Cohomología en topología algebraica

O cómo aprendí a dejar de preocuparme y amar los métodos algebraicos

José Cuevas Barrientos

1. Cohomología y comparación

Definición 1.1: Sea X un espacio topológico, A un DIP y M un A-módulo. Sea $C_q(X)$ el A-módulo libre generado por los ***q-simplejos singulares***, vale decir, las funciones continuas $\Delta^q \to X$. Denotemos el grupo de ***q-cadenas singulares*** y ***q-cocadenas singulares*** de X a coeficientes en G como

$$C_q^{\text{sing}}(X;G) := C_q(X) \otimes_A M, \qquad C^q_{\text{sing}}(X;M) := \operatorname{Hom}_A(C_q(X);M).$$

Dada una q-cadena $a = \sum_{i=1}^m g_i f_i \in C_q^{\text{sing}}(X;M)$, donde $f_i\colon \Delta^q \to X$ son simplejos, y dada una q-cocadena $c \in C^q_{\text{sing}}(X;M)$ se define

$$\langle c, a\rangle = \left\langle c, \sum_{i=1}^n g_i f_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n g_i c(f_i).$$

Más generalmente, si M, N son un par de A-módulos con una aplicación bilineal $\langle -,-\rangle\colon M \times N \to S$ definimos la aplicación bilineal siguiente sobre cadenas y cocadenas:

$$\begin{aligned} \langle -,-\rangle\colon C^n_{\text{sing}}(X;M) \times C_n^{\text{sing}}(X;N) &\longrightarrow S \\ \left(c, \sum_{i=1}^n g_i f_i\right) &\longmapsto \sum_{i=1}^n \langle g_i, c(f_i)\rangle. \end{aligned}$$

Asociado a un q-simplejo Δ^q tenemos sus ***caras*** $\Gamma_j\colon \Delta^{q-1} \hookrightarrow \Delta^q$ con $0 \le j \le q$ dadas por

$$\Gamma_j(x_1, \dots, x_{q-1}) := (x_1, \dots, x_j - 1, \underset{(j)}{0}, x_j, \dots, x_q),$$

las cuales son claramente continuas. Luego, asociamos operadores de borde:

$$\begin{aligned} \partial_q\colon C_q^{\text{sing}}(X;M) &\longrightarrow C_{q-1}^{\text{sing}}(X;M) \\ \sum_{i=1}^n g_i f_i &\longmapsto \sum_{i=1}^n g_i \left(\sum_{j=0}^q (-1)^j \Gamma_j \circ f_j \right) \end{aligned}$$

Fecha: 7 de septiembre de 2023.

$$\begin{aligned}\delta^q\colon C^q_{\text{sing}}(X;M) &\longrightarrow C^{q+1}_{\text{sing}}(X;M)\\ c &\longmapsto \Big(f \mapsto \textstyle\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\Gamma_j \circ f_j\Big)\end{aligned}$$

Proposición 1.2: Sea X un espacio topológico y M un módulo sobre un DIP A. Entonces $\big(C^{\text{sing}}_\bullet(X;M), \partial_\bullet\big)$ es un complejo de cadenas llamado ***singular*** y $\big(C^\bullet_{\text{sing}}(X;M), \delta^\bullet\big)$ es un complejo de cocadenas, también llamado ***singular***.

Definición 1.3: Sea X un espacio topológico y M un módulo sobre un DIP A. Los grupos $H^{\text{sing}}_q(X;M) := H_q\big(C^{\text{sing}}_\bullet(X;M)\big)$ y $H^q_{\text{sing}}(X;M) := H^q\big(C^\bullet_{\text{sing}}(X;M)\big)$ se llaman ***grupo de homología*** y de ***cohomología singular*** resp.

Proposición 1.4: Sea M un módulo sobre un DIP A y $h\colon X \to Y$ una función continua. Entonces se induce un funtor contravariante

$$H^q_{\text{sing}}(h;M)\colon H^q_{\text{sing}}(Y;M) \to H^q_{\text{sing}}(X;M).$$

Demostración: Veamos primero que induce un funtor en el complejo de cocadenas singulares. En efecto, dada $c \in C^q_{\text{sing}}(Y;M)$ y dado $f\colon \Delta^q \to X$ definimos $C^q_{\text{sing}}(h)(c)(f) := c(f \circ h)$. Es claro que $C^q_{\text{sing}}(h;M)$ es un homomorfismo de complejos de cocadenas y, por tanto, desciende a grupos de cohomología. $\square$

Como ya hemos estudiado a la homología, enfatizaremos en las características de la cohomología singular.

Proposición 1.5: Sea X un espacio topológico, M un módulo sobre un DIP A y q entero. Se cumplen:

1. Si M es inyectivo (e.g., si $A = \mathbb{Z}$, podemos exigir divisible), entonces $H^q_{\text{sing}}(X;M) = \operatorname{Hom}_A\big(H^{\text{sing}}_q(X), M\big)$.
2. Si M es plano, entonces $H^q_{\text{sing}}(X;M) = H^q_{\text{sing}}(X) \otimes_A M$.

Demostración: Basta notar que dado un complejo de cadenas de grupos abelianos $C_\bullet$ uno puede ir construyendo $H_q(C_\bullet)$ mediante sucesiones exactas, que luego se preservan bajo $\operatorname{Hom}_A(-, M)$. Para la segunda basta notar que $C^\bullet_{\text{sing}}(X;M) \cong C^\bullet_{\text{sing}}(X) \otimes M$. $\square$

La proposición anterior no es cierta en general y el fallo de este isomorfismo se mide por el siguiente teorema:

Teorema 1.6 (de coeficientes universales): Sea X un espacio topológico y M un módulo sobre un DIP A. Entonces tenemos las siguientes sucesiones exactas canónicas que se escinden:

$$0 \leftarrow \operatorname{Hom}_A(H_q^{\mathrm{sing}}(X), M) \leftarrow H^q_{\mathrm{sing}}(X; M) \longleftarrow \operatorname{Ext}(H_{q-1}^{\mathrm{sing}}(X), M) \longleftarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H^q_{\mathrm{sing}}(X; A) \otimes_A M \longrightarrow H^q_{\mathrm{sing}}(X; M) \to \operatorname{Tor}(H^{q+1}_{\mathrm{sing}}(X; A), M) \longrightarrow 0$$

Demostración: La demostración es análoga a la de los grupos de homología singular. Está detallado en Fomenko y Fuchs [**1,** págs. 193-195]. □

Esto induce isomorfismos

$$\begin{aligned} H^q_{\mathrm{sing}}(X; M) &\cong \operatorname{Hom}(H_q^{\mathrm{sing}}(X), M) \oplus \operatorname{Ext}(H_{q-1}^{\mathrm{sing}}(X), M) \\ &\cong (H^q_{\mathrm{sing}}(X; A) \otimes M) \oplus \operatorname{Tor}(H^{q+1}_{\mathrm{sing}}(X; A), M), \end{aligned}$$

no obstante, estos no son canónicos, pues las secciones/retracciones de las sucesiones exactas del enunciado no son canónicos.

En general, nos gustaría trabajar con coeficientes en módulos M que no sean inyectivos, por lo que, una buena alternativa para asegurarse de que el $\operatorname{Ext}(H_\bullet^{\mathrm{sing}}(X), M) = 0$ es que los grupos de homología singular $H_\bullet^{\mathrm{sing}}(X)$ sean objetos proyectivos (e.g., libres). Así, tenemos nuestros primeros ejemplos:

Ejemplo: Sea $X = \mathbb{R}^q$ y M un A-módulo cualquiera. Entonces los grupos de cohomología singular a valores en M son:

$$H_q^{\mathrm{sing}}(\mathbb{R}^n; M) = \begin{cases} M, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

Ejemplo: Sea $X = \mathbb{S}^n$ y M un A-módulo cualquiera. Los grupos de cohomología son:

$$H^q_{\mathrm{sing}}(\mathbb{S}^n; M) = \begin{cases} M, & q \in \{0, n\}, \\ 0, & q \notin \{0, n\}. \end{cases}$$

Con un cálculo más también podemos sacar más ejemplos:

Lema 1.7: Sea $G = \mathbb{Z}^r \oplus G_{\mathrm{tors}}$ un grupo abeliano finitamente generado. Entonces $\operatorname{Ext}(G, \mathbb{Z}) \cong G_{\mathrm{tors}}$.

Demostración: En primer lugar empleamos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^r \longrightarrow G \longrightarrow G_{\mathrm{tors}} \longrightarrow 0$$

y le aplicamos $\operatorname{Hom}(-, \mathbb{Z})$, de modo que obtenemos la sucesión exacta:

$$0 = \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}^r, \mathbb{Z}) \longleftarrow \operatorname{Ext}(G, \mathbb{Z}) \xleftarrow{\sim} \operatorname{Ext}(G_{\mathrm{tors}}, \mathbb{Z}) \longleftarrow \operatorname{Ext}^2(\mathbb{Z}^r, \mathbb{Z}) = 0,$$

donde el primero es cero pues $\mathbb{Z}^r$ es libre, luego proyectivo y $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}^r, -) = 0$ (cfr. Hilton y Stammbach **[2],** cor. III.5.5) y el último es cero pues $\mathbb{Z}$ es un DIP. Empleamos la presentación inyectiva de $\mathbb{Z}$:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

y expandimos la sucesión exacta larga por $\operatorname{Hom}(G_{\text{tors}}, -)$ (cfr. **[2]** thm. III.5.2):

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(G_{\text{tors}}, \mathbb{Z}) \arrow[r] & \operatorname{Hom}(G_{\text{tors}}, \mathbb{Q}) = 0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(G_{\text{tors}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[dll, "\sim"] \\ & \operatorname{Ext}(G_{\text{tors}}, \mathbb{Z}) \arrow[r] & \operatorname{Ext}(G_{\text{tors}}, \mathbb{Q}) = 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

y finalmente es fácil ver que $\operatorname{Ext}(G_{\text{tors}}, \mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}(G_{\text{tors}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong G_{\text{tors}}$. $\square$

Corolario 1.7.1: Sea X un espacio topológico tal que sus grupos de homología $H_q^{\text{sing}}(X)$'s son finitamente generados. Entonces:

$$H^q_{\text{sing}}(X; \mathbb{Z}) \cong \underbrace{\frac{H_q^{\text{sing}}(X)}{H_q^{\text{sing}}(X)_{\text{tors}}}}_{\text{parte libre}} \oplus H_{q-1}^{\text{sing}}(X)_{\text{tors}}.$$

2. Un ejemplo geométrico

Como $\mathbb{RP}^n$ es un complejo CW es fácil calcular que sus complejo de cadenas singulares es

$$C_\bullet^{\text{sing}}(\mathbb{RP}^n): \qquad \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{\times 2} \cdots$$

(Comenzando en $q = 0$.) De modo que sus grupos de homología singular son:

$$H_q^{\text{sing}}(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \text{ y } q = n \text{ si es impar}, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & 0 < q < n,\ q \text{ par}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Y el corolario 1.7.1 nos da que los grupos de cohomología singular son:

$$H^q_{\text{sing}}(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \text{ y } q = n \text{ si es impar}, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & 0 < q < n,\ q \text{ par}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se puede obtener una mejor conclusión cambiando los coeficientes al cíclico $C_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Para ello tenemos que hacer un breve cálculo primero:

Ejemplo: ($\operatorname{Tor}(C_2, C_2) = C_2$) Considere la sucesión exacta de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow C_2 \longrightarrow 0.$$

Luego tensorizamos por C_2:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 = \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}, C_2) \arrow[r] & \operatorname{Tor}(C_2, C_2) \arrow[dll, rounded corners, "\omega"] & \\
\mathbb{Z} \otimes C_2 = C_2 \arrow[r, "0"] & C_2 \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & C_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ahora, nótese que ω es inyectivo y como $\operatorname{im}\omega = \ker(0) = C_2$ también es suprayectivo, por lo que es un isomorfismo.

Empleando esto con el teorema de coeficientes universales sobre los grupos de homologías obtenemos el muchísimo más lindo:

$$H_q^{\text{sing}}(\mathbb{RP}^n; C_2) = \begin{cases} C_2, & 0 \leq q \leq n, \\ 0, & q > n. \end{cases}$$

Empleando por última vez el teorema de coeficientes universales, ahora sobre cohomología, nos da

$$H^q_{\text{sing}}(\mathbb{RP}^n; C_2) = \begin{cases} C_2, & 0 \leq q \leq n, \\ 0, & q > n. \end{cases}$$

Proposición 2.1: Sea $f\colon \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^m$ una función continua tal que $\pi_1(f)\colon \pi_1(\mathbb{RP}^n) \to \pi_1(\mathbb{RP}^m)$ no es nulo. Entonces $n \leq m$.

Demostración: Como $\pi_1(\mathbb{RP}^1) = \mathbb{Z}$ y $\pi_1(\mathbb{RP}^m) = C_2$ con $m \geq 2$, la proposición es cierta en éste caso. Por el teorema de Hurewicz (cfr. May **[3,** pág. 118]) tenemos que $H_1^{\text{sing}}(f; \mathbb{Z})\colon H_1^{\text{sing}}(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}) \to H_1^{\text{sing}}(\mathbb{RP}^m; \mathbb{Z})$ es no nulo y, por el teorema de coeficientes universales, esto es válido cambiando los coeficientes y en cohomología.

Sea $x \in H^1_{\text{sing}}(\mathbb{RP}^m; C_2)$ el único elemento no nulo, de modo que $f^*(x) \in H^1(\mathbb{RP}^n; C_2)$ es no nulo. Luego, haciendo el producto de Kolmogorov-Alexander tenemos que

$$f^*(x)^n = f^*(x^n),$$

donde el elemento de la izquierda está en $H^n(\mathbb{RP}^n; C_2)$ y es no nulo, mientras que el de la derecha está en $H^n(\mathbb{RP}^m; C_2)$. Si $m < n$, entonces $H^n(\mathbb{RP}^m; C_2) = 0$ lo que es absurdo, luego necesariamente $m \geq n$. $\square$

Para el siguiente resultado necesitaremos el teorema siguiente:

Teorema 2.2 (fundamental de recubrimientos): Sea $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ un recubrimiento y sea $f\colon (Y, y) \to (X, x)$ una función continua. Entonces f admite una elevación $\tilde{f}\colon (Y, y) \to (\tilde{X}, \tilde{x})$ syss

$$f_*[\pi_1(Y, y)] \subseteq p_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})] \subseteq \pi_1(X, x).$$

En cuyo caso, es única.

Demostración: Cfr. May [**3,** pág. 28]. □

Teorema 2.3: Si $n > m \geq 1$, entonces no existen funciones continuas antipodales[1] $g\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$.

Demostración: Supongamos que g existe. Construyamos el siguiente diagrama conmutativo, donde las flechas verticales son recubrimientos:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^n \arrow[r, "g"] \arrow[d, two heads, "p_n"'] & \mathbb{S}^m \arrow[d, two heads, "p_m"] \\
\mathbb{RP}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{RP}^m
\end{tikzcd}$$

Luego $\pi_1(f) = 0\colon \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^m$ por la proposición anterior. Como $\mathbb{S}^m$ es un recubrimiento, existe $\tilde{f}\colon \mathbb{RP}^n \to \mathbb{S}^m$ tal que $f = \tilde{f} \circ p_m$ (por el teorema). Sea $s \in \mathbb{S}^n$, entonces $\tilde{f}(p_n(s)) = \tilde{f}(p_n(-s))$ debe ser $g(s)$ o $g(-s)$. Luego, para algún $t \in \{\pm s\}$ tenemos que $\tilde{f}(p_n(t)) = g(t)$, de modo que $g = p_n \circ \tilde{f}$ pues las elevaciones son únicas si coinciden en un punto, lo cual es absurdo pues $p_n \circ \tilde{f}$ manda antipodales en un solo punto, mientras que g preserva los antipodales. □

Teorema 2.4 (Borsuk-Ulam): Para toda función continua $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ existe un $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(-x) = f(x)$.

Demostración: Si $f(x) \neq f(-x)$ para todo punto, entonces podemos construir $g\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ donde $g(x)$ es el punto que corta a $\mathbb{S}^{n-1}$ en el segmento desde $\vec{0}$ hasta $f(x) - f(-x)$. Esta función es claramente continua y antipodal, lo cual es absurdo por el teorema anterior. □

Referencias

1. Fomenko, A. T. y Fuchs, D. B. *Homotopical Topology* (Springer International Publishing, 2016).
2. Hilton, P. J. y Stammbach, U. *A Course in Homological Algebra Graduate Texts in Mathematics* **4** (Springer-Verlag New York, 1971).
3. May, J. P. *A Concise Course in Algebraic Topology* (2022).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`

Departamento de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile. Facultad de Matemáticas, 4860 Av. Vicuña Mackenna, Macul, RM, Chile

URL: `josecuevas.xyz`

[1]Es decir, tales que para todo $x \in \mathbb{S}^n$ se cumpla que $g(-x) = -g(x)$.