefteq \Phi(S_2)$.

4. Si $S_1 \leq S_2$, entonces $[S_2 : S_1] = [\Phi(S_2) : \Phi(S_1)]$.

DEMOSTRACIÓN: 1. (i) **Φ es inyectiva:** Sean $S_1 \neq S_2$ subgrupos de H . Entonces si $x \in S_2 \setminus S_1$, e y es tal que $\varphi(y) = x$, de modo que $y \in \Phi(S_2)$, e $y \notin \Phi(S_1)$ pues si $y \in \Phi(S_1) = \varphi^{-1}[S_1]$, entonces $\varphi(y) \in S_1$, lo que es absurdo.

(ii) **Φ es suprayectiva:** Sea S tal que $\ker \varphi \leq S \leq G$. Luego $L := \varphi[S] \leq H$, y $\Phi(L) \supseteq S$. Más aún, si $x \in \Phi(L)$, entonces $y = \varphi(x)$ con $y \in L$, ergo existe $z \in S$ tal que $y = \varphi(z)$. Luego

$$1 = yy^{-1} = \varphi(xz^{-1}) \implies xz^{-1} \in \ker \varphi \subseteq S.$$

Finalmente, como S es subgrupo, se tiene que $(xz^{-1}) \cdot z = x \in S$, i.e., $\Phi(L) \subseteq S$ y se cumple la igualdad.

2. Ésto es trivial pues en general, si $A \subseteq B$, entonces $f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[B]$.
3. Sea $g \in \Phi(S_1)$ y $h \in \Phi(S_2)$, entonces por definición entonces $\varphi(h^{-1}gh) = \varphi(h)^{-1}\varphi(g)\varphi(h)$, pero $\varphi(h) \in S_2$ y $\varphi(g) \in S_1$, y como $S_1 \trianglelefteq S_2$, entonces $\varphi(h^{-1}gh) \in S_1$, luego $h^{-1}gh \in \Phi(S_1)$.
4. Sean $S_1 \leq S_2$, entonces tenemos $n_G := [S_2 : S_1]$ y $n_H := [\Phi(S_2) : \Phi(S_1)]$. Sea $g \in \Phi(S_2)$, luego $g \in h\Phi(S_1)$ con $h \in \Phi(S_2)$. Luego $\varphi(g) \in \varphi[h\Phi(S_1)] = \varphi(h) \cdot \varphi[\Phi(S_1)] = \varphi(h)S_1$, en conclusión, $n_H \leq n_G$. Como Φ es biyectiva, podemos usar Φ^{-1} para probar el converso. \square

§1.3.2 Productos directos y semidirectos de grupos.

Teorema 1.58: Sean $H, K \leq G$, entonces:

1. $HK \leq G$ syss $HK = KH$.
2. $H \trianglelefteq G$ o $K \trianglelefteq G$ implica $HK \leq G$.
3. $H \trianglelefteq G$ y $K \trianglelefteq G$ implica $HK \trianglelefteq G$.

DEMOSTRACIÓN: 1. \implies . Sea $hk \in HK$, como $H, K, HK \leq G$; entonces $h^{-1} \in H, k^{-1} \in G$ y $(h^{-1}k^{-1})^{-1} = kh \in HK$, luego $KH \subseteq HK$. Análogamente se prueba la otra implicancia y por doble contención los conjuntos son iguales.

\Leftarrow . Sean $x, y \in HK$ por ende existen $h_1, h_2 \in H$ y $k_1, k_2 \in K$ tales que $x = h_1k_1$ e $y = h_2k_2$. Luego $xy^{-1} = h_1(k_1k_2^{-1})h_2^{-1}$. Se cumple que

$(k_1 k_2^{-1})h_2 \in KH = HK$, por ende $(k_1 k_2^{-1})h_2 = h_3 k_3$, finalmente como $H \leq G$ entonces $h_1 h_3 \in H$ y $xy^{-1} = h_1(k_1 k_2^{-1})h_2 = h_1 h_3 k_3 \in HK$ que es el criterio del subgrupo.

2. Sin pérdida de generalidad supongamos que $H \trianglelefteq G$, entonces $kh = khk^{-1}k = h'k$ con $h' \in H$ por ser conjugado de un elemento de H , luego $KH = HK$.
3. Por el inciso anterior se cumple que $HK \leq G$ y para todo $x \in G$ se cumple que $x^{-1}h k x = (x^{-1}h x)(x^{-1}k x)$. \square

Ejemplo. Consideremos D_6 , aquí $\langle s \rangle$ y $\langle rs \rangle$ son subgrupos (ambos de cardinal 2), de modo que

$$S := \langle s \rangle \cdot \langle rs \rangle = \{e, s, rs, srs = r^2\}.$$

Pero S tiene cardinal 4, luego no puede ser subgrupo pues $4 \nmid 6$ (por teorema de Lagrange).

Definición 1.59 (Conmutador): Definamos el conmutador $[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy$, que satisface que $xy = yx[x, y]$, luego $xy = yx$ si y sólo si $[x, y] = 1$.

Teorema 1.60: Si $N, M \trianglelefteq G$ tales que $N \cap M = \{1\}$, entonces $nm = mn$ con $n \in N$ y $m \in M$.

DEMOSTRACIÓN: Notemos que $[n, m] = (n^{-1}m^{-1}n)m = n^{-1}(m^{-1}nm)$, donde $n^{-1}mn \in M$ y $m^{-1}nm \in N$ por ser normales. Como $[n, m] \in N \cap M = \{1\}$, entonces $[n, m] = 1$, luego conmutan. \square

Definición 1.61 – Producto directo de grupos: Sean $(G, \cdot), (H, *)$ grupos, entonces se define su *producto directo*, denotado $(G \times H, \star)$, al grupo con la operación tal que

$$(a, b) \star (c, d) = (a \cdot c, b * d).$$

Teorema 1.62: Sean $H, K \leq G$ tales que:

1. $HK = G$.
2. $H \cap K = \{1\}$.
3. $hk = kh$ para todos $h \in H, k \in K$.

Entonces $\varphi : H \times K \rightarrow G$ dado por $\varphi(h, k) := hk$ es un isomorfismo.

Proposición 1.63: El producto directo de dos grupos abelianos es abeliano.

Teorema 1.64 – Teorema fundamental de los grupos abelianos: Si G es abeliano finitamente generado, entonces existen primos p_1, \dots, p_n (posiblemente iguales) y naturales no nulos $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta$ tales que

$$G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n^{\alpha_n}} \times \mathbb{Z}^\beta.$$

En particular, se cumple para grupos abelianos finitos.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\langle g_1, \dots, g_k \rangle$ una base de G , de modo que se comprueba que los subgrupos $N_i := \langle g_i \rangle$ son disjuntos dos a dos, y son normales pues G es abeliano. Luego $G \cong N_1 \times N_k$, pero como N_i es cíclico, entonces $N_i \cong \mathbb{Z}$ o $N_i \cong \mathbb{Z}_m$. Podemos agrupar todos los \mathbb{Z} s que encontremos, y si $N_i \cong \mathbb{Z}_m$ entonces $m = q_1^{\gamma_1} \cdots q_j^{\gamma_j}$ donde los q_i s son primos distintos y los γ_i s son naturales no nulos, luego por teorema chino del resto:

$$\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{q_1^{\gamma_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{q_j^{\gamma_j}}$$

Finalmente agrupando todo nos da el enunciado. \square

Corolario 1.65: Todo grupo abeliano posee subgrupos de todos los divisores de su cardinal.

Veamos dos aplicaciones de ésto:

Proposición 1.66: Todo grupo de cardinal 4 es \mathbb{Z}_4 o $K_4 := \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. A K_4 se conoce como el “grupo de Klein”.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema de Lagrange para cada elemento no neutro existen dos posibilidades: Que tenga orden 2 o 4. Si alguno tiene orden 4, entonces el grupo es cíclico y es \mathbb{Z}_4 . Si todos tienen orden 2, entonces el grupo es abeliano (por la proposición 1.18) y por ende se escribe como producto de grupos cíclicos y luego es fácil ver que es K_4 . \square

Proposición 1.67: Todo grupo de cardinal 6 es \mathbb{Z}_6 (si es abeliano) o D_6 (si no lo es). En consecuencia, $S_3 \cong D_6$.

DEMOSTRACIÓN: Nuevamente por Lagrange cada elemento puede tener orden 1, 2, 3 o 6. Si es abeliano luego es $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ o \mathbb{Z}_6 , pero por el teorema chino del resto $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$.

Si no es abeliano, entonces debe poseer elementos de orden 1, 2 o 3; pero no todos deben ser de orden 2, pues sería abeliano, así que existe $y \in G$ de orden 3, de modo que $\langle y \rangle$ tiene índice 2, luego es normal y sus clases laterales son $\langle y \rangle$ y $x\langle y \rangle$ donde x tiene orden 2. Notemos que luego todo elemento de G se ve como $x^p y^q$ donde $p, q \in \mathbb{Z}$, pero como no es abeliano entonces $xy \neq yx$, ergo, $xy = y^2x$ y $xyx = y^{-1}$. Pero entonces $\varphi : G \rightarrow D_6$ dado por $\varphi(x) = s$ y $\varphi(y) = r$ demuestra ser isomorfismo. \square

Lema 1.68: Si N, A son grupos y $\alpha : A \rightarrow \text{Aut}(N)$ es un morfismo de grupos, entonces $G := N \times A$ con la operación \cdot definida por

$$(n, a) \cdot (m, b) := (n \cdot \alpha_a(m), ab)$$

es un grupo.

DEMOSTRACIÓN: Veamos que se cumplen las propiedades:

(I) **Asociatividad:** Sean $(n, a), (m, b), (p, c) \in G$, entonces

$$\begin{aligned} [(n, a)(m, b)](p, c) &= (n\alpha_a(m), ab)(p, c) = (n\alpha_a(m)\alpha_{ab}(p), abc) \\ &= (n\alpha_a(m\alpha_b(p)), a(bc)) = (n, a)(m\alpha_b(p), bc) \\ &= (n, a)[(m, b)(p, c)]. \end{aligned}$$

(II) **Neutro:** Probablemente lo es $(1, 1)$, probemoslo:

$$(n, a)(1, 1) = (n\alpha_a(1), a) = (n, a) = (1\alpha_1(n), a) = (1, 1)(n, a).$$

(III) **Inverso:** Sea $(n, a) \in G$, y definamos $b := a^{-1}$, luego un inverso debe ser (m, b) con algún m . Notemos $(n, a)(m, b) = (n\alpha_a(m), 1) = (1, 1)$, luego $\alpha_a(m) = n^{-1}$ por lo que

$$m = \alpha_a^{-1}(n^{-1}) = \alpha_b(n^{-1}).$$

Finalmente, $(m, b)(n, a) = (m\alpha_b(n), 1) = (\alpha_b(n^{-1}n), 1) = (1, 1)$. \square

Definición 1.69 – Producto semidirecto: Sean N, A como en el lema anterior, llamamos al grupo generado el *semiproducto* de N, A y le denotamos por $N \rtimes_{\alpha} A$.

Proposición 1.70: Si N, A son grupos y α es el morfismo trivial, es decir, $\alpha_a = \text{Id}$ para todo $a \in A$, entonces $N \rtimes_{\alpha} A = N \times A$ [es decir, el producto directo es un caso particular del producto semidirecto].

Proposición 1.71: Sea $n > 2$, entonces $\alpha : \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_n$, donde $\alpha_0 = \text{Id}$ y $\alpha_1(x) = -x$. Entonces $\mathbb{Z}_n \rtimes_{\alpha} \mathbb{F}_2 \cong D_{2n}$.

DEMOSTRACIÓN: Definamos $r := (1, 0)$ y $s := (0, 1)$, entonces se cumple que

$$r^2 = (1, 0)(1, 0) = (1 + \alpha_0(1), 0) = (2, 0)$$

y así por inducción se deduce que $r^k = (k \bmod n, 0)$, de modo que $\text{ord } r = n$. Y $s^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 + \alpha_1(0), 1 + 1) = (0, 0)$, por lo que $\text{ord } s = 2$. Finalmente, veamos que

$$\begin{aligned} srs &= (0, 1)(1, 0)(0, 1) = (0 + \alpha_1(1), 1)(0, 1) = (-1, 1)(0, 1) \\ &= (-1 + \alpha_1(0), 0) = (-1, 0) = r^{-1}. \end{aligned} \quad \square$$

En consecuencia, podemos notar que el producto semidirecto de grupos abelianos puede ser no-abeliano.

Proposición 1.72: Si $G = N \rtimes_{\alpha} A$, entonces

- $N_G := N \times \{1\} \trianglelefteq G$.
- $A_G := \{1\} \times A \leq G$.
- $N_G \cap A_G = \{1\}$.
- $N_G \cdot A_G = G$.
- Para todo $a \in A, n \in N$ se cumple que $(1, a)^{-1}(n, 1)(1, a) =$

§1.3.3 Acciones, ecuación de clases y p -grupos.

Definición 1.73 – Acción: Una acción de un grupo G sobre un conjunto S no vacío arbitrario es un morfismo $\alpha : G \rightarrow \text{Sym}(S)$. Es decir

α_g con $g \in G$ es una permutación de S , y cumplen que

$$\alpha_{xy} = \alpha_x \circ \alpha_y,$$

de ésto se deduce que $\alpha_1 = \text{Id}_S$. Podemos definir que $\ker \alpha := \{g \in G : \alpha_g = \text{Id}_S\}$.

Diremos que una acción es *fiel* si α es inyectiva, lo que equivale a ver que $\ker \alpha = \{1\}$.

Dada una acción α de G sobre S , entonces definimos los siguientes conjuntos:

$$\text{Orb}_a := \{\alpha_g(a) : g \in G\}, \quad \text{Stab}_a := \{g \in G : \alpha_g(a) = a\}$$

a los que llamamos órbita y estabilizador de a resp.

Decimos que una acción es *transitiva* si para todo $a \in S$ se cumple que $\text{Orb}_a = S$.

Ejemplos. Son acciones:

- El morfismo $\alpha : G \rightarrow \text{Sym}(S)$ con $\alpha_g = \text{Id}$, llamada la *acción trivial*, nótese que no es fiel y que las órbitas de cada elemento son singulares.
- El morfismo $\alpha : G \rightarrow \text{Sym}(G)$ dado por $\alpha_g(x) = xg$, llamada la *acción producto*. Ésta es fiel y transitiva; y de hecho ésta es la que se emplea para probar el teorema de Cayley.
- El morfismo $\alpha : G \rightarrow \text{Sym}(G)$ dado por $\alpha_g(x) = g^{-1}xg$, llamada la *acción por conjugación*. Se cumple que $\ker \alpha = Z(G)$.
- El morfismo $\alpha : \text{Sym}(S) \rightarrow \text{Sym}(S)$ dado por $\alpha_\sigma(x) = \sigma(x)$ es una acción fiel y transitiva.
- El morfismo $\alpha : \mathbb{F}_2 \rightarrow \text{Sym}(G)$, donde G es grupo, dado por $\alpha_0(x) = x$ y $\alpha_1(x) = x^{-1}$. Nótese que α no es fiel syss todo elemento no-neutro tiene orden 2.

Definición 1.74: Si consideramos la acción por conjugación de un grupo G denotamos por $C_G(x)$ y $Z(x)$ a la órbita y al estabilizador de x bajo ésta acción, los cuales se llaman conjugador y centralizador de x resp.

Lema 1.75: Dos clases de conjugación o son iguales o son disjuntas.

DEMOSTRACIÓN: Sean $x, y \in G$ y sea $z \in C_G(x) \cap C_G(y)$, luego, existen $g_1, g_2 \in G$ tales que $g_1^{-1}xg_1 = g_2^{-1}yg_2$, ergo $y = (g_1g_2^{-1})^{-1}x(g_1g_2^{-1})$ y por ende $C_G(y) \subseteq C_G(x)$. El caso converso es análogo y por doble inclusión se concluye que los conjuntos son iguales. \square

Teorema 1.76 – Ecuación de clases: Para todo grupo finito G , existen $g_1, \dots, g_k \in G \setminus Z(G)$ tales que

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^k [G : Z(g_i)].$$

DEMOSTRACIÓN: Por el lema anterior, el conjunto de clases de conjugación de un grupo determina una partición estricta de él, luego, en un caso finito, hay finitos conjuntos no vacíos, ergo elegimos representantes aleatorios de cada clase. Para toda clase de conjugación puede darse que $|C_G(x)| = 1$, o $|C_G(x)| > 1$, el primer caso equivale a pertenecer al centro, mientras que el segundo equivale a no pertenecer al centro. Luego como las clases determinan una partición estricta, basta sumar los cardinales de las clases de conjugación, y notemos que todos los elementos cuya clase es singular pertenecen al centro, ergo se cumple la fórmula del enunciado. \square

Definición 1.77 (p-grupo): Se dice que G es un p -grupo si posee de cardinal alguna potencia de p . También se dice que H es un p -subgrupo de G si $H \leq G$ y H es un p -grupo.

Corolario 1.78: Todo p -grupo posee centro no trivial.

Teorema 1.79: Si $G/Z(G)$ es cíclico entonces G es abeliano. Luego $|G/Z(G)|$ no es primo.

DEMOSTRACIÓN: Si $G/Z(G)$ es cíclico, entonces todos sus elementos son de la forma $g^n Z(G)$ con un g fijo, luego todo $x \in G$ se escribe como $g^n z$ con $z \in Z(G)$. Luego es fácil comprobar que x conmuta con todo elemento de G . \square

Corolario 1.80: Se cumplen:

1. Si G tiene cardinal p^2 con p primo, entonces G es isomorfo a \mathbb{Z}_{p^2} o \mathbb{Z}_p^2 .

2. Si G tiene cardinal pq con p, q primos y tiene centro no-trivial, entonces es cíclico.

1.4. Teoremas de Sylow

§1.4.1 Acciones.

Teorema 1.81: Si G actúa sobre S , entonces:

1. $\text{Stab}_a \leq G$.
2. El conjunto de órbitas de los elementos forman una partición estricta de S .
3. Para todo $a \in S$ y $g \in G$ se cumple que

$$\text{Stab}_{\alpha_g(a)} = g^{-1}\text{Stab}_a g$$

Ergo, los estabilizadores son conjugados.

4. Existe una biyección entre G/Stab_a y Orb_a , en particular si G es finito, entonces

$$|G| = |\text{Orb}_a| |\text{Stab}_a|$$

DEMOSTRACIÓN: 1. Ejercicio para el lector.

2. Basta ver que si dos órbitas no son disjuntos entonces son iguales, para ello si $a, b \in S$ basta probar que $\text{Orb}_a \subseteq \text{Orb}_b$. Sea $c \in \text{Orb}_a \cap \text{Orb}_b$, de forma que existen $g_1, g_2 \in G$ tales que

$$c = \alpha_{g_1}(a) = \alpha_{g_2}(b)$$

Ahora, sea $d := \alpha_g(a)$, entonces $d = \alpha_g(\alpha_{g_1}^{-1}(c)) = \alpha_{gg_1^{-1}g_2}(b)$, ergo $d \in \text{Orb}_b$.

3. Ejercicio para el lector.
4. Prefijado un $a \in S$, vamos a definir $H := \text{Stab}_a, K := \text{Orb}_a$ y $\varphi : G/H \rightarrow K$ como $\varphi(gH) = \alpha_g(a)$. En primer lugar, veamos que está bien definida, si $x \equiv y$ (mód H), entonces existe $h \in H$ tal que $xh = y$, luego

$$\alpha_y(a) = \alpha_{xh}(a) = \alpha_x(\alpha_h(a)) = \alpha_x(a).$$

Queda al lector probar que φ es una biyección.

□

Corolario 1.82: Si G actúa sobre S , donde S es finito, entonces existen x_1, \dots, x_n tales que

$$|S| = \sum_{i=1}^n |\text{Orb}_{x_i}| = \sum_{i=1}^n [G : \text{Stab}_{x_i}].$$

Definición 1.83 (Puntos fijos): En general, se dice que x es un punto fijo de una endo-función f si $f(x) = x$. Si G actúa sobre S , entonces se denota $\text{Fix}_g(S)$ al conjunto de puntos fijos de la permutación α_g . Denotamos $\text{Fix}_G(S)$ al conjunto de puntos fijos bajo cualquier permutación de la acción, es decir:

$$\text{Fix}_g(S) := \{x \in S : \alpha_g(x) = x\}, \quad \text{Fix}_G(S) := \bigcap_{g \in G} \text{Fix}_g(S).$$

Teorema 1.84: Si G es un p -grupo que actúa sobre S finito, entonces

$$|S| \equiv |\text{Fix}_G(S)| \pmod{p}$$

DEMOSTRACIÓN: Por la ecuación de órbitas se cumple que

$$|S| = \sum_{i=1}^n |\text{Orb}_{x_i}|,$$

nótese que como G es un p -grupo y Stab_{x_i} un p -subgrupo, entonces $|\text{Orb}_x| = |G/\text{Stab}_x|$ siempre es una potencia de p (que incluye $p^0 = 1$). Si es una potencia no nula entonces $|\text{Orb}_x| \equiv 0 \pmod{p}$, si $|\text{Orb}_x| = 1$ entonces es un punto fijo global y $x \in \text{Fix}_G(S)$. \square

Corolario 1.85: Si G , un p -grupo, actúa sobre S que no es de cardinal múltiplo de p , entonces S posee al menos un punto fijo global.

§1.4.2 Teoremas de Sylow. Los teoremas de Sylow son un conjunto de cuatro teoremas² bastante importantes para la teoría de grupos finitos. De antemano advierto que la mayoría de demostraciones de los teoremas hace uso de las acciones de grupos, así que relea dicha sección las veces necesarias para entenderlos mejor.

Además nos referiremos a los teoremas de Sylow por números romanos, e.g., Sylow I.

²A veces el cuarto se considera una variación del tercero.

Teorema 1.86 – Teorema de Cauchy: Si p divide al cardinal de G , entonces G contiene un elemento de orden p , y por ende, un subgrupo de cardinal p .

DEMOSTRACIÓN: Si G es abeliano, entonces ya hemos probado que posee subgrupos de todos los divisores de su cardinal.

Si G no es abeliano: Supongamos por contradicción que esto no pasa, entonces sea G el grupo de cardinalidad mínima tal que contradice el enunciado. Notemos que todos sus subgrupos deben tener cardinal que no es divisible por p , de lo contrario, poseen un elemento de orden p por la minimalidad del cardinal de G . Por el teorema de Lagrange, para todo $H \leq G$ se cumple que $|G| = |H| |G/H|$, luego p divide a $|G/H|$ para todo subgrupo H de G . Luego por ecuación de clases, se cumple que p divide a $|G/Z(g_i)|$, luego divide al cardinal del centro, pero como asumimos que G no posee subgrupos propios cuyo cardinal sea un múltiplo de p , entonces $Z(G) = G$, luego G es abeliano, lo que es absurdo. \square

Corolario 1.87: Si todos los elementos no-neutros de un grupo G tienen orden p , entonces G es un p -grupo.

Definición 1.88 – p -subgrupo de Sylow: Dado un grupo de cardinal n y un primo p tal que $p \mid n$ se dice que un subgrupo $H \leq G$ es un p -subgrupo de Sylow si $|H| = p^m$ con $m := \nu_p(n)$. Denotaremos $\text{Syl}_p(G)$ al conjunto de p -subgrupos de Sylow de G .

Teorema 1.89 – Primer teorema de Sylow: Todo grupo finito G contiene un p -subgrupo de Sylow para todo p primo. Osea, $\text{Syl}_p(G) \neq \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN: Lo demostraremos por inducción fuerte sobre el cardinal de G . El cual es de la forma $p^\alpha m$ con $p \nmid m$. También asumiremos que $\alpha > 0$, pues dicho caso es trivial.

Caso 1 (p divide a $Z(G)$). Luego $Z(G)$ como es abeliano, posee un elemento de orden p que genera un subgrupo cíclico N que es normal (por ser subgrupo del centro), ergo G/N es grupo de cardinal $p^{\alpha-1}m$. Luego, por inducción G/N contiene un p -subgrupo de Sylow que denotaremos por \bar{P} . Luego sea $P := \{g \in G : gN \in \bar{P}\}$. Probaremos que P es un p -subgrupo de Sylow:

P es subgrupo: Es claro que $1 \in P$, luego no es vacío. Sean $u, v \in P$, luego $uv^{-1} \in P$, pues \bar{P} es un subgrupo de G/N . **P es de Sylow:** Sea $\varphi :$

$P \rightarrow \bar{P}$ tal que $\varphi(g) = gN$, como φ es un epimorfismo, por el primer teorema de isomorfismos se cumple que $|P/\ker \varphi| = |\bar{P}|$ y $\ker \varphi = N \cap P = N$, luego $|P| = |N| |\bar{P}| = p \cdot p^{\alpha-1} = p^\alpha$.

Caso 2 (p no divide a $Z(G)$). Por la ecuación de clases se cumple que hay alguna clase de conjugación no trivial cuyo cardinal no es múltiplo de p y como son de la forma $[G : Z(g)]$ entonces hay algún $|Z(g)| = p^\alpha n$ y por inducción fuerte, contiene un p -subconjunto de Sylow que lo es de G . \square

Teorema 1.90: Todo grupo no abeliano de orden $2p$ con p primo impar es isomorfo a D_{2p} .

DEMOSTRACIÓN: Por el primer teorema de Sylow G posee un 2-subconjunto y un p -subconjunto de Sylow, que son cíclicos, ergo se escriben como $\langle x \rangle$ y $\langle y \rangle$, y se cumple que

$$|\langle x \rangle \langle y \rangle| = \frac{\text{ord}(x) \cdot \text{ord}(y)}{|\langle x \rangle \cap \langle y \rangle|}$$

Como los valores son enteros, la intersección sólo puede tener cardinalidad 1, 2, p o $2p$, por contención, debe tener cardinalidad 1 o 2, y queda al lector probar que el otro caso es imposible. Luego $G = \langle x, y \rangle$ y por ende es isomorfo a D_{2p} . \square

Teorema 1.91 – Segundo teorema de Sylow: Todos los p -subgrupos de Sylow de un grupo finito son conjugados. En consecuencia, si P , es un p -subgrupo de Sylow, entonces

$$|\text{Syl}_p(G)| = [G : Z(P)].$$

DEMOSTRACIÓN: Sea Q otro p -subgrupo de Sylow, entonces consideremos la acción del producto por la derecha de Q (un p -grupo) sobre G/P (un grupo cuyo cardinal no es múltiplo de p), luego $\text{Fix}_Q(G/P)$ es no vacío, es decir, existe un $g \in G$ tal que para todo $q \in Q$ se cumple que $Pgq = Pg$, o más bien, que $qg \in Pg$ para todo $q \in Q$. Luego $Q \subseteq g^{-1}Pg$ y por cardinalidad se comprueba que ambos conjuntos son iguales. \square

Corolario 1.92: G posee un único p -subgrupo de Sylow syss es éste es normal.

Definición 1.93 – Grupo simple: Se dice que un grupo es *simple* si su único subgrupo normal impropio es el trivial.

Ejemplo. Los grupos cíclicos de orden primo son simples.

Corolario 1.94: Un grupo de cardinal mp con p primo y $p \nmid m$ no es simple.

Teorema 1.95 – Tercer teorema de Sylow: Si $|G| = p^k m$ con $p \nmid m$, entonces

$$n_p \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{y} \quad n_p \mid m$$

donde $n_p := |\text{Syl}_p(G)|$.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la acción de $P \in \text{Syl}_p(G)$ (un p -grupo) sobre $\text{Syl}_p(G)$ por conjugación. Luego se tiene que

$$|\text{Syl}_p(G)| = n_p \equiv |\text{Fix}_P(\text{Syl}_p(G))| \pmod{p}$$

Probaremos ahora, por contradicción, que P es el único punto fijo de su acción. Sea $Q \in \text{Syl}_p(G)$ distinto de P tal que es punto fijo. Por definición, para todo $g \in P$ se cumple que $g^{-1}Qg = Q$, luego $P \leq N_G(Q) \leq G$. Luego, podemos ver que Q y P son p -subgrupos de Sylow de $N_G(Q)$, y Q es normal, luego por el corolario anterior $P = Q$. En conclusión $|\text{Fix}_P(\text{Syl}_p(G))| = 1$.

Consideremos la acción de G sobre $\text{Syl}_p(G)$ por conjugación. Luego $n_p \mid p^k m = |G|$ y n_p es coprimo a p (por el inciso anterior), por ende, por lema de Euclides, $n_p \mid m$. \square

En general n_p representará a la cantidad de p -subgrupos de Sylow de un grupo finito prefijado.

Teorema 1.96 – Cuarto teorema de Sylow: Se cumple que $n_p := |G/N_G(P)|$ donde $P \in \text{Syl}_p(G)$.

HINT: Relea el último paso en la demostración anterior. \square

Lema 1.97: Si G es finito y tal que $n_p! < |G|$, entonces G no es simple.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que se da aquello, luego consideremos la acción $\alpha : G \rightarrow \text{Sym}(\text{Syl}_p(G)) \cong S_{n_p}$ dada por $\alpha_g(N) = g^{-1}Ng$. Ésta acción,

vista como homomorfismo de grupos, es claramente no trivial y además como $|G| > |S_{n_p}| = |n_p!|$, entonces no puede ser inyectiva, luego $\ker \alpha \notin \{\{1\}, G\}$ y es normal. \square

Proposición 1.98: No hay grupos de cardinalidad < 60 que sean simples y no-abelianos.

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar todo grupo de cardinalidad p, pq con p, q primos distintos es abeliano. Si su cardinalidad es p^n , entonces su centro es siempre no trivial y es normal. Aplicando el lema anterior se descartan casi todos los números exceptuando 30 y 56, así que veamoslos de manera separada:

- i) $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$: Si $n_3 \neq 1 \neq n_5$, entonces $n_3 = 10$ y $n_5 = 6$. Cada 3- y 5-subgrupo de Sylow es cíclico y cada uno de ellos contiene al neutro así que hay exactamente $10 \cdot (3 - 1) = 20$ elementos de orden 3 y $6 \cdot (5 - 1) = 24$ elementos de orden 5, pero $20 + 24 > 30$, contradicción.
- ii) $56 = 2^3 \cdot 7$: Si $n_2 \neq 1 \neq n_7$, entonces $n_7 = 8$ y hay $8 \cdot 6 = 48$ elementos de orden 7. Además, dado un K 2-subgrupo de Sylow, nótese que no posee elementos de orden 7 (pues sus elementos sólo pueden tener orden $\{1, 2, 4, 8\}$) y posee 8 elementos dando 56. Pero como hay más de un 2-subgrupo de Sylow, entonces existe $g \notin K$ de orden no 7, es decir, el grupo tiene al menos 57 elementos, lo cual es imposible. \square

1.5. Otros tópicos de grupos

§1.5.1 Grupos libres y presentación. Un grupo libre viene a ser algo así como un grupo con la cantidad mínima de relaciones entre sí.

Definición 1.99: Sea G un grupo, se dice que un subconjunto $X \subseteq G$ es una *base* si toda aplicación $f : X \rightarrow H$ donde H es un grupo se extiende a un único homomorfismo de grupos $f^* : G \rightarrow H$. Un grupo se dice *libre* si posee una base.

Un subconjunto $X \subseteq G$ se dice *libre* si para toda sucesión finita $x_1, \dots, x_n \in X$ donde $x_i \neq x_{i+1}$, y toda sucesión $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$ tales que $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = 1$ se cumple que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Lo que queremos ver es que ser una base y ser un sistema generador libre son lo mismo.

Teorema 1.100: Para todo conjunto S existe un grupo, denotado $F(S)$, tal que S es un sistema generador libre de $F(S)$.

DEMOSTRACIÓN: Definimos $\bar{S} := S \times \{+1, -1\}$ donde $()^{-1} : \bar{S} \rightarrow \bar{S}$ es tal que $(x, \pm 1)^{-1} = (x, \mp 1)$. Denotamos $x := (x, +1)$ y $x^{-1} := (x, -1)$, donde $x \in S$. Una palabra (no reducida) es un elemento de la forma $w := xxyx^{-1}y^{-1}yx^{-1}$, o formalmente una terna finita ordenada de \bar{S} , donde su longitud viene dada por la de terna ordenada, denotada $|w| = 7$. El gran problema es que las palabras no reducidas pueden tener partes redundantes pues en el ejemplo anterior:

$$xxyx^{-1}\underline{y^{-1}yx^{-1}} = xxyx^{-1}x^{-1}$$

Así, definimos una reducción elemental³ $R_e : \bar{S}^{<\omega} \rightarrow \bar{S}^{<\omega}$ como prosigue: Si la palabra tiene largo 0 ó largo 1, entonces no hace nada. Si la palabra w es más larga busca el primer índice i tal que $w_i^{-1} = w_{i+1}$ y elimina los elementos en dichas posiciones, si no existe tal i entonces no hace nada. Cada reducción elemental o quita dos elementos, o no hace nada; entonces la longitud mínima posible de $R_e^n(w)$ es $|w|/2n$. Finalmente se define la reducción total $R : \bar{S}^{<\omega} \rightarrow \bar{S}^{<\omega}$ como $R(w) := R_e^{\lfloor |w|/2 \rfloor + 1}(w)$ de manera que es seguro que $R_e(R(w)) = R(w)$.

Se denota por $F(S)$ al conjunto de palabras sin reducir fijadas por R . Para ver que $F(S)$ es un grupo se denota por \cup a la concatenación de palabras sin reducir, luego $w_1 \cdot w_2 := R(w_1 \cup w_2)$, por ello a los elementos de $F(S)$ los concideramos palabras irreducibles, aunque dicho adjetivo calificativo será obviado. $F(S)$ es un grupo pues claramente es asociativa, el neutro es $1 := ()$ [palabra vacía], los inversos vienen dados por revertir el orden de la palabra e invertir sus elementos (lo que sigue siendo irreducible). \square

Fundamentalmente $F(S)$ es el prototipo de un grupo libre, pero aún no lo probamos.

Teorema 1.101: Un subconjunto $X \subseteq G$ es una base syss es un sistema generador libre. En cuyo caso, todo elemento de G o es 1 o se escribe de forma única como $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, donde $x_i \neq x_{i+1}$ y los α 's son no nulos.

DEMOSTRACIÓN: Veamos que si X es libre, su subgrupo generado satisface la segunda propiedad: Sea $g \in \langle X \rangle$, si $g = 1$ entonces no se escribe de otra

³Recordar que $\bar{S}^{<\omega}$ es el conjunto de todas las ternas ordenadas finitas (incluyendo la terna vacía) de \bar{S} .

forma por definición de ser libre. Si $g \neq 1$ y se tienen las dos siguientes representaciones:

$$g = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = y_1^{\beta_1} \cdots y_m^{\beta_m}.$$

Luego se cumple que

$$1 = g^{-1}g = x_n^{-\alpha_n} \cdots x_1^{-\alpha_1} y_1^{\beta_1} \cdots y_m^{\beta_m},$$

por definición de ser libre ésto implica que $x_1 = y_1$ y nos queda:

$$1 = x_n^{-\alpha_n} \cdots x_2^{-\alpha_2} y_1^{\beta_1 - \alpha_1} y_2^{\beta_2} \cdots y_m^{\beta_m},$$

y también por ser libre se cumple que $\beta_1 - \alpha_1 = 0$, o lo que es equivalente, $\alpha_1 = \beta_1$; por lo que cancelamos el término y seguimos así para deducir que $x_i = y_i$ y que $\alpha_i = \beta_i$.

\Leftarrow . Sea X un sistema generador libre y sea $f : X \rightarrow H$ una aplicación hacia un grupo H . Definamos:

$$f^*(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}) := f(x_1)^{\alpha_1} \cdots f(x_n)^{\alpha_n}, \quad f^*(1) = 1$$

donde $x_i \neq x_{i+1}$ y $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$. Veamos que f^* posee todas las propiedades exigidas:

- I) f^* está bien definida por la unicidad de la escritura de los elementos de G .
- II) f^* es un homomorfismo: Sean $g_1, g_2 \in G$. Si alguno es neutro entonces es claro que $f^*(g_1 g_2) = f^*(g_1) f^*(g_2)$. Luego poseen escritura única

$$g_1 = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, g_2 = y_1^{\beta_1} \cdots y_m^{\beta_m}.$$

Ahora demostramos que se cumple la propiedad por inducción sobre m .

El caso $m = 1$ se cumple separando por el caso de si $y_1 = x_n$:

$$\begin{aligned} f^*(g_1 g_2) &= f^*(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1}) = f^*(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n + \beta_1}) \\ &= f(x_1)^{\alpha_1} \cdots f(x_n)^{\alpha_n + \beta_1} = f(x_1)^{\alpha_1} \cdots f(x_n)^{\alpha_n} f(y_1)^{\beta_1} = f^*(g_1) f^*(g_2). \end{aligned}$$

Y si $y_1 \neq x_n$ es trivial.

Luego el caso inductivo queda al lector.

\Rightarrow . Sea X una base de G que genera el subgrupo H . Luego sea $\iota : X \rightarrow H$ la función inclusión, con lo que se extiende a un homomorfismo $f : G \rightarrow H$. Pero además, como $H \leq G$ se cumple que la inclusión $g : H \rightarrow G$

es un homomorfismo. Así $(f \circ g) : G \rightarrow G$ es una extensión de la inclusión $X \rightarrow G$ que es la identidad por unicidad y que implica que g es suprayectiva (que era la inclusión), así que $H = G$.

Más aún, sea $\text{Id} : X \rightarrow X \subseteq F(X)$ una biyección, donde $F(X)$ es un grupo donde X es libre, entonces se extiende a un único homomorfismo $f^* : G \rightarrow F[X]$. Si f^* no fuera un monomorfismo, entonces tendría kernel no trivial y sea $g \in G$ un elemento no neutro tal que $f^*(g) = 1$, y se cumple que

$$1 = f^*(g) = f^*(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}) = f(x_1)^{\alpha_1} \cdots f(x_n)^{\alpha_n}$$

luego como en $F[X]$ se cumple que X es libre, entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. \square

Teorema 1.102: Si G, H son grupos libres de bases X, Y resp. Entonces:

1. $|X| = |Y|$ implica $G \cong H$.
2. (AE) $G \cong H$ implica $|X| = |Y|$.

DEMOSTRACIÓN: 1. Sea $f : X \rightarrow Y$ biyección, luego se extiende a un homomorfismo $f^* : G \rightarrow H$ y lo mismo con $(f^{-1})^* : H \rightarrow G$. Luego $f^* \circ (f^{-1})^* : G \rightarrow G$ es un endomorfismo que fija a X , pero notemos que la identidad también lo es y por unicidad se cumple que $f^* \circ (f^{-1})^* = \text{Id}_G$ y análogamente, lo que prueba que $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$, por ende f^* es un isomorfismo.

2. Se separa por casos, sea X finito. Sea $\varphi : G \rightarrow H$ un isomorfismo de grupos, y sea $f \in \text{Hom}(H, \mathbb{Z}_2)$, luego se cumple $\varphi \circ f \in \text{Hom}(G, \mathbb{Z}_2)$ y es fácil ver que $f \mapsto \varphi \circ f$ es un isomorfismo entre los grupos $\text{Hom}(H, \mathbb{Z}_2) \cong \text{Hom}(G, \mathbb{Z}_2)$, ergo

$$2^{|X|} = |\text{Hom}(G, \mathbb{Z}_2)| = |\text{Hom}(H, \mathbb{Z}_2)| = 2^{|Y|}$$

lo que comprueba el caso finito.

Si X es infinito, entonces $|G| = |F(X)| = |X|^{<\infty} = |X| = |F(Y)| = |Y|$. \square

Definición 1.103: Por el teorema anterior llamamos *rango* de un grupo libre al cardinal de cualquiera de sus bases. En general si κ es un número cardinal denotamos $F(\kappa)$ al grupo libre de rango κ , que es único salvo isomorfismos.

Una aplicación de los grupos libres como tal son las demostraciones de la paradoja de Banach-Tarski, de las cuales incluyo una en la sección § A.1.2 de mi libro de *Topología y Análisis*.

Teorema 1.104: Todo grupo es isomorfo a un cociente de un grupo libre.

DEMOSTRACIÓN: Sea G un grupo, entonces sea $\text{Id} : G \rightarrow G$, luego se extiende de forma única a un epimorfismo $f : F(G) \rightarrow G$ y por el primer teorema de isomorfismos se cumple que $F(G)/\ker f \cong G$. \square

Definición 1.105: Sea $R \subseteq F(X)$, entonces R se dice un conjunto de relaciones sobre X . Se dice que un generador Y de un grupo G *satisface* las relaciones R si existe una aplicación $f : X \rightarrow Y$ cuya extensión $f^* : F(X) \rightarrow G$ satisface que $R \subseteq \ker f^*$.

Dado un conjunto de relaciones R sobre X , y siendo N la envoltura normal de R (el subgrupo normal mínimo que contiene a R), se denota al grupo generado por los generadores X y las relaciones R a

$$\langle X : R \rangle := F(X)/N.$$

Si G es un grupo que cumple que $G \cong \langle X : R \rangle$, entonces la expresión de la derecha se dice una *presentación* de G .

Ésto nos permite construir o enunciar grupos de manera sencilla, que está bien definida. A ello le sumamos el siguiente resultado para concluir que ciertos grupos generados con relaciones son de hecho las presentaciones de otros ejemplos conocidos.

Teorema 1.106 (von Dyck): Sea $G = \langle X : R \rangle$ y sea H un grupo con un generador que satisface las relaciones R , luego existe un epimorfismo $f : G \rightarrow H$.

DEMOSTRACIÓN: Sea Y el generador de H que satisfaga las relaciones R . Por definición, existe una aplicación $f : X \rightarrow Y$ cuya extensión $f^* : F(X) \rightarrow H$ con $R \subseteq \ker f^* \trianglelefteq G$. Como f^* es un epimorfismo, por el primer teorema de isomorfismos se cumple que $\bar{f} : F(X)/\ker f^* \rightarrow H$ sea un isomorfismo. Luego por definición de envoltura normal se cumple que $N \trianglelefteq \ker f^*$, luego por tercer teorema de isomorfismos se tiene que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
G = \frac{F(X)}{N} & \dashrightarrow & H \\
\downarrow \pi & & \uparrow \text{~~~~~} \\
\frac{F(X)/N}{\ker f^*/N} & \rightsquigarrow & \frac{F(X)}{\ker f^*}
\end{array}$$

conmuta, del que se deriva el epimorfismo deseado. \square

§1.5.2 Grupos resolubles.

Definición 1.107 (Series de grupos): Dado un grupo G se le dice *serie normal* de subgrupos a una cadena de inclusiones estrictas

$$G =: G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_n = \{e\}.$$

En una serie se le llama *factores* a los términos G_i/G_{i+1} . Una serie es estricta si $G_i \neq G_j$ para todo $i \neq j$. Una serie se dice abeliana (resp. cíclica) si todos los factores lo son.

Una serie se dice *de composición* si es estricta y los factores son simples (lo que equivale a ver que G_i es un subgrupo normal maximal en G_{i+1}). La máxima longitud de una serie de composición se denota por $\ell(G)$. Nótese que si G es no trivial y simple, entonces $\ell(G) = 1$.

Teorema 1.108 – Teorema de Jordan-Hölder: Si un grupo finito G posee dos series de composición

$$\begin{aligned}
G &\supset G_1 \supset \cdots \supset G_p = \{1\} \\
G &\supset H_1 \supset \cdots \supset H_q = \{1\}
\end{aligned}$$

entonces $p = q$ y los factores son respectivamente isomorfos tras una permutación de índices.

DEMOSTRACIÓN: Si dos series de composición cumplen el enunciado diremos que son JH-equivalentes, en contexto de ésta demostración. Además llamaremos serie G a la serie de los G_i s y serie H a la serie de los H_i s.

La demostración es por inducción fuerte sobre el cardinal n de G : El caso $n = 2$ es trivial.

Si $G_1 = H_1$, entonces como $|G_1| < n$ se deduce el resto.
 Si $G_1 \neq H_1$, entonces como G_1H_1 es normal y contiene estrictamente a G_1 , entonces $G_1H_1 = G$. Luego sea $K := G_1 \cap H_1$, y sea

$$K \triangleright K_1 \triangleright \cdots \triangleright K_r = \{1\},$$

una serie de composición de K . Por el segundo teorema de isomorfismos se cumple que $G_1/K \cong G/H_1$ y $H_1/K \cong G/G_1$, luego se cumple que

$$\begin{aligned} G_1 \triangleright K \triangleright K_1 \triangleright \cdots \triangleright K_r, \\ H_1 \triangleright K \triangleright K_1 \triangleright \cdots \triangleright K_r, \end{aligned}$$

son series de composición para G_1 y H_1 , que extendidas para G forman dos series JH-equivalentes. \square

Como consecuencia del teorema anterior, toda serie de composición de G tiene cardinalidad $\ell(G)$.

Proposición 1.109: Se cumplen:

1. Todo grupo finito posee una serie de composición.
2. Toda serie normal estricta puede extenderse a una serie de composición.
3. Toda serie normal estricta de longitud $\ell(G)$ es de composición.

DEMOSTRACIÓN: Para ello basta probar la primera propiedad. Supongamos que fuera falsa, entonces sea G un grupo que no posee serie de composición de cardinalidad mínima. Luego G no puede ser simple, así que posee una subgrupo normal N . N posee una serie de composición

$$N \triangleright N_1 \triangleright \cdots \triangleright N_k = \{1\}$$

y si G/N no es simple, entonces también posee una serie de composición que, por el teorema de la correspondencia, se traduce en una serie $G \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_m = N$ cuyos factores son simples, ergo, pegando las dos series se obtiene una serie de composición para G .

Siguiendo éste proceso algorítmico podemos extender cualquier serie normal estricta a una de composición, y debido a eso, si tuvieramos una serie normal estricta que no fuera de composición y de longitud $\ell(G)$, entonces la extenderíamos a una de composición cuya longitud es $> \ell(G)$ lo que contradice al teorema de Jordan-Hölder. \square

Definición 1.110: Llamaremos *subgrupo derivado* G' al conjunto de todos los conmutadores de G .

Proposición 1.111: Se cumplen:

1. $G' \trianglelefteq G$ y G/G' es abeliano.
2. Si $N \trianglelefteq G$, entonces G/N es abeliano si y sólo si $G' \leq N$.

DEMOSTRACIÓN: Probaremos la 2: \implies . Por definición $xy \equiv yx \pmod{N}$ para todo $x, y \in G$. De modo que $[x, y] = (yx)^{-1}xy \in N$ lo que prueba que $G' \leq N$.

\impliedby . Si $G' \leq N$, entonces, por el tercer teorema de los isomorfismos, se cumple que

$$\frac{G}{N} \cong \frac{G/G'}{N/G'}$$

que es abeliano pues el lado derecho es el cociente de un grupo abeliano. \square

Lema 1.112: Si G es finito, entonces son equivalentes:

1. Todas las series de composición de G son abelianas.
2. G posee una serie cíclica.
3. G posee una serie abeliana.
4. Existe un n tal que el n -ésimo derivado de G es trivial.

DEMOSTRACIÓN: Es claro que (1) \implies (2) \implies (3).

(3) \implies (1). Por el corolario, si G posee una serie abeliana

$$G \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright \{1\}$$

tal que G_i/G_{i+1} no es simple, entonces sea $\{1\} \neq N/G_{i+1} \triangleleft G_i/G_{i+1}$, luego insertar $G_i \triangleright N \triangleright G_{i+1}$ extiende a la serie y

$$\frac{N}{G_{i+1}} \leq \frac{G_i}{G_{i+1}}, \quad \frac{G_i}{N} \cong \frac{G_i/G_{i+1}}{N/G_{i+1}}$$

por lo que los factores siguen siendo abelianos. Iterando el proceso se llega a una serie de composición abeliana.

(4) \implies (3). Entonces se cumpliría que

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_n = \{e\}$$

con $G_{i+1} := G'_i$ es una serie normal cuyos factores son abelianos.

(3) \implies (4). Si G posee la serie de composición

$$G = H_0 \triangleright H_1 \triangleright \cdots \triangleright H_n = \{e\}$$

abeliana, entonces $G' \leq H_1$ y luego $G'' \leq H'_1 \leq H_2$, y más generalmente, $G^{(k)} \leq H_k$, de modo que $G^{(n)} = \{e\}$. \square

Definición 1.113 – Grupo resoluble: Un grupo es resoluble si cumple las condiciones del lema anterior.

Corolario 1.114: Un grupo simple y no-abeliano es no resoluble.

Teorema 1.115: Se cumple:

1. Si G es resoluble y $H \leq G$, entonces H es resoluble.
2. Si G es resoluble y $N \trianglelefteq G$, entonces G/N es resoluble.
3. Si $N \trianglelefteq G$ es tal que N y G/N son resolubles, entonces G también lo es.
4. Si $H, K \leq G$ son resolubles y $H \trianglelefteq G$, entonces HK es resoluble.

DEMOSTRACIÓN: 1. Sea $G \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_n = \{1\}$ una serie abeliana, veremos que

$$G \cap H = H \triangleright G_1 \cap H \triangleright \cdots \triangleright \{1\}$$

es una serie abeliana. Nótese que

$$\frac{G_i \cap H}{G_{i+1} \cap H} = \frac{G_i \cap H}{G_{i+1} \cap (G_i \cap H)} \cong \frac{G_{i+1}(G_i \cap H)}{G_{i+1}} \leq \frac{G_i}{G_{i+1}},$$

donde el último es abeliano, y la equivalencia viene dada por el segundo teorema de isomorfismos.

2. Sea $G \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_n := \{1\}$ una serie abeliana. Luego

$$GN/N \triangleright G_1N/N \triangleright \cdots \triangleright G_nN/N := \{e\}$$

es una serie abeliana pues

$$\frac{G_iN/N}{G_{i+1}N/N} \cong \frac{G_iN}{G_{i+1}N} \cong \frac{G_i(G_{i+1}N)}{G_{i+1}N}$$

$$\cong \frac{G_i}{G_i \cap G_{i+1}N} \cong \frac{G_i/G_{i+1}}{(G_i \cap G_{i+1}N)/G_{i+1}}$$

donde el último es un cociente de un grupo abeliano, por ende es abeliano.

3. Si N es resoluble, entonces posee una serie de composición abeliana

$$N \triangleright N_1 \triangleright \cdots \triangleright N_n = \{e\}$$

y lo mismo aplica para G/N , pero por el teorema de correspondencia, una cadena decreciente de subgrupos normales en G/N se traduce en una cadena en G terminando en N . Luego se construye una serie de composición abeliana en G uniendo la serie de G/N con la de N .

4. Nótese que $HK \supseteq H$, donde H es resoluble y $HK/H \cong K/(H \cap K)$ es resoluble por ser cociente de K que es resoluble. \square

Una característica es que veremos que los grupos alternantes son simples, pero para demostrarlo bastan varios lemas:

Lema 1.116: Si $n \geq 3$, entonces A_n está generado por los ciclos de longitud 3.

DEMOSTRACIÓN: Por definición todo elemento de A_n es una permutación par, que podemos separar en productos de dos trasposiciones. Luego o $(a, b)(a, c) = (a, b, c)$ o $(a, b)(c, d) = (a, b, c)(c, a, d)$. \square

Lema 1.117: Si $n \geq 5$, y $N \trianglelefteq A_n$ contiene un ciclo de longitud 3, entonces $N = A_n$.

DEMOSTRACIÓN: Sea τ un ciclo de longitud 3 en N , luego existe $\sigma \in S_n$ tal que

$$\sigma^{-1}\tau\sigma = (1, 2, 3).$$

Si $\sigma \in A_n$, entonces $(1, 2, 3) \in N$, de lo contrario $\sigma' := \sigma(4, 5) \in A_n$ y

$$\sigma'^{-1}\tau\sigma' = (4, 5)\sigma^{-1}\tau\sigma(4, 5) = (4, 5)(1, 2, 3)(4, 5) = (1, 2, 3).$$

Luego es fácil deducir que todos los otros ciclos de longitud 3 están en N , luego $N = A_n$. \square

Teorema 1.118: Si $n \geq 5$, entonces A_n es simple.

DEMOSTRACIÓN: I) A_5 es simple: Si $\{1\} \neq N \trianglelefteq A_5$, entonces un elemento no neutro de N es de la forma (a, b, c) , $(a, b)(c, d)$ o (a, b, c, d, e) .

En el primer caso el lema prueba que $N = A_5$.

Si $(a, b)(c, d) \in N$, entonces con $\sigma := (a, b, e)$ se cumple

$$\sigma^{-1}(a, b)(c, d)\sigma = (b, e)(c, d) \in N,$$

luego $(a, b)(c, d) \cdot (b, e)(c, d) = (b, a, e) \in N$ y $N = A_5$.

Si $(a, b, c, d, e) \in N$, entonces con $\sigma := (a, b)(d, e)$ se cumple

$$\sigma^{-1}(a, b, c, d, e)\sigma = (a, c, e, d, b) \in N,$$

luego $(a, b, c, d, e)(a, c, e, d, b) = (b, e, c) \in N$ y $N = A_5$.

II) A_n es simple con $n > 5$: Ahora veamos que si $n \geq 5$ entonces A_n es **simple**: Será por inducción sobre n , donde el caso base está probado. En primer lugar identificaremos A_n con el subgrupo de A_{n+1} de las permutaciones que tienen al $n + 1$ como punto fijo. De este modo si $N \trianglelefteq A_{n+1}$, entonces $N \cap A_n \trianglelefteq A_n$. Si $N \cap A_n = A_n$, entonces N contiene a un ciclo de longitud 3 y $N = A_{n+1}$. Si $N \cap A_n = \{1\}$, entonces si $\sigma \in N_{\neq 1}$ entonces $\sigma(n + 1) =: p \neq n + 1$. Como σ no puede ser una trasposición (pues sería impar), y tampoco puede ser un 3-ciclo, entonces existen q, r ; distintos entre sí y distintos de $p, n + 1$; tales que $\sigma(q) = r$. Sean u, v distintos entre sí y distintos de $p, q, r, n + 1$. Luego si $\tau := (p, n + 1)(q, r, u, v)$ entonces $\eta := \tau^{-1}\sigma\tau$. Nótese que $\eta(p) = n + 1$, de modo que $\sigma\eta \in N \cap A_n$, pero $\eta(r) = u$, luego $(\sigma\eta)(q) = u$ con lo que $\sigma\eta \neq 1$, por lo que $N = \{1\}$, completando la minimalidad de A_{n+1} . \square

Corolario 1.119: Si $n \geq 5$, entonces A_n no resoluble y, en consecuencia, S_n tampoco lo es.

Queda de ejercicio probar que S_1, S_2, S_3 y S_4 sí son resolubles.

Proposición 1.120: A_5 es el primer (en cardinalidad) grupo simple no abeliano y grupo no soluble.

DEMOSTRACIÓN: Ya vimos que A_5 es simple, y ver que todo grupo de cardinalidad menor no puede ser simple y no-abeliano quedo demostrado al final de la sección de teoremas de Sylow.

Sea G un grupo no soluble de cardinalidad mínima, entonces sería no abeliano, pero no simple (pues A_5 es el primero), luego posee un subgrupo

normal N y N es soluble por tener menos elementos que G y lo mismo sucede con G/N , luego G es soluble. \square

2

Anillos y Cuerpos

La teoría de anillos y cuerpos es bastante importante para el álgebra, en ciertos aspectos comparte similitudes con la teoría de grupos, sin embargo, a diferencia de ésta, la gran mayoría de la literatura no concuerda sobre temas como las definiciones básicas en la teoría de anillos. Ésto se debe a una inconclusa batalla entre aplicaciones y similitudes, algunas definiciones permiten mayor fuerza entre los resultados obtenidos, mientras que las otras hacen ligeros sacrificios para conservar una clara simetría entre los anillos y los grupos; en éste texto se opta por la segunda.

Una de las cosas que más difieren es en si considerar la inclusión de la unidad en un anillo como fundamental. Libros como [1] definen anillo con neutro multiplicativo y «anillo» (en inglés, *rng*), sin 1 , a dichas estructuras sin inversos. Ésta no es práctica de éste libro, pero se le señala al lector tenerla en cuenta.

2.1. Definiciones elementales

Definición 2.1 – Anillo, cuerpo, dominio: Se dice que una terna $(A, +, \cdot)$ es un anillo si $(A, +)$ es un grupo abeliano (cuyo neutro denotaremos “0”, y donde el inverso de a le denotaremos $-a$), $(A_{\neq 0}, \cdot)$ un semigrupo (cuyo posible neutro se denota “1”, y donde el inverso de a

se denota a^{-1}) y para todo x, y, z se cumple que

$$x(y + z) = xy + xz.$$

(distributividad de \cdot respecto de $+$).

Si $(A_{\neq 0}, \cdot)$ posee neutro o es conmutativo le diremos anillo unitario o conmutativo resp. Si $x \in A$ posee inverso respecto de \cdot , entonces diremos que es *invertible* o que es una *unidad*. Denotaremos por A^\times al conjunto de elementos invertibles de un anillo unitario A . Si A es un anillo unitario, y además $A^\times = A_{\neq 0}$, entonces diremos que es un anillo de división.

Si A es un anillo unitario conmutativo, entonces diremos que es un *dominio*; y si es de división conmutativo, entonces diremos que es un *cuerpo*.

Si $x, y \in A$ son no nulos y $xy = 0$ entonces diremos que x, y son *divisores de cero* y, en particular, x es divisor izquierdo e y derecho. A se dice un *dominio íntegro* si es un dominio sin divisores de cero.

Cabe destacar que como se exige que $(A_{\neq 0}, \cdot)$ sea un semigrupo y dijimos que el conjunto vacío no cuenta como estructura algebraica estamos exigiendo a que todo anillo tenga al menos dos elementos y que en todo cuerpo $1 \neq 0$. Ejemplos de cuerpos lo son $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$. Nótese que $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ es anillo, pero no siempre cuerpo, pues si n posee divisores propios p, q entonces p, q son divisores de cero.

Teorema 2.2: En todo anillo se cumple:

1. $a0 = 0a = 0$ (aniquilador o absorbente).
2. $a(-b) = (-a)b = -ab$ (ley de signos).
3. $(-a)(-b) = ab$.
4. $-(a + b) = -a + (-b)$

Teorema 2.3: Si A es un anillo unitario, entonces:

1. (A^\times, \cdot) es un grupo.
2. Los divisores de cero (si los posee) no son invertibles.

Corolario 2.4: Todo cuerpo es un dominio íntegro.

Ejemplo. \mathbb{Z} es un dominio íntegro que no es cuerpo.

De ahora en adelante se supondrá que \mathbb{k} representa un cuerpo con operaciones $+$, \cdot , neutro aditivo 0 y multiplicativo 1 .

Proposición 2.5: Si A es un anillo y $a \in A_{\neq 0}$, entonces a no es divisor de cero izquierdo (resp. derecho) syss para todo $b, c \in A$ se cumple que $ab = ac$ (resp. $ba = ca$) implica $b = c$.

Definición 2.6 (Anillo ordenado): Se dice que una cuádrupla $(A, +, \cdot, \leq)$ es un *anillo ordenado* si $(A, +, \cdot)$ es un anillo linealmente ordenado por \leq tal que

- $a \leq b \implies a + c \leq b + d$.
- $a, c \geq 0 \implies ac \geq 0$.

Se les dice *positivos* (resp. *negativos*) a los elementos mayores (resp. menores) o iguales al 0 . Denotaremos $A_{\geq 0}$ a los elementos de A positivos para ser consistentes con nuestra notación. Algunos libros denotan A^+, A^- al conjunto de elementos positivos y negativos resp. Se le añade el prefijo *estrictamente* si son distintos del cero.

Teorema 2.7: Sea A un anillo ordenado, entonces se cumple:

1. $a \leq b$ syss $b - a \geq 0$.
2. $a \leq b$ y $c \leq d$ implica $a + c \leq b + d$.
3. $a < b$ y $c \leq d$ implica $a + c < b + d$.
4. $a \leq b$ syss $-b \leq -a$.
5. $a \geq 0$ syss $-a \leq 0$.
6. $a \leq b$ y $c \geq 0$ implica $ac \leq bc$.
7. $a \leq b$ y $c \leq 0$ implica $bc \leq ac$.
8. $a^2 \geq 0$.
9. $1 > 0$.

Definición 2.8 – Subanillo, ideal: Se dice que $\emptyset \neq B \subseteq A$ es un *subanillo* de A , denotado $B \leq A$, si B es cerrado bajo las operaciones de A y sus elementos poseen inverso aditivo. Se dice que un subanillo I de A es un *ideal*, denotado $I \trianglelefteq A$, si para todo $x \in I$ y todo $a \in A$, se cumple que $ax, xa \in I$ (también denotado como que $AI, IA \subseteq I$).

Para todo anillo A se cumple que $\{0\} \leq A$, a él le diremos subanillo trivial; cabe notar que todo subanillo no trivial de A es un anillo. Además $\{0\}, A \trianglelefteq A$, a éstos le decimos *ideales impropios*.

Proposición 2.9: Si $1 \in B \leq A$ (como anillo), entonces $B^\times \leq A^\times$ (como grupos).

Proposición 2.10 (Criterio del subanillo): $B \subseteq A$ es un subanillo si y sólo si para todo $x, y \in B$ se cumple:

- $x - y \in B$.
- $xy \in B$.

Lema 2.11: La intersección arbitraria de subanillos (resp. ideales) es un subanillo (resp. ideal).

Definición 2.12: Luego, dado un conjunto $S \subseteq A$ se denota:

$$\langle S \rangle := \bigcap \{B : S \subseteq B \leq A\}, \quad (S) := \bigcap \{I : S \subseteq I \trianglelefteq A\}.$$

A los ideales de la forma (x) se les dice *principales*. Es fácil ver que $(0) = \{0\}$, y si A es unitario entonces $(1) = A$. Le llamamos *dominio de ideales principales* (abreviado DIP) a un dominio cuyos ideales sean todos principales.

Ejemplo. \mathbb{Z} es un DIP.

Proposición 2.13: Si \mathcal{F} es una familia no vacía de subanillos (resp. ideales) linealmente ordenado por inclusión, entonces $S := \bigcup \mathcal{F}$ es un subanillo (resp. ideal).

DEMOSTRACIÓN: Sean $x, y \in S$, luego $x \in S_x \in \mathcal{F}$ e $y \in S_y \in \mathcal{F}$, luego $S_x \subseteq S_y$ o $S_y \subseteq S_x$, en particular $S_z := S_x \cup S_y \in \mathcal{F}$ y contiene a ambos x, y .

Como S_z es un subanillo, entonces $x - y \in S_z \subseteq S$ y $xy \in S_z \subseteq S$, luego S es subanillo por el criterio.

En el caso de ideales, también es trivial ver que si $x \in S_x \subseteq S$, entonces $\lambda x, x\lambda \in S_x \subseteq S$, de modo que S es también ideal. \square

Proposición 2.14: Si $\emptyset \neq S \subseteq A$ conmutativo, entonces

$$(S) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i : \forall i (s_i \in S, \lambda_i \in A) \right\}.$$

En general, si tenemos un conjunto finito $(x_i)_{i=1}^n$ y unos valores arbitrarios $\lambda_i \in A$ a los que llamamos *ponderaciones*, entonces a los elementos de la forma

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n,$$

les decimos *combinaciones lineales* de los x_i . Éstos van a ser, sobretodo, importantes en el álgebra lineal, ésto también forja un paralelo entre éste y aquél capítulo.

La proposición anterior dice que el ideal generado por un subconjunto S no vacío de un anillo es el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de elementos de S .

Proposición 2.15: Todo ideal I de un anillo unitario A es propio syss no contiene elementos invertibles.

Corolario 2.16: Un dominio A es un cuerpo syss no posee ideales propios, es decir, si sus únicos ideales son (0) y A . En particular, todo cuerpo es un DIP.

Definición 2.17 – Morfismos: Una aplicación $\varphi : A \rightarrow B$ entre anillos se dice un *homomorfismo (de anillos)* si para todo $a, b \in A$ se cumple:

1. $f(a + b) = f(a) + f(b)$.
2. $f(ab) = f(a)f(b)$.
3. $f(1) = f(1)$ si A, B son unitarios.

Definimos el kernel de un morfismo de anillos como $\ker \varphi := \varphi^{-1}[\{0\}]$.

Proposición 2.18: Si φ es un homomorfismo de anillos entre A y B . Entonces

1. $\varphi(0_A) = 0_B$.
2. Si φ es suprayectiva y A es unitario, entonces B también y $\varphi(1_A) = 1_B$.
3. Se cumple que $\text{Img } \varphi \leq B$ y $\ker \varphi \leq A$.
4. $\varphi[A^\times] \subseteq B^\times$.

De esta forma se cumple una especial reciprocidad entre la teoría de grupos y la de anillos. Los subgrupos son como los subanillos, y los subgrupos normales son como los ideales.

Lema 2.19: Dado $I \leq A$ propio, se cumple que $a \equiv b$ (mód I) dado por $(b - a) \in I$ es una relación de equivalencia. Esta relación cumple que si $a \equiv c$ y $b \equiv d$ (mód I), entonces $a + b \equiv c + d$ y $ab \equiv cd$ (mód I).

Teorema 2.20: Dado $I \leq A$ propio, entonces $(A/I, +, \cdot)$ es también un anillo.

Lema 2.21: Si $I \leq A$ y $J \leq A$, entonces $I + J \leq A$.

Teorema 2.22 – Teoremas de isomorfismos: Sean A, B anillos y $\varphi : A \rightarrow B$ un morfismo, luego:

I $A/\ker \varphi \cong \text{Img } \varphi$.

II Si $I \leq A$ y $J \leq A$, entonces

$$\frac{I + J}{I} \cong \frac{I}{I \cap J}.$$

III Si $J \leq I \leq A$ y $J \leq A$, entonces

$$\frac{A}{I} \cong \frac{A/J}{I/J}.$$

Corolario 2.23: Si $\varphi : A \rightarrow B$ es morfismo, entonces:

1. φ inyectiva $\text{syss } \ker \varphi = \{0\}$.
2. φ suprayectiva $\text{syss } A/\ker \varphi \cong B$.

Definición 2.24 – Dominio euclídeo: Sea A un dominio íntegro ordenado es un *dominio euclídeo* syss existe una función $d : A_{\neq 0} \rightarrow \mathbb{N}$, llamada *norma euclídea*, si cumple los siguientes axiomas:

1. Si $a, b \in A_{\neq 0}$ entonces $d(a) \leq d(ab)$.
2. Si $a, b \in A_{\neq 0}$ existen $q, r \in A$ tales que $b = aq + r$, con $d(r) < d(a)$ o $r = 0$.

Obsérvese que \mathbb{Z} es un dominio euclídeo, donde la norma euclídea es evidentemente el valor absoluto.

Teorema 2.25: Todo dominio euclídeo es un DIP.

DEMOSTRACIÓN: Sea A un dominio euclídeo de norma d . Sea I un ideal no-trivial de A y $a \in I$ el elemento tal que $d(a) = \min(d[I])$.

Si $b \in I$, existen $q, r \in A$ tales que $b = aq + r$, con $d(r) < d(a)$ o $r = 0$ por definición de norma euclídea. Como I es ideal, $aq \in I$, por ende, $r = b - aq \in I$. Como a es el mínimo de d en I , nos queda que $r = 0$; es decir, $b = aq \in I$, luego $I = (a)$. \square

Teorema 2.26: Sea A un dominio íntegro, entonces son equivalentes:

- (1) Todo ideal de A está finitamente generado.
- (2) Para toda cadena ascendente de ideales de A

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$$

existe n tal que para todo $m \geq n$ se da $I_n = I_m$.

- (3) Toda familia no-vacía de ideales de A admite un maximal¹ por inclusión (\subseteq).

DEMOSTRACIÓN: (1) \implies (2). Sea $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ una cadena ascendente de ideales de A , entonces, $I := \bigcup_{i=0}^{\infty} I_i$ (la unión de los ideales) es también un ideal, por (1), I posee un generador finito X . Luego, todo

¹Vea la expresión [TdC 2.7].

elemento de X pertenece a algún I_i , por ende, eventualmente se cumple que $X \subseteq I_n$, no obstante, $I = (X) \subseteq I_n$, por lo tanto se cumple el enunciado de (2) como se quería.

(2) \implies (3). Veamos que dicho I_n en la cadena de la prop. (2) corresponde al elemento máximo (en particular, el maximal) de dicha cadena, por ende, ambas expresiones son equivalentes.

(3) \implies (1). Si el ideal I de A no fuese finitamente generado, podríamos considerar $a_0 \in I$ y ver que $(a_0) \subset I$, luego, podríamos extraer $a_1 \in I \setminus (a_0)$ tal que $(a_0, a_1) \subset I$ y así sucesivamente para obtener una cadena infinita sin un elemento maximal. \square

Definición 2.27 – Anillo noetheriano: Un dominio íntegro es un *anillo noetheriano* si cumple con las condiciones del teorema 2.26.

Nótese que todo DIP es trivialmente noetheriano, por ende, todo cuerpo lo es también.

§2.1.1 Teorema del binomio.

Definición 2.28: Dado n natural se define por recursividad:

$$0! := 1, \quad (n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

A ésta función se le dice *factorial* de n .

Dados n, m naturales con $n \geq m$ se denota por $\binom{n}{m}$ (léase “ n elige m ”) a

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Proposición 2.29: Se cumple:

1.

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

2.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n.$$

3. Si $m < n$, entonces

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

(regla de Pascal).

4. $\binom{n}{m}$ siempre es un número natural.

DEMOSTRACIÓN: 3.

$$\begin{aligned} \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)(n-m-1)!} + \frac{n!}{(m+1)m!(n-m-1)!} \\ &= \frac{(m+1)n! + (n-m)n!}{(m+1)m!(n-m)(n-m-1)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{(m+1)!(n-m)!} = \binom{n+1}{m+1}. \end{aligned}$$

4. Se demuestra para todo m por inducción sobre n aplicando la regla de Pascal.

□

Teorema 2.30 – Teorema del binomio de Newton: Sean $x, y \in A$ y $n \in \mathbb{N}$ donde A es un dominio, entonces:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

HINT: Lo probaremos por inducción sobre n , notemos que la identidad es clara para $n \in \{0, 1\}$. Para ello, el procedimiento es el siguiente:

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)(x + y)^n = (x + y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1} + \binom{n+1}{0} y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{(n+1)-k}.
\end{aligned}$$

Lo que completa la demostración. \square

Definición 2.31 – Característica: Dado un anillo unitario A , siempre se puede construir un homomorfismo (por recursividad) de anillos $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow A$ tal que $\varphi(1)$ es la unidad de A . Luego, denotamos por $\text{car } A$ al $n \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $\varphi(n) = 0$ y, de no existir tal n , definimos que $\text{car } A = 0$.

Proposición 2.32: Dado un anillo unitario A se cumple:

1. Si $\text{car } A = 0$, entonces A posee un subanillo isomorfo a \mathbb{Z} .
2. Si $\text{car } A = n$, entonces A posee un subanillo isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Corolario 2.33: La característica de un dominio íntegro (y por ende de un cuerpo) sólo puede ser nula o un número primo.

Teorema 2.34: Si $\text{car } \mathbb{k} = p \neq 0$, entonces para todo $x, y \in \mathbb{k}$ se cumple que

$$(x + y)^p = x^p + y^p.$$

HINT: Para ésto se debe ocupar un poco de teoría de números para ver que los coeficientes binomiales $\binom{p}{k}$ son múltiplos de p . \square

2.2. Divisibilidad en anillos

Curiosamente ya hemos visto como el conjunto de números enteros admite las ideas de divisibilidad, y en la siguiente sección sobre como esta propiedad se mantiene en polinomios racionales. El objetivo de esta sección es generalizar dicha propiedad en términos del álgebra moderna, también se pretende profundizar en teoría de números en el reino de la aritmética modular; por supuesto, comencemos con una definición:

Definición 2.35 – Divisibilidad: Sea A un dominio con $a, b \in A$. Escribimos $a \mid b$ cuando existe $q \in A$ tal que $b = aq$. Si dos elementos cumplen que $a \mid b$ y $b \mid a$, diremos que son **asociados**.

Todas las propiedades de divisibilidad en enteros se conservan. Cabe destacar que podemos generalizar una propiedad de los enteros y notar que toda unidad u divide a todo elemento de A . Asimismo, dos elementos son asociados syss el segundo es el producto del primero por una unidad.

Los divisores de un elemento se clasifican en: *impropios* que son las unidades y los asociados de sí mismo; y *propios*.

Definición 2.36 – Irreducibles y primos: Sea A un dominio. Diremos que un elemento es *irreducible* (resp. *reducible*) syss es no es nulo, ni una unidad, ni posee (resp. sí posee) divisores propios.

Diremos también que un elemento p es *primo* syss $p \mid ab$ implica $p \mid a$ o $p \mid b$.

De esta forma, podemos ver que todo dominio A se divide en su elemento nulo, sus unidades, sus elementos reducibles y sus irreducibles.

En caso de los enteros podemos ver que la noción de primo e irreducible concuerdan, pero ese no es siempre el caso.

Teorema 2.37: En un dominio íntegro A todo primo es irreducible.

DEMOSTRACIÓN: Sea $p = xy$ un primo de A con $x, y \in A$. Por construcción, $xy \mid p$, lo que implica, $x \mid p$ e $y \mid p$. También $p \mid xy$, por definición, $p \mid x$ o $p \mid y$. Luego, alguno de los dos (x o y) está asociado con p , por ende, el otro es una unidad; es decir, p es irreducible. \square

Definición 2.38: Un dominio A se dice que posee la *propiedad de factorización*, cuando todo elemento reducible puede expresarse como un producto de elementos irreducibles. Dicho dominio será llamado un *dominio de factorización única* (DFU) cuando posee dicha propiedad, pero con elementos primos en su lugar y cuando todo par de factorizaciones:

$$n = p_1 \cdots p_n = q_1 \cdots q_m$$

satisfacen que $n = m$ y que existe una permutación $\sigma \in S_n$ tal que p_i y $q_{\sigma(i)}$ son asociados (unicidad de la factorización).

Si no comprende la unicidad, déjeme aclarárselo con un ejemplo. El número 6 puede descomponerse en factores irreducibles como

$$6 = 2 \cdot 3 = (-3) \cdot (-2),$$

nótese que podemos reordenar los elementos (por medio de la permutación) y ver que el 2 y el -2 son asociados, por tanto, no corresponde a una “factorización distinta”. En general, si A es DFU entonces todo elemento podrá escribirse de la forma

$$n = u \prod_{i=0}^k p_i^{\alpha_i},$$

donde u es una unidad, p_i es un elemento irreducible y para $i \neq j$ se da que p_i no está asociado con p_j .

El teorema fundamental de la aritmética señala que \mathbb{Z} es un DFU.

Teorema 2.39: Sea A un anillo noetheriano, entonces, posee la propiedad de factorización. Si además todo irreducible es primo, entonces A es DFU.

DEMOSTRACIÓN: Lo probaremos por negación de la implicación, i.e., probaremos que si A no posee la propiedad de factorización entonces A no sería noetheriano.

Comencemos por construir un conjunto S que contiene: el cero, las unidades de A , sus elementos irreducibles y los productos **finitos** entre irreducibles. Luego, supongamos que $B := A \setminus S$ fuese no-vacío, de manera que existe $x \in B$; como x es reductible, existen $y, z \in A$ no-unitarios tales que $x = yz$, y por lo menos alguno pertenece a B .

Utilizando esta información, crearemos una secuencia de elementos de B tales que $x_0 = x$ y $x_{n+1} \mid x_n$ con ambos siempre en B . En general, para $m > n$ se tiene que $x_m \mid x_n$, pero $x_n \nmid x_m$.

Luego, el conjunto $I = \{a : \exists n \in \mathbb{N} \ x_n \mid a\}$ es un ideal y veremos que no puede ser finitamente generado. Para ello, consideremos que los elementos y_0, \dots, y_k son pertenecientes a I . Por lo tanto, debe existir un $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \mid y_i$ para todo $0 \leq i \leq k$. Dicho conjunto no puede generar el conjunto, pues de lo contrario $x_m \mid x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ lo que es una contradicción.

Para la segunda afirmación, supondremos que n es un elemento con dos factorizaciones

$$n = \prod_{i=0}^j p_i = \prod_{i=0}^k q_i,$$

como las factorizaciones son iguales, podemos decir que se dividen entre sí, por ende, $p_0 \mid \prod_{i=0}^k q_i$ y, como p_0 es primo, $p_0 \mid q_i$ para algún $i = 0, \dots, k$. Construyamos la permutación σ tal que $p_0 \mid q_{\sigma(0)}$, pero como ambos son irreducibles, son asociados. Por cancelación, nos queda que $\prod_{i=1}^j p_i = \prod_{i=1}^k q_{\sigma(i)}$ y repetimos la operación j veces para comprobar el teorema. \square

Definición 2.40: Sea A un anillo. Diremos que un ideal P en A es *primo* syss $P \neq A$ y si para todo $ab \in P$ se cumple que $a \in P$ o $b \in P$.

Diremos que un ideal M en A es *maximal* syss $M \subseteq I \subseteq A$ implica que $M = I$ o $I = A$.

Teorema 2.41: Un ideal P en un dominio A es primo syss A/P es un dominio íntegro.

DEMOSTRACIÓN: \implies . Nótese que como $P \neq A$, entonces $1 \notin P$, luego $[1] \neq 0$, es decir, A/P es un dominio. Si $a, b \in A/P$ cumplen que $[a][b] = [ab] = 0$, entonces $ab \in P$ lo que implica que $a \in P$ o $b \in P$ por definición de primo, de modo que o $[a] = 0$ o $[b] = 0$, por lo que el dominio es íntegro.

\impliedby . Es análogo. \square

Teorema 2.42: Un ideal M en un dominio A es maximal syss A/M es un cuerpo.

DEMOSTRACIÓN: \implies . Como $M \neq A$, A/M es un dominio. Supongamos que I es un ideal de A/M y $f : A \rightarrow A/M$ es un homomorfismo de anillos, entonces $J := f^{-1}(I)$ es un ideal que satisface que $M \subseteq J \subseteq A$, luego $M = J$ o $J = A$. En el primer caso, I corresponde al ideal trivial (0) . En el segundo, corresponde al ideal (1) . Luego por el corolario 2.16 es un cuerpo.

\impliedby . Es análogo. \square

Corolario 2.43: En un dominio A , todo ideal maximal es primo.

Teorema 2.44: Son equivalentes:

1. El axioma de elección.
2. Todo ideal propio de un dominio está contenido en un ideal maximal.

3. Teorema de Krull: Todo dominio tiene un ideal maximal.

DEMOSTRACIÓN: (1) \implies (2). Sea \mathcal{F} la familia de los ideales propios de un dominio D que contienen a un ideal I fijo. Como $I \in \mathcal{F}$ se da que es una familia no vacía parcialmente ordenada y toda cadena tiene supremo (su unión, por la proposición 2.13) luego \mathcal{F} tiene un elemento maximal que es un ideal.

(2) \implies (3). Basta notar que (0) es un ideal propio en todo dominio.

(3) \implies (1). En particular veremos que el teorema de Krull equivale a la siguiente proposición:

Si \mathcal{F} es una familia de conjuntos no vacíos, entonces existe K tal que para todo $S \in \mathcal{F}$ se cumple que $S \cap K$ es singular.

Generalizando la descripción de K diremos que es una *dispersión* de \mathcal{F} y en particular el AE equivale a que toda familia de conjuntos no vacíos posee una dispersión maximal.

<++>

□

Lema 2.45: Sea A un dominio íntegro y $p \in A$ no nulo, entonces:

1. (p) es primo syss p lo es.
2. p es irreducible syss (p) es maximal entre los ideales principales.

Como un DIP es un dominio, vemos que efectivamente todo irreducible es primo. Lo que sumado al teorema 2.39 nos da:

Teorema 2.46: Todo DIP es un DFU.

Definición 2.47: Sea A un DFU, entonces definiremos un *máximo común divisor* (mcd) entre dos números $a, b \in A$ como el producto de todos los primos que dividen a ambos elevados al mínimo exponente en cada caso. Análogamente definimos un *mínimo común múltiplo* (mcm) entre ambos como el producto de todos los primos que dividen a cualquiera de los dos elevados al máximo exponente en cada caso.

Nótese que siempre, todos los mcd's y mcm's resp. son asociados entre sí.

Teorema 2.48 – Identidad de Bézout: Sea A un DIP con $a_0, \dots, a_n \in A$; luego sea m un mcd, entonces

$$(m) = \sum_{i=0}^n (a_i) = (a_0, \dots, a_n);$$

en particular, existen $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in A$ tales que

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i = m.$$

DEMOSTRACIÓN: Definamos que $(m) = \sum_{i=0}^n (a_i)$, probaremos que m es un mcd de dicha secuencia. Evidentemente $m \mid a_i$ para $i = 0, \dots, n$ y si d es un divisor común, entonces $(m) \subseteq (d)$ lo que implica $m \mid d$. Como el resto de mcd's son asociados, también están contenidos en (m) ; por simetría, el ideal de todos los mcd's concuerda y es el mismo. \square

Nótese que conceptos como los de ser coprimos se mantienen.

Teorema 2.49 – Teorema chino del resto: Si A es un DIP y p, q son coprimos, entonces

$$A/(pq) \cong A/(p) \times A/(q).$$

HINT: Sigue de la demostración original aplicando también la identidad de Bézout. \square

Otro concepto, que nos será de especial utilidad en la sección sobre divisibilidad polinómica, es la de cuerpo de cocientes:

Teorema 2.50: Sea A un dominio, entonces, denotaremos por \sim a la relación en A^2 tal que

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc.$$

Luego \sim resulta ser una relación de equivalencia, con la cual definimos $K := A^2 / \sim$ como el conjunto de las clases de equivalencia de A ; a K le llamamos su *cuerpo de cocientes* (también llamado *anillo* o *cuerpo de fracciones*), pues efectivamente resulta ser un cuerpo y posee todos los elementos de A .

2.3. Polinomios

Un polinomio viene a representar objetos de la forma

$$2x + 1; \quad 5xy + 6z^3; \quad 15x^2 + 3y + 2x$$

y así, y para ello surgen dos representaciones incompatibles: la analítica y la algebraica.

Para explicarlo en términos sencillos me serviré de una analogía: imagina que queremos definir el concepto de un platillo gastronómico, para ello podrías definirlo o en base a una receta o en base al resultado final. La primera es la visión de los algebristas sobre los polinomios, la segunda la de los analistas. Ambas son útiles dentro de sus contextos. Dado que la receta corresponde a una manipulación de los ingredientes, y nuestros *ingredientes* son los números de nuestras estructuras, puede darse que queramos modificar una estructura, ya sea extendiéndola o contrayéndola, lo que equivale a cambiar los ingredientes. Ésto es fatal para el platillo final, ya que es muy difícil extraer la receta del resultado para permitirnos encontrar una manera *natural* de ver la transformación del platillo; sin embargo, la receta no tiene problema, ya que basta con re-ejecutar el proceso para obtener el platillo modificado sin mayores esfuerzos.

Ejemplo (informal). Consideremos que trabajamos en \mathbb{F}_p y se define el polinomio $f(x) := x^{p^2} - x^p$. Por el pequeño teorema de Fermat es fácil ver que toma 0 en todo punto, ¿deberíamos entonces extender el polinomio como el constante 0? Consideremos $\mathbb{F}_i := \{a + ib : a, b \in \mathbb{F}_p\}$ donde $i^2 = -1$ y para tomar un ejemplo en concreto, sea $p = 3$; luego $f(i) = i^9 - i^3 = i - (-i) = 2i \neq 0$. Queda al lector explicar cuándo se replica este fenómeno.

Definición formal. Aquí haremos un enredado ejercicio para poder definir a los polinomios como *recetas*, debido a su complejidad se deja como opcional. Para la construcción de los polinomios, primero construiremos una versión más rudimentaria: los *monomios*. El término “-nomio” significa adecuadamente “término”, de manera que queremos algo de la forma x^2y , por ejemplificar, sin preocuparse aún de “los números que acompañan los monomios”, llamados *coeficientes*.

Definiremos S como un conjunto cualquiera que contiene a las indeterminadas (usualmente denotadas x, y , etc.). Y denotaremos $\eta : S \rightarrow \mathbb{N}$ a una función que representará un monomio, que a cada indeterminada le asigna

su exponente. Luego algo como x^2y se representa por la función

$$\eta(s) := \begin{cases} 2, & s = x \\ 1, & s = y \\ 0, & s \notin \{x, y\} \end{cases}$$

Si se admite que ϵ_x es la función que da 1 cuando la indeterminada del argumento y del índice son iguales, y cero en otro caso, entonces podemos denotar $\eta = 2\epsilon_x + 1\epsilon_y$. Denotamos M al conjunto de todos los monomios.

Definición 2.51 – Polinomio: Finalmente, dado un anillo A y un conjunto de indeterminadas S , denotaremos $A[S]$ al conjunto de todas las aplicaciones $f : M \rightarrow A$ tal que $M \setminus f^{-1}[0]$ es finito, es decir, tal que tan sólo finitos monomios poseen coeficientes no nulos. En definitiva f representa a la expresión

$$f(u_1)x_1^{u_1(x_1)} \cdots x_n^{u_1(x_n)} + \cdots + f(u_m)x_1^{u_m(x_1)} \cdots x_n^{u_m(x_n)}.$$

Definimos el grado (en inglés, *degree*) de un polinomio, como la mayor suma de exponentes por término, formalmente

$$\deg f = \max\{u(x_1) + \cdots + u(x_n) : f(u) \neq 0\}$$

Digamos que el grado de f es d , si hay un sólo término de f de grado d diremos que el coeficiente de dicho término es llamado *coeficiente director* o *líder*. Si el coeficiente director es 1, se dice que el polinomio es *mónico*.

Además definimos $+, \cdot$ sobre $A[S]$ de la siguiente forma, para todo $\eta \in M$

$$(f + g)(\eta) := f(\eta) + g(\eta), \quad (f \cdot g)(\eta) := \sum_{\substack{\kappa, \lambda \in M \\ \kappa + \lambda = \eta}} f(\kappa) \cdot g(\lambda).$$

Cabe destacar que puede darse el caso que dado un polinomio no-constante de una sola indeterminada f exista un $x \in A$ tal que $f(x) = 0$, en ese caso decimos que x es una *raíz* del polinomio.

En realidad, todo este proceso corresponde a una formalidad para la construcción absoluta de los polinomios, en lo sucesivo, sólo los denotaremos mediante sus representaciones, por ejemplo

$$f(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^i$$

el cual pertenece a $A[x]$. Por lo general se suelen usar polinomios de una única variable por su simpleza, cabe destacar que si estos poseen un grado digamos n , entonces es por que el término x^n es el mayor con coeficiente no nulo.

Sean $f, g \in A[x]$, entonces

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) = \sum_{i \geq 0} (a_i + b_i)x^i$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k.$$

Teorema 2.52: Sea A un anillo, entonces $(A[x], +, \cdot)$ lo es. Si A es unitario, $A[x]$ también lo es. Si A es conmutativo, $A[x]$ también lo es.

DEMOSTRACIÓN: Es evidente que $(A[x], +)$ es un grupo abeliano, la asociatividad del producto se demuestra con

$$\begin{aligned} (fg)h &= \sum_{v \geq 0} \left(\sum_{u+k=v} \left(\sum_{i+j=u} a_i b_j \right) c_k \right) x^v = \sum_{v \geq 0} \left(\sum_{i+j+k=v} a_i b_j c_k \right) x^v \\ &= \sum_{v \geq 0} \left(\sum_{i+w=v} a_i \sum_{j+k=w} b_j c_k \right) x^v = f(gh), \end{aligned}$$

la distributividad es simple, puede comprobarla manualmente. Si A es unitario, entonces $1(x) := 1 \in A[x]$ que es, asimismo, una unidad. La conmutatividad es trivial. \square

Podemos afirmar sencillamente que $\deg(f + g) \leq \max(\deg f, \deg g)$ y $\deg(fg) \leq \deg f + \deg g$.

Teorema 2.53: Sean $f, g \in A[x]$ no nulos, de grados n y m respectivamente, tales que a_n, b_m **no** son divisores de cero, entonces

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g.$$

DEMOSTRACIÓN: Notemos que como a_n, b_m son no nulos y no divisores de cero, se da $\sum_{i+j=n+m} a_i b_j = a_n b_m \neq 0$, pues para todo $i > n$ y $j > m$ ocurre $a_i = b_j = 0$, es decir, $\deg(fg) \leq \deg f + \deg g$, por tricotomía, $\deg(fg) = \deg f + \deg g$. \square

Cabe destacar que como todo polinomio de una indeterminada posee coeficientes en el anillo, todo polinomio de $(n + 1)$ indeterminadas es realmente un polinomio de una con coeficiente en el anillo de polinomios de n indeterminadas, es decir, $A[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] = A[x_1, \dots, x_n][x_{n+1}]$.

Notemos que si $f \in A[x_1, \dots, x_n]$ entonces se escribe como prosigue

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n};$$

evidentemente, $A[x_1, \dots, x_n]$ es siempre un anillo por inducción.

Teorema 2.54: Sea A un dominio íntegro, entonces $A[x_1, \dots, x_n]$ es un dominio íntegro.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior, sabemos que multiplicar dos polinomios no nulos incrementa su grado y por definición de grado en polinomios de múltiples variables este siempre crece, por tanto, no puede ser nulo a menos que uno de ellos sea nulo, osea, es un dominio íntegro. Para formalismos, el argumento se aplica con inducción. \square

Teorema 2.55: Todas las unidades de un dominio íntegro A lo son también de $A[x_1, \dots, x_n]$.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 2.53 vemos que multiplicar polinomios sólo incrementa el grado de éste, por ende, el polinomio debe ser constante para ser invertible, luego, debe ser una unidad de A . \square

Similar a como en la sección 1.3 introducimos la división de números mediante un algoritmo, veremos que los polinomios comparten dicha propiedad:

Teorema 2.56 – Algoritmo de división polinómica: Sea A un anillo con $\alpha \in A[x]$ un polinomio no nulo cuyo coeficiente director es una unidad de A y $\beta \in A[x]$ cualquiera. Existen unos únicos polinomios $q, r \in A[x]$ tales que

$$\beta(x) = \alpha(x) \cdot q(x) + r(x), \quad 0 \leq \deg r < \deg \alpha$$

DEMOSTRACIÓN: Diremos que $n := \deg \alpha$ y $m := \deg \beta$. Si $n > m$ entonces $q = 0$ y $r = \beta$. De caso contrario ($n \leq m$), lo probaremos por inducción sobre m .

Caso $m = 0$: ocurre con $\beta(x) = b_0$ y $\alpha(x) = a_0$, con a_0 unidad, por tanto, $q(x) = a_0^{-1}b_0$.

Caso m : Consideremos que $\beta(x) = b_0 + \cdots + b_mx^m$ y $\alpha(x) = a_0 + \cdots + a_nx^n$, luego $\alpha a_n^{-1}b_mx^{m-n} = \sum_{i=0}^n a_i a_n^{-1}b_mx^{m-n+i}$ posee mismo término director, por ende, existen $q, r \in A[x]$ tales que:

$$\beta - \alpha a_n^{-1}b_mx^{m-n} = \alpha q + r$$

(por hipótesis inductiva, pues el polinomio de la izquierda tiene grado a lo más $m - 1$). Finalmente, pasamos el término de α a la derecha para obtener que

$$\beta(x) = \alpha(x) \cdot (a_n^{-1}b_mx^{m-n} + q(x)) + r(x)$$

que satisface todas nuestras restricciones.

La unicidad de q, r se produce pues si existiese otro par $q', r' \in A[x]$ se tendría que

$$\alpha q + r = \alpha q' + r' \iff \alpha(q - q') = r' - r$$

como son distintos, son no nulos, por lo tanto, $\deg(r' - r) < \deg \alpha \leq \deg \alpha + \deg(q - q')$ lo que es absurdo. \square

Nuevamente, a $q(x), r(x)$ les llamamos *cociente* y *resto* resp. De igual forma, si el resto en la división entre $\beta(x)$ sobre $\alpha(x)$ escribiremos $\alpha(x) \mid \beta(x)$ como si de números enteros se tratase.

Corolario 2.57: Si A es un cuerpo, entonces $A[x]$ es un dominio euclídeo cuya norma es el grado.

Teorema 2.58: Si A es un dominio íntegro, entonces $A[x]$ es un DIP syss A es un cuerpo.

DEMOSTRACIÓN: El corolario anterior prueba \Leftarrow , así que probaremos la recíproca: Sea $a \in A$ no nulo, entonces (x, a) es un ideal de $A[x]$, pero como $A[x]$ es DIP existe $p \in A[x]$ tal que $(x, a) = (p)$. En consecuencia existe $q \in A[x]$ tal que $a = pq$ y como a es un polinomio constante, p, q han de serlo. También existe $r \in A[x]$ tal que $x = pr$, pero con $r = sx$ con lo que $ps = 1 \in (p)$.

Por identidad de Bézout existen $u, v \in A[x]$ tales que $1 = ux + va$, pero 1 es un polinomio constante luego $u = 0$ y $va = 1$ con $v \in A$ como se quería probar. \square

Teorema 2.59 – Regla de Ruffini: Sea A un anillo con $p(x) \in A[x]$ y $a \in A$. Luego la división de $p(x)$ con $(x - a)$ es la constante $p(a)$. Una consecuencia es que $(x - a) \mid p(x)$ syss a es una raíz de p .

Teorema 2.60: Sea A un anillo con $p(x) \in A[x]$ de grado n , entonces p tiene, a lo sumo, n raíces.

Teorema 2.61 (Wilson): Si p es primo, entonces

$$(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

DEMOSTRACIÓN: Por definición $(p - 1)! = 1 \cdot 2 \cdots (p - 1)$ que corresponde al producto de todo \mathbb{Z}_p^\times . Nótese que $x \in \mathbb{Z}_p^\times$ es su propia inversa syss $x = x^{-1}$ syss x es raíz de $x^2 - 1$. Dicho polinomio se expresa $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ de modo que sus raíces son ± 1 . En conclusión:

$$(p - 1)! \equiv 1 \cdot (-1) = -1 \pmod{p}. \quad \square$$

Teorema 2.62 (Algoritmo de Horner-Ruffini): Sean A un dominio íntegro con $x_0 \in R$ y $p(x) \in A[x]$ un polinomio de la forma $p(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$. Defínase la secuencia, de forma inductiva (a la inversa):

$$b_n := a_n, \quad b_i = a_i + b_{i+1}x_0;$$

entonces se cumple que

$$p(x) = (x - x_0)(b_n x^{n-1} + \cdots + b_1) + b_0$$

DEMOSTRACIÓN: Para ver el funcionamiento del algoritmo, nótese que el polinomio puede escribirse como

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + \cdots x(a_{n-1} + xa_n) \cdots). \quad \square$$

Un ejemplo rápido de aplicación es dividir el polinomio $3x^2 + 2x + 1$ sobre $x + 1 = x - (-1)$:

Podemos ver que es correcto, pues

$$(x - (-1))(3x + (-1)) + 2 = 3x^2 - x + 3x - 1 + 2 = 3x^2 + 2x + 1.$$

$$\begin{array}{r|rrr}
& 3 & 2 & 1 \\
-1 & & 3 \cdot -1 = -3 & -1 \cdot -1 = 1 \\
\hline
& 3 & 2 + (-3) = -1 & 1 + 1 = 2
\end{array}$$

Figura 2.1. Aplicación del algoritmo de Horner-Ruffini.

Teorema 2.63 – Polinomio de interpolación de Lagrange: Sea A un cuerpo con $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$. Existe un único polinomio $f \in A[x]$ de grado menor a n tal que $f(a_i) = b_i$ para todo $i = 1, \dots, n$; y está dado por la fórmula^a

$$f(x) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{P_i(x)}{P_i(a_i)}, \quad P_i(x) = \frac{\prod_{j=1}^n (x - a_j)}{x - a_i}. \quad (2.1)$$

^aEn análisis matemático, la expresión $P_i(a_i)$ estaría indeterminada por ser del tipo “0/0”, no obstante, aquí, se realiza la división polinómica primero y luego se efectúa la aplicación en el punto a_i . Dicho de otro modo, no se indetermina y se entiende que se erradica el factor $x - a_i$ del producto.

DEMOSTRACIÓN: Es fácil ver que $P_i(a_j) = 0$ cuando $i \neq j$, por lo que, el polinomio de Lagrange efectivamente cumple con las condiciones indicadas. Para ver que es el único de grado menor a n , consideremos que $g(x) \in A[x]$ también cumpliera con las condiciones, luego $(f - g)(x)$ sería un polinomio de grado menor que n con n raíces, lo que es imposible por el teorema 2.60. \square

Teorema 2.64 – Teorema de bases de Hilbert: Si A es un anillo noetheriano, entonces $A[x_1, \dots, x_n]$ lo es.

DEMOSTRACIÓN: Esencialmente sólo nos basta probar que si A es noetheriano, $A[x]$ lo es. Pues la generalización se reduce a simple inducción.

Sea I un ideal de $A[x]$, entonces definiremos I_i como el conjunto compuesto por todos los coeficientes directores de los polinomios de I de grado i (más el cero).

Es fácil ver que $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ (pues basta multiplicar por x el polinomio que justifica que $a_i \in I_i$ para ver que pertenece también a I_{i+1}). Aplicando la definición de noetheriano, existe un n tal que I_n es el maximal.

Sea $I_i = (a_{i0}, \dots, a_{im})$ (nótese que si I_i se puede generar con menos de i elementos, podemos rellenar con generadores redundantes).

Luego sea p_{ij} un polinomio en I de grado i tal que todo coeficiente de grado k sea a_{kj} . Definamos $J := (p_{ij} : i = 0, \dots, n; j = 0, \dots, m)$. Evidentemente $J \subseteq I$.

Sea f un polinomio de grado k contenido en I , probaremos que $f \in J$ por inducción sobre k . Si $k > n$, vemos que el coeficiente director de los polinomios $x^{k-n}p_{n0}, \dots, x^{k-n}p_{nm}$ son a_{n0}, \dots, a_{nm} que definen $I_k = I_n$, luego, existen $b_0, \dots, b_m \in A$ tales que

$$q := b_0x^{k-n}a_{n0} + \dots + b_mx^{k-n}a_{nm}$$

es un polinomio que comparte coeficiente director y grado con f (y además pertenece a I), luego, $f - q$ es de grado menor que q y por hipótesis inductiva, pertenece a J . El argumento es análogo si $k \leq n$. Con esta información se concluye que $I \subseteq J$ lo que, por tricotomía, implica que $I = J$. Más concretamente, demostramos que todo ideal de $A[x]$ está finitamente generado. \square

2.4. Divisibilidad de polinomios

Definición 2.65 – Contenido: Sea A un DFU, definimos la aplicación $c : A[x] \rightarrow \mathcal{P}(A)$, llamada *contenido del polinomio*, como aquella tal que sea d el mcd de los coeficientes no-nulos de $f \in A[x]$, entonces $c(f) = (d)$. Definimos que $c(0) = (0)$.

Decimos que un polinomio es *primitivo* si $c(f) = (1)$, es decir, si sus coeficientes no-nulos son coprimos. En particular, todo polinomio mónico es primitivo.

Lema 2.66 (Lema de Gauss): Sea A un DFU con $f, g \in A[x]$ primitivos, entonces $f \cdot g$ es primitivo.

DEMOSTRACIÓN: Sean $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ y $g(x) = b_0 + \dots + b_mx^m$, entonces $f \cdot g(x) = c_0 + \dots + c_{n+m}x^{n+m}$. Sea p un número primo y digamos que divide a todos los a_i con $i < u$ y los b_i con $i < v$, entonces

$$p \mid c_{u+v} - a_ub_v = \sum_{i=0}^{u-1} b_i c_{u+v-i} + \sum_{i=0}^{v-1} b_{u+v-i} c_i$$

debido a que p divide los términos en rojo. Pero como $p \nmid a_u, b_v$ concluimos que $p \nmid c_{u+v}$. \square

Teorema 2.67: Sean $f, g \in A[x]$ y $k \in A$, entonces

a) $c(kf) = (k)c(f)$.

b) $c(fg) = c(f)c(g)$.

DEMOSTRACIÓN: a) Por propiedades del mcd.

b) Consideremos que $c(f) = a$, $c(g) = b$; por lo que $f = af^*$, $g = bg^*$ con f^*, g^* primitivas. Entonces $c(fg) = c((ab)f^*g^*) = (ab)c(f^*g^*)$. Pero por lema de primitividad de Gauss, f^*g^* es primitiva, por ende el teorema. \square

Lema 2.68: Sea A un DFU con K su cuerpo de cocientes y $f, g \in A[x]$ polinomios primitivos no-constantos. f y g son asociados en $K[x]$ syss lo son en $A[x]$.

DEMOSTRACIÓN: Si lo son, entonces existen $a, b \in A$ no-nulos tales que $f = (a/b)g$, es decir, $af = bg$. Observe que

$$(a) = (a)c(f) = c(af) = c(bg) = (b)c(g) = (b),$$

por lo que a, b son asociados y existe una unidad $u \in A$ tal que $b = au$. Con esto $af = bg = aug$, por cancelación, nos queda que, efectivamente, f, g son asociados en $A[x]$. \square

Teorema 2.69: Si $f \in \mathbb{K}[x]$ es de grado 2 o 3, entonces es irreducible syss no posee raíces.

DEMOSTRACIÓN: Por regla de Ruffini es claro que si es irreducible no posee raíces. Para el caso recíproco basta considerar que toda posible factorización incluye un término de grado 1. \square

Teorema 2.70 – Criterio de Irreducibilidad de Gauss: Sea A un DFU, K su cuerpo de cocientes y $f \in A[x]$ un polinomio primitivo no-constante. f es irreducible en $A[x]$ syss lo es en $K[x]$.

DEMOSTRACIÓN: \Leftarrow . Éste caso es trivial.

\Rightarrow . Supongamos que f es reducible en $K[x]$, pero no en $A[x]$, por lo que $f = gh$ con $g, h \in K[x]$. Esto significa que

$$g(x) = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{b_i} x^i, \quad h(x) = \sum_{i=0}^m \frac{c_i}{d_i} x^i$$

con b_i, c_i no-nulos. Definamos $b := \prod_{i=0}^n b_i$ y $\tilde{b}_i := b/b_i$ con lo que $g_1(x) = \sum_{i=1}^n a_i \tilde{b}_i x^i$ de contenido u , por lo que $g_2 := g_1/u$. Por lo que $g = (b/u)g_2$ y $h = (d/v)h_2$, es decir,

$$f = \frac{bd}{uv} g_2 h_2$$

como u, v son no-nulos, f y $g_2 h_2$ son primitivos asociados en $K[x]$, luego lo son en $A[x]$. \square

Teorema 2.71 – Criterio de Irreducibilidad de Eisenstein: Sean

A un DFU, K su cuerpo de cocientes y $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in A[x]$ no-constante. Sea $p \in A$ un primo, luego f es irreducible en K si:

1. $p \nmid a_n$.
2. $p \mid a_i$ para $i = 0, 1, \dots, n-1$.
3. $p^2 \nmid a_0$.

DEMOSTRACIÓN: Supondremos que $f = af^*$ con f^* primitiva (a es una unidad en K), de modo que si fuese reducible en K existirían $g = \sum_{i=0}^r b_i x^i, h = \sum_{i=0}^s c_i x^i \in A[x]$ primitivos, no-constantes, tales que $f^* = gh$. Nótese que $a_0^* = b_0 c_0$, por lo que $p \mid b_0$ o $p \mid c_0$, pero no ambos (restricción por construcción), por ello supondremos el primer caso.

p no puede dividir todos los b_i por ser g primitiva, así que digamos que sea k el primer índice tal que $p \nmid b_k$ con $0 < k \leq r < n$. Sabemos que $p \mid a_k = \sum_{i+j=k} b_i c_j$, además de dividir todos los términos individualmente a excepción del último, por lo que, p divide a la resta (que da como resultado $b_k c_0$), pero $p \nmid b_k$ y $p \nmid c_0$, lo que sería absurdo. \square

Teorema 2.72: Sea A un dominio con $a \in A$ invertible y $b \in A$ cualquiera, entonces $p(x)$ es irreducible si y sólo si $p(ax+b)$ lo es.

DEMOSTRACIÓN: Para demostrarlo veremos que $f : A[x] \rightarrow A[x]$ donde $f(p(x)) = p(ax+b)$ es un isomorfismo de anillos. Es claro que es un homomorfismo, y como $g(x) = ax+b$ es una biyección, comprobamos el enunciado. \square

Corolario 2.73: Para todo p primo, llamamos polinomio ciclotómico p -ésimo a

$$\Phi_p(x) := \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + \dots + x^{p-1},$$

los cuales son irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$.

DEMOSTRACIÓN: Es una aplicación directa del criterio de Eisenstein usando la composición

$$\Phi_p(x+1) = \frac{(x+1)^p - 1}{x} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k+1} x^k.$$

Nótese que el polinomio es mónico, así que p no divide al coeficiente director, mientras que el término constante es p así que $p^2 \nmid p$, y para el resto basta notar que el denominador es de la forma $n!$ con $n < p$, así que no “cancela” el término con p , luego $p \mid \binom{p}{n}$. \square

Usualmente se suelen aplicar en conjunto el criterio de Eisenstein con el teorema anterior para demostrar la irreducibilidad de un polinomio. Por ejemplo, utilizando el mismo polinomio que en la aplicación del algoritmo de Horner-Ruffini, $p(x) = 3x^2 + 2x + 1$, probaremos que es irreducible en \mathbb{Q} , primero multiplicamos todos los términos por 3 para obtener $3p(x) = 9x^2 + 6x + 3$, luego consideremos el polinomio

$$3p\left(\frac{1}{3}(x+1)\right) = (x+1)^2 + 2(x+1) + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2x + 2 + 3 = x^2 + 4x + 6$$

que es irreducible por criterio de Eisenstein. Recuerde que 3 es una unidad de \mathbb{Q} y como el polinomio original es primitivo, entonces es irreducible también en \mathbb{Z} .

Teorema 2.74 – Teorema de las raíces racionales: Sea A un DFU, K su cuerpo de cocientes y $p(x) \in A[x]$ un polinomio no-constante:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i.$$

Si $\alpha = a/b$, con $a, b \in A$ coprimos, es una raíz de $p(x)$, entonces $a \mid c_0$ y $b \mid c_n$.

DEMOSTRACIÓN: Como $\alpha = a/b$ es una solución

$$\sum_{i=0}^n \frac{a^i}{b^i} c_i = 0,$$

multiplicando por b^n y aplicando técnicas de despeje obtenemos las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} a^n c_n &= -b \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i} c_i \\ b^n c_0 &= -a \sum_{i=1}^{n-1} a^{i-1} b^{n-i} c_i, \end{aligned}$$

en las cuales, evidentemente los factores resultan ser elementos de A , por lo que, $b \mid a^n c_n$ y $a \mid b^n c_0$, pero como a, b son coprimos, nos resulta que $b \mid c_n$ y $a \mid c_0$ tal como lo indica el enunciado. \square

Esto es útil tanto para buscar raíces racionales que con aplicar la regla de Ruffini simplifican los polinomios, como para comprobar la irracionalidad de ciertas raíces, en particular para otorgar otra demostración que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, pero que se generaliza a que para todo primo p se cumple que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

Corolario 2.75: Sea A un DFU, K su cuerpo de cocientes y $p(x) \in A[x]$ un polinomio no-constante mónico, entonces $\alpha \in K$ es una raíz de p syss $\alpha \in A$.

§2.4.1 Raíces básicas.

Definición 2.76: Dado $\alpha \in \mathbb{k}$, decimos que β es una n -ésima raíz de α si $\beta^n = \alpha$ o alternativamente si β es raíz del polinomio $x^n - \alpha$.

Lema 2.77: Si β es una raíz cuadrada de α , entonces $-\beta$ y β son todas las raíces cuadradas de α .

Teorema 2.78 (Fórmula cuadrática): Si $p(x) = x^2 + rx + s$, entonces llamamos definimos $\Delta := r^2 - 4s$ como el *discriminante* de $p(x)$. Finalmente p tiene raíces syss existe α raíz cuadrada de Δ , en cuyo caso las raíces de p son

$$\frac{-r + \alpha}{2}, \quad \frac{-r - \alpha}{2}.$$

DEMOSTRACIÓN: Es fácil comprobar que éste es el caso, pero la deducción viene de que si

$$x^2 + rx + s = 0 \iff x^2 + 2x \cdot \frac{r}{2} = -s$$

$$\iff x^2 + 2x \cdot \frac{r}{2} + \frac{r^2}{4} = \left(x - \frac{r}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4} - s = \frac{\Delta}{4}$$

Luego si α es raíz de Δ , entonces $\pm\alpha/2 = x - r/2$ y así se deduce el enunciado. \square

Corolario 2.79: Un polinomio de grado 2 es irreducible syss su discriminante no posee raíces cuadradas.

2.5. Números complejos

Rigurosamente los números complejos emergen por las llamadas extensiones de Kronecker, que se ven más adelante, de modo que se introduce la unidad imaginaria i como raíz del polinomio real irreducible $x^2 + 1$. Aquí haremos una definición alternativa de los números complejos que permitirá al lector acostumbrarse a ellos.

Definición 2.80 – Números complejos: Se define \mathbb{C} como el conjunto \mathbb{R}^2 con las operaciones:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Usualmente denotamos $(a, b) = a + ib$. Pues $(1, 0)$ se comporta como el neutro multiplicativo, $(0, 0)$ como el neutro aditivo e $i^2 = (0, 1)^2 = (-1, 0) = -1$. También se definen las funciones $\text{Re}, \text{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\text{Re}(a + ib) = a, \quad \text{Im}(a + ib) = b,$$

las que se llaman *parte real* e *imaginaria*, resp.

También, denotamos

$$|a + ib| := \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \overline{a + ib} := a - ib,$$

donde a $|z|$ se le dice el *módulo*^a de z y a \bar{z} el *conjugado* de z .

^aAlgunos textos prefieren usar $||$ para los complejos y dejar $|$ para los reales. Mi convenio es usar $||$ para sus espacios vectoriales.

Proposición 2.81: Para todo $z, w \in \mathbb{C}$ se cumple:

1. $|z| = 0$ syss $z = 0$.
2. $\overline{\bar{z}} = z$.

3. $|\bar{z}| = |z|$.
4. $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$ y $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$.
5. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ y $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$. En otras palabras, $\bar{\cdot}$ es un automorfismo de cuerpos.
6. $x \in \mathbb{R}$ syss $\bar{x} = x$ syss $i\bar{x} = -x$.
7. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.
8. $|zw| = |z| |w|$.

Teorema 2.82: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

DEMOSTRACIÓN: Lo único que no es obvio es que la existencia de los inversos multiplicativos, lo cual se consigue notando que si $z \in \mathbb{C}_{\neq 0}$, entonces $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$ mediante las propiedades anteriores. \square

Teorema 2.83: La aplicación $x \mapsto (x, 0)$ es un monomorfismo de cuerpos. Esto se interpreta como que \mathbb{C} contiene un subcuerpo isomorfo a \mathbb{R} .

Proposición 2.84: Todo complejo tiene raíz cuadrada. En consecuencia, todo polinomio cuadrático es reductible en los complejos.

Proposición 2.85: Si $P, Q \in \mathbb{C}[x]$, entonces:

1. Para todo $z \in \mathbb{C}$ que $\overline{P(\bar{z})} = \overline{P(z)}$.
2. $P \in \mathbb{R}[x]$ syss $P(z) = \overline{P(z)}$.
3. Si $R := P \cdot Q$, entonces $\bar{R} = \bar{P} \cdot \bar{Q}$.
4. Si $P \in \mathbb{R}[x]$ tiene raíz compleja z , entonces \bar{z} también es raíz.
5. $P \cdot \bar{P} \in \mathbb{R}[x]$.

Definición 2.86: Se define la función $\operatorname{cis} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\operatorname{cis} \theta := \cos \theta + i \sin \theta.$$

Y se define $\arg : \mathbb{C}_{\neq 0} \rightarrow (-\pi, \pi]$ así:

$$\arg(x + iy) = \begin{cases} \arctan(y/x), & x > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi, & x < 0 \wedge y \geq 0 \\ \arctan(y/x) - \pi, & x < 0 \wedge y < 0 \\ \pi/2, & x = 0 \wedge y > 0 \\ -\pi/2, & x = 0 \wedge y < 0 \end{cases}$$

Proposición 2.87: Si $z \in \mathbb{C}_{\neq 0}$, entonces $z = |z| \operatorname{cis}(\arg z)$.

Teorema 2.88 – Teorema de De Moivre: Si $u = r \operatorname{cis} \alpha$ y $v = s \operatorname{cis} \beta$, entonces

$$u \cdot v = rs \operatorname{cis}(\alpha + \beta). \quad (2.2)$$

En particular

$$u^n = r^n \operatorname{cis}(n\alpha). \quad (2.3)$$

DEMOSTRACIÓN: Basta notar que

$$\begin{aligned} u \cdot v &= rs(\operatorname{cis} \alpha \cdot \operatorname{cis} \beta) \\ &= rs(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)) \\ &= rs(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)) = rs \operatorname{cis}(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

como se quería probar. \square

Corolario 2.89: Todo $z \in \mathbb{C}$ tiene una raíz n -ésima compleja, dada por

$$|z|^{1/n} \operatorname{cis} \left(\frac{\arg z}{n} \right).$$

§2.5.1 El teorema fundamental del álgebra I. Usando un poco de cálculo diferencial de una variable se otorga una demostración al teorema fundamental del álgebra.

Lema 2.90: Si $f \in \mathbb{C}[x]$ es no constante, entonces $|f(z)| \rightarrow \infty$ si $|z| \rightarrow \infty$. Dicho de otro modo, para todo $R > 0$ existe $r > 0$ tal que para todo $|z| \geq r$ se cumple que $|f(z)| \geq R$.

DEMOSTRACIÓN: En particular probaremos que

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{|f(z)|}{|z|^n} = |c_n|$$

Esto se cumple pues si

$$f(z) = c_n z^n + \cdots + c_1 z + c_0$$

entonces

$$\frac{|f(z)|}{|z|^n} \geq |c_n| + |c_{n-1}| |z|^{-1} + \cdots + |c_0| |z|^{-n}$$

lo que converge a $|c_n|$ y que

$$|f(z)| \geq |c_n| |z|^n - |z|^{n-1}(|c_{n-1}| + \cdots + |c_0| |z|^{1-n})$$

Luego, basta exigir que $|z| > 1$ para ver que

$$\frac{|f(z)|}{|z|^n} \geq |c_n| - \frac{1}{|z|}(|c_{n-1}| + \cdots + |c_1| + |c_0|)$$

de lo que se concluye el enunciado. \square

Lema 2.91: Para todo $f \in \mathbb{C}[x]$ no constante, existe x_0 que minimiza $|f(x_0)|$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $R := |f(0)| + 1$, por el lema anterior existe r tal que para todo $|z| \leq r$ se cumple que $|f(z)| \leq R$. Luego como la imagen continua de compactos es compacta, entonces $|f|$ alcanza su mínimo en $\overline{B}_r(0)$, que es mínimo en todo el dominio. \square

Teorema 2.92 – Teorema fundamental del álgebra: Todo polinomio no constante en \mathbb{C} tiene al menos una raíz.

DEMOSTRACIÓN: Por el lema anterior todo polinomio alcanza su mínimo en módulo, así que probaremos que ese mínimo no puede ser no nulo. Sea $f \in \mathbb{C}[x]$ y x_0 el punto que le minimiza a un valor no nulo. Reemplazando $g(x) := f(x_0 + x)/|f(x_0)|$ se obtiene que $g(0) = 1$, basta probar que el mínimo de g no es 1. Sea k el mínimo natural no nulo tal que g posee un término no nulo con z^k , es decir, que g es de la forma

$$g(z) = 1 + az^k + \cdots,$$

luego, si α es una k -ésima raíz de a , entonces

$$g(\alpha z) = 1 - z^k + z^{k+1}h(z)$$

donde $h \in \mathbb{C}[x]$.

Por desigualdad triangular

$$|g(\alpha z)| \leq |1 - z^k| + |z|^{k+1}|h(z)|,$$

luego si x es un real tal que $x \in [0, 1)$, entonces

$$|g(\alpha x)| \leq 1 - x^k(1 - x|h(x)|)$$

por lo que, por límites existe un $x_1 \in (0, 1)$ tal que $x_1|h(x_1)| < 1$, por ende, $|g(\alpha x_1)| < 1$ contradiciendo la minimalidad de $g(0) = 1$. \square

Parte II.

ÁLGEBRA LINEAL

3

Módulos

Uno de los objetivos del álgebra lineal es el de poder desarrollar las llamadas ecuaciones lineales, para las cuales introduciremos objetos vitales bajo los nombres de *vectores* y *matrices* que se vuelven fundamentales en el contexto del álgebra lineal.

3.1. Módulos y vectores

Definición 3.1 – Módulos y vectores: Dado un anillo unitario A , diremos que una terna $(M, +, \cdot)$ es un A -módulo izquierdo (resp. derecho) si $+$: $M^2 \rightarrow M$ y \cdot : $A \times M \rightarrow M$ tales que $(M, +)$ es un grupo abeliano (de neutro $\mathbf{0}$) y para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M$ y $\alpha, \beta \in A$ se cumple:

1. $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$.
2. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.
3. $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$.
4. $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$.

Si A es un anillo de división entonces diremos que M es un A -espacio vectorial, a los elementos de M les diremos *vectores* y a los de A *escalares*.

Proposición 3.2: Si M es un A -módulo, entonces:

1. Para todo $\alpha \in A$ se cumple que $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
2. Para todo $\mathbf{v} \in M$ se cumple que $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
3. Para todo $\mathbf{v} \in M$ se cumple que $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

Definición 3.3 – Morfismos de módulos: Una aplicación $f : M \rightarrow N$ se dice un morfismo de A -módulos si para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M$ y $\lambda \in A$ se comprueba

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}), \quad f(\lambda \mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u}).$$

Nuevamente la nomenclatura categórica se extiende a morfismos de módulos. El espacio de morfismos de A -módulos desde M a N se denota por $\text{Hom}_A(M, N)$. Las funciones de $\text{Hom}_A(U, A)$ se dicen *funcionales*.

Un morfismo entre espacios vectoriales se dice una *función lineal*.

Ejemplos. Son A -módulos:

- A^n con la suma y el producto por escalar coordenada a coordenada.
- $\text{Func}(S; A)$ con $(f + g)(s) := f(s) + g(s)$ y $(\alpha f)(s) := \alpha \cdot f(s)$ para $\alpha \in A$ y $s \in S$.
- $A[S]$ de forma análoga a $\text{Func}(S; A)$.
- I con la suma y el producto, donde I es ideal de A .
- B , donde B es un anillo tal que A es subanillo de B .
- $\text{Hom}_A(U, V)$ de forma análoga a $\text{Func}(S; A)$.

Proposición 3.4: Dados X, Y no vacíos se cumple que $\text{Func}(X; A) \cong \text{Func}(Y; A)$ syss $|X| = |Y|$. Luego, dado un cardinal κ denotamos A^κ a un A -módulo $\text{Func}(S; A)$ genérico¹ con $|S| = \kappa$.

¹En particular consideramos la representación ordinal-conjuntista de κ .

Definición 3.5 – Submódulo: Dado M un A -módulo, se dice que N es submódulo de M (denotado $N \leq M$) si N es también un A -módulo. Trivialmente, M y $\{0\}$ son submódulos de M y se dicen *impropios*. Un submódulo se dice *simple* (o *irreducible*) si no admite submódulos propios.

Teorema 3.6 (Criterio del submódulo): N es submódulo del A -módulo M si y sólo si N es no vacío y para todo $u, v \in N$ y todo $\lambda \in A$ se cumple que $\lambda u + v \in N$.

Lema 3.7: La intersección de submódulos es un submódulo.

Definición 3.8: Si $S \subseteq M$ donde M es un A -módulo, se le llama *submódulo generado por S* a

$$\langle S \rangle := \bigcap \{N : S \subseteq N \leq M\}.$$

Se dice que S es un *sistema generador* de M si $\langle S \rangle = M$.

Proposición 3.9: Se cumple que

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : \forall i (\lambda_i \in A \wedge x_i \in S) \right\}.$$

Definición 3.10 – Suma de submódulos: Si $\{N_i\}_{i \in I}$ son submódulos de M , entonces se define su suma como

$$\sum_{i \in I} N_i := \left\langle \bigcup_{i \in I} N_i \right\rangle,$$

en particular $S + T := \langle S \cup T \rangle$.

Se dice que una familia de submódulos $\{N_i\}_{i \in I}$ es *independiente* si para todo $i \in I$ se cumple que $N_i \cap \sum_{j \neq i} N_j = \{0\}$. La suma de una familia independiente de submódulos se dice *directa* y se denota como $\bigoplus_{i \in I} N_i$.

Proposición 3.11: Si N es un submódulo del A -módulo M , entonces $x \equiv y \pmod{N}$ definido porque $x - y \in N$ es una relación de equivalencia,

bajo la cuál se denota por M/N al conjunto cociente que también resulta ser un A -módulo.

Teorema 3.12 – Teoremas de isomorfismos: Se cumple:

I Si M, N son A -módulos y $\varphi : M \rightarrow N$ un morfismo, entonces

$$\frac{M}{\ker \varphi} \cong \text{Img } \varphi.$$

II Si S, T son submódulos del A -módulo M , entonces

$$\frac{S}{S \cap T} \cong \frac{S + T}{T}.$$

III Si $S \leq T \leq M$, entonces

$$\frac{M}{T} \cong \frac{M/S}{T/S}.$$

Teorema 3.13: Sea M un A -módulo y $\{N_i\}_{i \in I}$ una familia de submódulos tales que $M = \sum_{i \in I} N_i$, son equivalentes:

- a) $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$.
- b) Si $\sum_{i \in I} m_i = 0$ con $m_i \in N_i$ para todo $i \in I$, entonces $m_i = 0$.
- c) Para todo $m \in M$ existen unos únicos $m_i \in N_i$ para cada $i \in I$ tales que

$$m = \sum_{i \in I} m_i.$$

DEMOSTRACIÓN: a) \implies b). Procedemos a demostrarlo por contradicción, supongamos que existe un subconjunto $J \subseteq I$ tal que

$$\sum_{j \in J} m_j = 0$$

con $m_j \neq 0$ para todo $j \in J$. Tomemos un $j_0 \in J$ tal que $m_{j_0} \neq 0$, evidentemente $m_{j_0} = \sum_{j \in J \setminus \{j_0\}} -m_j$. Luego

$$m_{j_0} \in N_{j_0} \cap \sum_{j \in J \setminus \{j_0\}} N_j \subseteq N_{j_0} \cap \sum_{i \in I \setminus \{j_0\}} N_i.$$

b) \implies c). Consideraremos el siguiente homomorfismo

$$\begin{aligned} f : \prod_{i \in I} N_i &\longrightarrow M \\ (m_i)_{i \in I} &\longmapsto \sum_{i \in I} m_i, \end{aligned}$$

por construcción, sabemos que corresponde a un epimorfismo, y la propiedad b) nos asegura que $\ker f = (0)_{i \in I}$, por ende es un monomorfismo.

c) \implies a). También por contradicción, sea $m \in M$ con dos descomposiciones

$$m = \sum_{i \in I} m_i = \sum_{i \in I} n_i.$$

Luego para algún $i \in I$ ha de darse que $m_i \neq n_i$, luego

$$0 \neq m_i - n_i = \sum_{j \neq i} n_j - m_j$$

luego $m_i - n_i \in N_i \cap \sum_{j \neq i} N_j$ que es absurdo. \square

3.2. Módulos libres y bases

Definición 3.14: Sea M un A -módulo con $X \subseteq M$. Diremos que X es *libre* o que sus elementos son *linealmente independientes* si la ecuación

$$\lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$$

se da con $x_i \in X$ distintos dos a dos y $\lambda_i \in A$ siempre que $\lambda_i = 0$ para todo $i = 0, \dots, n$. De lo contrario decimos que el conjunto está *ligado* o que hay elementos que son *linealmente dependientes* entre sí.

Si, X es un conjunto libre y además es un sistema generador, diremos que X es una *base* de dicho módulo. Si M posee alguna base, entonces, se dice que es *libre*.

Ejemplo. Es fácil notar que con la suma y producto normal \mathbb{Q} es un \mathbb{Z} -módulo, sin embargo, no es libre (¿por qué?).

§3.2.1 Finitamente generados. De momento nos referiremos a módulos finitamente generados como aquellos que poseen un sistema generador finito. Ciertamente hay algunos que no lo poseen, pero sus resultados suelen ser más complicados.

Teorema 3.15: Sea M un A -módulo, entonces $M \cong A^n$ syss posee una base de cardinal n .

DEMOSTRACIÓN: Notemos que si X es una base cualquiera de M , entonces

$$M = \bigoplus_{x \in X} \langle x \rangle;$$

luego es isomorfo a $\prod_{x \in X} \langle x \rangle$ y $\langle x \rangle \cong A$ trivialmente para todo $x \in X$. \square

Lema 3.16: Si S es ligado en un espacio vectorial, entonces existe un $v \in S$ que es generado por el resto, es decir, tal que $v \in \langle S \setminus \{v\} \rangle$.

Teorema 3.17: Si G es un sistema generador ligado, entonces $v \in G$ está generado por el resto de G syss $G \setminus \{v\}$ es un sistema generador. Si S es libre en un espacio vectorial y v no es generado por S , entonces $S \cup \{v\}$ es libre.

Corolario 3.18: Todo sistema generador finito contiene una base, en consecuencia, todo espacio vectorial finitamente generado es libre.

Teorema 3.19: Todo par de bases de un espacio vectorial finitamente generado posee el mismo cardinal.

DEMOSTRACIÓN: Sean $X := \{x_1, \dots, x_n\}$ e Y bases tal que $|X| \leq |Y|$ (en principio, Y podría ser infinito). Sea $y_1 \in Y$ cualquiera, como $y_1 \in V = \langle X \rangle$, entonces existen $\alpha_{1,i} \in \mathbb{k}$ tales que

$$y_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_{1,i} x_i$$

como $y_1 \neq 0$ algún $\alpha_{1,i}$ ha de ser no nulo y reordenando supongamos que $\alpha_{1,1} \neq 0$, luego

$$x_1 = \frac{1}{\alpha_{1,1}} y_1 - \sum_{i=2}^n \frac{\alpha_{1,i}}{\alpha_{1,1}} x_i,$$

llamando $B_0 := X$ y $B_1 := B_0 \setminus \{x_1\} \cup \{y_1\}$, como $X \subseteq \langle B_1 \rangle$, entonces B_1 es base y posee n elementos.

Análogamente se escoge $y_2 \in Y \subseteq V = \langle B_1 \rangle$, luego existen $\alpha_{2,i} \in \mathbb{k}$ tales que

$$y_2 = \alpha_{2,1} y_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_{2,i} x_i$$

notamos que algún $\alpha_{2,i}$ con $i > 1$ ha de ser no nulo y reordenamos para que $\alpha_{2,2} \neq 0$, luego

$$x_2 = \frac{1}{\alpha_{2,2}} - \left(\frac{\alpha_{2,1}}{\alpha_{2,2}} y_1 + \sum_{i=3}^n \frac{\alpha_{2,i}}{\alpha_{2,2}} x_i \right),$$

de modo que si $B_2 := B_1 \setminus \{x_2\} \cup \{y_2\}$ entonces B_2 es base.

Iterando el proceso anterior, B_n resulta ser base y estar formado solamente a partir de elementos de Y , luego $Y = B_n$ pues de tener elementos aparte sería ligado y es claro que B_n posee n elementos. \square

Corolario 3.20: Todo conjunto libre en un espacio vectorial finitamente generado se puede extender a una base.

Definición 3.21 – Dimensión: Si V es un \mathbb{k} -espacio vectorial y sus bases son equipotentes, entonces denotamos por $\dim_{\mathbb{k}} V$ al cardinal de cualquiera de ellas.

Corolario 3.22: Si S es libre en un espacio vectorial de dimensión finita n y S posee n elementos, entonces S es base.

Teorema 3.23: Si V, W son \mathbb{k} -espacios vectoriales que comparten dimensión finita, entonces son isomorfos. En consecuencia si $n := \dim_{\mathbb{k}} V$, entonces $V \cong \mathbb{k}^n$.

Definición 3.24 – Base canónica: Se le llama *base canónica* de \mathbb{k}^n como \mathbb{k} -espacio vectorial a la base ordenada (e_1, \dots, e_n) donde

$$e_i := (0, \dots, \underset{(i)}{1}, \dots, 0).$$

Por ejemplo, la base canónica de \mathbb{k}^2 es

$$e_1 := (1, 0), \quad e_2 := (0, 1).$$

La base canónica será útil ya que en lugar de hablar de espacios vectoriales abstractos de dimensión finita podemos simplemente usar a \mathbb{k}^n con la base canónica.

§3.2.2 Espacios de dimensión infinita. Es sencillo notar que para todo cuerpo \mathbb{k} se cumple que $\mathbb{k}[x]$ es un \mathbb{k} -espacio vectorial y que $\{1, x, x^2, \dots\}$ es una base, sin embargo, generalizar sus propiedades es mucho más difícil que en el caso finito e inevitablemente hay que recurrir al axioma de elección.

Teorema 3.25: Son equivalentes:

1. **El axioma de elección.**
2. Todo conjunto libre en un espacio vectorial está contenido en una base.
3. Todo espacio vectorial es un módulo libre.

DEMOSTRACIÓN: (1) \implies (2). Aplicamos el lema de Zorn: Sea S un conjunto libre, luego se define \mathcal{F} como la familia de conjuntos libres que contienen a S , es claro que \mathcal{F} está parcialmente ordenado por la inclusión, y por el lema anterior un elemento maximal de \mathcal{F} sería una base que contenera a S . Sea \mathcal{C} una cadena de \mathcal{F} hay que probar que $T := \bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$ para poder aplicar el lema de Zorn, y es claro que $S \subseteq T$, luego sólo falta probar que T es libre, lo que queda al lector (HINT: Use prueba por contradicción).

(2) \implies (3). Trivial.

(3) \implies (1). Probaremos que implica el axioma de elecciones múltiples, que es equivalente al AE: Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de conjuntos no vacíos, hemos de probar que existe $\{F_i : i \in I\}$ tal que $F_i \subseteq X_i$ y los F_i s son finitos. Definamos $X := \bigcup_{i \in I} X_i$, si \mathbb{k} es un cuerpo arbitrario, entonces $\mathbb{k}(X)$ es el cuerpo de polinomios con indeterminadas en X . Se le llama i -grado de un monomio a la suma de exponentes de las indeterminadas de X_i . Se dice que una función racional $f \in \mathbb{k}(X)$ es i -homogéneo de grado d si todos los monomios del denominador tienen un i -grado común de n y los del numerador un i -grado común de $n+d$. Denotamos K al subconjunto de $\mathbb{k}(X)$ conformado por las funciones racionales i -homogéneas de grado 0 para todo $i \in I$; K resulta ser un subcuerpo estricto de $\mathbb{k}(X)$ (¿por qué?), luego $\mathbb{k}(X)$ es un K -espacio vectorial. Finalmente denotamos por V al K -subespacio de $\mathbb{k}(X)$ generado por X , y por B a una base de V .

Por definición de B y en particular para $x \in X_i$ existe un subconjunto finito $B(x)$ de B tal que

$$x = \sum_{v \in B(x)} \lambda_{v,x} v$$

donde $\lambda_{v,x} \in K_{\neq 0}$. Nótese que si $y \in X_i$ es distinto de x , entonces

$$y = (y/x)x = \sum_{v \in B(x)} (y/x \cdot \lambda_{v,x})v$$

donde $y/x \cdot \lambda_{v,x} \in K_{\neq 0}$, luego los $B(x)$ y los $\lambda_{v,x}/x$ son fijos para un X_i fijo, por lo que le denotamos por B_i y $\beta_{v,i}$ resp.

Finalmente $\beta_{v,i}$ es i -homogéneo de grado -1 y j -homogéneo de grado 0 para todo $j \neq i$. Así que $\beta_{v,i}$ debe tener finitos términos de X_i , luego llamamos F_i al subconjunto de X_i que tienen términos en algún $\beta_{v,i}$ para algún $v \in B_i$. \square

Teorema 3.26: Son equivalentes:

1. El axioma de elección.
2. En un espacio vectorial, todo generador contiene una base.

HINT: Siga la prueba anterior. \square

Ejemplo (bases de Hamel). Si se asume el AE, \mathbb{R} como \mathbb{Q} -espacio vectorial tiene una base H , usualmente llamada *de Hamel*. Queda al lector probar que todas las bases de Hamel no son ni finitas ni numerables. No sólo es complejo, sino imposible construir manualmente una base de Hamel, puesto que se ha demostrado que la existencia de esta base es independiente a la teoría elemental ZF. Algunos textos prueban que las bases de Hamel son conjuntos tan “raros” que las hay tanto Lebesgue-medibles como no.

Teorema (AE) 3.27: Todo par de bases de un espacio vectorial son equipotentes.

DEMOSTRACIÓN: Sean X, Y bases del espacio, podemos suponer que ambas son infinitas, pues el caso restante ya fue probado. Para todo $x \in X$ admitamos que Y_x es un subconjunto finito de Y tal que $x \in \langle Y_x \rangle$, notemos que $Y' := \bigcup_{x \in X} Y_x$ cumple que $X \subseteq \langle Y' \rangle$, de modo que Y' es base, luego $Y = Y'$. Como se asume AE cada Y_x puede ser enumerado y como son finitos los índices han de ser naturales, de modo que se puede definir $f : Y \rightarrow X \times \mathbb{N}$ tal que $f(y)$ es un par (x, i) donde y es el i -ésimo elemento de Y_x . Nótese que f es inyectiva, para finalizar, como X es infinito y se asume AE se cumple que $\aleph_0 \leq |X|$ de modo que $|X \times \mathbb{N}| = |X|$ y existe una biyección $g : X \times \mathbb{N} \rightarrow X$, luego $f \circ g : Y \rightarrow X$ es una inyección, y análogamente se construye otra inyección desde X a Y . Finalmente, por el

teorema de Cantor-Schröder-Bernstein, existe una biyección entre X e Y , que es lo que se quería probar. \square

Observe que, al contrario del caso finito, un conjunto libre puede tener cardinal la dimensión y no ser base. En efecto, basta tomar una base de cardinal infinito y quitarle un elemento cualquiera como ejemplo.

§3.2.3 Fórmulas con la dimensión.

Teorema 3.28: Si V es un espacio vectorial y $W \leq V$, entonces:

1. $\dim V = \dim W + \dim(V/W)$.
2. Si $\dim V = \dim W$ y es finito, entonces $V = W$.

DEMOSTRACIÓN: 1. Sea B_W una base de W , sabemos que se puede extender a una base B_V de V , simplemente basta ver que $B := \{[v] : v \in B_V \setminus B_W\}$ conserva el cardinal deseado y que es base de V/W . Sean $u, v \in B_V \setminus B_W$, si $[u] = [v]$ entonces $u - v \in W$, luego B_V sería ligado lo que es absurdo, análogamente se prueba que B es libre. Para notar que B es un sistema generador, basta considerar que todo $[v] \in V/W$ se escribe como

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

donde $e_i \in B_V$, luego

$$[v] = \sum_{i=1}^n \lambda_i [e_i],$$

donde $[e_i]$ o pertenece a B , o es nulo, en cuyo caso podemos omitirlo. De este modo, es claro que B es base.

2. Si B es base de W y tiene el mismo cardinal de $\dim V$ que es finito, entonces es base de V , de modo que $V = \langle B \rangle = W$. \square

Teorema 3.29 – Fórmula de Grassman: Si $A, B \leq V$ con V un espacio vectorial, entonces

$$\dim A + \dim B = \dim(A + B) + \dim(A \cap B).$$

Teorema 3.30: Si $f : V \rightarrow W$ es lineal, entonces

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\text{Im} f).$$

3.3. Matrices y transformaciones lineales

Teorema 3.31: Sea $f : X \rightarrow N$ donde X es base de un A -módulo M y N es otro A -módulo. Entonces existe un único homomorfismo de módulos $\bar{f} : M \rightarrow N$ tal que $\bar{f}|_X = f$.

Teorema 3.32: Si $f \in L(V, W)$, entonces:

1. f es inyectiva syss $\ker f = \{0\}$.
2. f es suprayectiva syss su imagen contiene a alguna base, y por ende a todas ellas.
3. En particular, si $n := \dim V = \dim W < +\infty$ entonces f es un isomorfismo de módulos syss es inyectiva o suprayectiva, lo que se reduce a ver que $\dim \ker f = 0$ o $\dim \text{Im} f = n$.

Corolario 3.33: Dos espacios vectoriales son isomorfos syss comparten dimensión.

Definición 3.34: Si $B := (e_i)_{i \in I}$ es una base (ordenada) de un A -módulo M , entonces $\pi_i^B : M \rightarrow A$ son la serie de aplicaciones tal que para todo $v \in M$ se cumple que

$$v = \sum_{i \in I} \pi_i^B(v) e_i.$$

Sabemos que para cada $i \in I$, las proyecciones π_i^B están bien definidas. Se define $\pi^B : M \rightarrow A^I$ la función tal que $\pi^B(v) := (\pi_i^B(v))_{i \in I}$.

De este modo si $v = 2e_1 + 3e_2 - 1e_3$ donde $B := (e_1, e_2, e_3)$ es una base ordenada de un módulo que contiene a v , entonces $\pi^B(v) = (2, 3, -1)$.

Proposición 3.35: Si $X := (x_1, \dots, x_n)$ es base ordenada de M , entonces

1. Para todo i se cumple que π_i^X es un funcional.

2. Para todo i, j se cumple que $\pi_i^X(x_j) = \delta_{ij}$.
3. π^X es un isomorfismo con A^n .

Por ello en lugar de denotar un A -módulo de dimensión finita denotaremos A^n .

Supongamos entonces que si $f : M \rightarrow N$ es un morfismo de módulos y M es libre, entonces f queda completamente determinado por una tupla de N correspondiente a la imagen de la base. Si además N es libre, entonces cada vector de N puede escribirse como una tupla de valores del anillo A . En síntesis, si el dominio y codominio son libres todo el homomorfismo se reduce a tuplas de tuplas de valores de A . Esto sucede más fácilmente si nos restringimos a espacios vectoriales, y en particular si éstos son de dimensión finita, en cuyo caso se cumple que toda la transformación lineal puede reducirse a $n \cdot m$ escalares, donde n es la dimensión del dominio y m la del codominio.

Definición 3.36 – Matrices: Una matriz M sobre un anillo unitario A de orden $n \times m$ es una función $M : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \rightarrow A$, donde solemos denotar $M(i, j)$ como M_{ij} . A éstos últimos valores les decimos sus *coeficientes*. El conjunto de matrices sobre A de $n \times m$ se denota $\text{Mat}_{n \times m}(A)$. El conjunto $\text{Mat}_{n \times m}(A)$ es un A -módulo, en donde:

1. $(B + C)_{ij} := B_{ij} + C_{ij}$ para todo $B, C \in \text{Mat}_{n \times m}(A)$.
2. $(\lambda B)_{ij} := \lambda B_{ij}$ para todo $B \in \text{Mat}_{n \times m}(A)$ y $\lambda \in A$.

La diagonal de una matriz se le llama al conjunto de coeficientes de coordenadas (i, i) .

Si $B \in \text{Mat}_{n \times m}(A)$ y $C \in \text{Mat}_{m \times p}(A)$, se define su producto interno como:

$$(B \cdot C)_{ij} := \sum_{k=1}^m B_{ik} C_{kj}$$

Dado $B \in \text{Mat}_{n \times m}(A)$ se define su *matriz traspuesta* como $B^t \in \text{Mat}_{m \times n}(A)$ tal que $(B^t)_{i,j} := B_{j,i}$.

Se les llama matrices:

Cuadradas A las de orden $n \times n$. Se denota $\text{Mat}_n(A) := \text{Mat}_{n \times n}(A)$.

Simétricas A las matrices cuadradas B tal que $B = B^t$.

Antisimétricas A las matrices cuadradas B tal que $B = -B^t$.

Diagonales A las que tienen coeficientes nulos en todas las coordenadas exceptuando tal vez la diagonal.

Escalares A las matrices diagonales que en la diagonal sólo contienen un valor escalar.

Identidad A la matriz escalar con valor 1. La matriz identidad de orden $n \times n$ se denota I_n .

Nula A la matriz escalar con valor 0.

Por lo general, denotaremos los valores de la matriz en una tabla, por ejemplo

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 3}(\mathbb{Q})$$

donde $M_{2,1} = 4$.

Cabe destacar que si

$$B_{ij} = f(i, j)$$

para todo i, j ; entonces también denotaremos

$$B = [f(i, j)]_{ij}$$

de modo que, por ejemplo

$$I_n = [\delta_{ij}]_{ij}.$$

En general admitiremos que A^n corresponde a $\text{Mat}_{1 \times n}(A)$, de modo que $\pi^X(\mathbf{v}) \in \text{Mat}_{1 \times n}(A)$.

Proposición 3.37: $\text{Mat}_{n \times m}(A)$ es un A -módulo libre de rango nm .

Proposición 3.38: Si B, C, D son matrices de orden apropiado en cada caso, se cumple:

1. $B \cdot (C \cdot D) = (B \cdot C) \cdot D$ (asociatividad).
2. $B \cdot (C + D) = B \cdot C + B \cdot D$ (distributividad izquierda).
3. $(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$ (distributividad derecha).
4. Si B es de orden $n \times m$, entonces $I_n \cdot B = B \cdot I_m = B$ (neutro).

5. $\text{Mat}_n(A)$ es un anillo unitario de neutro aditivo la matriz nula y neutro multiplicativo la matriz identidad.

Proposición 3.39: Si B, C son matrices de orden apropiado en cada caso, se cumple:

1. $(B^t)^t = B$.
2. $(B + C)^t = B^t + C^t$.
3. $(\lambda B)^t = \lambda B^t$ para todo $\lambda \in A$.
4. Si A es conmutativo, entonces $(B \cdot C)^t = C^t \cdot B^t$.
5. Si B es cuadrada e invertible, entonces $(B^{-1})^t = (B^t)^{-1}$.

Definición 3.40: Si $f \in L(\mathbb{k}^n, \mathbb{k}^m)$, y $X := (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n), Y := (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m)$ son bases ordenadas de \mathbb{k}^n y \mathbb{k}^m resp., entonces denotamos $M_X^Y(f)$ a la matriz de orden $n \times m$ a aquella tal que sus columnas son las imágenes ordenadas de la base X , dicho de otro modo que $M_X^Y(f) := [\pi_j^Y(f(\mathbf{x}_i))]_{ij}$.

Teorema 3.41: Sean $f \in L(\mathbb{k}^n, \mathbb{k}^m)$, X e Y bases ordenadas de \mathbb{k}^n y \mathbb{k}^m resp., entonces $B = M_X^Y(f)$ syss para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{k}^n$ se cumple:

$$\pi^Y(f(\mathbf{v})) = \pi^X(\mathbf{v}) \cdot B.$$

DEMOSTRACIÓN: \implies . Sea $X = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{x}_i$ y $B := M_X^Y(f)$, luego como f es lineal se cumple que

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n v_i f(\mathbf{x}_i).$$

Las proyecciones son también lineales, luego

$$\pi_j^Y(f(\mathbf{v})) = \sum_{i=1}^n v_i \pi_j^Y[f(\mathbf{x}_i)] = \sum_{i=1}^n v_i b_{ij} = (\pi^X(\mathbf{v}) \cdot B)_{1j},$$

como se quería probar.

\Leftarrow . Si se cumple para todo vector, en particular se cumple para los vectores de la base X y claramente

$$(M_X^Y(f))_{ij} = \pi_j^Y(f(\mathbf{x}_i)) = \sum_{k=1}^m \delta_{ik} b_{kj} = b_{ij}$$

ergo $B = M_X^Y(f)$. \square

Ejemplo (matriz cambio de base). Sea V un \mathbb{k} -espacio vectorial de dimensión n . Sean $X, Y = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ bases ordenadas de V , luego

$$\pi^X(\mathbf{v}_i) = \pi^X(\text{Id}(\mathbf{v}_i)) = \pi^Y(\mathbf{v}_i) \cdot M_Y^X(\text{Id}) = \mathbf{e}_i M_Y^X(\text{Id}) = [M_X^Y(\text{Id})]_{i,*}.$$

Teorema 3.42: Si f, g son funciones lineales y X, Y, Z son bases ordenadas adecuadas a las dimensiones en cada caso, se cumple:

1. $M_X^X(\text{Id}) = I_n$, donde $n = |X|$.
2. Para todo λ escalar se cumple $M_X^Y(\lambda f) = \lambda M_X^Y(f)$.
3. $M_X^Y(f + g) = M_X^Y(f) + M_X^Y(g)$.
4. $M_X^Z(f \circ g) = M_X^Y(f) \cdot M_Y^Z(g)$.
5. Son equivalentes:
 - a) f es invertible.
 - b) Para algún par de bases ordenadas X, Y se da que $M_X^Y(f)$ es invertible.
 - c) Para todo par de bases ordenadas X, Y se da que $M_X^Y(f)$ es invertible.
6. $L(\mathbb{k}^n, \mathbb{k}^m) \cong \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{k}) \cong \mathbb{k}^{nm}$. En particular, $L(\mathbb{k}^n, \mathbb{k}) \cong \mathbb{k}^n$.

Los últimos dos son los que justifican la definición de matrices.

Ejemplo. Si X, Y son bases ordenadas de \mathbb{k}^n , entonces

$$I_n = M_X^X(\text{Id}) = M_X^Y(\text{Id}) \cdot M_Y^X(\text{Id}).$$

Luego si $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ es invertible, entonces representa a una única matriz de cambio de base. De hecho, todo endomorfismo $f \in L(\mathbb{k}^n)$ está representado por la familia

$$M_Y^Y(f) = M_Y^X(\text{Id}) \cdot M_X^X(f) \cdot M_X^Y(\text{Id}).$$

Teorema 3.43: Si $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$, entonces son equivalentes:

1. B es invertible.

2. Para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{k}^n$ se cumple que $\mathbf{v} \cdot B = 0$ implica $\mathbf{v} = 0$.

DEMOSTRACIÓN: \implies . Si B es invertible entonces sea B^{-1} su inversa, luego $\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot B)B^{-1} = 0 \cdot B^{-1} = 0$.

\impliedby . Si X es la base canónica, entonces $f(\mathbf{v}) := \mathbf{v} \cdot B$ claramente es lineal y cumple que $B = M_X^X(f)$ (¿por qué?). Si $f^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$, entonces $\dim \ker f = 0$, luego $\dim \text{Im } f = n$ y f es una biyección, luego es invertible, y por el teorema anterior, cualquiera de sus representaciones matriciales (en particular, B) lo son. \square

3.4. Determinante

Definición 3.44 – Forma multilineal: Se dice que una función $f : (A^n)^n \rightarrow A$ es una *forma multilineal* si es lineal coordenada a coordenada, es decir, si para todo $v_1, \dots, v_n, v \in A^n$ y todo $\lambda \in A$ se cumple que

$$f(v_1, \dots, v_i + \lambda v, \dots, v_n) = f(v_1, \dots, v_n) + \lambda f(v_1, \dots, \underset{(i)}{v}, \dots, v_n).$$

Además, una forma multilineal se dice *antisimétrica* si intercambiar dos vectores de coordenadas cambia el signo, es decir si

$$f(v_1, \dots, \underset{(i)}{v_i}, \dots, \underset{(j)}{v_j}, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, \underset{(j)}{v_j}, \dots, \underset{(i)}{v_i}, \dots, v_n).$$

Y también se dice *alternada* si es nula si un vector aparece en más de una coordenada, es decir si

$$f(v_1, \dots, \underset{(i)}{v}, \dots, \underset{(j)}{v}, \dots, v_n) = 0.$$

Proposición 3.45: Si f es una forma multilineal entonces:

1. Toma valor nulo si alguna coordenada es nula.
2. Si es alternada, entonces es antisimétrica.
3. Si es antisimétrica y el campo escalar no tiene característica 2, entonces es alternada.

4. Es antisimétrica syss para todo $\sigma \in S_n$ y todo $(v_1, \dots, v_n) \in (A^n)^n$ se cumple:

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot f(v_1, \dots, v_n).$$

Teorema 3.46: Para todo $a \in A$ existe una única forma multilineal f tal que $f(e_1, \dots, e_n) = a$. Y de hecho, si todo $v_i := (v_{i1}, \dots, v_{in})$, entonces dicha forma multilineal viene dada por

$$f(v_1, \dots, v_n) = a \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot v_{1\sigma(1)} \cdots v_{n\sigma(n)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Utilizando la notación del enunciado $v_i = \sum_{j=1}^n v_{ij}e_j$, luego

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_n) &= \sum_{j=1}^n v_{1j} f(e_j, v_2, \dots, v_n) \\ &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n v_{1j_1} v_{2j_2} f(e_{j_1}, e_{j_2}, v_3, \dots, v_n) \\ &= \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n v_{1j_1} \cdots v_{nj_n} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}). \end{aligned}$$

Notemos que podemos reemplazar los j_k por funciones desde $\{1, \dots, n\}$ a $\{1, \dots, n\}$, sin embargo, si las funciones no son inyectivas, entonces nos queda la forma multilineal de una tupla con coordenadas repetidas, lo que por definición de alternada es nulo, luego podemos solo considerar los j_k como permutaciones de n elementos y nos queda:

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} v_{1\sigma(1)} \cdots v_{n\sigma(n)} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\ &= a \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot v_{1\sigma(1)} \cdots v_{n\sigma(n)} \quad \square \end{aligned}$$

Nótese que en lugar de considerar el dominio como un espacio $(A^n)^n$, se puede reemplazar por $\operatorname{Mat}_n(A)$ que es isomorfo.

Definición 3.47 – Determinante: Se define la función determinante $\det : \operatorname{Mat}_n(A) \rightarrow A$ como la única forma multilineal tal que $\det(I_n) = 1$.

Algunos textos usan $|B|$, pero éste **no**, para evitar confusiones.

Algo que destacar es que el cálculo de matrices se vuelve, en casos generales, exponencialmente más complejo de acuerdo a las dimensiones de las matrices, ésto es fácil de ver ya que $|S_n| = 2^n$, luego el determinante comprende una herramienta sólo en casos particulares, en matrices pequeñas o en contextos teóricos.

Proposición 3.48 (Cálculo de determinantes): Si B es una matriz, entonces:

1. Intercambiar columnas (o filas) cambia el signo de su determinante.
2. La matriz generada por ultiplicar una columna (o fila) por λ tiene determinante $\lambda \det B$.
3. Sumarle a una columna (resp. fila) λ -veces otra columna (resp. fila) distinta no varía el determinante.
4. Si para todo $i < j$ (o que $j < i$) se cumple que $b_{ij} = 0$, entonces $\det B = b_{11}b_{22} \cdots b_{nn}$.

Proposición 3.49: Para toda matriz B cuadrada se cumple $\det(B^t) = \det(B)$.

Teorema 3.50: Para todos $B, C \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ se cumple que $\det(BC) = \det B \det C$.

DEMOSTRACIÓN: Probaremos que $f(B) := \det(BC)$ es una forma multilineal alternada. Para ello denotaremos B como una tupla de vectores que corresponden a sus columnas, es decir, $B = (B_1, \dots, B_n)$ donde $B_1 = (b_{11}, \dots, b_{1n})$. Luego si $B' := (B_1, \dots, B_u + \lambda v, \dots, B_n)$, $D := BC$ y $D' := B'C$, entonces

$$D'_{ij} = \sum_{k=1}^n B'_{ik} C_{kj}$$

luego si $i \neq u$, entonces $D'_{ij} = D_{ij}$. Si $i = u$, entonces $D'_{u,*} = D_{u,*} + \lambda(vC)_*$, y como el determinante es multilineal sobre columnas y filas (por traspuesta) se comprueba también la multilinealidad de f .

Para ver que es alternada notamos que si B repite columnas, D repite filas, luego como el determinante es alternado también por filas, f toma valor nulo.

Finalmente para calcular la constante a evaluamos en I_n lo que da $\det C$ y comprueba el enunciado. \square

Definición 3.51 (Menor complemento): Dada una matriz $B \in \text{Mat}_n(A)$ con $n > 1$, se le llama *menor complemento*, denotado $M_{ij}(B)$, de la coordenada (i, j) al determinante de la matriz resultante de eliminar la i -ésima fila y j -ésima columna de B .

Proposición 3.52: Si $B \in \text{Mat}_n(A)$ con $n > 1$, entonces para todo $i, j \leq n$ se cumple que

$$\det B = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} b_{ik} M_{ik}(B) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} b_{kj} M_{kj}(B). \quad (3.1)$$

Definición 3.53 (Matriz adjunta): Dada una matriz $B \in \text{Mat}_n(A)$ con $n > 1$, se le llama *matriz adjunta*, denotado $\text{adj } B$, a la matriz

$$(\text{adj } B)_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ji}(B).$$

Teorema 3.54: Para todo $B \in \text{Mat}_n(D)$ con $n > 1$ se cumple que

$$B \cdot \text{adj } B = \text{adj } B \cdot B = (\det B) \cdot I_n. \quad (3.2)$$

En consecuencia, B es invertible si y sólo si $\det B$ es invertible, en cuyo caso, $B^{-1} = \frac{1}{\det B} \text{adj } B$. Si D es un cuerpo, la condición se reduce a notar que las matrices invertibles son las de determinante no nula.

Proposición 3.55: Se cumple:

1.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

2.

$$\text{adj} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

3.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - (afh + bdi + ceg).$$

§3.4.1 Rango de matrices.

Definición 3.56: Dada $A \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K})$ se le dice *rango por filas* (resp. por columnas) a la dimensión del subespacio generado por sus vectores fila (resp. vectores columna).

Lema 3.57: El rango por filas, el rango por columnas y la dimensión de la imagen de una matriz concuerdan.

DEMOSTRACIÓN: Sean r_f y r_c el rango por filas y por columnas resp. de una matriz fijada $A \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K})$. Sin pérdida de generalidad supongamos que las filas están ordenadas de tal manera que las primeras r_f son linealmente independientes, luego para todo i se cumple que

$$A_{i,*} = \sum_{k=1}^{r_f} \lambda_{ik} A_{k,*}$$

es decir que para todo i, j :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{r_f} \lambda_{ik} A_{kj}.$$

Donde $\lambda_{ij} = \delta_{ij}$ si $i \leq r_f$; en definitiva si $B := [\lambda_{ij}]_{ij}^t$ que es una matriz de $r_f \times n$ vemos que se cumple que

$$A = B^t A \iff A^t = A^t B \iff A_{*,j} = \sum_{k=1}^{r_f} A_{jk}^t B_{k,*}$$

Luego $(B_{k,*})_{k=1}^{r_f}$ es un sistema generador de las columnas de A , es decir, $r_c \leq r_f$. Análogamente se deduce la otra desigualdad. \square

Definición 3.58 – Rango (matriz): Se le dice *rango*, denotado $r(A)$, de una de una matriz A al rango por filas o columnas.

Corolario 3.59: Para toda matriz A se cumple que $r(A) = r(A^t)$.

Teorema 3.60: Dada $A \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K})$ cualquiera, y sean $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ y $C \in \text{Mat}_m(\mathbb{K})$ invertibles. Entonces $r(A) = r(BA) = r(AC)$.

De éste modo también podemos definir el rango para transformaciones lineales ya que sería independiente de la base.

Proposición 3.61: Una matriz de $n \times n$ es invertible syss tiene rango n .

Teorema 3.62: Si $A \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{k})$ y $B \in \text{Mat}_{m \times p}(\mathbb{k})$, entonces

$$r(AB) \leq r(A), \quad r(AB) \leq r(B).$$

Nótese que en este sentido el rango de una matriz sirve como indicador de qué tan “invertible” es.

Extensiones de cuerpo

4.1. Extensiones algebraicas y transcendentales

Definición 4.1 – Extensión de cuerpos: Dado un cuerpo k se dice que K es una *extensión de cuerpos* de k si K tiene un subcuerpo isomorfo a k , lo que abreviamos diciendo que K/k es una extensión. Si K es una extensión de cuerpo, entonces con las operaciones usuales se puede ver como un k -espacio vectorial, de modo que llamamos su *grado* a $[K : k] := \dim_k(K)$.

Dada una extensión K del cuerpo k , un elemento $\alpha \in K$ se dice *k -algebraico* si existe $p \in k[x]$ tal que $p(\alpha) = 0$, de lo contrario se dice *k -trascendente*. Una extensión K se dice *k -algebraica* si todos sus elementos lo son, de lo contrario, K se dice *k -trascendente*. De no haber ambigüedad obviamos el “ k ”.

Teorema 4.2: Si W es un K -espacio vectorial y K/k es una extensión de cuerpos, entonces W es un k -espacio vectorial y

$$\dim_k(W) = \dim_K(W) \cdot [K : k].$$

Teorema 4.3 – Teorema de transitividad de grados: Si $L/K/k$ son cuerpos, entonces $[L : k] = [L : K] \cdot [K : k]$.

Teorema 4.4: Toda extensión de grado finito es algebraica.

DEMOSTRACIÓN: Sea K extensión de k de grado n . Si $n = 1$, entonces es trivial. De lo contrario sea $\alpha \notin k$ y consideremos $S := \{1, \alpha, \dots, \alpha^n\}$.

Si alguna potencia de α se repite, digamos $\alpha^i = \alpha^j$, entonces $p(x) := x^j - x^i$ hace algebraico a α . De lo contrario, como S tiene $n + 1$ elementos no puede ser base, ergo existen $c_i \in k$ tales que son no nulos y

$$\sum_{i=0}^n c_i \alpha^i = c_n \alpha^n + \dots + c_1 \alpha + c_0 = 0,$$

pero luego $p(x) := \sum_{i=0}^n c_i x^i$ es claramente un polinomio que hace que α sea algebraico; por ende, K es algebraico. \square

En principio parece muy específico el acto de clasificar elementos entre *algebraicos* y *transcendentes* de esa forma, sin embargo, hay una razón bastante natural para hacerlo.

Teorema 4.5 – Teorema de extensión de Kronecker: Sea k un cuerpo con $p(x) \in k[x]$ no constante y sin raíces, entonces existe una extensión K/k que posee una raíz de $p(x)$.

DEMOSTRACIÓN: Si $p(x)$ es no constante entonces y no posee raíces como $k[x]$ es un DFU entonces se puede factorizar mediante irreducibles que tampoco tienen raíz, en particular sea $q(x)$ uno de ellos. Como $(q(x))$ es un ideal maximal, entonces $K := k[x]/(q(x))$ resulta ser un cuerpo.

Nótese que para todo $a \in k$ se tiene que $[a] \in K$, y es claro que la función $y \mapsto [y]$ es un monomorfismo de cuerpos. Luego, denotamos nuestra raíz como $\alpha := [x]$ (recordad que las clases de equivalencias son de polinomios de $k[x]$), como el anillo cociente es respecto a $q(x)$ que divide a $p(x)$ tenemos que

$$0 = [p(x)] = \sum_{i \geq 0} [a_i][x]^i = \sum_{i \geq 0} a_i \alpha^i = p(\alpha),$$

osea que α es una raíz de p en K . \square

Cabe destacar que diremos que un elemento es una *raíz cuadrada* de a si es la raíz de $x^2 - a$. Asimismo diremos que es *raíz cúbica* cuando es raíz de $x^3 - a$ y, en general, que es una *n -ésima raíz* cuando es raíz de $x^n - a$. **Ojo** que ésto no tiene nada que ver con la función real $\sqrt[n]{x}$, pues se define de otra manera (ver def. 1.50 de [Top]).

Definición 4.6: Sea k un cuerpo con $p(x) \in k[x]$ un polinomio no-constante sin raíz. Entonces denotando α como una raíz de p , entonces $k(\alpha)$ es la extensión de k construida en condiciones de la demostración anterior.

Nótese que para todo $p(x) \in k[x]$,

$$[p(x)] = \sum_{i \geq 0} [a_i][x]^i = \sum_{i \geq 0} a_i \alpha^i = p(\alpha),$$

es decir, que la extensión que hemos construido resulta ser el cuerpo de polinomios de α (de ahí la notación). De igual manera podríamos construir una extensión con un polinomio que si tuviese raíz, pero es inmediato notar que es el mismo k .

Teorema 4.7: Si K/k es una extensión de cuerpos y $\alpha \in K$ es algebraico, entonces:

1. Existe un único polinomio mónico irreducible $p(x) \in k[x]$ tal que $p(\alpha) = 0$. Al que llamaremos *polinomio minimal* de α sobre k .
2. Si $q(x) \in k[x]$ cumple que $q(\alpha) = 0$, entonces $p(x) \mid q(x)$.
3. $k[\alpha] = k(\alpha) = \{r(\alpha) : r(x) \in k[x] \wedge \deg r < \deg p\}$
4. $k[\alpha]/k$ es una extensión finita, de hecho $[k(\alpha) : k] = \deg p =: n$ y $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$ es base para $k(\alpha)$.

DEMOSTRACIÓN: 1. Consideremos $\pi : k[x] \rightarrow k[\alpha]$ dada por $\pi(q(x)) = q(\alpha)$. Claramente π es un epimorfismo de anillos, luego $\ker \pi$ es un ideal de $k[x]$, y como éste es un PID, entonces es generado por un polinomio $p(x)$. Como $k[\alpha] \cong k[x]/(p(x))$ es un dominio íntegro, entonces $(p(x))$ es primo y $p(x)$ es irreducible.

2. Supongamos que $q(x)$ tiene a α de raíz, entonces $q(x) \in \ker \pi = (p(x))$, luego $p(x) \mid q(x)$. Si $q(x)$ es irreducible, entonces q y p son asociados, pero cómo exigimos que el polinomio sea mónico se comprueba la unicidad.
3. Se deduce de la construcción de la extensión de Kronecker.
4. Veamos que la base explicitada en efecto lo es, dado que los elementos de $k[\alpha]$ son de la forma $q(\alpha)$ con $\deg q < n$, entonces se deduce que

el conjunto propuesto es un sistema generador. Por otro lado, es libre pues si no lo fuese habría un polinomio no nulo $r(x)$ tal que $r(\alpha) = 0$ y $\deg r \leq n - 1 < n$ lo que contradice la definición de $p(x)$. \square

Corolario 4.8: Si K/k es una extensión de cuerpos, y $S \subseteq K$ es finito y algebraico, entonces $k(S)/k$ es una extensión finita.

Teorema 4.9: Si $L/K/k$ son extensiones de cuerpos, entonces L/k es algebraica si y sólo si L/K y K/k lo son.

DEMOSTRACIÓN: \implies . Si L/k es algebraica, claramente K/k lo es y como k es subcuerpo de K se comprueba que L/K lo es.

\impliedby . Si $\alpha \in L$ entonces α es K -algebraico, luego sean β_1, \dots, β_n los coeficientes de su polinomio minimal, luego α es algebraico sobre $k(\beta_1, \dots, \beta_n)$, por ende $k(\beta_1, \dots, \beta_n)[\alpha]/k(\beta_1, \dots, \beta_n)$ es finita, y como los β_i son k -algebraicos, entonces $k(\beta_1, \dots, \beta_n)/k$ es finito, finalmente $k(\beta_1, \dots, \beta_n, \alpha)/k$ es finito y luego algebraico. \square

Corolario 4.10: Si K/k es una extensión de cuerpos, entonces el conjunto de elementos algebraicos de K es un cuerpo.

DEMOSTRACIÓN: Basta notar que si α, β son algebraicos sobre K , entonces $k(\alpha, \beta)/k$ es finita, luego algebraica y por ende $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ y α/β (si $\beta \neq 0$) lo son. \square

Definición 4.11: Dadas las extensiones de cuerpo K/k y L/l , entonces un monomorfismo de extensiones de cuerpo es un morfismo de cuerpos $\sigma : K \rightarrow L$ tal que $\sigma[k] = l$. Además si las extensiones son K/k y L/k , entonces se les llaman k -morfismos; éstos conforman una categoría.

Llamamos grupo de Galois, denotado por $\text{Gal}(K/k)$, al grupo de k -automorfismos de K/k .

Teorema 4.12: Sean K/k y L/l extensiones de cuerpo con $\sigma : k \rightarrow l$ un isomorfismo de cuerpo, que induce un morfismo de anillos $\sigma : k[x] \rightarrow l[x]$. Si $\alpha \in K$ es algebraico, entonces sea $p \in k[x]$ su polinomio minimal. Si L contiene una raíz β de $\sigma p(x)$, entonces σ se extiende un isomorfismo de extensiones $\sigma^* : k(\alpha) \rightarrow l(\beta)$ con $\sigma^*(\alpha) = \beta$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\phi : k[x] \rightarrow k[\alpha]$ el morfismo de evaluación, i.e., tal que $\phi(g) = g(\alpha)$. Es claro que $\ker \phi$ es el ideal $(p(x))$, luego por el primer teorema de isomorfismos $k[x]/(p(x)) \cong k[\alpha]$.

En primer lugar veamos que $\sigma p(x)$ ha de ser el polinomio minimal de β en l . Luego, análogamente $l[x]/(\sigma p(x)) \cong l[\alpha]$.

Finalmente $\omega : k[x] \rightarrow l[x]$ que fija a la identidad induce un isomorfismo $k[x]/(p(x)) \cong l[x]/(\sigma p(x))$, de lo que se concluye que $k[\alpha] \cong l[\beta]$. \square

Corolario 4.13: Sea K/k una extensión de cuerpo, donde $K = k(\alpha)$ y $p(x) \in k[x]$ es el polinomio minimal de α . Entonces $|\text{Gal}(K/k)|$ es la cantidad de raíces distintas de $p(x)$; en particular,

$$|\text{Gal}(K/k)| \leq [K : k],$$

donde $|\text{Gal}(K/k)| = [K : k]$ si y sólo si $p(x)$ se factoriza en distintos polinomios lineales.

DEMOSTRACIÓN: Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ todas las raíces de $p(x)$ en K . Por el teorema anterior siempre existe un único k -automorfismo $\sigma_{ij} : k(\alpha_i) \rightarrow k(\alpha_j)$ tal que $\sigma_{ij}(\alpha_i) = \alpha_j$. Así pues, para cada j notemos que σ_{1j} es un k -automorfismo distinto, por lo que $|\text{Gal}(K/k)| \geq n$. Al mismo tiempo si σ es un k -automorfismo, entonces $p(\sigma(\alpha)) = \sigma(p(\alpha)) = 0$, de modo que $\sigma(\alpha) = \alpha_i$, pero el teorema anterior prueba la unicidad de σ , con lo que $|\text{Gal}(K/k)| = n$. Como $n \leq \deg p$ se comprueba la desigualdad.

Ya vimos que $|\text{Gal}(K/k)|$ es la cantidad de raíces de $p(x)$, así que la equivalencia es clara. \square

Definición 4.14 (k -conjugados): Dados α, β algebraicos sobre k , se dice que son k -conjugados si comparten el polinomio minimal.

Teorema 4.15: Dados α, β algebraicos sobre k , entonces son k -conjugados si y sólo si existe un k -isomorfismo $\sigma : k(\alpha) \rightarrow k(\beta)$ tal que $\sigma(\alpha) = \beta$.

Ejemplo. Si $\lambda \in k$ no posee raíz cuadrada, y se denota α a una raíz de λ , entonces α y $-\alpha$ son k -conjugados. Esto justifica la terminología sobre los números complejos.

Ejemplo. El polinomio ciclotómico p -ésimo, con $p > 2$, es irreducible luego carece de raíces, así que construyamos $\mathbb{Q}(\omega)$ donde ω es una raíz. Como $\Phi_p(x) \cdot (x-1) = x^p - 1$, entonces todas las raíces del polinomio son p -ésimas raíces de la unidad, ergo $\omega^p = 1$, luego $(\omega^2)^p = 1^2 = 1$, por lo que ω^2 también

es raíz de $\Phi_p(x)$. De hecho, se concluye que todas las raíces de $\Phi_p(x)$ son $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{p-1}$; luego ellos son k -conjugados.

Teorema 4.16: Si K/k es finito, entonces $\text{Gal}(K/k)$ también.

DEMOSTRACIÓN: Sea $S := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ tal que $K = k(S)$. Sea $\sigma \in \text{Gal}(K/k)$ y $p \in k[S]$, como σ es un k -automorfismo se cumple $\sigma(p(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = p(\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_n))$. Notemos que todo elemento en K es de la forma $p(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, luego dos k -automorfismos coinciden si y sólo si lo hacen en S .

Sea p_i el polinomio minimal de α_i , entonces $p(\alpha_i) = 0 = \sigma(p(\alpha_i)) = p(\sigma(\alpha_i))$. Y se sabe que un polinomio no nulo tiene finitas raíces, luego σ sólo puede tomar finitos valores en α_i . Finalmente sólo hay finitas posibilidades para σ , luego $\text{Gal}(K/k)$ es finito. \square

4.2. Extensiones normales y separables

§4.2.1 Cuerpos de escisión.

Definición 4.17: Se dice que un polinomio $p \in k[x]$ se escinde (en inglés, *split*) en una extensión de cuerpos K/k , si existen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tales que

$$p(x) = \alpha_0(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n).$$

También llamamos *cuerpo de escisión* de p sobre k a la extensión K/k tal que p escinde en K y $K = k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Teorema 4.18: Si $\sigma : k \rightarrow k'$ es un isomorfismo de cuerpos, K es un cuerpo de escisión de $p(x) \in k[x]$ y K' de $\sigma(p)(x)$, entonces se extiende σ a $\bar{\sigma} : K \rightarrow K'$ como isomorfismo. En consecuencia, todo par de cuerpos de escisión de un mismo polinomio son k -isomorfos.

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad al suponer que p es irreducible. Lo haremos por inducción sobre el grado de p , donde el caso $n = 1$ es trivial. Sea p de grado $n+1$, sea α_{n+1} una raíz en K y sea β_{n+1} una raíz de $\sigma(p)$ en K' . Como $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ son k -conjugados, entonces existe $\sigma^* : k(\alpha_{n+1}) \rightarrow k'(\beta_{n+1})$ que extiende a σ . Luego sea $p(x) = (x - \alpha_{n+1})q(x)$ de modo que K es un cuerpo de escisión de $q(x)$ (de grado n) en $k(\alpha_{n+1})$ y K' lo es de $\sigma^*(q(x))$ en $k'(\beta_{n+1})$; por lo que, por hipótesis inductiva, existe $\bar{\sigma}$ que extiende a σ^* (que extiende a σ) tal que $\bar{\sigma} : K \rightarrow K'$ es un isomorfismo de cuerpos. \square

Proposición 4.19: Si $p \in k[x]$ es de grado $n \geq 1$, entonces posee un cuerpo de escisión y ésta tiene grado a lo más $n!$

HINT: Usar inducción. □

Definición 4.20 – Extensión normal: Se dice que una extensión de cuerpos K/k es *normal* si para todo $p \in k[x]$ irreducible con alguna raíz en K se escinde en K .

Lema 4.21: Si $L/F/K/k$ son extensiones algebraicas de cuerpo de modo que F es un cuerpo de escisión de algún polinomio $p(x) \in k[x]$. Entonces si $\sigma : K \rightarrow L$ es un k -monomorfismo se cumple que $\sigma[K] \subseteq F$ y σ se extiende a un k -automorfismo de F .

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $p(x) = \alpha_0(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ de modo que $F = k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Sea $K' := \sigma[K]$ y $F' := K'(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Notemos que por definición K, K' son isomorfos, así que por el teorema anterior $\bar{\sigma} : F \rightarrow F'$ es un k -isomorfismo que extiende a σ .

Sea $\beta \in K$, como $F = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, entonces existe $g(x_1, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$ tal que $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \beta$, pero como los α_i s son k -conjugados, entonces

$$\bar{\sigma}(\beta) = \bar{\sigma}(h(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = h(\bar{\sigma}(\alpha_1), \dots, \bar{\sigma}(\alpha_n)),$$

donde $\bar{\sigma}$ es una permutación de los α_i , de modo que $F' = \bar{\sigma}(F) \subseteq F$. En consecuencia $F' = F$ y $\bar{\sigma}$ es un k -automorfismo. □

Teorema 4.22: Una extensión finita K/k es normal si y sólo si es el cuerpo de escisión de algún polinomio.

DEMOSTRACIÓN: \Leftarrow . Sea $p(x) \in k[x]$ el polinomio tal que K es su cuerpo de escisión. Sea $q(x) \in k[x]$ irreducible en $k[x]$ pero con raíz $\alpha \in K$. Sea L el cuerpo de escisión de q sobre K , de modo que si las raíces de $q(x)$ son $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, entonces $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Como α_i y α son k -conjugados, existe $\sigma : k(\alpha) \rightarrow k(\alpha_i) \subseteq L$ un k -isomorfismo, luego por el lema $k(\alpha_i) \subseteq K$, y como los $\alpha_i \in K$, $q(x)$ se escinde en K .

\Rightarrow . Sea K/k normal. Como K/k es finita, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tales que $K = k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Si $p_i(x)$ denota el polinomio minimal de α_i sobre k , entonces vemos que K se escinde en $p(x) := p_1(x) \cdots p_n(x)$ y es fácil ver que K es de hecho su cuerpo de escisión. □

§4.2.2 Extensiones separables.

Definición 4.23 (Polinomio derivado): Si D es un dominio íntegro y

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in D[x]$$

llamamos *polinomio derivado* de $p(x)$, denotado por $p'(x)$, a

$$p'(x) := \sum_{k=1}^n k a_{k-1} x^{k-1}.$$

Proposición 4.24: Si D es un dominio íntegro, entonces para todo $p, q \in D[x]$ y $\lambda \in D$:

1. $p' = 0$ syss p constante.
2. $(\lambda p)' = \lambda p'$.
3. $(p + q)' = p' + q'$.
4. $(pq)' = p'q + pq'$.
5. $(p/q)' = \frac{p'q - pq'}{q^2}$.

Definición 4.25: Se dice que el grado de una raíz α de un polinomio $p(x) \in D[x]$ es el máximo entero n tal que $(x - \alpha)^n \mid p(x)$. Si una raíz es de grado 1, entonces se dice que es una raíz *simple*.

Teorema 4.26: Dado D un dominio íntegro y α raíz de $p(x) \in D[x]$. α es una raíz simple syss $p'(\alpha) \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que el grado de α en p es n de modo que $p(x) = (x - \alpha)^n q(x)$ y $q(\alpha) \neq 0$, luego

$$p'(\alpha) = n(x - \alpha)^{n-1} q(x) + (x - \alpha)^n q'(x) = n(x - \alpha)^{n-1} q(x)$$

lo cual es no nulo syss $n - 1 = 0$, i.e., si α es una raíz simple. □

Definición 4.27: Sea K/k una extensión de cuerpos. Un elemento algebraico $\alpha \in K$ se dice *separable* si es la raíz simple de su polinomio minimal.

Si todos los elementos de K son separables, entonces K se dice una *extensión separable*. Se dice que k es *perfecto* si todas sus extensiones de cuerpo son separables.

Proposición 4.28: Sea D un dominio íntegro y $p(x) \in D[x]$ un polinomio no constante, entonces:

1. Si $\text{car } D = 0$, entonces $p'(x) \neq 0$.
2. Si $\text{car } D = p$, entonces $p'(x) = 0$ si y sólo si $p(x) = q(x^p)$ con $q(x) \in D[x]$.

Teorema 4.29: Se cumple:

1. Todo cuerpo de característica nula es perfecto.
2. Si $\text{car } k = p$, entonces k es perfecto si y sólo si $k = k^p$.
3. Todo cuerpo finito es perfecto.

DEMOSTRACIÓN: 1. Sea $\alpha \in K$ algebraico, cuyo polinomio minimal es $p(x)$. Si $p'(\alpha) = 0$, entonces $p(x) \mid p'(x)$, pero como $p'(x) \neq 0$ esto no tiene sentido por grados de polinomios.

2. \Leftarrow . Sea $\alpha \in K/k$ algebraico y cuyo polinomio minimal es $p(x)$. Asumiremos que $p'(x) = 0$ de modo que $p(x) = q(x^p)$. Sea $q(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. Como $k = k^p$, existen b_i tales que $a_i = b_i^p$, luego

$$p(x) = q(x^p) = \sum_{i=0}^n a_i (x^p)^i = \sum_{i=0}^n b_i^p (x^i)^p = \sum_{i=0}^n (b_i x^i)^p = \left(\sum_{i=0}^n b_i x^i \right)^p,$$

por lo que p no es irreducible, contradicción.

\Rightarrow . Sea k perfecto, claramente $k^p \subseteq k$, así que basta probar la otra inclusión $k \subseteq k^p$, i.e., que para todo $a \in k$ existe $b \in k$ tal que $b^p = a$. Construyamos $k(b)$, luego sea $p(x)$ el polinomio minimal de b . Sabemos que b es raíz de $(x - a)^p$, por ende $p(x) \mid (x - a)^p$ de modo que $p(x) = (x - a)^n$ para algún $1 \leq n \leq p$. Pero como k es separable se cumple que b es raíz simple, ergo $n = 1$ y $x - b \in k[x]$ de modo que $b \in k$.

3. Corolario del 2. □

4.3. Teoría y extensiones de Galois

Definición 4.30 – Extensión de Galois: Se dice que K/k es una extensión de Galois si es normal y separable.

Sea $H \leq \text{Gal}(K/k)$, entonces llamamos *cuerpo fijado por H* a

$$F(H) := \{a \in K : \forall \sigma \in H \sigma(a) = a\}.$$

Nótese que para \mathbb{Q} basta que una extensión sea normal para que sea de Galois.

Proposición 4.31: Para toda extensión K/k y todo $H \leq \text{Gal}(K/k)$ se cumple que $F(H)$ es un cuerpo y $k \leq F(H) \leq K$.

Teorema 4.32: Una extensión finita K/k es de Galois syss

$$F(\text{Gal}(K/k)) = k.$$

DEMOSTRACIÓN: \Rightarrow . Sea $\alpha \in K$, hemos de probar que existe un k -isomorfismo de K que mueve a α . Sea $p(x)$ su polinomio minimal, como K es de escisión sobre $p(x)$ contiene a todas sus raíces, así que si existe otra raíz β de $p(x)$ existe un k -isomorfismo tal que $\sigma(\alpha) = \beta$. Si no existe otra raíz entonces $p(x) = (x - \alpha)^n$ y por separabilidad $n = 1$ por lo que $\alpha \in k$.

\Leftarrow . Sea $\alpha \in K \setminus k$ de polinomio minimal $p(x)$. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ todas las raíces distintas de $p(x)$ en K , entonces definimos

$$q(x) := (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n) \in K[x]$$

que satisface que $q(x) \mid p(x)$ por construcción.

Sea $\sigma \in \text{Gal}(K/k)$. Como $\sigma(\alpha_i) = \alpha_j$ por ser k -conjugados, entonces se cumple que $(q \circ \sigma)(x) = \prod_{i=1}^n (x - \sigma(\alpha_i)) = q(x)$ de modo que todos los coeficientes de $q(x)$ están fijados por un k -automorfismo σ cualquiera, de modo que los coeficientes de $q(x)$ **deben** estar en k .

Luego, como α es raíz de $q(x) \in k[x]$ se cumple que $p(x) \mid q(x)$. Pero entonces $p(x)$ y $q(x)$ están asociados, y como ambos son mónicos entonces son iguales, probando que p se escinde en K (luego es normal) y que sus raíces son simples (luego es separable). \square

Lema 4.33 (de independencia de Dedekind): Sean $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ automorfismos de un cuerpo K . Si $\sum_{i=1}^n c_i \sigma_i(a) = 0$ para todo $a \in K$, entonces $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

DEMOSTRACIÓN: Lo demostraremos por inducción sobre n . El caso base es trivial pues $c_1\sigma_1(1) = c_1 = 0$. Supongamos que $\sum_{i=1}^n c_i\sigma_i(a) = 0$ para todo a , si algún c_i es nulo, el resto lo son por inducción. Como $\sigma_1 \neq \sigma_n$, entonces existe $b \in K$ no nulo tal que $\sigma_1(b) \neq \sigma_n(b)$. Nótese que como b es invertible se cumple que el enunciado equivale a que para todo $a \in K$ se cumple que

$$\sum_{i=1}^n c_i\sigma_i(ba) = \sum_{i=1}^n c_i\sigma_i(b) \cdot \sigma_i(a) = 0.$$

Como $\sigma_i(b) \neq 0$, entonces todos los coeficientes que acompañan a $\sigma_i(a)$ siguen siendo no nulos. Luego se cumple que

$$\sum_{i=1}^n c_i(1 - \sigma_n(b^{-1})\sigma_i(b))\sigma_i(a) = \sum_{i=1}^n c_i\sigma_i(a) + \sum_{i=1}^n c_i\sigma_n(b^{-1})\sigma_i(b)\sigma_i(a) = 0,$$

sin embargo, $c_i(1 - \sigma_n(b^{-1})\sigma_i(b))$ tiene un coeficiente nulo en el índice $i = n$, por lo que, por hipótesis de inducción se cumple que $1 - \sigma_n(b^{-1})\sigma_i(b) = 0$ para todo i , lo que implica que $\sigma_1(b) = \sigma_n(b)$ que es absurdo. \square

Teorema 4.34: Sea K/k una extensión de cuerpos con $H \leq \text{Gal}(K/k)$ entonces

$$[K : F(H)] = |H|.$$

DEMOSTRACIÓN: Lo haremos por contradicción suponiendo que $\{a_1, \dots, a_m\}$ es una $F(H)$ -base de K , y $H = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Supongamos que $m < n$: Entonces la aplicación

$$f : K^n \longrightarrow K^m \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \left(\sum_{i=1}^n x_i\sigma_i(a_1), \sum_{i=1}^n x_i\sigma_i(a_2), \dots, \sum_{i=1}^n x_i\sigma_i(a_m) \right)$$

es lineal y $n = \dim_K(K^n) = \dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f) \leq \dim(\ker f) + m$, de modo que $\dim(\ker f) \neq 0$ y el kernel es no vacío y por ende posee un elemento $(c_1, \dots, c_n) \neq \vec{0}$. Nótese que por definición de base todo $\beta \in K$ se escribe como $\beta = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$ con $\lambda_i \in F(H)$, luego como los λ_i están fijos bajo los k -automorfismos, se cumple que

$$\sum_{j=1}^n c_j\sigma_j(\beta) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_j\lambda_i\sigma_j(a_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\sum_{j=1}^n c_j\sigma_j(a_i) \right) = 0$$

que es nulo, pues los términos en rojo lo son por definición de (c_1, \dots, c_n) . Pero por el lema de independencia de Dedekind se cumple que los c_j 's son nulos lo que es absurdo.

Supongamos que $m > n$: Considerando un truco similar al anterior construimos:

$$f : K^{n+1} \longrightarrow K^n$$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i \sigma_1(a_i), \dots, \sum_{i=1}^{n+1} x_i \sigma_n(a_i) \right)$$

tal que posee kernel no vacío y Elegimos $(c_1, \dots, c_{n+1}) \neq \vec{0}$ que pertenezca al kernel tal que posea la máxima cantidad de coordenadas nulas, podemos elegir las de tal modo que c_1, \dots, c_p sean no nulos y c_{p+1}, \dots, c_{n+1} lo sean, aunque nótese que $p > 1$.

Como H es subgrupo, entonces contiene a la identidad, y supongamos que ésta ocupa el j -ésimo lugar; luego como $\sum_{i=1}^{n+1} c_i a_i = 0$ se concluye que no todos los c_i 's están en $F(H)$ (pues los a_i 's son linealmente independientes). Luego, como $c_p \neq 0$ multiplicamos por c_p^{-1} para asumir que $c_p = 1$. También podemos reordenar los c_i 's de tal modo que $c_1 \notin F(H)$; por lo que existe algún σ_h tal que $\sigma_h(c_1) \neq c_1$. Nótese que como H es grupo, el producto $\tau \mapsto \tau \circ \sigma_h$ es una permutación, de modo que al aplicar σ_h a las n -tuplas, de modo que

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_h(c_i) \sigma_j(a_i) = 0$$

finalmente notamos que

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \sum_{i=1}^{n+1} (c_i - \sigma_h(c_i)) \sigma_j(a_i) = 0$$

por lo que $d_i := c_i - \sigma_h(c_i)$ conforman una tupla del kernel. Sin embargo, nótese que d_p, d_{p+1}, \dots, d_n son todos nulos, contradiciendo la maximalidad de ceros de (c_1, \dots, c_{n+1}) . \square

4.4. Cuerpos algebraicamente cerrados

Lema 4.35: Sea K/k una extensión de cuerpos, entonces son equivalentes:

1. K no tiene extensiones algebraicas distintas de sí mismo.

2. Todo polinomio no constante de K tiene raíz.
3. Los polinomios irreducibles de K son de grado 1.
4. Todo polinomio de K se escinde.
5. K contiene un subcuerpo tal que la extensión K/k es algebraica y todo polinomio de $k[x]$ se escinde en K .

DEMOSTRACIÓN: $1 \implies 2$. Sea $p(x) \in K[x]$ un polinomio no constante, luego éste posee un factor irreducible $q(x)$ de manera que existe una extensión $K(\alpha)/K$ con una raíz α de $q(x)$, pero $K(\alpha) = K$ puesto que toda extensión finita es algebraica, de modo que $\alpha \in K$.

$2 \implies 3$. Sea $p(x) \in K[x]$ con $\deg p > 1$. Entonces $p(x)$ posee raíz α y por Ruffini se satisface que $(x - \alpha) \mid p(x)$, por lo que $p(x)$ no es irreducible.

$3 \implies 4$. Basta notar que K es un DFU y aplicar descomposición en factores irreducibles.

$4 \implies 5$. Basta tomar $K = k$.

$5 \implies 1$. Sea L/K una extensión y $\alpha \in L$ un elemento algebraico, probaremos que $\alpha \in K$. Por definición existe un polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i \in K[x]$ tal que α es raíz de $p(x)$. Como K/k es algebraico, entonces $K(c_0, \dots, c_n)$ es una extensión finita y claramente $[K(c_0, \dots, c_n; \alpha) : K(c_0, \dots, c_n)] < \infty$ de modo que α es k -algebraico y, por lo tanto, es raíz de un polinomio $q(x) \in k[x]$. Pero como $q(x)$ se escinde en K , entonces $\alpha \in K$. Si L es una extensión algebraica, todos sus elementos lo son, luego todos están en K y en consecuencia $L = K$. \square

Definición 4.36 – Cuerpo algebraicamente cerrado: Un cuerpo K es algebraicamente cerrado si cumple alguna (y por ende todas) las condiciones del lema anterior.

§4.4.1 Aplicación: El teorema fundamental del álgebra II. Aquí veremos una aplicación de las extensiones de cuerpo que hemos estudiado.

Teorema 4.37: \mathbb{C} es algebraicamente cerrado.

DEMOSTRACIÓN: Como \mathbb{R} es un cuerpo de característica nula, entonces es perfecto. Sea K/\mathbb{R} una extensión de cuerpo finita que podemos suponer normal (¿por qué?), luego de Galois. Como es de Galois $|\text{Gal}(K/\mathbb{R})| = [K : \mathbb{R}] = 2^n m$ con m impar.

Por el primer teorema de Sylow, existe H un 2-subgrupo de Sylow de modo que $[K : F(H)] = |H| = 2^n$ y $[F(H) : \mathbb{R}] = m$. Como $F(H)/\mathbb{R}$ es de grado impar, entonces sus elementos son algebraicos de grado impar, i.e., cuyos polinomios minimales son de grado impar, lo cual es absurdo pues sabemos que tiene raíces en \mathbb{R} . En conclusión K debe ser de grado una potencia de 2.

Como $[K : \mathbb{R}] = 2^n$, se tiene que posee un subgrupo H tal que $[K : F(H)] = |H| = 2^{n-1}$ y $[F(H) : \mathbb{R}] = 2$, luego $F(H) = \mathbb{C}$. Así K es extensión de cuerpos de \mathbb{C} . Luego, existe H' tal que $[K : F(H')] = 2^{n-2}$ y $[F(H') : \mathbb{C}] = 2$ lo cual es imposible pues todo polinomio cuadrático de \mathbb{C} es reductible. \square

5

Teoría espectral

5.1. Diagonalización

En esta sección se desarrollan varios resultados para endomorfismos sobre espacios vectoriales de dimensión finita, nótese que toda B puede verse como el endomorfismo $x \mapsto Bx$, así que obviaremos mencionar cosas como “ésta definición se aplica para matrices así...”.

Definición 5.1 – Subespacio f -invariante: Dado un módulo M , $f \in \text{End}(M)$ y un subespacio S de M , se dice que S es f -invariante si $f[S] \subseteq S$.

Proposición 5.2: Para todo $f \in \text{End}(M)$ se cumple que son subespacios f -invariantes:

1. El subespacio nulo $\{0\}$.
2. Todo subespacio de $\ker f$.
3. Todo subespacio que contenga a $\text{Im} f$.

Lema 5.3: Si $f \in \text{End}(\mathbb{k}^n)$ y X, Y son bases ordenadas cualesquiera de \mathbb{k}^n , entonces para todo $x \in \mathbb{k}$

$$\det(xI_n - M_X^X(f)) = \det(xI_n - M_Y^Y(f))$$

DEMOSTRACIÓN: Como hemos visto

$$M_Y^Y(f) = M_Y^X(\text{Id}) M_X^X(f) M_X^Y(\text{Id}),$$

luego si llamamos $B := M_X^Y(\text{Id})$ (que es invertible), cumple que

$$M_Y^Y(f) = B^{-1} M_X^X(f) B,$$

luego

$$\begin{aligned} \det(xI_n - M_Y^Y(f)) &= \det(xI_n - B^{-1} M_X^X(f) B) \\ &= \det(B^{-1}(xI_n - M_X^X(f))B) = \det(xI_n - M_X^X(f)). \end{aligned}$$

□

Definición 5.4 – Polinomio característico: Si $f \in \text{End}(\mathbb{k}^n)$, entonces dada una base X cualquiera se define

$$p_f(x) := \det(xI_n - M_X^X(f))$$

conocido como el *polinomio característico* de f .

Definición 5.5: Si M es un A -módulo y $f \in \text{End}(M)$, entonces $v \in M_{\neq 0}$ se dice un *autovector* de f si $\text{Span}\{v\}$ es f -invariante, o tradicionalmente, si existe $\alpha \in M$ tal que $f(v) = \alpha v$, en cuyo caso se dice que α es el *autovalor* asociado a v de f . Si $M = A^n$ y $B \in \text{Mat}_n(A)$, entonces se definen los autovalores y autovectores de B a aquellos correspondientes a la función $f(v) := Bv$.

Una transformación lineal f se dice *diagonalizable* si existe una base ordenada X tal que $M_X^X(f)$ es una matriz diagonal.

Se le llama *espectro* de f , denotado por $\sigma(f)$ al conjunto de sus autovalores.

Teorema 5.6: Un escalar $\lambda \in \sigma(f)$ si y sólo si $p_f(\lambda) = 0$.

Definición 5.7: Sea $f \in \text{End}(V)$. Si $\alpha \in \mathbb{k}$, entonces se les llaman *autoespacio* y *autoespacio generalizado* generado por α de f a:

$$V_\alpha^f := \{v \in V : f(v) = \alpha v\}, N_\alpha^f := \{v \in V : \exists r \geq 0 (f - \alpha \text{Id})^r v = 0\};$$

de no haber ambigüedad se obvia el “ f ”.

Para un $\alpha \in \mathbb{k}$ se le dice *multiplicidad geométrica* y *algebraica* resp., a $\dim V_\alpha$ y $\dim N_\alpha$.

Proposición 5.8: Para todo $f \in \text{End}(\mathbb{k}^n)$ y todo $\alpha \in \mathbb{k}$ se cumple:

1. V_α y N_α son submódulos o subespacios vectoriales de \mathbb{k}^n .
2. $V_\alpha \leq N_\alpha$.
3. V_α y N_α son f -invariantes.
4. La multiplicidad geométrica de α siempre es menor o igual a su multiplicidad algebraica.
5. α es autovalor syss tiene multiplicidad geométrica no nula syss tiene multiplicidad algebraica no nula.

Definición 5.9 – Endomorfismo nilpotente: Se dice que $f \in \text{End}(V)$ es *nilpotente de grado n* si $f^{n-1} \neq 0$ y $f^n = 0$. Análogo para matrices cuadradas.

El estudio de endomorfismos nilpotentes es relevante pues si λ es autovalor de f , entonces $f - \lambda \text{Id}$ restringido al autoespacio N_λ es nilpotente.

Proposición 5.10: Sea $f \in \text{End}(V)$:

1. Si f es nilpotente y su campo escalar es un dominio íntegro, entonces todos sus autovalores son nulos.
2. Si $\lambda \in \sigma(f)$, entonces $(f - \lambda \text{Id})$ es nilpotente en N_λ .

Proposición 5.11: Sea V un módulo sobre un dominio íntegro y $f \in \text{End}(V)$. Si $\alpha \neq \beta$, entonces $f - \alpha \text{Id}$ es inyectiva en N_β . Y si el último es de dimensión finita, entonces $f - \alpha \text{Id}$ es biyección.

DEMOSTRACIÓN: Sea $v \in N_\beta$ tal que $(f - \alpha \text{Id})v = 0$, luego se cumple que

$$(f - \beta \text{Id})v = (\alpha - \beta)v.$$

Si $v = 0$ entonces $f - \alpha \text{Id}$ es inyectiva, como se quería probar. Si $v \neq 0$, entonces v es autovector de $(f - \beta \text{Id})$ con autovalor $\alpha - \beta \neq 0$. Pero $(f - \beta \text{Id})$ es nilpotente en N_β , luego sólo posee autovalores nulos, contradicción. \square

Teorema 5.12: Sea V un módulo sobre un dominio íntegro y $f \in \text{End}(V)$. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son escalares distintos, entonces sus autoespacios generalizados son independientes. En consecuencia, sus autoespacios comunes también lo son.

DEMOSTRACIÓN: La demostración es por inducción sobre n . El caso base $n = 1$ es trivial. Sean $v_i \in N_{\alpha_i}$ tales que

$$v_1 + \dots + v_n + v_{n+1} = 0,$$

por definición existe $r > 0$ tal que

$$(f - \alpha_{n+1} \text{Id})^r v_{n+1} = 0,$$

luego aplicando la función al resto de v_i s se obtiene que

$$(f - \alpha_{n+1} \text{Id})^r v_1 + \dots + (f - \alpha_{n+1} \text{Id})^r v_n = 0,$$

que corresponde al paso inductivo, puesto que N_{α_i} son invariantes; por lo tanto para todo $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$(f - \alpha_{n+1} \text{Id})^r v_i = 0.$$

Finalmente aplicamos la proposición anterior que dice que $(f - \alpha_{n+1} \text{Id})^r$ es biyección en N_{α_i} para deducir que $v_i = 0$. \square

Corolario 5.13: Sea $f \in \text{End}(\mathbb{k}^n)$. Si f posee n autovalores distintos, entonces es diagonalizable.

Teorema 5.14: Un endomorfismo es diagonalizable syss existe una base formada por sus autovectores.

Teorema 5.15: Son equivalentes:

1. \mathbb{k} es algebraicamente cerrado.
2. Toda matriz cuadrada con coeficientes en \mathbb{k} tiene un autovector.

DEMOSTRACIÓN: Claramente $1 \implies 2$, veremos la recíproca: Para ello basta probar por inducción que todo polinomio está asociado al polinomio

característico de una matriz. En particular el polinomio característico de

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

es

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0.$$

□

Definición 5.16: Se dice que un endomorfismo $f \in L(\mathbb{k}^n)$ es *triangularizable* si existe una base ordenada X tal que su representación matricial es triangular. En el caso de matrices cuadradas, si existe $C \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ tal que $C^{-1}BC$ es triangular.

Teorema 5.17: Para un endomorfismo sobre V , son equivalentes:

1. f es triangularizable.
2. Existe una cadena maximal de subespacios f -invariantes:

$$0 =: V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n := V$$

DEMOSTRACIÓN: 1) \implies 2). Si f es triangularizable, entonces sea $X := (x_1, \dots, x_n)$ la base para la que f es triangular. Luego la cadena viene dada por $V_k := \langle x_1, \dots, x_k \rangle$.

2) \implies 1). Basta ir formando la base a partir de puntos en los V_k , tomamos un vector no nulo en V_1 , luego $x_2 \in V_2 \setminus V_1$ y así. □

Ejemplo (matriz triangular no diagonalizable). Consideremos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix}$$

para que B sea diagonalizable ha de existir C invertible tal que $C^{-1}BC$ sea diagonal, es decir:

$$C^{-1}BC = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{\det C} \begin{bmatrix} ad+dc-bc & d^2 \\ -c^2 & ad-bc-cd \end{bmatrix}.$$

luego $c = d = 0$, pero en éste caso $\det C = 0$ lo que es una contradicción.

§5.1.1 El teorema fundamental del álgebra II. Ésta demostración hace uso de cierta noción muy básica de análisis. Aquí aplicaremos una inducción extraña para la cual admitimos la siguiente definición:

$P(\mathbb{K}, d, r)$: Todo conjunto A_1, \dots, A_r de matrices cuyo producto conmuta sobre \mathbb{K}^n con $d \nmid n$ posee un autovector en común.

Lema 5.18: Si $P(\mathbb{K}, d, 1)$, entonces para todo $r \geq 1$ se cumple que $P(\mathbb{K}, d, r)$.

DEMOSTRACIÓN: Probaremos la propiedad $P(\mathbb{K}, d, r+1)$ por inducción fuerte sobre la dimensión n del espacio vectorial: El caso $n = 1$ es trivial. Sean A_1, \dots, A_r, A_{r+1} matrices conmutativas en \mathbb{K}^{n+1} con $d \nmid n+1$. Como $P(\mathbb{K}, d, 1)$ se cumple, entonces A_{r+1} tiene un autovalor λ , luego se define $B := A_{r+1} - \lambda I$ y se definen

$$U := \ker(B), \quad W := \text{Im}(B),$$

que por conmutatividad de los endomorfismos son invariantes para todo A_i (¿por qué?).

Si $U = V$, entonces $A_{r+1} = \lambda v$ para todo $v \in V$, luego todos son autovectores de V , así que cualquier autovector común de A_1, \dots, A_r lo es con A_{r+1} .

Si $U \neq V$, entonces como $\dim W + \dim U = \dim V$ hay alguno que tiene dimensión no divisible por d , sin pérdida de generalidad supongamos que es U . Luego, por inducción, A_1, \dots, A_{r+1} tienen un autovector común en $U \subseteq V$. \square

Proposición 5.19: Se cumple que $P(\mathbb{R}, 2, r)$ para todo $r \in \mathbb{N}_{\neq 0}$

DEMOSTRACIÓN: Para ésto basta ver que $P(\mathbb{R}, 2, 1)$, lo que equivale a ver que toda matriz $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ tiene autovectores para n impar. En este caso, el polinomio característico de B es de grado impar, y todo polinomio de grado impar sobre \mathbb{R} tiene raíces. \square

Definición 5.20 – Matriz hermitiana: Dada $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$, se denota por $B^* := \overline{B}^t$. Se dice que B es *hermitiana* (o *auto-adjunta* en algunos libros) si $B = B^*$.

Corolario 5.21: El conjunto de las matrices hermitianas de $n \times n$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión n^2 .

HINT: Recuerde que en la diagonal de una matriz hermitiana sólo pueden ir números reales. \square

Lema 5.22: Se cumple que $P(\mathbb{C}, 2, 1)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ con n impar. Sea V el \mathbb{R} -espacio vectorial de las matrices hermitianas de $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$. Se definen los endomorfismos sobre V :

$$L_1(B) := \frac{AB + BA^*}{2}, \quad L_2(B) := \frac{AB - BA^*}{2i}.$$

Esta elección deriva de que

$$AB = \frac{AB + B^*A^*}{2} + i \cdot \frac{AB - B^*A^*}{2i},$$

aplicando el hecho de que B es hermitiana.

Como V tiene dimensión n^2 impar, y L_1, L_2 son operadores que conmutan (¿por qué?), entonces comparten un autovector $B \in V$ en común, con lo que luego

$$AB = L_1(B) + iL_2(B) = (\mu + i\lambda)B,$$

osea B es autovector de A que es lo que se quería probar. \square

Teorema 5.23: Para todo $k > 0$ se cumple que $P(\mathbb{C}, 2^k, 1)$. En consecuencia, toda matriz tiene autovalores en \mathbb{C} , y \mathbb{C} resulta ser algebraicamente cerrado.

DEMOSTRACIÓN: Lo probaremos por inducción fuerte sobre k , habiendo ya probado el caso base. Sea $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ con $2^{k-1} \mid n$ y $2^k \nmid n$. Sea V el conjunto de matrices anti-simétricas complejas de orden $n \times n$ (i.e., $B \in V$ si y sólo si $B^t = -B$). Se definen los endomorfismos sobre V :

$$L_1(B) := AB - BA^t, \quad L_2(B) := ABA^t$$

que conmutan (¡ demuéstrela!). Nótese que $\dim V = \frac{n(n-1)}{2}$ y cumple que $2^{k-1} \nmid \dim V$, luego por hipótesis inductiva existe B autovector común, de modo que

$$L_2(B) = \mu B = A(BA^t) = A(AB - L_1(B)) = A(AB - \lambda B)$$

luego despejando B se obtiene que

$$(A^2 - \lambda A + \mu I)B = 0,$$

tomando alguna columna no nula \mathbf{v} de B se tiene que

$$(A^2 - \lambda A + \mu I)\mathbf{v} = 0.$$

Como en \mathbb{C} todo polinomio cuadrático se escinde se tiene que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $x^2 - \lambda x - \mu = (x - \alpha)(x - \beta)$. Por lo que, en conclusión:

$$(A - \alpha I)(A - \beta I)\mathbf{v} = 0$$

Luego o $(A - \beta I)v = 0$ con lo que v es autovector de A , o $(A - \alpha I)v$ es autovector de A . \square

§5.1.2 Teorema de Cayley-Hamilton. Si A es un dominio, entonces hemos probado que $A[x]$ también lo es. Usando esto realizaremos comparaciones entre dos tipos de espacios curiosos: $\text{Mat}_n(A[x])$, es decir, el conjunto de matrices del anillo $A[x]$ de los polinomios de A ; y $(\text{Mat}_n A)[x]$, es decir, el conjunto de polinomios con coeficientes matrices de A .

Por ejemplo, un elemento de $\text{Mat}_2(\mathbb{Z}[x])$ podría ser

$$\begin{bmatrix} x^2 + 1 & 3x \\ x^3 - 2x & 0 \end{bmatrix}$$

y un elemento de $(\text{Mat}_2 \mathbb{Z})[x]$ podría ser

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X^3.$$

Queremos probar que son isomorfos. Para ello admitimos el convenio de que $r_p(f)$ es el coeficiente que acompaña a la x , o que si f es de grado n , entonces $f(x) = \sum_{p=0}^n r_p(f)x^p$. Si $F \in \text{Mat}_n(A[x])$ entonces convenimos que $[r_p(F)]_{i,j} := r_p(F_{i,j})$ (en general denotaremos elementos de $\text{Mat}_n(A[x])$ con letras mayúsculas).

Proposición 5.24: Sean $F, G \in \text{Mat}_n(A[x])$, entonces para todo k :

1. $r_p(F + G) = r_p(F) + r_p(G)$.
2. $r_p(F \cdot G) = \sum_{\ell=0}^p r_\ell(F)r_{p-\ell}(G)$

DEMOSTRACIÓN: La primera es trivial, la segunda tiene la misma forma que los coeficientes del producto de polinomios y es el resultado de una manipulación algebraica:

$$(r_p(F \cdot G))_{ij} = r_p((F \cdot G)_{ij}) = r_p\left(\sum_{k=1}^n F_{ik}G_{kj}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n r_p(F_{ik}G_{kj}) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=0}^p r_\ell(F_{ik})r_{p-\ell}(G_{kj}) \\
&= \sum_{\ell=0}^p \sum_{k=1}^n [r_\ell(F)]_{ik} [r_{p-\ell}(G)]_{kj} = \sum_{\ell=0}^p r_\ell(F)r_{p-\ell}(G).
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.25:

$$\text{Mat}_n(A[x]) \cong (\text{Mat}_n A)[x]$$

Teorema 5.26 – Teorema de Cayley-Hamilton: Si B es una matriz cuadrada de polinomio característico $p_B(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, entonces

$$p_B(B) = a_0I + a_1B + \cdots + a_nB^n = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\varphi : \text{Mat}_n(A[x]) \rightarrow (\text{Mat}_n A)[x]$ el isomorfismo canónico. Sabemos que se define

$$p_B(x) := \det(xI - B),$$

y que

$$(\text{adj } B)B = \det(B)I$$

de modo que

$$\text{adj}(xI - B)(xI - B) = p_B(x)I$$

notemos que ésta es una relación sobre $\text{Mat}_n(A[x])$ (pues la matriz a la derecha tiene por coordenadas polinomios), luego por el teorema anterior se cumple que se traduce a $(\text{Mat}_n A)[X]$:

$$\text{adj}(X - B)(X - B) = p_B(X),$$

finalmente por regla de Ruffini como $X - B$ divide a $p_B(X)$ se cumple que $X - B$ es raíz de $p_B(X)$. □

5.2. Espacios duales

Dado un \mathbb{k} -espacio vectorial V , entonces $V^* := L(V, \mathbb{k})$ es el espacio formado por funcionales lineales desde V .

Ésta demostración es de [17].

Proposición 5.27: Se cumple:

1. Si $\dim V < \infty$ entonces $\dim V = \dim V^*$.
2. Existe un monomorfismo canónico $\iota : V \rightarrow V^*$ tal que establece un isomorfismo entre V y $\iota[V]$.
3. (AEN) Si $\dim V$ es infinito, entonces $\dim V < \dim V^*$.

DEMOSTRACIÓN: La primera es trivial, probaremos la segunda: Consideremos que $\{e_i\}_{i \in I}$ es base de V , de modo que $\dim V = |I|$. Para construir el monomorfismo, definimos $\iota(e_i)$ como el funcional tal que $[\iota(e_i)](e_j) = \delta_{ij}$. Luego al extender linealmente a ι le definimos sobre todo V y vemos que la imagen sobre la base genera un conjunto linealmente independiente en V^* . Claramente ι es inyectiva y prueba que $\dim V \leq \dim V^*$ en todo caso.

Para probar la tercera probaremos varios pasos:

1. **Si $\aleph \leq \aleph_0$, entonces $|V| = |I|$:**
Claramente $|V| \geq |I|$, así que veremos la otra implicancia. Veamos que V puede ser visto como un subconjunto de S , donde S es la familia de subconjuntos finitos de $\aleph \times I$, por lo que,

$$|V| \leq |S| = |\aleph \times I|^{<\aleph_0} = |\aleph| \cdot |\aleph \times I| = |I|.$$

2. **Si $\aleph \leq \aleph_0$, entonces $\dim V < \dim V^*$:**
Simple: como toda función lineal viene determinada exclusivamente por los valores en la base, se cumple que

$$|V| = |\text{Func}(I; \aleph)| = |\aleph|^{|I|} \geq 2^{|I|} > |I| = \dim V$$

donde la última desigualdad es el teorema de cardinalidad de Cantor.

3. **Caso arbitrario:**

Notemos que \aleph , por ser un cuerpo, siempre contiene a otro cuerpo

$$F := \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{car } \aleph = 0 \\ \mathbb{F}_p, & \text{car } \aleph = p \end{cases}$$

Luego si $W := \text{Span}_F(e_i)_{i \in I}$ vemos que $\dim_F W = \dim_{\aleph} V$, y sabemos que $\dim_F W < \dim_{\aleph} W^*$, así que basta probar que $\dim_F W^* \leq \dim_{\aleph} V^*$.

Sea $G \in L_F(W^*, V^*)$ definida así: Sea $\varphi \in W^*$, es decir, $\varphi : W \rightarrow F$ es F -lineal y queremos que $G(\varphi) : V \rightarrow \aleph$ sea \aleph -lineal. Sea $v \in V$, existe

$(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{k}$ tal que es nula excepto en finitos índices y $\mathbf{v} = \sum_{i \in I} \lambda_i \mathbf{e}_i$. Luego se define

$$[G(\varphi)](\mathbf{v}) = \sum_{i \in I} \lambda_i \varphi(\mathbf{e}_i)$$

el cual está bien definido y veamos que todo cumple las condiciones esperadas, dados

$$\mathbf{u} = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v} = \sum_{i \in I} \beta_i \mathbf{e}_i$$

y dados $\lambda \in \mathbb{k}$ se cumple

a) Fijada $\varphi \in W^*$ vemos que

$$\begin{aligned} [G(\varphi)](\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \sum_{i \in I} (\alpha_i + \beta_i) \varphi(\mathbf{e}_i) \\ &= \sum_{i \in I} \alpha_i \varphi(\mathbf{e}_i) + \sum_{i \in I} \beta_i \varphi(\mathbf{e}_i) = [G(\varphi)](\mathbf{u}) + [G(\varphi)](\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Y claramente $[G(\varphi)](\lambda \mathbf{v}) = \lambda [G(\varphi)](\mathbf{v})$ de modo que $G(\varphi)$ efectivamente es un elemento de V^* .

- b) G es efectivamente una aplicación F -lineal (¿por qué?).
 c) Si $\mathbf{u} \in W$, entonces $\alpha_i \in F$ y se cumple que

$$\varphi(\mathbf{u}) = \varphi \left(\sum_{i \in I} \alpha_i \mathbf{e}_i \right) = \sum_{i \in I} \alpha_i \varphi(\mathbf{e}_i) = [G(\varphi)](\mathbf{u})$$

De ésto se deduce que G es inyectiva.

Por ende G comprueba que $\dim_F W^* \leq \dim_F V^*$, pero queremos ver algo más fuerte ...

□

5.3. Formas bilineales

Cuando definimos el determinante nos topamos con la noción de forma multilineal, en este capítulo la retomamos pero sólo admitiendo dos coordenadas.

§5.3.1 Formas bilineales.

Definición 5.28 – Forma bilineal: Una forma bilineal $F \in L(V, V; \mathbb{k})$ es una forma multilinear de $V \times V$ a \mathbb{k} , donde V es un \mathbb{k} -espacio vectorial. En general también exigiremos que F sea simétrica, es decir, que $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Si \mathbf{u}, \mathbf{v} cumplen que $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ para una forma bilineal simétrica, entonces diremos que son *ortogonales* respecto a F , lo que denotaremos por $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Sea $B := (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ una base de V , entonces se le llama representación matricial de la forma bilineal F según B a

$$M_B(F) := [F(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)]_{ij}$$

Si F es una forma bilineal simétrica, decimos que $q : V \rightarrow \mathbb{k}$ definido por $q(\mathbf{v}) := F(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ es su *forma cuadrática* asociada.

Proposición 5.29: Dada una forma bilineal F sobre \mathbb{k}^n con base ordenada B , se cumple que una matriz $M = M_B(F)$ syss para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{k}^n$ se cumple que

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \pi_B(\mathbf{u})M\pi_B(\mathbf{v})^t.$$

Luego si denotamos $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \pi_B(\mathbf{u})\pi_B(\mathbf{v})^t$ para alguna base fijada, como la canónica, entonces toda forma bilineal F corresponde a

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}A, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}A^t)$$

con una matriz A .

Proposición 5.30: Si F es una forma bilineal simétrica, entonces su representación matricial bajo cualquier base también lo es.

Teorema 5.31: Si V es un \mathbb{k} -espacio vectorial con $\text{car } \mathbb{k} \neq 2$ y $\dim V < \infty$, entonces si F es una forma bilineal simétrica sobre V , V posee una base ortogonal respecto a F .

DEMOSTRACIÓN: La demostración es por inducción sobre n , la dimensión de V . El caso base es trivial.

Si F es nula, entonces toda base es ortogonal. De lo contrario, sean \mathbf{u}, \mathbf{v} tales que $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$, luego si q es su forma cuadrática, entonces

$$q(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = q(\mathbf{u}) + 2F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + q(\mathbf{v})$$

de modo que q es no nulo para al menos alguno entre $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}$; sea \mathbf{e}_1 alguno de ellos. Sea

$$W := \{\mathbf{x} \in V : \mathbf{x} \perp \mathbf{e}_1\}.$$

Vamos a probar que $V = \text{Span}(\mathbf{e}_1) \oplus W$: Sea $\mathbf{x} \in \text{Span}(\mathbf{e}_1) \cap W$, entonces $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_1$ satisface que $F(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) = 0 = \alpha F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)$ de modo que $\alpha = 0$ y $\mathbf{x} = \vec{0}$.

Notemos que $\mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1)$ es un funcional lineal (por definición de forma bilineal) suprayectivo y cuyo kernel es W , de modo que por fórmula de dimensiones se cumple que $\dim W = n - 1$, de modo que $\dim(\text{Span}(\mathbf{e}_1) \oplus W) = n$ y se comprueba nuestra hipótesis.

Finalmente como W tiene dimensión menor, por hipótesis inductiva, posee base ortogonal $\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ y añadirle \mathbf{e}_1 genera una base ortogonal para V . \square

Supongamos que sea $(\mathbf{e}_i)_i$ una base ortogonal de V según una forma bilineal simétrica F de representación matricial A , entonces si M es la matriz cambio de base a ella, entonces se cumple que

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}A, \mathbf{v}) = ((\mathbf{u}M)B, \mathbf{v}M) = (\mathbf{u}(MBM^t), \mathbf{v})$$

De modo que $A = MBM^t$.

Definición 5.32: Se dice que dos matrices A, B son *congruentes* si existe M invertible tal que $A = MBM^t$.

Por ende hemos probado:

Teorema 5.33: Toda matriz simétrica sobre un campo escalar de característica distinta de 2 es congruente a una matriz diagonal.

Sea F una forma bilineal simétrica con base ortonormal $(\mathbf{x}_i)_i$, entonces si B es la representación diagonal de F por el teorema anterior, B tiene por diagonal $\alpha_i^2 \lambda_i$ donde $\lambda_i := F(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)$ y α_i es un escalar que multiplicamos por \mathbf{x}_i a conveniencia, luego es claro que:

Teorema 5.34: Si $\text{car } \mathbb{k} \neq 2$ y todo elemento de \mathbb{k} posee raíz cuadrada, entonces toda matriz simétrica es congruente a una única matriz $\underbrace{[1, \dots, 1]_r, 0, \dots, 0}$.

En \mathbb{C} ésto es claro, pero en \mathbb{R} no sucede. Lo mejor que tenemos en \mathbb{R} es una matriz diagonal con 1s, (-1) s y 0s.

Proposición 5.35: Si $\text{car } \mathbb{K} \neq 2$, entonces si F es una forma bilineal simétrica sobre V con forma cuadrática asociada q , entonces F está completamente determinada por

$$F(u, v) = \frac{q(u + v) - q(u) - q(v)}{2}.$$

De éste modo podemos definir una forma cuadrática de tal modo que la función descrita cumpla ser una forma bilineal simétrica.

Definición 5.36: Dada una forma cuadrática q sobre V , se dice que posee alguna de las siguientes propiedades si para todo $v \in V$:

Definida positiva Si $x \neq 0$ implica $q(x) > 0$.

Semidefinida positiva Si $q(x) \geq 0$.

Definida negativa Si $x \neq 0$ implica $q(x) < 0$.

Semidefinida negativa Si $q(x) \leq 0$.

§5.3.2 Formas sesquilineales, producto interno y “geometría euclídea”.

Definición 5.37 – Forma sesquilineal: Sea H un \mathbb{K} -espacio vectorial, se dice que $F : H^2 \rightarrow \mathbb{K}$ es una forma sesquilineal si para todo $u, v, w \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumple:

1. $F(u, v) = \overline{F(v, u)}$ (simetría hermitiana).
2. $F(u + v, w) = F(u, w) + F(v, w)$ (linealidad).
3. $F(\alpha u, v) = \alpha F(u, v)$.

Las mismas nociones de representación matricial y formas cuadráticas (ahora llamadas *hermitianas*) aplica.

Proposición 5.38: Si F es una forma sesquilineal, entonces para todo $u, v \in \mathbb{K}^n$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumple:

1. $F(u, \alpha v) = \bar{\alpha} F(u, v)$.
2. $F(u, u) \in \mathbb{R}$.

El resultado anterior permite conservar las definiciones para forma cuadrática en \mathbb{R} y nos permite ver un análogo para la representación matricial:

Teorema 5.39: Dada una forma sesquilineal F sobre \mathbb{K}^n con base ordenada B , se cumple que una matriz $A := M_B(F)$ syss para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ se cumple que

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \pi_B(\mathbf{u})A\pi_B(\mathbf{v})^*$$

Luego si denotamos $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \pi_B(\mathbf{u})\pi_B(\mathbf{v})^*$, entonces toda forma sesquilineal corresponde a

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}A, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}A^*).$$

Definición 5.40 – Producto interno: Se dice que una forma sesquilineal $(,) : H^2 \rightarrow \mathbb{K}$ es un *producto interno* si su forma cuadrática asociada es definida positiva. Un par $(H, (,))$ se dice un *espacio vectorial con producto interno* o un *espacio prehilbertiano*. En éste capítulo, H siempre representará un espacio prehilbertiano.

Denotamos $\| \cdot \| : H \rightarrow [0, \infty)$ a la aplicación

$$\| \mathbf{x} \| := \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})},$$

que ésta bien definida y sólo toma 0 en el $\vec{0}$.

§5.3.3 Formas hermitianas y espacios de producto interno.

Definición 5.41 – Forma hermitiana: Sea H un \mathbb{K} -espacio vectorial, se dice que $f : H^2 \rightarrow \mathbb{K}$ es una forma hermitiana si para todo $u, v, w \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumple:

1. $f(u, v) = \overline{f(v, u)}$ (simetría hermitiana).
2. $f(u + v, w) = f(u, w) + f(v, w)$ (linealidad).
3. $f(\alpha u, v) = \alpha f(u, v)$.

Se dice que $\langle , \rangle : H^2 \rightarrow \mathbb{K}$ es un *producto interno* si es una forma hermitiana que satisface que $f(u, u) = 0$ syss $u = \mathbf{0}$, y que $f(u, u) \geq 0$. Un par (H, \langle , \rangle) se dice un *espacio prehilbertiano*.

Si H es prehilbertiano, entonces se define

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

En este capítulo, H siempre denotara un espacio prehilbertiano.

Proposición 5.42: Si f es una forma hermitiana sobre H , entonces, para todo $u, v \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$:

1. $f(u, \alpha v) = \bar{\alpha} f(u, v)$.
2. $f(u, u) \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN: Para probar el segundo veamos primero que por simetría hermitiana $f(u, u)$ ha de ser real. \square

Lema 5.43: Sea $x \in H$. Se cumple que $x = \mathbf{0}$ syss para todo $y \in H$ se cumple que $\langle x, y \rangle = 0$.

Corolario 5.44: Sean $x, y \in H$. Se cumple que $x = y$ syss para todo $z \in H$ se cumple que $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$.

Corolario 5.45: Sean $A, B \in \text{End}(H)$. Se cumple que $A = B$ syss para todo $x, y \in H$ se cumple que $\langle Ax, y \rangle = \langle Bx, y \rangle$.

DEMOSTRACIÓN: Basta fijar un x cualquiera para que variar el y concluya que $Ax = Bx$ para dicho x . Luego variando todo x se cumple que $Ax = Bx$ para todo $x \in H$, i.e., $A = B$. \square

Teorema 5.46 – Desigualdad de Cauchy-Schwarz: Para todo $x, y \in H$ se cumple:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $y \neq 0$ (pues $y = 0$ es trivial), entonces notemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle - \alpha \langle y, x \rangle - \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + |\alpha|^2 \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 - 2 \operatorname{Re}(\alpha \langle y, x \rangle) + |\alpha|^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, luego sea $\alpha := \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$ y despejemos un poco:

$$0 \leq \|x\|^2 - 2 \frac{\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2},$$

de lo que se concluye el resultado. \square

Teorema 5.47 (Desigualdad traingular): Para todo $x, y \in H$ se cumple que

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

luego, $\|\cdot\| : H \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma.

DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

\square

Llamaremos *unitarios* a los vectores de norma 1.

Definición 5.48 – Ortogonalidad: Un par $x, y \in H$ se dicen *ortogonales* si $\langle x, y \rangle = 0$, en cuyo caso se escribe $x \perp y$. Más aún, dado un subconjunto $A \subseteq H$, le llamamos *complemento ortogonal* a

$$A^\perp := \{x \in H : \forall a \in A (x \perp a)\}.$$

Diremos que una sucesión (finita o infinita) de vectores es *ortogonal*, si los vectores lo son dos a dos. Diremos que una sucesión es *ortonormal*, si los vectores son unitarios y la sucesión es ortogonal.

Teorema 5.49: Se cumple:

1. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (ley del paralelogramo).
2. $x \perp y$ syss $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (teorema de Pitágoras I).
3. Si $\{x_i\}_{i=1}^n$ es una sucesión ortonormal, entonces para todo $i \leq n$ se cumple $x_i \perp \sum_{j \neq i} x_j$.

4. Si $\{x_i\}_{i=1}^n$ es una sucesión ortonormal, entonces para todo $x \in H$ se cumple

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 + \left\| x - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\|^2,$$

donde $\alpha_i := \langle x, x_i \rangle$ (teorema de Pitágoras II).

DEMOSTRACIÓN: 4. Obsérvese que

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \left(x - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right).$$

Donde hay $n + 1$ vectores, hemos de probar que todos son ortogonales entre sí para aplicar el teorema de Pitágoras. Es claro que $x_i \perp x_j$ con $i \neq j$, por ende, basta notar que

$$\begin{aligned} \left\langle x_k, x - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\rangle &= \langle x_k, x \rangle - \sum_{i=1}^n \langle x_k, \alpha_i x_i \rangle \\ &= \langle x_k, x \rangle - \overline{\alpha_k} \langle x_k, x_k \rangle \stackrel{1}{=} 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.50 – Ortogonalización de Gram-Schmidt: Si $\dim H \leq \aleph_0$ tiene una base $\{x_i\}_i$, entonces posee una base ortonormal $\{z_i\}_i$ que satisface que para todo $k > 0$:

$$\text{Span}\{x_1, \dots, x_k\} = \text{Span}\{y_1, \dots, y_k\}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{x_i\}$ una base cualquiera de H . Para el proceso de Gram-Schmidt primero definiremos $y_1 := x_1$. Luego queremos que $y_2 \perp y_1$ y que $\text{Span}(x_1, x_2) = \text{Span}(y_1, y_2)$, para lo cual

$$y_2 := x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1$$

que comprueba cumplir nuestras condiciones (¿por qué?). Así se define por recursión

$$y_{n+1} := x_{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{\langle x_{n+1}, y_k \rangle}{\|y_k\|^2} y_k$$

Finalmente se normaliza $\{y_i\}$ en $\{z_i\}$ y ya está.

□

Proposición 5.51: Se cumple:

1. Si $S \subseteq H$, entonces $S^\perp \leq H$.
2. Para todo $S \subseteq H$ se cumple que $S \subseteq (S^\perp)^\perp$.

Si exigimos que $\dim H \leq \aleph_0$, entonces para todo $E \leq H$ se cumple que:

3. Existe una única transformación lineal $\pi_E : H \rightarrow E$ tal que $\pi_E(v) = v$ si $v \in E$ y $\pi_E(v) = 0$ si $v \notin E$, a la que llamamos *proyección ortogonal* sobre E .
4. $E \oplus E^\perp = H$.
5. $(E^\perp)^\perp = E$.

DEMOSTRACIÓN: Se elige $\{x_i\}_i$ base ortonormal de H que contiene una subsucesión $\{y_i\}_i$ que es base (también ortonormal) de E . Finalmente π_E lo que hace es anular los coeficientes de $\{x_i\}_i$ que no están en $\{y_i\}_i$. \square

¿Y cómo se ve el producto interno? Sea $\{x_i\}$ una base ortonormal de H y sean $u, v \in H$. Por definición de base existen unas sucesiones de escalares $(\alpha_i)_i$ y $(\beta_i)_i$ tales que

$$u = \sum_{i=1} \alpha_i x_i, \quad v = \sum_{i=1} \beta_i x_i$$

luego

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \left\langle \sum_{i=1} \alpha_i x_i, v \right\rangle = \sum_{i=1} \alpha_i \langle x_i, v \rangle \\ &= \sum_{i=1} \alpha_i \left\langle x_i, \sum_{j=1} \beta_j x_j \right\rangle = \sum_{i=1} \alpha_i \sum_{j=1} \bar{\beta}_j \langle x_i, x_j \rangle \\ &= \sum_{i=1} \alpha_i \sum_{j=1} \bar{\beta}_j \delta_{ij} = \sum_{i=1} \alpha_i \bar{\beta}_i. \end{aligned}$$

Luego, todo el producto interno queda completamente determinado por una base ortonormal. Si exigimos que la base canónica sea ortonormal por definición, entonces se tiene que

$$\langle (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i.$$

Es más, si identificamos $H := \text{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{C})$, entonces tenemos que para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$ se cumple que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\mathbf{v}}^t \mathbf{u}.$$

Corolario 5.52 (Desigualdad de Bessel): Sea $\{x_i\}$ una sucesión¹ ortonormal, entonces para todo $x \in H$ se cumple

$$\sum_i |\alpha_i|^2 \leq \|x\|^2,$$

donde $\alpha_i := \langle x, x_i \rangle$.

HINT: Para probar el caso de un conjunto ortonormal infinito, basta notar que para todo n se cumple por el teorema de Pitágoras, por ende, la sucesión dada por las sumas parciales es creciente y acotada, ergo, converge. \square

Teorema 5.53: Sea $\{x_i\}_{i=0}^n$ una sucesión finita ortonormal y $x \in H$. Entonces, los escalares $\lambda_i \in \mathbb{k}$ que minimizan el valor de

$$\left\| x - \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i \right\|$$

son únicos y son $\lambda_i = \langle x, x_i \rangle$.

DEMOSTRACIÓN: Observe que

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i \right\|^2 &= \|x\|^2 - \sum_{i=0}^n (\overline{\lambda_i} \langle x, x_i \rangle + \lambda_i \overline{\langle x, x_i \rangle}) + \left\| \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i \right\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \sum_{i=0}^n |\lambda_i|^2 - \sum_{i=0}^n (\overline{\lambda_i} \langle x, x_i \rangle + \lambda_i \overline{\langle x, x_i \rangle}) \\ &\quad + \sum_{i=0}^n |\langle x, x_i \rangle|^2 - \sum_{i=0}^n |\langle x, x_i \rangle|^2 \\ &= \|x\|^2 + \sum_{i=0}^n |\lambda - \langle x, x_i \rangle|^2 - \sum_{i=0}^n |\langle x, x_i \rangle|^2, \end{aligned}$$

de aquí es fácil deducir el enunciado. \square

¹Aquí se obvian los límites de los índices pues el resultado es válido tanto para sucesiones finitas como infinitas.

Corolario 5.54: Si una sucesión ortonormal $\{x_i\}$ genera un subespacio V de H , entonces todo $x \in V$ se escribe de forma única como combinación lineal con

$$x = \sum_i \langle x, x_i \rangle x_i.$$

Proposición 5.55 (Identidad de Parseval): Una sucesión ortonormal $\{x_i\}$ es base de H syss para todo $x \in H$ se cumple

$$\|x\|^2 = \sum_i |\langle x, x_i \rangle|^2.$$

§5.3.4 Formas cuadráticas.

Definición 5.56 – Formas bilineales y cuadráticas: Sea V un \mathbb{k} -espacio vectorial. Se dice que $F : V^2 \rightarrow \mathbb{k}$ es una *forma bilineal* si para todo $u, v, w \in V$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ se cumple:

1. $F(\alpha u + \beta v, w) = \alpha F(u, w) + \beta F(v, w).$
2. $F(u, \alpha v + \beta w) = \alpha F(u, v) + \beta F(u, w).$

y se dice que una forma bilineal es *simétrica* si $F(u, v) = F(v, u).$

Dada una forma bilineal F , se le dice la *forma cuadrática* asociada a F a $q : V \rightarrow \mathbb{k}$ es $q(v) := F(v, v).$

Proposición 5.57: Si el campo escalar de V es de característica distinta de 2, entonces: Si F es una forma bilineal simétrica sobre V con forma cuadrática asociada q , entonces F está completamente determinada por

$$F(u, v) = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}.$$

De éste modo podemos definir una forma cuadrática de tal modo que la función descrita cumpla ser una forma bilineal simétrica.

Parte III.

GEOMETRÍA ALGEBRAICA

6

Variedades afín

En el capítulo sobre extensiones de cuerpo y teoría de Galois vimos técnicas para encontrar raíces de polinomios con una variable. En geometría algebraica veremos cómo encontrar raíces a polinomios multivariable, aunque naturalmente varios otros problemas se abrirán durante el camino.

Dado una extensión de cuerpos K/k , en éste capítulo siempre asumiremos que K es algebraicamente cerrado. La mayoría de ejemplos se reducirán al estudio de \mathbb{C}/\mathbb{R} , \mathbb{C}/\mathbb{Q} y $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$.

6.1. Definiciones elementales

Definición 6.1: Denotaremos por $\mathbb{A}_k^n := k^n$ al *espacio afín* de dimensión n sobre k . Obviamos el subíndice cuando $\mathbb{A}^n := \mathbb{A}_K^n$. En general, llamaremos *puntos* a los elementos de \mathbb{A}^n , y *puntos racionales* a los elementos de \mathbb{A}_k^n .

Además de ello, en éste capítulo denotaremos por $A := k[x_1, \dots, x_n]$ cuando no haya ambigüedad sobre la cantidad de variables.

La notación de \mathbb{A}^n en lugar de K^n es porque lo que buscamos es constituir una categoría, en la que la estructura de espacio vectorial no tiene ningún rol; otro detalle es que en K^n hay vectores especiales, como el $\vec{0}$ y la base canónica, mientras que \mathbb{A}^n , al igual que un espacio geométrico (afín), carece de puntos de referencia estándares.

Definición 6.2 – Conjunto algebraico: Sea \mathbb{A}_k^n un espacio afín, entonces dado un conjunto de polinomios $T \subseteq A$ se define

$$V_k(T) := \{\mathbf{p} \in \mathbb{A}_k^n : \forall f \in T \ f(\mathbf{p}) = 0\},$$

obviamos los subíndices si $k = K$. Si $T = \{f_1, \dots, f_m\}$ nos permitimos denotar $V_k(f_1, \dots, f_m)$. Los conjuntos de ésta forma son llamados *algebraicos*.

Otro convenio es denotar por \mathbf{x} a una variable y \mathbf{p} a un punto específico.

Primero veamos la conexión con álgebra:

Proposición 6.3: Si $T_1 \subseteq T_2 \subseteq A$, entonces $V(T_1) \supseteq V(T_2)$. Además $V(0) = \mathbb{A}^n$ y $V(1) = \emptyset$.

Lema 6.4: Sean $T \subseteq A$ y $J := (T)$ (el ideal generado por T), entonces $V(T) = V(J)$.

DEMOSTRACIÓN: Por la proposición anterior es claro que $V(T) \supseteq V(J)$. Veamos que $V(T) \subseteq V(J)$: Sea $\mathbf{a} \in V(T)$ nos basta ver que para cualquier $f \in J$ se cumpla que $f(\mathbf{a}) = 0$. Para ello notemos que si $f \in (T)$, entonces existen polinomios $\lambda_i(\mathbf{x}) \in A$ y $g_i(\mathbf{x}) \in T$ tales que

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(\mathbf{x}) g_i(\mathbf{x})$$

pero como $g_i(\mathbf{a}) = 0$ para todo $g_i \in T$ (por definición de estar en $V(T)$) se concluye que $f(\mathbf{a}) = 0$. \square

Corolario 6.5: Si el conjunto $Z \subseteq \mathbb{A}^n$ es algebraico, entonces existen finitos polinomios $p_1, \dots, p_m \in A$ tales que $Z = V(p_1, \dots, p_m)$.

DEMOSTRACIÓN: Por definición $Z = V(T)$ y por el lema se da que $Z = V(J)$ con $J = (T)$. Por el teorema de bases de Hilbert A es un anillo noetheriano, luego $J = (p_1, \dots, p_m)$ que hacen cumplir el enunciado. \square

Lema 6.6: Sean $I, J \trianglelefteq A$ ideales, entonces:

$$V(I \cap J) = V(I \cdot J) = V(I) \cap V(J).$$

DEMOSTRACIÓN: ... \square

Definición 6.7: Dado el espacio afín \mathbb{A}^n se le llama *topología de Zariski* a la topología que tiene como cerrados a los conjuntos algebraicos.

A pesar de que de ésta manera obtenemos de manera bastante directa una topología, ésta no es para nada conveniente. En \mathbb{A}^1 se da que los cerrados son \mathbb{A}^1 , \emptyset y todos los conjuntos finitos, de modo que \mathbb{A}^1 siempre es un espacio T_1 que no es de Hausdorff.

Proposición 6.8: Se cumple:

1. El conjunto vacío $\emptyset = V_k(1)$ y el espacio afín $\mathbb{A}^n = V_k(0)$ son conjuntos algebraicos.
2. Los conjuntos singulares $\{\mathbf{p}\}$ son algebraicos.
3. La unión finita de conjuntos algebraicos es algebraica.
4. La intersección arbitraria de conjuntos algebraicos es algebraica.

DEMOSTRACIÓN: 3. Sean $S_1 = V_k(T_1)$ y $S_2 = V_k(T_2)$, luego sea

$$S := V_k(\{f \cdot g : f \in T_1, g \in T_2\})$$

y veamos que corresponde a la unión. En primer lugar, supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\mathbf{p} \in S_1$, entonces es claro que $\mathbf{p} \in S$. Asimismo sea $\mathbf{p} \in S$ si $\mathbf{p} \notin S_1$, entonces $f(\mathbf{p}) \neq 0$ para algún $f \in T_1$, luego como $(f \cdot g)(\mathbf{p}) = 0$ se cumple que $g(\mathbf{p}) = 0$ para todo $g \in T_2$. Por ello $\mathbf{p} \in S_2$.

4. Sean $(V_k(T_i))_{i \in I}$ una familia de conjuntos algebraicos, luego

$$\bigcap_{i \in I} V_k(T_i) = V_k\left(\bigcup_{i \in I} T_i\right). \quad \square$$

Índice de notación

\vee, \wedge	Disyuntor, “o lógico” y conjuntor, “y lógico” respectivamente.
\implies	Implica, entonces.
\iff	Si y sólo si.
\forall, \exists	Para todo, existe respectivamente.
\in	Pertenencia.
\subseteq, \subset	Subconjunto, subconjunto propio resp.
\cup, \cap	Unión e intersección binaria respectivamente.
$A \setminus B$	Resta conjuntista, A menos B .
A^c	Complemento de A (respecto a un universo relativo).
$A \times B$	Producto cartesiano de A por B .
$A_{\neq x}$	Abreviación de $A \setminus \{x\}$.
$f : A \rightarrow B$	Función f de dominio A y codominio B .
$f \circ g$	Composición de f con g . $(f \circ g)(x) = g(f(x))$.
$\mathcal{P}(A)$	Conjunto potencia de A .
resp.	Respectivamente.

syss	Si y sólo si.
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$	Conjuntos de números naturales, enteros y racionales resp.
\aleph_0	Cardinal numerable, cardinalidad de \mathbb{N} .
AE	Axioma de elección.
DE, AEN	Axioma de elecciones dependientes, y de elecciones numerables resp.
ZF(C)	Teoría de Zermelo-Fraenkel. La C representa el axioma de elección.
a^{-1}	Inversa de un elemento invertible en un grupo, p. 4.
$S \leq G$	S es subgrupo (anillo o espacio) de G , p. 5.
$\langle S \rangle$	Subgrupo, cuerpo o espacio generado por S , p. 6.
$\text{ord } x$	Orden de un elemento x , p. 7.
$G \cong H$	G y H son estructuras isomorfas, p. 8.
\mathbb{Z}_n^\times	Grupo multiplicativo o de las unidades de n , aquél formado por los coprimos de n , p. 10.
$\phi(n)$	Función indicatriz de Euler de n , esto es, la cantidad de coprimos positivos menores a n , p. 10.
S_n	Grupo simétrico sobre $\{1, 2, \dots, n\}$, p. 12.
$\text{sgn } \sigma$	Signo de la permutación σ , p. 15.
A_n	Grupo alternante definido en S_n , p. 15.
D_{2n}	Grupo diedral de cardinal $2n$, p. 16.
$N \trianglelefteq G$	N es subgrupo normal de G , p. 17.
$Z(S), Z(G)$	Centralizador de S , centro de G resp., p. 17.
$N_G(S)$	Normalizador de S , p. 17.
$C_G(S)$	Clase de conjugación de S , p. 17.
K_4	Grupo de Klein de 4 elementos, $K_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, p. 24.

$N \rtimes_{\alpha} A$	Producto semidirecto de N con A , donde A actúa sobre N , p. 26.
Orb_a	Órbita de a , osea, los $\alpha_g(a)$ para todo $g \in G$, p. 27.
Stab_a	Estabilizador de a , osea, los $g \in G$ que dejan a a fijo, p. 27.
$\text{Fix}_g(S)$	Puntos fijos de la acción α_g sobre S , p. 30.
$\text{Fix}_G(S)$	Puntos fijos de todas las acciones sobre S , p. 30.
$\text{Syl}_p(G)$	El conjunto de p -subgrupos de Sylow de G , p. 31.
A^{\times}	El conjunto de elementos invertibles de un anillo unitario A , p. 48.
\mathbb{k}	Un cuerpo general, p. 49.
$A[S]$	Conjunto de polinomios con coeficientes en A y con indeterminadas de S , p. 63.
$\deg f$	Grado del polinomio f , p. 63.
$c(f)$	Contenido del polinomio f , p. 69.
\mathbb{C}	Conjunto de números complejos, p. 74.
$\text{Re } z, \text{Im } z$	Parte real e imaginaria de z resp., p. 74.
$\text{Hom}_A(M, N)$	Espacio de morfismos de A -módulos desde M a N , p. 82.
$\det B$	Determinante de la matriz B , p. 98.
$\text{adj } B$	Matriz adjunta de B , p. 99.
$r(A)$	Rango de una matriz o de una transformación lineal, p. 100.
$[K : k]$	Grado de la extensión K de k . Su dimensión como k -espacio vectorial, p. 103.
$\text{Gal}(K/k)$	Grupo de Galois de la extensión de cuerpo K/k , p. 106.
$p_f(x), p_B(x)$	Polinomio característico de un endomorfismo o una matriz, p. 118.
$\sigma(f)$	Espectro de un endomorfismo lineal, o de una matriz cuadrada, p. 118.

B^* $= \overline{B}^t$, p. 122.

$x \perp y$ x e y son ortogonales, p. 133.

A^\perp Complemento ortogonal de A , p. 133.

Índice alfabético

- acción, 26
 - fiel, 27
 - transitiva, 27
- algebraico (elemento, extensión), 103
- algoritmo
 - de Horner-Ruffini, 67
 - división polinómica, 65
- anillo, 47
 - de división, 48
 - noetheriano, 54
 - ordenado, 49
- asociatividad, 3
- automorfismo, 9
- base, 85
 - canónica, 87
- cancelación, 5
- característica, 56
- centralizador, 17
- centro, 17
- ciclo, 13
- coeficiente
 - director, 63
 - polinomio, 62
- complemento
 - ortogonal, 133
- congruentes
 - (matrices), 129
- conjunto
 - algebraico, 142
 - libre, 85
 - ligado, 85
- conmutador, 23
- conmutatividad, 3
- contenido
 - de un polinomio, 69
- criterio
 - de irreductibilidad
 - de Eisenstein, 71
 - de Gauss, 70
 - de subgrupos, 5
- cuerpo, 48
 - algebraicamente cerrado, 115
 - de cocientes, 61
 - de escisión, 108
- desigualdad
 - de Bessel, 136

- de Cauchy-Schwarz, 132
- determinante, 97
- divisor
 - propio, impropio, 57
- dominio
 - de factorización única (DFU), 57
 - de ideales principales (DIP), 50
 - euclídeo, 53
 - íntegro, 48
- ecuación
 - de clases, 28
- elemento
 - neutro, 3
 - primo, 57
 - reductible, irreductible, 57
- endomorfismo, 8
 - nilpotente, 119
- epimorfismo, 8
- escalar, 81
- espacio
 - prehilbertiano, 131
 - vectorial, 81
- extensión
 - de cuerpos, 103
 - de Galois, 112
 - normal, 109
- forma
 - bilineal, 128
 - hermitiana, 131
 - multilineal, 96
 - sesquilineal, 130
- fórmula
 - de Grossman, 90
- funcional, 82
- función
 - indicatriz de Euler, 10
 - lineal, 82
- grado
 - de un polinomio, 63
- grupo, 4
 - cíclico, 7
 - de Galois, 106
 - diedral, 16
 - finitamente generado, 7
 - libre, 34
 - multiplicativo de n , 10
 - resoluble, 42
 - simple, 33
- ideal, 50
 - impropio, 50
 - maximal, 53, 59
 - primo, 59
 - principal, 50
- identidad
 - de Parseval, 137
- índice (subgrupo), 10
- invertible (elemento), 4, 48
- isomorfias (estructuras), 8
- isomorfismo, 8
- k -conjugados (elementos), 107
- lema
 - de Gauss, 69
- ley
 - del paralelogramo, 133
- matriz
 - adjunta, 99
 - hermitiana, 122
- máximo
 - común divisor, 60
- menor
 - complemento, 99
- mínimo

- común múltiplo, 60
- módulo
 - libre, 85
- monoide, 4
- monomio, 62
- monomorfismo, 8
- morfismo, 8
 - mónico, 8
- norma
 - euclídea, 53
- normalizador, 17
- número
 - complejo, 74
- órbita, 13
- ortogonales (vectores), 133
- ortonormal, 133
- p -grupo, 28
- p -subgrupo, 28
 - de Sylow, 31
- polinomio
 - característico, 118
 - ciclotómico, 71
 - de interpolación de Lagrange, 68
 - derivado, 110
 - minimal, 105
 - mónico, 63
 - primitivo, 69
- producto
 - directo, 23
 - interno, 131
 - semidirecto, 26
- propiedad
 - de factorización, 57
- punto
 - fijo, 13
- rango
 - (matriz), 100
- raíz
 - n -ésima, 104
 - cuadrada, 104
 - cúbica, 104
 - de un polinomio, 63
- regla
 - de Ruffini, 67
- semigrupo, 4
- separable (elemento, extensión), 111
- sistema
 - generador, 83
- subanillo, 50
- subespacio
 - f -invariante, 117
- subgrupo, 5
 - derivado, 41
 - normal, 17
 - propio, 5
- submódulo, 83
 - impropio, 83
- sucesión
 - exacta, 19
- teorema
 - chino del resto, 11, 61
 - de bases de Hilbert, 68
 - de Cauchy, 31
 - de Cayley, 12
 - de Cayley-Hamilton, 125
 - de De Moivre, 76
 - de extensión de Kronecker, 104
 - de isomorfismos
 - (cuarto), 21
 - (primero), 19
 - (segundo), 20
 - (tercero), 20

de Jordan-Hölder, 39

de Lagrange, 10

de Pitágoras, 133

de Sylow

(cuarto), 33

(primero), 31

(segundo), 32

(tercero), 33

del binomio de Newton, 55

fundamental

de los grupos abelianos, 24

del álgebra, 77

trasposición, 13

vector, 81

unitario, 133

Bibliografía

Álgebra abstracta

1. ALUFFI, P. *Algebra. Chapter 0* (American Mathematical Society, 1960).
2. CASTILLO, C. I. *Álgebra* <https://www.uv.es/ivorra/Libros/Al.pdf> (2020).
3. FINE, B. y ROSENBERGER, G. *The Fundamental Theorem of Algebra* (Springer-Verlag New York, 1997).
4. GARRETT, P. *Abstract Algebra* <http://www-users.math.umn.edu/~garrett/m/algebra/> (2007).
5. JACOBSON, N. *Lectures in Abstract Algebra* (Springer-Verlag, 1951).
6. LEE, G. T. *Abstract Algebra. An Introductory Course* (Springer International, Switzerland, 2018).

Álgebra lineal

7. CURTIS, M. L. *Abstract Linear Algebra* (Springer-Verlag New York Inc., 1990).
8. GUIMERÁ, S. *Apuntes para una Licenciatura. Álgebra y Geometría* (ed. NAVARRO GONZÁLEZ, J. A.) matematicas.unex.es/~navarro/licenciatura.pdf (2017).

9. IBORT, A. y RODRÍGUEZ, M. A. *Notas de Álgebra Lineal* http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/docums/ibort-algebra_lineal.pdf (2014).
10. KATZNELSON, Y. y KATZNELSON, Y. R. *A (Terse) Introduction to Linear Algebra* (American Mathematical Society, 2008).

Geometría algebraica

11. CASTILLO, C. I. *Geometría Algebraica* <https://www.uv.es/ivorra/Libros/GA.pdf> (2020).
12. HARTSHORNE, R. *Algebraic Geometry* (Springer-Verlag New York, 1977).
13. SANCHE DE SALAS, C. y SANCHE DE SALAS, P. *Álgebra Conmutativa. Geometría Algebraica* <http://hdl.handle.net/10662/4439> (Universidad de Extremadura, 2013).
14. SHAFAREVICH, I. *Basic Algebraic Geometry* 2 vols. (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013).

Artículos

15. BANASCHEWSKI, B. A New Proof that “Krull implies Zorn”. *Mathematical Logic Quarterly*. doi:10.1002/malq.19940400405 (1994).
16. BLASS, A. Existence of Basis implies the Axiom of Choice. *Contemporary Mathematics* **31**. <http://www.math.lsa.umich.edu/~ablass/bases-AC.pdf> (1984).
17. CONRAD, K. Infinite-dimensional Dual Spaces. <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/linmultialg/dualspaceinfinite.pdf> (2018).
18. CONRAD, K. Simplicity of A_n . <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/Ansimple.pdf> (2018).
19. CONRAD, K. The Sylow Theorems. <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/sylowpf.pdf> (2018).
20. CONRAD, K. Zorn’s Lemma and some applications. <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/zorn1.pdf> (2018).
21. DERKSEN, H. The Fundamental Theorem of Algebra and Linear Algebra. *The American Mathematical Monthly*. doi:10.2307/3647746 (2003).