Morfismos separados

José Cuevas Barrientos

Resumen. En éste artículo expositivo se da una introducción a distintos tipos de morfismos que aparecen en la teoría de esquemas. También se dan una mención a los *criterios valuativos* y se da una aplicación con ello.

1. Morfismos separados

La sesión anterior del taller de teoría de esquemas discutió productos fibrados de esquemas. Estos ocupan un lugar central en la teoría, y más aún lo hace la siguiente definición:

Definición 1.1: Un ***S-esquema*** es un morfismo de esquemas $\pi\colon X \to S$. En general, diremos que X es un S-esquema y que π es su ***morfismo estructural***. Un ***morfismo de S-esquemas*** $f\colon X \to Y$ es un morfismo de esquemas de modo que el siguiente diagrama conmute:[1]

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ S \arrow[r, equal] & S \end{tikzcd}$$

Sea $f\colon X \to S$ un morfismo de esquemas y sea Y un S-esquema. Denotamos por f_Y al único morfismo tal que el diagrama conmuta:[2]

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r, "f_Y"] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & Y \arrow[d, dotted] \\ X \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

Denotamos por $X_Y := X \times_S Y$. Entonces $f\colon X \to S$ induce $f_Y\colon X_Y \to Y$, al cual llamamos ***cambio de base*** por Y.

Sea $\mathcal{P}$ una propiedad de morfismos. Se dice que $\mathcal{P}$ es ***estable salvo cambio de base*** si para todo morfismo $f\colon X \to S$ con la propiedad $\mathcal{P}$ y todo S-esquema Y se cumple que $f_Y\colon X_Y \to Y$ posee $\mathcal{P}$.

Fecha: 29 de mayo de 2023.

[1] Para el lector familiarizado con categorías, la categoría de S-esquemas es la categoría de *corte* mediante S, por ello la notación Sch/S.

[2] Aquí seguimos notación de Aluffi bajo la cual, «flechas punteadas (¡no entrecortadas!) no importan».

Veamos un ejemplo:

Proposición 1.2: Los encajes abiertos y cerrados son estables salvo cambio de base.

Demostración: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo. Para los encajes abiertos, basta notar que si $V \subseteq Y$ es un abierto, entonces $V \times_Y X = f^{-1}[V]$ el cual es un abierto en X.

Para los encajes cerrados, basta verificarlo sobre abiertos afines de Y. Supongamos que $\operatorname{Spec} B =: Y \to S := \operatorname{Spec} A$, y sea $f\colon Z \hookrightarrow S$ un encaje cerrado, luego $Z = \mathbf{V}(A/\mathfrak{a})$ y así, $X \times_S Y = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a} \otimes_A B) = \operatorname{Spec}(B/\mathfrak{a}B)$, el cual es un cerrado en Y. □

Los paréntesis refieren a ejercicios del Hartshorne **[3]**, §II.4.

Definición 1.3: Sea $f\colon X \to S$ un S-esquema. El ***morfismo diagonal*** $\Delta_{X/S}\colon X \to X \times_S X$ es aquel tal que $\Delta_{X/S} \circ \pi_1 = \Delta_{X/S} \circ \pi_2 = \mathrm{Id}_X$.

Un morfismo $f\colon X \to S$ se dice ***separado*** si el morfismo diagonal es un encaje cerrado, o ***cuasiseparado*** si el morfismo diagonal es compacto. Un S-esquema se dice ***separado*** (resp. cuasiseparado) si el morfismo estructural es separado (resp. cuasiseparado).

El nombre se debe al paralelo con topología: un espacio topológico es de Hausdorff (o *separado*, para algunos autores) si la diagonal $\Delta \subseteq X \times X$ es cerrada.

Proposición 1.4: Sean X, Y, S un trío de esquemas. Entonces:

1. Para los encajes abiertos o cerrados, el morfismo diagonal es un isomorfismo. En consecuencia, los encajes abiertos y cerrados son separados.
2. La composición de morfismos separados es separada.
3. Los morfismos separados son estables salvo cambio de base.
4. El producto fibrado de S-esquemas separados es separado.
5. Sean $f\colon X \to Y, g\colon Y \to S$ morfismos de esquemas tales que $g \circ f$ es separado. Entonces f es separado.
6. Sea Y un S-esquema separado. Si X_1, X_2 son un par de Y-esquemas, entonces el morfismo canónico $X_1 \times_Y X_2 \to X_1 \times_S X_2$ es un encaje cerrado.

Demostración:
1. Para los encajes abiertos es trivial.
   Para los encajes cerrados, veremos que $X \times_S X \cong X$. Sean $g, h\colon Y \to X$ dos morfismos de esquemas tales que $j \circ g = j \circ h$, donde $j\colon X \hookrightarrow S$ es la inclusión. Así, como j es inyectivo, entonces $g = h$ en los espacios topológicos subyacentes. Para ver que $g = h$ como morfismos de esquemas, entonces considere $g^\sharp, h^\sharp\colon \mathscr{O}_X \to g_*\mathscr{O}_Y$ (nótese que el

haz del codominio es el mismo) y sea $y \in Y$, luego localizando en $x := g(y) = h(y)$ tenemos que los dos homomorfismos:

$$\mathscr{O}_{S,x} \xrightarrow{j_x^\sharp} \mathscr{O}_{X,x} \underset{h_x^\sharp}{\overset{g_x^\sharp}{\rightrightarrows}} \mathscr{O}_{Y,y}$$

y como $j_x^\sharp$ es suprayectivo, entonces $g_x^\sharp = h_x^\sharp$.

2. Sean $X \to Y, Y \to S$ morfismos de esquemas. Luego considere $\Delta_{X/Y} \colon X \to X \times_Y X = X \times_Y Y \times_Y X$ y
$$\Delta_{X/S} \colon X \to X \times_S X = X \times_Y (Y \times_S Y) \times_Y X,$$
de modo que $\Delta_{X/S} = \Delta_{X/Y} \circ (1_X \times_Y \Delta_{Y/S} \times_Y 1_Y)$. Así, el resultado se sigue de que los encajes cerrados son estables salvo cambio de base.
3. Basta notar que
$$\Delta_{X \times_S Y/Y} \colon X \times_S Y \to (X \times_S Y) \times_Y (X \times_S Y) = (X \times_S X) \times_S Y,$$
de modo que $\Delta_{X \times_S Y/Y} = \Delta_{X/S} \times_S 1_Y$ y los encajes cerrados son estables salvo cambio de base.
4. Si $X \to S, Y \to S$ son separados, entonces $X \times_S Y \to S$ se factoriza por $X \times_S Y \to Y$ (que es separado, por ser cambio de base de $X \to S$) y por $Y \to S$ que son ambos morfismos separados.
5. Sea $h \colon X \times_Y X \to X \times_S X$ el morfismo canónico, entonces $\Delta_{X/Y}[X] \subseteq h^{-1}\big[\Delta_{X/S}[X]\big]$. Basta probar que se da la inclusión $\supseteq$, pues entonces $\Delta_{X/Y}[X]$ será cerrado. Sea $s \in h^{-1}\big[\Delta_{X/S}[X]\big]$, luego existe $x \in X$ tal que $\Delta_{X/S}(x) = h(s)$ y además sea $t := \Delta_{X/Y}(x) \in \Delta_{X/Y}[X]$. Sean U, V, W entornos afines de $x, f(x), g(f(x))$ resp., tales que $U \subseteq f^{-1}[V]$ y $V \subseteq g^{-1}[W]$. Luego $s, t \in U \times_V U$ y la restricción $h|_{U \times_V U} \colon U \times_V U \to U \times_W U$ es un encaje cerrado, con lo que $s = t \in \Delta_{X/Y}[X]$ por inyectividad (local) de h.
6. Basta notar que el homomorfismo canónico $X_1 \times_Y X_2 \to X_1 \times_S X_2$ es
$$1_{X_1} \times_S \Delta_{Y/S} \times_S 1_{X_2} \colon X_1 \times_Y Y \times_Y X_2 \longrightarrow X_1 \times_Y (Y \times_S Y) \times_Y X_2,$$
y luego concluir mediante que los encajes cerrados son estables salvo cambio de base. □

Para el siguiente teorema, necesitamos un resultado previo:

Proposición 1.5: Sea X un esquema compacto y $f \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ una sección global. Sea:
$$X_f := \{x \in X : f|_x \notin \mathfrak{m}_x\}.$$
Si $a \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ es tal que $a|_{X_f} = 0$, entonces $f^n a = 0$ para algún n (cfr. Hartshorne [**3,** pág. 81], ex. II.2.16(b)).

Teorema 1.6 (Ex. 4.2): Sean X un S-esquema reducido e Y un S-esquema separado. Para todo par de S-morfismos $f, g \colon X \to Y$ tales que $f|_U = g|_U$ sobre algún $U \subseteq X$ abierto denso se cumple que $f = g$.

Demostración: Sea $h := (f,g)\colon X \to Y \times_S Y$ y denotemos $\Delta := \Delta_{Y/S}\colon Y \to Y \times_S Y$. Se cumple que $f \circ \Delta = (f,f)\colon X \to Y \times_S Y$ (¿por qué?) y la hipótesis se traduce en que $(f \circ \Delta)|_U = h|_U$, por ende, $U \subseteq h^{-1}\big[\Delta[Y]\big]$. Como $\Delta[Y]$ es cerrado por hipótesis, tenemos que $X = h^{-1}\big[\Delta[Y]\big]$, por lo que, $f = g$ (como funciones continuas).

Podemos verificar que $f = g$ como morfismos de esquemas sobre abiertos afines. Sea $X = \operatorname{Spec} B, Y = \operatorname{Spec} A$ y sean φ, ψ tales que $\varphi^a = f, \psi^a = g$. Dado $a \in A$, definamos $b := \varphi(a) - \psi(a) \in B$, de modo que $b|_U = 0$, o equivalentemente, $U \subseteq \mathbf{V}(b)$. Pero como U es denso, entonces $\mathbf{V}(b) = X$, luego b es nilpotente por la proposición anterior y como B es reducido, entonces $b = 0$. Aplicándolo para todo a se comprueba que $f = g$. $\square$

Proposición 1.7 (Ex. 4.3): Sea S un esquema afín y sea X un S-esquema separado. Para todo U, V afín, se cumple que $U \cap V$ es afín.

Demostración: Basta notar que $U \cap V = U \times_X V$ y que, por la proposición 1.4, inciso 6, tenemos que

$$U \cap V = U \times_X V \lhook\joinrel\longrightarrow U \times_S V,$$

donde $U \times_S V$ es afín (por construcción del producto fibrado) y todo subesquema cerrado de un afín es afín. $\square$

Proposición 1.8: Todo morfismo entre esquemas afines es separado.

Demostración: Sea $X := \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A =: Y$ inducido por $A \to B$. La diagonal $\Delta_{X/Y}\colon X \to X \times_Y X$ está inducida por el homomorfismo $B \otimes_A B \to B$ dado por $b \otimes b' \mapsto bb'$ el cual es suprayectivo, por ello $\Delta_{X/Y}$ es un encaje cerrado. $\square$

Finalmente concluimos con algunos ejercicios del Liu [**4**, págs. 109-114].

Proposición 1.9 (Ex. 3.2): Sea X un esquema. Son equivalentes:

1. X es separado.
2. X es separado sobre algún esquema afín.
3. Todo morfismo $f\colon X \to Y$ es separado.

Demostración: Claramente $3 \implies 1 \implies 2$.

$2 \implies 1$. Si $X \to \operatorname{Spec} A$ es separado, entonces como $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ es separado, $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ es separado por composición de morfismos separados.

$1 \implies 3$. Basta notar que la composición $X \to Y \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ es separada y aplicar la proposición 1.4, inciso 5. $\square$

Proposición 1.10 (Ex. 3.8): Sea S un esquema separado. Para todo morfismo de esquemas $f\colon X \to S$ y todo par de abiertos $U \subseteq X, V \subseteq S$ afines, se cumple que $U \cap f^{-1}[V]$ es afín.

Demostración: Sean $\pi_1\colon X \times_{\mathbb{Z}} S \to X, \pi_2\colon X \times_{\mathbb{Z}} S \to S$ las proyecciones canónicas, y sea $G_f := \mathrm{Id}_X \times_{\mathbb{Z}} f\colon X = X \times_S S \to X \times_{\mathbb{Z}} S$ el gráfico de f. Por la proposición 4.40, inciso 6, sabemos que G_f es un encaje cerrado. Es fácil comprobar que $U \cap f^{-1}[V]$ es la imagen bajo π_1 de $\pi_1^{-1}[U] \cap \pi_2^{-1}[V] \cap G_f[X]$, el cual es cerrado en $U \times V = \pi_1^{-1}[U] \cap \pi_2^{-1}[V]$ puesto que $G_f[X]$ es cerrado en $X \times S$. Finalmente, como $U \times V$ es afín y $U \cap f^{-1}[V]$ es cerrado en un afín, entonces $U \cap f^{-1}[V]$ es afín. □

Para finalizar, y sólo para hacer la mención:

Teorema 1.11 (criterio valuativo de separabilidad): Sea Y un esquema (localmente noetheriano) y sea $f\colon X \to Y$ un morfismo cuasiseparado (localmente de tipo finito). Son equivalentes:

1. f es separado.
2. Para todo anillo de valuación (discreta) A en K, y todo par de morfismos $g\colon \operatorname{Spec} A \to Y, h\colon \operatorname{Spec} K \to X$ tales que $f \circ h = g \circ (\iota^a)$ existe a lo más un morfismo $j\colon \operatorname{Spec} A \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\iota^a"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} A \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "j"] & Y \end{tikzcd}$$

Para ver una demostración, véase Grothendieck y Dieudonné [**EGA I,** págs. 287-288], §I.5.5; o bien, también hay una demostración en el proyecto Stacks [**Stacks**], `tag 01KY`.

Referencias

Stacks. De Jong, A. J. *et al. Stacks project* `https://stacks.math.columbia.edu/`.

EGA I. Grothendieck, A. y Dieudonné, J. *Éléments de Géométrie Algébrique.* I: *Le langage des schémas* (Springer Berlin, Heidelberg, 1971).

3. Hartshorne, R. *Algebraic Geometry Graduate Texts in Mathematics* **52** (Springer-Verlag New York, 1977).

4. Liu, Q. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves* (Oxford University Press, 2002).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`
URL: `josecuevas.xyz`