Teoría de categorías y álgebra homológica

José Cuevas Barrientos

14 de diciembre de 2022

Índice general

Preámbulo

Pre-requisitos. Este libro no presupone requisitos, al menos no desde el punto de vista formal. Me explico: éstos apuntes pretenden ser el primer acercamiento axiomático para un lector cualquiera, pero advierto que saltar desde el reino de las matemáticas intuitivas al de las matemáticas lógicas no es tan sencillo. Sí, el libro no utiliza ningún teorema que no esté demostrado en sí mismo, o en otro de mi autoría, pero avanza con una velocidad que asume familiaridad con ciertas definiciones básicas, por ejemplo, en el libro se construyen los números y las operaciones entre ellos (adición, producto y potencias), pero si usted no entiende bien conceptos elementales como la regla de signos en el producto de enteros, éste libro no lo va a aclarar.

Métodos y objetivos. El libro comienza con una explicación de las leyes lógicas fundamentales, seguido de una introducción axiomática a la teoría de conjuntos; hay varios libros mucho más sencillos que optan por evitar los sistemas axiomáticos, pero personalmente prefiero matar dos pájaros de un tiro con éste enfoque, además de que es más claro para mí. Luego se estudia el tema del buen orden que se relaciona a los números ordinales, que para ciertos contextos resultan un poco más abstracto, pero son elementales en la teoría de conjuntos.

Orden y propósitos. Aquí se explican a grandes rasgos los contenidos y objetivos de cada capítulo, así como sus relaciones entre sí:

1. **Teoría axiomática de conjuntos:** Se presentan dos modelos de axiomas conocidos, el de Zermelo-Fraenkel (ZF) y el de von Neumann-

Bernays-Gödel (NBG), mediante los cuáles se construyen las operaciones elementales (unión, intersección, diferencia, producto y complemento relativo). Luego se definen dos objetos fundamentales para toda rama matemática: las relaciones y las funciones, así como propiedades básicas que pueden o no poseer. Se define también el concepto de categoría que, si bien abstracto, es (implícita y) universalmente aplicado en un sinfín de contextos. Se termina por construir los números naturales mediante los axiomas de Dedekind-Peano, los números enteros y los números racionales a partir del concepto de relación de equivalencia, y también se discute la aritmética entre estos tres conjuntos.

2. **Orden y ordinales:** Se definen distintos tipos de ordenamientos, así como elementos especiales (cotas, elementos minimales, etc.). Se observa que los llamados conjuntos *bien ordenados* son «similares», con lo cual se busca definir unos representantes que son los llamados *números ordinales*. Se estudia la aritmética entre ordinales, así como tipos de funciones. Se termina por presentar el axioma de regularidad y su relación a los ordinales.

3. **Cardinalidad y elección:** Se define el concepto de *equipotencia* que era la forma en la que Cantor describía la cualidad de «tener la misma cantidad» entre conjuntos, tras lo cuál, al igual que con el buen orden, se busca construir posibles representantes. Un subconjunto de los ordinales parece un buen candidato, pero ¿lo es? La respuesta, bastante profunda, se relaciona a una de las proposiciones más controversiales de las matemáticas, el axioma de elección (AE); con lo que se comienza a discutir las equivalencias y formas en las que se presenta. El capítulo continua discutiendo la aritmética entre cardinales (principalmente asumiendo formas del AE), que abren la puerta a varios tópicos del maravilloso y complicado mundo de la teoría de conjuntos intermedia.

Introducción

La teoría de conjuntos emerge a finales del siglo 19 y principios del siglo 20 como una solución al problema de los fundamentos de las matemáticas, debe entenderse pues que la matemáticas sin conjuntos es posible y muy natural, pero que desde su aparición los conjuntos son universalmente empleados pues poseen una estructura lo suficientemente *amorfa* como para poder representar todo tópico en matemáticas. Ésto, como siempre, es un arma de doble filo: por un lado todo es un conjunto (o una clase en la teoría NBG), y por el otro lado la expresión «X es un conjunto» es en general extremadamente vacía.

0.1 Historia de la teoría de categorías

La teoría de categorías se distancia bastante de la historia de la teoría de conjuntos, mientras que una se forja en conjunción con la lógica y el cuestionamiento a los fundamentos de las matemáticas, la otra tiene unos origenes prácticos que sientan las bases de la filosofía categorista. La cuestión es la siguiente: al encontrarse con objetos más complicados tanto en álgebra como en topología se vuelve tanto o más razonable el estudio desde un punto de vista de *cómo* interactúa el objeto respecto a sus funciones, que de *qué* está compuesto internamente.

El paso cero fueron las revoluciones en las definiciones formales de función según la escuela de Cantor y Dedekind, pero el primer rayo concreto de luz a ésta nueva teoría fue precisamente un artículo de la mano de dos topólogos algebristas en los años cuarenta: Eilenberg y Mac Lane. Mac Lane se encargaría durante años de difundir su propia obra y organizar la teoría que se mecía en su seno, lo que lo convirtió en uno de los filósofos de las matemáticas más distinguido del último siglo.

Una pregunta intermedia natural sería la siguiente: ¿si la teoría de categorías se consolida como siendo infinitamente más útil que la teoría elemental de conjuntos, por qué aún predomina la segunda en ambitos pedagógicos? En primer lugar, la teoría de conjuntos es más vieja y por ello goza de un mayor estándar; en segundo lugar, la teoría de categorías requiere un profundo cambio de paradigma que no es del todo necesario para disciplinas como análisis real o funcional, sino que adquiere tonalidades distintas cuando se pone en contexto de teorías algebraicas; en tercer lugar, predomina una buena metáfora que contrasta a ambas, los conjuntos comprenden una teoría *estática* o *rígida* de las matemáticas, mientras que las categorías comprenden una teoría *fluida*; lo que quiere decir que en general, el enfoque categorial es más complicado puesto que para poder decir algo útil de un objeto hay que ponerlo a actuar con otros, mientras que los conjuntos ya vienen con sus acciones más o menos bien descritas, aunque poco expresivas; y en cuarto lugar, porque si bien las categorías forman una base sólida de las matemáticas, se asienta sobre los pilares axiomáticos de los conjuntos (aunque varios categoristas ignoran los aspectos conjuntistas que permiten libertades sobre sus objetos, como los modelos y los cardinales inaccesibles).

En cualquier caso, los conjuntos ofrecen un panorama discreto de las matemáticas, mientras que los topólogos, algebristas y geómetras buscaban una entidad más conexa que abarcase sus teorías. Curiosamente, señala Mac Lane que la notación de las funciones mediante flechas ($f\colon X \to Y$) surgió antes de las categorías, y que de hecho inspiró el concepto original. La verdadera revolución de Eilenberg y Mac Lane fue declarar a las flechas como tan importantes como los espacios sobre los cuales actuaban.

En los años cincuenta, Mac Lane comenzó a mirar el álgebra mediante el nuevo prisma de las categorías y se topó con la curiosa simetría entre módulos y grupos abelianos, y se percató de que no residía en el hecho de que sus definiciones se parecieran, sino de que sus categorías se parecían. Así, Mac Lane buscó establecer los axiomas para una definición común aunque sin éxito, que luego fue sucedido por Buchsbaum que desarrolla la teoría de categorías exactas (cf. [**7**]), hasta la llegada de Grothendieck en 1957 en la que impuso un estándar con su noción de *categoría abeliana*, lo que impuso una revolución en el álgebra homológica.

A finales de los años cincuenta, Kan introdujo la pieza restante para el panorama de categorías puras: la adjunción. En los años sesenta, el texto de Freyd [**3**] se convirtió en un estándar y ordenó todas estas ideas, tratando de enfatizar todos los micro-hitos de la naciente disciplina. Hasta cierto punto, la teoría de categorías abelianas se ve terminada con el teorema del encaje de Freyd-Mitchell –que entre otras cosas involucra también los trabajos de S. Lubkin– que heurísticamente dice que «todo lo que es probable en toda categoría de módulos, es probable en toda categoría abeliana».

Jean Leray, un topólogo francés que fue prisionero de guerra en Alemania durante los años cuarenta, llega a la definición de *haz*, que logra cuantificar la transición local-global tan presente en la topología; el fallo de ésta transición es lo que la *homología* mide, que también había sido investigada por Leray. Otra de sus contribuciones a la materia involucra la definición de *sucesión espectral* que es una de las herramientas principales del álgebra homológica.

Grothendieck volvió a agitar las esferas de las matemáticas con la noción del *topos*, señalando que generalizaba la idea del espacio topológico. ...

Para la teoría de categorías, de haces y de topoi me basé en los artículos **[23]** y **[19]**.

Año	**Suceso**	**Fuente**
1942	Definición de categoría (§1).	Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane. *General Theory of Natural Equivalences.*
1956	Definición de adjunción.	Daniel Kan. *Adjoint Functors.*
	Definición de funtores aditivos, satélites y funtores derivados.	Henri Cartan y Samuel Eilenberg. *Homological Algebra* **[7]**.
1957	Definición de categoría abeliana. Aplicaciones al álgebra homológica.	Alexander Grothendieck. *Sur quelques points d'algèbre homologique.*
1960	Teorema de Eilenberg-Watts (§5.3.2).	Samuel Eilenberg. *Abstract description of some basic functor.* Charles E. Watts. *Intrinsic characterizations of some additive functors.*
	Teorema del encaje.	Saul Lubkin. *Imbedding of Abelian Categories.*
1963	Teorema del encaje de Freyd-Mitchell.	Barry Mitchell. *The Full Imbedding Theorem.*
1964	Teorema y teorema especial del funtor adjunto.	Peter Freyd. *Abelian categories.*

Parte I.

Teoría pura de categorías

1

Teoría de categorías

La teoría de categorías, más que una ser una teoría en si misma representa un lenguaje que varias ramas de las matemáticas, como el álgebra abstracta y la topología, emplean. Esto se debe a que por naturaleza, la teoría de categorías nos dirá acerca de una forma de equivalencia entre las relaciones de los elementos de dos o más conjuntos; mediante ella podremos describir formalmente una noción de equivalencia.

1.1 Categorías y funtores

Definición 1.1 – *Categoría*: Una ***categoría*** $\mathscr{C}$ consta de:

1. Una clase $\operatorname{Obj}\mathscr{C}$ de ***objetos***.
2. Una clase $\operatorname{Mor}\mathscr{C}$ de ***flechas*** o ***morfismos***.
3. Un par de aplicaciones $\operatorname{Dom}, \operatorname{Cod}\colon \operatorname{Mor}\mathscr{C} \to \operatorname{Obj}\mathscr{C}$. Si $f \in \operatorname{Mor}\mathscr{C}$ cumple que $\operatorname{Dom}(f) = A$ y $\operatorname{Cod}(f) = B$, entonces abreviaremos todo esto como que $A \xrightarrow{f} B$. Se define

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) &:= \{f \in \operatorname{Mor}(\mathscr{C}) : A \xrightarrow{f} B\},\\ \operatorname{End}_{\mathscr{C}}(A) &:= \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A).\end{aligned}$$

(Se obviarán los subíndices cuando no haya ambigüedad sobre la categoría.) Se exige también, que las clases $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ sean siempre conjuntos.

Las flechas de $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(A)$ se dicen ***endomorfismos***.

4. Una operación $\circ$ tal que $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ cumpla que $A \xrightarrow{f\circ g} C$. Diremos que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

conmuta syss $h = f \circ g$, o también cuando dos conjuntos de flechas que parten y terminan en los mismos lugares son iguales bajo composición.

Otra condición para la composición es que sea asociativa, i.e., que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f\circ g"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "g\circ h"] & \\ & C \arrow[r, "h"'] & D \end{tikzcd}$$

conmute.

Se usaran flechas punteadas para indicar que existe una flecha que hace que el diagrama conmute.

5. Una aplicación $1_{-}\colon \mathrm{Obj}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ tal que $1_A \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(A)$, y que hace que el siguiente diagrama siempre conmute:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "f"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "1_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Dado eso podemos denotar $\mathscr{C} = (\operatorname{Obj}\mathscr{C}, \operatorname{Mor}\mathscr{C}, \operatorname{Dom}, \operatorname{Cod}, \circ, \operatorname{Id})$.

Ejemplos. Son categorías:

- Dado un conjunto X no vacío, la categoría que tiene por objetos a los elementos de X y por flechas únicamente a las del tipo 1_x. Ésta categoría se dice ***discreta***.

- Set_U que tiene por objetos a los subconjuntos de U y por flechas a las funciones entre ellos, donde el dominio y codominio son los mismos que en el sentido conjuntista, donde $\circ$ es la composición de funciones y donde $1_X := \operatorname{Id}_X$. Como variante Rel_U tiene los mismos objetos y sus flechas son relaciones.

- Si $(X, \leq)$ es un conjunto preordenado, entonces definimos la categoría $\mathsf{Poset}(X)$ así: Los objetos son los mismos elementos de X y las flechas funcionan así: si $x \leq y$, entonces $x \xrightarrow{f} y$ será una flecha con $f := (x, y)$, de éste modo, $1_x = (x, x)$ y la composición funciona así $(x, y) \circ (y, z) = (x, z)$. Nótese que en ésta categoría, existe una única flecha desde x a y syss $x \leq y$. Como todo conjunto linealmente y parcialmente ordenado es preordenado también funciona la misma construcción.

- Un caso particular de la categoría anterior: si (X, τ) es un espacio topológico, entonces $(\tau, \subseteq)$ (los abiertos con la inclusión) forman un conjunto parcialmente ordenado. Denotamos $\mathsf{Op}(X) := \mathsf{Poset}(\tau, \subseteq)$.

Para más ejemplos véase la tabla abajo, éste mismo demuestra el por qué del interés sobre las categorías.

Categoría	**Objetos**	**Flechas**
Set	Conjuntos	Funciones
Grp	Grupos	Homomorfismos de grupos
Ab	Grupos abelianos	Homomorfismos de grupos
Ring	Anillos (unitarios)	Homomorfismos de anillos
CRing	Anillos conmutativos	Homomorfismos de anillos
Fld	Cuerpos	Homomorfismos de anillos
Mod_A	A-módulos (derechos)	Homomorfismos de A-módulos
Vect_k	k-espacios vectoriales	Funciones k-lineales
Alg_A	A-álgebras	Homomorfismos de A-álgebras
CAlg_A	A-álgebras conmutativas	Homomorfismos de A-álgebras

Categoría	Objetos	Flechas
Ext_k	Extensiones de cuerpo de k	k-morfismos
Top	Espacios topológicos	Funciones continuas
Man	Variedades topológicas	Funciones continuas
Man_∞	Variedades diferenciales	Funciones diferenciables
Var_k	k-variedades algebraicas	Morfismos sobre k

Definición 1.2: Se dice que una flecha $A \xrightarrow{f} B$ es un ***isomorfismo*** si existe otra flecha $B \xrightarrow{g} A$ tal que $f \circ g = 1_A$ y $g \circ f = A_B$. Si existe un isomorfismo entre dos objetos de una categoría, entonces se dice que éstos son isomorfos.

Proposición 1.3: Se cumplen:

1. Si $A \xrightarrow{f} B$ es un isomorfismo, entonces existe una única flecha $B \xrightarrow{g} A$ tal que $f \circ g = 1_A$ y $g \circ f = 1_B$. A dicho g le decimos la ***inversa*** de f y le denotamos $g := f^{-1}$.
2. 1_A siempre es un isomorfismo y satisface que $(1_A)^{-1} = 1_A$. De modo que todo objeto siempre es isomorfo a sí mismo.
3. La cualidad de «ser isomorfos» es una relación de equivalencia en la categoría.

Demostración:

1. Sean $g, h \in \operatorname{Hom}(B, A)$ tales que cumplen el enunciado. Luego
$$g = g \circ 1_A = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = 1_B \circ h = h.$$
2. Basta ver que $1_A \circ 1_A = 1_A$. □

Así, para que una flecha sea un isomorfismo debe poseer inversa *dentro* de la misma categoría.

Ejemplo.
- En Set: los isomorfismos son las funciones biyectivas y los objetos isomorfos se dicen equipotentes (cf. [**38,** Def. 3.1]).
- En Grp (resp. $\mathsf{Ring}, \mathsf{Mod}_A, \mathsf{Alg}_A$) los isomorfismos son los isomorfismos de grupos (resp. de anillos, de A-módulos, de A-álgebras).

- En Top y Man: los isomorfismos son los homeomorfismos.
- En Man_∞: los isomorfismos son los difeomorfismos.
- En la categoría de sistemas de Peano, todos los objetos son isomorfos (cf. [**38,** Teo. 1.35]).
- En la categoría de conjuntos bien ordenados, todo objeto es isomorfo a un y sólo un número ordinal (cf. [**38,** Teo. 2.27]).
- Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Todo objeto de $\mathsf{Poset}(X)$ es isomorfo exclusivamente a sí mismo. Por definición, un preorden $\leq$ es un orden parcial syss éste es el caso.

Definición 1.4: Un ***grupoide*** es una categoría donde todos las flechas son isomorfismos.

Proposición 1.5: Un grupo corresponde, de forma canónica, a grupoide con un único objeto.

Demostración: Sea $(G, \cdot)$ un grupo, y sea $\infty \notin G$. Luego sea $\mathscr{C}$ la categoría que tiene por objetos a ∞ y por flechas a G, tal que $1_\infty := 1$, el neutro de G y donde para todo $g, h \in \operatorname{Mor}(\mathscr{C})$ se define $g \circ h := g \cdot h$. Si se tiene un grupoide con un objeto se hace lo mismo para construir de él un grupo. □

Definición 1.6: Dada una categoría $\mathscr{C}$ se le llama ***categoría opuesta*** o ***dual***, denotada por $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, a la categoría cuyos objetos son los mismos, y tal que $A \xrightarrow{f} B$ syss $B \xrightarrow{f^*} A$. Así se define $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$.

$$
\begin{tikzcd}
 & A & & A \arrow[d, dash] \arrow[dr, "f"] & \\
B \arrow[ur, "f^*"] & g^*\circ f^* \arrow[u] & \Longleftrightarrow & f\circ g \arrow[d] & B \arrow[dl, "g"] \\
 & C \arrow[u, dash] \arrow[ul, "g^*"] & & C &
\end{tikzcd}
$$

En la teoría de categorías, cuando se toma un concepto y se «dan vuelta las flechas», se le llama el concepto dual y se le suele añadir el prefijo «co-».

Así ahora veremos varias definiciones y sus duales. Nótese que el dual de un isomorfismo es también un isomorfismo, éste no suele ser el caso con otras definiciones.

Ejemplo. Sea $(X, \leq)$ un conjunto preordenado. Entonces $\mathsf{Poset}(X, \leq)^{\mathrm{op}} = \mathsf{Poset}(X, \geq)$.

Definición 1.7 – *Funtor*: Dadas dos categorías $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$, se dice que una función F es un ***funtor (covariante)*** entre ambas si:

1. Para todo $X \in \operatorname{Obj} \mathscr{A}$ se cumple que $F(X) \in \operatorname{Obj} \mathscr{B}$. En general denotaremos FX para ahorrar notación.
2. Para toda flecha $X \xrightarrow{f} Y$ en $\mathscr{A}$ se cumple que $FX \xrightarrow{F(f)} FY$ en $\mathscr{B}$.
3. Si $X \xrightarrow{f} Y$ y $Y \xrightarrow{g} Z$ en $\mathscr{A}$, entonces $F(f) \circ F(g) = F(f \circ g)$.
4. $F(1_X) = 1_{FX}$.

Se suele denotar que $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$. En varios casos, ahorraremos todo ésto mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & FX \arrow[d, "F(f)"] \\ Y \arrow[r, phantom, "\overset{F}{\Longrightarrow}"] & FY \end{tikzcd}$$

Motivados por el ejemplo de la categoría opuesta decimos que una función $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es un ***funtor contravariante*** si:

1. Para toda flecha $X \xrightarrow{f} Y$ en $\mathscr{A}$ se cumple que $FY \xrightarrow{F(f)} FX$ (en $\mathscr{B}$).
2. Si $X \xrightarrow{f} Y$ y $Y \xrightarrow{g} Z$ en $\mathscr{A}$, entonces $F(g) \circ F(f) = F(f \circ g)$.
3. $F(1_X) = 1_{FX}$.

Cuando no se agregue nada a «funtor» se asume que es covariante.

Se dice que un funtor $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ ***preserva*** una propiedad cuando toda flecha f con dicha propiedad satisface que $F(f)$ también posee dicha propiedad; así mismo, el funtor ***refleja*** una propiedad si dada una flecha f tal que $F(f)$ posee una propiedad, entonces se cumple que f también posee dicha propiedad.

Corolario 1.8: El funtor canónico $X \mapsto X$ y $f \mapsto f^*$ es un funtor contravariante desde $\mathscr{C}$ a $\mathscr{C}^{\text{op}}$. Más aún, un funtor $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es contravariante syss induce un funtor covariante $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}^{\text{op}}$.

El siguiente es tal vez el primer teorema puro de la teoría de categorías:

Teorema 1.9: Los funtores preservan isomorfismos.

Demostración: Sea $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{C}$ un isomorfismo y sea un funtor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$. Sea $g := f^{-1}$, entonces basta notar que

$$1_{FX} = F(1_X) = F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$$

y viceversa, para concluir que $F(f) \in \operatorname{Hom}(FX, FY)$ es un isomorfismo. $\square$

Definición 1.10 (Clasificación de funtores): Se dice que un funtor $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es:

Fiel Si para todos los objetos $X, Y \in \operatorname{Obj} \mathscr{A}$ y todo $f, g \in \mathscr{A}(X, Y)$ se cumple que $F(f) = F(g)$ syss $f = g$. Un funtor fiel también se dice un ***encaje de categorías***.

Pleno Si para todos los objetos $X, Y \in \operatorname{Obj} \mathscr{A}$, y para todo $FX \xrightarrow{g} FY$ (en $\mathscr{B}$), existe $X \xrightarrow{\phi} Y$ (en $\mathscr{A}$) tal que $F(\phi) = g$.

Plenamente fiel Si es fiel y es pleno.

Esencialmente suprayectivo Si para todo objeto $Y \in \operatorname{Obj} \mathscr{B}$ existe $X \in \operatorname{Obj} \mathscr{A}$ tal que FX es isomorfo a Y.

Proposición 1.11: Sea $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor.

1. F es fiel syss para todo par de objetos $X, Y \in \operatorname{Obj} \mathscr{A}$ se cumple que $F\colon \operatorname{Hom}(X, Y) \to \operatorname{Hom}(FX, FY)$ es inyectivo.

2. F es pleno syss para todo par de objetos $X, Y \in \operatorname{Obj} \mathscr{A}$ se cumple que $F\colon \operatorname{Hom}(X, Y) \to \operatorname{Hom}(FX, FY)$ es suprayectivo.

3. F es plenamente fiel syss para todo par de objetos $X, Y \in \operatorname{Obj} \mathscr{A}$ se cumple que $F\colon \operatorname{Hom}(X, Y) \to \operatorname{Hom}(FX, FY)$ es biyectivo.

Ejemplo. Se cumplen:

- La aplicación $c_B\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ para algún $B \in \operatorname{Obj} \mathsf{B}$ dada por $c_B(X) = B$ y $c_B(f) = 1_B$ es un funtor, denominado el ***funtor constante***. Si A y B poseen más de un objeto, entonces el funtor no es fiel ni esencialmente suprayectivo.

- La aplicación $\iota\colon \mathsf{Grp} \to \mathsf{Set}$ dada por $\iota(X) = X$ y $\iota(f) = f$, es un funtor. Éste ejemplo aún vale reemplazando Grp por otras categorías concretas, y a éste funtor se le conoce como el ***funtor olvidadizo***. El funtor olvidadizo es fiel, pero no es ni pleno, pero en varios casos sí resulta ser esencialmente suprayectivo.[1]

- La aplicación $P\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$, donde $P(X) := \mathcal{P}(X)$ y para todo $A \subseteq X$ y todo $X \xrightarrow{f} Y$ se cumple que $[P(f)](A) := f[A]$; es un funtor covariante. Éste funtor es fiel, pero no es ni pleno, ni esencialmente suprayectivo.

- La aplicación $\bar{P}\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$, donde $P(X) := \mathcal{P}(X)$ y para todo $X \xrightarrow{f} Y$ y todo $B \subseteq Y$ se define que $[\bar{P}(f)](B) := f^{-1}[B]$; es un funtor contravariante. Al igual que el anterior: éste funtor es fiel, no es pleno, ni esencialmente suprayectivo.

- Dado un conjunto X considere $\mathscr{C} := \mathsf{Poset}(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. Entonces la aplicación $(\ )^c\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ tal que $A^c := X \setminus A$ es un funtor contravariante. En éste sentido el «dar vuelta las flechas» se traduce en que «el complemento da vuelta las inclusiones». Éste funtor es plenamente fiel y esencialmente suprayectivo.

- Como caso del inciso anterior, el complemento es un funtor contravariante entre los abiertos y los cerrados de un espacio topológico. Éste funtor también es plenamente fiel y esencialmente suprayectivo.

[1] En éste contexto, ser «esencialmente suprayectivo» significa que la categoría posee objetos de todas las cardinalidades. Es claro que ésto vale para los espacios topológicos, y también vale para grupos y anillos; pero no vale para cuerpos ni espacios vectoriales.

- $\delta\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Top}$ dado por $\delta(X) = D(X)$, el espacio discreto, es un funtor. Éste funtor es plenamente fiel, pero no esencialmente suprayectivo.

Definición 1.12: Dadas las categorías $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ se dice que $\mathscr{A}$ es una ***subcategoría*** de $\mathscr{B}$ si $\operatorname{Obj}\mathscr{A} \subseteq \operatorname{Obj}\mathscr{B}$ y $\operatorname{Mor}\mathscr{A} \subseteq \operatorname{Mor}\mathscr{B}$ (abreviado como $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$).

Corolario 1.13: Si $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, entonces la inclusión $\iota\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ dada por:

1. Para todo $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{A}$, se define $\iota(A) := A$.
2. Para todo $f \in \operatorname{Mor}\mathscr{A}$, se define $\iota(f) := f$.

Es un funtor fiel canónico, y es a veces llamado un ***funtor semiolvidadizo***.

Definición 1.14: Se dice que una subcategoría es ***plena*** si la inclusión es un funtor pleno.

Ejemplo. Hay varias categorías que dentro de sus propios contextos demuestran definir subcategorías, a veces algunas muy ricas.

- Ab es una subcategoría plena de Grp. Los grupos finitamente generados, de torsión, libres de torsión, etc., son subcategorías plenas de Grp.
- Haus, la categoría de los espacios topológicos de Hausdorff, es una subcategoría plena de Top. Los espacios topológicos compactos, localmente compactos, etc., son subcategorías plenas de Top.
- Ring es una subcategoría (no plena) de Rng.[2] CRing es una subcategoría plena de Ring, Fld es una subcategoría plena de CRing.
- Si A es un anillo conmutativo, $\mathsf{Mod}_A = {}_A\mathsf{Mod}$ (la categoría de A-módulos izquierdos es lo mismo que la categoría de A-módulos derechos).
- CAlg_A es una subcategoría plena de Alg_A.
- Si k es un cuerpo, entonces Ext_k es una subcategoría plena de CAlg_k.
- FinSet (la categoría de los conjuntos finitos) es una subcategoría plena de Set.

[2] En Ring exigimos que los homomorfismos preserven el neutro multiplicativo, mientras que en Rng no lo exigimos así. Así, en Rng siempre el homomorfismo nulo es una flecha válida, mientras que en Ring sólo es admisible si el codominio es el anillo nulo.

Definición 1.15: Se dice que una categoría $\mathscr{C}$ es:

Concreta Si existe un funtor fiel canónico a Set.

Pequeña Si $\operatorname{Obj}\mathscr{C}$ y $\operatorname{Mor}\mathscr{C}$ son conjuntos (y no clases propias).

Toda subcategoría de Set es trivialmente concreta, pero hay otras categorías que no son subcategorías de Set que también son concretas.

Proposición 1.16: Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ categorías. Entonces:

1. $\mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$ que manda los objetos y flechas de $\mathscr{A}$ en sí mismos, es un funtor.
2. Si $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ y $G\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ son funtores, entonces $(F \circ G)\colon \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ es un funtor.

En consecuencia, las categorías pequeñas (como objetos) y los funtores entre ellas (como flechas) constituyen una categoría, denotada Cat. Categorías de éste estilo se llaman 1-categoría. En ésta categoría se denota $\operatorname{Funct}(\mathscr{A}, \mathscr{B}) := \operatorname{Hom}_{\mathsf{Cat}}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ (es decir, es el conjunto de funtores de $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$).

Proposición 1.17: Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Denotando $\mathscr{C}(A, B) := \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, entonces:

1. Para todo $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ y todo $B \xrightarrow{f} C$, se define:
$$\begin{aligned} h^A(f)\colon \mathscr{C}(A, B) &\longrightarrow \mathscr{C}(A, C) \\ g &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$
es decir, $h^A(f)$ es la poscomposición por f. Entonces $\mathscr{C}(A, -)\colon \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$ es un funtor covariante, explícitamente:
$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "f"'] \arrow[r, phantom, "\xRightarrow{\mathscr{C}(A,-)}"] & \mathscr{C}(A, B) \arrow[d, "h^A(f)"] \\ C & \mathscr{C}(A, C) \end{tikzcd}$$
2. Para todo $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ y todo $B \xrightarrow{f} C$, se define:
$$\begin{aligned} h_A(f)\colon \mathscr{C}(C, A) &\longrightarrow \mathscr{C}(B, A) \\ g &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$
es decir, $h_A(f)$ es la precomposición por f. Entonces $\mathscr{C}(-, A)\colon \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$ es un funtor contravariante, explícitamente:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "f"'] \arrow[r, phantom, "\xRightarrow{\mathscr{C}(-,A)}"] & \mathscr{C}(B,A) \\ C & \mathscr{C}(C,A) \arrow[u, "h_A(f)"'] \end{tikzcd}$$

A $\mathscr{C}(A,-)$ y $\mathscr{C}(-,A)$ se le dicen ***funtores representables***, y a A se le dice el *objeto representado*. Para mayor claridad se denota $h^A(f) =: \mathscr{C}(A,f)$ y $h_A(f) =: \mathscr{C}(f,A)$.

A veces denotaremos $h^f := h^A(f)$ y $h_f := h_A(f)$. Otros libros emplean f^* y f_* resp.

Teorema 1.18: Sea $B \xrightarrow{f} C$. Entonces son equivalentes:

1. f es un isomorfismo.
2. Para todo $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$, se cumple que $\mathscr{C}(A,f)$ es biyección.
3. Para todo $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$, se cumple que $\mathscr{C}(f,A)$ es biyección.

Demostración: Claramente $1 \implies 2$, pues sabemos que un funtor preserva isomorfismos y las biyecciones son los isomorfismos de Set.

$2 \implies 1$. Considere $A = C$, entonces sea $g := \mathscr{C}(C,f)^{-1}(1_C)$, es decir, $g \circ f = \mathscr{C}(C,f)(g) = 1_C$. Ahora considere $A = B$, entonces $\mathscr{C}(B,f)(f \circ g) = (f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f) = f$; pero $\mathscr{C}(B,f)(1_B) = f$ y $\mathscr{C}(B,f)$ es inyección, así que $f \circ g = 1_B$.

Análogamente se concluye $1 \iff 3$. □

Definición 1.19: Sean $F, G \colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ funtores. Se dice que φ es una ***transformación natural*** entre F y G si:

1. Para todo $X \in \operatorname{Obj}\mathscr{A}$, $\varphi(X) \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{B}}(FX, GX)$.
2. Para todo $X \xrightarrow{f} Y$ en $\mathscr{A}$ se cumple que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\varphi(X)"] \arrow[d, "F(f)"'] & GX \arrow[d, "G(f)"] \\ FY \arrow[r, "\varphi(Y)"'] & GY \end{tikzcd}$$

conmuta (en $\mathscr{B}$).

Ésto se denota como $\varphi\colon F \Rightarrow G$.

Análogamente si $F, G\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ funtores contravariantes. Se denota que $\varphi\colon F \Rightarrow G$ si el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Longrightarrow"] & FX \arrow[r, "\varphi(X)"] & GX \\ Y & FY \arrow[u, "F(f)"'] \arrow[r, "\varphi(Y)"'] & GY \arrow[u, "G(f)"'] \end{tikzcd}$$

conmuta (en $\mathscr{B}$).

Proposición 1.20: Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ categorías. Entonces:

1. Para todo $F \in \mathrm{Funct}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$, existe una transformación natural $\mathrm{Id}\colon F \Rightarrow F$ tal que $\mathrm{Id}(FX) = FX$ y $\mathrm{Id}(F(f)) = F(f)$ para todo $X \in \mathrm{Obj}\,\mathscr{A}$ y $f \in \mathrm{Mor}\,\mathscr{A}$.

2. Si $\phi\colon F \Rightarrow G$ y $\psi\colon G \Rightarrow H$ son transformaciones naturales, entonces $(\phi \circ \psi)\colon F \Rightarrow H$ también lo es.

En consecuencia, los funtores entre $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ (como objetos) y las transformaciones naturales entre ellos (como flechas) conforman una categoría, que se denota por $\mathsf{Fun}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$.

Definición 1.21: Los isomorfismos de $\mathsf{Fun}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ se dicen ***equivalencias naturales***; de existir una equivalencia natural entre dos funtores, éstos se dicen ***naturalmente equivalentes***.

Dos categorías $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ son ***equivalentes*** si existen funtores $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ y $G\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ tal que $F \circ G$ y $G \circ F$ son naturalmente equivalentes a $\mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$ y $\mathrm{Id}_{\mathscr{B}}$ resp., en cuyo caso F, G se dicen ***equivalencias de categorías***.

Proposición 1.22: Dado un funtor $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ se cumple que F es una equivalencia de categorías syss es plenamente fiel y esencialmente suprayectivo.

Demostración: $\Longrightarrow$. Si F es una equivalencia de categorías, digamos que G es su inversa de modo que $F \circ G$ es isomorfo a $\mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$, es decir, que existen $\alpha_1 \colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$ y $\alpha_2 \colon \mathrm{Id}_{\mathscr{A}} \Rightarrow F \circ G$ tal que $\alpha_1 \circ \alpha_2 = \mathrm{Id}$.

(i) <u>F es fiel:</u> Sean $X, Y \in \operatorname{Obj} \mathscr{A}$, queremos ver que $F|_{\operatorname{Hom}(X,Y)}$ es inyectivo. Sean $f, g \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ y llamemos $H := F \circ G \colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$. Luego podemos organizar toda nuestra información en el siguiente diagrama (no conmutativo):

$$\begin{tikzcd} HX \arrow[d, shift right, "H(f)"'] \arrow[d, shift left, "H(g)"] & X \arrow[l, "\alpha_2(X)"'] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \\ HY \arrow[r, "\alpha_1(Y)"'] & Y \end{tikzcd}$$

Y comprobar que $f = \alpha_2(X) \circ H(f) \circ \alpha_1(Y)$ y lo mismo con g, de modo que $H(f) \neq H(g)$.

(ii) <u>F es esencialmente suprayectivo:</u> Sea $Z \in \operatorname{Obj} \mathscr{B}$ y sean $\beta_1 \colon G \circ F \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathscr{B}}$ y $\beta_2 \colon \mathrm{Id}_{\mathscr{B}} \to G \circ F$ tales que $\beta_1 \circ \beta_2 = \mathrm{Id}$; ahora se tiene que $\beta_1(Z) \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{B}}(FGZ, Z)$ y $\beta_2(Z) \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{B}}(Z, FGZ)$ demuestran ser la una la inversa de la otra, por lo que Z es isomorfo a la imagen de $GZ \in \operatorname{Obj} \mathscr{A}$.

(iii) <u>F es pleno:</u> Sean $X, Y \in \operatorname{Obj} \mathscr{A}$ y sea $g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{B}}(FX, FY)$. Luego a partir de las flechas ya mencionadas anteriormente construimos los siguientes dos diagramas (el de la izquierda en $\mathscr{A}$ y el de la derecha en $\mathscr{B}$):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha_2(X)"] \arrow[d, dashed, "h"'] & GFX \arrow[d, "G(g)"] \\ Y & GFY \arrow[l, "\alpha_1(X)"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\beta_2(FX)"] \arrow[d, "g"'] & FGFX \arrow[d, "FG(g)"] \\ FY & FGFY \arrow[l, "\beta_1(FX)"] \end{tikzcd}$$

Y luego es inmediato comprobar que $F(h) = g$.

$\Longleftarrow$. Para todo X definimos GFX como algún objeto isomorfo a X y GFY como el mismo objeto si Y es isomorfo a X. Como F es esencialmente suprayectivo ésta definición se extiende a todos los objetos de $\mathscr{B}$. Fijamos

$\alpha_1 \colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathscr{B}}$ y $\alpha_2 \colon \mathrm{Id}_{\mathscr{B}} \Rightarrow F \circ G$ como flechas que establezcan dicho isomorfismo, y lo mismo con β_1, β_2.

Ahora bien aún queda definir G sobre las flechas de $\mathscr{B}$. Para ello, sean $W \xrightarrow{f} Z$ en $\mathscr{B}$ y definamos $X := GW, Y := GZ \in \operatorname{Obj} \mathscr{A}$ tales que $GFX = X$ (por definición de G) y vemos que se tiene el siguiente diagrama en $\mathscr{B}$:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[d, "f"'] & FGW = FX \arrow[l, "\beta_1(W)"'] \arrow[d, dashed, "h"] \\ Z \arrow[r, "\beta_2(Z)"'] & FGZ = FY \end{tikzcd}$$

Luego definimos $h := \beta_1(W) \circ f \circ \beta_2(Z) \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{B}}(FX, FY)$. Como F es pleno, existe $g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y)$ tal que $F(g) = h$ y así tenemos el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$:

$$\begin{tikzcd} GW \arrow[r, "\alpha_1(GW)"] \arrow[d, dashed] & GFGW = X \arrow[d, "g"] \\ GZ & GFGZ = Y \arrow[l, "\alpha_2(GZ)"] \end{tikzcd}$$

Como insinúa el diagrama definimos $G(f) := \beta_1(GW) \circ g \circ \beta_2(GZ)$. Queda al lector comprobar que todo funciona apropiadamente. $\square$

Nótese que hay grandes ventajas en trabajar con equivalencias de categorías en lugar de isomorfismos propiamente como tal. Por ejemplo, es un ejercicio para el lector notar que dos categorías isomorfas poseen la misma cantidad de objetos por cada clase de isomorfismo, cuando en realidad no nos importa preservar dicha cantidad, sólo nos interesa que haya un objeto por clase de isomorfismo.

Proposición 1.23: Sea $A \xrightarrow{f} B$, entonces:

1. $h^f \colon h_A \Rightarrow h_B$ dado por la poscomposición, es una transformación natural (entre funtores contravariantes).

2. $h_f \colon h^B \Rightarrow h^A$ dado por la precomposición, es una transformación natural.

Teorema 1.24: Sea $\mathscr{C}$ una categoría y A un objeto. Entonces:

1. Tomando como objetos: las flechas $f \in \operatorname{Mor} \mathscr{C}$ tales que $\operatorname{Cod}(f) = A$,

2. Tomando como morfismos: las flechas $B \xrightarrow{h} C$, cuyo dominio es $B \xrightarrow{f} A$ y cuyo codominio es $C \xrightarrow{g} A$; tales que $f = h \circ g$.

Ello conforma una categoría, denotada $\mathscr{C}/A$, a la que llamamos ***categoría de corte***. En síntesis, que lo de la izquierda (en $\mathscr{C}/A$) se traduce al diagrama conmutativo (en $\mathscr{C}$) de la derecha:

$$\begin{tikzcd} f \arrow[d, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Longleftrightarrow" below=12pt] & B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & A \arrow[d, equal, "1_A"] \\ g & C \arrow[r, "g"'] & A \end{tikzcd}$$

El concepto dual, llamada ***categoría de co-corte***, denotada $A/\mathscr{C}$, posee por objetos a las flechas de dominio A y por morfismos a las flechas $B \xrightarrow{h} C$ de dominio $A \xrightarrow{f} B$ y de codominio $A \xrightarrow{g} C$ tales que $g = f \circ h$.

Como ejercicio al lector compruebe que $\mathscr{C}/A = (A/\mathscr{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$.

Ejemplo 1 (categorías punteadas): Se define $\mathsf{Set}^* := \{*\}/\mathsf{Set}$, donde $\{*\}$ es un conjunto singular arbitrario. En general, sus objetos se entienden de la siguiente manera: corresponden a un conjunto no vacío X y a un elemento $x \in X$, usualmente llamado un ***punto distinguido***; para mayor facilidad les denotamos (X, x). Y sus flechas $(X, x) \xrightarrow{f} (Y, y)$ son las funciones $f \colon X \to Y$ tales que $f(x) = y$. A ésta categoría se le llama la categoría de ***conjuntos punteados***. Análogamente se pueden definir las categorías $\mathsf{Top}^*, \mathsf{Man}^*, \mathsf{Man}^*_\infty$, etc. El caso de Htpy^* es ligeramente distinto.[3]

Nótese, sin embargo, que ésta definición no aplica tan directamente para categorías de objetos algebraicos, ésto se verá más en detalle en la siguiente sección sobre objetos nulos.

Ejemplo. La categoría Ext_k no es más que la categoría de co-corte k/Fld. La categoría Ring_p no es más que la categoría $\mathbb{F}_p/\mathsf{Ring}$ y la categoría Ring_0 no es más que la categoría $\mathbb{Q}/\mathsf{Ring}$.

[3]Formalmente sus elementos no son las flechas de Htpy con puntos distinguidos, sino que son las clases de homotopías que respetan puntos distinguidos. Aquí la diferencia es radical debido a que ambas son clases de equivalencias, pero definidas de manera distinta.

1.2* Multifuntores y el lema de Yoneda

Definición 1.25: Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ categorías, entonces se define su categoría producto, denotada $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$, tal que:

1. $(A, B) \in \operatorname{Obj}(\mathscr{A} \times \mathscr{B})$ syss $A \in \operatorname{Obj} \mathscr{A}$ y $B \in \operatorname{Obj} \mathscr{B}$.
2. $(f, g) \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A} \times \mathscr{B}}\big((A, B), (A', B')\big)$ syss $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A')$ y $g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{B}}(B, B')$.

Un funtor sobre un producto de dos categorías se dice un ***bifuntor***. Un funtor sobre un producto de varias categorías se dice un ***multifuntor***.

Proposición 1.26: Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ categorías, entonces las proyecciones canónicas $P_{\mathscr{A}} \colon \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ y $P_{\mathscr{B}} \colon \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ son funtores covariantes. Éstos son:

$$
\begin{tikzcd}
(A, B) \arrow[d, "{(f,g)}"'] \arrow[r, phantom, "\xRightarrow{P_{\mathscr{A}}}"] & A \arrow[d, "f"] & (A, B) \arrow[d, "{(f,g)}"'] \arrow[r, phantom, "\xRightarrow{P_{\mathscr{B}}}"] & G \arrow[d, "g"] \\
(A', B') & A' & (A', B') & G'
\end{tikzcd}
$$

Intuitivamente un bifuntor es un funtor en ambas coordenadas, pero formalmente:

Lema 1.27: Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ categorías, tal que para todo $(A, B) \in \operatorname{Obj} \mathscr{A} \times \mathscr{B}$ sean $F_A \colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ y $G_B \colon \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ funtores tales que:

1. $F_A(B) = G_B(A)$ para todo $(A, B) \in \operatorname{Obj} \mathscr{A} \times \mathscr{B}$.
2. El siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
F_B(A) = G_A(B) \arrow[r, "G_A(g)"] \arrow[d, "F_B(f)"'] & G_A(B') = F_{B'}(A) \arrow[d, "F_{B'}(f)"] \\
F_B(A') = G_{A'}(B) \arrow[r, "G_{A'}(g)"] & G_{A'}(B') = F_{B'}(A')
\end{tikzcd}
$$

conmuta para todo $(A, B) \xrightarrow{(f,g)} (A', B')$ en $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$.

Entonces determina un único bifuntor $H\colon \mathscr{A}\times\mathscr{B}\to\mathscr{C}$ dado por $H(A,B) = F_A(B)$ y $H(f,g) = F_B(f)\circ G_{A'}(g)$.

Corolario 1.28: Sea $H, H' \in \mathrm{Funct}(\mathscr{A}\times\mathscr{B},\mathscr{C})$. Una familia

$$\{\varphi(A,B)\colon H(A,B)\to H'(A,B) : (A,B)\in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}\times\mathscr{B})\}$$

determina una transformación natural $\varphi(-,-)\colon H\Rightarrow H'$ syss $\varphi(A,-)\colon H(A,-)\Rightarrow H'(A,-)$ y $\varphi(-,B)\colon H(-,B)\Rightarrow H'(-,B)$ lo son.

Demostración: $\Longrightarrow$. Trivial.

$\Longleftarrow$. Basta ver el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H(A,B) \arrow[rrr, dashed, "\varphi(A,B)"] \arrow[dr, "H(f,B)"] \arrow[dd, "H(f,g)"'] & & & H'(A,B) \arrow[dl, "H'(f,B)"'] \arrow[dd, "H'(f,g)"] \\
& H(A',B) \arrow[r, "\varphi(A',B)"] \arrow[dl, "H(A',g)"] & H'(A',B) \arrow[dr, "H'(A',g)"'] & \\
H(A',B') \arrow[rrr, dashed, "\varphi(A',B')"'] & & & H'(A',B')
\end{tikzcd}$$

Aquí se determinan dos sub-cuadrados dados por el hecho de que $\varphi(A,-)$ y $\varphi(-,B)$ son transformaciones naturales; de modo que las flechas punteadas conmutan. $\square$

Veamos un par de ejemplos de bifuntores:

Proposición 1.29: Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Entonces $\mathscr{C}(-,-)\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}}\times\mathscr{C}\to \mathsf{Set}$ es un bifuntor.

Demostración: Nótese que claramente

$$\mathscr{C}(A,-)(B) = \mathscr{C}(-,B)(A) = \mathrm{Hom}(A,B).$$

Y además se cumple el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(A,B) \arrow[d, "(f^*,g)"'] \arrow[dr, phantom, "\Longrightarrow"] & \mathscr{C}(A,B) \arrow[r, "\mathscr{C}(A,g)"] \arrow[d, "\mathscr{C}(f,B)"] & \mathscr{C}(A,B') \arrow[d, "\mathscr{C}(f,B')"] \\
(A',B') & \mathscr{C}(A',B) \arrow[r, "\mathscr{C}(A',g)"'] & \mathscr{C}(A',B')
\end{tikzcd}$$

En efecto, sea $h \in \mathscr{C}(A, B)$, luego

$$\begin{aligned}
\big(\mathscr{C}(f, B) \circ \mathscr{C}(A', g)\big)(h) &= \mathscr{C}(A', g)(f \circ h) = (f \circ h) \circ g \\
\big(\mathscr{C}(A, g) \circ \mathscr{C}(f, B')\big)(h) &= \mathscr{C}(f, B')(h \circ g) = f \circ (h \circ g)
\end{aligned}$$

Finalmente, por el lema se concluye el enunciado. $\square$

Proposición 1.30: Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ categorías. Entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(A,F) \arrow[d, "{(f,\varphi)}"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\mathrm{ev}(-,-)}{\Longrightarrow}"] & FA \arrow[r, "\varphi(A)"] \arrow[d, "F(f)"] \arrow[dr, "{H(f,\varphi)}"] & GA \arrow[d, "G(f)"] \\
(B,G) & FB \arrow[r, "\varphi(B)"'] & GB
\end{tikzcd}$$

determina un bifuntor $\mathrm{ev}(-,-)\colon \mathscr{A} \times \mathsf{Fun}(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \to \mathscr{B}$.

Proposición 1.31: Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(A,F) \arrow[d, "{(f^*,\varphi)}"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\mathrm{Nat}(h^-,-)}{\Longrightarrow}"] & \mathrm{Nat}(h^A, F) \arrow[r, "{\mathrm{Nat}(h_f,-)}"] \arrow[d, "{\mathrm{Nat}(-,\varphi)}"] \arrow[dr, "{\mathrm{Nat}(h^f,\varphi)}"] & \mathrm{Nat}(h^B, F) \arrow[d, "{\mathrm{Nat}(-,\varphi)}"] \\
(B,G) & \mathrm{Nat}(h^A, G) \arrow[r, "{\mathrm{Nat}(h_f,-)}"'] & \mathrm{Nat}(h^B, G)
\end{tikzcd}$$

determina un bifuntor $\mathrm{Nat}(h^-, -)\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{Fun}(\mathscr{C}, \mathsf{Set}) \to \mathsf{Set}$.

Teorema 1.32 – *Lema de Yoneda*: Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $F\colon \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$ un funtor. Entonces:

$$\begin{aligned}
\tau_F^A\colon \mathrm{Nat}(h^A, F) &\longrightarrow FA \\
\varphi &\longmapsto \varphi(A)(1_A)
\end{aligned}$$

es una biyección cuya inversa es

$$\begin{aligned}
(\tau_F^A)^{-1}\colon FA &\longrightarrow \mathrm{Nat}(h^A, F) \\
a &\longmapsto h^a
\end{aligned}$$

tal que $h^a(B)(f) = F(f)(a)$ para todo $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{C}$.

Demostración: Fijemos $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ y $F \in \operatorname{Funct}(\mathscr{C}, \mathsf{Set})$.

i) <u>h^a es transformación natural desde $\mathscr{C}(A, -)$ a F:</u> Queremos ver que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Longrightarrow"] & h^A(B) \arrow[r, "h^a(B)"] \arrow[d, "h^f"] & FB \arrow[d, "F(f)"] \\
C & h^A(C) \arrow[r, "h^a(C)"'] & FC
\end{tikzcd}$$

conmuta. Es decir, fijemos $B \xrightarrow{f} C$ y sea $g \in \mathscr{C}(A, B)$ luego se cumple que

$$\big(h^f \circ h^a(C)\big)(g) = h^a(C)(g \circ f) = F(g \circ f)(a) = \big(F(g) \circ F(f)\big)(a)$$
$$\big(h^a(B) \circ F(f)\big)(g) = F(f)\big(h^a(B)(g)\big) = F(f)\big(F(g)(a)\big) = \big(F(g) \circ F(f)\big)(a)$$

ii) <u>Las funciones son inversas:</u> Claramente

$$\tau_F^A(h^a) = h^a(A)(1_A) = F(1_A)(a) = 1_{FA}(a) = a.$$

El otro caso requiere más trabajo, así pues, como $h^{\tau_F^A(\varphi)} \colon h^A \Rightarrow F$, se tiene que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Longrightarrow"] & h^A(A) \arrow[r, "\varphi(A)"] \arrow[d, "h^f"] & FA \arrow[d, "F(f)"] \\
B & h^A(B) \arrow[r, "\varphi(B)"'] & FB
\end{tikzcd}$$

luego

$$\begin{aligned} h^{\tau_F^A(\varphi)}(B)(f) &= F(f)\big(\varphi(A)(1_A)\big) = \big(\varphi(A) \circ F(f)\big)(1_A) \\ &= (h^f \circ \varphi(B))(1_A) = \varphi(B)(h^f(1_A)) = \varphi(B)(f). \end{aligned}$$ $\square$

En la demostración del lema de Yoneda ya lo hemos estado implicitando, pero he aquí la construcción deseada:

Corolario 1.33: La aplicación de Yoneda es una tranformación natural $\tau_{-}^{-}\colon \operatorname{Nat}(h^{-}, -) \Rightarrow \operatorname{ev}(-,-)$ sobre $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{Fun}(\mathscr{C}, \mathsf{Set})$.

Ésto se ve visualmente mediante el siguiente diagrama (donde las flechas en rojo son las transformaciones de Yoneda):

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Nat}(h^A, F) \arrow[rr, red] \arrow[dr] \arrow[dd] \arrow[dddr, dashed, "\operatorname{Nat}(h^f,\varphi)"'] & & FA \arrow[dr] \arrow[dd] \arrow[dddr, dashed, "\operatorname{ev}(f,\varphi)"] & \\
& \operatorname{Nat}(h^A, G) \arrow[rr, red] \arrow[dd] & & GA \arrow[dd] \\
\operatorname{Nat}(h^B, F) \arrow[rr, red] \arrow[dr] & & FB \arrow[dr] & \\
& \operatorname{Nat}(h^B, G) \arrow[rr, red] & & GB
\end{tikzcd}$$

También podemos dualizar a $\mathscr{C}$ para obtener que el lema de Yoneda nos da una biyección:

$$\operatorname{Nat}(h_X, F) \cong FX$$

donde $F \in \operatorname{Funct}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$. Luego podemos definir el ***encaje de Yoneda*** como el funtor $X \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-, X)$ sobre cada objeto, donde nótese que $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-, X)$ es un funtor contravariente de conjuntos. Así pues, $よ(X) := h_X$ y $よ(f) = h^f$ determinan un funtor $よ\colon \mathscr{C} \to \mathsf{Fun}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$.

Corolario 1.34: El encaje de Yoneda es un encaje pleno (i.e., un funtor plenamente fiel).

Demostración: Emplee $F = よ(Y)$. Luego obtenemos que $\operatorname{Hom}(よ(X), よ(Y)) \cong よ(Y)(X) = \operatorname{Hom}(X, Y)$. □

Corolario 1.35 (propiedad universal): Para todo par de objetos $X, Y \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ son equivalentes:

1. X, Y son isomorfos.
2. Los funtores h^A, h^B son naturalmente equivalentes.
3. Los funtores (contravariantes) h_A, h_B son naturalmente equivalentes.

En general, de aquí en adelante cuando digamos que dos objetos son isomorfos por propiedad universal nos referiremos a la proposición anterior.

Cerraremos la sección con una construcción bastante importante que generaliza las categorías de corte y de co-corte.

Definición 1.36: Dados dos funtores $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ y $F\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$, se le llama ***categoría «coma»*** (F,G) a la categoría conformada por:

1. **Objetos:** Ternas (A,f,B), donde $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{A}$, $B \in \operatorname{Obj}\mathscr{B}$ y $FA \xrightarrow{f} GB$ (en $\mathscr{C}$).
2. **Flechas:** $(A,f,B) \xrightarrow{(\alpha,\beta)} (A',f',B')$ si $A \xrightarrow{\alpha} A'$, $B \xrightarrow{\beta} B'$ y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
(A,f,B) \arrow[d, "{(\alpha,\beta)}"'] \\
(A',f',B')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & GB \arrow[d, "G(\beta)"] \\
FA' \arrow[r, "f'"'] & GB'
\end{tikzcd}$$

La flecha identidad de (A,f,B) es $(1_A,1_B)$ y la composición es la usual coordenada a coordenada.

Como adelanté, la categoría coma generaliza la construcción de categorías de corte y de co-corte: En efecto, sea $X \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$, podemos considerar el funtor constante $K_X\colon * \mapsto X$ (que manda flechas a 1_X), y entonces se satisface que $X/\mathscr{C} = (K_X, \mathrm{Id}_{\mathscr{C}})$ y $\mathscr{C}/X = (\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}, K_X)$.

Proposición 1.37: Sean $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ y $F\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ funtores. Asociado a la categoría coma se tienen dos funtores olvidadizos $U\colon (F,G) \to \mathscr{A}$ y $V\colon (F,G) \to \mathscr{B}$:

$$\begin{tikzcd}
(A,f,B) \arrow[d, "{(\alpha,\beta)}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{U}{\Longrightarrow}"] & A \arrow[d, "\alpha"] \\
(A',f',B') & A'
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
(A,f,B) \arrow[d, "{(\alpha,\beta)}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{V}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "\beta"] \\
(A',f',B') & B'
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.38: Sean $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ y $F\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ funtores. Sean $U'\colon \mathscr{D} \to \mathscr{A}$ y $V'\colon \mathscr{D} \to \mathscr{B}$ funtores con una transformación natural $\alpha\colon U' \circ F \Rightarrow V' \circ G$. Entonces existe un único funtor $W\colon \mathscr{D} \to (F,G)$ tal que $W \circ U = U'$, $W \circ V = V'$ y una única transformación natural $\alpha\colon U \circ F \Rightarrow V \circ G$ tal que $\alpha' = W * \alpha$. A forma de pseudodiagrama se tiene:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D} \arrow[drr, bend left, "U'"] \arrow[dr, dashed, "\exists ! W"] \arrow[ddr, bend right, "V'"'] & & \\
& (F,G) \arrow[r, "U"] \arrow[d, "V"'] & \mathscr{A} \arrow[d, "F"] \arrow[dl, Rightarrow, "\alpha"'] \\
& \mathscr{B} \arrow[r, "G"] & \mathscr{B}
\end{tikzcd}$$

Pista: El mismo pseudodiagrama es basta sugestivo, pero para ser formales, el funtor es el siguiente:

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[d, "f"'] & (U'D_1, \alpha'_{D_1}, V'D_1) \arrow[d, "(FU'f, GV'f)"] \\
D_2 \arrow[r, phantom, ""] & (U'D_2, \alpha'_{D_2}, V'D_2)
\end{tikzcd} \qquad \overset{W}{\Longrightarrow}$$

el resto de comprobaciones quedan al lector. $\square$

Otro ejemplo útil es el siguiente:

Definición 1.39: Sea $F\colon \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$ un funtor. Luego se define la categoría de «elementos de F», denotada por $\mathsf{Elts}(F)$, como aquella que consta de:

1. **Objetos:** Pares (A, a), donde $A \in \operatorname{Obj} \mathscr{C}$ y $a \in FA$.
2. **Flechas:** $(A, a) \xrightarrow{f} (B, b)$ si $A \xrightarrow{f} B$ (en $\mathscr{C}$) y $F(f)(a) = b$, donde la composición viene dado por la composición usual de flechas en $\mathscr{C}$ y la identidad es la flecha identidad de $\mathscr{C}$.

Para ver cómo ésta categoría es un ejemplo de categoría coma, nótese que $\mathsf{Set}^* = \{*\}/\mathsf{Set} = (K_{\{*\}}, \mathrm{Id}_{\mathsf{Set}})$ y análogamente $\mathsf{Elts}(F) = (K_{\{*\}}, F)$.

1.3 Clasificación de flechas

§1.3.1 Mono- y epimorfismos. Secciones y retracciones.

Definición 1.40: Sea $X \xrightarrow{f} Y$. Entonces f se dice:

Sección Si existe $Y \xrightarrow{g} X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "1_X"] \arrow[dr, "f"'] & & X \\ & Y \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

(La flecha punteada significa «existe»).

Retracción Si existe $Y \xrightarrow{g} X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "1_Y"] \arrow[dr, dashed, "g"'] & & Y \\ & X \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Una retracción es el dual de una sección. Si entre A y B existe una retracción, entonces se dice que A es una retracción de B.

Monomorfismo Si para todos $g, h \in \mathrm{Hom}(Z, X)$ tales que $g \circ f = h \circ f$, entonces $g = h$. En diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, hook, "f"] & \\ Z \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \\ & X \arrow[ur, hook, "f"'] & \end{tikzcd} \Longleftrightarrow g = h$$

A los monomorfismos les denotaremos con la flecha $\hookrightarrow$.

Epimorfismo Si para todos $g, h \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$ tales que $f \circ g = f \circ h$, entonces $g = h$. En diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[ur, two heads, "f"] \arrow[dr, two heads, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd} \Longleftrightarrow g = h$$

> Un epimorfismo es el dual de un monomorfismo. A los epimorfismos les denotaremos con la flecha $\twoheadrightarrow$.

Proposición 1.41: Sea $X \xrightarrow{f} Y$. Entonces:

1. f es monomorfismo (resp. epimorfismo) syss para todo $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ se cumple que $\mathscr{C}(A, f)$ (resp. $\mathscr{C}(f, A)$) es inyección.
2. f es una sección (resp. retracción) syss para todo $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ se cumple que $\mathscr{C}(f, A)$ (resp. $\mathscr{C}(A, f)$) es suprayectiva.

Proposición 1.42: Se cumplen las siguientes:

1. Toda sección (resp. retracción) es un monomorfismo (resp. epimorfismo).
2. La composición de monomorfismos (resp. epimorfismos) es un monomorfismo (resp. epimorfismos).
3. La composición de secciones (resp. retracciones) es una sección (resp. retracción).
4. Si $f \circ g$ es un monomorfismo (resp. epimorfismo), entonces f es un monomorfismo (resp. g es un epimorfismo).
5. Si $f \circ g$ es una sección (resp. retracción), entonces f es una sección (resp. g es una retracción).
6. Una flecha es un isomorfismo syss es una sección y una retracción a la vez.
7. Todo isomorfismo es un mono- y un epimorfismo a la vez.

Demostración: Veremos dos y el resto las dejamos al lector:

1. Sea $A \xrightarrow{f} B$ una sección y sea $B \xrightarrow{g} A$ tal que $f \circ g = 1_A$. Sean además $h_1, h_2 \in \operatorname{Hom}(C, A)$, luego como demuestra el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "f"] \arrow[drr, bend left, "1_A"] & & \\
C \arrow[ur, "h_1"] \arrow[dr, "h_2"'] & & B \arrow[r, "g"] & A \\
 & A \arrow[ur, "f"'] \arrow[urr, bend right, "1_A"'] & &
\end{tikzcd}
$$

se tiene que $h_1 = h_1 \circ 1_A = h_2 \circ 1_A = h_2$. Es análogo si f es una retracción.

2. Sean $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ monomorfismos. Y sean $h_1, h_2 \in \operatorname{Hom}(D, A)$ tales que $h_1 \circ (f \circ g) = h_2 \circ (f \circ g)$, luego como $(h_1 \circ f) \circ g = (h_2 \circ f) \circ g$, entonces $h_1 \circ f = h_2 \circ f$ (pues g es mónico) y en consecuencia $h_1 = h_2$ (pues f es mónico). □

Definición 1.43: Una categoría se dice ***balanceada*** si toda flecha que es un monomorfismo y un epimorfismo es un isomorfismo.

Ejemplo. Las categorías $\mathsf{Grp}, \mathsf{Ab}, \mathsf{Mod}_A$ son balanceadas. Por el contrario, Ring no es balanceada.

Proposición 1.44: En Set se cumplen:

1. Una función, cuyo dominio es no vacío, es inyectiva syss es sección syss es monomorfismo.
2. Una función es suprayectiva syss es epimorfismo.

Demostración:

1. <u>Inyectiva es sección:</u> Sea $f\colon A \to B$ inyectiva, como $A \neq \varnothing$ entonces $B \neq \varnothing$, de modo que sea $b \in B$. Luego sea $g\colon B \to A$ definido así:

$$g(y) := \begin{cases} f^{-1}(y), & y \in \operatorname{Img} f \\ b, & y \notin \operatorname{Img} f \end{cases}$$

   Claramente $f \circ g = \operatorname{Id}_A$.

   <u>Monomorfismo es inyectivo:</u> Sea $f\colon A \to B$ un monomorfismo y sean $f(a) = f(b)$. Luego sea $g\colon A \to A$ dado por

$$g(x) := \begin{cases} x, & x \neq a \\ b, & x = a \end{cases}$$

   nótese que $g \circ f = \operatorname{Id}_A \circ f$, luego por ser monomorfismo se da que $g = \operatorname{Id}_A$ y $a = b$.

2. <u>Suprayectiva es épica:</u> Sea $f\colon A \to B$ suprayectiva y sean $g, h\colon B \to C$, tales que $f \circ g = f \circ h$. Sea $x \in B$, entonces existe $y \in A$ tal que

$f(y) = x$, y luego $g(x) = g(f(y)) = h(f(y)) = h(x)$, en conclusión $g = h$.

Epimorfismo es suprayectivo: Lo probaremos por contrarrecíproca. Si $f\colon A \to B$ no es suprayectiva, entonces sea $b \in B \setminus \operatorname{Img} f$ y sea $\infty \notin B$. Luego definamos $g\colon B \to B \cup \{\infty\}$ así:

$$g(x) := \begin{cases} x, & x \neq b \\ \infty, & x = b \end{cases}$$

por lo que $f \circ g = f \circ \iota$, pero claramente $g \neq \iota$. □

Cabría preguntarse si ser epimorfismo es equivalente a ser retracción en Set, resulta que ésto es equivalente al axioma de elección (cf. [**38,** Teo. 3.31]).

Corolario 1.45: Set es una categoría balanceada.

Proposición 1.46: Se cumplen:

1. Los funtores preservan secciones y retracciones.
2. Los funtores plenos preservan monomorfismos y epimorfismos.
3. Los funtores fieles reflejan monomorfismos y epimorfismos.
4. Los funtores plenamente fieles reflejan isomorfismos.

Demostración: Son claras. La última es por propiedad universal. □

Corolario 1.47: Si $\mathscr{C}$ es una categoría concreta, entonces las funciones inyectivas (resp. suprayectivas) son monomorfismos (resp. epimorfismos).

§1.3.2 Subobjetos e imágenes.

Definición 1.48: Dado un objeto $X \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$, entonces un ***subobjeto*** de X es un monomorfismo de codominio X. Dados dos subobjetos f, g de X, entonces denotamos $f \leq g$ si existe un h tal que $h \circ g = f$; a forma de diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, hook, "g"] & & \\ & X \arrow[r, phantom, "\Longleftrightarrow"] & f \leq g \\ A \arrow[uu, dashed, "h"] \arrow[ur, hook, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

Se dice que dos subobjetos son ***equivalentes*** si dicho h es un isomorfismo.

Dualizando, dado un objeto $X \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$, se dice que f es un ***objeto cociente*** de X si es un epimorfismo de dominio X. Dados dos objetos cocientes f, g de X, entonces denotamos $f \leq g$ si existe un h tal que $g \circ h = f$; a forma de diagrama conmutativo:

$$f \leq g \iff \begin{tikzcd} & A \arrow[dd, dashed, "h"] \\ X \arrow[ur, two heads, "g"] \arrow[dr, two heads, "f"'] & \\ & B \end{tikzcd}$$

Se dice que dos objetos potencia son ***equivalentes*** si dicho h es un isomorfismo.

Corolario 1.49: Sean f, g dos subobjetos (resp. objetos cocientes) de X. Si $f \leq g$, entonces el h tal que $f = h \circ g$ (resp. $f = g \circ h$) es único y es un monomorfismo (resp. epimorfismo).

Proposición 1.50: Para todo $X \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ y todos f, g, h subobjetos (resp. objetos cocientes) de X se cumple:

1. $f \leq f$.
2. Si $f \leq g$ y $g \leq h$, entonces $f \leq h$.
3. Si $f \leq g$ y $g \leq f$, entonces f y g son equivalentes.

Definición 1.51: Sea $X \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$. Luego podemos definir $\operatorname{Sub} X$ como los subobjetos de X cocientados por la relación de equivalencia:

$$f \sim g \iff f \leq g \wedge g \leq f.$$

Y lo mismo podemos hacer con $\operatorname{Quot} X$ dado por los objetos cociente de X.

Se dice que una categoría $\mathscr{C}$ está ***bien potenciada*** (resp. ***bien copotenciada***)[4] si para todo objeto $X \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ se cumple que la clase $\operatorname{Sub} X$ (resp. la clase $\operatorname{Quot} X$) es un conjunto.

Luego el lema anterior se reduce en que $\operatorname{Sub} X$ y $\operatorname{Quot} X$ son clases parcialmente ordenadas por «$\leq$» en sentido canónico. Nótese que en ambos

[4] Debería ser «co-bien potenciada».

casos X es el máximo de dichas clases. Si $\mathscr{C}$ posee un objeto inicial $\mathbf{0}$, entonces es el mínimo de $\operatorname{Sub} X$, y si posee un objeto final $\mathbf{1}$, entonces es el mínimo de $\operatorname{Quot} X$ (cf. def. 1.54).

Ejemplo.

- Si $\mathscr{C}$ es una categoría pequeña, entonces claramente está bien potenciada y bien copotenciada.
- En Set: los subobjetos de un conjunto X están en correspondencia con los subconjuntos (salvo cardinalidad) de X, de modo que Set es una categoría bien potenciada. Asumiendo AE, $\operatorname{Quot} X$ coincide con $\operatorname{Sub} X$ de modo que también es bien copotenciada.
- En Grp: los subobjetos de un grupo G están en correspondencia con los subgrupos (salvo isomorfismo) de G, de modo que Grp está bien potenciada. Los objetos cociente coinciden (por el primer teorema de isomorfismos, [**37,** Teo. 1.55]) con los cocientes G/N donde $N \trianglelefteq G$ es un subgrupo normal; luego Grp también está bien copotenciada. ¿Qué sucede con Ab?
- En Ring: los subobjetos de un anillo A están en correspondencia con los subanillos, mientras que los objetos potencia están en correspondencia con los $A/\mathfrak{a}$ donde $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ es un ideal por ambos lados (ideal izquierdo y derecho). Luego Ring es una categoría bien potenciada y bien copotenciada.
- En Mod_A: los subobjetos de un A-módulo (izquierdo) coinciden con los submódulos, mientras que los objetos potencia están en correspondencia con los M/N donde $N \leq M$. Luego Mod_A es una categoría bien potenciada y bien copotenciada.
- En Top: los subobjetos son un poco más complicados, pero si $(X, \mathcal{T})$ es una espacio topológico, entonces los subobjetos están en correspondencia con $(Y, \mathcal{S})$ donde $Y \subseteq X$ y $\mathcal{S}$ es una topología más fuerte que la topología subespacio. En cualquier caso, Top está bien potenciada.

En la práctica, casi todas las categorías que uno considera son bien potenciadas y bien copotenciadas. Veamos un contraejemplo, pero el lector juzgará que tan (anti)natural es:

- Sea X una clase parcialmente ordenada y considere $\mathscr{C} := \mathsf{Poset}(X)$. Como los Hom's tienen a lo más un objeto, todas las flechas son monomorfismos y epimorfismos; luego para $x \in X$ se cumple que $\operatorname{Sub} X = O_{\leq}(x) = \{a \in X : a \leq x\}$ y $\operatorname{Quot} X = O_{\geq}(x) = \{b \in$

$X : x \leq b\}$. Eligiendo un X apropiado, se puede dar que $\mathscr{C}$ no esté bien (co)potenciada; por ejemplo, puede considerar $X := \Omega_{\mathrm{Ord}}$, la clase de todos los ordinales, y ver que no está bien copotenciada.

Definición 1.52: Sea $A \xrightarrow{f} B$ una flecha, se dice que $I \xrightarrow{i} B$ es la imagen de f syss es el mínimo subobjeto de B tal que existe $A \xrightarrow{\bar{f}} I$ tal que $f = \bar{f} \circ i$. Visualmente para todo S, el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "\bar{f}"'] \arrow[dr, dashed] & B \\
I \arrow[ur, hook] \arrow[r, dashed, hook] & S \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

conmuta. Se dice que la imagen de una flecha es ***epimórfica*** si $\bar{f}$ es un epimorfismo (en el diagrama anterior).

Se dice que una categoría ***posee imágenes (epimórficas)*** si toda flecha posee imagen (epimórfica).

Proposición 1.53: Si $\mathscr{C}$ es una categoría balanceada, $A \xrightarrow{f} B$ posee imagen y existe un subobjeto $S \xrightarrow{i} B$ tal que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "\tilde{f}"'] & & B \\
& S \arrow[ur, hook, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta; entonces S es la imagen de f.

Demostración: Sea I la imagen de f, luego se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\tilde{f}"'] \arrow[dr, "\bar{f}"] & B \\
S \arrow[ur, dashed, hook] & I \arrow[l, hook', "\iota"] \arrow[u, dashed, hook]
\end{tikzcd}$$

Pero $\tilde{f} = \bar{f} \circ \iota$ y $\tilde{f}$ es epimorfismo, luego ι es mono- y epimorfismo, es decir, es isomorfismo entre S y la imagen de f, es decir, S es la imagen de f. $\square$

1.4 Objetos terminales y (co)productos

Definición 1.54: Se dice que un objeto X de una categoría $\mathscr{C}$ es ***inicial*** (resp. ***final***) syss para todo objeto A existe una única flecha $X \xrightarrow{f} A$ (resp. $A \xrightarrow{f} X$). Nótese que las nociones de inicial y final son duales.

Un objeto es un ***objeto nulo*** si es inicial y final.

En general la notación es la siguiente: si $\mathscr{C}$ posee un objeto inicial, le denotamos $\mathbf{0}$ y si posee un objeto final, le denotamos $\mathbf{1}$ (con negritas). Si $\mathscr{C}$ posee un objeto nulo, entonces le denotamos 0 (sin negritas). El uso de negritas se realiza para evitar confusiones con las flechas y porque recuerda a los retículados y las álgebras booleanas, la carencia de negritas para objetos nulos es una costumbre del álgebra homológica para las categorías abelianas.

Proposición 1.55: En una categoría, todos los objetos iniciales (resp. finales) son isomorfos entre sí. Más aún, el isomorfismo entre éstos es único.

Demostración: Sean I_1, I_2 objetos iniciales. Por definición existen $I_1 \xrightarrow{f} I_2$ y $I_2 \xrightarrow{g} I_1$ que son las únicas flechas entre ambos. Luego, se cumple que $I_1 \xrightarrow{f \circ g} I_1$, por ende $f \circ g = \mathrm{Id}_{I_1}$ y análogamente $g \circ f = \mathrm{Id}_{I_2}$. Ergo f, g son isomorfismos. □

Ejemplo. Se cumplen:

- En Set: $\varnothing$ es el único objeto inicial, mientras que los conjuntos singulares son los objetos finales.
- En Grp: el objeto nulo es el grupo trivial $\{e\}$.
- En Ring: el objeto inicial es $\mathbb{Z}$ y el objeto final es el anillo nulo $\{0\}$.
- Sea $(X, \leq)$ un conjunto preordenado. El objeto inicial (resp. final) de $\mathsf{Poset}(X)$ es el mínimo (resp. máximo) del conjunto (si existen). *Ojo* que un elemento minimal que no sea mínimo no es un objeto inicial.
- En una categoría de corte $\mathscr{C}/A$ (resp. de co-corte $A/\mathscr{C}$), el objeto A es final (resp. inicial). Recíprocamente si A es un objeto inicial (resp. final) de $\mathscr{C}$, entonces $\mathscr{C}$ es isomorfa a $A/\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{C}/A$).
- En particular, en Ring_n el objeto inicial es $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. En Alg_A el objeto inicial es A. En Ext_k el objeto inicial es k.

Una trivialidad, que no deja de ser útil:

Proposición 1.56: Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto inicial $\mathbf{0}$ (resp. objeto final $\mathbf{1}$). Toda flecha $X \to \mathbf{0}$ (resp. $\mathbf{1} \to X$) es una retracción (resp. sección).

(Ojo que éstas *no* son las flechas canónicas.)

Definición 1.57: Se dice que una flecha $X \xrightarrow{f} Y$ es ***nula por la izquierda*** si para todo $g, h \in \operatorname{Hom}(X', X)$ se cumple que $g \circ f = h \circ f$. O que es ***nula por la derecha*** si para todo $g, h \in \operatorname{Hom}(Y, Y')$ se cumple que $f \circ g = f \circ h$.

Una flecha es ***nula*** si es nula por la izquierda y por la derecha.

Proposición 1.58: Se cumplen las siguientes:

1. Sea $A \xrightarrow{f} B$, entonces f es nula por la izquierda (resp. nula por la derecha) syss para todo $C \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ se cumple que la función $\mathscr{C}(C, f)$ (resp. $\mathscr{C}(f, C)$) es constante.

2. Si $A \xrightarrow{f} B$ es nula por la izquierda y $B \xrightarrow{g} C$ es nula por la derecha, entonces $f \circ g$ es nula.

3. Si $\mathbf{0}$ es un objeto inicial (resp. $\mathbf{1}$ es un objeto final), entonces toda flecha $\mathbf{0} \xrightarrow{f} X$ (resp. $X \xrightarrow{f} \mathbf{1}$) es nula por la derecha (resp. nula por la izquierda).

4. Si 0 es un objeto nulo, entonces todas las flechas $A \xrightarrow{f} 0$ y $0 \xrightarrow{g} B$ son nulas y, en consecuencia, $A \xrightarrow{f \circ g} B$ es nula.

Corolario 1.59: Toda categoría con objetos nulos posee flechas nulas.

Ejemplo 2: Son categorías con objetos nulos y flechas nulas:

- Grp: donde el objeto nulo es el grupo trivial $0 := \{e\}$ y las flechas nulas son los homomorfismos constantes que toman el valor del elemento neutro.

- Rng: donde el objeto nulo es el anillo trivial y las flechas nulas son las constantes que valen cero.

- Set^*: donde un objeto nulo es cualquier conjunto singular y la flecha nula es la única constante admisible.
- Top^*: donde un objeto nulo es cualquier espacio singular y la flecha nula es la única constante admisible.

Definición 1.60: Sean $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. Un par (K, k) se dice un ***ecualizador*** de f, g si:

1. K es un objeto y $K \xrightarrow{k} X$ tales que $k \circ f = k \circ g$.
2. Si existe otro $M \xrightarrow{m} X$ tal que $m \circ f = m \circ g$, entonces existe una única flecha $M \xrightarrow{n} K$ tal que $m = n \circ k$. Es decir, si el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, dashed, "\exists! n"'] \arrow[dr, "m"] & & \\ K \arrow[r, "k"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta.[5]

El dual de un ecualizador es un ***coecualizador*** entre f, g, el cual es un par (C, c) tal que:

1. C es un objeto e $Y \xrightarrow{c} C$ tal que $f \circ c = g \circ c$.
2. Si existe otro $Y \xrightarrow{m} M$ tal que $f \circ m = g \circ m$, entonces existe una única flecha $C \xrightarrow{n} M$ tal que $m = c \circ n$. Es decir, si el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & & M \\ A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[ur, "m"] \arrow[r, "c"'] & C \arrow[u, dashed, "\exists! n"'] \end{tikzcd}$$

conmuta.

Filosóficamente, la segunda condición de un ecualizador dice que corresponde al objeto final que satisface la primera propiedad.

[5] Aquí debe subentenderse que f y g no son necesariamente iguales, pero que el resto de composiciones si conmutan en el diagrama.

Corolario 1.61: Se cumple:

1. Sean $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ que poseen dos ecualizadores (K, k) y (K', k'); entonces existe un único isomorfismo $K \xrightarrow{\phi} K'$ tal que $k' = \phi \circ k$.

2. Sean $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ que poseen dos coecualizadores (C, c) y (C', c'); entonces existe un único isomorfismo $C \xrightarrow{\phi} C'$ tal que $c' = \phi \circ c$.

Demostración: Veamos la 1: El siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, dashed, "\exists!\phi"] \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[dd, "1_K"'] & & & \\
& K' \arrow[r, dashed, "k'"] \arrow[dl, dashed, "\exists!\psi"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
K \arrow[urr, bend right, "k"'] & & &
\end{tikzcd}$$

comprueba que $\phi \circ \psi = 1_K$ por la unicidad de las flechas. Análogamente se comprueba que $\psi \circ \phi = 1_{K'}$. □

Por ello se denota $\ker(f, g)$ al ecualizador de f, g y $\mathrm{coker}(f, g)$ al coecualizador.

Proposición 1.62: Todo ecualizador (resp. coecualizador) es un monomorfismo (resp. epimorfismo).

Demostración: Sean $f, g \in \mathrm{Hom}(A, B)$ y $K = \ker(f, g)$ con $K \xrightarrow{k} A$ la flecha que ecualiza. Sean $h, j \in \mathrm{Hom}(C, K)$ tales que $h \circ k = j \circ k$. Entonces $h \circ (k \circ f) = h \circ (k \circ g)$, es decir, $h \circ k$ ecualiza a f, g; luego, por definición de ecualizador, existe una única flecha n de C a K tal que $n \circ k = h \circ k$, es decir, $n = h = j$. □

Proposición 1.63: Toda sección (resp. retracción) es un ecualizador (resp. coecualizador).

Demostración: Sea $A \xrightarrow{f} B$ una sección de inversa derecha g, i.e., $1_A = f \circ g$. Afirmamos que $f = \ker(g \circ f, 1_B)$. Claramente

$$f \circ 1_B = f = 1_A \circ f = (f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f).$$

Sea $M \xrightarrow{m} B$ tal que $m \circ (g \circ f) = m$, luego se cumple que

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "m\circ g"'] \arrow[dr, "m"] & & \\
A \arrow[r, hook, "f"'] & B \arrow[r, shift left, "g\circ f"] \arrow[r, shift right, "1_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

pero f es monomorfismo (por ser sección), así que $m \circ g$ es la única que hace conmutar el diagrama anterior. □

Teorema 1.64: Un ecualizador (resp. coecualizador) que es también un epimorfismo (resp. monomorfismo) es de hecho un isomorfismo.

Demostración: Sea $f = \ker(g, h)$, vale decir, $f \circ g = f \circ h$, y como f es epimorfismo, entonces $g = h$. Luego $1 \circ g = 1 \circ h$, por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, dashed, "\exists! k"'] \arrow[dr, "1_A"] & & \\
C \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & B
\end{tikzcd}$$

Es decir, $k \circ f = 1_A$. Nótese que $(f \circ k) \circ f = f$, así pues $f \circ k \circ f$ ecualiza a g, h, por lo que sólo existe una flecha j tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] & A \\
C \arrow[u, "\exists! j"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Ya vimos que $f \circ k$ hace conmutar el diagrama y claramente 1_C también, así que $f \circ k = 1_C$. □

Definición 1.65: Si $\mathscr{C}$ es una categoría con flechas nulas, entonces dada una flecha $X \xrightarrow{f} Y$, se le llama su ***núcleo***[6] a $\ker(f, 0_{X,Y})$, simplemente denotado $\ker f$. Análogamente, su ***conúcleo*** es $\operatorname{coker}(f, 0_{X,Y})$, simplemente denotado $\operatorname{coker} f$.

Ejemplo.
- En Grp: El kernel es exactamente lo que uno llama kernel, es decir, $\ker(f) := \{x : f(x) = 1\}$, donde 1 es el neutro.

[6] ge. *kernel*.

- En Rng: El kernel es exactamente lo que uno llama kernel, es decir, $\ker(f) := \{x : f(x) = 0\}$.

- En Mod_R: El kernel es exactamente lo que uno llama kernel, es decir, $\ker(f) := \{\boldsymbol{v} : f(\boldsymbol{v}) = \vec{0}\}$.

- En Set^* y Top^*: El kernel entre dos funciones f, g es

$$\ker(f, g) = \{x : f(x) = g(x)\}$$

  también aplica para las flechas nulas (que son las constantes que respetan puntos distinguidos). Un teorema dice que en Haus^* los núcleos son subespacios cerrados.

En $\mathsf{Grp}, \mathsf{Rng}$ y Mod_R es conocido el teorema que dice que una aplicación es inyectiva syss el núcleo es nulo. Menos conocido es que, cuando existen los conúcleos, una aplicación es suprayectiva syss el conúcleo es también nulo. Ésto tiene una generalización parcial:

Proposición 1.66: Sea $\mathscr{C}$ una categoría con flechas nulas. Entonces si f es monomorfismo (resp. epimorfismo), entonces $\ker f$ (resp. $\operatorname{coker} f$) es una flecha nula.

Otra proposición que será importante más adelante:

Proposición 1.67: Si $\mathscr{C}$ posee flechas nulas y $B \xrightarrow{g} X$ es un monomorfismo, entonces para todo $A \xrightarrow{f} B$ se satisface que $\ker(f \circ g) = \ker f$.

Nótese que ésto generaliza la proposición anterior.

Definición 1.68 (Productos y coproductos): Dados los objetos de una categoría A, B; entonces decimos que un objeto P es el ***producto*** de A con B si está dotado de unas flechas $P \xrightarrow{\pi_1} A$ y $P \xrightarrow{\pi_2} B$ que llamamos ***proyecciones naturales***, tal que para todo objecto C con flechas $C \xrightarrow{f} A$ y $C \xrightarrow{g} B$ existe una única flecha denotada $h := (f, g)$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
C \arrow[r, dashed, "\exists! h"] \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & P \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Así mismo, se dice que Q es el ***coproducto*** de A con B si está dotado de unas flechas $A \xrightarrow{\iota_A} Q$ y $B \xrightarrow{\iota_B} Q$, que llamamos ***inclusiones naturales***, tal que para todo objeto C con flechas $A \xrightarrow{f} C$ y $B \xrightarrow{g} B$ existe una única flecha denotada $h := f \amalg g$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "\iota_A"] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
 & Q \arrow[r, dashed, "\exists! h"] & C \\
B \arrow[ur, "\iota_B"'] \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Corolario 1.69: Se cumple:

1. Si P es el producto de A con B, y $P \xrightarrow{\pi_A} A$, $P \xrightarrow{\pi_B} B$ son proyecciones naturales; y existen otras proyecciones naturales $P \xrightarrow{\tau_A} A$ y $P \xrightarrow{\tau_B} B$. Entonces existe un automorfismo f tal que $f\pi_A = \tau_A$ y $f\pi_B = \tau_B$.

2. Si Q es el coproducto de A con B, y $A \xrightarrow{\iota_A} Q$, $B \xrightarrow{\iota_B} Q$ son inclusiones naturales; y existen otras inclusiones naturales $A \xrightarrow{\eta_A} Q$, $B \xrightarrow{\eta_B} Q$. Entonces existe un automorfismo f tal que $\iota_A f = \eta_A$ y $\iota_B f = \eta_B$.

3. Todos los productos (resp. coproductos) entre A y B son isomorfos entre sí.

Demostración: Probaremos la primera ya que el resto son análogas:
Por definición notemos que existe un único f tal que $f\pi_A = \tau_A$ y $f\pi_B = \tau_B$. Así mismo, existe un único g tal que $g\tau_A = \pi_A$ y $g\tau_B = \pi_B$. Luego $g\tau_A = g(f\pi_A) = \pi_A$ y $gf\pi_B = \pi_B$; notemos que Id_P cumple que $\mathrm{Id}_P \pi_A = \pi_A$ y $\mathrm{Id}_P \pi_B = \pi_B$; en consecuente, $gf = fg = \mathrm{Id}_P$, por ende $f = g^{-1}$ y ambos son automorfismos. $\square$

Por ésto, denotamos $A \times B$ el producto general de objetos (si existe) y $A \amalg B$ el coproducto general de objetos (si existe).

Ejemplo.

- En Set: el producto categorial corresponde al producto cartesiano de conjuntos y el coproducto a la unión disjunta.
- En Top: el producto categorial corresponde a la topología producto y el coproducto a la suma de espacios (cf. [**39,** Def. 2.77]).
- En Grp: el coproducto corresponden a la suma directa de grupos. En Ab además el producto también coincide con la suma directa.
- En Mod_R: el producto categorial y el coproducto corresponden al producto directo de módulos. Lo mismo ocurre en la subcategoría Vect_k.
- En Ext_k: el producto y coproducto se comportan de manera curiosa. Sea K/k una extensión de cuerpos y sean $K/L_1/k$ y $K/L_2/k$ subextensiones, entonces

$$L_1 \times L_2 \cong L_1 \cap L_2, \quad L_1 \amalg L_2 \cong L_1 \vee L_2.$$

Proposición 1.70: Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$, entonces:

1. Si $\mathscr{C}$ posee un objeto inicial $\mathbf{0}$, entonces $A \amalg \mathbf{0} \cong A$.
2. Si $\mathscr{C}$ posee un objeto final $\mathbf{1}$, entonces $A \times \mathbf{1} \cong A$.

De hecho, podemos fácilmente generalizar la definición de (co)producto para cardinalidades arbitrarias:

Definición 1.71: Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de objetos de una categoría $\mathscr{C}$. Un producto $\prod_{i\in I} A_i$ es un objeto con flechas $\prod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\pi_j} A_j$ tal que para toda colección de flechas $(B \xrightarrow{f_i} A_i)_{i\in I}$ existe una única flecha $B \xrightarrow{g} \prod_{i\in I} A_i$ tal que $g \circ \pi_j = f_j$.

Un coproducto es la noción dual y se denota $\coprod_{i\in I} A_i$.

Proposición 1.72: Sean $\{X_i\}_{i\in I}$ objetos de una categoría arbitraria $\mathscr{C}$. Si $\prod_{i\in I} X_i$ existe, entonces para todo $Y \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$:

$$\operatorname{Hom}\left(Y, \prod_{i\in I} X_i\right) \cong \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}(Y, X_i).$$

Si $\coprod_{i\in I} X_i$ existe, entonces para todo $Y \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$:

$$\operatorname{Hom}\left(\coprod_{i\in I} X_i, Y\right) \cong \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}(X_i, Y).$$

Definición 1.73: Dado $Z \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$. Un ***producto fibrado***[7] es un producto en la categoría de corte $\mathscr{C}/Z$. (Como ejercicio intente deducir la definición desde aquí.) Es decir, dados $X \xrightarrow{f} Z$ e $Y \xrightarrow{f} Z$; un producto fibrado es un objeto y flecha $X \times_Z Y \xrightarrow{f\times g} Z$ tales que:

$$\begin{tikzcd}
& X \times_Z Y \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[dd, "f\times g"] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

Y además, si $T \xrightarrow{h} Z$ satisface lo anterior, entonces se satisface el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "\exists!"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X \times_Z Y \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

En éste caso π_1 se dice el ***retracto*** de f mediante g; y π_2 es el retracto de g mediante f.

Para dualizar el concepto hay que tener cuidado. Un ***coproducto fibrado***[8] es un coproducto, pero no en la categoría de corte, sino en la de *co*corte $Z/\mathscr{C}$. Es decir, dados $Z \xrightarrow{f} X$ y $Z \xrightarrow{g} Y$, corresponde a un objeto y una flecha $Z \xrightarrow{f \amalg g} X \amalg_Z Y$ tales que:

[7] eng. *pullback*.

[8] eng. *pushout*. La notación «(co)producto fibrado» nace de la topología algebraica.

$$\begin{tikzcd}
T & & \\
& X \amalg_Z Y \arrow[ul, dashed, "\exists!"] & Y \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[ull, bend right] \\
& X \arrow[u, "\iota_1"] \arrow[uul, bend left] & Z \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

conmuta.

En algunos casos, será útil denotar que P es el producto fibrado de α, β o que Q es el coproducto fibrado de γ, δ con los símbolos $\ulcorner$ y $\lrcorner$ resp.:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & A \arrow[d, "\alpha"] \\
B \arrow[r, "\beta"] & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & A \arrow[d] \\
B \arrow[r] & Q \arrow[ul, phantom, "\lrcorner", very near start]
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.74 (lema de productos fibrados): Dado el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

entonces:

1. Si los dos cuadrados internos son productos fibrados, entonces el rectángulo externo también lo es.

2. Si el cuadrado derecho y el rectángulo externo son productos fibrados, entonces el cuadrado izquierdo también lo es.

Nótese que con la notación $\ulcorner$, el teorema adquiere otro tipo de mnemotecnia:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.75: $A \xrightarrow{f} B$ es un monomorfismo syss el siguiente diagrama representa un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & A \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Indirectamente puede mejorarse a la siguiente proposición:

Proposición 1.76: Sea $A \xrightarrow{f} B$ y sea $\ker(f,f) \to A$ el ecualizador de f consigo mismo, entonces el siguiente diagrama representa un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
\ker(f,f) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & A \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.77: Dado el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & B \arrow[d, "\beta"] \\
C \arrow[r, "g"'] & D
\end{tikzcd}$$

donde A es el producto fibrado de g, β. Si g es monomorfismo, entonces f también es monomorfismo.

Demostración: Basta construir el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "1_A"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & A \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & B \arrow[d, "\beta"] \\
C \arrow[r, "1_C"] \arrow[d, "1_C"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & C \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "g"] & D \\
C \arrow[r, "g"] & D &
\end{tikzcd}$$

y notar que los dos rectángulos son el mismo diagrama, y que empleando el lema de los productos fibrados se puede ir comprobando que cada subcuadrado es un producto fibrado. □

Notas históricas

Las categorías fueron inventadas por los estadounidenses **Saunders Mac Lane** y **Samuel Eilenberg** en su artículo [**24**] (1945): en el cuál se presentan las definiciones de categoría, funtor, transformación natural, límites directos (allí llamados *límites proyectivos*) y el cómo emplear el lenguaje categorial sobre el álgebra homológica en topología. Ambos eran topólogos y enfatizaban la necesidad de las categorías para la topología, aunque Eilenberg se especializaría en topología algebraica los años posteriores, mientras que Mac Lane sería más cercano a temas como el álgebra, la filosofía y la lógica. El artículo fue «cuidadosamente preparado» tomando unas extensas 64 páginas puesto que «Eilenberg creía firmemente que sería el único trabajo en el tema». El término «categoría» estaba inspirado en la *Crítica de la razón pura* de Immanuel Kant, mientras que «funtor» era original de *La sintaxis lógica del lenguaje* de Rudolf Carnap (cf. [**21**]). Respecto al caracter filosófico de las categorías, Mac Lane sería también más tarde el primero en postular a la teoría de categorías como una posible teoría de fundamentos para las matemáticas.

Respecto al origen de las categorías, señala Mac Lane [**4,** pág. 26]:

> La idea fundamental de representar un función mediante una flecha surgió en topología en los años cuarenta, probablemente en artículos o lecturas de W. Hurewicz sobre grupos de homotopía relativa [...].
>
> La flecha $f\colon X \to Y$ rápidamente reemplazó la notación ocasional de $f(X) \subset Y$ para una función. Expresaba un interés central en la topología. Así, una notación (la flecha) dió paso a un concepto (las categorías).

Ahora bien, una aclaración usual es que las categorías no deberían describirse como el estudio de objetos y flechas puesto que ésto conlleva a una impresición histórica. Varios autores señalan ésto, por ejemplo Freyd [**3,** pág. 1]:

> Si la topología fuese descrita públicamente como el estudio de familias de conjuntos cerradas bajo intersecciones finitas y uniones

> infinitas, un severo perjuicio sería cometido contra estudiantes primerizos de la topología. La corrección matemática de tal definición no revela más que los axiomas básicos pueden ser bastante sencillos, y con la teoría de categorías nos enfrentamos al mismo problema pedagógico. [...]
>
> Una mejor [...] descripción de la topología es que es el estudio de las funciones continuas; y la teoría de categorías es, asi mismo, mejor descrita como el estudio de los funtores.

O, por dar otro ejemplo, los mismos Eilenberg y Mac Lane señalan que «debería observarse que el concepto completo de categoría es esencialmente auxiliar; nuestras nociones básicas son en esencia las de funtor y de transformación natural».[9]

En 1945, durante el periodo posguerra, Eilenberg y Mac Lane estaban trabajando en el Grupo de Matemáticas Aplicadas de (la Universidad de) Columbia (abrev., AMG-C). Durante dicho periodo, ambos tuvieron una fuerte influencia sobre varios estudiantes y comenzaron a establecer una «escuela de categorías» entre la cual se incluyen: John Gray, Daniel Kan, Bill Lawvere, Mike Barr, Jon Beck, Alex Heller, Peter Freyd y otros.

El lema de Yoneda fue invención del profesor nipón **Noburo Yoneda** como parte de una demostración en un artículo suyo en 1954. Tras el fallecimiento de Yoneda, un colega de él escribe lo siguiente [**20**]**:**

> A Yoneda le gustaba contar los orígenes de [su] lema como sigue. Cuando él llegó a Princeton, Eilenberg se mudó [...] a Francia (o quizás, Eilenberg dejó los EEUU. justo después del aterrizaje de Yoneda). Así que Yoneda fue a Francia un año después. En aquél entonces, Saunders Mac Lane estaba visitando a teoristas de categorías, aparentemente para obtener información para su libro, y allí conoció al joven Yoneda, entre otros. La entrevista ocurrió en un Café en Gare du Nord, y siguió y siguió incluso hasta la partida del tren de Yoneda. Los contenidos de esta charla fueron luego bautizados por Mac Lane como el lema de Yoneda. [...] Ésto debió ser un buen recuerdo para Yoneda; le he escuchado contar esta historia en un sinfín de ocasiones. ¡Desconozco si Mac Lane alcanzó a abandonar el tren antes de la partida!

[9] *It should be observed first that the whole concept of a category is essentially an auxiliary one; our basic concepts are essentially those of a functor and of a natural transformation* [**24,** pág. 247].

En un artículo de Grothendieck **[0]** (1960) también aparece una versión del lema de Yoneda.

2

Límites

Es claro que la teoría de categorías apunta a generalizar las nociones básicas encontradas especialmente en teorías algebraicas. En éste capítulo generalizaremos, en simultáneo, todas las definiciones introducidas al final del primer capítulo.

2.1 Diagramas

§2.1.1 Definiciones elementales y todo son límites. Los límites son quizás una de las definiciones más importantes, pero también más sutiles, de la teoría de categorías. Comenzaremos con una definición preliminar:

Definición 2.1: Se le llama un ***diagrama*** en $\mathscr{C}$ a un funtor fiel $A_{\_} : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tal que $\mathscr{D}$ es una categoría pequeña a la que llamamos ***categoría de índices***.

Es importante que el dominio sea una categoría pequeña, el por qué radica en la proposición 2.9.

La idea está en que $\mathscr{D}$ representa la *forma* del diagrama, por ejemplo, el siguiente dibujo representa un diagrama (en el sentido formal de la palabra):

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[dr] & 2 \arrow[d] \arrow[rr, Rightarrow, bend right, "A_-"'] & & A_1 \arrow[r] \arrow[dr] & A_2 \arrow[d] \\
& 3 & & & A_3
\end{tikzcd}$$

Definición 2.2: Dado un diagrama $A_- : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, un ***cono*** consiste de:

1. $C \in \operatorname{Obj} \mathscr{C}$, un objeto.
2. Para cada $i \in \operatorname{Obj} \mathscr{D}$, una flecha $C \xrightarrow{p_i} A_i$.

Tales que para todo $i \xrightarrow{f} j$ en $\mathscr{D}$ se cumpla que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\
A_i \arrow[rr, "Ff"'] & & A_j
\end{tikzcd}$$

conmute. Lo anterior se resume en «$(C, (p_i)_{i \in \mathscr{D}})$ es un cono».

La noción dual es un ***cocono***, que consiste de:

1. $C \in \operatorname{Obj} \mathscr{C}$, un objeto.
2. Para cada $i \in \operatorname{Obj} \mathscr{D}$, una flecha $A_i \xrightarrow{q_i} C$.

Tales que para todo $i \xrightarrow{f} j$ en $\mathscr{D}$ se cumpla que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[rr, "Ff"] \arrow[dr, "q_i"'] & & A_j \arrow[dl, "q_j"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

conmute.

Ejemplo. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Un diagrama S de $\mathsf{Poset}(X)$ puede verse como un subconjunto de X, entonces un un cono (resp. cocono) de S no es más que una cota inferior (resp. cota superior).

El ejemplo anterior clarifica bastante hacia donde llevamos el concepto, pero queremos que el lector lo piense. El límite es el máximo de las cotas inferiores, o en nuestro caso, algo así como el *objeto final* de los conos.

Definición 2.3: Dado un diagrama $A_{-} : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, se dice que un ***límite inverso*** (o simplemente *límite*) es un cono $(L, (p_i)_{i\in\mathscr{D}})$ tal que si $(C, (p'_i)_{i\in\mathscr{D}})$ es otro cono, se cumple que existe una única flecha $C \xrightarrow{\phi} L$ tal que para todo $i \in \mathscr{D}$ se cumple que $p'_i = \phi \circ p_i$. En diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & A_j \\
C \arrow[r, dashed, "\exists!\phi"] \arrow[urr, bend left, "p'_j"] \arrow[drr, bend right, "p'_i"'] & L \arrow[ur, "p_j"] \arrow[dr, "p_i"'] & \\
 & & A_i \arrow[uu, "Ff"']
\end{tikzcd}$$

Así mismo, un ***límite directo*** (o simplemente *colímite*) es un cocono $(L, (q_i)_{i\in\mathscr{D}})$ tal que si $(C, (q'_i)_{i\in\mathscr{D}})$ es otro cocono, se cumple que existe una única flecha $L \xrightarrow{\phi} C$ tal que para todo $i \in \mathscr{D}$ se cumple que $q'_i = q_i \circ \phi$. En diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A_j \arrow[dr, "q_j"] \arrow[drr, bend left, "q'_j"] & & \\
 & L \arrow[r, dashed, "\exists!\phi"] & C \\
A_i \arrow[uu, "Ff"] \arrow[ur, "q_i"'] \arrow[urr, bend right, "q'_i"'] & &
\end{tikzcd}$$

Inmediatamente debería probarse:

Proposición 2.4: Si un diagrama en $\mathscr{C}$ posee límites (resp. colímites) entonces todos ellos son isomorfos.

Por ello hablamos de «el» (co)límite incluso cuando un diagrama puede tener varios. El límite inverso de un diagrama F se denota $\varprojlim F$ (haciendo énfasis en que el objeto tiene flechas anteriores a los objetos) y el límite directo se denota $\varinjlim F$ (por analogía).

Ejemplo.

- En Set: Sea $\{A_i\}_{i\in\mathscr{D}}$ un diagrama discreto, entonces

$$\varprojlim_{i\in\mathscr{D}} A_i = \prod_{i\in\mathscr{D}} A_i, \qquad \varinjlim_{i\in\mathscr{D}} A_i = \coprod_{i\in\mathscr{D}} A_i.$$

Donde $\coprod$ es la unión disjunta de conjuntos.

Algo análogo sucede en Top, en donde $\coprod$ es la suma de espacios.

- En $\mathsf{Poset}(X)$: Sea S un subconjunto no vacío de X, entonces (si existen) se satisface que

$$\varprojlim_{x \in S} x = \inf S, \qquad \varinjlim_{x \in S} x = \sup S.$$

En particular, si $X = \mathcal{P}(Y)$, entonces

$$\varprojlim_{i \in \mathscr{D}} A_i = \bigcap_{i \in \mathscr{D}} A_i, \qquad \varinjlim_{i \in \mathscr{D}} A_i = \bigcup_{i \in \mathscr{D}} A_i.$$

- En Grp: Se cumple que

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{N}_{\neq 0}} \frac{1}{n}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}.$$

Similarmente, en Ring, fijado un dominio íntegro D se cumple que $\mathrm{Frac}(D) = \varinjlim_S S^{-1}D$, donde S recorre todos los sistemas multiplicativos de D (cf. [**37,** Def. 6.6]).

- En Ext_k: Hay varios ejemplos de límites y colímites. Por ejemplo, sea $p(x)$ un polinomio irreducible y α una raíz de $p(x)$, entonces $k(\alpha)$ es el límite inverso de las extensiones donde $p(x)$ tiene raíces.

Si K/k es una extensión, entonces su clausura normal (cf. [**37,** Def. 4.25]) es el límite inverso de las extensiones normales de K.

Si $p(x)$ es un polinomio, entonces el cuerpo de escisión es el límite inverso de las extensiones donde $p(x)$ se escinde.

La clausura algebraica es el límite directo de las extensiones algebraicas y, equivalentemente, el límite inverso de las extensiones algebraicamente cerradas.

- En Top: Si X es un espacio topológico no compacto, entonces

$$\varprojlim_{c} cX = \beta X, \qquad \varinjlim_{c} cX = \alpha X$$

donde c recorre todas las compactificaciones de X, y donde αX es la compactificación de Alexandroff (cf. [**39,** Teo. 3.82]) y βX la compactificación de Čech-Stone (cf. [**39,** Def. 3.84]).

Ya hemos visto un par de ejemplos de límites, ¿pero qué más? Tal como advertimos al inicio: ¡todo es un tipo de límite! Por ejemplo:

Proposición 2.5: Dado un diagrama finito y discreto en $\mathscr{C}$, el límite (resp. colímite) de él es el producto (resp. coproducto).

Así de hecho podemos definir un *(co)producto infinito* empleando límites inversos y directos.

Proposición 2.6: Sea $\mathscr{D}$ la siguiente categoría de índices: $\operatorname{Obj}\mathscr{D} = \{1, 2\}$, $\operatorname{Mor}\mathscr{D} = \{1_1, 1_2, \alpha, \beta\}$ donde $\alpha, \beta \in \operatorname{Hom}(1, 2)$.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] \arrow[d, Rightarrow, "F"] & 2 \\
A_1 \arrow[r, bend left, "F\alpha"] \arrow[r, bend right, "F\beta"'] \arrow[r, phantom, "\neq"] & A_2
\end{tikzcd}$$

Entonces un diagrama $F\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ corresponde a elegir dos flechas de mismo dominio y codominio $A_1 \overset{F\alpha, F\beta}{\longrightarrow} A_2$. Y un límite (resp. colímite) de dicho diagrama es un ecualizador (resp. co-ecualizador) de las dos flechas.

§2.1.2 Completitud.

Definición 2.7: Una categoría $\mathscr{C}$ se dice una ***clase preordenada*** si para todo $A, B \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ se cumple que $\operatorname{Hom}(A, B)$ posee a lo más un elemento.

Proposición 2.8: Una categoría $\mathscr{C}$ es una clase preordenada syss existe una clase preordenada $(X, \leq)$ (en el sentido usual) tal que $\mathscr{C}$ es isomorfa a $\mathsf{Poset}(X, \leq)$.

La razón para acotar a los diagramas es la siguiente:

Proposición 2.9: Sea $\mathscr{C}$ una categoría (resp. categoría pequeña, categoría finita) tal que todo funtor $F\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ posee límite inverso, donde $\mathscr{D}$ es cualquier categoría (resp. categoría pequeña, categoría finita). Entonces $\mathscr{C}$ es una clase preordenada.

DEMOSTRACIÓN: Podemos construir un modelo (?!) donde $\mathscr{C}$ sea una categoría pequeña y así reducirnos a dicho caso. Sean $f, g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ y supongamos, por contradicción, que fuesen distintas. Sea κ la cardinalidad de $\operatorname{Mor}\mathscr{C}$, luego, por hipótesis existe $B^\kappa := \prod_{\alpha<\kappa} B_\alpha$, donde cada $B_\alpha = B$. Luego, empleando combinaciones de f, g, podemos construir 2^κ diagramas de la forma $(A \to B_\alpha)_{\alpha<\kappa}$, cada uno induciendo una flecha distinta $A \to B^\kappa$. Luego

$$2^\kappa \leq |\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B^\kappa)| \leq |\operatorname{Mor}\mathscr{C}| = \kappa$$

lo cual es absurdo por el teorema de Cantor. □

Por ello, la definición pertinente es la siguiente:

Definición 2.10: Una categoría se dice:

(Finitamente) completa Si todo diagrama (finito) posee límites inversos.

(Finitamente) cocompleta Si todo diagrama (finito) posee límites directos.

(Finitamente) bicompleta Si es (finitamente) completa y (finitamente) cocompleta.

Teorema 2.11: Una categoría es completa (resp. cocompleta) syss posee ecualizadores y productos arbitrarios (resp. coecualizadores y coproductos arbitrarios).

DEMOSTRACIÓN: $\Longrightarrow$. Trivial pues un producto y un ecualizador es un límite inverso.

$\Longleftarrow$. Sea $F\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ un diagrama. En primer lugar definamos $P := \prod_{D\in\mathscr{D}} F(D)$, y además, para todo $D_i \xrightarrow{f} D_j$ en $\mathscr{D}$ definamos

$$\begin{tikzcd} K_f := \ker(\pi_i \circ F(f), \pi_j) \arrow[r] & P \arrow[rr, "\pi_j"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & & FD_j \\ & & FD_i \arrow[ur, "F(f)"'] & \end{tikzcd}$$

donde el diagrama *no* conmuta, y en cierto modo K_f «arregla cuanto falla la conmutatividad». Finalmente queremos un objeto que tome en cuenta a todos los K_f. Para ello, sea $\varphi_f := \pi_i \circ F(f)$ y para todo $f \in \operatorname{Mor}\mathscr{D}$ denotemos i_f el índice tal que $\operatorname{Cod}(f) = D_{i_f}$. Luego consideremos las siguientes flechas:

$$P \overset{\prod_{f\in \mathrm{Mor}\,\mathscr{D}} \varphi_f}{\underset{\prod_{f\in \mathrm{Mor}\,\mathscr{D}} \pi_{i_f}}{\rightrightarrows}} \prod_{f\in \mathrm{Mor}\,\mathscr{D}} FD_{i_f} \xrightarrow{\quad \pi_g \quad} FD_{i_g}.$$

Finalmente, el ecualizador de ambos es el límite inverso original (¿por qué?). Por dualidad se obtiene el otro caso. □

Ejemplo.

- Set y Top son categorías bicompletas.
- Grp es una categoría completa, pero no es finitamente cocompleta. Lo mismo sucede con Ring y CRing.
- Ab y, más generalmente, Mod_Λ son categorías bicompletas.
- Dada una clase preordenada X. La categoría $\mathsf{Poset}(X)$ es completa (resp. cocompleta) syss todo conjunto posee ínfimo (resp. supremo). En particular, si X está linealmente ordenado, entonces $\mathsf{Poset}(X)$ es finitamente bicompleta. (Ésta última afirmación no emplea el teorema anterior.)

Teorema 2.12: Dada una categoría $\mathscr{C}$, son equivalentes:

1. $\mathscr{C}$ es finitamente completa.
2. $\mathscr{C}$ posee objeto final, productos finitos y ecualizadores.
3. $\mathscr{C}$ posee objeto final y productos fibrados.

Queda al lector dualizar el enunciado del teorema.

Demostración: $1 \implies 2$ y $1 \implies 3$ son triviales.

$2 \implies 1$. Siga la demostración anterior sustituyendo las condiciones necesarias.

$3 \implies 2$. Basta recordar que el producto binario de dos objetos A, B viene dado como el producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} A\times B \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & \mathbf{1} \end{tikzcd}$$

y el ecualizador de un par de flechas $f, g \in \mathrm{Hom}(A, B)$ es el producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} \ker(f,g) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

□

En algunos casos queremos mejorar la noción de finitud, para lo cual será conveniente lo siguiente:

Definición 2.13: Una categoría $\mathscr{D}$ se dice ***finitamente generada*** si consta de finitos objetos y existen finitas flechas $f_1, \dots, f_n$ tal que todas las flechas de $\mathscr{D}$ son composiciones de los f_i's.

Proposición 2.14: Sea $F\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ un funtor. Si $(f_i)_{i\in I}$ es una familia de flechas de $\mathscr{D}$ tal que toda otra flecha $g \in \operatorname{Mor}\mathscr{D}$ es una composición $f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_n}$ con $i_j \in I$, entonces todo cono de F es una familia $(L, (p_D)_{D\in\mathscr{D}})$ tal que para todo $A_i \xrightarrow{f_i} B_i$ (en $\mathscr{D}$) con $i \in I$ se cumple que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & FA_i \arrow[dd, "F(f_i)"] & A_i \arrow[dd, "f_i"] \\ L \arrow[ur, "p_{A_i}"] \arrow[dr, "p_{B_i}"'] & & \\ & FB_i & B_i \end{tikzcd}$$

Corolario 2.15: Sea $F\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ un funtor. Si $\mathscr{C}$ es finitamente completa y $\mathscr{D}$ es finitamente generada, entonces F posee límite inverso.

En sentido abstracto, sabemos que Set es una categoría completa, pero podemos decir más:

Proposición 2.16: Sea $F\colon \mathscr{D} \to \mathsf{Set}$ un diagrama (pequeño). Entonces el límite inverso es:

$$L := \left\{ (x_A)_A \in \prod_{A\in\mathscr{D}} FA : \forall A \xrightarrow{f} B \in \operatorname{Mor}\mathscr{D},\ Ff(x_A) = x_B \right\},$$

con las proyecciones canónicas.

El caso del límite directo es más delicado (cf. proposición 2.34).

§2.1.3 Funtores y límites. En ésta subsección queremos estudiar bajo cuáles condiciones un funtor entre categorías preserva/refleja límites de algún tipo.

Proposición 2.17: Sea $\mathscr{A}$ una categoría (finitamente) completa y $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor. F preserva límites inversos (finitos) syss preserva productos (finitos) y ecualizadores.

Proposición 2.18: Un funtor que preserva productos fibrados (resp. coproductos fibrados) también preserva monomorfismos (resp. epimorfismos).

Ahora, podemos ver una generalización de la proposición 1.72:

Teorema 2.19: Sea $\mathscr{C}$ una categoría arbitraria y sea $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$. El funtor $\mathscr{C}(A, -)\colon \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$ preserva todos los límites inversos (que existan), incluyendo aquellos cuyo dominio no sea pequeño. En particular, preserva monomorfismos.

Demostración: Sea $X_{-}\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ un funtor y sea $(L, p_i)_{i\in\mathscr{D}}$ un límite inverso de F. Es claro que $(\mathscr{C}(A, L), h^A(p_i))_{i\in\mathscr{D}}$ es un cono de $(\mathscr{C}(A, X_i))_{i\in\mathscr{D}}$, así que supongamos que $(M, q_i)_{i\in\mathscr{D}}$ es otro cono. Para todo $m \in M$ (recordemos que M es un conjunto) se satisface que $q_i(m) \in \mathscr{C}(A, X_i)$ y conmuta con el resto de flechas del funtor, en particular se tiene la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd} & & X_i \\ A \arrow[urr, bend left, "q_i(m)"] \arrow[drr, bend right, "q_j(m)"'] \arrow[r, dashed, "\exists!\phi(m)"] & L \arrow[ur, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & \\ & & X_j \arrow[uu, "F(f)"'] \end{tikzcd}$$

En particular, $(A, q_i(m))_{i\in\mathscr{D}}$ forma un cono del funtor, tal como sugiere el diagrama; y por tanto existe una única flecha hacia L, que definimos como $\phi(m)$. Finalmente definiendo $\phi\colon M \to \mathscr{C}(A, L)$ vemos que ésta flecha factoriza el cono (en Set) por $\mathscr{C}(A, L)$; falta ver que ésta función es única. Pero ésto se sigue de que si hubiera otra función, entonces diferirían en algún $m \in M$ lo que induciría una factorización múltiple del cono en $\mathscr{C}$, lo que es absurdo por hipótesis de que L es límite inverso. $\square$

Hay que tener cuidado al dualizar el enunciado anterior, puesto que induce que el funtor

$$\mathscr{C}^{\mathrm{op}}(A^*, -)\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Set},$$

preserva límites inversos, pero en términos de $\mathscr{C}$ significa que:

Teorema 2.20: El funtor contravariante $\mathscr{C}(-, A)\colon \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$ transforma límites directos (en $\mathscr{C}$) en límites inversos (en Set). En particular, transforma epimorfismos en monomorfismos.

Proposición 2.21: Sea $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor que preserva límites inversos. Si $\mathscr{A}$ es una categoría completa y F refleja isomorfismos, entonces F también refleja límites inversos.

Demostración: Sea $X_-\colon \mathscr{D} \to \mathscr{A}$ un diagrama (por ende, $\mathscr{D}$ se asume pequeña). Luego posee un límite inverso $(L, p_i)_{i\in\mathscr{D}}$ (en $\mathscr{A}$) y por ende, $(FL, F(p_i))_{i\in\mathscr{D}}$ es el límite inverso de FX_-. Supongamos que $(M, q_i)_{i\in\mathscr{D}}$ es tal que $(FM, Fq_i)_{i\in\mathscr{D}}$ es el límite inverso de FX_-. Entonces existe $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(FM, FL)$ que es un isomorfismo, basta ver que posee preimagen bajo F.

Para ello, primero veamos que M tiene que ser un cono del diagrama: es decir, queremos ver que para todo $i \xrightarrow{g} j$ con $f := X(g)$ se satisface que $q_i \circ f = q_j$; como $\mathscr{A}$ es completa, entonces podemos definir $K \xrightarrow{k} M$ como su ecualizador, es decir $k := \ker(q_i \circ f, q_j)$. Nótese, no obstante, que K es un límite inverso (como sugiere el siguiente diagrama conmutativo):

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] \arrow[d, "k"'] & M \arrow[d, "q_j"] \\
M \arrow[r, "q_i"'] & X_i \arrow[r, "f"'] & X_j
\end{tikzcd}$$

de modo que se preserva bajo F, luego $FK = M$ y k es un isomorfismo, por lo que efectivamente M es un cono; luego existe una única flecha $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M, L)$ que hace conmutar todo el diagrama y por unicidad se debe dar que $F(\psi) = \phi$ con lo que se concluye que $M \cong L$. □

Ejemplo. Ab y Mod_R son categorías completas, y en cada caso el funtor olvidadizo ι hacia Set refleja isomorfismos (concretamente, ésto equivale a ver que todo homomorfismo biyectivo es un isomorfismo); por lo tanto, la proposición anterior nos dice que refleja límites inversos. Ésto en la práctica podemos combinarlo con la descripción de límites inversos en Set (cf. proposición 2.16).

Empleando la proposición anterior, concluya que

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(A,-)\colon \mathsf{Ab}\to\mathsf{Ab} \quad \text{y} \quad \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}_R}(A,-)\colon \mathsf{Mod}_R\to\mathsf{Mod}_R$$

también preservan toda clase de límites inversos.

Proposición 2.22: Sean $\mathscr{A},\mathscr{B}$ categorías finitamente completas y sea $F\colon\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ un funtor que preserva (resp. refleja) límites finitos. Entonces F preserva (resp. refleja) límites finitamente generados.

Teorema 2.23 (Freyd): Un funtor plenamente fiel $F\colon\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ refleja límites inversos y directos.

DEMOSTRACIÓN: Sea $A_-\colon\mathscr{D}\to\mathscr{A}$ un diagrama y sea $(L, L\xrightarrow{p_i}A_i)_{i\in\mathscr{D}}$ un cono de $(A_i)_{i\in\mathscr{D}}$ tal que $(FL, FL\xrightarrow{Fp_i}FA_i)_{i\in\mathscr{D}}$ es un límite inverso. Sea $(C, C\xrightarrow{q_i}A_i)_{i\in\mathscr{D}}$ otro cono, entonces $(FC, Fq_i)_{i\in\mathscr{D}}$ es un cono de $(FA_i)_{i\in\mathscr{D}}$, luego existe un único $FC\xrightarrow{\psi}FL$ tal que $Fq_i=\psi\circ Fp_i$ para todo $i\in\mathscr{D}$ y como F es plenamente fiel, existe un único $C\xrightarrow{\phi}L$ tal que $F(\phi)=\psi$ como se quiere ver.

La misma demostración aplica para ver que refleja límites directos. □

Proposición 2.24: Sean $\mathscr{A},\mathscr{B}$ categorías completas y sean $F\colon\mathscr{A}\to\mathscr{C}$, $G\colon\mathscr{B}\to\mathscr{C}$ funtores que preservan límites inversos. Entonces, la categoría coma (F,G) también es completa y los funtores olvidadizos preservan límites.

DEMOSTRACIÓN: Sea $X_-\colon\mathscr{D}\to(F,G)$ un diagrama. Luego $UX_-\colon\mathscr{D}\to\mathscr{A}$ también es un diagrama y, por tanto, posee límite $L=\varprojlim_{i\in\mathscr{D}}UX_i$ y lo mismo con $\mathscr{B}$ y $M=\varprojlim_{i\in\mathscr{D}}VX_i$. Por hipótesis, $FL=\varprojlim_{i\in\mathscr{D}}FUX_i$ y $GM=\varprojlim_{i\in\mathscr{D}}GVX_i$. Nótese que para todo $i\in\mathscr{D}$ se cumple que $X_i=(UX_i,\alpha_{X_i},VX_i)\in\mathrm{Obj}(F,G)$, luego podemos construir el siguiente diagrama conmutativo (en $\mathscr{C}$):

$$\begin{tikzcd}
& FUX_i \arrow[rr, "\alpha_{X_i}"] \arrow[dd] & & GVX_i \arrow[dd] \\
FL \arrow[ur, "Fp_i"] \arrow[dr, "Fp_j"'] \arrow[rr, dashed, "\exists! h"] & & GM \arrow[ur, "Gq_i"] \arrow[dr, "Gq_j"'] & \\
& FUX_j \arrow[rr, "\alpha_{X_j}"'] & & GVX_j
\end{tikzcd}$$

Así es fácil concluir que $(L, h, M) \in \mathrm{Obj}(F, G)$ es el límite inverso deseado. □

Corolario 2.25: Si $\mathscr{C}$ es una categoría completa y $F\colon \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$ preserva límites inversos, entonces $\mathsf{Elts}(F)$ es completa.

§2.1.4 Funtores finales. Aquí daremos una breve exposición de los funtores finales que servirán para la demostración del teorema del funtor adjunto (teo. 2.48).

Definición 2.26: Se dice que un funtor $G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es ***final*** si para todo funtor $F\colon \mathscr{D} \to \mathscr{A}$ se cumple:

1. Si el límite inverso $(L, p_D)_{D\in\mathscr{D}}$ de F existe, entonces $(L, p_{FC})_{C\in\mathscr{C}}$ es el límite de $G \circ F$.

2. Si $G \circ F$ posee límite inverso, entonces F también.

Se suele abreviar como que «F posee límite syss $G \circ F$ posee límite, en cuyo caso son iguales».

Proposición 2.27: Un funtor $G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es final si satisface lo siguiente:

1. Para todo $D \in \mathrm{Obj}\,\mathscr{D}$ existen $C \in \mathrm{Obj}\,\mathscr{C}$ y $GC \xrightarrow{d} D$ (en $\mathscr{D}$).

2. Para todos $C, C' \in \mathrm{Obj}\,\mathscr{C}$, $D \in \mathrm{Obj}\,\mathscr{D}$ y $GC \xrightarrow{d} D$, $GC' \xrightarrow{d'} D$ (en $\mathscr{D}$), existen $C'' \in \mathrm{Obj}\,\mathscr{C}$, $C'' \xrightarrow{c} C$, $C'' \xrightarrow{c'} C'$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & C & & & GC \arrow[dr, "d"] & \\ C'' \arrow[ur, dashed, "c"] \arrow[dr, dashed, "c'"'] & & & GC'' \arrow[ur, dashed, "Gc"] \arrow[dr, dashed, "Gc'"'] & & D \\ & C' & & & GC' \arrow[ur, "d'"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración: Sea $F\colon \mathscr{D} \to \mathscr{A}$ un funtor. Claramente si $(M, q_D)_{D\in\mathscr{D}}$ es un cono de F, entonces induce un cono $(M, q_{GC})_{C\in\mathscr{C}}$ de $G\circ F$. Recíprocamente, si $(M, r_C)_{C\in\mathscr{C}}$ es un cono de $G\circ F$, veamos que ha de ser de inducido por un único cono $(M, q_D)_{D\in\mathscr{D}}$ con $r_C = q_{GC}$. Para ello, sea $D \in \operatorname{Obj}\mathscr{D}$, por la condición 1., existe $GC \xrightarrow{d} D$ de modo que podemos definir $q_D := r_C \circ F(d)$. Supongamos que hubiese otro $GC' \xrightarrow{d'} D$ y veamos que ambas definiciones dan a lugar la misma flecha: para ello invocamos la condición 2. y construimos el siguiente diagrama conmutativo (en $\mathscr{A}$):

$$\begin{tikzcd} & FGC \arrow[dr, "Fd"] & \\ M \arrow[ur, "r_C"] \arrow[r, "r_{C''}"] \arrow[dr, "r_{C'}"'] & FGC'' \arrow[u, "FGc"'] \arrow[d, "FGc'"] & D \\ & FGC' \arrow[ur, "Fd'"'] & \end{tikzcd}$$

De la unicidad de los conos se sigue la coincidencia de los límites inversos. □

De ésto se siguen un par de casos particulares:

Corolario 2.28: Sea $\mathscr{D}$ una categoría con un objeto inicial $\mathbf{0}$, y sea $\mathscr{C}$ la subcategoría con $\operatorname{Obj}\mathscr{C} = \{\mathbf{0}\}$ y $\operatorname{Mor}\mathscr{C} = \{1_{\mathbf{0}}\}$. Entonces, $\iota\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un funtor final.

Corolario 2.29: Sea $\mathscr{D}$ una categoría con productos fibrados y sea $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$ una subcategoría plena que satisface lo siguiente:

$$\forall D \in \mathscr{D} \exists C \in \mathscr{C}\ \exists C \xrightarrow{d} D,$$

entonces la inclusión $\iota\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un funtor final.

Pista: Por hipótesis se tiene la condición 1, emplee los productos fibrados para obtener la condición 2. □

§2.1.5 Intercambios de límite. Consideremos un bifuntor $F\colon \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{C}$. Como hemos visto en la sección §1.2 se cumple que fijando una coordenada obtenemos una familia de funtores sobre la segunda, y moviendo la primera coordenada obtenemos una familia transformaciones naturales:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r] & A' \\ B \arrow[d] & F(A,B) \arrow[r] \arrow[d] & F(A',B) \arrow[d] \\ B' & F(A,B') \arrow[r] & F(A',B') \end{tikzcd}$$

Ésto nos permitirá lo siguiente:

Lema 2.30: Sea $F\colon \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ un bifuntor tal que para cada $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{A}$ se cumple que el funtor $F(A,-)\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ tiene límite inverso. Entonces existe un funtor $L\colon \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ tal que $LA = \varprojlim_{B\in\mathscr{B}} F(A,B)$.

Demostración: Para L ya determinamos el valor de los objetos, falta determinar el valor de las flechas. Para ello, sea $A \xrightarrow{f} A'$; entonces $F_A(f)\colon F_A(-) \Rightarrow F_{A'}(-)$ es una transformación natural. Sea $LA := \varprojlim_{B\in\mathscr{B}} F_A(B)$ con las respectivas proyecciones $p_B^A\colon LA \to F_A(B)$. Luego LA con las flechas $p_B^A \circ F_B(f) \in \operatorname{Hom}(LA, F_{A'}(B))$ es un cono de $F_{A'}$, de modo que existe una única flecha $L(f) \in \operatorname{Hom}(LA, LA')$ por definición de límite inverso. □

Es claro que el lema vale análogamente moviendo las coordenadas en $\mathscr{B}$. De modo que queremos probar que:

Teorema 2.31: Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ categorías pequeñas, $\mathscr{C}$ una categoría completa y $F\colon \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ un bifuntor. Se satisface que:

$$\varprojlim_{A\in\mathscr{A}} \left(\varprojlim_{B\in\mathscr{B}} F(A,B) \right) \cong \varprojlim_{B\in\mathscr{B}} \left(\varprojlim_{A\in\mathscr{A}} F(A,B) \right).$$

Demostración: Empleando la notación del lema, sea $L\colon \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ el funtor dado por los límites y considere las flechas:

$$\varprojlim_{A\in\mathscr{A}} LA \xrightarrow{p_A} LA = \varprojlim_{B\in\mathscr{B}} F_A(B) \xrightarrow{p_B} F(A,B)$$

Denotando $K := \varprojlim_{A\in\mathscr{A}} LA$ vemos que K con las flechas $(p_A \circ p_B)_{A\in\mathscr{A}}$ es un cono de $F(-,B)\colon \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ de modo que tiene una única flecha $q_B \in \operatorname{Hom}(K, \varprojlim_{A\in\mathscr{A}} F(A,B))$. Luego K con las flechas $(q_B)_{B\in\mathscr{B}}$ es un cono del funtor $\varprojlim_{A\in\mathscr{A}} F(A,-)\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$, luego existen unas únicas flechas:

$$\varprojlim_{A\in\mathscr{A}} \left(\varprojlim_{B\in\mathscr{B}} F(A,B)\right) \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \varprojlim_{B\in\mathscr{B}} \left(\varprojlim_{A\in\mathscr{A}} F(A,B)\right)$$

(aquí construimos λ y análogamente se obtiene a μ). Ahora bien, nótese que

$$\lambda \circ \mu \circ p_A \circ p_B = p_A \circ p_B,$$

por caracterización de λ, μ y para todo $A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}$. Luego por unicidad de la factorización de los conos se concluye que $\lambda \circ \mu = 1_K$ y un argumento análogo permite concluir que λ, μ son isomorfismos y además son únicos. □

2.2 Límites filtrados

Definición 2.32: Una categoría $\mathscr{C}$ se dice ***filtrada*** si:

CF1. $\mathscr{C}$ posee al menos un objeto.

CF2. Para todo par de objetos $X, Y \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ existe otro objeto Z y un par de flechas $X \xrightarrow{f} Z$ e $Y \xrightarrow{g} Z$.

CF3. Para todo par de flechas $f, g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ existe una flecha $Y \xrightarrow{h} Z$ tal que $f \circ h = g \circ h$.

Las categorías filtradas generalizan a lo que algunos textos detallan como *sistemas dirigidos*. El típico ejemplo de una categoría filtrada es $\mathsf{Poset}(\mathbb{N})$ y, a veces, $\mathsf{Poset}(\mathbb{Z})$. Cualquier conjunto preordenado no vacío sin cota superior determina una categoría filtrada.

Lema 2.33: Sea $\mathscr{C}$ una categoría filtrada. Entonces todo diagrama finito $A_- : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tiene un cocono.

Demostración: En primer lugar, si $\mathscr{D}$ es discreto entonces basta aplicar inductivamente la propiedad CF2. En segundo lugar, si $\mathscr{D}$ consiste de únicamente flechas paralelas, de modo que el diagrama es de la forma $(A \xrightarrow{f_k} B)_{k=1}^n$ (en $\mathscr{C}$) entonces basta aplicar inductivamente la propiedad CF3.

Dado un diagrama general $(A_i)_{i\in\mathscr{D}}$, aplicamos la primera observación para obtener un objeto B y una familia de flechas $g_i \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_i, B)$. Fijemos dos objetos A_i, A_j, entonces en $\mathscr{D}$ tienen asociados una familia de flechas paralelas $(A_i \xrightarrow{f_k} A_j)_{k=1}^n$, de modo que $g_i, f_k \circ g_j \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_i, B)$ con $1 \leq k \leq n$ son flechas paralelas y tienen un cocono por propiedad CF3. Así eventualmente nos reducimos a un diagrama finito que es una clase preordenada y luego volvemos a aplicar CF2. $\square$

Proposición 2.34: Sea $F\colon \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$ un diagrama filtrado con flechas. El límite directo $(L, (s_A)_{A\in\mathscr{C}}) = \varinjlim_{A\in\mathscr{C}} FA$ es de la forma:

$$L = \left(\coprod_{A\in\mathscr{C}} FA\right)/\!\sim,$$

donde $s_A(x) = [x]$ es la clase de equivalencia dada por la relación $\sim$:

$$\big(x \in FA\big) \sim \big(y \in FB\big) \iff \exists A \xrightarrow{\alpha} C, B \xrightarrow{\beta} C : F\alpha(x) = F\beta(y).$$

Demostración: En primer lugar verifiquemos que $\sim$ es una relación de equivalencia. Es claramente reflexiva y simétrica. Para la transitividad sean $x \in FA, y \in FB, z \in FC$ tales que $x \sim y$ e $y \sim z$. Por definición existen $A \xrightarrow{\alpha} D, B \xrightarrow{\beta} D$ tales que $F\alpha(x) = F\beta(y)$ y $B \xrightarrow{\gamma} E, C \xrightarrow{\delta} E$ tales que $F\gamma(y) = F\delta(z)$. Ahora bien, por el lema, el diagrama tiene un cono (en $\mathscr{C}$) representado por la siguiente figura:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "\alpha"] & & \\
& D \arrow[dr, "p_D"] & \\
B \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr, "p_B"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & K \\
& E \arrow[ur, "p_E"'] & \\
C \arrow[ur, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

De éste diagrama se sigue que

$$F(\alpha \circ p_D)(x) = F(\beta \circ p_D)(y) = F(p_B)(y) = F(\gamma \circ p_E)(y) = F(\delta \circ p_E)(z).$$

Ahora bien, es claro que mediante nuestras definiciones, L es un cocono del diagrama. Sea $(M, (q_C)_{C\in\mathscr{C}})$ otro cocono del diagrama, entonces definimos

$\phi\colon L \to M$ como $\phi([x]) = q_C(x)$ si $x \in FC$. Esto está bien definido ya que si $x \sim y$ con la notación anterior, entonces tenemos que

$$\phi([x]) = q_A(x) = q_C(F\alpha(x)) = q_C(F\beta(y)) = q_B(y) = \phi([y]).$$

Por definición $s_C \circ \phi = q_C$ para todo $C \in \mathscr{C}$ y esto también fuerza la unicidad. $\square$

Teorema 2.35: Sea $\mathscr{C}$ una categoría filtrada, $\mathscr{D}$ una categoría finita y $F\colon \mathscr{C} \times \mathscr{D} \to \mathsf{Set}$ un bifuntor. Entonces:

$$\varinjlim_{C\in\mathscr{C}} \left(\varprojlim_{D\in\mathscr{D}} F(C,D) \right) \cong \varprojlim_{D\in\mathscr{D}} \left(\varinjlim_{C\in\mathscr{C}} F(C,D) \right).$$

Demostración: Comencemos por construirnos una flecha. En primer lugar existen flechas únicas dadas por la fig. 2.1.

$$\begin{tikzcd}
 & & F(C,D) \arrow[rrrr] \arrow[drrr] \arrow[ddd] & & & & F(C',D) \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
 & & & & & \varinjlim_C F(-,D) \arrow[ddd] & \\
\varprojlim_D F(C,-) \arrow[uurr] \arrow[drr] \arrow[rrr, dashed, "\exists!"] & & & \varprojlim_D \left(\varinjlim_C F(-,-)\right) \arrow[urr] \arrow[ddrr] & & & \\
 & & F(C,D') \arrow[rrrr] \arrow[drrr] & & & & F(C',D') \arrow[dl] \\
 & & & & & \varinjlim_C F(-,D') &
\end{tikzcd}$$

Figura 2.1

Luego podemos ver que $C \mapsto \varprojlim_D F(C,-)$ determina un diagrama (filtrado) y que $\varprojlim_D \left(\varinjlim_C F(-,-)\right)$ es un cocono, de modo que existe una única flecha:

$$\lambda\colon \varinjlim_{C\in\mathscr{C}} \left(\varprojlim_{D\in\mathscr{D}} F(C,D) \right) \longrightarrow \varprojlim_{D\in\mathscr{D}} \left(\varinjlim_{C\in\mathscr{C}} F(C,D) \right).$$

Ésta flecha, en caso concreto, podemos describirla como $\lambda\big([(x_A)_{A\in\mathscr{D}}]\big) = ([x_A])_{A\in\mathscr{D}}$ y queremos probar que es biyectiva. $\square$

Demostrar intercambio de límites [**2**, págs. 79-80].

Proposición 2.36: El funtor olvidadizo $U\colon \mathsf{Ab} \to \mathsf{Set}$ preserva y refleja límites directos filtrados.

Corolario 2.37: En Ab los límites directos finitos conmutan con límites inversos filtrados.

2.3 Adjunción

La adjunción es la pieza de rompecabezas faltante para un panorama elemental de las categorías y abunda en el país de las categorías abelianas. En el corazón, la teoría de categorías se trata de una nueva manera de formalizar «equivalencia respecto a las interacciones» y podría decirse que la noción hipercentral es la de isomorfía; siguiendo la misma línea, la adjunción es una manera de establecer una equivalencia entre funtores complementarios.

Definición 2.38: Sea $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor y sea $B \in \operatorname{Obj}\mathscr{B}$. Se dice que (R_B, η_B) es una ***reflexión*** de B a través de F si:

R1. $R_B \in \operatorname{Obj}\mathscr{A}$ y $B \xrightarrow{\eta_B} FR_B$ es una flecha de $\mathscr{B}$.

R2. Si $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{A}$ es otro objeto y $B \xrightarrow{f} FA$ es otra flecha de $\mathscr{B}$, entonces existe una única flecha $R_B \xrightarrow{h} A$ (en $\mathscr{A}$) tal que $f = \eta_B \circ F(h)$.

A forma de diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[dr, "f"'] & FR_B \arrow[d, dashed, "F(h)"] & R_B \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \\ & FA & A \end{tikzcd}$$

Dualmente, sea $G\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ un funtor y sea $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{A}$. Se dice que (K_A, ε_A) es una ***correflexión*** de A a través de G si:

CR1.* $K_A \in \operatorname{Obj}\mathscr{B}$ y $GK_A \xrightarrow{\varepsilon_A} A$ es una flecha de $\mathscr{A}$.

CR2.* Si $B \in \operatorname{Obj}\mathscr{B}$ es otro objeto y $GB \xrightarrow{f} A$ es otra flecha de $\mathscr{A}$, entonces existe una única flecha $B \xrightarrow{h} K_A$ (en $\mathscr{B}$) tal que $f = F(h) \circ \varepsilon_A$.

A forma de diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
K_A & GK_A \arrow[r, "\varepsilon_A"] & A \\
B \arrow[u, dashed, "\exists! h"] & GB \arrow[u, dashed, "G(h)"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

No es coincidencia que hayamos cambiado el funtor para la dualización del concepto, ésto se aclarará más adelante.

Como es rutinario:

Proposición 2.39: Sea $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor y sea $B \in \operatorname{Obj}\mathscr{B}$. Si existe una reflexión de B a través de F, entonces ella y su flecha son únicas salvo isomorfismo.

Ojo que la (co-)reflexión no es, en general, un tipo de (co-)límite de un diagrama, así que un argumento de ese estilo no vale.

Proposición 2.40: Sea $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor tal que todo $B \in \operatorname{Obj}\mathscr{B}$ posee una reflexión (R_B, η_B) a través de F. En cuyo caso, existe un único funtor $R\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ tal que:

1. Para todo $B \in \operatorname{Obj}\mathscr{B}$ se cumple que $RB = R_B$.
2. $\eta_-\colon \operatorname{Id}_{\mathscr{B}} \Rightarrow R \circ F$ es una transformación natural.

DEMOSTRACIÓN: En cierta forma, lo que debemos probar es que hay una única manera de elegir adónde llevar las flechas de $\mathscr{B}$. Para ello, sea $B \xrightarrow{f} B'$ (en $\mathscr{B}$), sabemos que existe $B' \xrightarrow{\eta_{B'}} FRB'$, de modo que $g := f \circ \eta_{B'}$ es una flecha desde B a FRB'; luego, por definición de reflexión, existe un único $R_B \xrightarrow{h} RB'$ tal que el siguiente diagrama conmuta (en $\mathscr{B}$):

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & FRB \arrow[d, dashed, "F(h)"] & R_B \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \\
B' \arrow[r, "\eta_{B'}"] & FRB' & RB'
\end{tikzcd}
$$

Así definimos $R(f) := h$. De ésta definición es fácil ver que no hay otro funtor que satisfaga las propiedades exigidas. $\square$

Como ejercicio: ¿dónde se emplearon las hipótesis de la proposición anterior?

Definición 2.41 – *Adjunción*:

Se dice que $R\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ es la ***adjunta izquierda*** del funtor $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, si existe una transformación natural $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathscr{B}} \Rightarrow R \circ F$ tal que para todo $B \in \mathrm{Obj}\,\mathscr{B}$ se satisface que (RB, η_B) es una coreflexión de B a través de F.

Se dice que $K\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es la ***adjunta derecha*** del funtor $G\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$, si existe una transformación natural $\varepsilon\colon \mathrm{Id}_{\mathscr{A}} \Rightarrow K \circ G$ tal que para todo $A \in \mathrm{Obj}\,\mathscr{A}$ se satisface que (KA, ε_A) es una correflexión de A a través de G.

Usualmente la adjunción suele presentarse de manera más compacta, y es el siguiente resultado el que probablemente lo explica:

Teorema 2.42: Sean $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ y $G\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ funtores. Entonces, son equivalentes:

1. G es la adjunta izquierda de F.

2. Existen transformaciones naturales $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathscr{B}} \Rightarrow G \circ F$ y $\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$ tales que los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F*\eta"] \arrow[dr, "1_F"'] & FGF \arrow[d, "\varepsilon*F"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta*G"] \arrow[dr, "1_G"'] & GFG \arrow[d, "G*\varepsilon"] \\ & G \end{tikzcd}$$

   conmutan (en $\mathrm{Funct}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ y $\mathrm{Funct}(\mathscr{B}, \mathscr{A})$ resp.).

3. Para todo $A \in \mathrm{Obj}\,\mathscr{A}, B \in \mathrm{Obj}\,\mathscr{B}$ existe una biyección:

$$\theta_{AB}\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(GB, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(B, FA)$$

   que es una transformación natural tanto en A como en B.

4. F es la adjunta derecha de G.

Cualquiera de éstas condiciones se abrevia como $G \dashv F$. Si ésto se cumple, diremos que η es una unidad y que ε es una counidad.

DEMOSTRACIÓN: $1 \implies 2$. Sea $A \in \mathrm{Obj}\,\mathscr{A}$ debemos construir la transformación natural ε. Para ello consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\eta_{FA}"] \arrow[dr, "1_{FA}"'] & FGFA \arrow[d, dashed, "F(\varepsilon_A)"] \\
& FA
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
GFA \arrow[d, dashed, "\exists ! \varepsilon_A"] \\
A
\end{tikzcd}
$$

Y ahora debemos probar que, de hecho, es una transformación natural; ésto es más trabajo, pero para darle una pista al lector, basta considerar el siguiente diagrama y <u>demostrar</u> que conmuta y concluir por la unicidad:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dd, "f"'] & FA \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "\eta_{FA}"] \arrow[dd, "F(f)"'] & & FA \arrow[dd, "F(f)"] \\
& & FGFA \arrow[ur, "F(\varepsilon_A)"'] \arrow[dd, "FGF(f)"] & \\
A' & FA' \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "\eta_{FA'}"'] & & FA' \\
& & FGFA' \arrow[ur, "F(\varepsilon_{A'})"'] &
\end{tikzcd}
$$

$2 \implies 3$. Dado $GB \xrightarrow{a} A$ (en $\mathscr{A}$) definamos:

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[rr, bend right, "\theta_{A,B}(a)"'] & FGB \arrow[r, "F(a)"] & FA
\end{tikzcd}
$$

Y análogamente dado $B \xrightarrow{b} FA$ (en $\mathscr{B}$) definamos:

$$
\begin{tikzcd}
GB \arrow[r, "G(b)"] \arrow[rr, bend right, "\tau_{A,B}(b)"'] & GFA \arrow[r, "\varepsilon_A"] & A
\end{tikzcd}
$$

Queda al lector ver que son inversos, la una de la otra.

Fijando $B \in \operatorname{Obj} \mathscr{B}$ veamos que $\theta_{-,B} \colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(GB, -) \Rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{B}}(B, F-)$ es una transformación natural de funtores sobre $\mathscr{A}$. Sea $A \xrightarrow{f} A'$ en $\mathscr{A}$, queremos demostrar que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{A}(GB, A) \arrow[r, "\theta_{A,B}"] \arrow[d, "h^f"] & \mathscr{B}(B, FA) \arrow[d, "h^{F(f)}"] \\
\mathscr{A}(GB, A') \arrow[r, "\theta_{A',B}"] & \mathscr{B}(B, FA')
\end{tikzcd}
$$

Por definición, sea $a \in \mathscr{A}(GB, A)$, luego:

$$\begin{aligned}\big(h^f \circ \theta_{A',B}\big)(a) &= \theta_{A',B}(a \circ f) = \eta_B \circ F(a \circ f) = \eta_B \circ F(a) \circ F(f) \\ &= \theta_{A,B}(a) \circ F(f) = \big(\theta_{A,B} \circ h^{F(f)}\big)(a).\end{aligned}$$

Un proceso análogo puede emplearse para B (recordando que en su caso, los funtores son contravariantes).

$3 \implies 1$. Demostraremos que para todo $B \in \operatorname{Obj}\mathscr{B}$ se cumple que (GB, η_B), donde $\eta_B := \theta_{GB,B}(1_{GB})$, es una reflexión de B a través de F. Sea $B \xrightarrow{b} FA$ en $\mathscr{B}$ para algún $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{A}$, luego sea $a := \theta_{AB}^{-1}(b) \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(GB, A)$, luego empleando el diagrama anterior (sustituyendo A por GB y A' por A) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}b = \theta_{AB}(a) &= (h^a \circ \theta_{A,B})(1_{GB}) = (\theta_{GB,B} \circ h^{F(a)})(1_{GB}) \\ &= h^{F(a)}(\eta_B) = \eta_B \circ F(a),\end{aligned}$$

más aún, si hubiera otro a' que satisfaga la mismo, podemos emplear la inyectividad de θ_{AB} para concluir la igualdad.

$4 \iff 3$. Con los anteriores hemos probado que $1 \iff 3$, luego concluimos por principio de dualidad. □

La condición 3 se puede escribir de manera compacta como que

$$\mathscr{A}(GB, A) \approx \mathscr{B}(B, FA), \tag{2.1}$$

donde $\approx$ significa equipotencia.

Ejemplo 3: Los funtores adjuntos son bastante comunes en las matemáticas, pero como ejemplos, ninguno es demasiado sencillo; no obstante, el trabajo está hecho en el resto de mis textos y, sino, debe considerarse como motivacional el hecho de que los siguientes funtores tengan adjuntas (y también expositivo del por qué dichas adjuntas son construcciones especiales de su teoría):

1. Sea R un anillo unitario conmutativo y sea A un R-(bi)módulo. Entonces $(A \otimes_R -) \dashv \operatorname{Hom}_R(A, -)$. Éste ejemplo es vital, puesto que en varios casos es la motivación principal para estudiar funtores adjuntos.

2. Sea $U\colon \mathsf{Grp} \to \mathsf{Set}$ el funtor olvidadizo. Éste funtor tiene una adjunta izquierda: el funtor $F\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Grp}$ que manda $X \mapsto F(X)$, donde $F(X)$ es un grupo libre que tiene a X por base (cf. [**37,** Def. 1.106]). Éste mismo ejemplo aplica para grupos abelianos, módulos y álgebras libres.

3. Sea $U\colon \mathsf{CRing} \to \mathsf{Set}$ el funtor olvidadizo desde la categoría de anillos conmutativos con unidades. Éste funtor tiene una adjunta izquierda: el funtor $\mathbb{Z}[-]\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Grp}$ que manda $X \mapsto \mathbb{Z}[X]$ el cual corresponde al anillo de polinomios con coeficientes enteros y donde X es el conjunto de indeterminadas.

4. Sea $U\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Set}$ el funtor olvidadizo. Éste funtor tiene una adjunta izquierda: el funtor $D(-)\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Top}$ que a cada conjunto X le asigna el espacio topológico discreto sobre X (cf. [**39,** Prop. 2.23]).

   Más aún, U también tiene adjunta derecha: el funtor $I(-)\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Top}$ que a cada conjunto X le asigna el espacio topológico indiscreto sobre X.

5. Sea I un conjunto y considere el funtor $- \times I\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$. Entonces $- \times I$ tiene adjunta derecha: para ello considere A, B conjuntos. Luego sea $g \in \mathrm{Func}(B \times I, A)$, y para todo $b \in B$ podemos definir

$$\begin{aligned} g_b\colon I &\longrightarrow A \\ i &\longmapsto g(b,i) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \hat{g}\colon B &\longrightarrow \mathrm{Func}(I,A) \\ b &\longmapsto g_b \end{aligned}$$

   Y ésto confirma que

$$\mathrm{Func}(B \times I, A) \approx \mathrm{Func}\big(B, \mathrm{Func}(I,A)\big).$$

   De ésto se sigue que $\mathrm{Func}(I,-)\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ es su adjunta.

Veamos un ejemplo de adjunción por definición:

Proposición 2.43: Un funtor (covariante) $G\colon \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$ tiene adjunta por la izquierda syss es representable.

DEMOSTRACIÓN: Basta notar que, si $F \dashv G$, entonces

$$GX \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(\{*\}, GX) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}\big(F(\{*\}), X\big)$$

donde, definiendo $A := F(\{*\})$ tenemos que $G \cong \mathscr{C}(A, -)$. □

Proposición 2.44: Considere la siguiente situación (entre categorías):

$$\mathscr{A} \underset{F}{\overset{G}{\leftrightarrows}} \mathscr{B} \underset{H}{\overset{K}{\leftrightarrows}} \mathscr{C}$$

donde $G \dashv F$ y $K \dashv H$. Entonces $K \circ G \dashv F \circ H$.

Demostración: Para todo $A \in \operatorname{Obj} \mathscr{A}$ y $C \in \operatorname{Obj} \mathscr{C}$ considere las biyecciones

$$\mathscr{A}(GKC, A) \approx \mathscr{B}(KC, FA) \approx \mathscr{C}(C, HFA),$$

como la composición de transformaciones naturales es una transformación natural se concluye. $\square$

Proposición 2.45: Sea $F \colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor que posee adjunta izquierda, entonces F preserva toda clase de límites inversos que existan en $\mathscr{A}$.

Demostración: Sea $G \dashv F$ (por unicidad de reflexiones, G también es única salvo isomorfismo de funtores). Sea $X_- \colon \mathscr{D} \to \mathscr{A}$ un diagrama y sea $(L, p_i)_{i \in \mathscr{D}}$ un límite inverso en $\mathscr{A}$, tenemos que probar que $FL = \varprojlim_{i \in \mathscr{D}} FX_i$, y claramente es un cono.

Sea $(K, q_i)_{i \in \mathscr{D}}$ otro cono en $\mathscr{B}$ de FX_-, entonces para todo $X_i \xrightarrow{f} X_j$ del diagrama podemos ver el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & FX_i \arrow[dd, "F(f)"] & & GFX_i \arrow[r, "\varepsilon_{X_i}"] \arrow[dd, "GF(f)"] & X_i \arrow[dd, "f"] \\
K \arrow[ur, "q_i"] \arrow[dr, "q_j"'] & \arrow[r, Rightarrow, "G"] & GK \arrow[ur, "Gq_i"] \arrow[dr, "Gq_j"'] & & \\
 & FX_j & & GFX_j \arrow[r, "\varepsilon_{X_j}"] & X_j
\end{tikzcd}$$

y así construir una única flecha $GK \xrightarrow{\phi} L$, que induce una única flecha $\eta_K \circ F(\phi) \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{B}}(K, FL)$. $\square$

Dualmente los funtores que poseen adjunta por la derecha preservan límites directos. Es importante notar que la proposición asegura que se preservan *todos* los límites, incluso los grandes.

Sea $F \colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, luego para todo $B \in \operatorname{Obj} \mathscr{B}$ se determina un funtor covariante:

$$\mathscr{B}(B, F-) \colon \mathscr{A} \longrightarrow \mathsf{Set}$$

y denotamos, por brevedad, $\mathscr{E}_B := \mathsf{Elts}\big(\mathscr{B}(B, F-)\big)$ y $\phi_B \colon \mathscr{E}_B \to \mathscr{A}$ al funtor olvidadizo.

Proposición 2.46: Sea $F \colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor. Para un $B \in \operatorname{Obj} \mathscr{B}$ son equivalentes:

1. B posee reflexión a través de F.

2. El funtor ϕ_B posee un límite que se preserva bajo F.

Demostración: $1 \implies 2$. Sea $B \in \operatorname{Obj} \mathscr{B}$ y sea (R, η) su reflexión a través de F. Recuerde que $\eta \in \mathscr{B}(B, FR)$, de modo que $(R, \eta) \in \mathscr{E}_B$, veremos que de hecho es un objeto inicial de la categoría. Sea $(A, a) \in \mathscr{E}_B$, vale decir, $B \xrightarrow{a} FA$, de modo que por definición de reflexión se factoriza como $a = \eta \circ F(h)$, donde $R \xrightarrow{h} A$. Luego nótese que $h^{F(h)} = \mathscr{B}(B, F(h))$ (mera notación), por lo que, efectivamente $(R, \eta) \xrightarrow{h} (A, a)$ es una flecha en $\mathscr{E}_B$ y es única.

$2 \implies 1$. Sea $(L, p_{(A,a)}) := \varprojlim_{\mathscr{E}_B} \phi_B$ que induce un límite $FL = \varprojlim_{\mathscr{E}_B} \phi_B \circ F$. Recordemos que $(A, a) \in \mathscr{E}_B$ syss $B \xrightarrow{a} FA$ en $\mathscr{B}$ y de que

$$
\begin{tikzcd}
(A,a) \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\
(A,a') \arrow[ur, phantom, "\Longleftrightarrow"] & A'
\end{tikzcd}
\qquad \text{y} \qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "a"] \arrow[d, equal] & FA \arrow[d, "F(f)"] \\
B \arrow[r, "a'"'] & FA'
\end{tikzcd}
$$

De modo que $(B, r_{(A,a)})$ con $r_{(A,a)} = a$ es un cono de $\phi_B \circ F$, luego existe una única flecha $B \xrightarrow{\eta} FL$ y el resto de verificaciones quedan al lector. $\square$

Definición 2.47: Sea $F \colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor. Se dice que se satisface la ***condición del conjunto de solución*** para un objeto $B \in \operatorname{Obj} \mathscr{B}$ si existe un conjunto $S_B \subseteq \operatorname{Obj} \mathscr{A}$ que cumple lo siguiente: Para todo $A \in \operatorname{Obj} \mathscr{A}$ y todo $B \xrightarrow{f} FA$ existe un $A' \in S_B$, una flecha $B \xrightarrow{b} FA'$ (en $\mathscr{B}$) y una flecha $A' \xrightarrow{h} A$ (en $\mathscr{A}$) tales que $f = b \circ F(h)$. A forma de diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, dashed, "b"] \arrow[dr, "f"'] & FA' \arrow[d, dashed, "F(h)"] & A' \arrow[d, dashed, "h"] \\
& FA & A
\end{tikzcd}
$$

Bajo esta notación, una reflexión es un conjunto de solución óptimo, pero aquí reducimos bastante nuestras hipótesis: ni exigimos unicidad del A', ni exigimos unicidad de la flecha h.

Teorema 2.48 – *Teorema del funtor adjunto*: Sea $\mathscr{A}$ una categoría completa y sea $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor. Son equivalentes:

1. F posee adjunta por la izquierda.
2. F preserva todos los límites inversos pequeños y satisface la condición del conjunto de solución para todo $B \in \operatorname{Obj} \mathscr{B}$.

Demostración: $1 \implies 2$. Por la proposición 2.45.

$2 \implies 1$. Para todo $B \in \operatorname{Obj} \mathscr{B}$, sea S_B el conjunto solución (que es pequeño), luego consideremos la subcategoría $\mathscr{S}_B \subseteq \mathscr{E}_B$ cuyos elementos son los pares (A, b) tales que $A \in S_B$. Esta categoría es pequeña y basta probar que la inclusión es final para concluir. Nótese que F y $\mathscr{B}(B, -)$ preservan toda clase de límites inversos, luego $\mathscr{B}(B, F-)$ también y por el corolario 2.25 se cumple que $\mathscr{E}_B$ también es completa. Finalmente, podemos reescribir la condición del conjunto de solución como que

$$\forall (A, f) \in \operatorname{Obj} \mathscr{E}_B \exists (A', b) \in \operatorname{Obj} \mathscr{S}_B \ \exists (A', b) \xrightarrow{h} (A, f)$$

por lo que se cumplen las hipótesis del corolario 2.29 y luego la inclusión $\mathscr{S}_B \to \mathscr{E}_B$ es un funtor final. □

Para el siguiente teorema necesitaremos la noción de cogenerador, pero podemos ampliarla un poco:

Definición 2.49: Se dice que un conjunto $S \subseteq \operatorname{Obj} \mathscr{C}$ es una ***familia cogeneradora*** si para todo $f, g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ distintos existe algún $G \in S$ y algún $h \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(B, G)$ tal que $f \circ h \neq g \circ h$.

Dualmente, se dice que un conjunto $S \subseteq \operatorname{Obj} \mathscr{C}$ es una ***familia generadora*** si para todo $f, g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ distintos existe algún $G \in S$ y algún $h \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(G, A)$ tal que $h \circ f \neq h \circ g$.

Un objeto G se dice un ***generador*** (resp. ***cogenerador***) si el conjunto $\{G\}$ es una familia generadora (resp. una familia cogeneradora).

También podría notarse que S es una familia cogeneradora si el funtor $\prod_{G \in S} \mathscr{C}(-, G)$ es fiel.

Proposición 2.50: El coproducto (resp. producto) de una familia generadora (resp. una familia cogeneradora) es un objeto generador (resp. cogenerador).

Nótese que una categoría arbitraria podría no tener (co)productos y por ello las definiciones separadas.

> **Teorema 2.51 – *Teorema especial del funtor adjunto*:** Sea $\mathscr{A}$ una categoría completa, bien potenciada y que posee una familia cogeneradora. Un funtor covariante $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ posee adjunta izquierda syss preserva límites inversos (pequeños).

Demostración: Sea $B \in \operatorname{Obj} \mathscr{B}$, por el teorema del funtor adjunto, basta ver que se satisface la condición del conjunto de solución para B. Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia cogeneradora, y definamos

$$S_B := \left\{ S \in \operatorname{Obj} \mathscr{A} : S \hookrightarrow \prod_{i\in I} G_i^{\mathscr{B}(B,FG_i)} \right\}$$

(donde implicitamente elegimos un subobjeto por clase de equivalencia), el cual es un conjunto puesto que $\mathscr{A}$ está bien potenciada.

Sea $B \xrightarrow{b} FA$ para algún $A \in \operatorname{Obj} \mathscr{A}$. Luego podemos considerar el conjunto de flechas $\bigcup_{i\in I} \mathscr{A}(A, G_i)$ que induce una única flecha:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, dashed, "\exists!\alpha"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & \prod_{i\in I} G_i^{\mathscr{A}(A,G_i)} \arrow[dr, two heads, "\pi_f"] & \\
& & G_i
\end{tikzcd}$$

Nótese que α es un monomorfismo puesto que $\{G_i\}_{i\in I}$ es una familia cogeneradora. Análogamente, nótese que para todo $A \xrightarrow{f} G_i$ se induce una flecha $b \circ Ff \in \mathscr{B}(B, FG_i)$, de modo que se tiene el siguiente diagrama conmutativo (en $\mathscr{A}$):

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} G_i^{\mathscr{B}(B,FG_i)} \arrow[d, dashed, "\exists!\beta"] \arrow[ddr, bend left, "\pi_{b\circ Ff}"] & \\
\prod_{i\in I} G_i^{\mathscr{A}(A,G_i)} \arrow[dr, "\pi_f"] & \\
& G_i
\end{tikzcd}$$

Luego podemos construir S como el producto fibrado de α y β, y se satisface que es un subobjeto:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, hook, "\gamma"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & \prod_{i\in I} G_i^{\mathscr{B}(B,FG_i)} \arrow[d, "\beta"] \\
A \arrow[r, hook, "\alpha"] & \prod_{i\in I} G_i^{\mathscr{A}(A,G_i)}
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, tenemos la flecha $S \xrightarrow{a} A$ y falta ver que $B \xrightarrow{b} FA$ se factoriza a través de $F(a)$. Para ello, ahora empleamos que F preserva límites inversos (en particular, productos y productos fibrados) y notamos que la familia de flechas $b \circ F(f) \in \mathscr{B}(B, FG_i)$ inducen una única flecha δ y finalmente concluimos empleando que FS es el producto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, dashed, "\exists!"] \arrow[drr, bend left, "\exists!\delta"] \arrow[ddr, bend right, "b"'] & & & \\
& FS \arrow[r, "F\gamma"] \arrow[d, "Fa"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & \prod_{i\in I} FG_i^{\mathscr{B}(B,FG_i)} \arrow[d, "F\beta"] \arrow[ddr, bend left, "\pi_{b\circ Ff}"] & \\
& FA \arrow[r, "F\alpha"] \arrow[drr, bend right, "Ff"'] & \prod_{i\in I} FG_i^{\mathscr{A}(A,G_i)} \arrow[dr, "\pi_f"] & \\
& & & FG_i
\end{tikzcd}$$

$\square$

Y nótese que podemos ir dualizando $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ y $\mathscr{A}$ junto a $\mathscr{B}$ en el teorema especial del funtor adjunto para obtener resp.:

Corolario 2.52: Se cumplen:

1. Sea $\mathscr{A}$ una categoría completa, bien potenciada y que posee cogenerador. Un funtor contravariante $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ tiene adjunta izquierda syss transforma límites inversos en límites directos.

2. Sea $\mathscr{A}$ una categoría cocompleta, bien copotenciada y que posee generador. Un funtor contravariante $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ tiene adjunta derecha syss transforma límites directos en límites inversos.

3. Sea $\mathscr{A}$ una categoría cocompleta, bien copotenciada y que posee generador. Un funtor covariante $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ tiene adjunta derecha syss preserva límites directos.

2.4* Todo son extensiones de Kan

Definición 2.53: Sean $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$ categorías y sean $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ y $G\colon \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ funtores. Se dice que un par (K,α) es una ***extensión de Kan izquierda*** de G en torno a F si satisface:

- (K,α) corresponde a un funtor $K\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ y una transformación natural $\alpha\colon G \Rightarrow F \circ K$.
- Para todo funtor $H\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ y toda transformación natural $\beta\colon G \Rightarrow F \circ H$, existe una única transformación natural $\gamma\colon K \Rightarrow H$ tal que $\beta = \alpha \circ (F * \gamma)$.

Podemos representar las extensiones de Kan mediante el siguiente diagrama conmutativo (donde la izquierda es un diagrama en la categoría $\mathsf{Fun}(\mathscr{A},\mathscr{C})$ y la derecha está en $\mathsf{Fun}(\mathscr{B},\mathscr{C})$):

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & F \circ K \arrow[d, dashed, "F*\gamma"] \\ & F \circ H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[d, dashed, "\exists!\gamma"] \\ H \end{tikzcd}$$

Notas históricas

La invención e investigación original de los funtores adjuntos fue realizada por **Daniel Kan**, un estudiante de Eilenberg, en su artículo [**33**] (1958). El término «adjunto» era original de ciertos funcionales diferenciables, le fue sugerido a Kan por Eilenberg.

El teorema del funtor adjunto y el teorema especial del funtor adjunto fueron demostrados por **Peter Freyd**, un estudiante doctoral de D. Buchsbaum quién a su vez es un estudiante doctoral de Eilenberg, en su disertación sin publicar de 1960. Por aquél entonces, sin embargo, dado que casi todos los categoristas se conocían entre sí, varios citaban los teoremas de Freyd, cuyas demostraciones terminó por incluir en su libro [**3**] (1964).

3

Categorías abelianas

3.1 Definiciones y exactitud

Definición 3.1: Se dice que una categoría $\mathscr{C}$ es ***abeliana*** si:

CA0. $\mathscr{C}$ posee objetos nulos.

CA1. $\mathscr{C}$ posee productos finitos.

CA1.* $\mathscr{C}$ posee coproductos finitos.

CA2. $\mathscr{C}$ posee núcleos.

CA2.* $\mathscr{C}$ posee conúcleos.

CA3. Todo monomorfismo es un núcleo.

CA3.* Todo epimorfismo es un conúcleo.

Nótese que las condiciones CA1-CA2* pueden sustituirse por «$\mathscr{C}$ es finitamente bicompleta», pero CA0 sigue siendo obligatoria puesto que ser finitamente bicompleto asegura existencia de objetos iniciales y finales, pero no asegura que coincidan.

Sea $X \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$, donde $\mathscr{C}$ es abeliana, entonces por CA2 y CA2* se concluye que podemos definir las siguientes aplicaciones:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\colon \operatorname{Quot} X &\longrightarrow \operatorname{Sub} X \\ f &\longmapsto \ker(f) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \operatorname{Coker}\colon \operatorname{Sub} X &\longrightarrow \operatorname{Quot} X \\ f &\longmapsto \operatorname{coker}(f) \end{aligned}$$

Teorema 3.2: Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana y sea $X \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$. Entonces se satisface que las aplicaciones:

$$\operatorname{Sub} X \underset{\operatorname{Ker}}{\overset{\operatorname{Coker}}{\rightleftarrows}} \operatorname{Quot} X$$

son biyecciones y la una es la inversa de la otra.

Demostración: Sea $Y \xrightarrow{\alpha} X$ un subobjeto, luego por CA3 $\alpha = \ker f$ con $X \xrightarrow{f} A$ y sea $X \xrightarrow{g} B$ con $g := \operatorname{coker}\alpha$, y $Z \xrightarrow{\beta} X$, definido como $\beta := \ker g$. Hemos de probar que β es equivalente (como subobjeto) a α.

$$\begin{tikzcd}
\ker f = Y \arrow[dr, hook, "\alpha"] \arrow[dd, dashed, shift left, "\exists!\bar{\alpha}"] & & A \\
& X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, two heads, "g"'] & \\
\ker g = Z \arrow[ur, hook, "\beta"'] \arrow[uu, dashed, shift left, "\exists!\bar{\beta}"] & & B = \operatorname{coker}\alpha \arrow[uu, dashed, "\exists!\bar{f}"']
\end{tikzcd}$$

Nótese primero que $\alpha \circ f = 0$ (por definición de núcleo), luego por definición de $\operatorname{coker}\alpha$ existe un único $B \xrightarrow{\bar{f}} A$ tal que $g \circ \bar{f} = f$. Análogamente, como $\alpha \circ g = 0$ se tiene que existe un único $Y \xrightarrow{\bar{\alpha}} Z$ tal que $\alpha = \bar{\alpha} \circ \beta$. Como $\beta \circ f = (\beta \circ g) \circ \bar{f} = 0 \circ \bar{f} = 0$, entonces existe un único $Z \xrightarrow{\bar{\beta}} Y$ tal que $\bar{\beta} \circ \alpha = \beta$. Luego $\bar{\alpha} \circ \bar{\beta} \circ \alpha = \alpha$ por lo que $\bar{\alpha} \circ \bar{\beta} = 1_Y$ y análogamente se ve que $\bar{\beta} \circ \bar{\alpha} = 1_Z$.

Por principio de dualidad se obtiene la flecha restante. □

Teorema 3.3: Toda categoría abeliana está balanceada, i.e., si una flecha es un monomorfismo y epimorfismo, entonces es un isomorfismo.

Demostración: Sea $X \xrightarrow{f} Y$ una flecha que es mono- y epimorfismo. Luego $Y \to 0$ es el conúcleo de f, y nótese que $Y \xrightarrow{1_Y} Y$ anula a la flecha $Y \to 0$, y $X \xrightarrow{f} Y$ es su núcleo por el teorema anterior. Por lo tanto, por definición de núcleo, existe g tal que $g \circ f = 1_Y$, es decir, f es una retracción. Análogamente, $0 \to X$ es el núcleo de f, y nótese que $X \xrightarrow{1_X} X$ anula a la flecha $0 \to X$ y $X \xrightarrow{f} Y$ es su conúcleo por el teorema anterior, luego existe h tal que $f \circ h = 1_X$, es decir, f es una sección. Finalmente toda sección y retracción es isomorfismo. □

Definición 3.4: Dados f, g subobjetos de X, se dice que h es su ***intersección*** si es el ínfimo de $\{f, g\}$ en la clase parcialmente ordenada $\operatorname{Sub} X$. Dualmente, dados f, g objetos cociente de X, se dice que h es su ***unión*** si es el supremo de $\{f, g\}$ en la clase parcialmente ordenada $\operatorname{Quot} X$.

Teorema 3.5: En una categoría abeliana, todo par de subobjetos (resp. objetos cociente) posee intersección (resp. unión).

DEMOSTRACIÓN: Sean $A \xrightarrow{\alpha} X$ y $B \xrightarrow{\beta} X$ subobjetos de X. Sea $X \xrightarrow{f} F = \operatorname{coker} \alpha$ y sea $C \xrightarrow{\gamma} B = \ker(\beta \circ f)$. Como $f = \operatorname{coker} \alpha$ syss $\alpha = \ker f$ y $(\gamma \circ \beta) \circ f = 0$, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "\alpha"] & X \arrow[r, two heads, "f"] & F = \operatorname{coker} \alpha \\
\ker(\beta \circ f) = C \arrow[u, dashed, "\exists! g"] \arrow[r, hook, "\gamma"'] & B \arrow[u, hook, "\beta"'] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego sea D un subobjeto menor a A y a B, vale decir, dotado de flechas $D \xrightarrow{\phi_A} A$ y $D \xrightarrow{\phi_B} B$. Se satisface que $\phi_A \circ \alpha = \phi_B \circ \beta$, pero como $\alpha = \ker f$ se cumple que

$$0 = \phi_A \circ 0 = \phi_A \circ (\alpha \circ f) = (\phi_A \circ \alpha) \circ f = \phi_B \circ (\beta \circ f),$$

pero como $C = \ker(\beta \circ f)$, entonces existe un único $D \xrightarrow{h} C$ con $h \circ \gamma = \phi_B$, es decir, D es menor que C como se quería probar. $\square$

Teorema 3.6: En una categoría abeliana, todo par de flechas posee (co)ecualizador.

DEMOSTRACIÓN: Nótese que si $\mathscr{C}$ admite productos (CA1), entonces admite productos de flechas, vale decir:

$$\begin{tikzcd}
 & & X \\
X \arrow[r, dashed, "1_X \Delta f"] \arrow[urr, bend left, "1_X"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & X \times Y \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

Más aún, por el diagrama es claro que $1_X \Delta f$ es una sección, luego es un monomorfismo.

Sean $f, g \in \operatorname{Hom}(X, Y)$, entonces $1_X \Delta f, 1_X \Delta g$ son subobjetos de $X \times Y$, luego poseen intersección K, tal que $K \xrightarrow{k_1} X$ y $K \xrightarrow{k_2} X$ satisfacen que $k_1 \circ (1_X \Delta f) = k_2 \circ (1_X \Delta g)$, y poscomponiendo por π_1 se obtiene que $k_1 = k_2$. Sean $\ell_1, \ell_2 \in \operatorname{Hom}(L, X)$ tales que $\ell_1 \circ (1_X \Delta f) = \ell_2 \circ (1_X \Delta g)$. Por los mismos argumentos se concluye que L es un subobjeto de $X \times Y$ menor a $(1_X \Delta f)$ y $(1_X \Delta g)$, luego menor a K y por ende se concluye el enunciado. □

Teorema 3.7: Una categoría abeliana admite productos fibrados y coproductos fibrados.

Demostración: Sean $A \xrightarrow{f} C$ y $B \xrightarrow{g} C$. Luego nótese que podemos agrandarlo al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "\pi_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

Por el teorema anterior podemos definir $K \xrightarrow{k} A \times B$ como $k = \ker(f, g)$. Finalmente, se verifica que K es el producto fibrado de f y g. □

Teorema 3.8: Una categoría categoría admite imágenes. Y de hecho $\operatorname{Img} f = \ker(\operatorname{coker} f)$.

Demostración: En primer lugar por el enunciado ya tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "\exists! \bar{f}"'] & & B \arrow[r, two heads, "\alpha"] & \operatorname{coker} f \\
& \ker \alpha \arrow[ur, hook, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ahora hemos de probar que $\ker \alpha = \operatorname{Img} f$, vale decir, que dado otro subobjeto bajo el cual f se factorice $\ker \alpha$ es menor. Considere el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & \operatorname{coker}\iota & \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "\exists!\hat{f}"'] & B \arrow[ur, twoheadrightarrow, "\gamma"] \arrow[rr, twoheadrightarrow, "\alpha"] & & \operatorname{coker} f \arrow[ul, dashed, "\exists!\delta"'] \\
 & S \arrow[u, hookrightarrow, "\iota"'] & &
\end{tikzcd}$$

Donde la existencia de δ se sigue de que $f \circ \gamma = \hat{f} \circ (\iota \circ \gamma) = \hat{f} \circ 0 = 0$. Por un teorema anterior se cumple que $\iota = \ker \gamma$, así que para concluir el enunciado basta notar que $\beta \circ \gamma = (\beta \circ \alpha) \circ \delta = 0 \circ \delta = 0$. □

Teorema 3.9: Dado $A \xrightarrow{f} B$ en una categoría abeliana, son equivalentes:

1. f es epimorfismo.
2. $\operatorname{Img} f = B$.
3. $\operatorname{coker} f = 0$.

DEMOSTRACIÓN: $1 \implies 3$. Proposición 1.66.

$3 \implies 2$. $\operatorname{Img} f = \ker(0_{B,0}) = B$.

$2 \implies 1$. Sean $g, h \in \operatorname{Hom}(B, X)$ tales que $f \circ g = f \circ h$. Sea $\ker(g, h) \xrightarrow{k} B$, luego se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & B \arrow[dr, "g"] & \\
A \arrow[r, "\exists!\bar{f}"] \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & K \arrow[ur, hookrightarrow, "k"'] \arrow[dr, hookrightarrow, "k"] & & C \\
 & & B \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Pero K es un subobjeto de B que factoriza a f, luego existe $B \xrightarrow{\varphi} K$ tal que $\varphi \circ k = 1_B$ (por definición de imagen), luego

$$g = 1_B \circ g = (\varphi \circ k) \circ g = \varphi \circ (k \circ g) = \varphi \circ (k \circ h) = 1_B \circ h = h. \qquad \square$$

Teorema 3.10: Una categoría abeliana posee imágenes epimórficas.

Definición 3.11: Sea $A \xrightarrow{f} B$. Se le llama ***coimagen*** de f, al menor objeto cociente $A \xrightarrow{c} C$ que factoriza a f. Es decir, existe un único $C \xrightarrow{\bar{f}} B$

tal que $f = c \circ \bar{f}$ (diagrama de la izquierda) y si $A \xrightarrow{q} Q$ es un objeto cociente tal que existe $Q \xrightarrow{\hat{f}} B$ con $f = q \circ \hat{f}$, entonces existe un único $C \xrightarrow{h} Q$ con $c \circ h = q$ (diagrama de la derecha).

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "c"'] & & B \\
& C \arrow[ur, dashed, "\exists! \bar{f}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "c"'] \arrow[dr, two heads, "q"] & B \\
C \arrow[ur] & Q \arrow[u] \arrow[l, dashed]
\end{tikzcd}
$$

Se denota por $\operatorname{coim} f$ a la coimagen de f y se dice que ésta es ***monomórfica*** si $\bar{f}$ es un monomorfismo.

Dualizando los últimos tres teoremas se tiene que:

Teorema 3.12: Dado $A \xrightarrow{f} B$ en una categoría abeliana, se satisface:

1. f posee coimagen y, de hecho, $\operatorname{coim} f = \operatorname{coker}(\ker f)$.
2. f es monomorfismo syss $\operatorname{coim} f = A$ syss $\ker f = 0$.
3. La coimagen de f es monomórfica.

Teorema 3.13: Dados $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ en una categoría abeliana, son equivalentes:

1. $\ker g = \operatorname{im} f$.
2. $\operatorname{coim} g = \operatorname{coker} f$.
3. $f \circ g = 0$ y $\ker g \circ \operatorname{coker} f = 0$.

Demostración: $1 \implies 3$. Si $\ker g = \operatorname{im} f = \ker(\operatorname{coker} f)$, entonces $\ker g \circ \operatorname{coker} f = 0$ por definición del núcleo. Por definición de la imagen se tienen las flechas $A \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{im} f$ y $\operatorname{im} f \xrightarrow{\iota} B$ con $f = \bar{f} \circ \iota$. Luego como $\operatorname{im} f = \ker g$, entonces $\iota \circ g = 0$, y luego $f \circ g = \bar{f} \circ (\iota \circ g) = 0$.

$3 \implies 1$. Como $\ker g$ es un subobjeto que factoriza a f, entonces $\operatorname{im} f \leq \ker g$ (en $\operatorname{Sub} B$). Para ver la otra desigualdad recordamos que $\operatorname{im} f = \ker(\operatorname{coker} f)$ y como $\ker g \circ \operatorname{coker} f = 0$, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo (por definición de núcleo):

$$\begin{tikzcd} \ker g \arrow[rr, hook] \arrow[dr, dashed, "\exists!"'] & & B \arrow[r, two heads] & \operatorname{coker} f \\ & \operatorname{im} f \arrow[ur, hook] & & \end{tikzcd}$$

De lo que se sigue que $\ker g \le \operatorname{im} f$.

$2 \iff 1$. Por principio de dualidad. □

Definición 3.14: Dada una sucesión de flechas:

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

(formalmente un diagrama desde una subcategoría de $\mathbb{Z}^{\mathrm{op}}$). Se dice que ésta es una ***sucesión exacta*** si $\ker(\alpha_n) = \operatorname{im}(\alpha_{n+1})$ para todo n para el que está definido.

El hecho de que los índices estén tradicionalmente «dados vuelta» es por sus aplicaciones concretas a la homología en topología algebraica.

Proposición 3.15: En una categoría abeliana se satisface:

1. $0 \longrightarrow K \xrightarrow{k} A$ es exacta syss k es un monomorfismo.
2. $0 \longrightarrow K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{f} B$ es exacta syss $k = \ker f$.
3. $B \xrightarrow{c} F \longrightarrow 0$ es exacta syss c es epimorfismo.
4. $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{c} F \longrightarrow 0$ es exacta syss $c = \operatorname{coker} f$.
5. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ es exacta syss f es isomorfismo.
6. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ es exacta syss f es monomorfismo y $g = \operatorname{coker} f$.

Admitimos la siguiente notación:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "\iota_A"] \arrow[drr, bend left, "x"] & & \\ & A \amalg B \arrow[r, "\binom{x}{y}"] & X \\ B \arrow[ur, "\iota_B"'] \arrow[urr, bend right, "y"'] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & & A \\ X \arrow[r, "{(x,y)}"] \arrow[urr, bend left, "x"] \arrow[drr, bend right, "y"'] & A \times B \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

En particular, $A \amalg B \xrightarrow{\binom{1}{0}} A$ y $A \xrightarrow{(1,0)} A \times B$ demuestran que ι_A es una sección y π_A es una retracción.

Teorema 3.16: Las sucesiones:

$$0 \longrightarrow A \xhookrightarrow{\iota_A} A \amalg B \xrightarrow{\binom{0}{1}} B \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{(1,0)} A \times B \overset{\pi_B}{\twoheadrightarrow} B \longrightarrow 0$$

son exactas.

Demostración: Ya vimos que ι_A es monomorfismo, luego basta ver que $\binom{0}{1} = \operatorname{coker}(\iota_A)$. En primer lugar, por definición de $\binom{0}{1}$ se cumple que $\iota_A \circ \binom{0}{1} = 0$, por lo que se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \amalg B \arrow[rr, "\binom{0}{1}"] \arrow[dr, two heads] & & B \\
& B \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] &
\end{tikzcd}$$

La flecha restante se deduce de que si $A \amalg B \xrightarrow{\binom{x}{y}} X$, entonces tenemos que $x = \iota_A \circ \binom{x}{y} = 0$. Luego el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \amalg B \arrow[rr, "\binom{0}{y}"] \arrow[dr, "\binom{0}{1}"'] & & X \\
& B \arrow[ur, "y"'] &
\end{tikzcd}$$

Y se comprueba que $\operatorname{coker}(\iota_A) = \binom{0}{1}$ como se quería probar. El restante sale por dualidad. $\square$

Proposición 3.17: La intersección de $A \xrightarrow{\iota_A} A \amalg B$ y $B \xrightarrow{\iota_B} A \amalg B$ es nula.

Teorema 3.18: En una categoría abeliana, la flecha:

$$A \amalg B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} A \times B$$

es un isomorfismo.

Demostración: Sea K el núcleo de la flecha. Entonces, nótese que el siguente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, dashed] & A \amalg B \arrow[r, "\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}"] \arrow[rr, bend right, "\binom{1}{0}"'] & A \times B \arrow[r, two heads, "\pi_A"] & A \\
A = \ker \binom{1}{0} \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

Por lo que $K \leq A$ y análogamente $K \leq B$, luego $K \leq A \cap B = 0$ por la proposición anterior. Por dualidad se satisface que el conúcleo es nulo. □

Ésta es una de las particularidades de las categorías abelianas.

Definición 3.19: Se denota $A \oplus B := A \amalg B \simeq A \times B$ para enfatizar que son el mismo objeto. Se definen la flecha diagonal y la suma como:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "\delta"] \arrow[r, shift right, "\binom{1}{1}"'] & A \oplus A
\end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}
A \oplus A \arrow[r, shift left, "\sigma"] \arrow[r, shift right, "(1,1)"'] & A
\end{tikzcd}$$

Sean $x, y \in \operatorname{Hom}(A, B)$, se definen las sumas como:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta"] \arrow[rr, bend right, "x +_L y"'] & A \oplus A \arrow[r, "\binom{x}{y}"] & B
\end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}
A \arrow[r, "(x,y)"] \arrow[rr, bend right, "x +_R y"'] & B \oplus B \arrow[r, "\sigma"] & B
\end{tikzcd}$$

Proposición 3.20: Sea $A \xrightarrow{x} B$ en una categoría abeliana. Entonces

$$x \underset{L}{+} 0 = 0 \underset{L}{+} x = x = x \underset{R}{+} 0 = 0 \underset{R}{+} x.$$

Proposición 3.21: Sean $x, y \in \operatorname{Hom}(A, B)$, $u \in \operatorname{Hom}(X, A)$ y $v \in \operatorname{Hom}(B, Y)$, entonces:

$$xv \underset{L}{+} yv = (x \underset{L}{+} y) \circ v, \qquad ux \underset{R}{+} uy = u \circ (x \underset{R}{+} y).$$

Teorema 3.22: $+_L$ y $+_R$ coinciden. Además son asociativas y conmutativas. Más aún, $(\operatorname{Hom}(A, B), +)$ es un grupo abeliano y $(\operatorname{End}(A), +, \circ)$ es un anillo conmutativo unitario.

Demostración: Considere el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta"] \arrow[rr, bend left, "(w+_R y)+_L(x+_R z)"] & A \oplus A \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[rr, bend right, "(w+_L y)+_R(x+_L z)"'] & B \oplus B \arrow[r, "\sigma"] & B \end{tikzcd}$$

Empleando $y = z = 0$ se concluye que $+_L = +_R$.

La asociatividad sale de un manejo ingenioso usando las proposiciones anteriores y cambiando la aplicación del diagrama de arriba.

Claramente la flecha nula es el 0 del grupo y así sólo falta probar la existencia de inversas. Consideremos la flecha:

$$K \xrightarrow{k} A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} A \oplus B$$

donde k es el núcleo. Como el codominio de k es $A \oplus B$, entonces $k = (a, b)$, por lo que se tiene que $(a, ax + b) = (0, 0) = 0$ y se concluye que $a = b = 0$, es decir, $K = 0$ y la flecha es un monomorfismo. Análogamente se concluye que es un epimorfismo y así es isomorfismo de inversa

$$A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} A \oplus B$$

por lo que, $x + y = 0$ como se quería ver. □

Teorema 3.23: En una categoría abeliana, dado un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & B \arrow[d, "\psi"] \\ A \arrow[r, "\phi"'] & C \end{tikzcd}$$

Sea $K \xrightarrow{k} P$ tal que $k = \ker \beta$, entonces $\ker \phi = k \circ \alpha$. En particular, β es un monomorfismo syss ϕ lo es.

Demostración: Sea $L \xrightarrow{\lambda} A$ definido como $\lambda = \ker \phi$, queremos probar que $K \cong L$. En primer lugar, nótese que

$$0 = (k \circ \beta) \circ \psi = (k \circ \alpha) \circ \phi,$$

por lo que existe una única flecha desde $K \to L$ que hace conmutar el diagrama. En segundo lugar, nótese que, por definición, $\lambda \circ \phi = 0$, luego si consideramos $0_{L,B} \in \operatorname{Hom}(L, B)$ se tiene que el diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[dr, dashed, "\exists ! \theta"] \arrow[ddr, bend right, "\lambda"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & B \arrow[d, "\psi"] \\
& A \arrow[r, "\phi"'] & C
\end{tikzcd}
$$

y la flecha θ existe por definición de producto fibrado. Es decir, $\theta \circ \beta = 0$, por lo que existe una única flecha desde $L \to K$, y eso basta para concluir el enunciado. $\square$

Proposición 3.24: En una categoría abeliana, dado el siguiente diagrama (no necesariamente conmutativo):

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\phi"] \\
B \arrow[r, "\psi"] & C
\end{tikzcd}
$$

considere la sucesión:

$$P \xrightarrow{(\alpha,\beta)} A \oplus B \xrightarrow{\binom{\phi}{-\psi}} C$$

1. $P \longrightarrow A \oplus B \longrightarrow C$ se anula syss el diagrama conmuta.
2. La sucesión $0 \longrightarrow P \longrightarrow A \oplus B \longrightarrow C$ es exacta syss P es el producto fibrado de ϕ, ψ.
3. La sucesión $P \longrightarrow A \oplus B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ es exacta syss C es la suma amalgamada de α, β.

Teorema 3.25: Dado el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\psi"] \\
A \arrow[r, "\phi"'] & C
\end{tikzcd}
$$

1. Si P es un producto fibrado y ϕ es epimorfismo, entonces β también.

2. Si C es un coproducto fibrado y α es monomorfismo, entonces ψ también.

Demostración: Nótese que los enunciados son duales, así pues basta probar sólo uno. Si el diagrama es una suma amalgamada, entonces por la proposición anterior, la sucesión

$$P \xrightarrow{(\alpha,\beta)} A \oplus B \xrightarrow{\binom{\phi}{-\psi}} C \longrightarrow 0$$

es exacta. Si α es un monomorfismo, entonces como

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "(\alpha,\beta)"] \arrow[rr, hook, bend right, "\alpha"'] & A \oplus B \arrow[r, two heads, "\pi_1"] & A \end{tikzcd}$$

entonces se concluye que $P \xrightarrow{(\alpha,\beta)} A \oplus B$ es un monomorfismo, así que por el teorema anterior, P es un producto fibrado, y luego ψ es monomorfismo syss α lo es. □

§3.1.1 Los teoremas de isomorfismos. Terminamos con unos lemas clásicos de sucesiones exactas.

Lema 3.26: Considere el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_{11} \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "h_1"] & A_{12} \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "h_2"] & B \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & A_{21} \arrow[r, "\beta_1"'] & A_{22} \arrow[r, "\beta_2"'] & B \end{tikzcd}$$

tal que la fila inferior es exacta. Entonces A_{11} es el producto fibrado de h_2, β_1 syss la fila superior es exacta.

Demostración: $\Longrightarrow$. Basta ver que $\alpha_1 = \ker \alpha_2$. En primer lugar nótese que

$$\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ 1_B = h_1 \circ \beta_1 \circ \beta_2 = h_1 \circ 0 = 0.$$

Así pues se tiene que:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rrd, hook, bend left, "\iota"] & & \\
& A_{11} \arrow[ul, dashed, "\exists!"'] \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "h_1"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & A_{12} \arrow[d, "h_2"] \\
& A_{21} \arrow[r, "\beta_1"'] & A_{22}
\end{tikzcd}$$

Nos falta una flecha para concluir por la definición de producto fibrado. Para ello nótese que

$$(\iota \circ h_2) \circ \beta_2 = \iota \circ \alpha_2 \circ 1_B = 0.$$

Pero $\beta_1 = \ker \beta_2$, así que de ahí se obtiene la flecha buscada.

$\Longleftarrow$. Sea X tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] & A_{12} \arrow[d, "h_2"] & \\
A_{21} \arrow[r, "\beta_1"'] & A_{22} \arrow[r, "\beta_2"] & B
\end{tikzcd}$$

como

$$\phi \circ \alpha_2 = \phi \circ h_2 \circ \beta_2 = \psi \circ \beta_1 \circ \beta_2 = 0,$$

entonces

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, dashed, "\exists!\theta"'] & & A_{12} \\
& A_{11} = \ker \alpha_2 \arrow[ur, "\alpha_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Aún basta ver que $\theta \circ h_1 = \psi$. Para ello nótese que

$$\psi \circ \beta_1 = \phi \circ h_2 = \theta \circ \alpha_1 \circ h_2 = \theta \circ h_1 \circ \beta_1,$$

pero β_1 es monomorfismo porque la fila inferior es exacta, luego se concluye el enunciado. $\square$

Lema 3.27: En una categoría abeliana, dado el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & A \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "\beta"] & B &
\end{tikzcd}$$

en donde la fila superior es exacta. Entonces la fila inferior es exacta syss la columna derecha es exacta.

Demostración: $\Longleftarrow$. Si la columna es exacta, entonces h es monomorfismo y se tiene por la proposición 1.67 que

$$f = \ker \alpha = \ker(\alpha \circ h) = \ker \beta.$$

$\Longrightarrow$. Primero extendamos el diagrama al siguiente:[1]

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d, dotted] & \\
 & & P \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & \ker h \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\iota"] & 0 \\
0 \arrow[r, dotted] & X \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & Y \arrow[r, dotted, "\alpha"] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, dotted] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r, dotted] & X \arrow[r, dotted] & Y \arrow[r, "\beta"] & B &
\end{tikzcd}$$

donde P es el producto fibrado de α, ι. La fila superior es exacta, puesto que α es epimorfismo, luego ϕ lo es. Como se puede ver $\psi \circ \beta = 0$ de lo que se sigue que ψ se factoriza en $\psi = \theta \circ f$, pues $f = \ker \beta$. Luego $\psi \circ \alpha = \phi \circ \iota = 0$. $\square$

Lema 3.28: En una categoría abeliana, dado el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & A_{11} \arrow[r] \arrow[d] & A_{12} \arrow[r] \arrow[d] & A_{13} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & A_{21} \arrow[r] \arrow[d] & A_{22} \arrow[r] \arrow[d] & A_{23} \\
0 \arrow[r] & A_{31} \arrow[r] \arrow[d] & A_{32} & \\
 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

en donde las columnas y la fila central son exactas. Entonces la fila superior es exacta syss la fila inferior es exacta.

[1] Aquí, las flechas punteadas lo están para restarles importancia, y enfocarse en los caminos destacados.

Demostración: Como $A_{13} \to A_{23}$ es un monomorfismo, entonces $0 \to A_{11} \to A_{12} \to A_{13}$ es exacta syss

$$0 \longrightarrow A_{11} \longrightarrow A_{12} \longrightarrow A_{23}$$

es exacta, lo que equivale, por el lema 3.26, a ver que en el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_{11} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & A_{12} \arrow[d] \\ A_{21} \arrow[r] & A_{22} \end{tikzcd}$$

A_{11} es un producto fibrado, lo que por el mismo lema (volteando el diagrama), es equivalente a que la sucesión

$$0 \longrightarrow A_{11} \longrightarrow A_{21} \longrightarrow A_{32}$$

es exacta, pero como $A_{21} \to A_{31}$ es epimorfismo, esto equivale a que $0 \to A_{31} \to A_{32}$ es exacta. □

Lema 3.29 (de 3×3): En una categoría abeliana, dado el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A_{11} & \to & A_{12} & \to & A_{13} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A_{21} & \to & A_{22} & \to & A_{23} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A_{31} & \to & A_{32} & \to & A_{33} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

donde las columnas y la fila central son exactas. Entonces la fila superior es exacta syss la fila inferior lo es.

Para simplificar notación, dado un monomorfismo $A \xrightarrow{f} B$, denotamos $\operatorname{coker} f := B/A$, así se extiende a la sucesión exacta $0 \to A \to B \to B/A \to 0$. El primer teorema de isomorfismos: si $A \xrightarrow{f} B$ es epimorfismo, entonces $B \cong A/\ker f$, es ahora una definición.

Teorema 3.30 – *Teoremas de isomorfismos de Noether*: En una categoría abeliana $\mathscr{C}$:

1. Dada una cadena de subobjetos $A \hookrightarrow B \hookrightarrow C$ se tiene que
$$\frac{C/A}{B/A} \cong \frac{C}{B}.$$

2. Sean $A_{12} \hookrightarrow A_{22}$ y $A_{21} \hookrightarrow A_{22}$ subobjetos con $A_{12} \cup A_{21} = A_{22}$. Entonces:
$$\frac{A_{12}}{A_{12} \cap A_{21}} \cong \frac{A_{12} \cup A_{21}}{A_{21}}.$$

Demostración:

1. Construimos el siguiente diagrama conmutativo:
$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & C/B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B/A \arrow[r] \arrow[d] & C/A \arrow[r] \arrow[d] & C/B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$
y aplicamos el lema de 3×3.

2. Construimos el siguiente diagrama conmutativo:
$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_{11} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & A_{12} \arrow[r] \arrow[d] & A_{12}/A_{11} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{21} \arrow[r] \arrow[d] & A_{22} \arrow[r] \arrow[d] & A_{22}/A_{21} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{21}/A_{11} \arrow[r] \arrow[d] & A_{22}/A_{12} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$
y empleamos el hecho de que A_{11} es un producto fibrado. $\square$

§3.1.2 Las serpientes y sus amigos. Ahora querremos deducir el lema de la serpiente, para ello seguimos **[25]**.

Lema 3.31: Dado el siguiente diagrama conmutativo en una categoría abeliana:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \end{tikzcd}$$

tal que B es el producto fibrado de g', γ y tal que la fila inferior es exacta, entonces existe un único f tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, dashed, "\exists! f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \end{tikzcd}$$

y la fila superior es exacta.

Demostración: Si consideramos la flecha $A' \xrightarrow{0} C$, entonces A' ecualiza a g', γ pues $f' \circ g' = 0 = 0 \circ \gamma$, luego existe una única flecha $f \in \operatorname{Hom}(A', B)$ que hace conmutar el diagrama por definición de producto fibrado. De ésto también se sigue que $f \circ g = 0$, falta comprobar la exactitud. Para ello, por el teorema 3.23 se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \ker g \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A' \arrow[ur, two heads] \arrow[r, two heads] & \operatorname{im} f' = \ker g' \arrow[r, hook] & B' \end{tikzcd}$$

pero como $\ker g$ es un subobjeto de B que se factoriza a través de un epimorfismo, entonces es la imagen (por la proposición 1.53). $\square$

Empleando éste lema y la definición del núcleo podemos concluir lo siguiente:

Lema 3.32 (agudo de 3×3): Dado el siguiente diagrama conmutativo en una categoría abeliana, con filas y columnas exactas:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
 & K_1 \arrow[d] & K_2 \arrow[d] & K_3 \arrow[d] \\
 & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & B_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & C_2
\end{tikzcd}
$$

entonces existen unas únicas flechas que completan el diagrama y tales que la fila:

$$K_1 \longrightarrow K_2 \longrightarrow K_3$$

es exacta.

Lema 3.33 (de los dos cuadrados): Dado el siguiente diagrama en una categoría abeliana:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dd, "\alpha"'] & & B \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dd, "\beta"] & & C \arrow[dd, "\gamma"] \\
 & Q & & P \arrow[ur, "\sigma"'] \arrow[dl, "\sigma'"] & \\
A' \arrow[rr, "\psi'"'] \arrow[ur, "\tau'"] & & B' \arrow[rr, "\phi'"'] & & C
\end{tikzcd}
$$

en donde las filas son exactas, P es el producto fibrado de ϕ', γ y Q es el coproducto fibrado de α, ψ. Entonces:

1. Existe una única flecha $Q \xrightarrow{\theta} B'$ tal que $\tau\theta = \beta$ y $\tau'\theta = \psi'$.
2. Existe una única flecha $B \xrightarrow{\rho} P$ tal que $\rho\sigma' = \beta$ y $\rho\sigma = \phi$.
3. Existe una única flecha $Q \xrightarrow{\eta} P$ tal que $\eta\sigma' = \theta$, $\tau\eta = \rho$ y $\tau'\eta\sigma = 0$.

Más aún, si ψ' es monomorfismo, entonces η también lo es, y si ϕ es epimorfismo, entonces η también lo es.

Demostración: La existencia y unicidad de θ, ρ se derivan de la definición de coproducto fibrado y producto fibrado resp. En primer lugar, apliquese el lema 3.31 para obtener una flecha $\mu \in \mathrm{Hom}(A', P)$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, dashed, "\exists! \mu"] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\sigma'"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
A' \arrow[r, "\psi'"'] & B' \arrow[r, "\phi'"'] & C'
\end{tikzcd}$$

conmuta y tiene filas exactas. Luego $\alpha\mu\sigma = 0 = \psi\phi = \psi\rho\sigma$ y $\alpha\mu\sigma' = \alpha\psi' = \psi\beta = \psi\rho\sigma'$. Por definición del producto fibrado se concluye que $\alpha\mu = \psi\rho$. Luego, por definición del coproducto fibrado, se concluye que existe un único $\eta \in \operatorname{Hom}(Q, P)$ tal que $\tau'\eta = \mu$, $\tau\eta = \rho$ y $\tau'\eta\sigma = \mu\sigma = 0$. Dicho η además satisface que $\tau\eta\sigma' = \rho\sigma' = \beta = \tau\theta$ y $\tau'\eta\sigma' = \mu\sigma' = \psi' = \tau'\theta$; por lo que, puesto que Q es coproducto fibrado, se concluye que $\eta\sigma' = \theta$.

Si $\psi' = \mu\sigma'$ fuese monomorfismo, entonces $\mu = \tau'\eta$ también y debido al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dotted] & A' \arrow[r, dotted, "\tau'"] \arrow[d, equal] & Q \arrow[r, dotted, "\eta\sigma"] \arrow[d, "\eta"] & C \arrow[d, hook, "1_C"] \\
0 \arrow[r, dotted] & A' \arrow[r, "\tau'\eta", "\mu"'] & P \arrow[r, dotted, "\sigma"'] & C
\end{tikzcd}$$

donde la fila superior y la fila inferior son exactas, se concluye que Q ha de ser un producto fibrado y debido a que 1_C es un monomorfismo, entonces η también. Dualizando un poco el argumento se concluye que si ϕ es un epimorfismo, entonces η también. $\square$

Lema 3.34 (del triángulo): Dado el siguiente diagrama conmutativo en una categoría abeliana:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "\xi"] \arrow[dd, "\xi\zeta"'] & \\
& L \arrow[dl, "\zeta"] \\
M &
\end{tikzcd}$$

induce la siguiente sucesión exacta:

$$\ker(\xi\zeta) \longrightarrow \ker\zeta \xrightarrow{\omega} \operatorname{coker}\xi \longrightarrow \operatorname{coker}(\xi\zeta)$$

donde ω viene dado por por

$$\begin{tikzcd}
\ker\zeta \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\omega"'] & L \arrow[r] & \operatorname{coker}\xi
\end{tikzcd}$$

Demostración: Aplicamos el lema agudo de 3×3 al diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\ker(\xi\zeta) \arrow[r] \arrow[d] & \ker\zeta \arrow[r, "\omega"] \arrow[d] & \operatorname{coker}\xi \arrow[d, equal] \\
K \arrow[r, "\xi"] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d, "\zeta"] & \operatorname{coker}\xi \arrow[d] \\
M \arrow[r, equal] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

y así obtenemos que la sucesión del enunciado es exacta en $\ker\zeta$ y dualmente que lo es en $\operatorname{coker}\xi$. □

Finalmente podemos concluir:

Teorema 3.35 – *Lema de la serpiente*: Dado el siguiente diagrama en una categoría abeliana con filas exactas:

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\psi'"'] & B' \arrow[r, "\phi'"'] & C' &
\end{tikzcd}
$$

se induce la siguiente sucesión exacta:

$$\ker\alpha \longrightarrow \ker\beta \longrightarrow \ker\gamma \xrightarrow{\omega} \operatorname{coker}\alpha \longrightarrow \operatorname{coker}\beta \longrightarrow \operatorname{coker}\gamma$$

Demostración: La exactitud de

$$\ker\alpha \longrightarrow \ker\beta \longrightarrow \ker\gamma \qquad \operatorname{coker}\alpha \longrightarrow \operatorname{coker}\beta \longrightarrow \operatorname{coker}\gamma$$

se sigue del lema agudo de 3×3 y de su dual. Adoptando la notación del lema de los dos cuadrados y aplicando el lema 3.31 se obtiene el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker\gamma \arrow[r, dashed, "\exists!\kappa"] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[d, "\sigma'"] & B' \arrow[d, "\phi"] \\
0 \arrow[r] & \ker\gamma \arrow[r] & C \arrow[r, "\gamma"'] & C'
\end{tikzcd}
$$

donde κ es monomorfismo. Dualmente se obtiene un epimorfismo $Q \xrightarrow{\lambda} \operatorname{coker}\alpha$ tal que $\tau'\lambda = \pi$, donde $A' \xrightarrow{\pi} \operatorname{coker}\alpha$, y tal que la sucesión:

$$B \xrightarrow{\ \tau\ } Q \xrightarrow{\ \lambda\ } \operatorname{coker}\alpha$$

es exacta.

Por hipótesis, y por el lema de los dos cuadrados, el $\eta \in \operatorname{Hom}(Q,P)$ es un isomorfismo y se construye el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dd, "\rho=\tau\eta"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
& B' \arrow[dl, "\sigma'=\eta^{-1}\theta"] \\
P &
\end{tikzcd}$$

Finalmente, empleando el hecho de que κ es monomorfismo y λ epimorfismo se tiene que $\operatorname{coker}\rho = \operatorname{coker}\tau = \operatorname{coker}\alpha$ y que $\ker(\sigma') = \ker\gamma$, por lo que, por el lema del triángulo, se tiene que la siguiente es una sucesión exacta:

$$\ker\beta \longrightarrow \ker\gamma \xrightarrow{\ \omega\ } \operatorname{coker}\alpha \longrightarrow \operatorname{coker}\beta$$

Lo que completa la demostración. □

En varios casos se suele invocar una variación del lema de la serpiente, donde ψ es monomorfismo y ϕ' es epimorfismo, en cuyo caso suele expresarse el lema mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker\psi \arrow[r] & \ker\alpha \arrow[r] \arrow[d] & \ker\beta \arrow[r] \arrow[d] & \ker\gamma \arrow[d] \arrow[ddd, to=4-3, bend left, "\omega"] & & \\
& & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 & \\
& 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\psi'"'] \arrow[d] & B' \arrow[r, "\phi'"'] \arrow[d] & C' \arrow[d] & & \\
& & \operatorname{coker}\alpha \arrow[r] & \operatorname{coker}\beta \arrow[r] & \operatorname{coker}\gamma \arrow[r] & \operatorname{coker}(\phi') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

A éste ω se le dice el ***homomorfismo conector***.

3.2 Definiciones alternativas y tipos de funtores

§3.2.1 Categorías aditivas. Tecnicamente hablando, uno debería definir una categoría abeliana de manera segmentada (similar al caso de semigrupos, monoides y grupos), pero inicialmente no es obvio que la propiedad que define a las «categorías menos-que-abelianas» también es común a las categorías abelianas. De esa manera favorecimos la intuición antes que la eficiencia.

Definición 3.36: Se dice que una categoría $\mathscr{C}$ es:

Preaditiva Si para todo $A, B, C \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ se cumple que $\mathscr{C}(A, B)$ es un grupo abeliano y que la composición

$$\circ\colon \mathscr{C}(A, B) \times \mathscr{C}(B, C) \to \mathscr{C}(A, C)$$

es un homomorfismo de grupos para cada coordenada.

Aditiva Si es preaditiva, tiene objetos nulos, productos y coproductos (finitos).

Proposición 3.37: En una categoría preaditiva $\mathscr{C}$ son equivalentes:

1. $\mathscr{C}$ posee objeto inicial.
2. $\mathscr{C}$ posee objeto final.
3. $\mathscr{C}$ posee objeto nulo.

Demostración: Claramente $3 \implies 1$, veamos el converso: Sea $\mathbf{0}$ un objeto inicial de $\mathscr{C}$, tenemos que ver que también es final. Como $\mathbf{0}$ es inicial, entonces $\mathscr{C}(\mathbf{0}, A)$ sólo tiene un elemento y es el grupo trivial, en particular $\{1_{\mathbf{0}}\} = \mathscr{C}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Sea $f \in \mathscr{C}(A, \mathbf{0})$, luego $f \circ 1_{\mathbf{0}} = f$, pero la composición es un homomorfismo de grupos, luego, denotando $1_{\mathbf{0}} = e$, entonces

$$(f \circ e) + (f \circ e) = f \circ (e +' e) = f \circ e \implies f \circ e = 0.$$

Por lo tanto, $\mathscr{C}(A, \mathbf{0})$ es un grupo trivial.

$2 \iff 3$. Por principio de dualidad. □

Nótese que hay varios teoremas en donde no empleamos los axiomas exclusivos de categorías abelianas, sino que probamos que ciertos objetos eran el (co)núcleo (no invocamos su existencia, ni la de objetos nulos). Más aún, en varias sucesiones exactas, el uso del objeto nulo está para enfatizar que una flecha es un mono- o un epimorfismo. De modo que tenemos demostrado el siguiente resultado:

Proposición 3.38: En una categoría preaditiva $\mathscr{C}$ el producto y coproducto finito son isomorfos.

De modo que podríamos redefinir una categoría aditiva como aquella que posee biproductos finitos.

El lector podría preguntarse: ¿qué propiedades poseen las categorías abelianas que las aditivas no? Pues, nótese que el primerísimo teorema que vimos es exclusivo de categorías abelianas; en consecuente, las categorías aditivas también podrían no ser balanceadas; las categorías aditivas podrían no tener (co)ecualizadores y finalmente si $\ker f = 0$ podría darse que f no sea un monomorfismo.

Proposición 3.39: Sea $\mathscr{C}$ una categoría preaditiva y sea $G\colon \mathscr{C} \to \mathsf{Ab}$ un funtor. Entonces G tiene adjunta por la izquierda syss es representable.

DEMOSTRACIÓN: Hacemos el mismo truco que con conjuntos, pero notando que si H es un grupo abeliano, entonces $H \cong \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, H)$. Sea $F \dashv G$, entonces:

$$GX \cong \operatorname{Hom}_{\mathsf{Ab}}(\mathbb{Z}, GX) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(F\mathbb{Z}, X),$$

luego con $A := F\mathbb{Z}$ vemos que $G \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, -)$. □

Veamos una aplicación del teorema del funtor adjunto.

Teorema 3.40: Sea $\mathscr{C}$ una categoría aditiva bien potenciada y bien copotenciada. Entonces, para todo $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$, el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, -)\colon \mathscr{C} \to \mathsf{Grp}$ tiene adjunta izquierda.

DEMOSTRACIÓN: El funtor $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, -)$ preserva límites inversos así que basta verificar la condición del conjunto solución. Para todo $G \in \operatorname{Obj}(\mathsf{Grp})$ definamos S_G como el conjunto de todos los objetos cociente de $\coprod_{g\in G} A$. Sea $G \xrightarrow{f} \mathscr{C}(A, B)$, vale decir, para todo $g \in G$ se induce una flecha $A \xrightarrow{f(g)} B$, de modo que por definición del coproducto se construye el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \coprod_{g\in G} A \arrow[r, dashed, "\exists!\psi"] & B \\ A \arrow[u, "\iota_g"] \arrow[ur, "f(g)"'] & \end{tikzcd}$$

Luego, como $\mathscr{C}$ es aditiva, podemos definir B' como la imagen de ψ:

$$\begin{tikzcd} & B' \arrow[dr, hook, "b"] & \\ \coprod_{g\in G} A \arrow[ur, two heads] \arrow[rr, "\psi"'] & & B \end{tikzcd}$$

Finalmente es fácil ver que f se factoriza a través de $\mathscr{C}(A, B') \xrightarrow{h^x} \mathscr{C}(A, B)$. □

Ya vimos el caso de Mod_Λ, pero más generalmente, si $\mathscr{C}$ es una categoría con las hipótesis previas, denotamos $(A \otimes_{\mathscr{C}} -) \dashv \mathscr{C}(A, -)$.

§3.2.2 Funtores aditivos y exactos.

Definición 3.41: Dados $A, B, S \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ en una categoría (pre)aditiva y dadas las flechas

$$A \xrightarrow{u_A} S \xrightarrow{p_A} A, \qquad B \xrightarrow{u_B} S \xrightarrow{p_B} S,$$

se dice que corresponden a un ***sistema de suma directa*** si $S = A \oplus B$, $u_A = (1, 0)$, $u_B = (0, 1)$, $p_A = \binom{1}{0}$ y $p_B = \binom{0}{1}$.

Teorema 3.42: En una categoría abeliana, dados

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u_A"] \arrow[rr, bend right, "1_A"'] & S \arrow[r, "p_A"] & A & B \arrow[r, "u_B"] \arrow[rr, bend right, "1_B"'] & S \arrow[r, "p_B"] & B \\ A \arrow[r, "u_A"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & S \arrow[r, "p_B"] & B & B \arrow[r, "u_B"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & S \arrow[r, "p_A"] & A \end{tikzcd}$$

tales que $p_A u_A + p_B u_B = 1_S$, entonces forman un sistema de suma directa.

Demostración: Dados $X \xrightarrow{x_A} A$ y $X \xrightarrow{x_B} B$, podemos definir $x := x_A u_A + x_B u_B \in \operatorname{Hom}(X, S)$. Luego

$$x p_A = x_A(u_A p_A) + x_B(u_B p_A) = x_A 1_A + x_B 0 = x_A,$$

y análogamente $xp_B = x_B$. Luego, si y satisfaciera lo anterior, entonces:

$$y = y1_S = y(p_A u_A + p_B u_B) = x_A u_A + x_B u_B = x \qquad \square$$

Teorema 3.43: En una categoría abeliana dados los objetos A, B, S y las flechas u_A, u_B, p_A, p_B tales que $u_A p_A = 1_A$ y $u_B p_B = 1_B$, y que las sucesiones

$$A \xrightarrow{u_A} S \xrightarrow{p_B} B \qquad\qquad B \xrightarrow{u_B} S \xrightarrow{p_A} A$$

exactas, entonces forman un sistema de suma directa.

Demostración: Dados $X \xrightarrow{x_A} A$ y $X \xrightarrow{x_B} B$, sea $x := x_A u_A + x_B u_B \in \operatorname{Hom}(X, S)$. Luego, por hipótesis se cumple que $xp_A = x_A$ y $xp_B = x_B$. Sea $y \in \operatorname{Hom}(X, S)$ con $yp_A = x_A$ e $yp_B = x_B$. Sea $z := x - y$ tal que $zp_A = 0$ y $zp_B = 0$. Basta probar que $z = 0$. Como las sucesiones son exactas, y u_A es un monomorfismo (pues es sección), entonces $u_A = \ker(p_B)$, por lo que

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, dotted] & A \arrow[r, "u_A"] & S \arrow[r, dotted, "p_B"] & B \\ & & X \arrow[ul, dashed, "\exists! z_A"] \arrow[u, "z"'] & \end{tikzcd}$$

Pero $z_A = z_A 1_A = z_A u_A p_A = zp_A = 0$. Así pues, $z = z_A u_A = 0$. $\square$

Lema 3.44: Dada una sucesión exacta corta en una categoría abeliana:

$$0 \longrightarrow A_{21} \xrightarrow{f} A_{22} \xrightarrow{g} A_{23} \longrightarrow 0. \tag{3.1}$$

Son equivalentes:

1. f es sección.

2. g es retracción.

3. $A_{22} \cong A_{21} \oplus A_{23}$ y las flechas conforman un sistema de suma directa.

Demostración: Basta emplear el lema de 3×3 sobre el siguiente diagrama, donde $f \circ h = 1_{B_{21}}$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ker(h) & = & \ker(h) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_{21} & \xrightarrow{f} & A_{22} & \longrightarrow & A_{23} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow h & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_{21} & = & A_{21} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

□

Definición 3.45: Dada una sucesión exacta corta (3.1), se dice que ella ***se escinde*** si se cumple alguna (y luego todas) las condiciones del lema anterior.

Definición 3.46: Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ un par de categorías preaditivas. Dado un funtor covariante (resp. contravariante) $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, ya hemos visto que para $X, Y \in \operatorname{Obj}\mathscr{A}$ se induce una aplicación $F\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{B}}(FX, FY)$ (resp. $F\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{B}}(FY, FX)$). Así pues el funtor F se dice ***aditivo*** si dicha aplicación es un homomorfismo de grupos.

Además se dice:

Exacto por la izquierda Si dada una sucesión exacta (en $\mathscr{A}$):

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3$$

induce una sucesión exacta (en $\mathscr{B}$):

$$0 \longrightarrow FA_1 \xrightarrow{F(f)} FA_2 \xrightarrow{F(g)} FA_3.$$

Exacto por la derecha Si dada una sucesión exacta

$$A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3 \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta:

$$FA_1 \xrightarrow{F(f)} FA_2 \xrightarrow{F(g)} FA_3 \longrightarrow 0.$$

Exacto Si es exacto por la izquierda y por la derecha.

Las mismas definiciones aplican para un funtor contravariante considerándolo su forma covariante $F\colon \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{B}$.

Otra manera de dar la misma definición sería decir que un funtor covariante es exacto por la izquierda (resp. por la derecha) si es un funtor aditivo que preserva núcleos (resp. conúcleos). Para un funtor contravariante tenemos que es exacto por la izquierda (resp. por la derecha) si transforma conúcleos en núcleos (resp. núcleos en conúcleos).

Teorema 3.47: Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ categorías aditivas. Sea $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor. Entonces F es aditivo syss preserva sistemas de suma directa.

Demostración: $\Longrightarrow$. Basta aplicar el teorema 3.42.

$\Longleftarrow$. Sea $A \xrightarrow{u_1} A \oplus A$, $A \xrightarrow{u_2} A \oplus A$, $A \oplus A \xrightarrow{p_1} A$ y $A \otimes A \xrightarrow{p_2} A$ un sistema de suma directa. Luego se convierte a un sistema de suma directa en $\mathscr{B}$, y en particular $F(A \oplus A) = FA \oplus FA$. Sean $x, y \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ arbitrarios, luego:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "{(1,1)}"] \arrow[rr, bend right, "x+y"'] & A \oplus A \arrow[r, "\binom{x}{y}"] & B \arrow[r, Rightarrow, "F"] & FA \arrow[r, "{F(1,1)}"] \arrow[rr, bend right, "F(x+y)"'] & FA \oplus FA \arrow[r, "F\binom{x}{y}"] & FB \end{tikzcd}$$

una comprobación rutinaria comprueba que $F(1_A, 1_A) = (1_{FA}, 1_{FA})$ y que $F\binom{x}{y} = \binom{F(x)}{F(y)}$. Luego $F(x+y) = F(x) + F(y)$. □

Proposición 3.48: Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ categorías preaditivas. Entonces:

1. Los funtores aditivos de $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$ (como objetos) y las transformaciones naturales entre ellos (como flechas) conforman una categoría denotada $\mathsf{Add}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$.

2. $\mathsf{Add}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ es una categoría preaditiva con la suma coordenada a coordenada.

3. Si $\mathscr{A}$ es una categoría preaditiva pequeña y $\mathscr{B}$ es aditiva, entonces $\mathsf{Add}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ es aditiva.

4. Si $\mathscr{A}$ es una categoría pequeña y $\mathscr{B}$ es abeliana, entonces $\mathsf{Fun}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ es abeliana. Más aún, si $\mathscr{B}$ es completa (resp. cocompleta, bicompleta), entonces $\mathsf{Fun}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ también lo es.

5. Si $\mathscr{A}$ es una categoría aditiva pequeña y $\mathscr{B}$ es abeliana, entonces $\mathsf{Add}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ es abeliana. Más aún, si $\mathscr{B}$ es completa (resp. cocompleta, bicompleta), entonces $\mathsf{Add}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ también lo es.

Demostración: Las primeras dos son claras.

3. Basta ver que tiene objeto nulo y que admite (co)productos finitos. El objeto nulo es claramente el funtor constante de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$ que cae en un objeto nulo de $\mathscr{B}$. Para los coproductos, sean $F, G \in \mathsf{Add}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$. Nótese que éstos, como funtores, poseen un funtor dado por $F \oplus G \in \mathsf{Fun}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ que formalmente consiste en:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[r, phantom, "\xRightarrow{F\oplus G}"] & FX \oplus GX \arrow[d, "\begin{pmatrix} F(f) & 0 \\ 0 & G(f) \end{pmatrix}"] \\ Y & FY \oplus GY \end{tikzcd}$$

   y es claro que preserva sistemas de suma directa.

4. Es claro que $\mathsf{Fun}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ es finitamente bicompleta donde los límites inversos (directo) se calculan coordenada a coordenada.

   Sea $\alpha\colon F \Rightarrow G$ un monomorfismo de $\mathsf{Fun}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$, por la proposición 1.66 se cumple que su núcleo es la transformación natural constante $1_F\colon F \Rightarrow F$ de modo que el núcleo de cada $\alpha_A\colon FA \to GA$ (en $\mathscr{B}$) es 1_{FA} puesto que $\mathscr{B}$ posee núcleos. Como $\mathscr{B}$ también posee conúcleos podemos definir $\beta_A\colon GA \to HA$ como tal y notar que $\beta\colon G \Rightarrow H$ es una flecha de $\mathsf{Fun}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ que es conúcleo de α. Finalmente como $\mathscr{B}$ es abeliana deducimos que $\alpha_A = \ker \beta_A$ para todo $A \in \operatorname{Obj} \mathscr{A}$, de modo que $\alpha = \ker \beta$ como se quería ver.

5. Queda ver que $\mathsf{Add}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ posee ecualizadores y que los monomorfismos son ecualizadores.

   (i) <u>$\mathsf{Add}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ posee ecualizadores:</u> Como $\mathscr{B}$ es abeliana, entonces dado un par de funtores $F, G\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ y una transformación natural $\alpha\colon F \Rightarrow G$ entre ellos, definamos $\gamma\colon K \Rightarrow F$ como el funtor dado por:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] & \ker(\alpha_X) \arrow[r, hook, "\gamma_X"] \arrow[d, "K(f)"] & FX \arrow[d, "F(f)"] \\ Y & \ker(\alpha_Y) \arrow[r, hook, "\gamma_Y"'] & FY \end{tikzcd}$$

donde $K(f)$ es la única flecha que hace conmutar el diagrama. Luego

$$\begin{aligned} K(f-g)\circ\gamma_Y &= \gamma_X\circ F(f-g) = \gamma_X\circ(F(f)-F(g)) \\ &= \gamma_X\circ F(f)-\gamma_X\circ F(g) = K(f)\circ\gamma_Y - K(g)\circ\gamma_Y \\ &= \big(K(f)-K(g)\big)\circ\gamma_Y. \end{aligned}$$

De modo que $K(f-g) = K(f)-K(g)$ puesto que γ_Y es un monomorfismo.

(ii) Los monomorfismos son núcleos: Sea $\alpha\colon F\Rightarrow G$ un monomorfismo de $\mathsf{Add}(\mathscr{A},\mathscr{B})$. Por el inciso anterior, vemos que en $\mathsf{Fun}(\mathscr{A},\mathscr{B})$, α resulta ser núcleo de una flecha β. Pero es fácil notar que β es también aditiva por abelianidad de $\mathscr{B}$, de modo que α es también un núcleo. □

Corolario 3.49: Sean $\mathscr{A},\mathscr{B}$ categorías abelianas, y sea $F\colon\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ un funtor aditivo. F es exacto por la izquierda (resp. exacto por la derecha) syss preserva límites inversos (resp. límites directos) finitos.

Teorema 3.50: Sean $\mathscr{A},\mathscr{B}$ categorías abelianas. Sea $F\colon\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ un funtor aditivo. Entonces son equivalentes:

1. F es un funtor fiel.
2. F transforma diagramas no-conmutativos en diagramas no-conmutativos.
3. F transforma sucesiones no-exactas en sucesiones no-exactas.

Demostración: $1 \iff 2$. Ejercicio para el lector.

$3 \implies 1$. Sea $X\xrightarrow{f}Y$ con $f\neq 0$, por aditividad basta comprobar que $F(f)\neq 0$. Nótese que $X\xrightarrow{1_X}X\xrightarrow{f}Y$ no es exacto, por lo que $FX\xrightarrow{1_{FX}}FX\xrightarrow{F(f)}FY$ tampoco lo es y $F(f)\neq 0$.

$1 \implies 3$. Sea $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ una sucesión no exacta. Entonces se cumple alguna de las dos siguientes condiciones:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "0" marking] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right, "0" marking] & Y \arrow[r, "c"] & C \end{tikzcd}$$

donde $k := \ker g$ y $c := \operatorname{coker} f$.

En el primer caso es claro que la sucesión inducida no es exacta.

En el segundo caso consideremos las siguientes sucesiones exactas en $\mathscr{B}$:

$$0 \longrightarrow B' \longrightarrow FY \xrightarrow{F(g)} FZ \qquad FX \xrightarrow{F(f)} FY \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$$

Como $kg = 0$ entonces $F(k)F(g) = 0$, análogamente $F(f)F(c) = 0$ y luego los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, dotted] & B' \arrow[r, red] & FY \arrow[r, dotted, "F(g)"] & FZ \\ & FK \arrow[u, dashed, "\exists!"] \arrow[ur, "F(k)"'] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FX \arrow[r, dotted, "F(f)"] & FY \arrow[r, red] \arrow[dr, "F(c)"'] & B'' \arrow[r, dotted] \arrow[d, dashed, "\exists!"] & 0 \\ & & FC & \end{tikzcd}$$

Finalmente, la siguiente sucesión se anula:

$$FK \longrightarrow B' \longrightarrow FY \longrightarrow B'' \longrightarrow FC$$

porque las rojas se anulan entre sí, contradiciendo nuestra hipótesis. $\square$

§3.2.3 Objetos proyectivos e inyectivos.

Definición 3.51: En una categoría arbitraria $\mathscr{C}$ decimos que un objeto P es ***proyectivo*** si para toda flecha $P \xrightarrow{f} Y$ y todo epimorfismo $X \xrightarrow{p} Y$ existe una flecha $P \xrightarrow{g} X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, two heads, "p"'] & Y \end{tikzcd}$$

Un objeto Q se dice ***inyectivo*** si para toda flecha $Y \xrightarrow{f} Q$ y todo monomorfismo $Y \xrightarrow{i} X$ existe una flecha $X \xrightarrow{g} P$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & Q \\ X \arrow[ur, dashed, "g"] & Y \arrow[l, hook', "i"] \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Las nociones de objeto proyectivo y objeto inyectivo son duales.

Proposición 3.52: En una categoría arbitraria $\mathscr{C}$ se cumple que:

1. Un objeto P es proyectivo syss el funtor $\mathscr{C}(P,-)$ preserva epimorfismos.
2. Un objeto Q es inyectivo syss el funtor $\mathscr{C}(-,Q)$ transforma monomorfismos en epimorfismos.

De la proposición 1.72 tenemos:

Proposición 3.53: En una categoría arbitraria:

1. Sean $\{P_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos proyectivos. Si $\coprod_{i\in I} P_i$ existe, entonces es proyectivo.
2. Sean $\{Q_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos inyectivos. Si $\prod_{i\in I} Q_i$ existe, entonces es inyectivo.

Hay una mejor caracterización para las categorías abelianas. Para ello, en primer lugar veamos lo siguiente:

Teorema 3.54: En una categoría abeliana $\mathscr{C}$, para todo objeto $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ se cumple que los funtores representables $\mathscr{C}(A,-)$ y $\mathscr{C}(-,A)$ son exactos por la izquierda.

Demostración: En primer lugar, por la proposición 1.72 vemos que el funtor Hom preserva sumas directas finitas, así que es aditivo. Sea $0 \to K \xrightarrow{k} X \xrightarrow{f} Y$ una sucesión exacta en $\mathscr{C}$, luego queremos verificar que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}(A,K) \xrightarrow{h^k} \mathscr{C}(A,X) \xrightarrow{h^f} \mathscr{C}(A,Y)$$

es exacta. Como $k = \ker(f)$ entonces es un monomorfismo, y luego h^k es inyectivo (proposición 1.41). Ahora, queda verificar que $\ker(h^f) = \operatorname{im}(h^k)$. Tenemos que una flecha $g \in \ker(h^f)$ syss $g \circ f = 0$, luego, por definición de núcleo, se factoriza a través de k y $g \in \operatorname{im}(h^k)$; la otra inclusión es trivial.

Ver que $\mathscr{C}(-,A)$ es exacto por la izquierda es dual. □

Así pues, tenemos lo siguiente:

Proposición 3.55: En una categoría abeliana.

Son equivalentes:

1. Z es proyectivo.
2. El funtor $\mathscr{C}(P,-)$ es exacto.
3. Toda sucesión exacta corta
$$0 \to A \to B \to P \to 0$$
se escinde.

Son equivalentes:

1. I es inyectivo.
2. El funtor $\mathscr{C}(-,I)$ es exacto.
3. Toda sucesión exacta corta
$$0 \to I \to B \to C \to 0$$
se escinde.

Demostración: Por dualidad nos encargaremos sólo del caso inyectivo. La equivalencia $1 \iff 2$ es clara de los teoremas anteriores. La implicancia $1 \implies 3$ es también clara del lema 3.44 y la definición de inyectivo.

$3 \implies 1$. Sea $X \hookrightarrow Y$ un monomorfismo e $Y \xrightarrow{f} I$ una flecha. Sea P el coproducto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\
I \arrow[r, "j"'] & P \arrow[ul, phantom, "\lrcorner", very near start]
\end{tikzcd}$$

Como ι es monomorfismo, entonces j también por el teorema 3.25. Así tenemos la sucesión exacta corta $0 \to I \to P \to P/I \to 0$. Ésta sucesión se escinde, por lo que j es una sección con una inversa derecha $P \xrightarrow{h} I$ tal que $j \circ h = 1_I$. Finalmente el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "j"] & I \\
X \arrow[u, "g"] \arrow[ur, dashed] & Y \arrow[l, hook'] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

□

Definición 3.56: Se dice que una categoría arbitraria $\mathscr{C}$ ***tiene suficientes proyectivos*** si para todo objeto $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ existe un epimorfismo $P \to A$ donde P es proyectivo. Dualmente, se dice que $\mathscr{C}$ ***tiene suficientes inyectivos*** si para todo objeto $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ existe un monomorfismo $A \to Q$ donde Q es inyectivo.

El ejemplo típico es la categoría de módulos.

Proposición 3.57: Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana. Se cumplen:

1. Si $\mathscr{C}$ tiene suficientes inyectivos, entonces un objeto $P \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ es proyectivo syss para toda flecha $P \xrightarrow{f} Y$ y todo epimorfismo $I \xrightarrow{p} Y$, donde I es inyectivo, existe una flecha $P \xrightarrow{g} I$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] \\
I \arrow[r, two heads, "p"'] & Y
\end{tikzcd}$$

2. Si $\mathscr{C}$ tiene suficientes proyectivos, entonces un objeto $I \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ es inyectivo syss para toda flecha $X \xrightarrow{f} I$ y todo monomorfismo $X \xrightarrow{i} P$, donde P es proyectivo, existe una flecha $P \xrightarrow{g} I$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & Q \\
P \arrow[ur, dashed, "g"] & Y \arrow[u, "f"'] \arrow[l, hook', "i"]
\end{tikzcd}$$

Demostración: Probaremos la primera, dado que la segunda es dual. Claramente $\implies$, así que veamos la recíproca. Sea $P \xrightarrow{f} C$ una flecha y $B \xrightarrow{p'} C$ un epimorfismo de núcleo $A \xrightarrow{k} B$. Como $\mathscr{C}$ tiene suficientes inyectivos, sea $B \xrightarrow{i} I$ un monomorfismo hacia un objeto inyectivo. Luego podemos construir Y como el coproducto fibrado de p' con ι y obtener el siguiente diagrama con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & & & P \arrow[d, "f"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "p'"] \arrow[d, hook, "i"] & C \arrow[r] \arrow[d, hook, "j"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & I \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner"] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Aquí, el que p sea un epimorfismo sale del dual del teorema 3.23 y el que j sea monomorfismo sale de la proposición 3.25.

Ahora bien, por hipótesis existe g tal que $g \circ p = f \circ j$, luego P con las flechas f, g ecualiza a j, p; pero es fácil ver que B es el producto fibrado de dicho diagrama de modo que existe un único h tal que el siguiente diagrama conmuta, como se quería ver:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[dr, dashed, "\exists! h"] \arrow[ddr, dotted, bend right, "g"'] & & \\
& B \arrow[r, "p'"'] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, phantom, very near start, "\ulcorner"] & C \arrow[d, dotted] \\
& I \arrow[r, dotted, "p"'] & Y
\end{tikzcd}$$

□

Definición 3.58: Un objeto G se dice un ***generador*** (resp. ***cogenerador***) si el funtor $\mathscr{C}(G, -)$ (resp. el funtor $\mathscr{C}(-, G)$) es fiel.

Proposición 3.59: Son equivalentes:

1. G es generador.
2. Para todo $A \xrightarrow{f} B$ con $f \neq 0$ existe $G \xrightarrow{h} A$ satisface que $hf \neq 0$.
3. $\operatorname{Hom}(A, B) \neq 0$ implica $\operatorname{Hom}(G, B) \neq 0$.

Proposición 3.60: Un objeto proyectivo P es generador syss $\mathscr{C}(P, A) \neq 0$ cuando $A \neq 0$.

Proposición 3.61: Una categoría abeliana que posee generador (resp. cogenerador) está bien potenciada (resp. bien copotenciada).

Demostración: Sea G un generador. Sea $S \xrightarrow{\iota} A$ un subobjeto no nulo. Entonces $\mathscr{C}(G, S) \neq 0$ y para todo $f \in \operatorname{Hom}(G, S)$ se cumple que $f\iota \in \operatorname{Hom}(G, A)$ induce una inyección desde $\operatorname{Hom}(G, S)$ hasta $\operatorname{Hom}(G, A)$ pues $\mathscr{C}(G, -)$ es fiel. Así pues, $\operatorname{Hom}(G, A)$ «acota» a $\operatorname{Sub} A$. □

Dado un par de objetos $A, B \in \operatorname{Obj} \mathscr{C}$ podemos formar las siguientes flechas (cuando los límites existan):

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota_f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \coprod_{f \in \operatorname{Hom}(A,B)} A \arrow[r, "!"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "!"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \prod_{f \in \operatorname{Hom}(A,B)} B \arrow[r, "\pi_f"] & B
\end{tikzcd}$$

Proposición 3.62: En una categoría cocompleta (resp. completa) $\mathscr{C}$: Un objeto G es generador (resp. cogenerador) syss para todo $X \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ se cumple que $\coprod_{\operatorname{Hom}(G,X)} G \to X$ (resp. $X \to \prod_{\operatorname{Hom}(X,G)} G$) es un epimorfismo (resp. monomorfismo).

Proposición 3.63: Sea $\mathscr{C}$ una categoría completa con un generador. $\mathscr{C}$ tiene suficientes inyectivos syss tiene un cogenerador inyectivo.

DEMOSTRACIÓN: $\Longleftarrow$. Sea $I \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ un cogenerador inyectivo, entonces para todo X se tiene que la flecha canónica $X \to \prod_{\operatorname{Hom}(X,I)} I$ es un monomorfismo hacia un objeto inyectivo.

$\Longrightarrow$. Sea $G \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ un generador. En primer lugar, nótese que $\operatorname{Quot} G$ es un conjunto, luego sea $P := G^{\operatorname{Quot} G}$. Como $\mathscr{C}$ tiene suficientes inyectivos, sea $P \to E$ un monomorfismo con E inyectivo.

¿Por qué los objetos cociente de un generador son un conjunto?

Queremos ver que E es un cogenerador; para ello sea $A \xrightarrow{f} B$ una flecha no nula. Como G es generador, existe $G \xrightarrow{g} A$ tal que $g \circ f \neq 0$. Sea $I := \operatorname{im}(g \circ f)$. Luego $G \to I$ es un epimorfismo y, por tanto, I es un objeto cociente de G, luego existe un monomorfismo $I \to P$. Ahora, recordamos que E es inyectivo y construimos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, dashed, "h"] & E \\
G \arrow[u, "g"] \arrow[r, two heads] & I \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & P \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Finalmente $f \circ h \neq 0$ pues $g \circ f \circ h$ es la composición entre en epimorfismo y dos monomorfismos en el diagrama que se ve que claramente no se anulan. □

Definición 3.64: Una subcategoría abeliana $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ se dice ***exacta*** si el funtor inclusión $\iota \colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es exacto.

Teorema 3.65: Sea $\mathscr{B}$ una categoría abeliana, y sea $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ una subcategoría plena. Entonces $\mathscr{A}$ es exacta syss para todo $X \xrightarrow{f} Y$ en $\mathscr{A}$ contiene su $\mathscr{B}$-núcleo, $\mathscr{B}$-conúcleo y para todo $A, B \in \operatorname{Obj}\mathscr{A}$ se cumple que $A \oplus_{\mathscr{B}} B \in \operatorname{Obj}\mathscr{A}$.

DEMOSTRACIÓN: $\Longrightarrow$. Si $\mathscr{A}$ es abeliana se construye la sucesión exacta: Justificar el por qué.

$$0 \longrightarrow \ker_{\mathscr{A}} f \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \operatorname{coker}_{\mathscr{A}} f \longrightarrow 0$$

luego la tiramos a $\mathscr{B}$ y por exactitud coinciden. Análogamente con la suma directa.

$\Longleftarrow$. Veamos primer que $\mathscr{A}$ es abeliana. En general los axiomas se cumplen todos con la misma técnica, así que solo probaremos dos:

(CA0.) Sea $A \xrightarrow{1_A} A$. Luego $0 = \ker_{\mathscr{B}}(1_A) \to A$ está en $\mathscr{A}$ y es fácil comprobar que es de hecho un objeto nulo en $\mathscr{A}$.

(CA1.) Sean $A, B \in \mathscr{A}$. Luego $A \oplus_{\mathscr{B}} B \xrightarrow{\pi_A} A$ y $A \oplus_{\mathscr{B}} B \xrightarrow{\pi_B} B$ están en $\mathscr{A}$, por lo que $A \oplus_{\mathscr{B}} B = A \oplus_{\mathscr{A}} B$. □

3.3 Metateoremas

Una de las ideas de la teoría de categorías es generalizar el trabajo de determinadas definiciones sustituyéndolos por afirmaciones de conmutatividad de flechas, y para categorías abelianas, de exactitud de flechas. No obstante, en la subsección 3.1.2 ya vimos que no es tan sencillo realizar las demostraciones exclusivamente empleando flechas. En ésta sección nos dedicamos a ver si es que verificar que una afirmación sobre flechas es cierta en alguna categoría, digamos en Ab, implica que es cierta en toda categoría abeliana.

Definición 3.66: Se dice que una afirmación P es ***esquemática simple*** si es una afirmación acerca de la conmutatividad y exactitud de un diagrama[2] o de sus partes en una categoría abeliana. Una afirmación es ***esquemática compuesta*** si es de la forma $P \implies Q$, donde P y Q son afirmaciones simples esquemáticas.

Una categoría abeliana $\mathscr{C}$ se dice ***muy abeliana*** si para toda subcategoría pequeña exacta $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ suya existe un encaje exacto $\mathscr{A} \to \mathsf{Ab}$.

Proposición 3.67: Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana y sea $S \subseteq \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ un subconjunto (pequeño). Entonces existe una subcategoría pequeña, plena y exacta $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ tal que $S \subseteq \operatorname{Obj}\mathscr{A}$.

Demostración: Consideremos las funciones:

$$\begin{aligned} K\colon \operatorname{Mor}\mathscr{C} &\longrightarrow \operatorname{Obj}\mathscr{C} & F\colon \operatorname{Mor}\mathscr{C} &\longrightarrow \operatorname{Obj}\mathscr{C} \\ f &\longmapsto \ker f & f &\longmapsto \operatorname{coker} f \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} S\colon \operatorname{Obj}\mathscr{C} \times \operatorname{Obj}\mathscr{C} &\longrightarrow \operatorname{Obj}\mathscr{C} \\ (A,B) &\longmapsto A \oplus B \end{aligned}$$

[2] Aquí, la palabra *diagrama* es en sentido formal: es decir, es un funtor cuyo dominio es una categoría pequeña.

Luego, dada una subcategoría plena $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{C}$ podemos definir $C(\mathscr{B})$ como la subcategoría plena cuyos objetos son los objetos de $\mathscr{B}, K[\operatorname{Mor}\mathscr{B}], F[\operatorname{Mor}\mathscr{B}]$ y $S[\operatorname{Obj}\mathscr{B} \times \operatorname{Obj}\mathscr{B}]$.

En particular, para S, podemos definir $\mathscr{B}$ como la subcategoría plena y pequeña cuyos objetos sean los de S; y así ver que $C(\mathscr{B})$ es plena y pequeña, y así bien $C^{n+1}(\mathscr{B}) := C(C^n(\mathscr{B}))$ también es pequeña, y en consecuente

$$C^\infty(\mathscr{B}) := \bigcup_{n=1}^{\infty} C^n(\mathscr{B}),$$

es una subcategoría plena, pequeña y exacta que contiene a todos los objetos de S como se quería. □

Teorema 3.68: Toda afirmación esquemática compuesta válida en Ab lo es en toda categoría muy abeliana.

Definición 3.69: Dadas dos categorías pequeñas de índices $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$. Se dice que un funtor $G\colon \mathscr{D}_1 \to \mathscr{D}_2$ es una ***extensión de mapas*** si es inyectiva, tanto sobre los objetos como sobre las flechas, y es suprayectiva sobre los objetos.

El siguiente muestra un ejemplo de una extensión de mapas que no es una biyección:

$$\bullet \longrightarrow \bullet \rightrightarrows \bullet \rightrightarrows\!\!\!\!\!\rightarrow \bullet$$

En particular una extensión de mapas sólo «añade flechas». Ésto nos permite formalizar teoremas de la forma «dado el siguiente diagrama ... existe una flecha tal que ...»

Definición 3.70: Se dice que una terna $(G\colon \mathscr{D}_1 \to \mathscr{D}_2, E, \bar{E})$ es una ***afirmación esquemática compuesta plena*** si G es una extensión de mapas y $E, \bar{E}$ son afirmaciones esquemáticas simples para $\mathscr{D}_1$ y $\mathscr{D}_2$ resp. Se dice que una categoría aditiva $\mathscr{C}$ satisface dicha afirmación si para todo diagrama $X_- : \mathscr{D}_1 \to \mathscr{C}$ que satisface E existe un diagrama $Y_- : \mathscr{D}_2 \to \mathscr{C}$ que satisface $\bar{E}$ y tal que $X_{G-} = Y_-$. A forma de diagrama conmutativo (en Cat):

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}_1 \arrow[r, "G"] \arrow[d, "X_-"'] & \mathscr{D}_2 \arrow[d, "Y_-"] \\ \mathscr{C} \arrow[r, equal] & \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

Una categoría abeliana $\mathscr{C}$ se dice ***plenamente abeliana*** si para toda subcategoría $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ pequeña, plena y exacta; existe un encaje pleno y exacto $\mathscr{A} \to \mathsf{Mod}_R$ para algún anillo R.

Intuitivamente las afirmaciones esquemáticas compuestas planas son cosas del estilo: «dado el siguiente diagrama conmutativo ... entonces se extiende a éste otro diagrama conmutativo ...» Un ejemplo muy típico es el lema de la serpiente: técnicamente los núcleos y conúcleos ya pertenecen a ciertas partes del diagrama, además que se definen a partir de sucesiones exactas (en las columnas), y lo único que afirma dicho teorema es la existencia de una flecha conectora.

Teorema 3.71: Si una afirmación esquemática compuesta plena es valida en todas las categorías Mod_R para todos los anillos R, entonces lo es en toda categoría plenamente abeliana.

Éste es el método estándar para demostrar el lema de la serpiente, ya que es más fácil probarlo para módulos (cf. [**37,** Teo. 9.38]).

Proposición 3.72: Una categoría abeliana con un generador proyectivo P es muy abeliana.

Demostración: El funtor $\mathscr{C}(P, -)$ es un encaje exacto en Ab. □

Teorema 3.73 (Mitchell): Una categoría abeliana bicompleta con un generador proyectivo es plenamente abeliana.

Demostración: Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana bicompleta, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ una subcategoría plena exacta y $\bar{P}$ un generador proyectivo. Para todo $B \in \operatorname{Obj} \mathscr{B}$ se cumple que

$$\bar{P}^{\mathscr{A}(\bar{P},B)} \xrightarrow{\phi_B} B$$

es un epimorfismo (puesto que $\bar{P}$ es proyectivo). Definiendo $I := \bigcup_{B \in \mathscr{B}} \mathscr{A}(\bar{P}, B)$, entonces vemos que $P := \bar{P}^I$ es un generador proyectivo con epimorfismos a todos los objetos de $\mathscr{B}$, digamos ψ_B.

Sea R el anillo de endomorfismos de P (teo. 3.22). Así pues, para todo $A \in \operatorname{Obj} \mathscr{A}$ se cumple que $\mathscr{A}(P, A)$ es un R-módulo (izquierdo) de manera canónica (mediante precomposición). Más aún, es fácil notar que induce el siguiente funtor exacto (desde $\mathscr{A}$ hasta ${}_R\mathsf{Mod}$):

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[r, phantom, ""] & \mathscr{A}(P,A) \arrow[d, "h^f"] \\ B & \mathscr{A}(P,B) \end{tikzcd} \qquad \overset{F}{\Longrightarrow}$$

que es además un encaje puesto que P es generador proyectivo, por lo que sólo basta ver que es pleno sobre $\mathscr{B}$. Sean $X, Y \in \operatorname{Obj}\mathscr{B}$, y sea $g \in \operatorname{Hom}_R(FX, FY)$. Sea $K \in \operatorname{Obj}\mathscr{B}$ tal que las siguientes son sucesiones exactas:

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{k} P \xrightarrow{\psi_X} X \longrightarrow 0 \qquad\qquad P \xrightarrow{\psi_Y} Y \longrightarrow 0$$

Como $FP = R$, entonces obtenemos el siguiente diagrama conmutativo (en ${}_R\mathsf{Mod}$):

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & FK \arrow[r, "F(k)"] & R \arrow[r, "F\psi_X"] \arrow[d, dashed, "f"'] & FX \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ & & R \arrow[r, "F\psi_Y"'] & FY \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde la existencia de f viene del hecho de que R es generador en ${}_R\mathsf{Mod}$. Por conmutatividad se tiene que

$$F(k) \circ f \circ F(\psi_Y) = F(k) \circ F(\psi_X) \circ g = 0.$$

Los únicos endomorfismos de R-módulos sobre R son de la forma $f(s) = rs$ con $r \in R$, de modo que $F(r) = f$ y la composición anterior se reduce a que $F(k \circ r \circ \psi_Y) = 0$. Recordando que F es un encaje, vemos que $k \circ r \circ \psi_Y = 0$ y, luego, como X es el conúcleo de k se induce la siguiente flecha:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, dotted] & K \arrow[r] & P \arrow[r, dotted] \arrow[d, "r"'] & X \arrow[r, dotted] \arrow[d, dashed, "\exists! g"] & 0 \\ & & P \arrow[r] & Y \arrow[r, dotted] & 0 \end{tikzcd}$$

Finalmente notamos que como $F(\psi_X) \circ F(g) = F(\psi_X) \circ \bar{g}$ entonces, como $F\psi_X$ es epimorfismo, debe darse que $F(g) = \bar{g}$. $\square$

§3.3.1 Categorías de Grothendieck. El objetivo será ver cómo sacarle provecho al encaje de Yoneda para encontrar categorías muy y plenamente abelianas. Comencemos por una aplicación de la proposición 3.48:

Teorema 3.74: Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana pequeña, entonces $\mathsf{Add}(\mathscr{C}, \mathsf{Ab})$ es una categoría abeliana bicompleta.

Definición 3.75: Una categoría $\mathscr{C}$ se dice ***de Grothendieck***[3] si:

CG1. Es bicompleta y bien potenciada.

CG2. Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una cadena en $\mathscr{C}$, vale decir, para todo $i, j \in I$ se cumple que G_i es un subobjeto de G_j o bien G_j es subobjeto de G_i. Entonces, para todo $H \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ se cumple:

$$H \cap \bigcup_{i\in I} G_i = \bigcup_{i\in I}(H \cap G_i).$$

Ejemplo. Ab y Mod_R son categorías de Grothendieck.

Proposición 3.76: Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana pequeña, entonces $\mathsf{Add}(\mathscr{C}, \mathsf{Ab})$ es de Grothendieck.

Demostración: Sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una cadena de subfuntores. Entonces $\{F_i(A)\}_{i\in I}$ es una cadena de subgrupos abelianos para todo $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$. Luego, para todo $G\colon \mathscr{C} \to \mathsf{Ab}$ funtor aditivo se tiene que

$$G(A) \cap \bigcup_{i\in I} F_i(A) = \bigcup_{i\in I}(G(A) \cup F_i(A)),$$

lo que demuestra el enunciado. □

Proposición 3.77: Para una categoría preaditiva $\mathscr{C}$, el encaje contravariante de Yoneda $よ\colon \mathscr{C} \to \mathsf{Add}(\mathscr{C}, \mathsf{Ab})$ dado por:

1. Para un objeto $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$: $よ(A) := \mathscr{C}(A, -) = h^A$.

[3] Varios libros siguen la terminología original de Grothendieck **[9]**, bajo la cual una categoría abeliana satisface el axioma *AB3* (resp. *AB3**) si es cocompleta (resp. completa) y el axioma *AB5* corresponde aquí con el axioma *CG2*. Categoristas luego acuñaron el término *categoría de Grothendieck* en su honor, pero no fue naturalmente originario de Grothendieck.

2. Para una flecha $A \xrightarrow{f} B$: la precomposición $h_f : h^B \Rightarrow h^A$.

Es un encaje pleno contravariante y es exacto por la izquierda.

Ojo que ésta proposición *no* es equivalente al lema de Yoneda debido a que ahora el codominio es Ab y no Set.

Teorema 3.78: La transformación de Yoneda $(\tau_-^-): \operatorname{Nat}(よ(-), -) \Rightarrow \operatorname{ev}(-,-)$ es una equivalencia natural.

Un problema con el encaje de Yoneda es que no tenemos a priori exactitud por la derecha, de modo que necesitaremos más herramientas que los metateoremas previos.

Teorema 3.79: $\coprod_{X \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}} よ(X)$ es un generador proyectivo de $\mathsf{Add}(\mathscr{C}, \mathsf{Ab})$.

Demostración: Basta notar que

$$\operatorname{Hom}\left(\coprod_{X \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}} よ(X), -\right) \cong \prod_{X \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}} \operatorname{Hom}(よ(X), -) \cong \prod_{X \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}} \operatorname{ev}(X, -),$$

donde recordemos que los homomorfismos de $\mathsf{Add}(\mathscr{C}, \mathsf{Ab})$ son transformaciones naturales. Es claro que evaluar en todos los objetos de la categoría da un funtor fiel. □

§3.3.2 Envolturas inyectivas.

Definición 3.80: Sea $\mathscr{C}$ una categoría arbitraria y sea $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$. Una ***extensión*** es un monomorfismo $A \hookrightarrow E$, y es además ***propia*** si no es un isomorfismo. Una extensión se dice ***trivial*** si es de la forma $A \hookrightarrow A \amalg C$.

Una extensión $A \hookrightarrow E$ es ***esencial*** si para todo subobjeto $B \hookrightarrow E$ no nulo, se cumple que $A \cap B \neq 0$.

Es claro que una extensión trivial propia no es esencial. La proposición 3.55 nos dice que los objetos inyectivos sólo poseen extensiones triviales.

Proposición 3.81: Una extensión $A \xrightarrow{i} E$ es esencial syss para toda flecha $E \xrightarrow{f} B$ se cumple que $i \circ f$ es monomorfismo syss f lo es.

Teorema 3.82: En una categoría de Grothendieck, un objeto es inyectivo syss no posee extensiones esenciales propias.

DEMOSTRACIÓN: $\Longrightarrow$. Es claro.

$\Longleftarrow$. Sea E un objeto sin extensiones esenciales propias y sea $E \xrightarrow{i} B$ una extensión. Sea $\mathcal{F}$ la familia de subobjetos de B disjuntos de E y, por lema de Zorn (y por definición de categoría de Grothendieck), vemos que tiene un objeto maximal C. Éste subobjeto $C \hookrightarrow B$ es el núcleo de un epimorfismo $B \xrightarrow{f} F$ tal que $i \circ f$ es un monomorfismo, luego nos otorga una extensión $E \hookrightarrow F$. Veamos que dicha extensión es esencial: si por contradicción $B' \hookrightarrow F$ fuese otro subobjeto con $E \cap B' = 0$, entonces ... □

Notas históricas

¿Por qué esmerarse en buscar una definición más amplia que la de categoría de módulos? Y, quizás más relevante, ¿por qué estudiar categorías abelianas después de que el encaje de Freyd-Mitchell nos dice que «módulos son suficientes»? Ambas preguntas son vitales para lectores que, usualmente, no reciben la respuesta a ninguna, esperando que la mera definición de *categoría abeliana* sea suficientemente satisfactoria. La razón está en la invención de un objeto más complejo: los *haces* que estudiaremos más adelante, pero que sorpresivamente surgen antes. En los años 40's y antes, la topología algebraica fuerza la necesidad por herramientas algebraicas más potentes, que resultan en la invención del *álgebra homológica* (así nombrada por **Henri Cartan** y Eilenberg), pero formulada inicialmente para grupos abelianos y, luego, para módulos.

Mac Lane se percató de que era necesaria una definición más general y trato de dar una axiomatización en [**35**] (1948), en donde define una «categoría abeliana», aunque sus axiomas jamás tuvieron ímpetu. Un estudiante doctoral de Eilenberg llamado **David Buchsbaum** sienta los axiomas del segundo intento, con su estudio de las *categorías exactas* profundizaría en su tesis doctoral [**28**] (1955). La definición de Buchsbaum sería incorporada al texto fundamental CARTAN y EILENBERG [**7**] (1956).

No obstante, la verdadera gran revolución vendría más tarde con el famoso artículo de **Alexander Grothendieck** [**9**] (1957) en el cuál se sienta un desarrollo del álgebra homológica sobre el contexto de *categorías abelianas* con generadores;[4] ésta última definición también es suya en forma catego-

[4]Curiosamente, Grothendieck no emplea el término en honor a Mac Lane o a los grupos abelianos, sino que la palabra *abélienne* significa «importante» (no confundir con

rial, aunque al igual que con muchas otras definiciones, tiene sus origenes o sus formas primitivas en contexto de la categoría de módulos, el nombre se explica en el teorema 5.82. Los axiomas que estudia Grothendieck son los siguientes:

AB 1) La categorías posee núcleos y conúcleos.

AB 2) Dada una flecha u, la flecha canónica $\bar{u}\colon \operatorname{coim} u \to \operatorname{im} u$ es un isomorfismo.

AB 3) La categoría admite coproductos (arbitrarios pequeños).

AB 4) El coproducto de monomorfismos es también un monomorfismo.

AB 5) Se cumple AB 3) y dada una cadena $\{A_i\}_{i\in I}$ de la categoría y un objeto B, se cumple que

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B).$$

AB 6) Para toda cadena $\{B_{i,j}\}_{i,j}$ de subobjetos de A se cumple:

$$\bigcap_j \bigcup_i B_{i,j} = \bigcup_i \bigcap_j B_{i,j}.$$

Los axiomas AB 1) y AB 3) dan que la categoría es cocompleta, el axioma AB 2) se traduce en que monomorfismos son núcleos y epimorfismos son conúcleos, de modo que en conjunto dan la definición presente de categoría abeliana. El axioma AB 5) da la definición de categoría de Grothendieck que trabajamos al final. El axioma AB 6) es una especie general de intercambio de límites.

Otra definición, más cercana a las trabajadas en éste texto, fueron las de HELLER [**31**] (1958) quién da las presentes definiciones de categoría (pre)aditiva, y define las categorías abelianas como categorías preaditivas que satisfacen más axiomas. La definición de categoría abeliana de éste texto es la extraida en FREYD [**3**] (1964), quien fue el primero en percatarse de que se podía deducir la estructura de grupo abeliano en los Hom's a partir del resto de axiomas.

Por aquél entonces hay un basto flujo de información en el mundo de los categoristas, pero las publicaciones o bien se ven retrasadas, o bien varios de los teoremas ya son folclor sin saberse. FREYD [**3,** pág. 158] escribe:

Abélienne).

> Un hombre aprende a pensar categorialmente, trabajar un par de definiciones, consigue un teorema, por lo general un lema, y lo publica. Usualmente, su ejercicio, pese a no estar publicado, ha sido tradicional desde el principio. Usualmente ha sido publicado fielmente cada año.

Así, por ejemplo, varios de los avances de la teoría aparecen originalmente en presentaciones sin publicar de Freyd y de **Barry Mitchell** en 1960. El teorema débil del encaje fue demostrado independientemente por Lubkin [**34**] (1960), y Heron y Freyd en sus disertaciones. El teorema del encaje pleno de Freyd-Mitchell fue demostrado por Mitchell [**36**] (1960) en correspondencia con Freyd (de hecho, Mitchell cita el libro aún sin publicar de Freyd).

Varios conceptos de las categorías abelianas surgen originalmente como abstracción de los objetos en las categorías de módulos o en la grupos abelianos. Así, Baer [**27**] (1940) fue el primero en concebir la definición de *módulo inyectivo* y de reconocer su importancia. Las nociones de *objeto inyectivo* y *proyectivo* serían descubiertas por Mac Lane [**35**] (1948) en el contexto de grupos abelianos, en donde se percató de que nuestra definición (mediante elevaciones de flechas) coincide con la de grupos libres (= proyectivos) y la de grupos divisibles (= inyectivos). La definición de *módulo proyectivo* sería dada en [**7**].

4

Topoi

4.1 Definiciones preliminares

El objetivo es dar una definición de lo que es un *topos*, pero la motivación detrás está en encontrar una categoría que se comporte de manera similar a Set, para lo cual éste va a ser nuestro ejemplo primordial y modelo.

En Set se cumple que $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(A, B)$ puede identificarse con un objeto, que denotamos $\mathrm{Func}(A; B)$, pero en éste caso denotaremos por B^A. Además, podemos definir la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}\colon B^A \times A &\longrightarrow B \\ (g, a) &\longmapsto g(a) \end{aligned}$$

la cual posee propiedades bastante interesantes que pueden abstrarse en un contexto categorial de la siguiente manera:

Definición 4.1: Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Se dice que *admite exponenciación* si:

EXP1. $\mathscr{C}$ posee productos finitos.

EXP2. Para todo $A, B \in \mathrm{Obj}\,\mathscr{C}$ existe un objeto $B^A \in \mathrm{Obj}\,\mathscr{C}$ y una flecha $\mathrm{ev} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B^A \times A, B)$ tal que para todo $C \times A \xrightarrow{g} B$ existe una única flecha $C \xrightarrow{\hat{g}} B^A$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
B^A \times A \arrow[dr, "\mathrm{ev}"] & \\
& B \\
C \times A \arrow[uu, dashed, "\exists!(\hat{g},1_A)"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Es inmediato de la definición que si $\mathscr{C}$ admite exponenciación, entonces para todo trío de objetos A, B, C se cumple que:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C \times A, B) \approx \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, B^A) \tag{4.1}$$

donde $\approx$ denota equipotencia. Ésta fórmula será muy útil más adelante.

El lector más atento debería ser capaz de reconocer que la condición EXP2 se traduce en que el funtor $(- \times A)$ posee adjunta derecha, que se denota por $(-)^A$.

Ejemplo. Set admite exponenciación, donde si $g\colon C \times A \to B$, entonces se define

$$\begin{aligned} g_c\colon A &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto g(c,a) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \hat{g}\colon C &\longrightarrow B^A \\ c &\longmapsto g_c \end{aligned}$$

Definición 4.2: Sea $\mathscr{C}$ una categoría que satisface lo siguiente:

CC1. $\mathscr{C}$ es finitamente completa por la izquierda, i.e., todo diagrama finito posee límites inversos.

CC2. $\mathscr{C}$ admite exponenciación.

Entonces $\mathscr{C}$ se dice *cartesiana*.[1]

Nótese que las categorías cartesianas, necesariamente poseen un objeto final, que denotaremos por **1** (en negritas, para diferenciarlo de la flecha identidad).

Ejemplo.
- Set y FinSet son categorías cartesianas.
- FinOrd es una categoría cartesiana (¿cuál será su exponencial?).

[1]eng. *Cartesian-closed*.

- Sea $(P, \leq)$ un conjunto linealmente ordenado con máximo 1. Entonces $\mathsf{LinOrd}(P)$ es una categoría cartesiana, donde dados $p, q \in P$ definimos:

$$q^p := \begin{cases} q, & q \leq p \\ 1, & q > p \end{cases}$$

  donde ev es la única flecha posible.

Teorema 4.3: Sea $\mathscr{C}$ una categoría cartesiana con objeto inicial $\mathbf{0}$. Entonces:

1. $\mathbf{0} \cong \mathbf{0} \times A$ para todo $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$.
2. Si existe una flecha $A \to \mathbf{0}$ (si $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, \mathbf{0}) \neq \varnothing$), entonces $A \cong \mathbf{0}$.
3. Si $\mathbf{1} \cong \mathbf{0}$, entonces todos los objetos de $\mathscr{C}$ son isomorfos.
4. $\mathbf{0} \to A$ es un monomorfismo.
5. $A^{\mathbf{1}} \cong A, A^{\mathbf{0}} \cong \mathbf{1}$ y $\mathbf{1}^A \cong \mathbf{1}$.

Demostración:

1. Sea $B \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ arbitrario, luego $\operatorname{Hom}(\mathbf{0} \times A, B) \approx \operatorname{Hom}(\mathbf{0}, B^A)$, pero 0 es inicial, luego ambos conjuntos sólo poseen un elemento, por lo que $0 \times A$ es un objeto inicial.
2. Basta considerar el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "{(f,1_A)}"] \arrow[dr, bend left, "1_A"] & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} \times A \arrow[l, "\pi_{\mathbf{0}}"] \arrow[r, "\pi_A"'] \arrow[dr, "g"'] & A \arrow[d, "{(f,1_A)}"] \\
 & & A
\end{tikzcd}$$

   y concluir que $g = 1_{\mathbf{0} \times A}$ puesto que $\mathbf{0} \times A$ es un objeto inicial. □

Definición 4.4: Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto final $\mathbf{1}$. Un *clasificador de subobjetos* es un par $(\Omega, \top)$, donde $\Omega \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ y $\top \in \operatorname{Hom}(\mathbf{1}, \Omega)$ tal que satisface lo siguiente: para todo $S \xrightarrow{f} X$ un subobjeto, existe una única flecha $X \xrightarrow{\chi_f} \Omega$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "\exists!"'] & X \arrow[d, "\chi_f"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

conmuta y representa un producto fibrado.

A χ_f le llamamos la *flecha característica* de f. Algunos textos denotan $\top$ por `true`.

Dado $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ y $\top \in \operatorname{Hom}(\mathbf{1}, \Omega)$ un clasificador de objetos, se denota por $\top_A := !_A \circ \top$, donde $!_A \in \operatorname{Hom}(A, \mathbf{1})$ es la única flecha del conjunto.

Ejemplo. Set posee un clasificador de subobjetos. Denotamos por $\mathbf{2} := \{0, 1\}$ y $\top : * \mapsto 1$. Así pues, dado $f : S \to X$, la función característica es la siguiente:

$$\chi_f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \operatorname{Img} f \\ 0, & x \notin \operatorname{Img} f \end{cases}$$

La ventaja de éste enfoque es que permite generalizar la noción de función característica.

Proposición 4.5: Si $\mathscr{C}$ posee dos clasificadores de subobjetos $(\Omega, \top)$ y $(\Omega', \top')$, entonces $\Omega \cong \Omega'$. Además si $(\Omega, \top)$ es un clasificador, entonces $\top$ es un monomorfismo.

La razón tras el nombre reside en el siguiente teorema:

Teorema 4.6: Sea $\mathscr{C}$ una categoría con clasificador de subobjetos, y sean $A \xrightarrow{f} X$ y $B \xrightarrow{g} X$ dos subobjetos. Entonces $f \simeq g$ (son equivalentes como subobjetos) syss $\chi_f = \chi_g$.

Demostración: $\Longleftarrow$. Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, hook, dashed, "\exists! k"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & B \arrow[r, "g"] \arrow[d] & X \arrow[d, "\chi_f"] \\ & \mathbf{1} \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

donde la existencia de k se induce de que B sea un producto fibrado. Así se comprueba que $f \leq g$ y análogamente para la desigualdad restante.

$\Longrightarrow$. Se emplea el mismo diagrama, ahora aprovechando que k existe y es un isomorfismo por hipótesis. $\square$

Corolario 4.7: Una categoría con clasificador de subobjetos está bien potenciada.

Definición 4.8: Una categoría $\mathscr{C}$ se dice un *topos elemental*, o simplemente un *topos* (plural *topoi*), si satisface lo siguiente:

TE1. $\mathscr{C}$ es finitamente completa.

TE2. $\mathscr{C}$ es finitamente cocompleta.

TE3. $\mathscr{C}$ admite exponenciaciones.

TE4. $\mathscr{C}$ posee un clasificador de subobjetos.

La razón de tener las condiciones TE1 y TE2 por separado es que puede demostrarse que teniendo una y el resto de TE3 y TE4 se concluye la restante.

Definición 4.9: Una categoría $\mathscr{C}$ con productos finitos se dice que posee *objetos potencia* si para todo objeto A existe un objeto $\mathcal{P}A$ y un monomorfismo:

$$\in_A \xhookrightarrow{\in} \mathcal{P}A \times A$$

tal que para todo objeto B y todo subobjeto $R \xrightarrow{r} B \times A$ existe una única flecha $f_r \in \operatorname{Hom}(B, \mathcal{P}A)$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, hook, "r"] \arrow[d] & B \times A \arrow[d, "f_r \times 1_A"] \\
\in_A \arrow[r, hook, "\in"] & \mathcal{P}A \times A
\end{tikzcd}$$

representa un producto fibrado. Será útil denotar $\operatorname{Rel}(A, B)$ a los subobjetos de $B \times A$ los cuales llamaremos *relaciones* de A sobre B (aquí el orden importa, para ver cómo se factoriza la flecha).

En términos algebraicos, escribiremos:

$$\operatorname{Rel}(A, B) \approx \operatorname{Hom}(B, \mathcal{P}A). \tag{4.2}$$

A veces se definen los topoi en términos de objetos potencia, el siguiente teorema establece la equivalencia entre las definiciones:

Teorema 4.10: Una categoría $\mathscr{C}$ es un topos syss satisface lo siguiente:

1. Es finitamente bicompleta.
2. Posee objetos potencia.

Demostración: $\implies$. Dado un objeto A definamos $\mathcal{P}A := \Omega^A$. Como $\mathscr{C}$ es finitamente completa entonces podemos definir $\in_A \xrightarrow{\in} \Omega^A \times A$ como el siguiente producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} \in_A \arrow[r, hook, "\in"] \arrow[d] & \Omega^A \times A \arrow[d, "\mathrm{ev}_A"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Luego definimos $f_r \in \mathrm{Hom}(B, \Omega^A)$ como la única flecha tal que el siguiente diagrama conmuta (puesto que $\mathscr{C}$ admite exponenciación):

$$\begin{tikzcd} \Omega^A \times A \arrow[dr, "\mathrm{ev}_A"] & \\ & \Omega \\ B \times A \arrow[uu, "f_r \times 1_A"] \arrow[ur, "\chi_r"'] & \end{tikzcd}$$

Luego aplicando el lema del producto fibrado al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, hook, "r"] \arrow[d, dashed, "\exists!"] \arrow[dd, bend right] & B \times A \arrow[d, "f_r \times A"] \\ \in_A \arrow[r, hook, "\in"] \arrow[d] & \Omega^A \times A \arrow[d, "\mathrm{ev}_A"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

se concluye que efectivamente se comportan como objetos potencia.

$\impliedby$. Veremos primero que posee clasificador de subobjetos: Para ello definamos $\Omega := \mathcal{P}\mathbf{1}$ y apliquemos la propiedad de objeto potencia a la relación $\mathbf{1} \xrightarrow{(1,1)} \mathbf{1} \times \mathbf{1}$, la cual induce un $f_{(1,1)} =: \top$. Será útil demostrar que $\in_{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$: para ello, primero recuerde que $X \times \mathbf{1} = X$ y de que sólo existe una flecha en $\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$, luego se reduce a probar que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[d, "\top"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

representa un producto fibrado, pero ello es evidente del hecho de que $\mathbf{1}$ es un objeto final. Luego, sea $S \xrightarrow{s} X$ un subobjeto, entonces, por definición de los objetos potencia, se cumple que:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook, "s"] \arrow[d] & A \times \mathbf{1} = A \arrow[d, dashed, "\exists! \chi_s"] \\ \in_{\mathbf{1}} = \mathbf{1} \arrow[r, "\top"] & \mathcal{P}\mathbf{1} \times \mathbf{1} = \Omega \end{tikzcd}$$

representa un producto fibrado.

Ahora veremos que admite exponenciación: Para ello vamos a primero considerar la relación $r := (1_A, 1_A)$ sobre $\mathrm{Rel}(A, A)$ y definir $f_r =: \{\cdot\} \in \mathrm{Hom}(A, \mathcal{P}A)$.[2] Luego considere el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "(u,1)"'] & A \arrow[d, "(1,1)=r"] \\ A \times X \arrow[r, "(1,u)"] & A \times A \end{tikzcd}$$

y note que X es un producto fibrado (ejercicio para el lector). Luego si $u \circ \{\cdot\} = v \circ \{\cdot\}$, entonces, podemos emplear el siguiente diagrama de producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "(u,1)"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "(1,1)"] & \in_A \arrow[d, hook, "\in"] \\ A \times X \arrow[r, "(1,u)"] & A \times A \arrow[r, "(\{\cdot\},1)"] & \mathcal{P}A \times A \end{tikzcd}$$

para concluir que $u = v$.

Ahora bien, la flecha

$$A \xhookrightarrow{(!_A, 1_A)} \mathbf{1} \times A$$

es una relación en A sobre $\mathbf{1}$, luego induce una flecha $\ulcorner A \urcorner \in \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, \mathcal{P}A)$.[3]

Similarmente, por la equivalencia (4.2) se concluye que la flecha identidad $1_{\mathcal{P}(A\times B)} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{P}(A \times B), \mathcal{P}(A \times B))$ da lugar a una relación $r \in \mathrm{Rel}(A \times B, \mathcal{P}(A \times B))$. Mirandola como una relación en B sobre $\mathcal{P}(A \times B) \times A$, por la

[2]En Set ésto corresponde a la función $a \mapsto \{a\}$.
[3]En Set ésta es la función constante $* \mapsto A$.

misma equivalencia (4.2) se concluye que induce una flecha $p \in \mathrm{Hom}(\mathcal{P}(A \times B) \times A, B)$, y por completitud podemos definir el siguiente producto fibrado:

$$
\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "\bar{p}"'] & B \arrow[d, hook, "\{\cdot\}"] \\
\mathcal{P}(A \times B) \times A \arrow[r, "p"'] & \mathcal{P}B
\end{tikzcd}
$$

Nótese que como Q es un producto fibrado y $\{\cdot\}$ es un monomorfismo, entonces $\bar{p}$ también, así que es una relación que podemos considerar como $\bar{p} \in \mathrm{Rel}(A, \mathcal{P}(A \times B))$. Empleando una vez más la equivalencia (4.2) se induce una flecha $q \in \mathrm{Hom}(\mathcal{P}(A \times B), \mathcal{P}A)$ y finalmente definimos la exponencial como el siguiente producto fibrado:

$$
\begin{tikzcd}
B^A \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathbf{1} \arrow[d, "\ulcorner A \urcorner"] \\
\mathcal{P}(A \times B) \arrow[r, "q"] & \mathcal{P}A
\end{tikzcd}
$$

Y queda al lector probar que la relación (4.1) se satisface. □

Teorema 4.11: Sea $A \xrightarrow{f} B$ un monomorfismo, entonces $f = \ker(\chi_f, \top_B)$.

Demostración: Sea $C \xrightarrow{g} B$ tal que $g \circ \chi_f = g \circ \top_B = (g \circ !_B) \circ \top = !_C \circ \top = \top_C$. Luego podemos construir el siguiente diagrama y concluir debido a que se trata de un producto fibrado:

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dashed, "\exists!"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "!_C"'] & & \\
& A \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d, "\chi_f"] \arrow[dl, "!_B"'] \\
& \mathbf{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

□

Corolario 4.12: Todo topos es una categoría balanceada.

Demostración: Basta aplicar el teorema 1.64. □

Teorema 4.13: Los topoi poseen imágenes.

Demostración: Sea $A \xrightarrow{f} B$ y supongamos que se tiene la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & B \\
& C \arrow[ur, hook, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Como v es monomorfismo, por el teorema anterior se cumple que es el ecualizador de algún par de flechas $s, t \in \mathrm{Hom}(B, D)$. Luego se tiene que

$$f \circ s = (u \circ v) \circ s = u \circ (v \circ s) = u \circ (v \circ t) = (u \circ v) \circ t = f \circ t.$$

Por lo que, podemos definir R como el coproducto fibrado de f, f y así pues:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "q"] \arrow[ddr, bend left, "s"] & \\
B \arrow[r, "p"'] \arrow[drr, bend right, "t"'] & R \arrow[dr, dashed, "\exists! h"] & \\
& & D
\end{tikzcd}$$

Finalmente, sea $I := \ker(p, q)$. Nótese que se tiene la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, dashed, "\exists!"'] \arrow[dr, "f"] & & \\
I \arrow[r, hook, "\iota"'] & B \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & R
\end{tikzcd}$$

Nótese que

$$\iota \circ s = \iota \circ q \circ h = \iota \circ p \circ h = \iota \circ t,$$

luego, como v es el ecualizador, se tiene que

$$\begin{tikzcd}
& I \arrow[dr, hook, "\iota"] \arrow[dd, dashed] & \\
A \arrow[ur] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & B \\
& C \arrow[ur, hook, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

De lo que se concluye que I es la imagen de f. $\square$

El lector debería notar que la demostración comienza suponiendo una factorización entre subobjetos, ¿afecta en algo a la existencia de la imagen?

Corolario 4.14: Los topoi poseen imágenes epimórficas.

Demostración: Sea $A \xrightarrow{f} B$, consideremos $g := A \to \operatorname{im} f$ (la flecha), luego se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{im} g \arrow[dd, hook, "\iota_g"] \arrow[dr, hook, "\iota_g \circ \iota_f"] & \\
A \arrow[ur, "\bar{g}"] \arrow[dr, "\bar{f}"'] & & B \\
& \operatorname{im} f \arrow[ur, hook, "\iota_f"'] &
\end{tikzcd}$$

Definiendo $h := \iota_g \circ \iota_f$ nótese que es un monomorfismo por composición de monomorfismos. Luego $\operatorname{im} g, \operatorname{im} f$ son subobjetos de B y claramente $h \leq \iota_f$, pero como h es un subobjeto que factoriza a f, entonces $\iota_f \leq h$; por lo que ι_g es un isomorfismo. Pero ι_g estaba definido como el ecualizador de unas flechas $p, q \in \operatorname{Hom}(\operatorname{im} f, C)$ las cuales formaban un coproducto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] & \operatorname{im} f \arrow[d, "p"] \\
\operatorname{im} f \arrow[r, "q"'] & C
\end{tikzcd}$$

luego $\iota_g \circ p = \iota_g \circ q$, pero como ι_g es epimorfismo, entonces $p = q$. Finalmente basta recordar la caracterización dual de la proposición 1.75. □

4.2 Lógica clásica... con flechas

Definición 4.15: En un topos, se dice que un objeto A es *no vacío* si existe alguna flecha $\mathbf{1} \to A$. Éstas flechas se identifican como los *elementos* de A.

A los elementos del clasificador de subobjetos Ω les llamamos *valores de verdad*.

Proposición 4.16: Un topos es degenerado syss el $\mathbf{0}$ es no vacío.

Definición 4.17: Se dice que un topos está *bien punteado* si para todo par de flechas distintas $f, g \in \operatorname{Hom}(A, B)$ existe un elemento $\mathbf{1} \xrightarrow{x} A$ tal que $x \circ f \neq x \circ g$. A ésta propiedad de le conoce como el *principio* *de extensionalidad* de los topoi.

Ejemplo. Set es un topos bien punteado.

Teorema 4.18: Si un topos $\mathscr{C}$ está bien punteado, entonces todos sus objetos no iniciales son no vacíos.

Demostración: Nótese que $\mathbf{0} \to A$ y $A \xrightarrow{1_A} A$ son subobjetos distintos, luego poseen distintos clasificadores. Luego, por extensionalidad, existe un elemento $x \in \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, A)$ tal que $x \circ \chi_0 \neq x \circ \chi_1$. Como A posee un elemento es no vacío. $\square$

Definición 4.19: Sea $\mathscr{C}$ un topos. Existe una única flecha $0_{\mathbf{1}} \in \mathrm{Hom}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$, luego definimos $\perp := \chi_{0_{\mathbf{1}}}$, vale decir, es la única flecha tal que el siguiente diagrama representa un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r, "0_{\mathbf{1}}"] \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[d, "\perp"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Un topos no degenerado se dice *bivalente* si $\top, \perp$ son los únicos valores de verdad.

Teorema 4.20: Si un topos está bien punteado, entonces es bivalente.

Demostración: Sea $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, \Omega)$ un valor de verdad. Como $\mathscr{C}$ es completa, podemos formar el siguiente producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "g"] \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

por lo que $f = \chi_g$. Distinguimos dos casos:

a) <u>Caso $A \cong \mathbf{0}$</u>: Entonces $\chi_g = \perp$ por definición de $\perp$ y unicidad de χ_g.

b) <u>Caso A no inicial:</u> Veremos que g es epimorfismo: sean $h, k \in \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, B)$ tales que $g \circ h = g \circ k$. Como A no es inicial, por axioma de extensionalidad, existe un elemento $x \in \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, A)$, y luego $x \circ g \in \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$, por lo que $x \circ g = 1_{\mathbf{1}}$ y se cumple que

$$h = 1_{\mathbf{1}} \circ h = x \circ g \circ h = x \circ g \circ k = k.$$

Como los topoi son categorías balanceadas, g es isomorfismo y $\chi_g = \chi_{1_{\mathbf{1}}} = \top$. □

Lema 4.21: En un topos $\mathscr{C}$, sean $A \xrightarrow{f} C$ y $B \xrightarrow{g} C$ dos subobjetos cuya intersección es $\mathbf{0}$. Entonces $\binom{f}{g} \in \operatorname{Hom}(A \amalg B, C)$ es un monomorfismo.

Intuitivamente se interpreta como que «la unión de dos subobjetos disjuntos sigue siendo un subobjeto».

Demostración: Nótese que el hecho de que f sea monomorfismo y de que la intersección sea $\mathbf{0}$ se traducen en los siguientes diagramas de productos fibrados resp.:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "1_A"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Demostrar que se pue-de «sumar» productos fibrados en un topos.

Lo que induce (?!) el siguiente producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} A \amalg \mathbf{0} \arrow[r, "\binom{1_A}{0}"] \arrow[d, "\binom{1_A}{0}"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \amalg B \arrow[r, "\binom{f}{g}"] & C \end{tikzcd}$$

Nótese que $\binom{1_A}{0}$ es un isomorfismo (proposición 1.70) de modo que en realidad se tienen los dos siguientes diagramas de producto fibrado (el restante es por analogía al primero):

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "\iota_A"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \amalg B \arrow[r, "\binom{f}{g}"] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "1_B"] \arrow[d, "\iota_B"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \amalg B \arrow[r, "\binom{f}{g}"] & C \end{tikzcd}$$

Por la misma proposición se concluye que

$$\begin{tikzcd} A \amalg B \arrow[r, "\binom{1_A}{1_B}"] \arrow[d, "\binom{1_A}{1_B}"'] & A \amalg B \arrow[d, "\binom{f}{g}"] \\ A \amalg B \arrow[r, "\binom{f}{g}"] & C \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado y $\binom{1_A}{1_B} = 1_{A \amalg B}$. □

Teorema 4.22: En un topos, $\binom{\top}{\perp} \in \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, \Omega)$ es un monomorfismo.

Definición 4.23: Un topos se dice *clásico* si $\binom{\top}{\perp}$ es un isomorfismo.

Teorema 4.24: Un topos bien punteado es clásico.

Demostración: Como los topoi son balanceados basta ver que $\binom{\top}{\perp}$ es un epimorfismo. Así pues considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, bend left, "\top"] & & \\
\mathbf{1} \amalg \mathbf{1} \arrow[r, "\binom{\top}{\perp}"] & \Omega \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & A \\
\mathbf{1} \arrow[u, "j"] \arrow[ur, bend right, "\perp"'] & &
\end{tikzcd}$$

Si $\binom{\top}{\perp} \circ f = \binom{\top}{\perp} \circ g$, entonces $\top \circ f = \top \circ g$ y $\perp \circ f = \perp \circ g$. Pero $\top, \perp$ son los únicos elementos de Ω, luego por extensionalidad, $f = g$. □

$\top, \perp$ no sólo sirven como análogos de los valores de verdad, verdadero y falso resp., sino que pueden emplearse las flechas en un topos para construir un reticulado que modele la lógica clásica y otros tipos de lógica. Para ello construiremos los siguientes por abstracción de las funciones en Set:

1. **Negador:** Es la característica de $\perp$, vale decir, es la flecha «$\neg$» que hace que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "\perp"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

   represente un producto fibrado. En Set, $\perp$ es la función constante $* \mapsto 0$ y por lo tanto $\neg = \chi_{\{0\}}$.

2. **Conjuntor:** Es la caracrerística de $(\top, \top)$, vale decir, es la flecha «$\wedge$» que conforma el siguiente producto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "{(\top,\top)}"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\wedge"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

En Set, $(\top, \top)$ es la función constante $* \mapsto (1,1)$.

3. **Implicador:** En un álgebra booleana ya hemos visto que $u \leq v$ syss $u \wedge v = u$, luego podemos definir el objeto $\textcircled{\leqslant}$ como el ecualizador entre $\wedge, \pi_1 \in \mathrm{Hom}(\Omega \times \Omega, \Omega)$. Luego, el implicador es la característica de éste objeto, representado por el producto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
\textcircled{\leqslant} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\Rightarrow"] \\
\mathbf{1} \arrow[r] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Ésto se debe a que en un álgebra booleana, $u \Rightarrow v = 0$ syss $u \leq v$.

Parte II.

Álgebra homológica

5

Módulos

En el capítulo de categorías abelianas ya vimos el protagonismo que la categoría de módulos posee. Ahora comenzamos a estudiar y aplicar de manera más concreta nuestra teoría, sin nunca dejar de lado las flechas por supuesto.

5.1 La categoría de módulos

En ésta sección estudiaremos los elementos básicos de las categorías de módulos sobre un anillo Λ. Éste capítulo se considera complementario al capítulo 5 de mis apuntes de álgebra **[37]**, no obstante, aquí Λ no se asume conmutativo en general, por lo que diferenciaremos entre módulos izquierdos (cuya categoría se denota ${}_{\Lambda}\mathsf{Mod}$) y derechos (Mod_{Λ}).

Definición 5.1: Una ***sucesión exacta corta*** en una categoría abeliana $\mathscr{C}$ es una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow A \overset{f}{\hookrightarrow} B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C \longrightarrow 0. \tag{5.1}$$

Decimos que la sucesión (5.1) ***se escinde*** si g es una retracción, i.e., si existe $C \xrightarrow{h} B$ tal que $h \circ g = 1_C$.

Proposición 5.2: Si una sucesión exacta corta (5.1) se escinde, entonces $B \cong A \oplus C$.

Veamos primero un par de lemas para practicar el uso de flechas:

Lema 5.3 (corto de los cinco): Dado el siguiente diagrama conmutativo de Λ-módulos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\psi'"'] & B' \arrow[r, "\phi'"'] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde las filas son exactas. Entonces:

1. Si α y γ son monomorfismos, entonces β es monomorfismo.
2. Si α y γ son epimorfismos, entonces β es epimorfismo.
3. Si α y γ son isomorfismos, entonces β es isomorfismo.

Demostración:

1. Sea $\boldsymbol{b} \in \ker \beta$, luego $\vec{0} = \phi'(\beta(\boldsymbol{b})) = \gamma(\phi(\boldsymbol{b}))$, luego $\phi(\boldsymbol{b}) \in \ker \gamma = 0$, así que $\boldsymbol{b} \in \ker \phi = \operatorname{Img} \psi$ y existe $\boldsymbol{a} \in A$ tal que $\psi(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$. Por ende $\beta(\psi(\boldsymbol{a})) = \psi'(\alpha(\boldsymbol{a}))$, pero ψ', α son monomorfismos, así que $\boldsymbol{a} = \vec{0}$.
2. Sea $\boldsymbol{x} \in B'$, entonces puesto que ϕ, γ son epimorfismos, entonces existe $\boldsymbol{y} \in B$ tal que $\phi'(\boldsymbol{x}) = \gamma(\phi(\boldsymbol{y}))$, luego $\phi'(\boldsymbol{x} - \beta(\boldsymbol{y})) = \vec{0}$, luego $\boldsymbol{x} - \beta(\boldsymbol{y}) \in \ker(\phi') = \operatorname{Img}(\psi')$, luego puesto que α es epimorfismo $\boldsymbol{x} - \beta(\boldsymbol{y}) = \psi'(\alpha(\boldsymbol{a})) = \beta(\psi(\boldsymbol{a}))$. Llamando $\boldsymbol{z} := \psi(\boldsymbol{a})$, se tiene que $\boldsymbol{x} = \beta(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$.
3. Consecuencia de las anteriores. □

Siguiendo técnicas similares se pueden demostrar los siguientes lemas:

Lema 5.4 (fuerte de los cuatro): Dado el siguiente diagrama conmutativo de Λ-módulos:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & A \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[d, "\nu"] \\ M' \arrow[r] & A' \arrow[r, "\xi"] & B' \arrow[r] & N' \end{tikzcd}$$

con filas exactas, μ epimorfismo y ν monomorfismo. Entonces:

$$\ker \gamma = \zeta[\ker \beta], \qquad \operatorname{Img} \beta = \xi^{-1}[\operatorname{Img} \gamma].$$

Lema 5.5 (de los cinco): Dado el siguiente diagrama conmutativo de Λ-módulos:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_4"] & A_5 \arrow[d, "\alpha_5"] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

con filas exactas se cumplen:

1. Si α_1 es epimorfismo y α_2, α_4 son monomorfismos, entonces α_3 es monomorfismo.
2. Si α_5 es monomorfismo y α_2, α_4 son epimorfismos, entonces α_3 es epimorfismo.
3. Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ son isomorfismos, entonces α_3 es isomorfismo.

§5.1.1 Módulos proyectivos.

Proposición 5.6: Sea Λ un anillo. Todo Λ-módulo libre es proyectivo y, en consecuencia, la categoría Mod_Λ tiene suficientes proyectivos.

Demostración: Nótese que Λ, visto como Λ-módulo, es proyectivo; luego $A^{\oplus\kappa}$ también (por la proposición 3.53) de modo que efectivamente todo módulo libre es proyectivo. Dado un módulo cualquiera M, basta considerar a M como conjunto y construir F el módulo libre de base M para tener de forma inmediata un epimorfismo $F \to M$ donde F es proyectivo. □

Proposición (AE) 5.7: Sea P un Λ-módulo. Son equivalentes:

1. P es proyectivo.
2. Toda sucesión exacta corta
$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \xrightarrow{p} P \longrightarrow 0$$
se escinde.
3. P es un sumando directo de un Λ-módulo libre. Más aún, si P es finitamente generado, entonces es el sumando directo de un Λ-módulo libre de dimensión finita.

Demostración: 1 $\implies$ 2. En la sucesión, p es suprayectivo, luego basta considerar el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\mathrm{Id}_P"] \\ N \arrow[r, two heads, "p"'] & P \end{tikzcd}$$

para concluir.

2 $\implies$ 3. Sea S un sistema generador de P, y sea $F := \Lambda^{\oplus S}$, es decir, el Λ-módulo libre que posee a S como base, de modo que $\iota\colon S \to P$ induce trivialmente un epimorfismo $p\colon F \to P$. Luego sea $P' := \ker p$ y así se obtiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow P' \longrightarrow F \xrightarrow{\ p\ } P \longrightarrow 0$$

la cual se escinde, luego $F = P \oplus P'$.

3 $\implies$ 1. Dado el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} F & P \arrow[l, hook'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, two heads, "p"'] & N \end{tikzcd}$$

como $F = P \oplus P'$ podemos definir $\hat{f}\colon F \to N$ tal que se anule en P' y coincida con f en P. Sea $X = \{\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{y}_i\}_{i\in I}$ una base de F, donde $\boldsymbol{x}_i \in P$ e $\boldsymbol{y}_i \in P'$ para todo $i \in I$. Podemos definir una función $h^*\colon X \to M$ donde a cada $\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{y}_i$ le asigne un elemento de $p^{-1}\big[\{\hat{f}(\boldsymbol{x}_i)\}\big]$ (el cuál existe porque p es suprayectivo), que luego, por definición de módulo libre, se extiende a un homomorfismo de Λ-módulos $h\colon F \to M$. Finalmente, queda al lector comprobar que efectivamente $g := \iota \circ h \circ p\colon P \to N$ hace conmutar el diagrama. □

Un corolario particularmente útil es el siguiente:

Teorema (AE) 5.8: Los Λ-módulos proyectivos son planos.

Proposición (AE) 5.9: El producto tensorial de finitos módulos proyectivos es proyectivo.

Proposición (AE) 5.10 (lema de las bases duales): Sea P un Λ-módulo. Son equivalentes:

1. P es proyectivo.

2. Existe $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\in I}$ en P y $\{f_i\}_{i\in I}$ en $\operatorname{Hom}_\Lambda(P,\Lambda)$ tales que para todo $\boldsymbol{x}\in P$ se cumple que $f_i(\boldsymbol{x})=0$ para todos salvo finitos $i\in I$, y tal que

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i\in I} f_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}_i.$$

En cuyo caso $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\in I}$ es un sistema generador de P. Más aún, si P es finitamente generado podemos exigir que I sea finito.

Demostración: $\Longrightarrow$. Sea $S:=\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\in I}$ un sistema de generadores de P. Luego sea F un Λ-módulo libre con base $\{\boldsymbol{y}_i\}_{i\in I}$, luego el morfismo $p\colon F\to P$ que manda $p(\boldsymbol{y}_i)=\boldsymbol{x}_i$ es suprayectivo, por lo que se factoriza en $q\colon P\to F$ tal que $q\circ p=\operatorname{Id}_P$. Como F es libre, la aplicación $\pi_j\colon F\to\Lambda$ dada por

$$\pi_j\left(\sum_{i\in I} a_i\boldsymbol{y}_i\right)=a_j$$

está bien definida y es un homomorfismo; más aún, para un $\boldsymbol{y}\in F$ fijo, $\pi_j(\boldsymbol{y})$ es nulo para todos salvo finitos $i\in I$. Luego definimos $f_i:=q\circ\pi_i$ y comprobamos que cumple lo exigido.

$\Longleftarrow$. Nuevamente, sea F un Λ-módulo libre con base $\{\boldsymbol{y}_i\}_{i\in I}$ y considere el epimorfismo $p\colon F\to P$ que manda $p(\boldsymbol{y}_i)=\boldsymbol{x}_i$. Nótese que trivialmente $\tau_j\colon\boldsymbol{x}\mapsto f_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}_j$ es un homomorfismo de módulos, que induce el siguiente homomorfismo

$$\begin{aligned} s:=\sum_{i\in I}\tau_i\colon P &\longrightarrow F\\ \boldsymbol{x}&\longmapsto\sum_{i\in I} f_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}_i\end{aligned}$$

que satisface que $s\circ p=\operatorname{Id}_P$. Finalmente la sucesión:

$$0\longrightarrow\ker p\longrightarrow F\xrightarrow{\ p\ }P\longrightarrow 0$$

es exacta y se escinde. $\square$

Pese al nombre no se confunda, ni $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\in I}$ ni $\{f_i\}_{i\in I}$ tienen por que ser bases.

Definición 5.11: Se dice que un Λ-módulo M es ***finitamente presentado*** si existe una sucesión exacta corta de la forma:

$$\Lambda^m \longrightarrow \Lambda^n \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Proposición 5.12: Todo Λ-módulo proyectivo finitamente generado es finitamente presentado.

Demostración: Sea P un módulo proyectivo. Que sea finitamente generado significa que existe un epimorfismo $p\colon \Lambda^n \to R$, luego se extiende a una sucesión exacta corta $0 \to \ker p \to \Lambda^n \to P \to 0$ y, como P es proyectivo, dicha sucesión se escinde, de modo que $\Lambda^n = P \oplus \ker p$, luego $\ker p \leq \Lambda^n$ y por ende es finitamente generado. □

Definición 5.13: Una ***presentación proyectiva*** de un objeto $M \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ es una sucesión exacta corta de la forma

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0,$$

donde P es un objeto proyectivo.

Lema 5.14 (de Schanuel): Dadas dos presentaciones proyectivas de un objeto $M \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ en una categoría abeliana $\mathscr{C}$:

$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\varepsilon_1} M \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\varepsilon_2} M \longrightarrow 0.$$

Existe un isomorfismo $K_1 \oplus P_2 \cong K_2 \oplus P_1$.

Demostración: En primer lugar, como P_1 es proyectivo existe una flecha $P_1 \xrightarrow{\beta} P_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "k"] \arrow[d, dashed, "\exists! g_f"] & P_1 \arrow[r, "\varepsilon_1"] \arrow[d, dashed, "f"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_2 \arrow[r, "k'"'] & P_2 \arrow[r, "\varepsilon_2"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La unicidad de g está en función de alguna elección de f. En cualquier caso, K_1 es el producto fibrado de (f, k') por la proposición 3.26. Luego por la proposición 3.24 tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow K_1 \xrightarrow{(k,g)} P_1 \oplus K_2 \xrightarrow{\binom{f}{-k'}} P_2 \longrightarrow 0 \tag{5.2}$$

Lo único no trivial es la exactitud en P_2 que queda al lector. Pero, P_2 es proyectivo, luego la sucesión (5.2) se escinde y $P_1 \oplus K_2 \cong P_2 \oplus K_1$. □

Corolario 5.15: Sea M un Λ-módulo finitamente presentado. Para toda sucesión exacta corta de la forma:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

donde F es libre finitamente generado, se cumple que K está finitamente generado.

Demostración: Por definición de finitamente presentado existe otra presentación $0 \to K' \to F' \to M \to 0$ con F', K' finitamente generados y F' libre. Por el lema de Schanuel se tiene que $K \oplus F' \cong K' \oplus F$ el cual es finitamente generado, luego K es finitamente generado. □

Ejemplo 4: Sea Λ un dominio con un ideal $\mathfrak{a}$ que no es finitamente generado (e.g., $\Lambda = k[x_1, x_2, \dots]$ y $\mathfrak{a} = (x_1, x_2, \dots)$). Luego $M := \Lambda/\mathfrak{a}$ es un Λ-módulo finitamente generado (la clase del 1 es un sistema generador), pero no está finitamente presentado pues $0 \to \mathfrak{a} \to \Lambda \to M \to 0$ es una presentación libre que contradice el corolario anterior.

§5.1.2 Módulos inyectivos. Ahora estudiemos un poco a los módulos inyectivos:

> **Teorema** (AE) **5.16 – *Criterio de Baer*:** Un Λ-módulo izquierdo Q es inyectivo syss todo homomorfismo $f\colon \mathfrak{a} \to Q$, donde $\mathfrak{a}$ es un ideal izquierdo de Λ, posee una extensión $g\colon \Lambda \to Q$.

Demostración: $\Longrightarrow$. Trivial.

$\Longleftarrow$. Sea $f\colon N \to Q$ un homomorfismo de módulos, donde N es un submódulo de M; nos basta extender a f para comprobar que Q es un módulo inyectivo. Consideremos a la familia $\mathcal{F}$ de pares ordenados (N', h), donde $N \le N' \le M$ y $h\colon N' \to Q$ es un homomorfismo que extiende a f. Y consideremos, sobre dicho conjunto, la siguiente relación de orden parcial:

$$(N_1, h_1) \preceq (N_2, h_2) \iff N_1 \le N_2 \wedge h_2 \restriction N_1 = h_1.$$

$(\mathcal{F}, \preceq)$ satisface las hipótesis del lema de Zorn (¿por qué?), luego admite un elemento maximal $(\tilde{N}, g)$. Basta ver que $\tilde{N} = M$, lo que haremos por contradicción: Si $\tilde{N} \subset M$, entonces sea $\boldsymbol{x} \in M \setminus \tilde{N}$ y consideremos a $\tilde{N} + \Lambda \cdot \boldsymbol{x} \supset \tilde{N}$, y definamos

$$\mathfrak{a} := \{r \in \Lambda : r\boldsymbol{x} \in \tilde{N}\}.$$

Nótese que $\mathfrak{a} = \operatorname{Ann}(\Lambda \cdot \boldsymbol{x} + \tilde{N})$ en $M/\tilde{N}$, de modo que es un ideal de Λ e induce el siguiente homomorfismo de módulos:

$$\begin{aligned} h\colon \mathfrak{a} &\longrightarrow M \\ r &\longmapsto g(r\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

Por hipótesis h se extiende a $\bar{h}\colon \Lambda \to M$. Luego nótese que $\bar{g}(r\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}) := \bar{h}(r\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{n})$ para todo $\boldsymbol{n} \in \tilde{N}$ y todo $r \in \Lambda$, es un homomorfismo de módulos bien definido (¿por qué?) que extiende a g; lo que contradice la maximalidad de $(\tilde{N}, g)$. □

Definición 5.17: Se dice que un Λ-módulo (izquierdo) M es ***divisible*** por $a \in \Lambda_{\neq 0}$ si $a \cdot M = M$. Un módulo M se dice ***divisible*** (a secas) si para todo $a \in A_{\neq 0}$ se cumple que $aM = M$.

Proposición 5.18: Todo cociente de un módulo divisible es divisible.

Proposición 5.19: Se cumplen:

1. Si Λ es un dominio íntegro, entonces todo Λ-módulo inyectivo es divisible.
2. (AE) Más aún, si Λ es un DIP, todo Λ-módulo divisible es inyectivo.

Demostración:

1. Sea Q un Λ-módulo inyectivo, sea $\boldsymbol{x} \in Q$ y $r \in \Lambda_{\neq 0}$. Como Λ es un dominio íntegro, admite cancelación y luego la aplicación $ar \mapsto a\boldsymbol{x}$ es un homomorfismo de módulos bien definido desde $a\Lambda$ hasta Q. Sea $\varphi(1) = \boldsymbol{y}$, luego
$$\boldsymbol{x} = \varphi(r) = r\varphi(1) = r\boldsymbol{y},$$
y como aplica todo $\boldsymbol{x} \in Q$, se concluye que Q es divisible por r.
2. Sea M un Λ-módulo divisible y sea $f\colon (r) \to M$ un homomorfismo de anillos, donde $r \in \Lambda$. Si $r = 0$, entonces se puede extender al homomorfismo nulo. Si $r \neq 0$, entonces $f(r) = \boldsymbol{x}$ y como M es divisible, existe $\boldsymbol{y} \in M$ tal que $\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{y}$; luego $g(a) := a\boldsymbol{y}$ es un homomorfismo de módulos desde Λ hasta M que extiende a f, y concluimos por el criterio de Baer. □

Corolario (AE) 5.20: Todo cociente de un módulo inyectivo es también un módulo inyectivo.

Lema 5.21: Todo grupo abeliano (visto como $\mathbb{Z}$-módulo) está encajado en un $\mathbb{Z}$-módulo divisible.

Demostración: Sea F un grupo abeliano libre de base $\{x_i\}_{i\in I}$, luego podemos definir a F' como el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial libre de base $\{x_i\}_{i\in I}$, y, vistos como $\mathbb{Z}$-módulos, claramente F está encajado en F', y F' es divisible. Sea M un $\mathbb{Z}$-módulo arbitrario, entonces $M \cong F/K$ donde F es libre; luego $M \leq F'/K$ que es divisible. □

Corolario (AE) 5.22: Todo $\mathbb{Z}$-módulo está encajado en un módulo divisible

Lema 5.23: Si Q es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo, entonces $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, Q)$ es un Λ-módulo inyectivo.

Demostración: Hay que probar que si

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\ f\ } N'$$

es una sucesión exacta (en ${}_\Lambda\mathsf{Mod}$), entonces

$$0 \longleftarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(N, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, Q)) \xleftarrow{\ h_f\ } \operatorname{Hom}_\Lambda(N', \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, Q))$$

es una sucesión exacta (en ${}_\Lambda\mathsf{Mod}$). Ya hemos visto en la sección de tensores que existe un isomorfismo canónico:

$$\varphi_N\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(N \otimes_\Lambda \Lambda, Q) \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda\big(N, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, Q)\big),$$

Y sabemos que $N \otimes_\Lambda \Lambda = N$, luego se induce el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, Q) \arrow[r, squiggly, "\varphi_N"] \arrow[d, two heads, "\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(f,Q)"'] & \operatorname{Hom}_\Lambda(N, Q) \arrow[d, "h_f"] \\
\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(N', Q) \arrow[r, squiggly, "\varphi_{N'}"] & \operatorname{Hom}_\Lambda(N', Q)
\end{tikzcd}$$

finalmente como $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(f, Q)$ es suprayectivo y los φ's son isomorfismos, se concluye que $h_f = \operatorname{Hom}_\Lambda(f, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, Q))$ es suprayectivo, como se quería ver. □

Teorema (AE) 5.24: La categoría Mod_Λ tiene suficientes inyectivos, i.e., todo Λ-módulo está encajado en un Λ-módulo inyectivo.

Teorema (AE) 5.25: Sea Q un Λ-módulo. Son equivalentes:

1. Q es inyectivo.
2. Toda sucesión exacta corta:
$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{\ i\ } M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$
se escinde.
3. Q es el sumando directo de que todo módulo que le contiene.

Demostración: 1 $\implies$ 2. Análogo al caso de módulos proyectivos.

2 $\implies$ 3. Es claro de la proposición **??**.

3 $\implies$ 1. Sea M un módulo inyectivo tal que $Q \subseteq M$, luego $M = Q \oplus M'$ y en particular existen homomorfismos $\iota\colon Q \to M$ y $\pi\colon M \to Q$ tales que $\iota\pi = \mathrm{Id}_Q$. Dados $q\colon N' \to N$ y $f\colon N' \to Q$ homomorfismos, con q inyectivo, podemos construir el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
N' \arrow[r, hook, "q"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[dl, dashed, "g\circ\pi"] \arrow[ddl, dashed, bend left, "\exists! g"] \\
Q & \\
M \arrow[u, "\pi"] &
\end{tikzcd}$$

Para verificar que $h := g \circ \pi$ es el único que hace conmutar el diagrama, supongamos que hubiese otro h', entonces necesariamente, en ambos casos, $g = h \circ \iota = h' \circ \iota$, y luego $h = h \circ \iota \circ \pi = h' \circ \iota \circ \pi = h'$. $\square$

Ahora nos enfocaremos en tratar de mejorar la inclusión de los módulos en módulos inyectivos y para ello necesitaremos dos conceptos:

Definición 5.26: Se dice que un submódulo $G \leq M$ es ***grande*** si para todo submódulo $N \leq G$ no trivial, se cumple que $N \cap G$ no es trivial. Un homomorfismo $\varphi\colon M \to N$ se dice ***esencial*** si $\mathrm{Img}\,\varphi \leq N$ es un submódulo grande.

El teorema principal nos dirá que todo módulo está esencialmente encajado en un módulo inyectivo.

Proposición (AE) 5.27: Un Λ-módulo Q es inyectivo syss todo monomorfismo esencial $f\colon Q \to M$ es un isomorfismo.

Demostración: $\Longrightarrow$. Podemos extenderlo a la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{f} M \longrightarrow M/f[Q] \longrightarrow 0$$

de modo que por el teorema anterior se tiene que $M = f[Q] \oplus M/f[Q]$. Como f es un monomorfismo esencial y $M/f[Q] \cap f[Q] = 0$, entonces $M/f[Q] = 0$, por lo que f es un isomorfismo.

$\Longleftarrow$. Dada la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{f} M \longrightarrow M/f[Q] \longrightarrow 0$$

veremos que se escinde para ver que Q es inyectivo. Para ello sea $S \leq M$ el submódulo maximal (por el lema de Zorn) tal que $f[Q] \cap S$ es trivial. Luego, consideremos el módulo M/S. La aplicación $j := f \circ \pi\colon Q \to M/S$ es inyectiva y su imagen es $\frac{f[Q]+S}{S}$. Sea $T/S \leq M/S$ con $S \subseteq T \leq M$ tal que

$$\frac{T}{S} \cap \frac{f[Q]+S}{S} = 0 = \frac{S}{S},$$

entonces $T \cap (f[Q]+S) \subseteq S$, por lo que $T \cap f[Q] \subseteq S \cap f[Q] = 0$, de modo que $T = S$ por maximalidad de S. De modo que j es un monomorfismo esencial, y por hipótesis, es un isomorfismo. Como

$$\frac{M}{S} = \frac{f[Q]+S}{S} \implies M = f[Q] + S$$

y como $f[Q] \cap S = 0$, entonces $M = f[Q] \oplus S$ por lo que la sucesión original se escinde. $\square$

Lema (AE) 5.28: Dado $k\colon Q \to N$ un monomorfismo esencial y $j\colon Q \to Q_0$ un monomorfismo, donde Q_0 es inyectivo. Entonces existe un monomorfismo $f\colon N \to Q_0$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, hook, "k"] \arrow[d, hook, "j"'] & N \arrow[dl, dashed, hook, "f"] \\
Q_0 &
\end{tikzcd}$$

Demostración: Como Q_0 es inyectivo, entonces existe f, por lo que sólo basta ver que es un monomorfismo. Sea $\boldsymbol{n} \in \ker f \cap \operatorname{Img} k$, luego $\boldsymbol{n} = k(\boldsymbol{q})$ para algún $\boldsymbol{q} \in Q$ y

$$\vec{0} = f(\boldsymbol{n}) = f(k(\boldsymbol{q})) = j(\boldsymbol{q}),$$

pero $\ker j = 0$, luego $\ker f \cap \operatorname{Img} k = 0$, pero $\operatorname{Img} k$ es un módulo grande, así que $\ker f = 0$. □

Teorema (AE) 5.29: Para todo módulo M existe un monomorfismo esencial $j\colon M \to Q$, donde Q es inyectivo. Más aún, si existe otro monomorfismo esencial $k\colon M \to Q'$ con Q' inyectivo, entonces existe un isomorfismo $\ell\colon Q \to Q'$ tal que $j\ell = k$.

Demostración: Ya sabemos que existe un monomorfismo $\iota_0\colon M \to Q_0$, donde Q_0 es un módulo inyectivo. Sea $Q \leq Q_0$ el submódulo maximal (por lema de Zorn) en el que $\iota_0[M]$ es grande. Llamemos $\iota := \iota_0|_Q$ y sea $f\colon Q \to Q_0$ la inclusión. Sea $k\colon Q \to N$ un monomorfismo esencial arbitrario, todo se sintetiza en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, hook, "\iota_0"'] & Q \arrow[r, hook, "k"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[dl, hook, dashed, "\ell"] \\
& Q_0 &
\end{tikzcd}$$

donde la existencia del ℓ viene del lema anterior. Luego $\ell[N]$ es un submódulo de Q_0 y $\ell[k[Q]] = Q \leq \ell[N]$ es grande, y como $\iota[M]$ es grande en Q, entonces también lo es en $\ell[N]$ y por maximalidad $\ell[N] = Q$, luego ℓ es un isomorfismo y Q es inyectivo por la proposición 5.27.

La unicidad queda de ejercicio para el lector. □

Definición 5.30: Dado un Λ-módulo M se dice que su ***envoltura inyectiva*** es el único módulo inyectivo (salvo isomorfismo) que satisface el teorema anterior.

Teorema 5.31 (dualidad de Pontrjagin): Se cumple:

1. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son cogeneradores (de Ab), i.e., para todo grupo abeliano G y todo $a \in G_{\neq 0}$ existe un homomorfismo $f\colon G \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que $f(a) \neq 0$.

2. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son $\mathbb{Z}$-módulos inyectivos.

3. Si G es un grupo abeliano finito, entonces

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong G.$$

Demostración:

1. En primer lugar, consideremos una presentación libre para G, de modo que $G = F/K$ donde F es el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por $\{x_i\}_{i \in I}$. Se tiene que a es la proyección de alguna palabra en F, luego viene generado por a lo más finitos x_i's, digamos que $F = F_1 \oplus F_2$ donde F_1 contiene generadores finitos de a y F_2 no, luego $G \cong F_1/K \oplus F_2/K$ y elegimos f que proyectiva F_2/K a 0. Así basta considerar G finitamente generado.

   En el caso de G finitamente generado, empleamos la descomposición de G como grupo abeliano libre:

   $$G \cong \mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_n^{\alpha_n}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^\beta$$

   con $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{N}$ y $p_1, \dots, p_n$ primos distintos. Si a es de torsión, está en algún $\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z}$ y mandamos el generador de dicho grupo a $1/p_i^{\alpha_i}$. Si a no es de torsión, está en $\mathbb{Z}^\beta$ y mandamos los generadores a β distintos números irracionales (que en $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ serán libres de torsión).

   Como ejercicio al lector, modifique la demostración para $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

2. Basta notar que son $\mathbb{Z}$-módulos divisibles.

3. Un grupo abeliano finito es puramente de torsión y basta seguir la demostración del inciso 1 para ver el primer isomorfismo. □

§5.1.3 Módulos y anillos (semi)simples.

Definición 5.32: Se dice que un Λ-módulo $M \neq 0$ es ***simple*** si sus únicos submódulos son 0 y M. Un Λ-módulo M es ***semisimple*** si es la suma directa de módulos simples.

Un anillo Λ se dice ***semisimple izquierdo*** (resp. ***derecho***) si es un Λ-módulo izquierdo (resp. derecho) semisimple.

Proposición 5.33: Sea Λ un anillo que es un Λ-módulo izquierdo (o derecho) simple, entonces Λ es un anillo de división.

Demostración: Si Λ es un Λ-módulo simple izquierdo, entonces para todo $a \in \Lambda_{\neq 0}$ entonces $\Lambda \cdot a$ es un Λ-submódulo izquierdo que no es el nulo, así que $\Lambda \cdot a = \Lambda$ y existe $b \in \Lambda$ tal que $ba = 1$, luego a es invertible. □

Lema 5.34 (Schur): Sea M un Λ-módulo simple. Entonces:

1. Todo homomorfismo de Λ-módulos $M \to N$ es o bien nulo, o bien un monomorfismo.

2. Todo homomorfismo de Λ-módulos $N \to M$ es o bien nulo, o bien un epimorfismo.

3. Todo endomorfismo de Λ-módulos $M \to M$ es o bien nulo, o bien un automorfismo.

Definición 5.35: Sean M, S un par de Λ-módulos por el mismo lado. Se dice que S es un ***sumando directo*** de M si existe otro Λ-módulo N tal que $M \cong S \oplus N$.

Proposición 5.36: Un Λ-módulo M es semisimple syss todos sus submódulos son sumandos directos.

Demostración: $\Longrightarrow$. Sea $M = \bigoplus_{i\in I} S_i$ y sea $N \leq M$. Luego

$$N = N \cap M = N \cap \left(\bigoplus_{i\in I} S_i \right) = \bigoplus_{i\in I} (N \cap S_i),$$

como cada S_i es simple, se tiene que $S_i \cap N$ es o bien S_i o bien 0. Sea $J \subseteq I$ el conjunto de los índices j tales que $S_j \cap N = S_j$. Entonces $N = \bigoplus_{j\in J} S_j$ y

$$M = \bigoplus_{i\in I} S_i = N \oplus \bigoplus_{i\notin J} S_i.$$

$\Longleftarrow$. En primer lugar, probaremos que todo submódulo no nulo $C \leq M$ contiene un submódulo simple. Para ello, sea $c \in C_{\neq 0}$ y sea, por lema de Zorn, D el submódulo maximal de C que no contiene a c. Luego $C = D \oplus E$ y veremos que E es simple. Sea $F \leq E$ un submódulo no nulo, entonces $E = F \oplus G$ y se cumple que $c \in F$ o $c \in G$. Luego o bien $D + F$ o bien $D + G$ son módulos que no contienen a c. Si $c \in G$, entonces $D + F$ no tiene a c, luego $D + F = D$ y $F = 0$ lo cual es absurdo. Luego $c \in F$ y $D + G$ no tiene a c, luego $D + G = D$ y $G = 0$ por lo que $F = E$.

Así, definamos $\mathcal{F} := \{S_i\}_{i\in I}$ una familia $\subseteq$-maximal de submódulos disjuntos dos a dos simples de M. Sea $B := \bigoplus_{i\in I} S_i$ y vemos que si $B < M$, entonces $M = A \oplus B$ con $A \neq 0$, luego A contiene un submódulo simple T lo que contradice la maximalidad de $\mathcal{F}$. Luego $B = M$ es semisimple. □

Teorema 5.37: Para un anillo Λ son equivalentes:

1. Λ es semisimple izquierdo.
2. Todo ideal izquierdo de Λ es un sumando directo de Λ.
3. Todo ideal izquierdo de Λ es un módulo inyectivo.
4. Todos los Λ-módulos izquierdos son semisimples.
5. Todos las sucesiones exactas de Λ-módulos izquierdos $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ se escinden.
6. Todos los Λ-módulos izquierdos son proyectivos.
7. Todos los Λ-módulos izquierdos son inyectivos.

Demostración: 1 $\iff$ 2 y 4 $\iff$ 5. Es la proposición anterior. 5 $\iff$ 6 y 5 $\iff$ 7. Son claras. 7 $\implies$ 3. Trivial.

3 $\implies$ 2. Sea $\mathfrak{a} \lhd \Lambda$ un ideal izquierdo, entonces la sucesión exacta $0 \to \mathfrak{a} \to \Lambda \to \Lambda/\mathfrak{a} \to 0$ se escinde y, por lo tanto, $\mathfrak{a}$ es un sumando directo de Λ.

2 $\implies$ 7. Sea Q un Λ-módulo izquierdo y sea $f\colon \mathfrak{a} \to Q$ un homomorfismo de Λ-módulos. Como $\mathfrak{a}$ es un sumando directo, entonces f admite una extensión a $g\colon \Lambda \to Q$, luego, por el criterio de Baer se cumple que Q es inyectivo. □

Definición 5.38: Un anillo Λ se dice ***hereditario izquierdo*** (resp. ***derecho***) si todo ideal izquierdo (resp. derecho) de Λ es proyectivo.

Trivialmente todo anillo semisimple izquierdo es hereditario izquierdo.

Teorema 5.39 (Kaplansky): Si Λ es hereditario izquierdo, entonces todo submódulo de un Λ-módulo libre es un sumando directo de módulos que son isomorfos a un ideal izquierdo de Λ.

Demostración: Sea F un Λ-módulo libre con una base ordenada $\{\boldsymbol{x}_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$. Para un ordinal $\alpha \leq \gamma$ definamos:

$$F_\alpha := \operatorname{Span}_\Lambda\{\boldsymbol{x}_\beta : \beta < \alpha\}, \qquad \overline{F}_\alpha := \operatorname{Span}_\Lambda\{\boldsymbol{x}_\beta : \beta \leq \alpha\}.$$

Sea $M \leq F$, luego todo $\boldsymbol{a} \in M \cap \overline{F}_\alpha$ se escribe de forma única como $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \lambda \boldsymbol{x}_\alpha$ donde $\boldsymbol{b} \in M \cap F_\alpha$. Sea $f(\boldsymbol{b} + \lambda \boldsymbol{x}_\alpha) = \lambda$ un epimorfismo $f\colon M \cap \overline{F}_\alpha \to \mathfrak{a}_\alpha$, donde $\mathfrak{a}_\alpha$ es un ideal izquierdo de Λ. Nótese que $\ker f = M \cap F_\alpha$, luego tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow M \cap F_\alpha \longrightarrow M \cap \overline{F}_\alpha \xrightarrow{f} \mathfrak{a}_\alpha \longrightarrow 0$$

Como $\mathfrak{a}_\alpha$ es proyectivo, la sucesión se escinde y $M \cap \overline{F}_\alpha = M \cap F_\alpha \oplus N_\alpha$, donde $N_\alpha \cong \mathfrak{a}_\alpha$. Finalmente, por inducción transfinita, es fácil ver que $M = \bigoplus_{\alpha<\gamma} C_\alpha$. □

Corolario 5.40: Todo DIP es hereditario y todo submódulo de un módulo libre es también libre.

Demostración: Para ver que un DIP Λ es hereditario, nótese que todo ideal $\mathfrak{a} \lhd \Lambda$ es isomorfo a Λ, luego es claramente proyectivo. Más aún, por el teorema anterior, tenemos que todo submódulo es una suma directa de ideales, pero éstos son isomorfos a Λ, luego conforman un módulo libre. □

Ésta consecuencia es un teorema típico de álgebra (cf. [**37,** Teo. 5.94]).

Teorema 5.41 (Cartan-Eilenberg): Para un anillo Λ son equivalentes:

1. Λ es hereditario izquierdo.
2. Todo submódulo de un Λ-módulo izquierdo proyectivo es también proyectivo.
3. Todo cociente de un Λ-módulo izquierdo inyectivo es también inyectivo.

Demostración: $1 \implies 2$. Sea P un Λ-módulo izquierdo proyectivo y sea $M \leq P$. Como P es sumando directo de un módulo libre, M es un submódulo de un módulo libre, por lo tanto, es suma directa de ideales izquierdos de Λ, los cuales son proyectivos, y toda suma directa de proyectivos es un módulo proyectivo.

$2 \implies 1$. Trivial, pues Λ es proyectivo.

$2 \implies 3$. Por la proposición 3.57 basta chequearlo sobre módulos proyectivos. Sea $p\colon Q \to Q'$ un epimorfismo e $\iota\colon P' \to P$ un monomorfismo, donde P es proyectivo y Q es inyectivo, y sea $f\colon P' \to Q'$ un homomorfismo de módulos. Por hipótesis, P' es proyectivo, luego se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} P & P' \arrow[l, hook', "\iota"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "g"'] \\ Q \arrow[r, two heads, "p"'] & Q' \end{tikzcd}$$

de modo que como Q es inyectivo existe un homomorfismo $h\colon P \to Q$ tal que $g = \iota \circ h$. Finalmente $h \circ p\colon P \to Q'$ es el homomorfismo deseado:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, dotted, "h"'] \arrow[dr, "h\circ p"] & P' \arrow[l, hook', "\iota"'] \arrow[d, "f"] \\ Q \arrow[r, dotted, "p"'] & Q' \end{tikzcd}$$

$3 \implies 2$. Es dual. $\square$

Recordemos ahora un par de definiciones más avanzadas de álgebra conmutativa:

Definición 5.42: Sea A un dominio íntegro y $K := \operatorname{Frac} A$. Un ***ideal fraccionario*** es un A-submódulo M tal que existe $x \in A_{\neq 0}$ con $xM \subseteq A$. La multiplicación entre ideales fraccionarios es la usual:

$$M \cdot N := \left\{ \sum_{i=1}^{n} m_i n_i : m_i \in M, n_i \in N \right\}.$$

Si M es un ideal fraccionario y existe otro ideal fraccionario N tal que $M \cdot N = A$, entonces decimos que M es ***inversible*** y que N es su inversa.

Y recordemos que:

Teorema 5.43: Un dominio íntegro es un dominio de Dedekind syss todo ideal fraccionario es inversible (cf. [**37,** Teo. 12.65]).

Teorema 5.44: Sea A un dominio íntegro. Un ideal fraccionario no nulo I es proyectivo syss es inversible.

Demostración: Si el ideal I es proyectivo entonces, por el lema de las bases duales, existen $\{a_j\}_{j\in J} \subseteq I$ y funciones $\{f_j\}_{j\in J} \subseteq \operatorname{Hom}_A(I, A)$ tales que $f_j(b)$ es nulo para todos salvo finitos j's y tal que para todo b se cumple que $b = \sum_{j\in J} f_j(b)a_j$. Luego, para un $b \in I_{\neq 0}$ fijo, definimos $q_j := f_j(b)/b \in K$. Nótese que la definición de q_j es independiente de la elección de b, pues para otro $b' \in I_{\neq 0}$:

$$bf_j(b') = f_j(bb') = f_j(b'b) = b'f_j(b).$$

Ahora bien, se cumple que $q_jI \subseteq A$ para cada $j \in J$, puesto que $q_jb = f_j(b) \in A$ para todo $b \in I$.

Sea $b \in I_{\neq 0}$ cualquiera. Por definición de los q_j podemos ver que todos salvo finitos son nulos, y que

$$b = \sum_{j\in J} f_j(b)a_j = \sum_{j\in J} (q_jb)a_j = b\left(\sum_{j\in J} q_ja_j\right),$$

luego, cancelando a ambos lados, tenemos que $1 = \sum_{j\in J} q_ja_j$, de modo que $N := \sum_{j\in J} q_j \cdot A$.

Es fácil seguir el proceso a la inversa para obtener una base dual de I. □

Corolario 5.45: Un dominio íntegro es hereditario syss es de Dedekind.[1]

Teorema 5.46: Un dominio íntegro A es de Dedekind syss todo A-módulo divisible es inyectivo.

Ver [**12,** 168, Teo. 4.24].

Teorema 5.47: Sea A un DFU. Entonces un ideal fraccionario I es proyectivo syss es principal.

Demostración: Claramente todo ideal principal es proyectivo. Sea I proyectivo, entonces es inversible y luego existen $a_1, \dots, a_n \in I$ y $q_1, \dots, q_n \in \operatorname{Frac}(A)$ tales que $1 = \sum_{i=1}^n a_iq_i$ y luego $q_i \cdot I \subseteq A$ para todo i. Sea $q_i = b_i/c_i$, donde, como A es un DFU, cada b_i, c_i son coprimos. Luego como $b_i(a_i/c_i) \in A$ se cumple que $c_i \mid a_i$ para cada i. Así pues, sea $c := \operatorname{mcm}\{c_1, \dots, c_n\}$, probaremos que $I = c \cdot A$. Nótese que $c \in I$ puesto que $c = c\left(\sum_{i=1}^n b_ia_i/c_i\right) = \sum_{i=1}^n (b_ic/c_i)a_i$, donde $b_ic/c_i \in I$. Con ello $(c) \subseteq I$ y la para la inclusión restante, como $c_i \mid a_i$ tenemos que $c \mid a_i$ para cada i, luego $a_i \in (c)$ y $I \subseteq (c)$. □

[1] Rotman [**12**] define *dominio de Dedekind* como un dominio íntegro hereditario, de modo que éste teorema es una definición.

Corolario 5.48: Un dominio de Dedekind es un DFU syss es un DIP.

Definición 5.49: Se dice que un anillo Λ es ***semihereditario izquierdo*** si todo ideal izquierdo finitamente generado es un Λ-módulo proyectivo. Un anillo A es ***de Prüfer*** si es un dominio íntegro semihereditario.

Siguiendo la demostración del teorema de Kaplansky vemos que:

Teorema 5.50: Si Λ es semihereditario izquierdo, entonces todo submódulo finitamente generado de un Λ-módulo izquierdo libre es un sumando directo de módulos que son isomorfos a un ideal izquierdo de Λ.

Y siguiendo la demostración del teorema de Cartan-Eilenberg:

Proposición 5.51 (Albrecht): Para un anillo Λ son equivalentes:

1. Λ es semihereditario izquierdo.
2. Todo submódulo finitamente generado de un Λ-módulo izquierdo proyectivo finitamente generado es proyectivo.
3. Todo cociente finitamente generado de un Λ-módulo izquierdo inyectivo finitamente generado es inyectivo.

5.2 Extensiones y el funtor Ext

Cambiando un poco el convenio, en general en éste capítulo Λ denotará un anillo base para poder emplear libremente A, B, C, etc. para Λ-módulos.

Definición 5.52: Dada una sucesión exacta corta de la forma

$$E\colon \qquad 0 \longrightarrow A \xhookrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0,$$

diremos que la sucesión E (o el módulo B) corresponde a una ***extensión*** de A sobre C.

Ésta terminología es intuitiva puesto que A está contenido en B el cual a su vez se proyecta en C. En general, en cualquier categoría abeliana (y de hecho basta aditiva) la siguiente es una extensión de A sobre C:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota_A} A \oplus C \xrightarrow{\pi_C} C \longrightarrow 0.$$

Definición 5.53: Sean A, C dos Λ-módulos. Dos extensiones E_1, E_2 de A sobre C se dicen ***equivalentes*** si existe un homomorfismo $\xi\colon B_1 \to B_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
E_1\colon \arrow[d, "\xi"] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\xi"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
E_2\colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Nótese que por el lema corto de los cinco se concluye que ξ es un isomorfismo y es fácil concluir que de hecho establece una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia de las extensiones A sobre C se denotan $E(C, A)$.

Nótese que como las extensiones de A sobre C son objetos cociente de C, entonces $E(C, A)$ será un conjunto si nuestra categoría base está bien copotenciada, como es el caso con Mod_Λ.

Veamos que, mediante nuestro conocimiento categorial podemos determinar una construcción relativa a la coordenada C: Sea $f\colon C \to C'$ un homomorfismo de Λ-módulos y sea $E \in E(C', A)$ una extensión de módulos. Podemos definir B^f como un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
 & & B^f \arrow[r, dashed, "\beta'"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & C \arrow[d, "f"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r, "\beta"'] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, como B^f es un producto fibrado, y β es epimorfismo, por el teorema 3.25 se cumple que β' también es epimorfismo. Además, por la proposición 3.23 tenemos que se induce el siguiente diagrama, con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
E^f\colon \arrow[d, "f^*"] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, dashed, "\exists!"] \arrow[d, equal] & B^f \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & C \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
E\colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dualizando, a partir de un homomorfismo de Λ-módulos $g\colon A \to A'$ se obtiene:

$$\begin{tikzcd}
E\colon \arrow[d, "g_*"] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near end] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
E_g\colon & 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B_g \arrow[r, dashed, "\exists!"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{5.3}$$

Teorema 5.54: Para Λ-módulos, la aplicación $E(-,-)\colon \mathsf{Mod}_\Lambda^{\mathrm{op}} \times \mathsf{Mod}_\Lambda \to \mathsf{Set}$ determina un bifuntor, contravariante en la primera coordenada y covariante en la segunda.

Demostración: Para ver que es un bifuntor hay que verificar que se trata de un funtor en cada coordenada fijada y, por el lema 1.27, de que $f^* \circ g_* = g_* \circ f^*$. Para verificar cada coordenada basta notar que las extensiones vienen completamente determinadas por los B^- que son productos fibrados y emplear el lema de los productos fibrados (y su dual para ver funtorialidad en la segunda coordenada).

Sea $(f^*, g)\colon (C', A) \to (C, A')$ y $E \in E(C', A)$ una extensión, entonces se tiene el siguiente diagrama: ... $\square$

Ahora vamos a definir otro bifuntor y ver que, de hecho, coinciden.

Definición 5.55: Sea C un Λ-módulo. Una ***presentación proyectiva*** de C es una sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\ \mu\ } P \xrightarrow{\ \varepsilon\ } C \longrightarrow 0 \tag{5.4}$$

donde P es un Λ-módulo proyectivo.

Como los módulos libres son proyectivos, todo Λ-módulo admite una presentación proyectiva, aunque, al igual que con los módulos libres, hay presentaciones más óptimas que otras. Nótese que solo es necesaria la flecha ε de la presentación (5.4), puesto que $\mu := \ker(\varepsilon)$.

Ahora bien, dado otro Λ-módulo A, la presentación (5.4) induce la siguiente sucesión exacta bajo el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, A)$:

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(R, A) \xleftarrow{\ h_\mu\ } \mathrm{Hom}_\Lambda(P, A) \xleftarrow{\ h_\varepsilon\ } \mathrm{Hom}_\Lambda(C, A) \longleftarrow 0$$

Donde h_μ es una abreviación del homomorfismo $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mu, A)$ Luego, podemos definir $\mathrm{Ext}_\Lambda^\varepsilon(C, A) := \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}_\Lambda(\mu, A))$. La notación no lo sugiere, pero la definición depende, al menos en principio, de la presentación proyectiva fijada para C.

Supongamos que un homomorfismo de Λ-módulos $g\colon A \to A'$. Entonces tenemos la transformación natural $h^g\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(-, A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(-, A')$, de modo que induce un homomorfismo $g_*\colon \mathrm{Ext}_\Lambda^\varepsilon(C, A) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^\varepsilon(C, A')$. Se puede ver que $\mathrm{Ext}_\Lambda^\varepsilon(C, -)\colon \mathsf{Mod}_\Lambda \to \mathsf{Ab}$ es un funtor (covariante).

Por otro lado, si tenemos un homomorfismo $f\colon C \to C'$, y tenemos dos presentaciones proyectivas $R \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\varepsilon} C$ y $R' \xrightarrow{\mu'} P' \xrightarrow{\varepsilon'} C'$. Entonces por definición de proyectivo tenemos la existencia de un π:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed, "\pi"'] \arrow[dr] & C \arrow[d, "f"] \\ P' \arrow[r, two heads, "\varepsilon'"'] & C' \end{tikzcd}$$

Ahora bien, nótese que

$$\mu \circ \pi \circ \varepsilon' = \mu \circ \varepsilon \circ f = 0 \circ f = 0.$$

Luego, como la presentación es una sucesión exacta, tenemos que $R' = \ker(\varepsilon')$ y luego tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists!\sigma"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & C \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & R' \arrow[r, "\ker(\varepsilon')"'] & P' \arrow[r, "\varepsilon'"'] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ahora bien, nótese que hay una elección en el π de modo que diremos que el π es *una* elevación de f. Luego podemos ver el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 & \operatorname{Ext}^{\varepsilon}_{\Lambda}(C, A) \arrow[l] & \operatorname{Hom}_{\Lambda}(R, A) \arrow[l, "k"'] & \operatorname{Hom}_{\Lambda}(P, A) \arrow[l, "h_\mu"'] \\ 0 & \operatorname{Ext}^{\varepsilon'}_{\Lambda}(C', A) \arrow[l] \arrow[u, dashed, "\exists!\pi^*"] & \operatorname{Hom}_{\Lambda}(R', A) \arrow[l] \arrow[u, "h_\sigma"] & \operatorname{Hom}_{\Lambda}(P', A) \arrow[l, "h_{\mu'}"] \arrow[u, "h_\pi"] \end{tikzcd}$$

La existencia y unicidad del π^* deriva del hecho de que $\operatorname{Ext}^{\varepsilon'}_{\Lambda}(C', A) = \operatorname{coker}(h_{\mu'})$ y

$$h_{\mu'} \circ h_\sigma \circ k = h_\pi \circ h_\mu \circ k = h_\pi \circ 0 = 0.$$

Le llamamos π^* porque, si bien en realidad también depende de σ, σ está completamente determinado por π.

Lema 5.56: π^* sólo depende del homomorfismo $f\colon C \to C'$ no de la elección del $\pi\colon P \to P'$.

DEMOSTRACIÓN: Sean $\pi_1, \pi_2 \colon P \to P'$ dos elevaciones de f con $\sigma_i \colon R \to R'$ inducidas. Recordemos que las elevaciones vienen de la proyectividad de P, en particular, de la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\Lambda}(P, R') \xrightarrow{h^{\mu'}} \operatorname{Hom}_{\Lambda}(P, P') \xrightarrow{h^{\varepsilon'}} \operatorname{Hom}_{\Lambda}(P, C') \longrightarrow 0.$$

Como $\pi_i \circ \varepsilon' = \varepsilon \circ f$ (constante), tenemos que $\pi_1 - \pi_2 \in \ker(h^{\varepsilon'}) = \operatorname{im}(h^{\mu'})$, de modo que existe $\tau\colon P \to R'$ tal que $\pi_1 - \pi_2 = \tau \circ \mu'$ y luego $\sigma_1 - \sigma_2 = \mu \circ \tau$.

Sea $\varphi \in \operatorname{Hom}_\Lambda(R', A)$ y consideremos su clase $[\varphi] \in \operatorname{Ext}_\Lambda^{\varepsilon'}(C', A)$, luego

$$\pi_1^*[\varphi] = [\sigma_1 \circ \varphi] = [\sigma_2\varphi + (\sigma_1 - \sigma_2)\varphi] = [\sigma_2\varphi + \mu\tau\varphi] = [\sigma_2\varphi] = \pi_2^*[\varphi],$$

donde $[\mu \circ x] = 0$ puesto que $\operatorname{coker}(h_\mu) := \operatorname{Hom}_\Lambda(R, A)/\operatorname{im}(h_\mu)$. □

Ésto es lo que queremos puesto que entonces $\operatorname{Ext}_\Lambda(-, A)$ induce un funtor contravariante. Para enfatizar ésta dependencia, denotaremos al homomorfismo:

$$(f; P, P')\colon \operatorname{Ext}_\Lambda^{\varepsilon'}(C', A) \longrightarrow \operatorname{Ext}_\Lambda^{\varepsilon}(C, A).$$

Corolario 5.57: Dadas dos presentaciones proyectivas $R \to P \xrightarrow{\varepsilon} C$ y $R' \to P' \xrightarrow{\varepsilon'} C$, entonces la transformación natural

$$(1_C; P, P')\colon \operatorname{Ext}_\Lambda^{\varepsilon'}(C', -) \Longrightarrow \operatorname{Ext}_\Lambda^{\varepsilon}(C, -).$$

es una equivalencia (de funtores).

Luego podemos obviar el superíndice ε dado que hemos probado que $\operatorname{Ext}_\Lambda$ es independiente de la presentación proyectiva elegida. Es fácil probar:

Teorema 5.58: $\operatorname{Ext}_\Lambda(-,-)\colon \mathsf{Mod}_\Lambda^{\mathrm{op}} \times \mathsf{Mod}_\Lambda \to \mathsf{Ab}$ es un bifuntor.

Claramente $\operatorname{Ext}_\Lambda(-,-)$ también induce un bifuntor en la categoría de conjuntos que anotaremos con los mismos símbolos. La conexión relevante es la siguiente:

Teorema 5.59: Hay una equivalencia natural entre los bifuntores de conjuntos $\eta\colon E(-,-) \Rightarrow \operatorname{Ext}_\Lambda(-,-)$.

Demostración: En primer lugar queremos formar una función de conjuntos. Sea $A \to B \to C$ una extensión de A sobre C, luego tomamos algún módulo proyectivo $P \xrightarrow{\varphi} B$ y con eso formamos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, dashed, "\exists!\psi"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Luego tenemos $[\psi] \in \operatorname{Ext}_\Lambda(C, A)$. Para que η como función esté bien definida queremos que $[\psi]$ no dependa de la elección del φ (pues ya sabemos que no depende de la elección de la presentación proyectiva). Sean dos φ_1, φ_2 con $\psi_1, \psi_2 \in \operatorname{Hom}_\Lambda(R, A)$ inducidos. Luego $\varphi_1 - \varphi_2 = \tau \circ \alpha$ para algún $\tau \in \operatorname{Hom}_\Lambda(P, A)$ y $\sigma_1 - \sigma_2 = \mu \circ \tau$, de lo que vemos que $[\psi_1] = [\psi_2] \in \operatorname{Ext}_\Lambda(C, A)$. El que sea una transformación natural en A queda de ejercicio, para lo que basta construir un diagrama como (5.3).

Queremos ahora construir una transformación natural inversa. Sea $[\psi] \in \operatorname{Ext}_\Lambda(C, A)$, i.e., $\psi \colon R \to A$. Al igual que en (5.3) construimos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\psi"] & P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\lrcorner"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[r, dashed, "\exists!"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Si $[\psi] = [\psi']$ es porque existe $\tau \in \operatorname{Hom}_\Lambda(P, A)$ tal que $\psi' = \psi + \mu \circ \tau$. Es fácil verificar que con $\phi' := \varphi + \tau\alpha$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r] \arrow[d, "\psi'"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'"] \arrow[dl, dashed, "\tau"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

de modo que la extensión $A \to B \to C$ es independiente de la elección de ψ. Con ello construimos una aplicación

$$\xi(C, A) \colon \operatorname{Ext}_\Lambda(C, A) \longrightarrow E(C, A).$$

Queda al lector comprobar que $\xi(-,-)$ determina una transformación natural y que es la inversa a η. $\square$

Como $E(C, A)$ ahora tiene una estructura de grupo abeliano, entonces, por ejemplo, tiene neutro 0. ¿Cómo identificar que una extensión de módulos sea nula en $\operatorname{Ext}_\Lambda(C, A)$? Sea $R \to P \to C$ una presentación proyectiva y $A \to B \to C$ una extensión de módulos con $\psi \in \operatorname{Hom}_\Lambda(R, A)$. Que $[\psi] = [0]$ corresponde a que existe $\tau \in \operatorname{Hom}_\Lambda(P, A)$ con $\mu \circ \tau = \psi$, luego $\mu(\varphi - \tau\alpha) = 0$, por lo que, como $C = \operatorname{coker} \mu$, existe un único σ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift right, "0"'] & P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi - \tau\alpha"'] & C \arrow[dl, dashed, "\exists!\sigma"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Queremos ver que $\sigma \circ \beta = 1_C$. Para ello, recuerde que ε es epimorfismo y note que

$$\varepsilon \circ (\sigma\beta) = (\varphi - \tau\alpha)\beta = \varphi\beta - \tau(\cancelto{0}{\alpha\beta}) = \varepsilon.$$

De modo que tenemos que la sucesión se escinde. Es fácil comprobar el recíproco.

Luego también concluimos lo siguiente:

Corolario 5.60: Se cumplen:

1. Sea P un Λ-módulo proyectivo e I un módulo inyectivo. Para todo par de módulos C, A se cumple que $\mathrm{Ext}_\Lambda(P, A) = \mathrm{Ext}_\Lambda(C, I) = 0$.

2. Sean P, I un par de Λ-módulos. Si para todo par de módulos C, A se cumple que $\mathrm{Ext}_\Lambda(P, A) = \mathrm{Ext}_\Lambda(C, I) = 0$, entonces P es proyectivo e I es inyectivo.

Demostración: Para la segunda nótese que como $\mathrm{Ext}_\Lambda(-,-) = E(-,-)$, vemos que la condición de que $\mathrm{Ext}_\Lambda(P, A) = 0$ se traduce en que toda sucesión exacta corta de la forma $0 \to A \to B \to P \to 0$ se escinde, lo que equivale a ser proyectivo. □

Nótese que la demostración de que $\mathrm{Ext}_\Lambda(C, I) = 0$ también podría hacerse recordando que $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, I)$ es un funtor exacto. ¿Podríamos emplear un argumento del mismo tipo para ver que $\mathrm{Ext}_\Lambda(P, A) = 0$?

Comenzamos por ver el proceso inverso:

Definición 5.61: Sea A un Λ-módulo. Una ***presentación inyectiva*** de A es una sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ \nu\ } I \xrightarrow{\ \eta\ } S \longrightarrow 0 \tag{5.5}$$

donde I es un Λ-módulo inyectivo.

Al contrario de las presentaciones proyectivas no es inmediatamente claro que todo módulo admita una presentación proyectiva, lo que equivale a decir que no es obvio que exista un monomorfismo hasta un módulo inyectivo, pero éste sí resulta ser el caso (cf. [**37,** Teo. 5.82]). Nuevamente $\eta := \mathrm{coker}(\nu)$ de modo que la única flecha importante de (5.5) es ν.

Dado un Λ-módulo C aplicamos $\mathrm{Hom}(C, -)$ en (5.5) para obtener:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(C, A) \xrightarrow{\ h^\nu\ } \mathrm{Hom}_\Lambda(C, I) \xrightarrow{\ h^\eta\ } \mathrm{Hom}_\Lambda(C, S)$$

Y, al igual que antes, definimos $\overline{\operatorname{Ext}}^{\nu}_{\Lambda}(C,A) := \operatorname{coker}(\operatorname{Hom}_{\Lambda}(C,\eta))$.

Dualizando todo lo anterior se podría obtener facilmente una equivalencia natural $E(-,-) \Rightarrow \overline{\operatorname{Ext}}_{\Lambda}(-,-)$ entre bifuntores de conjuntos, pero veremos otro camino que nos dará, más fuerte aún, que $\overline{\operatorname{Ext}}_{\Lambda}(-,-)$ y $\operatorname{Ext}_{\Lambda}(-,-)$ son equivalentes como bifuntores de grupos abelianos.

Lema 5.62: Dado el siguiente diagrama conmutativo de Λ-módulos con filas exactas:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_1"] & B \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_2"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ A' \arrow[r, "\psi'"'] & B' \arrow[r, "\phi'"'] & C' \end{tikzcd} \tag{5.6}$$

Se cumple que

$$\frac{\ker(\phi\circ\gamma)}{\ker\phi+\ker\beta} \cong \frac{\operatorname{im}\beta\cap\operatorname{im}\psi'}{\operatorname{im}(\psi\circ\beta)}.$$

Demostración: Sea $x \in \ker(\phi\circ\gamma) \leq B$. Claramente $\beta(x) \in \operatorname{im}\beta$ y, por otro lado, $\phi'(\beta(x)) = (\beta\circ\phi')(x) = (\phi\circ\gamma)(x) = 0$, de modo que $\beta(x) \in \ker(\phi') = \operatorname{im}(\psi')$ por exactitud. Así que β induce el siguiente homomorfismo:

$$\bar\beta\colon \ker(\phi\circ\gamma) \longrightarrow \operatorname{im}\beta\cap\operatorname{im}\psi' \longrightarrow \frac{\operatorname{im}\beta\cap\operatorname{im}\psi'}{\operatorname{im}(\psi\circ\beta)}.$$

Veamos que es un epimorfismo: Sea $y \in \operatorname{im}\beta\cap\operatorname{im}\psi'$, luego existe $x \in B$ tal que $\beta(x) = y$ y:

$$(\phi\circ\gamma)(x) = (\beta\circ\phi')(x) = \phi'(y) = 0$$

pues $\operatorname{im}(\psi') = \ker(\phi')$; así que $x \in \ker(\phi\circ\gamma)$.

Finalmente veamos que $\ker(\bar\beta) = \ker\phi + \ker\beta$. si $\bar\beta(x) = 0$ es por que $\beta(x) \in \operatorname{im}(\psi\circ\beta)$, de modo que $x \in \ker\beta$ o $x \in \operatorname{im}\psi = \ker\phi$. El recíproco es claro. □

Definición 5.63: Dado un cuadrado conmutativo de Λ-módulos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\Sigma"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A' \arrow[r, "\psi'"'] & B' \end{tikzcd}$$

Se define:

$$\ker \Sigma := \frac{\ker(\psi \circ \beta)}{\ker \psi + \ker \alpha}, \qquad \operatorname{im} \Sigma := \frac{\operatorname{im} \beta \cap \operatorname{im} \psi'}{\operatorname{im}(\psi \circ \beta)}.$$

Así, el lema anterior dice que dado un diagrama (5.6) conmutativo con filas exactas se induce:

$$\ker \Sigma_2 = \operatorname{im} \Sigma_1.$$

Ahora sí, veamos que:

Teorema 5.64: Para toda presentación proyectiva $R \to P \xrightarrow{\varepsilon} C$ y toda presentación inyectiva $A \xrightarrow{\nu} I \to S$ se induce un isomorfismo de grupos abelianos:

$$\operatorname{Ext}^{\varepsilon}_{\Lambda}(C, A) \cong \overline{\operatorname{Ext}}^{\nu}_{\Lambda}(C, A).$$

Demostración: Basta construir el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(C,A) \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & \operatorname{Hom}(C,I) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_2"] & \operatorname{Hom}(C,S) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_1"] & \overline{\operatorname{Ext}}_{\Lambda}(C,A) \arrow[d] \\
\operatorname{Hom}(P,A) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_4"] & \operatorname{Hom}(P,I) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_3"] & \operatorname{Hom}(P,S) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\operatorname{Hom}(R,A) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_5"] & \operatorname{Hom}(R,I) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(R,S) & \\
\operatorname{Ext}_{\Lambda}(C,A) \arrow[r] & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Notar que $\ker \Sigma_1 = \overline{\operatorname{Ext}}_{\Lambda}(C, A)$ y que $\ker \Sigma_5 = \operatorname{Ext}_{\Lambda}(C, A)$, y emplear el lema anterior:

$$\overline{\operatorname{Ext}}_{\Lambda}(C, A) = \ker \Sigma_1 = \operatorname{im} \Sigma_2 = \ker \Sigma_3 = \operatorname{im} \Sigma_4 = \ker \Sigma_5 = \operatorname{Ext}_{\Lambda}(C, A).$$

□

Proposición 5.65: Sean $(C_i)_{i\in I}, (A_j)_{j\in J}$ familias de Λ-módulos. Entonces:

$$\operatorname{Ext}_{\Lambda}\left(\bigoplus_{i\in I} C_i, A\right) = \prod_{i\in I} \operatorname{Ext}_{\Lambda}(C_i, A),$$

$$\operatorname{Ext}_\Lambda\left(C, \prod_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J}\operatorname{Ext}_\Lambda(C, A_j).$$

Demostración: Sean $R_i \to P_i \to C_i$ presentaciones proyectivas. Entonces se induce el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}\left(\bigoplus_{i\in I} P_i, A\right) \arrow[r] \arrow[d, squiggly] & \operatorname{Hom}\left(\bigoplus_{i\in I} R_i, A\right) \arrow[r] \arrow[d, squiggly] & \operatorname{Ext}_\Lambda\left(\bigoplus_{i\in I} C_i, A\right) \arrow[r] & 0 \\
\prod_{i\in I}\operatorname{Hom}(P_i, A) \arrow[r] & \prod_{i\in I}\operatorname{Hom}(R_i, A) \arrow[r] & \prod_{i\in I}\operatorname{Ext}_\Lambda(C_i, A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde las filas son exactas. Luego es fácil concluir. La segunda igualdad queda al lector. ☐

Teorema 5.66: Dada una sucesión exacta $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ de Λ-módulos y otro módulo C, se induce la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_\Lambda(C, A_1) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_\Lambda(C, A_2) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_\Lambda(C, A_3) \arrow[dll, rounded corners, "\omega"] \\
& \operatorname{Ext}_\Lambda(C, A_1) \arrow[r] & \operatorname{Ext}_\Lambda(C, A_2) \arrow[r] & \operatorname{Ext}_\Lambda(C, A_3)
\end{tikzcd}$$

Demostración: Recordemos que el funtor $\operatorname{Hom}(X, -)$ siempre es exacto por la izquierda, pero si X es proyectivo entonces es un funtor exacto. Así pues, estamos en condiciones de emplear el lema de la serpiente sobre el diagrama (ver fig. 5.1). ☐

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \operatorname{Hom}(C, A_1) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(C, A_2) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(C, A_3) \arrow[d] \arrow[dddll, bend left, "\omega"] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_\Lambda(P, A_1) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}_\Lambda(P, A_2) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}_\Lambda(P, A_3) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_\Lambda(R, A_1) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}_\Lambda(R, A_2) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}_\Lambda(R, A_3) \arrow[d] & \\
& \operatorname{Ext}_\Lambda(C, A_1) \arrow[r] & \operatorname{Ext}_\Lambda(C, A_2) \arrow[r] & \operatorname{Ext}_\Lambda(C, A_3) &
\end{tikzcd}$$

Figura 5.1. Demostración del teorema 5.66.

Teorema 5.67: Dada una sucesión exacta $0 \to C_1 \to C_2 \to C_3 \to 0$ de Λ-módulos y otro módulo A, se induce la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(C_3, A) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(C_2, A) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(C_1, A) \arrow[dll, "\omega"] \\
& \mathrm{Ext}_\Lambda(C_3, A) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_\Lambda(C_2, A) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_\Lambda(C_1, A)
\end{tikzcd}$$

Así, podemos verificar que $\mathrm{Ext}_\Lambda(-,-)$ es un funtor que «arregla el fallo de exactitud de $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,-)$».

Corolario 5.68: En un anillo hereditario (izquierdo) Λ (e.g., un DIP):

1. Dada una sucesión exacta $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ de Λ-módulos (izquierdos) y otro módulo C, se induce la siguiente sucesión exacta:

$$\mathrm{Ext}_\Lambda(C, A_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda(C, A_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda(C, A_3) \longrightarrow 0$$

2. Dado un Λ-módulo (izquierdo) A y una sucesión exacta $0 \to C_1 \to C_2 \to C_3 \to 0$ de Λ-módulos, se induce la siguiente sucesión exacta:

$$\mathrm{Ext}_\Lambda(C_3, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda(C_2, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda(C_1, A) \longrightarrow 0$$

Demostración: Sea $R \to P \to C$ una presentación proyectiva de C. Como Λ es hereditario y $R \leq P$, entonces R es proyectivo, luego basta mirar el diagrama 5.1 para concluir. Para la segunda, la demostración es similar empleando que todo cociente de un módulo inyectivo es inyectivo. □

Otra manera de reformular el corolario anterior es que si Λ es hereditario, entonces $\mathrm{Ext}_\Lambda(-,-)$ es un funtor exacto por la derecha. Somos más explícitos para dar a entender que ésto complementa los dos diagramas generales anteriores.

Lema 5.69: Sea A un grupo abeliano de rango numerable. Si todo subgrupo de rango finito es libre, entonces A también es libre.

Teorema 5.70 (Stein-Serre): Sea A un grupo abeliano de rango numerable. A es $\mathbb{Z}$-proyectivo syss A es libre syss $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) = 0$.

Demostración: La primera equivalencia se debe a que $\mathbb{Z}$ es un DIP, y luego es hereditario. □

Añadir demostración [**10,** §3.6, pp. 106-109].

5.3 Tensores y el funtor Tor

§5.3.1 Tensores (caso no conmutativo). En [**37,** §5.3] ya estudiamos los productos tensoriales sobre dominios (i.e., anillos unitarios conmutativos). Aquí olvidamos dichas restricciones y consideramos a R como posiblemente no conmutativo; las demostraciones son las mismas *verbatim*, así que obviaremos las construcciones asumiendo que el lector interesado va a leer de la referencia. Para ello tendremos que tener cuidado con que un R-módulo sea o bien derecho, o bien izquierdo; para enfatizar ésta diferencia denotaremos por ${}_RM$ a un R-módulo izquierdo M y M_R a un R-módulo derecho.

En primer lugar, la siguiente definición:

Definición 5.71: Se dice que M es un R-S-bimódulo (denotado ${}_RM_S$) si:

BM1. $(M, +)$ es un grupo abeliano.

BM2. $(M, +, r \cdot -)$ es un R-módulo izquierdo.

BM3. $(M, +, - \cdot s)$ es un S-módulo derecho.

BM4. Para todo $\boldsymbol{m} \in M, r \in R, s \in S$ se cumple $(r\boldsymbol{m})s = r(\boldsymbol{m}s)$

La ventaja que teníamos en el caso conmutativo ahora es clara: todo R-módulo ya era simultáneamente un R-R-bimódulo de forma canónica. Ésto introduce diferencias fundamentales, pero que añaden un toque de color adicional a la teoría. En el caso de que tengamos un objeto sin tanta estructura, por ejemplo un módulo que no sea un bimódulo, podemos «rellenar» los anillos restantes por $\mathbb{Z}$, de modo que recuperamos los casos clásicos. Un $\mathbb{Z}$-$\mathbb{Z}$-bimódulo no es más que un grupo abeliano.

Proposición 5.72: Sean R, S, T anillos y sean ${}_SM_R, {}_TN_R$ bimódulos. Entonces $\operatorname{Hom}_R({}_SM_R, {}_TN_R)$ es un T-S-bimódulo con las acciones:

$$\forall s \in S, t \in T, \boldsymbol{m} \in M \quad (fs)(\boldsymbol{m}) := f(s\boldsymbol{m}), \qquad (tf)(\boldsymbol{m}) := tf(\boldsymbol{m}).$$

Definición 5.73: Sean ${}_SM_R, {}_RN_T, {}_SP_T$ bimódulos. Se dice que una aplicación $\varphi\colon M \times N \to P$ es (M, N)***-balanceada*** si:

BA1. Para todo $m_1, m_2 \in M, n \in N$ se cumple $\varphi(m_1 + m_2, n) = \varphi(m_1, n) + \varphi(m_2, n)$.

BA2. Para todo $m \in M, n_1, n_2 \in N$ se cumple $\varphi(m, n_1 + n_2) = \varphi(m, n_1) + \varphi(m, n_2)$.

BA3. Para todo $r \in R$ se cumple que $\varphi(mr, n) = \varphi(m, rn)$.

BA4. Para todo $s \in S, t \in T$ se cumple que $\varphi(sm, n) = s\varphi(m, n)$ y $\varphi(m, nt) = \varphi(m, n)t$.

Denotamos por $\operatorname{Bil}_R(M, N; P)$ al conjunto de aplicaciones (M, N)-balanceadas hacia P.

Lema 5.74: Sean ${}_SM_R, {}_RN_T, {}_SP_T$ bimódulos. Se cumplen:

1. $\operatorname{Bil}_R({}_SM_R, {}_RN_T; {}_SP_T)$ es un S-T-bimódulo.
2. Sea $f\colon {}_SM'_R \to {}_SM_R$ un homomorfismo de R-módulos derechos. Entonces
$$\begin{aligned} h_f\colon \operatorname{Bil}_R(M, N; P) &\longrightarrow \operatorname{Bil}_R(M', N; P) \\ \varphi(m, n) &\longmapsto \varphi(f(m'), n) \end{aligned}$$
es un homomorfismo de grupos abelianos. Así, $\operatorname{Bil}_R({}_S{-}_R, N; P)\colon {}_S\mathsf{Mod}_R \to {}_S\mathsf{Mod}_T$ es un funtor contravariante.
3. Sea $g\colon {}_RN'_T \to {}_RN_T$ un homomorfismo de R-módulos izquierdos. Entonces
$$\begin{aligned} h_g\colon \operatorname{Bil}_R(M, N; P) &\longrightarrow \operatorname{Bil}_R(M, N'; P) \\ \varphi(m, n) &\longmapsto \varphi(n, g(n')) \end{aligned}$$
es un homomorfismo de grupos abelianos. Así, $\operatorname{Bil}_R(M, {}_R{-}_T; P)\colon {}_R\mathsf{Mod}_T \to {}_S\mathsf{Mod}_T$ es un funtor contravariante.
4. Sea $\psi\colon {}_SP_T \to {}_SP'_T$ un homomorfismo de S-T-bimódulos. Entonces
$$\begin{aligned} h^\psi\colon \operatorname{Bil}_R(M, N; P) &\longrightarrow \operatorname{Bil}_R(M, N; P') \\ \varphi(m, n) &\longmapsto \psi(\varphi(m, n)) \end{aligned}$$
es un homomorfismo de grupos abelianos. Así, $\operatorname{Bil}_R(M, N; {}_S{-}_T)\colon {}_S\mathsf{Mod}_T \to {}_S\mathsf{Mod}_T$ es un funtor covariante.

Teorema 5.75: El funtor $\operatorname{Bil}_R({}_SM_R, {}_RN_T; {}_S{-}_T)$ es representable por un objeto ${}_SM \otimes_R N_T$. Vale decir, para todo bimódulo ${}_SP_T$ y toda aplicación $\varphi \in \operatorname{Bil}_R(M, N; P)$ existe un único homomorfismo de S-T-bimódulos $\bar{\varphi}\colon M \otimes_R N \to P$ tal que el siguiente diagrama conmuta (en Set):

$$\begin{tikzcd} {}_SM_R \times {}_RN_T \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\otimes"'] & & {}_SP_T \\ & {}_SM \otimes_R N_T \arrow[ur, dashed, "\exists!\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

A $M \otimes_R N$ se le dice el ***producto tensorial*** de ${}_SM_R, {}_RN_T$.

Recordemos un par de hechos acerca del producto tensorial:

- La aplicación $\otimes \colon M \times N \to M \otimes_R N$ induce elementos de la forma $m \otimes n$ llamados ***tensores puros***. Éstos <u>no</u> corresponden a la totalidad de elementos de ${}_SM \otimes_R N_T$, sino que generan (como S-T-bimódulo) a la totalidad de tensores.
- En consecuencia, si queremos construir un homomorfismo $f \colon {}_SM \otimes_R N_T \to {}_SP_T$ podemos hacerlo especificando sus valores exclusivamente en los tensores puros. Ésta es una práctica de todos los libros de álgebra.
- Otra consecuencia es que si $X \subseteq M$ e $Y \subseteq N$ son sistemas generadores de ${}_SM_R, {}_RN_T$ resp. entonces $X \otimes_R Y = \{x \otimes y : x \in X, y \in Y\}$ es un sistema generador de ${}_SM \otimes_R N_T$.

Lema 5.76: Sean ${}_SM_R, {}_RN_T$ un par de módulos. Dados $f \colon {}_SM_R \to {}_SM'_R$ y $g \colon {}_RN_T \to {}_RN'_T$ homomorfismos de R-módulos. Entonces

$$\begin{aligned} f \otimes g \colon M \otimes_R N &\longrightarrow M' \otimes_R N' \\ m \otimes n &\longmapsto f(m) \otimes g(n) \end{aligned}$$

es un homomorfismo de S-T-bimódulos. Así, $- \otimes_R - \colon {}_S\mathsf{Mod}_R \times {}_R\mathsf{Mod}_T \to {}_S\mathsf{Mod}_T$ es un bifuntor.

Teorema 5.77: Sean ${}_SM_R, {}_RN_T$ un par de bimódulos. Entonces para todo ${}_SP_T$ bimódulo se cumple:

$$\operatorname{Hom}_{{}_S\mathsf{Mod}_T}(M \otimes_R N, P) \cong \operatorname{Hom}_{{}_S\mathsf{Mod}_T}(M, \operatorname{Hom}_T(N, P)).$$

Así, ${}_S -_R \otimes_R N \dashv \operatorname{Hom}_T(N, {}_S-_T)$.

Proposición 5.78: Sean R, S, T anillos.

1. Dados $(M_i)_{i \in I}$ una familia de S-R-módulos y ${}_RN_T$, entonces:

$$\left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \otimes_R N \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$$

(en ${}_S\mathsf{Mod}_T$).

2. Dados ${}_SM_R$ y $(N_j)_{j\in J}$ una familia de R-T-módulos, entonces:

$$M \otimes_R \left(\bigoplus_{j\in J} N_j \right) \cong \bigoplus_{j\in J} (M \otimes_R N_i).$$

3. Si ${}_SM_R$ es un bimódulo, entonces $M \otimes_R R \cong M$ (en ${}_S\mathsf{Mod}_R$).

4. Si ${}_RN_T$ es un bimódulo, entonces $R \otimes_R N \cong N$ (en ${}_R\mathsf{Mod}_T$).

5. Sean ${}_SM_R, {}_RN_T$ un par de bimódulos. Entonces los funtores $- \otimes_R N \colon {}_S\mathsf{Mod}_R \to {}_S\mathsf{Mod}_T$ y $M \otimes_R - \colon {}_R\mathsf{Mod}_T \to {}_S\mathsf{Mod}_T$ son exactos por la derecha.

Definición 5.79: Un R-módulo M_R se dice ***plano*** si el funtor $M \otimes_R - \colon {}_R\mathsf{Mod} \to \mathsf{Ab}$ es exacto.

Otra propiedad útil:

Teorema 5.80: Todo R-módulo proyectivo es plano.

§5.3.2 El teorema de Eilenberg-Watts. Ahora nos adentramos a demostrar el resultado mencionado en la introducción. En primer lugar, un poco de terminología: recuerde que un funtor aditivo (entre categorías aditivas) es uno que preserva coproductos finitos. Un funtor exacto por la derecha es un funtor aditivo que preserva conúcleos, luego es lo mismo que un funtor que preserva límites directos finitos. Así, un funtor exacto por la derecha que preserva coproductos pequeños es precisamente lo mismo que un funtor que preserva límites directos.

En primer lugar, veamos qué esperaríamos de la categoría de módulos. Ya sabemos que ésta categoría es bicompleta, bien potenciada y bien copotenciada así que, para emplear a diestra y siniestra el teorema especial del funtor adjunto habría que entender a los generadores de la categoría de módulos. Una definición preliminar:

Definición 5.81: Sea M_Λ un módulo. Se define el ***ideal traza*** de M como:

$$T(M) := \{\varphi(x) : x \in M, \varphi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, \Lambda)\}.$$

Teorema 5.82: Sea G un Λ-módulo. Son equivalentes:

1. G es un objeto generador de Mod_Λ.
2. El ideal traza $T(G) = \Lambda$.
3. Existe un n tal que Λ es la imagen epimórfica de algún $G^{\oplus n}$
4. Todo módulo es la suma de imágenes epimórficas de G.

Demostración: 1 $\implies$ 2. Consideremos el homomorfismo de Λ-módulos $\pi\colon \Lambda \to \Lambda/T(G)$. Para todo $g \in \operatorname{Hom}_\Lambda(G, \Lambda)$ y todo $x \in G$ tenemos que $g(x) \in T(G)$ por definición, luego $g \circ \pi = 0$ para todo $g \in \operatorname{Hom}_\Lambda(G, \Lambda)$, es decir, $h^\pi = 0$. Como G es proyectivo, esto significa que $\pi = 0$ y luego $\Lambda = T(G)$.

2 $\implies$ 3. Por definición, tenemos que $1 = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$ donde $x_i \in G$ y $f_i \in \operatorname{Hom}_\Lambda(G, \Lambda)$. Fijamos los f_i's y notamos que la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} g\colon G^{\oplus n} &\longrightarrow \Lambda \\ (y_1, \dots, y_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^n f_i(y_i) \end{aligned}$$

es un epimorfismo.

3 $\implies$ 4. Todo módulo es la suma de Λ.

4 $\implies$ 1. Sean M, N un par de Λ-módulos arbitrarios. G es un objeto proyectivo syss $\operatorname{Hom}_\Lambda(G, -)$ es fiel, lo que equivale a ver que para todo homomorfismo $f\colon M \to N$ no nulo se cumple que $\operatorname{Hom}(G, f)$ no es nulo. Como M es una suma de imágenes epimórficas de G, se cumple que $M = \sum_{g \in \operatorname{Hom}(G,M)} g[G]$, luego si $g \circ f = 0$ para todo $g \in \operatorname{Hom}(G, M)$, se ha de cumplir que $f[M] = \sum_{g \in \operatorname{Hom}(G,M)} f\big[g[G]\big] = 0$, por lo que $f = 0$ como se quería ver. □

Como corolario, Λ siempre es un generador de Mod_Λ.

Lema 5.83: La categoría Mod_Λ posee un cogenerador inyectivo.

Demostración: Sea $B := \coprod_{\mathfrak{a}} \Lambda/\mathfrak{a}$, donde $\mathfrak{a}$ recorre todos los ideales derechos de Λ, y sea C un módulo inyectivo que contenga a B (por ejemplo, su envoltura inyectiva). Veremos que para todo Λ-módulo M y todo $\boldsymbol{m} \in M_{\neq 0}$ existe un $f\colon M \to C$ tal que $f(\boldsymbol{m}) \neq 0$. Para ello, nótese que el submódulo $N := \boldsymbol{m} \cdot \Lambda$ es isomorfo a $\Lambda/\mathfrak{a}$, donde $\mathfrak{a} \trianglelefteq \Lambda$ es un ideal derecho. Luego existe un monomorfismo $g\colon N \to C$ que, en particular, es una flecha que no se anula en $\boldsymbol{m}$ y tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & C \\ M \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, hook, "\iota"'] & N \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Luego $f\colon M \to C$ no se anula en $\boldsymbol{m}$ como queríamos. □

Ahora podríamos emplear el teorema especial del funtor adjunto, pero el siguiente teorema nos dirá bastante más:

Teorema 5.84 – *Teorema de Eilenberg-Watts*: Sea $F\colon \mathsf{Mod}_\Lambda \to \mathsf{Mod}_\Gamma$ un funtor que preserva límites directos. Entonces existe un bimódulo ${}_\Lambda N_\Gamma$ tal que F es equivalente a $-\otimes_\Lambda N$ y, de hecho, $N = F(\Lambda)$.

Demostración: Definamos $N := F\Lambda$, el cual es un Γ-módulo derecho. En primer lugar para todo módulo M_Λ y todo $\boldsymbol{m} \in M$ se cumple que

$$\begin{aligned} \varphi_{\boldsymbol{m}}\colon \Lambda &\longrightarrow M \\ r &\longmapsto \boldsymbol{m}r \end{aligned}$$

es un homomorfismo de Λ-módulos derechos. Luego induce un homomorfismo $F(\varphi_{\boldsymbol{m}})\colon N \to FM$ y definimos:

$$\begin{aligned} \tau_M\colon M \times N &\longrightarrow FM \\ (\boldsymbol{m}, x) &\longmapsto F(\varphi_{\boldsymbol{m}})(x) \end{aligned}$$

el cual es una aplicación $\mathbb{Z}$-balanceada, pero podemos decir más. Considerando $M = \Lambda$, vemos que τ_Λ le da una estructura de bimódulo a ${}_\Lambda N_\Gamma$. Bajo ésta estructura es fácil ver que para un módulo arbitrario M_Λ tenemos que τ_Λ es una aplicación Λ-balanceada. Luego existe un único homomorfismo de Γ-módulos $\sigma_M\colon M \otimes_\Lambda N \to FM$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "\varphi_M"] \arrow[dr, "\otimes_\Lambda"'] & & FM \\ & M \otimes_\Lambda N \arrow[ur, dashed, "\exists! \sigma_M"'] & \end{tikzcd}$$

Es fácil ver que $\sigma\colon -\otimes_\Lambda N \Rightarrow F$ es una transformación natural. Por definición se satisface que $\sigma_\Lambda\colon \Lambda \otimes_\Lambda N \to N$ es un isomorfismo, y como tanto $-\otimes_\Lambda N$ como F preservan coproductos, tenemos que σ es un isomorfismo sobre todos los Λ-módulos libres.

Sea M_Λ arbitrario, y sea $A \to B \to M \to 0$ una sucesión exacta con A, B libres. Luego se induce el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas (en Mod_Γ):

$$\begin{tikzcd} A \otimes_\Lambda N \arrow[r] \arrow[d, rightsquigarrow, "\sigma_A"] & B \otimes_\Lambda N \arrow[r] \arrow[d, rightsquigarrow, "\sigma_B"] & M \otimes_\Lambda N \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_M"] & 0 \\ F(A) \arrow[r] & F(B) \arrow[r] & F(M) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Luego aplicando el lema de los cinco, concluimos que σ_M también es un isomorfismo. □

Corolario 5.85: Dado un funtor $F\colon \mathsf{Mod}_\Lambda \to \mathsf{Mod}_\Gamma$. Son equivalentes:

1. F preserva límites directos.
2. F es exacto por la derecha y preserva coproductos.
3. F es equivalente a $-\otimes_\Lambda N$ para algún bimódulo ${}_\Lambda N_\Gamma$.
4. F tiene adjunta derecha.

Veamos las otras formas (semi)duales de Eilenberg-Watts:[2]

Teorema 5.86 – *Teorema de Eilenberg-Watts*:
1. Sea $F\colon \mathsf{Mod}_\Lambda \to {}_\Gamma\mathsf{Mod}$ un funtor contravariante que transforma límites directos en límites inversos. Entonces existe un bimódulo ${}_\Gamma N_\Lambda$ tal que $F \cong \operatorname{Hom}_\Lambda(-, N)$.
2. Sea $G\colon \mathsf{Mod}_\Lambda \to \mathsf{Mod}_\Gamma$ un funtor que preserva límites inversos. Entonces existe un bimódulo ${}_\Gamma N_\Lambda$ tal que $F \cong \operatorname{Hom}_\Lambda(N, -)$.

Demostración:

1. Nuevamente elegimos $N := F\Lambda$ y dado un módulo M_Λ para todo $\boldsymbol{m} \in M$ definimos:

$$\begin{aligned} \varphi_{\boldsymbol{m}}\colon \Lambda &\longrightarrow M \\ r &\longmapsto \boldsymbol{m}r. \end{aligned}$$

[2]Decimos «semiduales», porque *a priori* no tenemos ninguna estructura conocida para la categoría $\mathsf{Mod}_\Lambda^{\mathrm{op}}$, aun que éstas versiones si se encargan de funtores contravariantes o de otras clases de límites.

Así pues, obtenemos $F(\varphi_{\boldsymbol{m}})\colon FM \to N$ y definamos:

$$\begin{aligned} \tau_M\colon M \times FM &\longrightarrow N \\ (\boldsymbol{m}, x) &\longmapsto F(\varphi_{\boldsymbol{m}})(x). \end{aligned}$$

En particular, con $M = \Lambda$ tenemos una estructura de Γ-Λ-bimódulo para N.

Luego queremos construir una transformación natural $\sigma_M\colon FM \to \operatorname{Hom}_\Lambda(M, N)$ que a cada $x \in FM$ le asigna $\sigma_M(x)$ que es un homomorfismo sobre M, digamos $\sigma_M(x)(\boldsymbol{m}) := \tau_M(\boldsymbol{m}, x)$. Siguiendo la demostración anterior llegamos a la misma conclusión.

2. También podríamos seguir un procedimiento similar, pero he aquí un procedimiento más ingenioso. Por el teorema especial del funtor adjunto tenemos que G admite adjunta izquierda $F\colon \mathsf{Mod}_\Gamma \to \mathsf{Mod}_\Lambda$, la cual preserva límites directos; luego por Eilenberg-Watts tenemos que $F \cong - \otimes_\Gamma N$ para algún bimódulo ${}_\Gamma N_\Lambda$ y, por lo tanto, la adjunta derecha de F es $\operatorname{Hom}_\Lambda(N, -)$; pero la adjunta es única salvo isomorfismo (entre funtores). $\square$

§5.3.3 El funtor Tor. Así como Ext arregla el fallo de exactitud de Hom, uno quiere un funtor que arregle el fallo de exactitud de $\otimes$.

Definición 5.87: Sea Λ un anillo y A un Λ-módulo. Una ***presentación plana*** de A es una sucesión exacta corta del estilo:

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\ker(\varepsilon)} P \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0,$$

donde P es un Λ-módulo plano.

Como los módulos proyectivos son planos, entonces todo módulo admite una presentación plana.

Definición 5.88: Sea Λ un anillo y $A_\Lambda, {}_\Lambda B$ módulos. Sea $R \to P \xrightarrow{\varepsilon} B$ una presentación plana de B, se define:

$$0 \to \operatorname{Tor}^\Lambda_\varepsilon(A, B) \xrightarrow{\exists!} A \otimes_\Lambda R \to A \otimes_\Lambda P \to A \otimes_\Lambda B \to 0$$

Análogamente, sea $S \to Q \xrightarrow{\eta} A$ una presentación plana de A, se define:

$$0 \to \overline{\operatorname{Tor}}^\Lambda_\nu(A, B) \xrightarrow{\exists!} S \otimes_\Lambda B \to Q \otimes_\Lambda B \to A \otimes_\Lambda B \to 0$$

Proposición 5.89: Sean $A_\Lambda, {}_\Lambda B$ un par de módulos. Entonces:

1. Si A es plano, entonces $\operatorname{Tor}^\Lambda(A, B) = 0$. Si B es plano, entonces $\overline{\operatorname{Tor}}^\Lambda(A, B) = 0$.

2. Recíprocamente, si para todo B se cumple que $\operatorname{Tor}^\Lambda(A, B) = 0$, entonces A es plano. Si para todo A se cumple que $\overline{\operatorname{Tor}}^\Lambda(A, B) = 0$, entonces B es plano.

Teorema 5.90: Sea $R \to P \xrightarrow{\varepsilon} B$ una presentación plana de ${}_\Lambda B$ y sea $S \to Q \xrightarrow{\eta} A$ una presentación plana de A_Λ. Entonces (en Ab):

$$\operatorname{Tor}^\Lambda_\varepsilon(A, B) \cong \overline{\operatorname{Tor}}^\Lambda_\eta(A, B).$$

En consecuencia, $\operatorname{Tor}^\Lambda(A, B)$ es independiente de la elección de ε o de η.

DEMOSTRACIÓN: Basta construir un diagrama como en el teorema 5.64:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_1"] & \overline{\operatorname{Tor}}^\Lambda_\eta(A,B) \arrow[d] \\
 & S \otimes_\Lambda R \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_3"] & S \otimes_\Lambda P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_2"] & S \otimes_\Lambda B \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_5"] & Q \otimes_\Lambda R \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_4"] & Q \otimes_\Lambda P \arrow[r] \arrow[d] & Q \otimes_\Lambda B \arrow[d, dotted] \\
\operatorname{Tor}^\Lambda_\varepsilon(A,B) \arrow[r] & A \otimes_\Lambda R \arrow[r] & A \otimes_\Lambda P \arrow[r, dotted] & A \otimes_\Lambda B
\end{tikzcd}$$

Para demostrar la parte de «en consecuencia» basta notar que si $\varepsilon' \colon P' \to B$ es otra presentación proyectiva de ${}_\Lambda B$, entonces se tiene:

$$\operatorname{Tor}^\Lambda_\varepsilon(A, B) \cong \overline{\operatorname{Tor}}^\Lambda_\eta(A, B) \cong \operatorname{Tor}^\Lambda_{\varepsilon'}(A, B). \qquad \square$$

Y las consecuencias de nuestro lema favorito:[3]

Teorema 5.91: Dada una sucesión exacta $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ de Λ-módulos izquierdos y otro módulo B_Λ, se induce la siguiente sucesión exacta:

[3] No, no me refiero al lema de Zorn, aunque buena elección.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Tor}^{\Lambda}(A_1, B) \arrow[r] & \operatorname{Tor}^{\Lambda}(A_2, B) \arrow[r] & \operatorname{Tor}^{\Lambda}(A_3, B) \arrow[dll, rounded corners, "\omega"] & \\
A_1 \otimes_{\Lambda} B \arrow[r] & A_2 \otimes_{\Lambda} B \arrow[r] & A_3 \otimes_{\Lambda} B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Teorema 5.92: Dada una sucesión exacta $0 \to B_1 \to B_2 \to B_3 \to 0$ de Λ-módulos derechos y otro módulo ${}_{\Lambda}A$, se induce la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Tor}^{\Lambda}(A, B_1) \arrow[r] & \operatorname{Tor}^{\Lambda}(A, B_2) \arrow[r] & \operatorname{Tor}^{\Lambda}(A, B_3) \arrow[dll, rounded corners, "\omega"] & \\
A \otimes_{\Lambda} B_1 \arrow[r] & A \otimes_{\Lambda} B_2 \arrow[r] & A \otimes_{\Lambda} B_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Corolario 5.93: Se cumplen:

1. Si Λ es hereditario izquierdo, dada una sucesión exacta $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ de Λ-módulos izquierdos y otro módulo B_{Λ}, se induce la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}_{\Lambda}(A_1, B) \longrightarrow \operatorname{Tor}_{\Lambda}(A_2, B) \longrightarrow \operatorname{Tor}_{\Lambda}(A_3, B)$$

2. Si Λ es hereditario derecho, dado un módulo ${}_{\Lambda}A$ y una sucesión exacta $0 \to B_1 \to B_2 \to B_3 \to 0$ de Λ-módulos derechos, se induce la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}_{\Lambda}(A, B_1) \longrightarrow \operatorname{Tor}_{\Lambda}(A, B_2) \longrightarrow \operatorname{Tor}_{\Lambda}(A, B_3)$$

El ejemplo típico es considerar un Λ que sea DIP.

Notas históricas

Es claro que la historia entre las categorías abelianas y el álgebra homológica están entrelazadas, así que referencias se disputan.

Aquí las revoluciones son mucho mayores y dispersas. El primer resultado clave fue la inclusión de las *sucesiones exactas* que ya vimos en el capítulo de categorias abelianas, las cuales fueron inventadas por el topólogo **Witold Hurewicz** en [**32**] (1941); hasta cierto punto, la definición de *categoría exacta* de Buchsbaum es la de una categoría en la que hay herramientas para sucesiones exactas. Ésta noción fue clave para la axiomatización de la teoría de homologías por Eilenberg y Steenrod [**30**] (1945).

Reinhold Baer estudió las extensiones de grupos (no necesariamente abelianos) en [**26**] (1934). Allí descubrió que se le podía dotar a las extensiones de una suma y que, cuando los extremos eran abelianos, le dotaba a $E(A, B)$ de una estructura de grupo abeliano. Además, dió la definición de Ext como un conúcleo, que es la definición actual, mediante una presentación libre (en lugar de una presentación proyectiva, como hemos hecho nosotros); aunque las *presentaciones libres* no serían estudiadas sino hasta una década más tarde. Más tarde, Baer [**27**] (1940) definiría los *módulos inyectivos*,[4] demostraría el famoso *criterio de Baer* y caracterizaría a los anillos semisimples como aquellos en donde todo módulo es inyectivo.

En 1941, Mac Lane dió una serie de lecturas sobre extensiones de grupos en la Universidad de Michigan. Eilenberg no alcanzó a llegar a tiempo, por lo cual, Mac Lane ofreció impartirle su lectura en privado. Eilenberg notó que uno de los cálculos que hacía Mac Lane coincidía con los de los grupos de homología de Steenrod, por lo que ambos comenzaron a investigar en conjunto cuál era el funcionamiento del funtor Ext, lo que culminó el artículo [**29**] (1942) en donde, por vez primera, se estudiaban los funtores Ext y Hom con dicha terminología.

[4] Originalmente emplea el término «módulo completo».

6

Funtores derivados

6.1 Definiciones elementales

Definición 6.1: Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana. Un ***complejo de cadenas*** $C_\bullet$ es una sucesión de objetos y flechas:

$$C_\bullet: \qquad \cdots \longleftarrow C_{n-1} \xleftarrow{d_n} C_n \xleftarrow{d_{n+1}} C_{n+1} \longleftarrow \cdots$$

tales que $d_{n+1} \circ d_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. La sucesión de flechas $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ se dicen ***diferenciales*** (u *operadores de borde*) del complejo $C_\bullet$. Obviaremos el subíndice del diferencial de no haber ambigüedad. En general, trabajaremos sobre categorías concretas, de modo que:

1. Los elementos de $Z_n(C_\bullet) := \ker(C_n \xrightarrow{d} C_{n-1})$ se dicen n***-ciclos***.
2. Los elementos de $B_n(C_\bullet) := \operatorname{im}(C_{n+1} \xrightarrow{d} C_n)$ se dicen n***-fronteras***.
3. El objeto $H_n(C_\bullet) := Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$ se dice la n***-ésima homología*** de $C_\bullet$.

   Dos n-ciclos c_1, c_2 se dicen ***homólogos*** si $c_1 \equiv c_2 \pmod{B_n}$.

Dados un par de complejos de cadenas $C_\bullet, D_\bullet$, se dice que una sucesión de flechas $(f_n\colon C_n \to D_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es un ***homomorfismo de cadenas*** si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
C_\bullet\colon \arrow[d, "f_\bullet"'] & \cdots & C_{n-1} \arrow[l] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & C_n \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "f_n"] & \cdots \arrow[l] \\
D_\bullet\colon & \cdots & D_{n-1} \arrow[l] & D_n \arrow[l, "d"] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Proposición 6.2: Los complejos de cadenas (como objetos) y los homomorfismos entre ellos (como flechas) conforman una categoría denotada $\mathsf{Ch}(\mathscr{C})$.

Proposición 6.3: $\mathsf{Ch}(\mathscr{C})$ es una categoría abeliana.

Claramente si tomamos un homomorfismo de cadenas y proyectamos sobre la n-ésima cadena obtenemos un funtor, pero uno mucho más interesante es el siguiente. Sea $f_\bullet\colon C_\bullet \to D_\bullet$ un homomorfismo de cadenas. Luego por definición de núcleo tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_n(C) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists!"] & C_n \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
0 \arrow[r] & Z_n(D) \arrow[r] & D_n \arrow[r, "d"'] & D_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Luego, podemos extender el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_{n+1}(C) \arrow[r] \arrow[d] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"] & B_n(C) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists!"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n+1}(D) \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r] & B_n(D) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Finalmente extendemos el último diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B_n(C) \arrow[r] \arrow[d] & Z_n(C) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(C) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists! H_n(f)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_n(D) \arrow[r] & Z_n(D) \arrow[r] & H_n(D) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Proposición 6.4: Para todo $n \in \mathbb{Z}$, se cumple que $H_n(-)\colon \mathsf{Ch}(\mathscr{C}) \to \mathscr{C}$ es un funtor.

Definición 6.5: Un ***complejo de cocadenas*** $C^\bullet$ en una categoría abeliana es una sucesión:

$$C^\bullet\colon \qquad \cdots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

donde $\delta^{n-1} \circ \delta^n = 0$. En éste caso, definimos la n-ésima ***cohomología*** como $H^n(C^\bullet) := \ker(\delta^n)/\operatorname{im}(\delta^{n-1})$.

Uno podría verse tentado a definir una categoría de los complejos de cocadenas, pero es claro que es dual a la de los complejos de cadenas usuales y el dual de una categoría abeliana sigue siendo abeliana. Además, si $(C_\bullet, d_\bullet)$ es un complejo de cadenas, entonces $D^n := C_{-n}$ y $\delta^n := d_{-n}$ es tal que $(D^\bullet, \delta^\bullet)$ es un complejo de cocadenas.

Dualmente, la n-ésima cohomología determina un funtor.

Definición 6.6: Sean $f_\bullet, g_\bullet\colon C_\bullet \to D_\bullet$ un par homomorfismos de complejos de cadena. Se dice que f, g son ***homotópicos*** si existe una sucesión $(s_n\colon C_n \to D_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ de homomorfismos tales que

$$f_n - g_n = d_n^C \circ s_{n-1} + s_n \circ d_{n+1}^D$$

Usualmente se representa con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r] & C_n \arrow[r] \arrow[dl, "s_n"'] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "s_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r] & D_n \arrow[r] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

En éste caso, denotamos $s_n\colon f_\bullet \simeq g_\bullet$, o simplemente $f_\bullet \simeq g_\bullet$ si no nos interesa el $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Se dice que $f_\bullet$ es ***nulhomotópico*** si $f_\bullet \simeq 0$.

Ojo con los términos empleados: $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una colección de homomorfismos y no un homomorfismo de cadenas, mientras que el diagrama no es conmutativo (en general).

Proposición 6.7: Sean $f_\bullet, g_\bullet\colon C_\bullet \to D_\bullet$ dos homomorfismos de cadenas en $\mathsf{Ch}(\mathsf{Mod}_\Lambda)$. Si $f_\bullet, g_\bullet$ son homólogos, entonces $H_n(f) = H_n(g)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración: Basta probarlo para $(s_n)\colon f_\bullet \simeq 0$. Sea $x \in Z_n(C)$, entonces

$$f_n(x) = s_{n-1}(dx) + d(s_n x) = s_{n-1}(0) + d(s_n x) \equiv 0 \pmod{B_n(C)}. \qquad \square$$

Índice de notación

Bibliografía

Teoría pura de categorías

1. AWODEY, S. *Category Theory* (Oxford University Press, 2010).
2. BORCEUX, F. *Handbook of Categorical Algebra* 3 vols. (Cambridge University Press, 1994).
3. FREYD, P. *Abelian Categories* (Harper & Row, 1964).
4. MAC LANE, S. *Categories for the Working Mathematician Graduate Texts in Mathematics* **5** (Springer-Verlag New York, 1971).
5. MITCHELL, B. *Theory of Categories* (Academic Press, 1965).
6. PAREIGIS, B. *Categories and Functors* (Academic Press, Inc., 1970).

Álgebra homológica

7. CARTAN, H. y EILENBERG, S. *Homological Algebra* (Princeton University Press, 1956).
8. CASTILLO, C. I. *Álgebra Homológica y Álgebra Conmutativa* `https://www.uv.es/ivorra/Libros/Algcom.pdf` (2020).
9. GROTHENDIECK, A. Sur quelques points d'algèbre homologique. Trad. por BARR, M. L. y BARR, M. *Tôhoku Mathematical Journal.* doi:`10.2748/tmj/1178244839`. `http://www.math.mcgill.ca/barr/papers/gk.pdf` (1957).

10. HILTON, P. J. y STAMMBACH, U. *A Course in Homological Algebra Graduate Texts in Mathematics* **4** (Springer-Verlag New York, 1971).

11. MAC LANE, S. *Homology* (Springer-Verlag Berlin, 1967).

12. ROTMAN, J. J. *An Introduction to Homological Algebra* 2.ª ed. (Springer Science+Business Media, 1979).

13. WEIBEL, C. A. *An introduction to homological algebra Cambridge Studies in Advanced Mathematics* **38** (Cambridge University Press, 1994).

Teoría de módulos

14. ANDERSON, F. W. y FULLER, K. R. *Rings and Categories of Modules* 2.ª ed. *Graduate Texts in Mathematics* **13** (Springer-Verlag New York, 1974).

15. LAM, T.-Y. *Lectures on modules and rings Graduate Texts in Mathematics* **189** (Springer-Verlag New York, 1999).

Topoi y haces

16. GOLDBLATT, R. *Topoi. The Categorial Analysis of Logic* (North-Holland, 1984).

17. MAC LANE, S. y MOERDIJK, I. *Sheaves in Geometry and Logic* (Springer-Verlag New York, 1992).

18. WRAITH, G. C. *Lectures on Elementary Topoi* en *Model Theory and Topoi* (eds. LAWVERE, F. W., MAURER, C. y WRAITH, G. C.) (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1975).

Historia

19. GRAY, J. W. *Fragments of the history of sheaf theory* en *Applications of Sheaves* Proceedings of the Reasearch Symposium on Applications of Sheaf Theory to Logic, Algebra and Analysis (eds. FOURMAN, M. P., MULVEY, C. J. y SCOTT, D. S.) (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1977), 2-79.

20. KINOSHIA, Y. Naburo Yoneda (1930 – 1996). *Mathematica Japonica* **47.** `https://dmitripavlov.org/scans/yoneda.pdf` (1997).

21. Mac Lane, S. Samuel Eilenberg and Categories. *Journal of Pure and Applied Algebra* **168,** 127-131. doi:10.1016/S0022-4049(01)00092-5 (2002).

22. Marquis, J. y Reyes, G. en *Handbook of the history of logic* (eds. Gabbay, D., Kanamori, A. y Woods, J.) (Elsevier, 2011).

23. McLarty, C. The Uses and Abuses of the History of Topos Theory. *The British Journal for the Philosophy of Science.* doi:10.2307/687825 (1990).

Artículos

24. Eilenberg, S. y Mac Lane, S. General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society.* doi:10.2307/1990284 (1945).

25. Fay, T. H., Hardie, K. A. e Hilton, P. J. The Two-Square Lemma. *Publicacions Mathemàtiques* **33,** 133-137. doi:https://www.jstor.org/stable/43737121 (1989).

Documentos históricos

26. Baer, R. Erweiterung von Gruppen und ihren Isomorphismen. *Mathematische Zeitschrift.* doi:10.1007/BF01170643 (1934).

27. Baer, R. Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group. *Bulletin of the American Mathematical Society.* doi:10.1090/S0002-9904-1940-07306-9 (1940).

28. Buchsbaum, D. Exact Categories and Dualities. *Transactions of the American Mathematical Society.* doi:10.2307/1993003 (1955).

29. Eilenberg, S. y Mac Lane, S. Group Extensions and Homology. *Annals of Mathematics.* doi:10.2307/1968966 (1942).

30. Eilenberg, S. y Steenrod, N. E. Axiomatic approach to Homology Theory. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* doi:10.1073/pnas.31.4.117 (1945).

31. Heller, A. Homological Algebra in Abelian Categories. *Annals of Mathematics.* doi:10.2307/1970153 (1958).

32. Hurewicz, W. On duality theorems. *Bulletin of the American Mathematical Society* (1941).

33. KAN, D. Adjoint functors. *Transactions of the American Mathematical Society.* doi:10.1090/S0002-9947-1958-0131451-0 (1958).

34. LUBKIN, S. Imbedding of Abelian Categories. *Transactions of the American Mathematical Society.* doi:10.2307/1993379 (1960).

35. MAC LANE, S. Groups, Categories and Duality. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* doi:10.1073/pnas.34.6.263 (1948).

36. MITCHELL, B. The Full Imbedding Theorem. *American Journal of Mathematics.* doi:10.2307/2373027 (1960).

Libros de autoría propia

37. CUEVAS, J. *Álgebra* https://github.com/JoseCuevasBtos/apuntes-tex/raw/master/algebra/algebra.pdf (2022).

38. CUEVAS, J. *Teoría de Conjuntos* https://github.com/JoseCuevasBtos/apuntes-tex/raw/master/conjuntos/conjuntos.pdf (2022).

39. CUEVAS, J. *Topología y Análisis* https://github.com/JoseCuevasBtos/apuntes-tex/raw/master/topologia-analisis/topologia-analisis.pdf (2022).

Índice alfabético