El teorema de Barsotti-Chevalley sobre grupos algebraicos

José Cuevas Barrientos

Resumen. Aquí hacemos una presentación en lenguaje esquemático del teorema de estructura de Barsotti-Chevalley que dice que dado un grupo algebraico conexo, entonces posee un subgrupo algebraico cerrado normal afín tal que el cociente es una variedad abeliana.

Este artículo es una exposición de la sección §2.3 de Brion *et al.* [**1**]. Las referencias están elegidas por preferencia en términos de elegancia.

1. Preliminares

Denotamos por $\mathsf{Sch}, \mathsf{Grp}, \mathsf{Set}$ las categorías de esquemas, grupos y conjuntos resp., denotamos por $U\colon \mathsf{Grp} \to \mathsf{Set}$ el funtor olvidadizo.

Definición 1.1: Sea S un esquema. Un esquema G sobre S se dice un ***esquema en grupos*** si viene dotado de un funtor $\mathfrak{G}\colon (\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Grp}$ tal que el siguiente diagrama de categorías conmuta:

$$\begin{tikzcd} (\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \arrow[rr, "\text{よ}G"] \arrow[dr, "\mathfrak{G}"'] & & \mathsf{Set} \\ & \mathsf{Grp} \arrow[ur, "U"'] & \end{tikzcd}$$

Donde $\text{よ}G$ es el funtor $(\text{よ}G)(T) := \operatorname{Hom}_{\mathsf{Sch}/S}(T, G)$ dado por el encaje de Yoneda.

Esto puede reescribirse en términos de la existencia de un S-morfismo de multiplicación, de inversa y de neutro (cfr. Görtz y Wedhorn [**3**, pág. 116]).

Equivalentemente podríamos decir que un esquema en grupos *es* un funtor $(\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Grp}$ que es representable.

Definición 1.2: Sea S un esquema y sean G, H un par de esquemas en grupos sobre S dotados con funtores $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}\colon (\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Grp}$. Un ***homomorfismo de esquemas en grupos*** es un S-morfismo $f\colon G \to H$, con una transformación natural $\varphi\colon \mathfrak{G} \Rightarrow \mathfrak{H}$ tal que $U * \varphi = \text{よ}f\colon \text{よ}G \Rightarrow \text{よ}H$.

Fecha: 24 de octubre de 2023.

El ***núcleo*** de un homomorfismo $f\colon G \to H$, denotado $\ker f$, es el producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} \ker f \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & S \arrow[d, "e"] \\ G \arrow[r, "f"'] & H \end{tikzcd}$$

(donde $e\colon S \to H$ es el morfismo que, sobre puntos, asocia el neutro de H.)

Se dice que H es un ***subesquema en grupos*** de G si viene dotado de un encaje[1] $j\colon H \hookrightarrow G$ que es un homomorfismo de esquemas en grupos. Se dice que H es ***cerrado*** (resp. ***abierto***) si j es un encaje cerrado (resp. abierto).

Nuevamente, podríamos decir que un homomorfismo *es* una transformación natural $\varphi\colon \mathfrak{G} \Rightarrow \mathfrak{H}$ que es representable. En la práctica uno define primero los funtores $\mathfrak{G}$ y la transformación natural φ, y luego señala quién representa qué.

Definición 1.3: Sea k un cuerpo. Un ***grupo (localmente) algebraico*** es un esquema en grupos G sobre k cuyo morfismo estructural es (localmente) de tipo finito.

Proposición 1.4: Sea k un cuerpo. Se cumplen:

1. Todo esquema en grupos sobre k es separado.
2. Todo subesquema en grupos es un subesquema cerrado.
3. Un grupo localmente algebraico sobre k es suave syss es geométricamente reducido.
4. Un grupo localmente algebraico sobre k es conexo syss es geométricamente irreducible.

Demostración:

1. [**Stacks**], `Tag 047L`.
2. [**Stacks**], `Tag 047T`.
3. Görtz y Wedhorn [**3**, pág. 538], Prop. 16.50.
4. Görtz y Wedhorn [**3**, pág. 539], Cor. 16.52. □

Teorema 1.5 (Cartier): Sea k un cuerpo perfecto. Entonces grupo localmente algebraico y reducido sobre k es suave. Si $\operatorname{car} k = 0$, entonces todo grupo localmente algebraico ya es reducido.

Demostración: Cfr. [**Stacks**], `Tag 047N`. □

Definición 1.6: Sea k un cuerpo. Un ***homomorfismo cociente*** de grupos algebraicos es un homomorfismo que es fielmente plano.

---

[1] fr. *immersion*.

Dado un grupo algebraico G, un subgrupo algebraico $j\colon H \hookrightarrow G$ se dice ***normal*** si $H(T)$ es un subgrupo normal de $G(T)$ (mediante j) para todo k-esquema T.

Teorema 1.7: Sea G un grupo algebraico sobre un cuerpo k, entonces todo subgrupo algebraico normal $N \trianglelefteq G$ es el núcleo de un homomorfismo cociente $G \to H$. Denotamos $H = G/N$.

Demostración: Vid. Milne [**5**], §5.c. □

Definición 1.8: Una ***variedad abeliana*** sobre un cuerpo k es un grupo algebraico propio, conexo y geométricamente reducido.

En consecuencia, una definición equivalente es que una variedad abeliana es un grupo algebraico proyectivo, suave y geométricamente íntegro (cfr. [**Stacks**], `Tag 0H2U`).

Los siguientes lemas serán necesarios:

Lema 1.9: Todo grupo algebraico G sobre un cuerpo k posee un subgrupo normal afín conexo máximo G_{aff}. Además $(G/G_{\mathrm{aff}})_{\mathrm{aff}}$ es el grupo trivial.

Demostración: Cfr. Brion *et al.* [**1,** pág. 19], lemma 2.12. □

Lema 1.10: Sea G un grupo algebraico conexo sobre un cuerpo k, y sea Z su centro. Entonces $G/Z, G/Z_{\mathrm{red}}$ y $G/Z_{\mathrm{red}}^{\circ}$ son afines.

Demostración: Cfr. [**1,** pág. 23], cor. 2.1.7. □

Proposición 1.11: Sea G un grupo algebraico sobre un cuerpo k y sea $H \trianglelefteq G$ un subgrupo normal. Entonces G es afín syss H y G/H son afines.

Demostración: Cfr. [**1,** pág. 18], lemma 2.1.1. □

2. Acciones racionales

Aquí supondremos que k es un cuerpo perfecto. En éste contexto, por el teorema de Cartier, verificar que un grupo algebraico es una variedad abeliana equivale a chequear que es una variedad completa.

Definición 2.1: Sea k un cuerpo. Dada una variedad algebraica X sobre k, denotaremos por $\mathrm{Bir}(X/k)$ el grupo de k-aplicaciones birracionales $X \dashrightarrow X$; este grupo está en correspondencia canónica con $\mathrm{Gal}(K(X)/k)$.

Una ***acción racional*** de un grupo algebraico G sobre X es un homomorfismo de grupos $\rho\colon G(k) \to \mathrm{Bir}(X/k)$ tal que la aplicación $\alpha\colon G \times_k X \dashrightarrow X$

dada por $(g,x) \mapsto \rho(g)(x) =: g \cdot x$ está definida y es un morfismo regular sobre un abierto denso de X; esto se denota $\alpha\colon G \curvearrowright X$. Como X es separado, entonces admite un dominio de definición $\operatorname{Dom}\alpha$ (el cual también es un abierto denso); se dice que $g \cdot x$ está ***bien definido*** si $(g,x) \in \operatorname{Dom}\alpha$.

Se dice que la acción α es ***fiel*** si $\ker\rho = 0$ (éste núcleo es de grupos usuales). Se dice que un punto $x \in X$ ***está fijado*** (o ***es fijo***) por la acción α si existe un abierto denso $V \subseteq G$ tal que $V \times_k \{x\} \subseteq \operatorname{Dom}\alpha$ y $g \cdot x = x$ para todo $g \in V$.

Para evitar confusiones con los paréntesis denotaremos ρ_g en lugar de $\rho(g)$ a la k-aplicación birracional inducida por la acción.

Proposición 2.2: Sea k un cuerpo y sea G un grupo algebraico sobre k. Si existe una acción racional fiel $\alpha\colon G \curvearrowright X$ sobre una variedad con un punto fijo x, entonces G es afín.

Pista: Ésta es una adaptación *mutatis mutandis*, restringiéndose a un abierto denso, de [**1,** págs. 21-22], prop. 2.1.6. □

Lema 2.3: Sea $\alpha\colon G \curvearrowright X$ una acción racional de un grupo algebraico conexo en una variedad sobre un cuerpo k. Dado un punto $x \in X$ y $g, h \in G$, si $h \cdot x, g \cdot (h \cdot x)$ están bien definidos, entonces

$$g \cdot (h \cdot x) = gh \cdot x.$$

En la demostración siguiente emplearemos la siguiente terminología: dado un morfismo $f\colon X \to Y$ de S-esquemas, su ***gráfico*** es la imagen esquemática de $(\mathrm{Id}_X, f)\colon X \to X \times_S Y$.

Demostración: Considere la aplicación racional:

$$\begin{aligned} G \times_k G \times_k X &\dashrightarrow X \times_k X \times_k X \\ (v,w,z) &\longmapsto (w \cdot z, v \cdot (w \cdot z), vw \cdot z) \end{aligned}$$

y sea Γ su gráfico. Como la aplicación racional $(v,w,z) \mapsto (w \cdot z, v \cdot (w \cdot z))$ está bien definida en (g,h,x), existe un entorno $x \in V$ tal que $\rho_h\colon V \hookrightarrow X$ es un encaje abierto y donde tenemos los siguientes morfismos:

$$V \xrightarrow[\sim]{\rho_h} \rho_h[V] \xrightarrow[\sim]{\rho_g} X.$$

Esto quiere decir que $V \subseteq \operatorname{Dom}(\rho_{gh})$ y vemos que la proyección $\Gamma \dashrightarrow G \times_k G \times_k X$ (en las primeras tres coordenadas) es un isomorfismo en un entorno de (g,h,x), de modo que la aplicación racional $(v,w,z) \mapsto vw \cdot z$ está definido sobre (g,h,x) y debe valer $g \cdot (h \cdot x) = \rho(g)\big(\rho(h)(x)\big)$. □

Lema 2.4: Sea X una variedad normal sobre un cuerpo k y sea $f\colon X \dashrightarrow Y$ una k-aplicación racional dominante hacia una variedad completa Y. Para todo divisor de Weil primo[2] $D \subseteq X$, existe una variedad completa Y' y un k-morfismo birracional $g\colon Y' \to Y$ tal que la aplicación racional inducida $f'\colon X \dashrightarrow Y'$ se restringe a una aplicación racional $f'|_D\colon D \dashrightarrow Y'$ cuya imagen tiene codimensión ≤ 1.

Demostración: Podemos suponer que $f|_D\colon D \dashrightarrow Y'$ no tiene codimensión 0, es decir, no es dominante. El homomorfismo $f^\sharp$ hace que $K(X)$ sea una extensión de $K(Y)$, y denotemos por $v := \nu_Z$ la valuación $\mathfrak{m}_{X,\xi}$-ádica en $\mathscr{O}_{X,\xi} \subseteq K(X)$, donde $\overline{\{\xi\}} = D$. Como X es normal, $\mathscr{O}_{X,\xi}$ es de valuación discreta. Denotemos por $w := v|_{Y'}$, la cual también es una valuación discreta, y es no trivial pues $f|_D$ no es dominante. Denotemos por $\Bbbk(v), \Bbbk(w)$ los cuerpos de restos asociados a v, w resp., vistos como valuaciones, entonces tenemos que

$$\operatorname{trdeg}_{\Bbbk(w)} \Bbbk(v) \leq \operatorname{trdeg}_{K(Y)} K(X)$$

puesto que, dados $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Bbbk(v)$ elementos $\Bbbk(w)$-algebraicamente independientes, y eligiendo $\beta_i \in \mathfrak{o}_v$ tal que $\beta_i \equiv \alpha_i \pmod{\mathfrak{m}_v}$, entonces se verifica que los β_i's son $K(Y)$-algebraicamente independientes.

Sea Y' el gráfico de la aplicación racional

$$Y \dashrightarrow \mathbb{P}^n_k, \qquad y \mapsto [1 : \beta_1(y) : \cdots : \beta_n(y)]$$

así Y' es completo y tiene un morfismo birracional $p_1\colon Y' \to Y$ con un morfismo $p_2\colon Y' \to \mathbb{P}^n_k$. Luego $f' := p_1^{-1} \circ f\colon X \dashrightarrow Y'$ es una aplicación racional y la composición $p_2 \circ f'\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^n_k$ se restringe a un morfismo racional dominante $D \dashrightarrow \mathbb{P}^n_k$ y, por tanto, la imagen de $f'|_D$ está contenida en un divisor de Y'.

Finalmente sea η el punto genérico de la imagen esquemática de $f'|_D$, entonces la fórmula de la dimensión (cfr. Liu [**4,** pág. 333], thm. 8.2.3) dice:

$$\begin{aligned} k.\dim(\mathscr{O}_{Y',\eta}) + \operatorname{trdeg}_{K(Y')} K(X) &= k.\dim(\mathscr{O}_{X,\xi}) + \operatorname{trdeg}_{\Bbbk(w)} \Bbbk(v) \\ &\leq 1 + \operatorname{trdeg}_{K(Y)} K(X). \end{aligned}$$

Donde $\operatorname{trdeg}_{K(Y')} K(X) = \operatorname{trdeg}_{K(Y)} K(X)$ puesto que son birracionales. Así, $\operatorname{codim}(\overline{\{\xi\}}, Y') = k.\dim(\mathscr{O}_{Y',\xi}) \leq 1$ (cfr. [**4,** pág. 75], ex. 2.5.2). $\square$

Definición 2.5: Sea G un grupo algebraico y X, Y esquemas sobre un cuerpo k con acciones racionales $\alpha\colon G \curvearrowright X, \beta\colon G \curvearrowright Y$. Una k-aplicación racional $f\colon X \to Y$ se dice ***G-equivariante*** si el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \times_k X \arrow[r, dashed, "\alpha"] \arrow[d, dashed, "\mathrm{Id}_G \times_k f"'] & X \arrow[d, dashed, "f"] \\ G \times_k Y \arrow[r, dashed, "\beta"] & Y \end{tikzcd}$$

conmuta.

[2]Equivalentemente, un cerrado irreducible de codimensión 1.

Proposición 2.6: Sea X_0 una variedad no completa sobre un cuerpo k con una acción regular $\alpha_0 \colon G \curvearrowright X_0$ de un grupo algebraico conexo. Entonces X_0 es G-equivariantemente birracional a una variedad completa normal X con una acción racional $\alpha \colon G \dashrightarrow X$ que se restringe a α_0, y que posee un divisor de Weil primo D tal que $\alpha|_D \colon G \dashrightarrow D$.

Demostración: Por el teorema de compactificación de Nagata (cfr. Conrad [**2**], thm. 4.1) existe un encaje abierto $j \colon X_0 \to X$ esquemáticamente dominante. Cambiando X quizá por su normalización, podemos suponer que X es normal. Aplicando explosiones sobre $X \setminus X_0$ podemos suponer que es un cerrado de codimensión pura 1. Sea $\alpha \colon G \dashrightarrow X$ la acción inducida por α_0 y sea E una componente irreducible de $X \setminus X_0$. Entonces α está definido en $G \times_k E$, puesto que nótese que es un divisor (de Weil) de $G \times_k X$ el cual es normal y completo, y así se sigue del criterio valuativo de ser propio (cfr. Görtz y Wedhorn [**3**, págs. 494-495], thm. 15.9).

No obstante, la restricción $G \times_k E \dashrightarrow X$ no es dominante; de lo contrario, $g \cdot x$ está bien definido y yace en X_0 para todo $(g, x) \in G \times_k E$ y, por tanto, $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = x \in X_0$ lo que es absurdo.

Por el lema anterior, existe una variedad completa y normal X' con un morfismo birracional $f' \colon X' \to X$ tal que la aplicación racional $G \times_k X \dashrightarrow X'$ manda $G \times_k E$ en un divisor de Weil. Más aún, podemos suponer que X' es normal. Así, tenemos una acción racional $\alpha' \colon G \dashrightarrow X'$ y un divisor primo E' (birracional a E) tal que α' manda $G \times_k E'$ en D'.

Verifiquemos que X', α' y D' satisfacen el enunciado. En efecto, $g \cdot x$ está definido un punto general $(g, x) \in G \times_k D'$ y escribiendo $x = h \cdot y$ para algún $(h, y) \in G \times_k E'$, por lo que $g \cdot x = gh \cdot y \in D'$ como se quería ver. Y es claro que $G \times_k D' \dashrightarrow D'$ induce una función $G \to \operatorname{Bir}(D'/k)$ como se quería ver. $\square$

Lema 2.7: Todo grupo algebraico no completo sobre un cuerpo k posee un subgrupo afín de dimensión no nula.

Demostración: Restringiéndonos a la componente conexa del neutro podemos suponer que G es conexo. Tomando la acción por traslación $G \curvearrowright G$, la proposición anterior nos dice que existe una variedad completa normal X con una acción racional $\alpha \colon G \dashrightarrow X$ y un divisor primo $D \in \operatorname{Div} X$ que es estable bajo α.

Vamos a probar que existe un abierto denso $V \subseteq G$ y un punto $x_0 \in D$ tal que $g \cdot x_0$ y $g^{-1} \cdot (g \cdot x_0)$ están bien definidos para todo $g \in V$. En efecto, sea U el abierto más grande de $G \times_k X$ sobre el cual α esté definido; luego U contiene un abierto denso de $G \times_k D$ (cfr., la demostración anterior). Como G actúa racionalmente sobre D, el morfismo $(G \times_k D) \cap U \to G \times_k D$, dado por $(g, x) \mapsto (g^{-1}, g \cdot x)$ es dominante, y luego el conjunto

$$\{(g, x) \in G \times_k D : (g, x), (g^{-1}, g \cdot x) \in U\} \subseteq G \times_k D$$

es abierto y denso, como se quería ver.

Dado $g_0 \in V$ cerrado, sea F la fibra sobre g_0 del morfismo $V \to D, g \mapsto g \cdot x_0$ («la órbita de la acción»). Ahora, recuérdese que X se construye birracional a G, de modo que $\dim V - \dim D = 1$ y aplicamos la siguiente fórmula (cfr. Liu [**4,** págs. 137-138], thm. 4.3.12):

$$\dim V_i = k.\dim(\mathscr{O}_{F,g_0}) \geq k.\dim(\mathscr{O}_{V,g_0}) - k.\dim(\mathscr{O}_{X,g_0 \cdot x_0}) \geq 1,$$

donde V_i es cualquier componente irreducible de la fibra F que pasa por g_0. Nótese que $g \cdot x_0$ está definido y vale $g_0 \cdot x_0$ para todo $g \in F$. Así pues, $g_0^{-1} \cdot (g \cdot x_0) = g_0^{-1} \cdot (g_0 \cdot x_0) = x_0$ está bien definido; es decir, $g_0^{-1}F$ fija a x_0. Análogamente $g^{-1} \cdot (g_0 \cdot x_0) = g^{-1} \cdot (g \cdot x_0) = x_0$, es decir, Fg_0^{-1} fija a x_0.

Finalmente, sea C una componente irreducible de F que contenga a g_0. Vemos que $g_0^{-1}C$ es un subvariedad localmente cerrada de G que contiene a e_G; luego el subgrupo H de G generado por $g_0^{-1}C$ es cerrado en G (proposición 1.4), tiene dimensión no nula y, como fija a x_0, tiene que ser afín por la proposición 2.2. □

Teorema 2.8 (Barsotti-Chevalley): Sea G un grupo algebraico conexo sobre un cuerpo k. Entonces G posee un subgrupo normal afín máximo G_{aff} y el grupo cociente G/G_{aff} es una variedad abeliana.

Demostración: La existencia de G_{aff} se sigue del lema 1.9, por lo que podemos suponer que G no posee subgrupos normales afines conexos no triviales y, por el teorema de Cartier, basta demostrar que G es una variedad completa (¡por hipótesis ya es variedad!).

Sea Z el centro de G. Si Z no es completo, entonces contiene un subgrupo afín normal de dimensión no nula, que podemos elegir conexo (considere la componente conexa del neutro), lo que contradice el párrafo anterior. Así que Z es completo y, por tanto, Z_{red}° es una variedad abeliana. Sea H el cuasicomplemento de Z_{red}°, luego $G = Z_{\text{red}}^{\circ}H$ y $Z_{\text{red}}^{\circ} \cap H$ es finito. Además, $H/Z_{\text{red}}^{\circ} \cap H \cong G/Z_{\text{red}}^{\circ}$ es afín, por lo que H es afín. Así que H es trivial y, por tanto, $G = Z_{\text{red}}^{\circ}$ es completo como se quería probar. □

Referencias

1. Brion, M., Samuel, P. y Uma, V. *Lectures on the structure of algebraic groups and geometric applications* (Hindustan Book Agency, 2013).
2. Conrad, B. Deligne's notes on Nagata compactifications. *J. Ramanujan Math. Soc.* **22,** 205-257. `http://math.stanford.edu/~conrad/papers/nagatafinal.pdf` (2007).

Stacks. De Jong, A. J. *et al. Stacks project* `https://stacks.math.columbia.edu/`.

3. Görtz, U. y Wedhorn, T. *Schemes. With Examples and Exercises* 2.ª ed. (Springer Spektrum Wiesbaden, 2010).
4. Liu, Q. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves* (Oxford University Press, 2002).

5. Milne, J. S. *Algebraic Groups. The Theory of Group Schemes of Finite Type over a Field* (Cambridge University Press, 2017).

Correo electrónico: josecuevasbtos@uc.cl

Departamento de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile. Facultad de Matemáticas, 4860 Av. Vicuña Mackenna, Macul, RM, Chile
URL: josecuevas.xyz