Topología y Análisis

José Cuevas Barrientos

25 de septiembre de 2020

ÍNDICE GENERAL

PREFACIO

Pre requisitos. Este libro supone que el lector está familiarizado con la teoría de conjuntos para el cuál tengo otro libro de mi autoría sobre el tema. En él advierto que no es necesario leerse completo para adquirir está base que presumo (y que toda la literatura matemática formal también) posee cualquier lector, fuera de ello todo el resto está autocontenido en el texto.

Métodos y objetivos. En mi lectura de textos matemáticos he caído en la conclusión de que hay dos factores inversamente proporcionales: el contenido y la explicación, por ende, si he de elegir, prefiero siempre el primero ante el segundo. Esto no quiere decir que el texto no se explaye bien, sino que en lugar de explicar una definición varias veces asumo que el lector la releerá hasta comprenderla; esto puede dificultar la lectura, pero hace el progreso en ella más placentero. También estoy consciente de que un lector prefiera un libro con hartos ejercicios, en su lugar mi libro sólo otorga demostraciones explícitas para resultados complejos, mientras que para los que no poseen demostración (que son la mayoría por cierto) se asume que el lector tomará cartas en el asunto.

INTRODUCCIÓN

Uno de los temas que más atrae a los jóvenes en matemáticas es el del análisis matemático, aquí re utilizamos dicho término para poder referirnos a un análisis que no se restringe exclusivamente a los números reales ni a espacios vectoriales reales, sino que puede generalizarse, y para ello, la topología tiene un rol fundamental. No obstante, hay que cuidarse de que ella es un arma de doble filo, pues si bien está hecha con claros fines analíticos y geométricos, utiliza una base fuerte sobre teoría de conjuntos, que suele criticarse por su abstracción; asimismo, un mal acercamiento a la topología puede generar confusión y tedio debido a que en gran medida suele sentirse como cualquier cosa menos el cálculo del que uno suele estar familiarizado.

Sobre la forma de pensar topológicamente. (Este ejercicio asume familiaridad con la noción real de límite.) Sabemos que algo del estilo de $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se describe analíticamente como

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ (0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon).$$

Que se lee como que cerca de a la función toma valores de L. El ϵ es indispensable, por que subjetivamente podríamos decir que si las imágenes están cerca de 1 también lo están de 1,1 o de 1,01, pero queremos darnos el lujo de hablar con unicidad; el ϵ nos dice que las imágenes se acercan lo más posible a L.

Si utilizamos una función distancia de la forma $d(x,y) := |x-y|$, entonces podemos describir el límite como

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ (0 < d(x,a) < \delta \implies d(f(x), L) < \epsilon).$$

Esta definición es mejor porque ahora sólo se requiere que exista una función distancia como la que propusimos. Pero se puede mejorar aún más: considere que

$$B_r(p) := \{x : d(x,p) < r\}.$$

Lo que se lee como "bola de radio r y centro p". Mediante este objeto nos queda la definición de límite como

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\ (x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \implies f(x) \in B_\epsilon(L)).$$

Donde aquí la definición sólo requiere de definir que significa $B_r(p)$ en un espacio. De hecho podemos erradicar una implicancia escribiendo el enredo como

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\ (B_\delta(a) \setminus \{a\} \subseteq f^{-1}[B_\epsilon(L)]).$$

Pero notemos por última y final vez que podemos eliminar los cuantificadores, el uso del ϵ y el δ, y decir que lo de arriba se aplica para U_a, V_L donde U_a, V_L es cualquier conjunto formado a partir de uniones de bolas. Y aquí es donde podemos incluso prescindir de las bolas, pues podríamos definir de antemano una familia de conjuntos convenientemente llamados *básicos* y decir que se aplica para uniones de básicos. Podemos llamar *abiertos* a los conjuntos formados a partir de uniones de básicos, y entonces decimos que $f(a)$ está cerca de L diciendo que para todo abierto V_L que contiene a L, existe un abierto U_a que contiene a a tal que

$$U_a \setminus \{a\} \subseteq f^{-1}[V_L].$$

Esta es la magia de la topología. Y aquí sólo basta definir una familia de básicos para que podamos pensar en continuidad en dicho espacio.

Usualmente las definiciones topológicas suelen ser bastante más abstractas y más difíciles de visualizar, pero son más potentes y permiten generalizar bastantes resultados del cálculo real. Un ejemplo es ver como, en contexto de los espacios conexos, un resultado como el teorema de los valores intermedios resulta casi trivial.

SOBRE EL AXIOMA DE ELECCIÓN (AE)

¿Por qué es un axioma? Es difícil entender por qué debemos introducir un axioma para emplear un argumento tan común. ¿Acaso no se nos permite elegir elementos cuando un conjunto es no vacío? Pues en verdad no es tan simple como eso. Al elegir un elemento aleatorio, lo que estamos haciendo lógicamente es algo así:

$$A \neq \varnothing \implies \exists x\ (x \in A \wedge \dots)$$

Lo cual se identifica por la introducción de un cuantificador del cual eventualmente se concluye algo como $\exists x\ (x \in A \wedge \phi(x))$ (existe un elemento de

A que cumple $\phi(x)$). Podemos seguir empleando y metiendo cuantificadores tantas (finitas) veces como se quiera, y matemáticamente el argumento sigue siendo válido, no obstante que ocurre si tenemos una familia infinita de conjuntos $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, entonces el argumento se vería algo así:

$$\exists x_0 \in A_0 \; (\exists x_1 \in A_1 \; (\exists x_2 \in A_2 \; (\dots)))$$

Lo cuál tiene toda la pinta de no ser válido, pues en esencia utilizaría infinitos signos. Otro detalle es que tampoco podemos usar un argumento inductivo para concluir que se puede extraer una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de términos correspondientes a cada conjunto. En dicho caso, la inducción sólo nos permite concluir que se puede extraer una sucesión finita que lo satisfaga, no infinita, y es que las elecciones infinitas son la parte que se asume en el AE.

¿Cuándo es válido tomar infinitas elecciones? Otra forma de verlo es que un par (x_0, x_1) de A_0 y A_1 resp. es, en efecto, un par ordenado que es un elemento del conjunto. Con esto es fácil concluir que el problemas de las infinitas (en particular numerables) elecciones se reduce a buscar un elemento:

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) \in \prod_{i=0}^{\infty} A_i$$

Y esto ***debe*** ser válido, ¿no? Nuevamente no lo es. Y eso es porque, de ser posible, podríamos extraer una sucesión de términos distintos dos a dos en un conjunto infinito cualquiera. ¿Y eso qué tiene de malo? Esto es equivalente a considerar que existe un elemento **primero**, un elemento **segundo**, un elemento **tercero** y así dentro de un conjunto arbitrario. Aquí es importante tomar en cuenta una de las descripciones más honestas sobre la teoría de conjuntos: "los conjuntos son objetos amorfos". Lo que significa que, al referirse a *un conjunto arbitrario*, la frase es tan completa como suena: los conjuntos arbitrarios no poseen ninguna característica distintiva, y mucho menos un *buen orden*.

No obstante, hay conjuntos que no son amorfos del todo y los cuales conocemos muy bien, especialmente por su orden: los naturales. Los naturales poseen esta característica, luego expresiones como *extraer inductivamente elementos de un subconjunto natural* están justificadas. Asimismo, conjuntos equipotentes a los naturales también tienen éstas facultades como lo son: los enteros y los racionales.

Distintos tipos de elecciones. Como vimos el axioma de elección está fuertemente ligado a la característica de un conjunto de estar bien ordenado, pero en general, la proposición es ***muy*** fuerte, en el sentido de que al aceptar el axioma de elección de forma general ocurren cosas muy extrañas como la conocida paradoja de Banach-Tarski. Por ello varios matemáticos rechazan su uso, sin embargo, pueden aceptar el uso de versiones más débiles que el axioma de elección para demostrar alguna proposición. La versión más conocida de esto es el **axioma de elecciones numerables** (AEN) que nos dice que entre numerables conjuntos no vacíos podemos extraer una sucesión de elementos de ellos. Como se detalla en el libro, los usos más comunes de AEN es en los temas que involucran sucesiones. También hay otras versiones más débiles del axioma de elección, pero no voy a entrar en tanto detalle, y cuando lo haga siempre pondré énfasis en su uso y se hará de manera opcional respecto de la lectura general.

Parte I.

Introducción a la Topología

1. NÚMEROS REALES Y SUCESIONES

En este capítulo pretendemos construir los números reales, pero debido a una multiplicidad de formas vamos a intentar tratar el problema desde sus variadas formulaciones, pues en ciertos contextos sirve más uno que el otro.

1.1 CONSTRUCCIÓN BASADA EN EL ORDEN

Para esto recordamos ciertas definiciones que teníamos sobre conjuntos ordenados:

Definición 1.1 – *Intervalos y conjunto denso*: Se definen los intervalos sobre un conjunto linealmente ordenado $(X, \leq)$ dado como:

$$\begin{aligned} (a,b) &:= \{x : a < x < b\} & [a,b] &:= \{x : a \leq x \leq b\} \\ [a,b) &:= \{x : a \leq x < b\} & (a,b] &:= \{x : a < x \leq b\} \\ (a,\infty) &:= \{x : a < x\} & [a,\infty) &:= \{x : a \leq x\} \\ (-\infty,b) &:= \{x : x < b\} & (-\infty,b] &:= \{x : x \leq b\} \end{aligned}$$

Los intervalos $(a,b), (a,\infty)$ y $(-\infty,b)$ se dicen *abiertos*; los intervalos $[a,b], [a,\infty)$ y $(-\infty,b]$ se dicen *cerrados*. Los símbolos "$\pm\infty$" son puramente de notación, a menos que el conjunto posea máximo y mínimo, en cuyo caso $\pm\infty$ les representa. En general si denotamos un intervalo (a,b) se asume de antemano que $a < b$, así que nos permitiremos obviar ese detalle, por ende, cosas como (a,a) o $[a,a]$ se dicen intervalos triviales.

Se dice también que es denso si todo intervalo abierto no-trivial es no vacío. Decimos que D es un subconjunto denso (en orden) de X si todo intervalo abierto posee elementos de D. X se dice no acotado (a secas) si no posee máximo ni mínimo.

Como los conjuntos son linealmente ordenados podemos dibujarles como rectas y los intervalos vendrían a ser secciones de dichas rectas. Si un intervalo incluye a un extremo, tal será pintado con un punto coloreado, si le excluye, se pintará con un punto blanco.

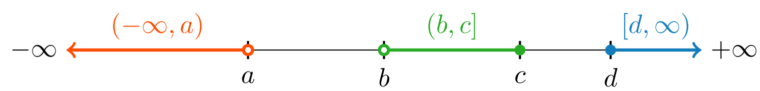

Figura 1.1. Diagramas de intervalos.

Los morfismos entre conjuntos ordenados son los que preservan orden inclusivo (i.e., $x \leq y$ implica $f(x) \leq f(y)$). También se dice que una estructura es única bajo isomorfismos, si cualesquiera dos estructuras que comparten dichas propiedades son isomorfas.

Para los teoremas posteriores llamaremos a un par ordenado (A, B) un *corte de Dedekind* si resulta ser una partición estricta[1] de X y A es una sección inicial no-trivial[2] de X.

Teorema 1.2: En un conjunto linealmente ordenado X son equivalentes:

1. Todo subconjunto no vacío acotado superiormente posee supremo (axioma del supremo).
2. Todo subconjunto no vacío acotado inferiormente posee ínfimo.
3. Un subconjunto $I \subseteq X$ cumple que
$$\forall a, b \in I; x \in X \ (a < x < b \implies x \in I)$$
syss es un intervalo.
4. Si (A, B) es un corte de Dedekind, entonces A o B posee máximo o mínimo resp.

Demostración: 1) $\iff$ 2). Sea A no vacío y acotado inferiormente. Entonces definimos B como el conjunto de cotas inferiores de A, el que por definición es no vacío y está acotado superiormente por cualquier elemento

[1] Esto es, si $A \cup B = X$ y $A \cap B = \varnothing$.

[2] Esto es, si para todo $a \in A$ y $b < a$ entonces $b \in A$. Y $A \notin \{\varnothing, X\}$.

de A. Luego basta probar que $\sup B = \inf A$. Notemos que $\sup B$ es cota inferior de A por ser la mínima cota superior de B, y es obvio que es la mayor de las cotas inferiores (pues es mayor o igual que todo elemento de B). La otra implicancia es análoga.

1) $\Longrightarrow$ 3). Es claro que todo intervalo cumple con lo pedido. Notemos que si $I = X$ o $I = \varnothing$ entonces es trivialmente un intervalo. Si sólo está acotado superiormente, entonces posee supremo b, luego probaremos que $(-\infty, b) \subseteq I \subseteq (-\infty, b]$.

Si $x \in (-\infty, b)$, como I no posee cota inferior, entonces existe $a \in I$ tal que $a < x$, y como $x < b$ entonces no puede ser cota superior de I, ergo existe $c \in I$ tal que $a < x < c$, por lo que $x \in I$. La otra inclusión es análoga ya que sólo cambia que $b \in I$. El resto de casos también.

3) $\Longrightarrow$ 4). Es fácil ver que A, B satisfacen las condiciones de la propiedad 3), ergo son intervalos, y como A es una sección inicial no-vacía se cumple que no es acotado inferiormente, pero como no es X entonces debe ser un intervalo de la forma $(-\infty, m)$ o $(-\infty, m]$ (pues algún elemento de B ha de ser cota superior). Algo análogo pasa con B que ha de ser $(m, +\infty)$ o $[m, +\infty)$. $m \in X$ así que $m \in A$ o $m \in B$, que resulta ser máximo de A o mínimo de B.

4) $\Longrightarrow$ 1). Sea S no vacío acotado superiormente, entonces llamemos B al conjunto de sus cotas superiores y $A := B^c$, luego (A, B) resulta ser un corte de Dedekind, por lo que alguno posee máximo o mínimo m. Sabemos que $m = \inf B$. Probaremos que m es cota superior de S. Sea $x \in S$, como $b \in B$ es cota superior, entonces $x \leq b$ para todo $b \in B$, ergo, x es cota inferior de B, luego por maximalidad del ínfimo, se cumple que $x \leq m$, luego m es cota superior de S y pertenece a B, por lo que es el mínimo de B, y el mínimo de las cotas superiores de S es, por definición, su supremo. □

Decimos que un conjunto linealmente ordenado es *completo* si satisface cualquiera (y por ende todas) de las propiedades del teorema anterior.

Teorema 1.3: Se cumple:

1. Hay un único conjunto linealmente ordenado, numerable, denso y no acotado bajo isomorfismos.
2. Hay un único conjunto linealmente ordenado completo que contiene un subconjunto denso numerable bajo isomorfismos.

DEMOSTRACIÓN: 1. Sean $P_1 := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $P_2 := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ conjuntos que satisfagan dichas propiedades. <++>

$\square$

Este teorema es muy importante, pues $(\mathbb{Q}, \leq)$ es un conjunto conocido que satisface la primera propiedad, es decir, cualquier otra estructura que cumpla dichas características es equivalente a $\mathbb{Q}$; y la segunda propiedad describe a $\mathbb{R}$, y también señala equivalencia. Esto es otra forma de decir que la recta numérica real es completa para lo que necesitamos, o que con $\mathbb{R}$ ya no nos "faltan" números en la recta.

Teorema 1.4: Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado denso y no acotado. Entonces existe $(C, \preceq)$ totalmente ordenado no acotado completo tal que posee un subconjunto D orden-isomorfo a X que es denso en C.

Demostración: Sea C el conjunto de los cortes de Dedekind de X, donde si $(A, B) \in C$ se cumple que A no posee máximo, entonces definimos $(A_1, B_1) \preceq (A_2, B_2)$ syss $A_1 \subseteq A_2$. Probemos ahora que es completo: Sea Y un conjunto de elementos de C, entonces definimos

$$S := \left(\bigcup_{(A,B)\in Y} A, \bigcap_{(A,B)\in Y} B \right).$$

Sabemos que $\bigcup_{(A,B)\in Y} A$ es el supremo de $\pi_1[Y]$, sólo basta ver que $S \in C$, lo cuál se hereda del hecho de que la unión de secciones iniciales es una sección inicial. Finalmente notemos que $\iota : X \to C$ definido como $\iota(x) = \big(\{y : y < x\}, \{y : x \leq y\}\big)$ es evidentemente un monomorfismo de orden (por cualidad de ser denso), luego $D := \iota[X]$ satisface ser el conjunto del enunciado; sólo basta notar que sea denso en C. $\square$

Definición 1.5: Definimos $\mathbb{R}$, también llamado conjunto de los "números reales", como la extensión de $\mathbb{Q}$ basada en el teorema anterior.

Notemos que esto es equivalente a decir que $\mathbb{R}$ es la mínima extensión de $\mathbb{Q}$ que cumple el axioma del supremo, que es como varios otros libros lo definen.

1.2 CONSTRUCCIÓN ANALÍTICA

El método anterior define el conjunto de los reales respecto al orden y esto es particularmente placentero visualmente pues equivale a ver que $\mathbb{R}$ es el conjunto de todos los números que representan puntos de la recta numérica; no obstante, no es muy sencillo probar que la estructura algebraica de $\mathbb{Q}$ (las propiedades de *cuerpo*) se conservan. Para esto debemos introducir un par de nuevos conceptos propios del análisis matemático.

Definición 1.6 – *Anillo ordenado arquimediano*: Un anillo unitario ordenado $(R, +, \cdot, \leq)$ se dice *arquimediano* si satisface con la propiedad de arquímedes: Para todo $r \in R$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r < \phi(n)$ donde $\phi(n) := \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n}$ donde 1 es el neutro multiplicativo de R.

En general obviaremos la parte de ordenado y unitario (en caso de ser anillo) ya que están implícitas en la definición de arquimediano.

Es claro que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo arquimediano, la idea es poder definir $\mathbb{R}$ de modo que sea también un cuerpo arquimediano. Desde aquí en adelante R representará un anillo arquimediano.

Definición 1.7 – *Función valor absoluto*: En R se define el *valor absoluto* $|\,|: R \to R^+ \cup \{0\}$ así:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Teorema 1.8: Sean $x, a \in R$, son equivalentes:

1. $-a \leq x \leq a$.
2. $x \leq a \wedge -x \leq a$.
3. $|x| \leq a$.

Proposición 1.9: Sean $x, y \in R$, se cumple:

a) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

b) $|xy| = |x|\,|y|$.

Definición 1.10 – *Norma y distancia*: Sea un espacio vectorial V de un anillo arquimediano A. Una norma $\| \, \| : V \to R$ es una aplicación que satisface los siguientes axiomas para $u, v \in V$ y $\alpha \in A$:

(1) $\|u\| = 0$ syss $u = 0$.

(2) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualdad triangular).

(3) $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$.

Dado un espacio M, una aplicación $d : M \times M \to [0, +\infty)$ es una *pseudo-métrica* si satisface los siguientes axiomas para $x, y \in M$:

(1) $d(x, x) = 0$.

(2) $d(x, y) = d(y, x)$.

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad triangular).

Diremos que x, y distintos son *distinguibles* si $d(x, y) \neq 0$. Si x, y no son distinguibles entonces se dice que son *indistinguibles*. Un par (M, d) se dice un *espacio pseudo-métrico*. Si M es pseudo-métrico y no posee puntos indistinguibles, entonces d se dice una *métrica* y M un *espacio métrico*.

Un espacio vectorial dotado de una norma se dice un *espacio normado*. Notemos que en un espacio normado podemos definir la distancia como $d(x, y) = \|x - y\|$ la cual llamamos distancia inducida por la norma.

También denotamos las *bolas abiertas* y *cerradas* como

$$B_r(x) := \{y : d(x, y) < r\}, \quad B'_r(x) := \{y : d(x, y) \leq r\}$$

respectivamente.

Decimos que una aplicación $f : M \to M'$ entre dos espacios métricos es una *isometría*[a] o es *isométrica* si conserva las distancias, i.e:

$$d(x, y) = d'(f(x), f(y)).$$

Dos espacios métricos se dicen *isométricos* si existe una isometría biyectiva entre ambos.

[a] gr. ἴσος: igual, μέτρον: medida.

Desde ahora en adelante convenimos que $\mathbb{M}$ representa un espacio pseudo-métrico, $\overline{\mathbb{M}}$ un espacio métrico y $\mathbb{K}$ un cuerpo normado.

Ejemplo (norma L_p). Es usual, al tomar $\mathbb{R}^n$ considerar la norma

$$\|\vec{v}\|_2 := \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + \cdots + |v_n|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}$$

donde $v_i = \pi_i(\vec{v})$. Y por otro lado, es también conocida la norma taxi[3] definida por

$$\|\vec{v}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

Así se generaliza a que la norma L_p sea

$$\|\vec{v}\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p}$$

Que, como ejercicio para el lector, efectivamente cumple ser una norma con $p \in \mathbb{N}_{\neq 0}$. Asimismo, se define la norma L_∞

$$\|\vec{v}\|_\infty := \text{máx}\{v_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

La norma L_2 se le suele decir euclídea, y a $\mathbb{R}^n$ con la norma L_2 se le dice un *espacio euclídeo*.

Proposición 1.11: En $\mathbb{K}$:

a) $\|x\| - \|y\| \leq \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$.

b) $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$.

Además, la función valor absoluto en todo anillo arquimediano es una norma; ergo todo anillo arquimediano puede ser un espacio normado y métrico.

HINT: Usar desigualdad triangular.

Proposición 1.12: Dos puntos u, v de $\mathbb{M}$ son indistinguibles syss $d(u, x) = d(v, x)$ para todo $x \in \mathbb{M}$.

[3]El nombre se le da pues aquí las distancias se miden de la misma manera que lo hacen las "cuadras" en una ciudad.

Teorema 1.13: Todo espacio pseudo-métrico $\mathbb{M}$ puede restringirse a un espacio métrico $\overline{\mathbb{M}}$. Esto es, existe $\overline{\mathbb{M}}$ tal que existe una isometría suprayectiva $\pi : \mathbb{M} \to \overline{\mathbb{M}}$.

Demostración: Se define $\sim$ una relación sobre $\mathbb{M}$ tal que $x \sim y$ si son indistinguibles. Se cumple que $\sim$ es de equivalencia (¿por qué?). Luego se define $\overline{\mathbb{M}} := \mathbb{M}/\sim$. Finalmente se define la aplicación d' sobre $\overline{\mathbb{M}}$ como $d'([x],[y]) = d(x,y)$ que resulta ser una métrica sobre $\overline{\mathbb{M}}$. Es claro que $\pi(x) = [x]$ es una isometría suprayectiva. □

Definición 1.14 – *Sucesiones, límites y etc.*: Una sucesión es una función $s : \mathbb{N} \to X$ donde en lugar de denotar $s(n)$ convenimos a denotar s_n. Usualmente se abrevian como $(s_n)_{n=0}^{\infty}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o $(s_n)_n$ cuando no haya ambigüedad.

Decimos que una sucesión sobre $\mathbb{M}$ es *convergente* a un límite L si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ natural se cumple que $s_n \in B_\epsilon(L)$, en cuyo caso denotamos $s_n \to L$. Si una sucesión es convergente y su límite es único le denotamos $\lim_n s_n$. Si una sucesión no es convergente se dice divergente.

Se dice que una sucesión sobre R "converge a infinito" (pese a ser un tipo de divergencia) si para todo $C > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ natural se cumple que $C < s_n$, en cuyo caso denotamos $\lim_n s_n = +\infty$. Así mismo decimos que s_n converge a $-\infty$ si $-s_n \to \infty$. Algunos textos admiten que se escriba $\lim_n s_n = \infty$ si $(s_n)_n$ no está acotado.

Decimos que una sucesión sobre $\mathbb{M}$ es de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$ naturales se cumple que $s_m \in B_\epsilon(s_n)$. Una sucesión en R es *creciente* (resp. *decreciente*) si para todo $i < j$ naturales se da que $s_i \leq s_j$ (resp. $s_i \geq s_j$). Se le añade el prefijo *estricto* si es inyectiva como función (i.e., si todos sus términos son distintos). Una sucesión es *monótona* si es creciente o decreciente.

A ver, vamos a re analizar los conceptos definidos: una sucesión es *convergente* a un número L llamado límite si sus términos están eventual y arbitrariamente cerca de dicho límite. Una sucesión es de Cauchy si sus términos están eventual y arbitrariamente cerca los unos de los otros.

En general una sucesión sobre un anillo arquimediano usara la métrica inducida por la norma dada por la función valor absoluto.

Definición 1.15 – *Conjunto acotado*: En $\mathbb{M}$ se dice que un conjunto A es *acotado* si las distancias entre sus puntos lo son. Se define el diámetro de dicho conjunto

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Además se define la distancia entre conjuntos como

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\},$$

y la distancia punto-conjunto como

$$d(x, A) := d(\{x\}, A).$$

Proposición 1.16: En $\mathbb{M}$ están acotados:

1. Los conjuntos finitos.
2. Las bolas, tanto abiertas como cerradas.
3. La unión finita de acotados.
4. La intersección arbitraria (pero no vacía) de acotados.

Teorema 1.17: Se cumple que:

1. El límite de una sucesión convergente en $\overline{\mathbb{M}}$ es único.
2. Toda sucesión convergente en $\mathbb{M}$ está acotada.

Demostración:

1. Supongamos, por contradicción, que tuviese dos límites L_1, L_2 distintos, luego $\epsilon := d(L_1, L_2) > 0$, por definición existen N_1, N_2 desde los cuales los términos están a menos de $\epsilon/2$ de distancia de los límites, luego para todo $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ se cumple que:

$$\epsilon = d(L_1, L_2) \leq d(L_1, s_n) + d(L_2, s_n) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

2. Sea $\epsilon > 0$. Por definición existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $s_n \in B_\epsilon(L)$. Definamos $\delta := \operatorname{diam}(\{s_0, s_1, \ldots, s_{n_0-1}, L\})$.

Si $i \leq n_0$ entonces $d(s_i, L) \leq \delta$ y si $i \geq n_0$ entonces $d(s_i, L) < \epsilon$, luego si definimos $\eta := \max\{\delta, \epsilon\}$ entonces $d(s_i, s_j) \leq d(s_i, L) + d(L, s_j) \leq 2\eta$. Ergo $\operatorname{Img} s_n$ está acotado por 2η.

□

Teorema 1.18 – *Álgebra de límites*: En $\mathbb{K}$ con $v \in \mathbb{K}$, $s_n \to x$ y $r_n \to y$:

1. $\lim_n v = v$.
2. La suma de convergentes también converge y $(s_n + r_n) \to x + y$.
3. La resta de convergentes también converge y $(s_n - r_n) \to x - y$.

En R:

4. El producto de convergentes también converge y $(s_n \cdot r_n) \to xy$.
5. La división de convergentes en un cuerpo con $y \neq 0$, también converge y $s_n/t_n \to x/y$.
6. Si $s_n \to 0$ y r_n está acotada, entonces $(s_n \cdot t_n) \to 0$.
7. Si $|r_n| \to \infty$ entonces $1/r_n \to 0$.

Demostración: Sólo probaremos la división dejando el resto como ejercicios para el lector: Como $y \neq 0$ entonces $|y/2| > 0$, por lo cuál, por definición existe N_1 tal que para todo $n \geq N_1$ se cumple $d(r_n, y) < |y/2|$, por lo cual, es fácil ver que $|y/2| < |r_n| < |3y/2|$. Veamos que

$$\left|\frac{s_n}{r_n} - \frac{x}{y}\right| = \left|\frac{s_n y - r_n x}{r_n y}\right| = \left|\frac{s_n y - xy + xy - r_n x}{r_n y}\right| \leq \frac{|x_n - x|\,|y|}{|r_n|\,|y|} + \frac{|r_n - y|\,|x|}{|r_n|\,|y|}.$$

Al igual que con las anteriores, el truco se basa en acotar los términos por un $\epsilon/2$. El primero es sencillo, para el cual decimos que $|s_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{|y|}{2}$ para $n \geq N_2$. Para el segundo decimos que $|r_n - y| < \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{|y^2|}{2\max\{|x|, 1\}}$, ese término con máximo es para evitar problemas en caso de que $|x|$ fuese nulo. Un razonamiento similar basta en el resto de expresiones. □

Teorema 1.19: En R, dada una sucesión convergente $(s_n)_n$ tal que

$m \leq s_n$ (resp. $s_n \leq M$) para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $m \leq \text{lím}_n s_n$ (resp. $\text{lím}_n s_n \leq M$).

Demostración: Supongamos, por contradicción, que $L := \text{lím}_n s_n < m$, entonces definimos $\epsilon := m - L > 0$ y por definición de convergencia, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $|L - s_n| < \epsilon$, i.e., $s_n < L + \epsilon = m$ lo que es absurdo por construcción. □

Teorema 1.20: Dadas dos sucesiones convergentes $(s_n)_n, (t_n)_n$ tales que $s_n \leq t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\text{lím}_n s_n \leq \text{lím}_n t_n$.

Teorema 1.21 – *Teorema del sandwich*: En R dado $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ y $(c_n)_n$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumpla que $a_n \leq b_n \leq c_n$ tales que a_n y c_n converjan a L, entonces $\text{lím}_n c_n = L$.

Un ejercicio para el lector es comprobar que todos estos resultados también se mantienen si ocurren *eventualmente*, i.e., que hay un n para el cual, desde él en adelante las desigualdades de los enunciados se cumplen.

Proposición 1.22 (Ejemplos de límites): En R:

- $s_n = n \to \infty$ y $\frac{1}{n+1} \to 0$.
- $$\lim_n r^n = \begin{cases} \infty, & r > 1 \\ 1, & r = 1 \\ 0, & |r| < 1 \\ \text{ind}, & r \leq -1 \end{cases}$$
- Si $\lim_n s_n = L$ entonces $\displaystyle\lim_n \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k = L$.

Hint: Para la segunda se recomienda utilizar la desigualdad de Bernoulli deducida en la sección sobre números naturales, enteros y racionales. Es fácil ver que dicha propiedad y el binomio de Newton son generalizables a R.

Definición 1.23 – *Subsucesiones*: Dadas, $(s_n)_n, (t_n)_n$ sucesiones se dice que $(t_n)_n$ es *subsucesión* de $(s_n)_n$ si existe una función estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $t = \sigma \circ s$, i.e., si $t_n = s_{\sigma(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.24: En $\mathbb{M}$ si $(s_n)_n$ converge a L entonces toda subsucesión suya lo hace. Conversamente si toda subsucesión de $(s_n)_n$ converge a L, entonces $(s_n)_n$ también converge a L.

1. $(s_n)_n$ es convergente a L syss todas sus subsucesiones también.
2. $(s_n)_n$ es acotada syss todas sus subsucesiones lo son.
3. $(s_n)_n$ es de Cauchy syss todas sus subsucesiones lo son.

Como ejercicio puede plantearse ciertos criterios (y demostrarlos) bajo los cuales uno puede corroborar la convergencia de una sucesión en base a la de sus subsucesiones.

Teorema 1.25: Toda sucesión en un conjunto linealmente ordenado admite una subsucesión monótona.

Demostración: Sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera y denotemos S a su conjunto imagen. Si S es finito entonces algún elemento se repite infinitas veces con el cual se puede formar una subsucesión constante que resulta trivialmente monótona.

Si S es infinito, pero está bien ordenado, entonces comienzas por considerar el mínimo para construir a s_{n_0}, luego defines s_{n_1} como el mínimo de $(s_n)_{n=n_0+1}^{\infty}$. Y así inductivamente debido al buen orden de S.

Si S no está bien ordenado entonces admite un subconjunto S' que es infinito y no posee mínimo. Luego sea s_{n_0} un término cualquiera de S', como $\{s_0, \dots, s_{n_0}\}$ es finito entonces su complemento es infinito y sin mínimo, así que se elige[4] s_{n_1} como el primer término posterior que es menor que s_{n_0} y que está contenido en S', y así se procede inductivamente para formar una subsucesión decreciente. □

Teorema 1.26 – *Criterio de convergencia de Cauchy*: Se cumple:

1. Toda sucesión convergente en $\mathbb{M}$ es de Cauchy.
2. Toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{M}$ está acotada.
3. Toda sucesión monótona acotada en R es de Cauchy.

[4] Aquí no hacemos uso del AEN, puesto que este método está fundamentado por el buen orden de los índices de s_n, que son naturales.

Proposición 1.27: Se cumple:

1. Las subsucesiones de una sucesión de Cauchy son también de Cauchy.
2. Conversamente si todas las subsucesiones de una son de Cauchy, entonces la original también lo es.
3. Si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge a L, entonces la original también lo hace.

De esta forma las sucesiones de Cauchy evidencian tener varias cosas en común con las sucesiones convergentes, es por ello que se define:

Definición 1.28: Decimos que $\mathbb{M}$ es completo según Cauchy o Cauchy-completo si toda sucesión de Cauchy converge.

Desde inicio se hace esta distinción pues podemos considerar la siguiente sucesión (informal) en $\mathbb{Q}$:

$$3; \quad 3{,}1; \quad 3{,}14; \quad 3{,}141; \quad \dots$$

La cuál tiene toda la *apariencia* de converger, no obstante, podemos ver que se "acerca" a π, que es irracional, por ende no puede ser convergente o contradiciría la unicidad del límite en $\mathbb{R}$; pese a ello, como es creciente y acotada es de Cauchy. Esto evidencia un *punto vacío* en la recta numérica racional, que es lo que $\mathbb{R}$ vendría a completar.

Lema (AEN) 1.29: Si un espacio métrico admite un subconjunto denso Cauchy-completo, entonces dicho espacio es Cauchy-completo.

Teorema (AEN) 1.30: Para todo espacio métrico $(\mathbb{M}, d)$, existe otro $(\mathbb{M}^*, d^*)$ que es Cauchy-completo tal que posee un subconjunto isométrico a $\mathbb{M}$.

Demostración: Denotaremos $C_{\mathbb{M}}$ como el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{M}$ y la relación $\sim$ sobre $C_{\mathbb{M}}$ tal que $(s_n)_n \sim (t_n)_n$ syss $\lim d(s_n, t_n) = 0$. Esta relación resulta ser de equivalencia (¿por qué?), de manera que se define $\mathbb{M}^* := C_{\mathbb{M}}/\sim$. La métrica se define como:

$$d^*([(s_n)_n], [(t_n)_n]) := \lim_n d(s_n, t_n)$$

La cuál está bien definida puesto que si $(s_n)_n \sim (x_n)_n$ y $(t_n)_n \sim (y_n)_n$, entonces, por desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} d(s_n, t_n) &\leq d(s_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, t_n) \\ d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, s_n) + d(s_n, t_n) + d(t_n, y_n). \end{aligned}$$

Por lo que, despejando se obtiene que

$$|d(s_n, t_n) - d(x_n, y_n)| \leq d(s_n, x_n) + d(t_n, y_n) \to 0.$$

Ergo, $\lim_n d(s_n, t_n) = \lim_n d(x_n, y_n)$. Además cumple ser una métrica (¿por qué?).

Se define $\hat{x} := [(x)_{n\in\mathbb{N}}]$ y $\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{M}^*$ es $\varphi(x) := \hat{x}$ que es trivialmente isométrica. Un dato importante es que si $x^* := [(x_n)_n]$ y $x'_n := \hat{x}_n$, entonces $\lim_n x'_n = x^*$. Finalmente, para ver que $\mathbb{M}^*$ es completo basta ver que $\mathbb{M}$ es denso. Las observaciones de éste párrafo quedan al lector. $\square$

Esto ya nos permite definir $\mathbb{R}$, no obstante, hay otras propiedades que no se conservan trivialmente, para ello hay un teorema similar para cuerpos métricos.

Lema 1.31: Si $(s_n)_n$ es de Cauchy en R, entonces se cumple alguna de las siguientes:

1. $s_n \to 0$.
2. Existe algún $k > 0$ y N natural para el cuál para todo $n \geq N$ se cumple que $k < s_n$.
3. Existe algún $k < 0$ y N natural para el cuál para todo $n \geq N$ se cumple que $k > s_n$.

Demostración: Supongamos que s_n no converge a 0, probaremos la que cumple 2) o 3). Por definición existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ existe un $n \geq N$ tal que $|s_n| \geq \epsilon$. Además como por definición de sucesión de Cauchy, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i, j \geq n_0$ se da que $|s_i - s_j| < \epsilon/2$. Luego, existe un $N \geq n_0$ tal que $|s_N| \geq \epsilon$. Finalmente para todo $j \geq n_0$ se cumple que $s_N - \epsilon/2 < s_j < s_N + \epsilon/2$. Si $s_N > 0$ entonces $\epsilon/2 \leq s_N - \epsilon/2 < s_j$. Si $s_N < 0$ entonces $s_j < s_N + \epsilon/2 \leq -\epsilon/2$. En cualquier caso se cumple lo esperado y basta reemplazar k por $\pm\epsilon/2$ (que es no nulo). $\square$

Proposición 1.32: Si $(s_n)_n$, $(t_n)_n$ son de Cauchy en R, entonces $(s_n+t_n)_n$, $(s_n \cdot t_n)_n$ son de Cauchy. Además, si t_n no converge a 0 y es no nulo para todos los términos entonces $(s_n/t_n)_n$ es de Cauchy.

Teorema (AEN) 1.33: Dado un **cuerpo** arquimediano R existe una extensión R' que resulta ser Cauchy-completa y para la cual existe un monomorfismo de R a R' y que conserva las propiedades algebraicas, las propiedades de orden y la propiedad arquimediana.

A las extensiones propuestas en los teoremas 1.30 y 1.33 les decimos *extensiones de Cauchy*. Luego definimos los números reales $\mathbb{R}$ como la extensión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ bajo el teorema anterior.

Teorema 1.34: El límite de una sucesión creciente (resp. decreciente) convergente en R es el supremo de su conjunto imagen.

Definición 1.35 – *Sucesión de intervalos encajados*: Decimos que una sucesión $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de *intervalos encajados* si $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ y $\lim_n (a_n - b_n) = 0$.

Teorema 1.36: En R son equivalentes:

1. R es Cauchy-completo.
2. Dada una sucesión de intervalos encajados $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se cumple que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$ (teorema de los intervalos encajados).
3. Todo subconjunto no vacío acotado superiormente de R posee supremo (axioma del supremo).

Demostración: 1) $\Longrightarrow$ 2). Observemos que para que $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea una sucesión de intervalos encajados debe darse que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sean crecientes y decrecientes resp. Es claro también que serían acotadas (pues $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$), por lo que serían de Cauchy y por ende serían convergentes. Como $\lim_n b_n - a_n = 0$, entonces se concluye que $L := \lim_n a_n = \lim_n b_n$ y queda al lector comprobar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{L\}$.

2) $\Longrightarrow$ 3). Sea A no vacío y acotado superiormente, de manera que $a \in A$ y b es cota superior de A. Si a fuese cota superior, entonces sería el máximo y, en particular, el supremo de A, así que demostraremos el caso

contrario. Como b es cota superior y a no, entonces necesariamente $a < b$, por lo que construimos una sucesión $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pares ordenados en R^2 de forma que $a_0 := a$ y $b_0 := b$, también se define $c_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}$, de tal modo que si $c_n \in A$ entonces $a_{n+1} := c_n$ y $b_{n+1} := b_n$, y de caso contrario, entonces $a_{n+1} := a_n$ y $b_{n+1} := c_n$. De esta forma se puede ver que

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0.$$

Por lo que, se cumple que $\big([a_n, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de intervalos encajados, de modo que se cumple que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = \{x\}$. Luego se cumple que este x es una cota superior de a_n y cota inferior de b_n. Queda al lector probar que x es efectivamente el supremo e ínfimo de $a[\mathbb{N}]$ y $b[\mathbb{N}]$ resp., y que corresponde con el supremo de A.

3) $\implies$ 1). Sea $(s_n)_n$ de Cauchy. Sabemos que $(s_n)_n$ está acotada y que admite una subsucesión monótona. Si dicha subsucesión es creciente, entonces por axioma del supremo su imágen admite supremo la que sabemos que resulta ser su límite, y también sabemos que si una subsucesión de Cauchy converge, entonces todas lo hacen y al mismo límite, ergo $(s_n)_n$ es convergente. Si posee una subsucesión decreciente $(s_{\sigma(n)})_n$ entonces $(-s_{\sigma(n)})_n$ es creciente y por el razonamiento anterior se da que $(-s_n)_n$ es convergente, luego por álgebra de límites, $(s_n)_n$ lo es. □

De esta forma podemos ver la unicidad de $\mathbb{R}$ de manera que el lector puede interpretar que $\mathbb{R}$ representa un cuerpo arquimediano completo. Asimismo, el teorema anterior nos permite la formalización de $\mathbb{R}$ independiente del AEN como sugería nuestros teoremas sobre extensión de Cauchy, pues le construimos mediante el método de Dedekind y llegamos al mismo conjunto.

Proposición 1.37 (Teorema de Bolzano-Weierstrass): En $\mathbb{R}$ toda sucesión acotada posee una subsucesión convergente.

Definición 1.38 – *Conjunto denso*: Se dice que un subconjunto D de $\mathbb{M}$ es *denso* según la métrica o M-denso si para todo punto $x \in \mathbb{M}$ y todo $\epsilon > 0$ existe $d \in D$ tal que $d \in B_\epsilon(x)$.

Se dice que D es denso según límites de sucesiones, o L-denso, si para todo punto $x \in \mathbb{M}$ existe una sucesión en D de límite x.

Teorema (AEN) 1.39: Todo conjunto en $\mathbb{M}$ es L-denso syss es M-denso.

Definición 1.40 – *Raíz n-ésima*: Sea $x > 0$ se define su raíz n-ésima con $n \in \mathbb{N}_{\leq 0}$ como

$$\sqrt[n]{x} := \sup\{y : y \geq 0 \wedge y^n \leq x\}.$$

Vemos que todo real positivo posee n-ésima raíz pues $\mathbb{R}$ es completo, dicho conjunto contiene al 0 y está acotado por $\max\{x, 1\}$ (¿por qué?).

Se define $\sqrt[n]{0} = 0$. Y si $x < 0$ y n es impar, entonces se define $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$. Tradicionalmente se opta por escribir $\sqrt{x} := \sqrt[2]{x}$.

Proposición 1.41: Siendo $x, y > 0$ reales positivos y $n, m \geq 1$ naturales, se cumple:

1. $y = \sqrt[n]{x}$ syss $y^n = x$.
2. $x < y$ syss $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$.
3. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$.
4. $\sqrt[n]{(\sqrt[m]{x})} = \sqrt[nm]{x}$.

Proposición 1.42 (Series geométricas): Sea $r \in \mathbb{R}$, entonces

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

En particular, si $|r| < 1$ se cumple que

$$\lim_n \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1}{1 - r}.$$

Demostración: Vamos a llamar $S := \sum_{i=0}^{n} r^i$, entonces

$$rS = r + \cdots + r^{n+1} \implies (1 - r)S = 1 - r^{n+1}.$$

Si $|r| < 1$ entonces $\lim_n r^{n+1} = 0$ y el resto es álgebra de límites. □

Proposición 1.43: Todo intervalo no-trivial de $\mathbb{R}$ es equipotente a $\mathbb{R}$.

Teorema 1.44:

$$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}.$$

Demostración: Este teorema utilizara el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein. $|\mathbb{R}| \leq 2^{\aleph_0}$. Esto es trivial, dado que definimos $\mathbb{R}$ como el conjunto cociente de sucesiones de Cauchy bajo una equivalencia, ergo, el cardinal de $\mathbb{R}$ está acotado por el de las sucesiones de Cauchy, el cual está acotado por el total de sucesiones que es $|\mathbb{Q}|^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0}$.

$2^{\aleph_0} \leq |\mathbb{R}|$. Este es verdaderamente el punto interesante, y para esto basta construir una aplicación biyectiva desde algún conjunto de cardinal $2^{\aleph_0}$ a $\mathbb{R}$. Dicho conjunto es el conjunto de sucesiones binarias y para realizar la aplicación inyectiva se utilizará el llamado *conjunto de Cantor* que resulta ser, además, un ejemplo de "fractal": comenzamos por considerar el intervalo $[0, 1)$ al cual en la primera iteración le quitamos el intervalo central $[1/3, 2/3)$; luego procedemos a quitarle los intervalos centrales a los que nos quedan que son los trozos $[1/9, 2/9)$ y $[7/9, 8/9)$. Los puntos de nuestra sucesión son los extremos izquierdos de nuestro conjunto tras las iteraciones.

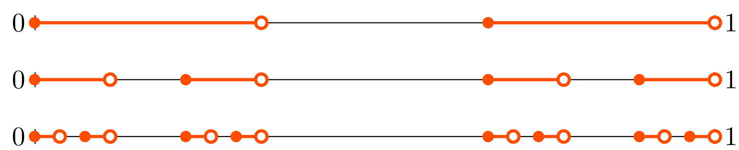

Figura 1.2. Conjunto y función de Cantor.

Para esto consideramos $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}(\{0,1\};\mathbb{N})$ y llamamos f a la aplicación tal que

$$f(s_i)_{i\in\mathbb{N}} = \lim_n \sum_{i=0}^{n} s_i \cdot \frac{2}{3^{i+1}}.$$

Queda al lector probar que la función está bien definida para toda sucesión binaria, y para notar que dicha función es inyectiva se recomienda usar buen orden para buscar el primer índice para el cual dos sucesiones distintas difieren y usar desigualdades para probar que sus imágenes son efectivamente distintas. El dibujo en este caso sirve como un hint bastante sugestivo. □

En virtud del resultado anterior se denota $\mathfrak{c} := 2^{\aleph_0}$ denominado cardinal del continuo.

Definición 1.45 – *Número algebraico*: Se dice que $x_0 \in \mathbb{R}$ es *algebraico* si existe algún polinomio de coeficientes racionales $p \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $p(x_0) = 0$. De lo contrario x_0 se dice *trascendental*.

Proposición 1.46: El conjunto de números algebraicos es numerable. Por ende, los trascendentales tienen cardinal $\mathfrak{c}$.

1.3 SERIES INFINITAS

En esta sección, de no especificarse, se asume que el resultado se aplica para $\mathbb{K}$.

Definición 1.47 – *Serie*: Dada una sucesión $(a_n)_n$ sobre $\mathbb{K}$, se le dice *serie derivada* a la sucesión $(S_n)_n$ tal que

$$S_n := \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Si la serie derivada de una sucesión converge a L, entonces nos daremos el lujo de escribir

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = L.$$

Decimos que S_n converge absolutamente syss la serie derivada de $\|a_n\|$ converge.

Ojo que la última notación no tiene sentido si la serie diverge.

Proposición 1.48: La serie de $(a_n)_n$ converge syss para todo $\epsilon > 0$ existe un N natural tal que para todo $n_0 \leq p < q$ se cumple que

$$\left\| \sum_{i=p}^{q} a_i \right\| < \epsilon.$$

Corolario 1.49: Toda serie absolutamente convergente es convergente.

El recíproco de este enunciado es falso, lo que veremos luego, de momento considere que llamaremos *condicionalmente convergente* a una serie convergente pero no absolutamente convergente.

Teorema 1.50: Si la serie de $(a_n)_n$ converge, entonces $\lim_n a_n = 0$.

Demostración: Sea L el límite de la serie. Entonces por definición, existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$

$$\left\| L - \sum_{i=0}^{n} a_i \right\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego, existe $n_0 + 1$ tal que para todo $n + 1 \geq n_0 + 1$ se cumple que

$$\|a_{n+1}\| = \left\| \sum_{i=0}^{n+1} a_i - \sum_{i=0}^{n} a_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=0}^{n+1} a_i - L \right\| + \left\| L - \sum_{i=0}^{n} a_i \right\| < \epsilon.$$

□

Corolario 1.51 (Criterio de comparación): Sean a_n, b_n sucesiones reales de términos no-negativas. Si la serie de b_n converge y se cumple que existen $c > 0$ y n_0 tales que para todo $n \geq n_0$ se cumpla que $a_n \leq cb_n$, entonces la serie de a_n también converge.

Teorema 1.52 – *Criterio de condensación de Cauchy*: La serie de una sucesión a_n decreciente y de términos no-negativos es convergente syss la serie de $2^n a_{2^n}$.

Corolario 1.53: La serie harmónica

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

diverge.

Luego, podemos ver que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ es condicionalmente convergente. Ahora, se sabe que la serie harmónica diverge, pero por el mismo procedimiento se puede ver que otras similares convergen:

Corolario 1.54 (Series p-harmónicas): Se le dice serie p-harmónica a la de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}.$$

Nótese que las series p-harmónicas convergen para $p > 1$.

De hecho, se define la función dseta de Riemann (por ahora) $\zeta : (1,\infty) \to \mathbb{R}$ como $\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$. Más adelante veremos ejemplos icónicos de valores de ζ.

Teorema 1.55 – *Criterio de Leibniz*: Sea $a_n \to 0$ una sucesión real decreciente, entonces $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ converge.

Demostración: Como es costumbre llamemos $S_n := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Intuitivamente la sucesión S_n parece oscilar, y esto lo formalizaremos de la siguiente manera. Como a_n decrece, entonces $a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$, por ende $S_{2(n+1)} = S_{2n} + (-a_{2n+1} + a_{2n+2}) \leq S_{2n}$, i.e., la subsucesión S_{2n} decrece. Por el mismo argumento, se cumple que $a_{2n+2} \geq a_{2n+3}$, por ende, $S_{2(n+1)+1} = S_{2n+1} + (a_{2n+2} - a_{2n+3}) \geq S_{2n+1}$, i.e., la subsucesión S_{2n+1} crece.

Finalmente, veamos que a_n decrece y converge a 0, ergo, 0 es el ínfimo de su conjunto imágen, por lo que los términos de a_n son no-negativos, por lo que $S_{2n+1} \leq S_{2n}$. Con ello están todas las herramientas listas para encontrar el límite de los S_n por intervalos encajados $\{[S_{2n+1}, S_{2n}]\}_{n=0}^{\infty}$. □

Teorema 1.56 – *Criterio de d'Alembert*: Dada una sucesión a_n de términos no nulos en un espacio completo tal que $L := \lim_n \|a_{n+1}\|/\|a_n\|$. Si:

a) $L < 1$, entonces su serie converge absolutamente.

b) $L > 1$, entonces su serie no converge absolutamente.

Demostración: *a)* Si $L < 1$, entonces existe $\epsilon := \frac{|1-L|}{2}$ tal que $L + \epsilon < 1$. Luego, por definición existe un n_0 tal que para todo $n > n_0$ se cumple que $\|a_{n+1}\|/\|a_n\| < L + \epsilon$. Por ende

$$\begin{aligned}
\|a_{n_0+1}\| &< \|a_{n_0}\|(L+\epsilon) \\
\|a_{n_0+2}\| &< \|a_{n_0+1}\|(L+\epsilon) < \|a_{n_0}\|(L+\epsilon)^2 \\
\|a_{n_0+k}\| &< \|a_{n_0}\|(L+\epsilon)^k.
\end{aligned}$$

Luego, se cumple que

$$\begin{aligned}
S_{n_0+k} &= \sum_{i=0}^{n_0+k} \|a_i\| = S_{n_0} + \sum_{i=1}^{k} \|a_{n_0+i}\| \\
&< S_{n_0} + \|a_{n_0}\| \sum_{i=1}^{k} (L+\epsilon)^i < S_{n_0} + \|a_{n_0}\| \sum_{i=0}^{\infty} (L+\epsilon)^i
\end{aligned}$$

$$= S_{n_0} + \frac{\|a_{n_0}\|}{1-(L+\epsilon)} = S_{n_0} + \frac{2\|a_{n_0}\|}{1+L}.$$

Y como los términos son no-negativos, entonces la serie es una sucesión creciente y acotada, i.e., convergente.

b) Si $L > 1$. Entonces tomando el mismo ϵ y siguiendo el mismo procedimiento, existe un n_0 desde el cual se cumple que

$$\|a_{n_0+k}\| > \|a_{n_0}\|(L-\epsilon)^k$$

Luego nos queda que

$$S_{n_0+k} > S_{n_0} + \|a_{n_0}\| \sum_{i=1}^{k} (L-\epsilon)^k$$

Donde la sucesión de la derecha diverge.

□

Corolario 1.57: La serie

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

es absolutamente convergente para todo x. Y se define el *número de Euler*, o la *constante exponencial* como $e := \exp(1) \approx 2{,}718281828459$.

También como consecuencia de esto se cumple que

$$\lim_n \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Esta última serie es muy importante, y la retomaremos en capítulos posteriores.

Teorema 1.58: Si la serie de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es absolutamente convergente y $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una biyección, entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}.$$

Demostración: Sea $\epsilon > 0$. Existe n_0 tal que

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n_0} a_k \right\| \le \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \|a_k\| = \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| - \sum_{k=0}^{n_0} \|a_k\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego sea $m_0 := \max \sigma^{-1}[0, \dots, n_0]$, entonces para todo $n \geq m_0$ se cumple que

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right\| \leq \left\| \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n_0} a_k \right\| + \left\| \sum_{k=0}^{n_0} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right\|$$
$$< \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \|a_k\| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

□

Teorema 1.59 – *Teorema de reordenamiento de Riemann*: Si la serie de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es condicionalmente convergente, entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ existe una biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = x.$$

Demostración: Si a_n es condicionalmente convergente, entonces ha de poseer infinitos términos positivos e infinitos términos negativos (¿por qué?). Además, se debe dar que la serie de los términos positivos de a_n converja a $+\infty$ y la de los negativos a $-\infty$ (¿por qué?).

Luego, sin perdida de generalidad, supongamos que $c > 0$. Como la suma de términos positivos no está acotada, entonces consideramos los términos positivos hasta que sobrepasan c y luego sumamos negativos de forma que lo sobrepasa por debajo y así sucesivamente. Como los términos van convergiendo a 0, eventualmente nuestra sucesión formada se "estabiliza" y converge a c. □

Como problema propuesto se le pide al lector formalizar la demostración anterior, llenar los detalles y describir por qué podemos construir dicha biyección sin utilizar AEN.

Uno de los primeros indicios del teorema del reordenamiento de Riemann surge de la sucesión

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

La cual converge por criterio de Leibniz, y analizando la subsucesión de la serie de a pares se nota que posee límite estrictamente positivo. No obstante, si se reordena a

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \cdots$$

al analizar la subsucesión de a múltiplos de 3, se observa que posee términos estrictamente negativos, ergo, su límite (¿por qué converge?) lo es.

Definición 1.60 – *Producto de Cauchy*: Sean $(a_n)_n, (b_n)_n$ series en K, llamamos *producto de Cauchy* a la serie derivada de $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$.

Teorema 1.61: Si las series de a_n y b_n convergen, y alguna lo hace absolutamente, entonces el producto de Cauchy entre las dos también y

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Demostración: Sin perdida de generalidad supongamos que a_n converge absolutamente y definamos:

$$A := \sum_{k=0}^{\infty} a_k,\ B := \sum_{k=0}^{\infty} b_k,\ c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k},$$
$$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k,\ B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k,\ C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k,\ \beta_n := B_n - B.$$

Luego, notemos que

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + \cdots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + \cdots + a_n B_0 = a_0(B + \beta_n) + \cdots + a_n(B + \beta_0) \\ &= A_n B + (a_0 \beta_n + \cdots a_n \beta_0). \end{aligned}$$

Basta probar que $\sum_{k=0}^{n} a_k \beta_{n-k} \to 0$.

Sea $\epsilon > 0$. Como $\beta_n \to 0$, entonces $M_b := \sup\{\|\beta_n\| : n \in \mathbb{N}\}$. Asímismo, como la serie de a_n converge absolutamente, entonces $M_a := \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|$. Por definición, existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$\sum_{k=n_0}^{n} \|a_k\| < \frac{\epsilon}{2M_b}.$$

Y existe un n_1 tal que para todo $n \geq n_1$ se cumple que

$$\|\beta_n\| < \frac{\epsilon}{2M_a}.$$

Luego consideramos $n \geq 2\,\text{máx}\{n_0, n_1\}$ para ver que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=0}^{n} a_k\beta_{n-k}\right\| &\leq \sum_{k=0}^{n_0} \|a_k\beta_{n-k}\| + \sum_{k=n_0+1}^{n} \|a_k\beta_{n-k}\| \\ &< \frac{\epsilon}{2M_a}\sum_{k=0}^{n_0} \|a_k\| + M_b \sum_{k=n_0+1}^{n} \|a_k\| < \epsilon.\end{aligned}$$

$\square$

2. TOPOLOGÍA Y CONTINUIDAD

2.1 ESPACIOS TOPOLÓGICOS

La topología es una subrama de las matemáticas relativamente nueva que surge de una abstracción de la geometría para el análisis matemático; en general suele ser bastante confusa y poco concisa para los estudiantes, pero confio que en contexto de este libro no resultará repulsiva la primera impresión, y espero que el lector pueda ver la potencia y generalidad de ella tanto como herramienta, como un bien en sí mismo. Igual que el álgebra define una serie de conceptos y estructuras basados en operaciones binarias, la topología hace lo mismo con subconjuntos de un espacio fijado, permitiendo responder a preguntas sobre la clasificación general de figuras, y debido a las libertades generales que nos damos la topología permite dar una mirada general a un análisis que puede ser real, pero con otras definiciones facilmente puede ser complejo o funcional, he ahí su fama.

Definición 2.1 – *Topología*: Dado un conjunto X usualmente llamado el "espacio", definimos una topología $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ como un conjunto que satisface:

1. $\varnothing, X \in \tau$.
2. $S \subseteq \tau \implies \bigcup S \in \tau$.
3. $U, V \in \tau \implies U \cap V \in \tau$.

A un par (X, τ) le diremos un "espacio topológico" o así llamaremos a X cuando no haya ambigüedad en los signos. A los elementos de la topología de un espacio les diremos "abiertos".

U es un entorno de un subconjunto C de un espacio topológico X si existe un abierto A tal que $C \subseteq A \subseteq U$. El entorno de un punto $x \in X$

es un entorno de $\{x\}$. Notemos que un entorno de un punto no es más que un abierto que le contiene. Decimos que un punto x de un espacio topológico está *aislado* si $\{x\}$ es un abierto.

Usualmente las propiedades 2) y 3) se dicen como que una topología es cerrada bajo uniones posiblemente-infinitas e intersecciones finitas. Notemos que dado un espacio X cualquiera, $\{\varnothing, X\}$ y $\mathcal{P}(X)$ resultan ser topologías sobre X. A la primera le diremos *indiscreta* (o *trivial* en ciertos textos) y a la segunda *discreta*. Notemos que un espacio topológico es discreto syss todos sus puntos están aislados. El uso de la palabra *espacio* es meramente para permitirnos llamar a los elementos del conjunto *puntos*.

En este capítulo (X, τ) siempre representará un espacio topológico.

Proposición 2.2: Un conjunto es abierto syss es un entorno de todos sus puntos.

Demostración: Una implicancia es trivial, mientras que si es entorno de todos sus puntos se tiene que $A = \bigcup\{U \in \tau : U \subseteq A\}$ (¿por qué?) y la unión de abiertos es abierta. □

Definición 2.3 – *Base, subbase*: Decimos que una familia de abiertos $\mathcal{B}$ es una *base* de la topología si todo abierto puede expresarse como una unión de una subfamilia de $\mathcal{B}$. Fijada una base $\mathcal{B}$ de un espacio topológico diremos que los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos básicos.

Se dice que $\mathcal{B}_x$ es una *base de entornos de x* si para todo entorno U de x existe otro entorno B de x en $\mathcal{B}_x$ tal que $B \subseteq U$. Una familia de abiertos $\mathcal{S}$ es una *subbase* si las intersecciones finitas de sus elementos forman una base.

Al igual que en el álgebra lineal, las bases topológicas tienen como objetivo generar todos los objetos de una topología, veamos un criterio simple:

Proposición 2.4: Toda base $\mathcal{B}$ cumple las siguientes propiedades:

(1) $\bigcup \mathcal{B} = X$.

(2) Si $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ tales que $x \in U_1 \cap U_2$ entonces existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Teorema 2.5: Una familia de conjuntos $\mathcal{B}$ que cumple con las siguientes propiedades:

(1) $\bigcup \mathcal{B} = X$.

(2) Si $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ tales que $x \in U_1 \cap U_2$ entonces existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Define una única topología en X para la cual es base, la cual se dice *topología inducida por la base*. Esta topología además es la mínima (respecto a la inclusión) para la cuál los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos.

Demostración: Definimos $\tau := \{\bigcup \mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}\}$. Notemos que $\bigcup \varnothing = \varnothing$ y $\bigcup \mathcal{B} = X$, por lo que cumple (1).

Sea $\mathscr{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{B}))$ (de forma que sus elementos sean subconjuntos de $\mathcal{B}$, que sabemos, su unión define elemenetos de τ). Luego como para todo $S \in \mathscr{F}$ se cumple que $S \subseteq \mathcal{B}$ entonces $\bigcup \mathscr{F} \subseteq \mathcal{B}$, luego se concluye que $\bigcup\bigcup \mathscr{F} \in \tau$, demostrando (2).

Para demostrar (3) sean $A, B \in \tau$. Luego sea $\mathcal{F} := \{U \in \mathcal{B} : U \subseteq A \cap B\}$, probaremos que $A \cap B = \bigcup \mathcal{F}$. Está claro que $\bigcup \mathcal{F} \subseteq A \cap B$. Por definición existen $\mathscr{A}, \mathscr{B} \subseteq \mathcal{B}$ tales que $A = \bigcup \mathscr{A}$ y $B = \bigcup \mathscr{B}$, luego si $x \in A \cap B$ entonces $x \in \bigcup \mathscr{A}$ y $x \in \bigcup \mathscr{B}$, luego $x \in U_1 \in \mathscr{A}$ y $x \in U_2 \in \mathscr{B}$ con $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$, por lo que usando la propiedad (2) de $\mathcal{B}$ existe $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2 \subseteq A \cap B$, luego $U \in \mathcal{F}$, por lo que $x \in \bigcup \mathcal{F}$, i.e., $A \cap B \subseteq \mathcal{F}$.

La unicidad y minimalidad yacen de que si τ' es tal que los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos, entonces $\tau \subset \tau'$, por lo que $\mathcal{B}$ no es base de τ'. □

Ejemplo (espacio pseudo-métrico). En $\mathbb{M}$ podemos definir la topología inducida por la (pseudo-)métrica como aquella inducida por una base formada por todas las bolas abiertas de dicho espacio. En este sentido, por definición, las bolas abiertas son abiertas, y además:

Proposición 2.6: Las bolas cerradas de $\mathbb{M}$ son cerradas.

Demostración: Para ello basta probar que $B'_r(x)$ para todo $x \in \mathbb{M}$ y $r > 0$ sea tal que su complemento sea abierto. Para ello probaremos que

$$[B'_r(x)]^c = \underbrace{\bigcup_{p>r} \bigcup_{y \notin B_p(x)} B_{p-r}(y)}_{S}.$$

Sea $z \in \mathbb{M}$ tal que $d(x, z) > r$ (i.e., tal que $z \notin B'_r(x)$), entonces si $q := d(x, z)$, luego $z \notin B_q(x)$ y $z \in B_{q-r}(z)$, lo que prueba una contención.

Sea $z \in S$, por definición, existe un $p > r$ tal que existe un y de distancia $\geq p$ de x tal que $d(y, z) < p - r$. Por desigualdad triangular se cumple que

$$p \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \iff d(x, z) \geq p - d(y, z) > r.$$

Lo que demuestra la otra contención. Como la unión de abiertos es abierta se cumple que S es abierto, y por definición $B'_r(x)$ es cerrado. □

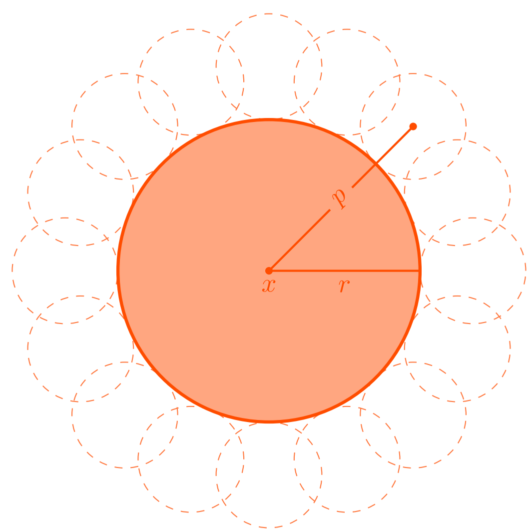

Figura 2.1. Demostración de la proposición 2.6.

De esto se concluye que la frontera de una bola (abierta o cerrada) centrada en x de radio r es el conjunto $\{y : d(x, y) = r\}$.

Notemos que si definimos la métrica discreta como:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

en cualquier espacio induce la topología discreta (pues $B_{1/2}(x) = \{x\}$).

Ejemplo (conjunto linealmente ordenado). Dado un conjunto linealmente ordenado X, definimos la *topología inducida por el orden* como aquella que tiene por base los conjuntos de la forma $(-\infty, x)$ y $(x, +\infty)$ con $x \in X$. Luego es fácil ver que todo intervalo abierto es efectivamente abierto en dicha topología.

Notemos que tanto la topología inducida por la métrica, como la topología inducida por el orden en $\mathbb{Q}$, y en $\mathbb{R}$ por separado, son las mismas. No obstante, la topología del orden nos permite definir cosas más interesantes como la topología de orden sobre el conjunto de ordinales, o sobre el conjunto de cardinales de von Neumann. Para los que han leído acerca de ambos, es fácil comprobar que los ordinales y los cardinales límite son efectivamente puntos límite o de acumulación en dichos espacios, además de que los conjuntos "cerrados" también lo son.

Teorema 2.7: Cualquier familia de subconjuntos $\mathcal{S}$ de un espacio define una única topología para la cual es subbase. Esta topología es además la mínima (respecto de la inclusión) para la cuál los elementos de $\mathcal{S}$ son abiertos.

Definición 2.8 – *Característica, peso*: Se le dice *peso* de un espacio al mínimo cardinal que posee alguna de sus bases y se denota por $w(X)$.

Se le llama *característica* de x, y lo denotamos por $\chi(x)$, al mínimo cardinal de una base de entornos de x. Se le llama la *característica* de un espacio al supremo del conjunto de las características de sus elementos, i.e., $\chi(X) := \sup \chi[X]$.

Se dice que un espacio cumple el *primer axioma de numerabilidad* (1AN) si $\chi(X) \leq \aleph_0$. Se dice que cumple el *segundo axioma de numerabilidad* (2AN) si $w(X) \leq \aleph_0$.

Proposición 2.9: Todo espacio pseudo-métrico es 1AN.

Proposición 2.10: Para todo espacio se cumple que:

$$\chi(x) \leq \chi(X) \leq w(X) \leq 2^{|X|}.$$

Corolario 2.11: Se cumple:

1. Todo espacio 2AN es 1AN.
2. Todo espacio numerable 1AN es 2AN.
3. Todo espacio finito es 2AN.

También dado un conjunto $\{X_i\}_{i\in I}$ de espacios topológicos, llamamos *topología producto* como aquella sobre $\prod_{i\in I} X_i$ cuya base es el conjunto de los productos de abiertos en cada X_i. Esto lo usaremos en teoremas posteriores.

Definición 2.12 – *Clausura, interior*: Decimos que un conjunto C es cerrado si $X \setminus C$ (o C^c si no hay ambigüedad sobre los signos) es abierto. Dado un subconjunto $A \subseteq X$ definimos su *clausura* como

$$\overline{A} := \bigcap \{C : A \subseteq C \wedge C \text{ es cerrado}\}.$$

Asimismo definimos el *interior* de A como $\operatorname{Int}(A) := (\overline{A^c})^c$. Los puntos de $\overline{A}$ se dicen *adherentes* a A, mientras que los de $\operatorname{Int} A$ se dicen *interiores* de A.

Dado un conjunto A, definimos su *frontera* (o borde) como

$$\operatorname{Fr} A := \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A = \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

Nota: Cerrado no implica no-abierto, es fácil comprobar que $\varnothing, X$ son siempre cerrados y abiertos, así como que todo conjunto distinto del vacío y del espacio no es ni cerrado ni abierto en la topología indiscreta.

La clausura representa el mínimo cerrado que contiene a dicho conjunto. Conversamente se puede ver que el interior de un conjunto es el máximo abierto que dicho conjunto contiene. Dado que sabemos que $\mathbb{R}$ es métrico, reflexione sobre cuál es la clausura, el interior y la frontera de conjuntos canónicos como los intervalos y $\mathbb{Q}$.

Por definición podemos ver que un conjunto cerrado contiene a toda su frontera, uno abierto no contiene nada de su frontera; y un conjunto ni abierto ni cerrado contiene sólo parte de su frontera. Si el conjunto es una forma de dos dimensiones (e.g. un polinomio, una elipse, etc.) dibujaremos la frontera faltante con un borde punteado como lo muestra la figura.

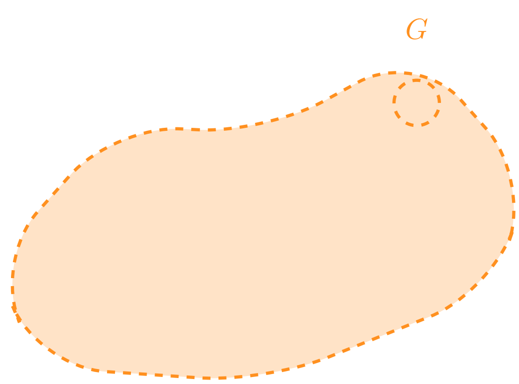

Figura 2.2. Diagrama de conjunto abierto.

Teorema 2.13: Un punto es adherente a A syss todos sus entornos intersecan a A.

Demostración: Lo haremos por contrarrecíproca en ambas: $\Longrightarrow$. Si existe U entorno de x que no interseca a A, entonces $U \subseteq A^c$ y $A \subseteq U^c$, ergo, $\overline{A} \subseteq U^c$ y como $x \notin U^c$ se cumple que $x \notin \overline{A}$.

$\Longleftarrow$. Si $x \notin \overline{A}$, entonces $x \in \overline{A}^c$ que es abierto pues $\overline{A}$ es cerrado, luego es un entorno de x que no interseca a A. □

Teorema 2.14: Sea A un conjunto, entonces:

1. $\operatorname{Int} A \subseteq A \subseteq \overline{A}$.
2. $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$ y $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
3. $A \subseteq B \subseteq X$ implica que $\operatorname{Int} A \subseteq \operatorname{Int} B$ y $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
4. A es abierto syss $A = \operatorname{Int} A$ y A es cerrado syss $A = \overline{A}$.
5. $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$ y $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
6. $\overline{A} = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Fr} A = A \cup \operatorname{Fr} A$.
7. $\operatorname{Fr} A = \operatorname{Fr} A^c$ y $\operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} A^c \cup \operatorname{Fr} A = X$.
8. $\operatorname{Fr}(A \cup B) \subseteq \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B$ y $\operatorname{Fr}(A \cap B) \subseteq \operatorname{Fr} A \cap \operatorname{Fr} B$.

Demostración: La 5) se deduce de que $A \subseteq A \cup B \subseteq \overline{A \cup B}$ y $B \subseteq \overline{A \cup B}$, por ende las clausuras también están acotadas por $\overline{A \cup B}$, luego,

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}.$$

Finalmente nos basta ver la contención complementaria, para lo cual basa aplicar la segunda propiedad para notar que $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ siendo el segundo un cerrado, por lo que $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ por definición. □

Proposición 2.15 (Clausura de Kuratowski): Sea X un conjunto dotado de una operación $c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tal que satisface los siguientes axiomas:

1. $c(\varnothing) = \varnothing$.
2. $A \subseteq c(A)$.

3. $c(c(A)) = c(A)$.
4. $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$.

Entonces existe una única topología tal que c es la clausura en dicho espacio, y dicha topología está formada por los complementos de los puntos fijos de c.

Demostración: Es fácil ver que $X, \varnothing \in \tau$ mediante los axiomas (1) y (2) de c. Las intersecciones finitas también son directas del axioma (4).

El gran problema es la unión de abiertos, que equivale a ver que la intersección de cerrados es cerrada: Sea $C := \bigcap_{i \in I} C_i$ con C_i punto fijo de c. En primer lugar combinando los axiomas (2) y (4) se concluye que $A \subseteq B$ implica $c(A) \subseteq c(B)$ y C es el ínfimo de los C_i, luego

$$c(C) \subseteq c(C_i) = C_i, \quad \forall i \in I.$$

Luego $c(C)$ es una cota inferior de $\{C_i\}_{i \in I}$, ergo, $c(C) \subseteq C$, con lo que $C = c(C)$.

Ya probamos que c induce una topología, ahora veamos que es efectivamente la clausura de dicha topología, para ello sólo basta probar que $c(A)$ es el mínimo cerrado que incluye a A. Sea B otro cerrado que incluye a A, entonces $A \subseteq B$ implica $c(A) \subseteq c(B) = B$.

Si hubiése otra topología para la cual c fuese el operador clausura, entonces compartirían cerrados, ergo, los abiertos en una topología serían los de la otra, probando así que son las mismas, i.e., que la topología inducida es única. □

Definición 2.16 – *Puntos de acumulación*: Dado un subconjunto A del espacio diremos que $x \in A$ es un *punto de acumulación* o *punto límite* si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Al conjunto de puntos de acumulación de A le llamaremos *conjunto derivado* de A y denotaremos por A^{d} (o A'). Los puntos de A que no son de acumulación (y que pertenecen a $A \setminus A^{\mathrm{d}}$) se dicen *aislados*.

Notemos que los puntos aislados de un espacio lo son en todo subconjunto de él, pues si $\{x\}$ es abierto, entonces $\{x\} = \operatorname{Int}\{x\} = (\overline{\{x\}^c})^c = X \setminus \overline{X \setminus \{x\}}$. Además, en un espacio discreto ningún conjunto posee puntos de acumulación; mientras que en uno indiscreto, todos los puntos de un conjunto no-singular son de acumulación, si el conjunto es singular, todos los puntos menos el del conjunto son de acumulación.

Teorema 2.17: Se cumple:

1. x es de acumulación de A syss todo entorno de x interseca a $A_{\neq x}$.
2. $\overline{A} = A \cup A^{\mathrm{d}}$.
3. $A \subseteq B$ implica $A^{\mathrm{d}} \subseteq B^{\mathrm{d}}$.
4. $(A \cup B)^{\mathrm{d}} = A^{\mathrm{d}} \cup B^{\mathrm{d}}$.
5. $\bigcup_{i\in I} A_i^{\mathrm{d}} \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{\mathrm{d}}$.

Un corolario de la propiedad 2) del teorema anterior es que un conjunto es cerrado syss contiene a todos sus puntos de acumulación.

Definición 2.18 – *Denso*: Decimos que un subconjunto D es *topológicamente denso* o T-denso si su clausura es el espacio. Se le dice la *densidad* de un espacio, al mínimo cardinal de sus subconjuntos densos, y se denota por $d(X)$.

Si $d(X) \leq \aleph_0$ entonces se dice que el espacio es *separable*.

El espacio indiscreto siempre tiene densidad 1, mientras que el discreto tiene densidad $|X|$. $\mathbb{R}$ como espacio métrico es separable, pues $\mathbb{Q}$ es denso. Trivialmente ningún conjunto cerrado distinto del espacio es denso.

Teorema 2.19: Se cumple que:

1. D es denso syss todo abierto contiene puntos de D.
2. Si D es denso entonces para todo abierto U se cumple que $\overline{U} = \overline{U \cap D}$.
3. Un conjunto que contiene a otro denso es también denso.
4. Si D_1 y D_2 son conjuntos densos, entonces dado cualquier conjunto $S \subseteq X$ se cumple que $(D_1 \setminus S) \cup (D_2 \cap S)$ es denso.

Demostración: La primera deriva de otro teorema, por lo que demostraremos la 2 por doble contención: Es inmediato que $\overline{U \cap D} \subseteq \overline{U}$. Sea $x \in \overline{U}$, luego para todo V entorno de x debe darse que $U \cap V \neq \varnothing$, y $U \cap V$ es abierto, luego por la propiedad 1, se obtiene que $(U \cap V) \cap D \neq \varnothing$, por ende, todo entorno de x interseca $U \cap D$, ergo, $x \in \overline{U \cap D}$. $\square$

Sabemos que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}^c$ son densos en $\mathbb{R}$, luego la última propiedad nos sirve para formar nuevos conjuntos densos que puede verse como agarrar $\mathbb{Q}$, sacarle, por ejemplo, el intervalo $[0,1]$ y reemplazarlo por $[0,1]_{\mathbb{Q}^c}$ y así obtener otro conjunto denso nuevo.

Teorema (AE) 2.20: Se cumple que $d(X) \leq w(X)$.

Demostración: Sea $\mathcal{B} = \{B_s\}_{s\in S}$ una base de cardinal $w(X)$, luego se define $D := \{a_s : s \in S\}$ donde a_s es un elemento elegido de B_s. Vemos que D es denso sobre X (¿por qué?), y con AE es fácil ver que $d(X) \leq |D| \leq |S| = w(X)$. □

Corolario (AEN) 2.21: Todo espacio 2AN es separable.

2.2 Axiomas de separación

Definición 2.22 – *Axiomas de separación I*: Una topología puede cumplir con algunas de las siguientes propiedades:

T_0 **(Kolmogorov)** Para todo par de puntos distintos uno admite un entorno que no contiene al otro.

T_1 Para todo par de puntos distintos ambos admiten entornos que no contienen al otro.

T_2 **(Hausdorff)** Todo par de puntos distintos poseen entornos disjuntos.

$T_{2,5}$ **(Completamente Hausdorff)** Todo par de puntos distintos poseen entornos cerrados disjuntos.

T_3 Un conjunto cerrado y un punto fuera de él admiten entornos disjuntos.

T_4 Un par de conjuntos cerrados disjuntos admiten entornos disjuntos.

Un espacio que cumple $T_0 + T_3$ se dice *regular* y otro que cumple $T_1 + T_4$ se dice *normal*.

Como pequeño ejercicio, la definición de los axiomas de separación utiliza entornos abiertos, reflexione por qué dicha distinción es irrelevante. Además, algunos libros definen regular como $T_1 + T_3$, esta definición es equivalente a decir que es $T_0 + T_3$ (¿por qué?). Cabe destacar que estaremos utilizando fuertemente a los axiomas de separación a lo largo del libro, por lo que es importante que el lector se acostumbre a ellos, y se recomienda anotar las definiciones en alguna nota o algún material de acceso rápido.

Ejemplo (espacio de Sierpiński). Se le llama *topología del conjunto incluido* S a la cual

$$\tau = \{A \subseteq X : S \subseteq A \vee A = \varnothing\}.$$

La topología del conjunto incluido $\{x\}$ en un espacio no singular es siempre T_0 pero no T_1. El ejemplo más básico es el *espacio de Sierpiński* el cual es una topología sobre $\{0, 1\}$ que incluye a 1, o también que excluye al 0; i.e., $\{\varnothing, \{1\}, \{0, 1\}\}$

Ejemplo (topología cofinita). Dado un espacio X infinito (¿qué ocurre si fuese finito?), se define la topología cofinita como aquella que posee por abiertos los conjuntos cuyo complemento es finito (¿por qué es una topología?). Es claro que es T_1 pues dados x, y distintos se cumple que $X_{\neq x}$ es entorno de y que no contiene a x y viceversa. No obstante, no es de Hausdorff, pues siendo F_1, F_2 finitos se cumple que $X \setminus F_1 \cap X \setminus F_2 = X \setminus (F_1 \cup F_2)$ y la unión de finitos es finita, luego la intersección finita de abiertos no vacíos es nunca vacía y en particular los entornos de cualquier par de puntos siempre se intersecan.

Teorema 2.23: Se cumple:

1. Todo espacio pseudo-métrico T_0 es métrico.
2. Todo espacio métrico es de Hausdorff.
3. Un espacio es T_0 syss para todo $x \neq y$ se cumple que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. De hecho $\{x, y\} \not\subseteq \overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$.
4. Un espacio es T_1 syss sus subconjuntos finitos son cerrados.
5. Un espacio X es de Hausdorff syss la diagonal $\Delta := \{(x, x) : x \in X\}$ es cerrada en X^2.
6. Un espacio T_1 es regular syss para todo entorno sub-básico V de x existe un entorno U tal que $U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.

7. Para espacios se cumple:

$$\text{Normal} \implies \text{Regular} \implies T_{2,5} \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0.$$

Demostración: 5. $\Longleftarrow$. Si Δ es cerrado, entonces para todo $p \notin \Delta$ se cumple que $p \notin \overline{\Delta}$. Los puntos fuera de Δ son pares de coordenadas distintas, y hemos probado que un punto es adherente a Δ syss todo entorno interseca a Δ, ergo, hay un entorno de (x, y) disjunto de Δ. Dicho entorno contiene a un entorno básico $U_{(x,y)}$, los que sabemos son un producto de abiertos V_x, V_y en X. Como son disjuntos, podemos concluir que los pares (x, x) e (y, y) no pertenecen a $V_x \times V_y$. No obstante sabemos que $x \in V_x$ e $y \in V_y$, luego $y \notin V_x$ y $x \notin V_y$, que es la propiedad de Hausdorff.

El caso restante queda al rector.

6. $\implies$. Notemos inmediatamente que $x \notin V^c \subseteq \overline{V^c}$ el cual es cerrado, luego admiten entornos abiertos $x \in U$ y $\overline{V^c} \subseteq W$ disjuntos. Luego $U \subseteq W^c$ y se cumple que $\overline{U} \subseteq W^c \subseteq \operatorname{Int} V \subseteq V$.

$\Longleftarrow$. Sea C un cerrado que no contenga a x, luego por definición de sub-base existen $V_1, \dots, V_n$ sub-básicos tales que $x \in \bigcap_{i=1}^n V_i \subseteq C^c$. Por enunciado, existen entornos W_i de x tales que $\overline{W}_i \subseteq V_i$. Luego $x \in U_1 := \bigcap_{i=1}^n W_i$ y

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i^c \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{W}_i^c =: U_2.$$

Donde U_1 y U_2 son disjuntos.

7. Probaremos que regular $\implies T_{2,5}$, y para ello demostraremos que regular $\implies T_2$: Sea x, y distintos, como el espacio es T_0 existe un entorno abierto S de alguno, que sin perdida de generalidad supondremos que es x, que no contiene al otro. Luego S^c es un cerrado que no contiene a x, ergo, admiten entornos abiertos disjuntos U_x e U_s por T_3. Pero $y \in S^c \subseteq U_s$ y $x \in U_x$ con $U_x \cap U_s$ disjuntos.

Por la propiedad anterior sabemos que dichos entornos admiten subentornos cerrados y que son disjuntos, lo que es la definición de $T_{2,5}$.

□

Las siguientes son comparaciones interesantes de cardinales, opcionales por cierto:

Lema 2.24: En un espacio T_1:

$$\text{Densidad finita} \iff \text{cardinal finito} \implies \text{carac. fínita} \implies \text{discreto.}$$

Demostración: Probaremos que característica finita implica discreto: Esto significa que todo x posee una base de entornos finito $\mathcal{B}(x)$, como los elementos de dicha base son abiertos y la intersección finita de abiertos es abierta, entonces $\bigcap \mathcal{B}(x) = \{x\} \in \tau$. □

Teorema 2.25: Se cumple:

1. Si X es T_0 entonces $|X| \leq 2^{w(X)}$.
2. Si X es de Hausdorff entonces $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$.
3. (AE) Si X es de Hausdorff entonces $|X| \leq d(X)^{\chi(X)}$.
4. Si X es regular entonces $w(X) \leq 2^{d(X)}$.

Demostración:

1. Sea $\mathcal{B}$ una base de cardinal $w(X)$. Luego definimos $\mathcal{B}(x) := \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$ y la propiedad T_0 equivale a que para todo $x \neq y$ se cumpla $\mathcal{B}(x) \neq \mathcal{B}(y)$, luego el conjunto de los $\mathcal{B}(x)$ es equipotente a X y hay a lo más $2^{w(X)}$ de dichos conjuntos, por lo que $|X| \leq 2^{w(X)}$.
2. Sea D un conjunto denso de cardinal $d(X)$ y $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ una familia de bases de entornos de x, entonces se define $\mathcal{D}(x) := \{U \cap D : U \in \mathcal{B}(x)\}$. Luego, queda al lector probar que
$$\bigcap_{A\in\mathcal{D}(x)} \overline{A} = \{x\}$$
por lo que $\mathcal{D}(x) \neq \mathcal{D}(y)$ para $x \neq y$. Notemos que todo $\mathcal{D}(x) \subseteq \mathcal{P}(D)$, por lo que hay $2^{2^{d(X)}}$ familias $\{\mathcal{D}(x)\}_{x\in X}$.
3. Sea $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ una familia de bases de entornos de x, resp. de cardinal $\leq \chi(X)$. Entonces se define $\mathcal{D}_0$ como el conjunto $[D]^{\leq\chi(X)}$ el cual hemos probado posee cardinal $d(X)^{\chi(X)}$ (para $d(X)$ infinito, de lo contrario $|X| = d(X)$ y el resultado es trivial). Definimos $c : \tau \to D$ una función de elección tal que $c(U) \in U$, luego definimos $D(x) := \{c(U) : U \in \mathcal{B}(x)\}$ que evidentemente cumple que $|D(x)| \leq \chi(X)$ por lo que $D(x) \in \mathcal{D}_0$. Seguido definimos $\mathcal{D}_0(x) := \{U \cap D(x) : U \in \mathcal{B}(x)\} \subseteq \mathcal{D}_0$. Como

$x \in \overline{U \cap D(x)} \subseteq \overline{U}$, se cumple que la intersección de la clausura de $\mathcal{D}_0(x)$ es $\{x\}$ para todo punto del espacio, ergo, dichos conjuntos son distintos respecto a todo punto. Como son subconjuntos de $\mathcal{D}_0$ y son a lo más de tamaño $\chi(X)$ se cumple que

$$|X| \leq |\mathcal{D}_0|^{\chi(X)} = \left(d(X)^{\chi(X)}\right)^{\chi(X)} = d(X)^{\chi(X)}.$$

(Si $\chi(X)$ es infinito, en caso contrario, el espacio es discreto y es trivial.)

4. Sea D denso en X y de cardinal $d(X)$, luego se define $\mathcal{B} := \{\operatorname{Int} \overline{U} : U \subseteq D\}$. Basta ver que $\mathcal{B}$ sea base de X. Lo que se da por la propiedad que ya probamos. Como $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(D)$ se da que $w(X) \leq 2^{d(X)}$.

□

Definición 2.26 – *Continuidad*: Dada una aplicación entre espacios topológicos $f : X \to Y$, se dice que f converge a L cerca de un punto de acumulación a si para todo entorno U_L de L se cumple que $f^{-1}[L] \cup \{a\}$ es un entorno de a. Si f converge de forma única a L cerca de a, entonces escribiremos $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ entonces se dice que es *continua* en a. f se dice *continua* (a secas) si lo es en todos los puntos de acumulación del dominio.

Diremos que una aplicación $f : X \to Y$ es un *homeomorfismo* si es biyectiva y f, f^{-1} son continuas. Dos espacios se dicen *homeomorfos* o *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo entre ellos, en cuyo caso escribiremos $X \cong Y$.

Trivialmente todo espacio es homeomorfo a sí mismo. Un ejercicio para el lector es notar que dos espacios discretos son homeomorfos syss poseen el mismo cardinal, debido a lo cual denotaremos $D(\kappa)$ a un representante[1] de espacio discreto de cardinal κ.

Teorema 2.27: Sea $f : X \to Y$, entonces son equivalentes:

1. f es continua.

2. Todo abierto en el codominio posee preimagen abierta.

3. Todo cerrado en el codominio posee preimagen cerrada.

[1]Formalmente este representante es el conjunto de los ordinales estrictamente menores que κ.

4. Para todo $A \subseteq X$ se cumple que $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.
5. Para todo $B \subseteq Y$ se cumple que $\overline{f^{-1}[B]} \subseteq f^{-1}[\overline{B}]$.
6. Para todo $B \subseteq Y$ se cumple que $f^{-1}[\operatorname{Int} B] \subseteq \operatorname{Int} f^{-1}[B]$.

Una conclusión del teorema anterior es que dos espacios son homeomorfos si "sus abiertos coinciden", esto da una mejor mirada al por qué de que se le diga *equivalencia topológica*.

Proposición 2.28: Sea $f : X \to Y$ suprayectiva continua, entonces $d(Y) \leq d(X)$.

Corolario 2.29: La imagen continua de espacios separables es separable.

Proposición 2.30: Son funciones continuas:

1. Aquellas de dominio discreto.
2. La función identidad.
3. Una función constante.
4. La inclusión de A a X, siendo A un subespacio de X.
5. La composición de continuas.

Teorema 2.31 – *Unicidad del límite*: El límite (si existe) de una sucesión en un espacio de Hausdorff es único. También si $f(x_0) \to L$ donde $f : X \to Y$ con Y de Hausdorff, entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Teorema (AE) 2.32 – *Lema de Urysohn*: En un espacio normal se cumple que dados dos conjuntos A, B cerrados disjuntos, existe una función $f : X \to [0,1]$ tal que es continua y que $f[A] = \{0\}$, y $f[B] = \{1\}$.

Demostración: Vamos a construir una sucesión de abiertos $(V_{r_i})_{i\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\overline{V}_r \subseteq V_s \iff r \leq s$$

y donde los $r_i \in \mathbb{Q}$. Notemos que como los racionales son numerables y hay infinitos de ellos en cada intervalo no-trivial (¿por qué?) hay una sucesión

$(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que es una biyección con $r_i : \mathbb{N} \to [0,1]_{\mathbb{Q}}$. Ésto nos permitirá construir nuestra sucesión de abiertos de forma inductiva. Además reordenaremos la sucesión de forma que $r_0 = 0$ y $r_1 = 1$.

En primer lugar, sea V_0 (pues todo espacio normal es regular) cualquier abierto que satisfaga

$$A \subseteq V_0 \subseteq \overline{V}_0 \subseteq B^c$$

y sea $V_1 := B^c$. Así, proseguimos para que se cumpla que

$$\phi(n) \equiv \forall i, j \leq n \; (\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j} \iff r_i \leq r_j).$$

Si $\phi(n)$ se cumple para n, entonces se elige r_i, r_d con $i, d \leq n$ como los términos más cercanos a r_{n+1} por la izquierda y por la derecha resp. y se elige $V_{r_{n+1}}$ como cualquiera que hace cumplir que

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_{n+1}} \subseteq \overline{V}_{r_{n+1}} \subseteq V_{r_d}.$$

Finalmente se construye f como

$$f(x) := \begin{cases} \inf\{r : x \in V_r\} & x \in V_1 \\ 1 & x \notin V_1 \end{cases}$$

Y probaremos que es efectivamente continua: por definición basta probar que las preimágenes de abiertos básicos son abiertos. Los abiertos básicos de $[0,1]$ son de la forma $[0,a)$ y $(b,1]$ con $a, b \in (0,1)$. Veamos que $f(x) < a$ syss existe algún $r < a$ tal que $x \in V_r$, ergo:

$$f^{-1}\big[[0,a)\big] = \bigcup\{V_r : r < a\},$$

la cual es abierta por ser la unión de abiertos. Mientras que $f(x) > b$ syss existe algún $r > b$ tal que $x \notin V_r$, lo que implica que existe algún $r' > b$ tal que $x \notin \overline{V}_{r'}$, por ende:

$$f^{-1}\big[(b,1]\big] = \bigcap\{(\overline{V}_r)^c : r > b\} = X \setminus \bigcap\{\overline{V}_r : r > b\},$$

la cual es abierta pues es el complemento de un cerrado. Por lo tanto, es una aplicación continua. □

En virtud del resultado anterior llamamos a ese tipo de funciones como de Urysohn entre A y B. También se utiliza la expresión *completamente separados*.

Lema 2.33: Si un espacio X que sea T_1 cumple que para todo cerrado C contenido en un abierto U, existe una sucesión de abiertos $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $C \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i$ y $\overline{U}_i \subseteq U$ para todo $i \in \mathbb{N}$; entonces X es normal.

Demostración: Sean A, B cerrados disjuntos. Considerando $C := A$ y $U := B^c$ entonces existe una sucesión de abiertos $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i, \quad \forall i \in \mathbb{N},\ B \cap \overline{U}_i = \varnothing.$$

Análogamente, con $C' := B$ y $U' := A^c$ se obtiene una sucesión de abiertos $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tales que

$$B \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i, \quad \forall i \in \mathbb{N},\ A \cap \overline{V}_i = \varnothing.$$

Luego, definamos

$$G_i := U_i \setminus \bigcap_{j\leq i} V_j, \quad H_i := V_i \setminus \bigcap_{j\leq i} U_j.$$

que resultan formar sucesiones de abiertos (¿por qué?), tales que

$$A \subseteq G := \bigcup_{i=0}^{\infty} G_i, \quad B \subseteq H := \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i.$$

(¿por qué?).

Sólo basta probar que G y H son disjuntos. Si no lo fueran habría algún $x \in G_i$ y $x \in H_j$ para algunos $i, j \in \mathbb{N}$, no obstante, notemos que por definición de G_i, se cumple que $G_i \cap H_j = \varnothing$ para $j \leq i$; y viceversa, por lo que no existen tales "x". Por ende, el espacio es T_4, y por definición es normal. □

Teorema 2.34: Todo espacio regular 2AN es normal.

Demostración: Sea C un cerrado y V un abierto que le contiene. Todo $x \in C$ posee un entorno básico tal que $U_x \subseteq \overline{U}_x \subseteq V$ y evidentemente $C \subseteq \bigcup_{x\in C} U_x$. Pero como la base es numerable, entonces los U_x lo son, lo que forma una sucesión de abiertos que cumple con la condición del lema anterior, ergo, el espacio es normal. □

Teorema 2.35: Todo espacio regular numerable es normal.

Hint: Vea la prueba anterior.

2.3 SUBESPACIOS, SUMAS, PRODUCTOS Y CONVERGENCIA

Proposición 2.36: Sea $A \subseteq X$, el conjunto $\tau_A := \{U \cap A : U \in \tau\}$ es una topología en A.

Definición 2.37 – *Subespacio*: Dado un subconjunto A no vacío de X, el conjunto τ_A definido por la proposición anterior se dice *topología relativa en* A y el par (A, τ_A) se dice un *subespacio* de X. Cabe destacar que denotaremos $\operatorname{Int}_A B$, $\operatorname{Fr}_A B$ y $\overline{B}_A$ al interior, la frontera y la clausura de B respecto de A.

Se dice que una propiedad de un espacio es *hereditaria* si todo subespacio también la posee. Si una propiedad no es generalmente hereditaria, pero se quiere especificar que en un caso particular lo es, entonces añadiremos el prefijo "hereditariamente", e.g., espacio hereditariamente normal.

Proposición 2.38: Sea A un subespacio de X. Un conjunto $B \subseteq A$ es cerrado en A syss existe un cerrado C en X tal que $B = A \cap C$. Se cumple también que $\overline{B}_A = \overline{B} \cap A$.

Demostración: Está claro que si $B := A \cap C$ con C cerrado en X entonces B es cerrado en A. Si B es cerrado en A entonces $A \setminus B$ es abierto, ergo, $A \cap B^c = A \cap U$ con U abierto. Por el contrario, si B es cerrado en A, entonces $B^c \cap A$ es abierto en A, ergo, existe U abierto en X tal que $A \cap B^c = A \cap U$. Probaremos que $F := U^c \cap A = B \cap A = B$: Es claro que

$$(A \cap U) \cup (A \cap U^c) = A \cap (U \cup U^c) = A = (A \cap B^c) \cup (A \cap F) = A \cap (B^c \cup F).$$

Luego $B^c \cup F \supseteq A$, veamos que la desigualdad se mantiene tras considerar la intersección con B:

$$B \subseteq (B^c \cup F) \cap B = (B \cap B^c) \cup (B \cap F) = B \cap F \subseteq B$$

Finalmente es claro que $B \cap F = B$, luego $F \supseteq B$. □

Teorema 2.39: Son hereditarios:

1. Los axiomas de separación T_i con $i \leq 3{,}5$ e $i = 6$.
2. Los axiomas de numerabilidad (1AN, 2AN).
3. La cualidad de ser separable.

Demostración: Probaremos que los axiomas de separación indicados son hereditarios. $T_2, T_{2,5}$ y T_3 salen por definición. T_0 y T_1 se propiedades básicas vistas en el teorema 2.23. □

Definición 2.40 – *Suma de espacios*: Siendo $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos disjuntos dos a dos se denota $\bigoplus_{i\in I} X_i$ al espacio topológico dado por $\bigcup_{i\in I} X_i$, cuyos abiertos U son aquellos tales que $U \cap X_i$ es abierto en X_i. Si los espacios no son disjuntos, pero I está bien ordenado, entonces se puede usar la unión disjunta.

Proposición 2.41: C es cerrado en $\bigoplus_{i\in I} X_i$ syss $C \cap X_i$ lo es para todo $i \in I$.

Corolario 2.42: Cualquier unión de X_j's es cerrada y abierta en $\bigoplus_{i\in I} X_i$.

Proposición 2.43: Si un espacio X puede expresarse como la unión de una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ de subespacios abiertos disjuntos dos a dos, entonces $X = \bigoplus_{i\in I} X_i$.

Definición 2.44 – *Producto de espacios*: Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, se le llama *topología por cajas* a aquella inducida por la base:

$$\left\{\prod_{i\in I} U_i : \forall i \in I\ (U_i \in \tau_i)\right\}$$

Y se le llama *topología producto* a aquella inducida por la subbase formada de los conjuntos de la forma:

$$\prod_{i\in I} A_i, \quad A_i = \begin{cases} X_i, & i \neq j \\ U, & i = j \end{cases}$$

donde $U \in \tau_j$ y $j \in I$ están fijos.

Se dice que una propiedad es κ-multiplicativa si toda topología producto $\prod_{i\in I} X_i$ en donde todo factor posee dicha propiedad e $|I| \leq \kappa$ conserva dicha propiedad. Si no se especifica, entonces se asume que se aplica para todo cardinal.

Para productos de finitos espacios topológicos, la topología por cajas y producto coinciden; no obstante la diferencia se da cuando se consideran productos infinitos. En cuyo caso, en la topología por cajas los básicos son productos de abiertos, mientras que en la producto los básicos son productos de espacios con finitos abiertos; esa distinción es fundamental.

Proposición 2.45: Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia tal que $A_i \subseteq X_i$ para todo $i \in I$, entonces en la topología producto se tiene que

$$\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}. \tag{2.1}$$

Hint: Utilice el hecho de que el entorno de todo punto adherente interseca al conjunto.

Corolario 2.46: Un producto es cerrado en la topología producto syss todos los factores lo son en sus respectivos espacios.

Corolario 2.47: Un producto es denso en la topología producto syss todos los factores lo son en sus respectivos espacios.

Teorema 2.48: Una aplicación f entre un espacio topológico y un producto es continua syss las aplicaciones $f \circ \pi_i$ son continuas para todo $i \in I$.

Enfatizo el como un resultado así de fuerte resulta ser meramente un corolario de la proposición 2.45. Una aplicación trivial es considerar una función desde $\mathbb{R}$ a cualquier espacio euclídeo.

Teorema 2.49: Los axiomas de separación T_i son multiplicativos para $i \leq 3{,}5$. Si un producto es no vacío y T_i entonces los factores son T_i para $i \leq 6$.

Teorema 2.50: Sea $|I| \leq \kappa \geq \aleph_0$. Si $w(X_i) \leq \kappa$ entonces $w\left(\prod_{i\in I} X_i\right) \leq \kappa$. Si $\chi(X_i) \leq \kappa$ entonces $\chi\left(\prod_{i\in I} X_i\right) \leq \kappa$.

Teorema 2.51 – *Teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery*: El producto de a lo más 2^κ espacios de densidad menor o igual que $\kappa \geq \aleph_0$ tiene densidad menor o igual que κ.

Corolario 2.52: Los axiomas de numerabilidad son $\aleph_0$-multiplicativos. La separabilidad es $\mathfrak{c}$-multiplicativa.

Definición 2.53 – *Red*: Un conjunto dirigido es un par $(D, \leq)$ tal que es un conjunto preordenado[a] y para todo $x, y \in D$ existe $z \in D$ tal que $x \leq z$ e $y \leq z$.

Una red es una aplicación de la forma $r : D \to X$ donde D es un conjunto dirigido. Se dice que L es un *límite* de una red $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$, o que la red converge a L, si para todo entorno U_L de L existe un α_0 tal que para todo $\alpha \geq \alpha_0$ se cumple que $x_\alpha \in U_L$. El conjunto de los límites (puede haber más de uno) se denota por $\lim_{\alpha\in D} x_\alpha$. Si el límite es único nos permitiremos el lujo de denotar $L = \lim_{\alpha\in D} x_\alpha$.

[a] Esto significa que $\leq$ es reflexiva y transitiva.

Es inmediato ver que toda sucesión es una red y que de existir el límite de una sucesión es el mismo que el de su red.

Teorema (AE) 2.54: $x \in \overline{A}$ syss existe una red de términos de A que converge a x.

DEMOSTRACIÓN: $\Longleftarrow$. Queda de ejercicio para el lector.

$\Longrightarrow$. Sea $\mathcal{U}(x)$ el conjunto de entornos de x, el cuál es claramente director bajo el preorden $\subseteq$. Luego consideramos un $x_U \in U \cap A$ con $U \in \mathcal{U}(x)$ arbitrario y es fácil notar que $x \in \lim_{U\in\mathcal{U}} x_U$. □

Corolario (AE) 2.55: $x \in A^{\mathrm{d}}$ syss existe una red de términos de $A_{\neq x}$ que converge a x.

Teorema (AE) 2.56: Un espacio es de Hausdorff syss el límite de una red convergente es único.

Demostración: $\Longrightarrow$. Queda de ejercicio para el lector.

$\Longleftarrow$. Probaremos la contrarrecíproca. Sea X un espacio no de Hausdorff, luego existe un par de puntos x_1, x_2 tal que todos sus entornos poseen intersección no vacía. Luego consideramos el conjunto director $\mathcal{U}$ como aquél dado por las intersecciones de sus entornos bajo $\subseteq$ y elegimos $x_U \in U \in \mathcal{U}$ arbitrario. Finalmente se cumple trivialmente que $x_1, x_2 \in \lim_{U\in\mathcal{U}} x_U$. □

Definición 2.57 – *Espacio de Fréchet y secuencial*: Un espacio se dice *secuencial* si todo conjunto es abierto syss toda sucesión que converge a uno de sus puntos esta eventualmente contenida en dicho conjunto. Un espacio se dice *de Fréchet* si para todo $A \subseteq X$ y todo $x \in \overline{A}$ existe una sucesión en A que converge a x.

Teorema (AEN) 2.58: Para espacios se cumple que:

$$\text{1AN} \Longrightarrow \text{Fréchet} \Longrightarrow \text{Secuencial}$$

Demostración: Por definición todo punto $x \in \overline{A}$ posee una base de entornos a lo más numerable $\mathcal{B}(x) = \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ luego se define la sucesión $x_k \in A \cap \bigcap_{i=0}^{k} B_i$ tal que evidentemente converge a x. La segunda implicancia es trivial. □

2.4 ESPACIOS METRIZABLES

Una feliz casualidad es que tras proponer el espacio discreto, nos percatamos de que hay un métrica que genera la misma topología. Cuando exista una (pseudo-)métrica que induce la misma topología de un espacio diremos que dicho espacio es **(pseudo-)metrizable**.

Lema 2.59: Todo espacio es (pseudo-)metrizable syss es homeomorfo a un espacio (pseudo-)métrico.

Corolario 2.60: Todo subespacio de un espacio (pseudo-)metrizable es (pseudo-)metrizable.

2.5 LÍMITES EN $\mathbb{R}$

Por el momento sólo hemos definido los límites y la noción de forma general mediante topología, pero suele ser común que la forma de enseñar es particular a $\mathbb{R}$. Las definiciones se desprenden automáticamente del que $\mathbb{R}$ es un espacio métrico:

Definición 2.61 – *Límites y continuidad (espacio métrico)*: Dada una aplicación $f : X \to Y$, donde X, Y son subconjuntos de M, se escribe $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ donde $x_0 \in X^{\mathrm{d}}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $x \in B_\delta(x_0; X_{\neq x_0})$ (o $d(x, x_0) < \delta$ y $x \in X_{\neq x_0}$) implica $f(x) \in B_\epsilon(L; Y)$ (o $d(f(x), L) < \epsilon$). Igualmente se dice que f es continua en x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Y f se dice continua en general si lo es en todo punto de X^{d}.

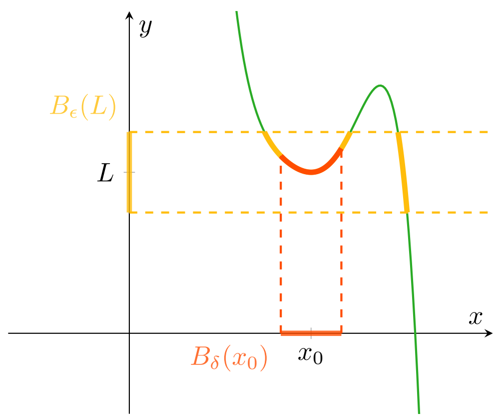

Figura 2.3. Continuidad en funciones entre espacios métricos.

Como $\mathbb{R}$ es métrico, entonces es de Hausdorff y ya probamos la unicidad del límite. Pero también hay otras definiciones importantes:

Proposición 2.62: Se cumple:

1. Si $f : X \to M$ converge en $x_0 \in X^{\mathrm{d}}$, entonces está acotada cerca de x_0.
2. La imagen de un conjunto acotado, bajo una función continua, está acotada.

Proposición 2.63: En M:

1. Un punto está a distancia nula de un conjunto syss es adherente a él.
2. Dos conjuntos están a distancia nula syss no están separados.

Teorema 2.64: Todo espacio métrico completo es perfectamente normal.

DEMOSTRACIÓN: Sea A, B cerrados en M, luego definimos

$$f(x) := \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Es claro que $f[A] = \{0\}$ y $f[B] = \{1\}$. Por la proposición anterior la función está bien definida y ya hemos visto que la aritmética sobre continuas en continua. Luego f es de Urysohn. □

Esta es un propiedad muy importante, pues hemos visto que los distintos niveles de separación de un espacio lo dotan de más propiedades, y mediante el teorema anterior hemos probado que un espacio métrico admite la mayor clasificación.

2.6 CÁLCULO DE LÍMITES

Ejemplo (Función de Thomae). Se define dicha función como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 1/q, & x = p/q \in \mathbb{Q}_{\neq 0} \land \operatorname{mcd}(p, q) = 1 \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Y hemos de probar que $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.
Para ello, primero admitiremos los siguientes criterios de notación:

$$\mathbb{Q}_n := \left\{ \frac{p}{n} : p \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \mathbb{Q}_{\leq n} := \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{Q}_i.$$

Y probaremos que $0 < |\mathbb{Q}_n \cap [x, x+1)| \leq n$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

Si $x \in \mathbb{Z}$ entonces $x = \frac{nx}{n} \in \mathbb{Q}_n \cap [x, x+1)$, de lo contrario, $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1 < x + 1$, por lo que $\lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{Q}_n \cap [x, x+1)$ (es decir, la intersección es no vacía). Notemos también que el elemento $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ es el mínimo de dicha intersección (¿por qué?), y está claro que $\frac{\lfloor nx+n+1 \rfloor}{n} = \frac{\lfloor nx \rfloor}{x} + 1 + \frac{1}{n} \geq x + 1 + \frac{1}{n}$, por lo que no puede haber más de n elementos. □

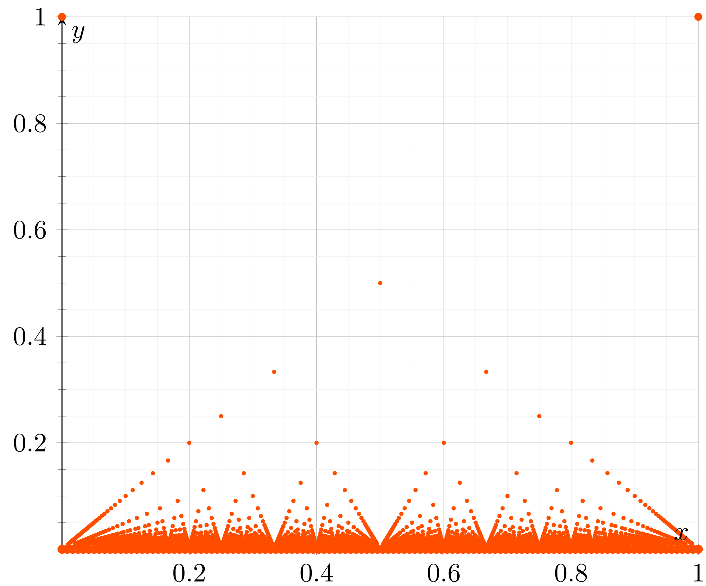

Figura 2.4. Función de Thomae entre 0 y 1.

Usando ello, también se prueba que

$$0 < |\mathbb{Q}_{\leq n} \cap [x, x+1)| = \left| \bigcup_{i=1}^{n} (\mathbb{Q}_i \cap [x, x+1)) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Es decir, que dicho conjunto es finito y no vacío, por lo que, tenemos todos nuestros elementos para probar lo del límite.

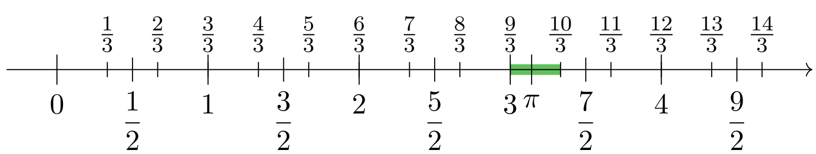

Figura 2.5. Ejemplo del procedimiento con π y $\mathbb{Q}_{\leq 3}$.

Sea $\epsilon > 0$. Por propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \epsilon$. La idea será acortar la bola abierta entorno a x_0 de manera que sólo posea racionales de denominador mayor que n. Por ello definimos $m := \text{máx}\big(\mathbb{Q}_{\leq n} \cap [x_0 - 1, x_0)\big)$ y $M := \text{mín}\big(\mathbb{Q}_{\leq n} \cap (x_0, x_0 + 1]\big)$ pues dichos conjuntos son no vacíos y finitos, de esta forma, en el intervalo $(m, M) \setminus \{x_0\}$ sólo caben racionales de denominador mayor que n (pues si hubiera uno de denominador menor o igual que n este elemento contradiría la maximalidad o la minimalidad de M o m resp.). Definimos $\delta := \text{mín}\{x_0 - m, M - x_0\}$ de forma que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (m, M)$. Luego si x es irracional entonces $f(x) = 0 < \epsilon$. Y si es racional, entonces su denominador es mayor que n, ergo, $f(x) < 1/n < \epsilon$. $\square$

3. COMPACIDAD Y CONEXIÓN

3.1 ESPACIOS CONEXOS

Teorema 3.1: Son equivalentes:

1. X no puede expresarse como $X_1 \oplus X_2$ con X_1, X_2 subespacios de X.
2. $\varnothing, X$ son los únicos conjuntos cerrados y abiertos de X.
3. Si $X = X_1 \cup X_2$ con X_1, X_2 separados; entonces algunos es vacío.
4. Para toda aplicación continua $f : X \to D$ con $D = \{0, 1\}$ discreta se cumple que $f[X] = \{0\}$ o $f[X] = \{1\}$.

Definición 3.2 – *Espacio, conjunto conexo*: Es cualquiera que cumple con alguna de las condiciones del teorema anterior. De lo contrario se dice que un espacio/conjunto es *disconexo*.

Ejemplos triviales de conjuntos universalmente conexos lo son $\varnothing$ y los conjuntos singulares. Cabe destacar que el término proviene del inglés *connected*[1] que se traduce a "conectado". Como ejercicio vea por qué $\mathbb{Q}$ es disconexo.

Teorema 3.3: Todo subespacio de $\overline{\mathbb{R}}$ (bajo la topología del orden) es conexo syss es un intervalo.

DEMOSTRACIÓN: $\implies$. En $\overline{\mathbb{R}}$ todo subespacio S posee ínfimo y supremo a, b; luego para probar que es un intervalo basta probar que para todo $a < x < b$

[1] Éste término fue adoptado por N. L. Lennes en 1911 basado en artículos de Frederic Riesz. También él hace uso del término *arc* (arco), en lugar del típico *path* (camino) que igual se emplea en páginas posteriores.

se cumple que $x \in S$. De lo contrario $S \cap [-\infty, x)$ y $S \cap (x, \infty]$ son abiertos disjuntos cuya unión es S.

$\Longleftarrow$. Supongamos por contradicción que un intervalo puede representarse como la suma de dos subespacios abiertos no vacíos U, V de tal forma que $x \in U$, $y \in V$ y $x < y$. Sea $U' := U \cap [x, y]$, $V' := V \cap [x, y]$ tal que $U' \cup V' = [x, y]$. Notemos que U, V son abiertos-cerrados en el subespacio I, de forma que U', V' son cerrados. Sea $s := \sup(U')$, luego se puede comprobar que $s \in \overline{U}' \subseteq U$ y que $s \in \overline{V}' \subseteq V$; lo que contradice a la cualidad de subespacios disjuntos. $\square$

Es fácil notar que la topología del orden sobre $\overline{\mathbb{R}}$ genera la topología usual sobre $\mathbb{R}$ como subespacio. Ergo, se concluye el mismo resultado para $\mathbb{R}$.

Teorema 3.4: La imagen continua de conexos es conexa.

Corolario 3.5 (Teorema del valor intermedio de Weierstrass): Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, donde $f(a) < f(b)$, entonces para todo $y \in (f(a), f(b))$ existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = y$.

Corolario 3.6 (Teorema de Bolzano): Sea $f[a, b] \to \mathbb{R}$, donde $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

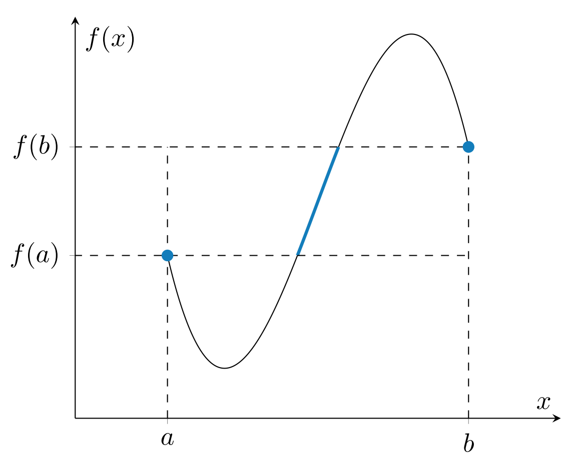

Figura 3.1. Teorema del valor intermedio de Weierstrass.

Corolario 3.7: Toda función continua de la forma $f : [a, b] \to [a, b]$ posee un punto fijo.

Teorema 3.8: Sean $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios conexos de X, tal que existe algún $i_0 \in I$ tal que C_{i_0} no está separado del resto de C_i, entonces $\bigcup_{i\in I} C_i$ es conexo.

Demostración: Sea $C := \bigcup_{i\in I} C_i = X_1 \cup X_2$ donde X_1, X_2 están separados. □

Corolario 3.9: Sean $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios conexos de X, tal que su intersección es no-vacía, entonces $\bigcup_{i\in I} C_i$ es conexo.

Corolario 3.10: Sea A un conjunto cualquiera tal que $C \subseteq A \subseteq \overline{C}$ con C conexo. Entonces A es conexo. En particular la clausura de un conexo es conexa.

Demostración: Notemos que para todo $x \in A$ se cumple que C y $\{x\}$ no están separados. Luego el conjunto $\{C\} \cup \{\{x\} : x \in A\}$ es una familia de conexos tal que uno no está separado del resto. □

Corolario 3.11: Si X posee un subconjunto denso conexo, entonces X es conexo.

Corolario 3.12: Si todo par de puntos en X están contenidos en un subconjunto conexo de X, entonces X es conexo.

Teorema 3.13: La topología producto de espacios no vacíos es conexa syss lo son los factores.

Demostración: Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ tal que $X := \prod_{i\in I} X_i$.

$\Longrightarrow$. Si X es conexo entonces $\pi_j(X) = X_j$ lo es pues la proyección es continua y la imagen de conexos es conexa.

$\Longleftarrow$. Para $I = \{0,1\}$ basta notar que $X = (X_1 \times \{x_2\}) \cup (\{x_1\} \times X_2)$ donde ambos son conexos no-disjuntos, por ende, X es conexo. Luego se puede aplicar inducción para notar que el producto finitos de conexos es conexo.

Si los X_i son conexos y no vacíos, entonces basta considerar un $\vec{u} \in X$, y notar que dado[2] $J \in [I]^{<\omega}_{\neq\varnothing}$ se define

$$\prod_{j\in J} X_j \cong C_J := \prod_{i\in I} A_i, \quad A_i := \begin{cases} \{\vec{u}_i\} & i \notin J \\ X_i & i \in J \end{cases}$$

Luego la unión de los C_J es un conjunto denso (¿por qué?) de X que es conexo pues es la intersección de conexos cuya intersección contiene a $\vec{u}$, i.e., es no vacía. □

Nótese que aquí se puede criticar de que hace falta AE para extraer el $\vec{u} \in X$, pero de darse que el producto sea nulo entonces es también trivialmente conexo.

3.2 ESPACIOS COMPACTOS

Definición 3.14 – *Espacio compacto*: Dado un conjunto $A \subseteq X$ decimos que un *cubrimiento abierto* es un subconjunto de la topología $\mathcal{S} \subseteq \tau$ tal que

$$A \subseteq \bigcup \mathcal{S}.$$

Un sub-cubrimiento abierto es un subconjunto de $\mathcal{S}$ que también satisface ser un cubrimiento abierto.

Decimos que A es compacto si todo cubrimiento abierto de A admite un sub-cubrimiento finito.

[2] Un subconjunto finito de I.

4. FUNCIONES DERIVADAS

4.1 DERIVADA

Definición 4.1 – *Derivada*: Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y sea $a \in A$ interior a A. Decimos que f es derivable en a si existe

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{4.1}$$

En cuyo caso le decimos a $f'(a)$ la derivada de f en a. f' es la *función derivada* de f que representa la derivada de f en todos los puntos donde dicho valor existe. Si $\operatorname{Dom} f' = \operatorname{Int} A$ entonces decimos que f es derivable (a secas).

Teorema 4.2: Si f es derivable en a entonces es continua en a.

DEMOSTRACIÓN: Como f es derivable, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) = f'(a)(\lim_{x \to a} x - a) = 0.$$

Por ende $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, por lo que es continua en a. $\square$

Por contrarrecíproca, entonces si f no es continua en a no puede ser derivable en a.

Apéndice

ÍNDICE ALFABÉTICO

ÍNDICE DE NOTACIÓN

$\vee, \wedge$	Disyuntor, "o lógico" y conjuntor, "y lógico" respectivamente.
$\Longrightarrow$	Implica, entonces.
$\Longleftrightarrow$	Si y sólo si.
$\forall, \exists$	Para todo, existe respectivamente.
$\in$	Pertenencia.
$\subseteq, \subset$	Subconjunto, subconjunto propio resp.
$\cup, \cap$	Unión e intersección binaria respectivamente.
$A \setminus B$	Resta conjuntista, A menos B.
A^c	Complemento de A (respecto a un universo relativo).
$A \times B$	Producto cartesiano de A por B.
$A_{\neq x}$	Abreviación de $A \setminus \{x\}$.
$f : A \to B$	Función f de dominio A y codominio B.
$f \circ g$	Composición de f con g. $(f \circ g)(x) = g(f(x))$.
$\mathcal{P}(A)$	Conjunto potencia de A.
$[A]^\kappa$	Conjunto de los subconjuntos de A de cardinal κ.
resp.	Respectivamente.
syss	Si y sólo si.
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$	Conjuntos de números naturales, enteros y racionales resp.

$\aleph_0$	Cardinal numerable, cardinalidad de $\mathbb{N}$.
AE	Axioma de elección.
DE, AEN	Axioma de elecciones dependientes, y de elecciones numerables resp.
ZF(C)	Teoría de Zermelo-Fraenkel. La C representa el axioma de elección.
NBG	Teoría de von Neumann-Bernays-Gödel.
$(a, b]$	Intervalo de extremos a y b. La combinación de paréntesis y corchete determina si está abierto o cerrado, p. 3.
$\mathbb{R}$	Conjunto de números reales, p. 6.
$d(x, y)$	Distancia entre x e y, p. 8.
$B_r(x), B'_r(x)$	Bola abierta y cerrada resp. de radio r centrada en x, p. 8.
$\mathbb{M}, \overline{\mathbb{M}}, \mathbb{K}$	Un espacio pseudo-métrico, métrico y un cuerpo normado arbitrarios, resp, p. 9.
$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Sucesión de términos s_n. Se erradica el "$\in \mathbb{N}$" cuando no haya ambigüedad, p. 10.
$s_n \to L$	$(s_n)_n$ converge a L, p. 10.
$\text{lím}_n s_n$	El límite de una sucesión, p. 10.
$\text{diam}(A)$	Diámetro del conjunto A, p. 11.
$d(A, B)$; $d(x, A)$	Distancia entre A y B, y entre A y x resp., p. 11.
$\sqrt[n]{x}$	Raíz n-ésima de x, p. 19.
$\zeta(s)$	Función dseta de Riemann. $\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$, p. 23.
$\exp(x)$	Función exponencial de x, p. 24.
$w(X)$	Peso de X, i.e., el mínimo cardinal de sus bases, p. 33.
$\chi(x), \chi(X)$	Característica de x y del espacio resp, p. 33.
1,2AN	Primer, segundo axioma de numerabilidad resp. ($1\text{AN} \equiv \chi(X) \leq \aleph_0$, $2\text{AN} \equiv w(X) \leq \aleph_0$), p. 33.

BIBLIOGRAFÍA

ANÁLISIS REAL

1. Castillo, C. I. *Análisis matemático* `https://www.uv.es/ivorra/Libros/An.pdf` (2020).
2. Lima, E. L. *Análise Real. Funções de Uma Variável* (IMPA, 2009).
3. Simon, B. *Real Analysis. A Comprehensive Course in Analysis* (American Mathematical Society, 1946).
4. Tao, T. *Analysis* (Hindustan Book Agency, 2006).
5. Thomson, B. S., Bruckner, J. B. y Bruckner, A. M. *Elementary Real Analysis* `http://www.classicalrealanalysis.info/com/` (2001).
6. Ziemer, W. P. y Torres, M. *Modern Real Analysis* (Springer, 2017).

TOPOLOGÍA

7. Castillo, C. I. *Topología* `https://www.uv.es/ivorra/Libros/T.pdf` (2020).
8. Engelking, R. *General Topology* La referencia más completa sobre este tópico, aunque no la más fácil de leer. (Heldermann Verlag, 1989).
9. Howes, N. R. *Modern Analysis and Topology* (Springer-Verlag New York, 1995).
10. Müger, M. *Topology for the Working Mathematician* `https://www.math.ru.nl/~mueger/topology.pdf` (2020).
11. Steen, L. A. y Seebach, J. A. *Counterexamples in Topology* (Springer-Verlag New York, 1970).