

Análisis complejo

José Cuevas Barrientos

19 de octubre de 2022

Índice general

PREÁMBULO	v
I Análisis complejo	1
1 FUNCIONES HOLOMORFAS	3
1.1 Derivadas complejas	3
1.1.1 Funciones elementales de variable compleja	7
1.1.2 Funciones holomorfas y ángulos	10
1.1.3 Transformaciones de Möbius	11
1.2 Series de potencias y funciones analíticas	14
1.3 Integración compleja	22
1.3.1 El teorema de Cauchy	26
1.3.2 Fórmula integral de Cauchy	35
2 MÁS APLICACIONES DEL TEOREMA DE CAUCHY	43
2.1 Números de giro y ceros	43
2.1.1 Nociones de la topología algebraica	43
2.1.2 Ceros de funciones analíticas	46
2.1.3 Puntos críticos	50
2.2 Residuos y polos	51
2.2.1 Aplicaciones	52
Apéndice	55
ÍNDICE DE NOTACIÓN	57
BIBLIOGRAFÍA	59
Análisis complejo	59
Libros de autoría propia	59
ÍNDICE ALFABÉTICO	61

Preámbulo

Pre requisitos. Éste libro presupone un conocimiento básico sobre topología elemental (abiertos y cerrados en \mathbb{R}^n , conexión y arcoconexión, y compacidad, especialmente el teorema de Heine-Borel), un conocimiento básico sobre análisis matemático (derivadas en una y varias variables, teoría de medida e integración de Lebesgue) y naturalmente un conocimiento elemental sobre los números complejos (teorema de De Moivre). Todos los resultados preliminares de topología y análisis serán citados debidamente de mis propios apuntes [6], así como cualquier resultado general del álgebra [5]. Lecturas alternativas serían probablemente la totalidad del apunte *Análisis matemático* de Carlos Ivorra Castillo, los primeros catorce capítulos de la serie de *Analysis* de Terrence Tao, los primeros seis capítulos de *Modern Real Analysis* de William Ziemer o bien los primeros cuatro capítulos de *Real Analysis* de Barry Simon.

Parte I.

ANÁLISIS COMPLEJO

1

Funciones holomorfas y diferenciación compleja

En éste capítulo, así como en muchos otros, adquiriremos el convenio de que z representa una *variable compleja* cuya parte real es x y cuya parte imaginaria es y . Así una función $f: A \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, no es más que una función de dominio \mathbb{R}^{2n} y codominio \mathbb{R}^{2m} . También podemos permitirnos denotar la derivada en ζ de la parte real de la i -ésima coordenada como

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\zeta}$$

Una acotación vital es que aquí denotamos la unidad imaginaria como «i» en letras derechas o romanas, mientras que un subíndice se denota por «i» en cursivas.

1.1 Derivadas complejas

Definición 1.1: Sea $f: A \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ con A abierto, entonces se dice que es (C-)diferenciable en $\zeta \in A$ en la variable z_i si

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z_i} \right|_{\zeta} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\zeta + h e_i) - f(\zeta)}{h}$$

donde $e_i \in \mathbb{C}^n$ y $h \in \mathbb{C}$, es decir, el límite denotado ahí es un límite complejo derivado de la topología estándar sobre \mathbb{C} (que es coordinada a coordinada).

Si $n = 1$ (caso de una variable), entonces nos permitimos denotar

$$f'(\zeta) = \left. \frac{df}{dz} \right|_{\zeta}.$$

Sea $f: A \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ \mathbb{R} -diferenciable con A abierto. Entonces decimos que f es \mathbb{C} -diferenciable, si su diferencial (la transformación lineal) es \mathbb{C} -lineal. Es decir que si $B := Jf(\zeta) \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{C})$ se cumple que $B \cdot (\alpha \mathbf{u}) = \alpha(B \cdot \mathbf{u})$ para todo $\mathbf{u} \in \text{Mat}_{1 \times n}(\mathbb{C})$ y todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

En general, en éste capítulo todas las nociones serán respecto a \mathbb{C} a menos de especificarse lo contrario.

Ahora procedemos a enunciar varios resultados para funciones \mathbb{C} -diferenciables de una variable que son generalizables:

Proposición 1.2: Se cumple:

1. Las funciones constantes son diferenciables y tienen derivada nula en todo el dominio.
2. La función identidad es diferenciable y tiene derivada 1 en todo el dominio.
3. Más generalmente, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$.

Si f, g son diferenciables en ζ , entonces:

4. $f + g$ es diferenciable en ζ y $(f + g)'(\zeta) = f'(\zeta) + g'(\zeta)$.
5. $f \cdot g$ es diferenciable en ζ y $(f \cdot g)'(\zeta) = f'(\zeta)g(\zeta) + f(\zeta)g'(\zeta)$.
6. Si $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces αf es diferenciable en ζ y $(\alpha f)'(\zeta) = \alpha f'(\zeta)$.
7. Si $g(\zeta) \neq 0$, entonces f/g es diferenciable en ζ y

$$(f/g)'(\zeta) = \frac{f'(\zeta)g(\zeta) + f(\zeta)g'(\zeta)}{g(\zeta)^2}.$$

Teorema 1.3 – Ecuaciones de Cauchy-Riemann: $f: A \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ es \mathbb{C} -diferenciable en $\zeta \in A$ si se cumplen las siguientes condiciones:

1. f es \mathbb{R} -diferenciable en ζ .
2. Para todo i se cumple:

$$\left. \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x_i} \right|_{\zeta} = \left. \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y_i} \right|_{\zeta}, \quad \left. \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x_i} \right|_{\zeta} = - \left. \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y_i} \right|_{\zeta}. \quad (1.1)$$

Nótese que si f es \mathbb{C} -diferenciable se cumple que

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z_i} \right|_{\zeta} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{Re} f + i \cdot \operatorname{Im} f)(\zeta).$$

Definición 1.4: Se dice que una función $f: A \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, con A abierto, es *holomorfa* si es \mathbb{C} -diferenciable en todo punto y si sus derivadas parciales son todas continuas. Denotaremos $\mathcal{H}(A; \mathbb{C}^m)$ al conjunto de las holomorfas de dominio A y codominio \mathbb{C}^m , y admitimos que $\mathcal{H}(A) := \mathcal{H}(A; \mathbb{C})$.

Se dice que una función $f: A \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{C}^m$, con A, B abiertos, es *biholomorfa* si es una biyección holomorfa cuya inversa es también holomorfa (i.e., si es un isomorfismo en la categoría). Si existe f biholomorfa entre A, B se dice que A, B son *biholomorfos* entre sí.

Como \mathbb{C} es isomorfo (como \mathbb{R} -espacio vectorial) a \mathbb{R}^2 varias propiedades de análisis multivariable siguen:

Teorema 1.5 (regla de la cadena): Sean $f: A \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ y $g: B \supseteq f[A] \rightarrow \mathbb{C}^k$ funciones donde A, B son abiertos, y $\zeta \in A$ es tal que f, g son diferenciables en ζ y $\eta := f(\zeta)$ respectivamente, entonces $f \circ g$ es diferenciable en ζ y

$$J(f \circ g)(\zeta) = Jf(\zeta) \cdot Jg(\eta).$$

Y los otros dos teoremas aplican el determinante jacobiano, para los cuales es útil el siguiente resultado:

Teorema 1.6: Sea $f: A \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ y sea $\zeta \in A$ tal que f es diferenciable en ζ , entonces admitiendo que $J_{\mathbb{R}} f$ representa el jacobiano según

derivadas reales y $J_{\mathbb{C}}f$ el jacobiano según derivadas complejas, se cumple la siguiente relación:

$$\det J_{\mathbb{R}}f(\zeta) = |\det J_{\mathbb{C}}f(\zeta)|^2.$$

DEMOSTRACIÓN: Nótese que $B := J_{\mathbb{R}}f(\zeta) \in \text{Mat}_{2n}(\mathbb{R}) \subseteq \text{Mat}_{2n}(\mathbb{C})$ y comparten determinante, además B está formado por n matrices cuadradas de 2×2 que son de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \partial_{x_i} \text{Re } f^j & \partial_{x_i} \text{Im } f^j \\ \partial_{y_i} \text{Re } f^j & \partial_{y_i} \text{Im } f^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{x_i} \text{Re } f^j & \partial_{x_i} \text{Im } f^j \\ -\partial_{x_i} \text{Im } f^j & \partial_{x_i} \text{Re } f^j \end{bmatrix}$$

podemos modificar cada submatriz localmente de manera global, así que siguiendo las operaciones del determinante le sumamos a la columna 1, la columna 2 por i y luego a la fila 2 sumarle la fila 1 por $-i$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \partial_{x_i} \text{Re } f^j & \partial_{x_i} \text{Im } f^j \\ -\partial_{x_i} \text{Im } f^j & \partial_{x_i} \text{Re } f^j \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \partial_{x_i} \text{Re } f^j + i\partial_{x_i} \text{Im } f^j & \partial_{x_i} \text{Im } f^j \\ -\partial_{x_i} \text{Im } f^j + i\partial_{x_i} \text{Re } f^j & \partial_{x_i} \text{Re } f^j \end{bmatrix} \\ &\mapsto \begin{bmatrix} \partial_{x_i} \text{Re } f^j + i\partial_{x_i} \text{Im } f^j & \partial_{x_i} \text{Im } f^j \\ 0 & \partial_{x_i} \text{Re } f^j - i\partial_{x_i} \text{Im } f^j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \partial_{z_i} f^j & \partial_{x_i} \text{Im } f^j \\ 0 & \overline{\partial_{z_i} f^j} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora volvemos a la matriz global, y permutamos las filas para agrupar todos los términos $\partial_{z_i} f^j$ arriba y agrupar los términos nulos en la parte de abajo, así mismo, agrupamos todas las columnas para tener los términos $\overline{\partial_{z_i} f^j}$ a la derecha, es decir, nos queda una matriz de la forma (éstas operaciones no afectan el determinante pues se permutan tantas filas como columnas)

$$\begin{bmatrix} J_{\mathbb{C}}f & * \\ \mathbf{0} & \overline{J_{\mathbb{C}}f} \end{bmatrix}$$

lo que posee el determinante buscado. \square

Así se tienen:

Teorema 1.7: Sea $f \in \mathcal{H}(A \subseteq \mathbb{C}^n; \mathbb{C}^n)$, se cumplen:

1. Si $\det(Jf(\zeta)) \neq 0$ existe un entorno $U \subseteq A$ de ζ tal que $f|_U$ es biholomorfa (teorema de la inyectividad local).
2. Si $\det(Jf(\zeta)) \neq 0$ para todo $\zeta \in A$, si f es inyectiva y $B = f[A]$ es abierto, entonces f es biholomorfa (teorema de la función inversa).

§1.1.1 Funciones elementales de variable compleja. Ya vimos que en \mathbb{R} habían varias funciones elementales, veamos algunas que existen en \mathbb{C} . En primer lugar habíamos definido

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

que es igualmente válido para \mathbb{C} pues la serie es absolutamente convergente. La propiedad del producto de exponenciales también se conserva pues derivaba del producto de Cauchy. La observación no trivial es la siguiente:

Teorema 1.8 – Fórmula de Euler. Si $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x = \operatorname{cis} x.$$

DEMOSTRACIÓN: Ésto es una simple expansión pues

$$\begin{aligned} \exp(ix) &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) \\ &= \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

Donde podemos separar la serie puesto que es absolutamente convergente. \square

Nótese que de la fórmula de Euler el teorema de De Moivre es un corolario. Ésto permite notar que

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Con lo cuál se puede comprobar que \exp es holomorfa y que

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z.$$

Usando la fórmula de Euler se puede notar que

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

así que podemos considerar éstas como las definiciones de las funciones trigonométricas complejas y cómo corresponden a la suma y producto de holomorfas son también holomorfas, y una comprobación usual permite deducir que

$$\frac{d \sin z}{dz} = \cos z, \quad \frac{d \cos z}{dz} = -\sin z.$$

Teorema 1.9: Para todo $z, w \in \mathbb{C}$ se cumple:

1. Las funciones \sin, \cos (complejas) extienden a las funciones usuales \sin, \cos (reales).
2. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.
3. $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$.
4. $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$.
5. Para todo $k \in \mathbb{Z}$ se cumple que $\sin(z + 2\pi k) = \sin z$ y $\cos(z + 2\pi k) = \cos z$.
6. $\sin(-z) = -\sin z$ y $\cos(-z) = \cos z$.
7. Los ceros de la función seno y coseno complejas son los mismos de la funciones reales, vale decir,

$$\sin z = 0 \iff z = \pi k, \quad \cos z = 0 \iff \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

DEMOSTRACIÓN: La única complicada es la última, y vemos que dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$\sin z = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \implies e^y(\cos x + i \sin x) = e^{-y}(\cos x - i \sin x),$$

por la parte real se tiene que $e^y \cos x = e^{-y} \cos x$, luego o bien $\cos x = 0$ o bien $e^y = e^{-y}$. Si $\cos x = 0$, entonces $\sin x = \pm 1$ lo cual no puede darse. Así que $e^y = e^{-y}$, ergo $e^{2y} = 1$ con lo que $y = 0$ y luego claramente las soluciones deben ser exclusivamente las reales. Con el coseno sucede de manera análoga. \square

Definición 1.10: Sea z un número complejo no nulo. Se dice que L es un *logaritmo* de z si es una solución de la ecuación $e^L = z$. Se dice que α es un *argumento* de z si es una solución de la ecuación $e^{i\alpha} = z/|z|$.

En el caso de \mathbb{R} , ésto no era problema ya que para un número positivo sólo le corresponde un único real como logaritmo. Para los números complejos es fácil notar que si L es un logaritmo de z , entonces $L + i2\pi k$ también lo es, de hecho:

Proposición 1.11: Sea $z \in \mathbb{C}_{\neq 0}$ y sea L un logaritmo de z y α un argumento de z . Entonces todos los logaritmos de z son de la forma $L + i2\pi k$ y todos los argumentos de z son de la forma $\alpha + 2\pi k$. Más aún, $\ln |z| + i\alpha$ es un logaritmo de z , donde \ln es la función logarítmica real.

Ya hemos visto que en \mathbb{R} si uno toma la recta horizontal completa (a \mathbb{R} completo) y le aplica la función exponencial, obtiene la semirrecta (abierta) desde el origen en dirección a $+\infty$. Algo parecido sucede con la exponencial compleja, pero con una diferencia sustancial, aquí cogemos una recta horizontal con parte imaginaria constante α y obtenemos la semirrecta abierta desde 0 con argumento α (ver fig. 1.1).

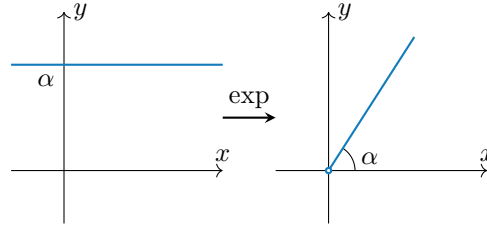


Figura 1.1

Argumentando de manera similar podemos definir el conjunto

$$H_\alpha := \mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} : r \in [0, \infty)\},$$

(el plano complejo sin la semirrecta cerrada de argumento α) y notar que:

Teorema 1.12: La aplicación:

$$\{x + iy \in \mathbb{C} : y \in (\alpha, \alpha + 2\pi)\} \xrightarrow{\exp} H_\alpha$$

es una biyección. En consecuencia, es un biholomorfismo.

Luego, podemos definir las siguientes funciones:

Definición 1.13: Se le llama la *rama uniforme* del logaritmo sobre α , denotada \log_α , a la inversa de la función exponencial restringida a H_α . Es decir,

$$\log_\alpha : H_\alpha \longrightarrow \{x + iy \in \mathbb{C} : y \in (\alpha, \alpha + 2\pi)\}.$$

Nótese que $\operatorname{Re} \log_\alpha(z) = \ln |z|$, así que se define la rama uniforme del argumento sobre α , denotada \arg_α , a su parte imaginaria, es decir, $\arg_\alpha := \operatorname{Im} \log_\alpha$.

Proposición 1.14: \log_α, \arg_α son funciones continuas.

Más aún, por el teorema de la función inversa (en versión compleja) se deduce:

Teorema 1.15: \log_α es holomorfa y $\log'_\alpha(z) = 1/z$.

Ésto es extraño, nos falta una recta para poder tener una definición del logaritmo sobre todo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, pero la verdad es que no puede mejorarse la definición (cf. ejemplo 1).

§1.1.2 Funciones holomorfas y ángulos. Consideremos un arco complejo, vale decir, una función continua $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ que podemos escribir en forma cartesiana como

$$\gamma(t) = u(t) + iv(t),$$

donde u, v son funciones continuas reales. Si además exigimos que γ sea diferenciable (por lo que, los u, v también han de serlo), entonces

$$\gamma'(t) = u'(t) + iv'(t).$$

La derivada de un arco se interpreta, en la física, con la velocidad de una partícula; a nosotros nos interesa su dirección, pero puede darse que la partícula «frene durante ciertos instantes», lo que podemos evitar exigiendo lo siguiente:

Definición 1.16: Se dice que un arco diferenciable $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una *curva regular* si $\gamma'(t)$ es siempre no nulo.

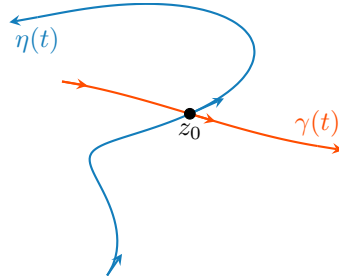


Figura 1.2

Ahora bien, sean γ, η dos curvas regulares tales que $\gamma(t_0) = \eta(t_1)$, luego, podemos definir el ángulo entre sus derivadas empleando el producto interno de \mathbb{R}^2 , es decir,

$$\frac{\operatorname{Re}(\gamma'(t_0) \cdot \overline{\eta'(t_1)})}{|\gamma'(t_0)| |\eta'(t_1)|} = \cos \theta,$$

y luego aplicar \arccos a ambos lados para obtener el ángulo (medido entre $[0, \pi]$).

Así pues, nos podemos preguntar si una función holomorfa preserva ángulos entre curvas regulares. Para ello,

volviendo a considerarlo como función sobre \mathbb{R}^2 , podemos emplear la regla de la cadena real y obtener que:

$$\left. \frac{d}{dt}(\gamma \circ f)(t) \right|_{t=t_0} = f'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0).$$

De ésto se sigue:

Teorema 1.17: Sean γ, η curvas regulares que pasan por $z_0 \in \mathbb{C}$ y sea f una función holomorfa sobre un entorno de z_0 tal que $f'(z_0) \neq 0$, entonces el ángulo de $\gamma \circ f$ y $\eta \circ f$ en $f(z_0)$ es el mismo que de γ y η en z_0 .

Definición 1.18: Una función $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ se dice *conforme* en z_0 si es holomorfa en dicho punto y $f'(z_0) \neq 0$. f se dice *conforme* (a secas) si lo es todos los puntos de su dominio.

El teorema anterior nos dice que una función conforme preserva ángulos en todo su dominio. En particular, toda rama uniforme del logaritmo y la función exponencial son ejemplos de funciones conformes.

§1.1.3 Transformaciones de Möbius. Consideremos a \mathbb{C} como espacio topológico: Entonces \mathbb{C} es \mathbb{R}^2 y, por ende, no es compacto, pero su compactificación de Alexandroff (cf. [6, Teo. 3.82]) es homeomorfa a la superficie de la esfera \mathbb{S}^2 mediante la proyección estereográfica. Así pues, definimos la *esfera de Riemann*, denotada por $\mathbb{C}^\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, como la compactificación de Alexandroff de \mathbb{C} ; donde se consideran los siguientes convenios aritméticos para « ∞ »:

$$\frac{a}{\infty} = 0, \quad \frac{b}{0} = \infty, \quad a + \infty = \infty, \quad b \cdot \infty = \infty;$$

donde $a \neq \infty$ y $b \neq 0$.

La topología sobre \mathbb{C}^∞ es bastante común: todo abierto acotado en \mathbb{C} lo es también en \mathbb{C}^∞ y todo entorno de ∞ es tal que su complemento es un espacio compacto en \mathbb{C} .

Definición 1.19: Se le llaman *transformaciones de Möbius* a las funciones de la forma

$$M(z) := \frac{az + b}{cz + d},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ son tales que $ac - bd \neq 0$. Además, convenimos de que

$$M(\infty) = \frac{a}{c}, \quad M\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty.$$

De modo que $M: \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$.

Nótese que c y d no pueden ser simultáneamente cero, así pues, una transformación de Möbius está indefinida en a lo más un solo punto, y es holomorfa en el resto (por ser cociente de holomorfas). Si $ac - bd = 0$, entonces la transformación de Möbius sería constante.

Las transformaciones de Möbius son interesantes por varias razones, la primerísima de ellas:

Proposición 1.20: Sea $M: \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ una transformación de Möbius. Entonces es una aplicación continua biyectiva, y en particular ésta es su inversa:

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad M^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a};$$

de modo que, de hecho, las transformaciones de Möbius son homeomorfismos sobre \mathbb{C}^∞ y constituyen un grupo con la composición.

Teorema 1.21: La imagen de una recta o una circunferencia a través de una transformación de Möbius es una recta o una circunferencia.

DEMOSTRACIÓN: Sea (a, b) un punto, entonces una circunferencia de radio $r > 0$ es el conjunto de todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen la ecuación

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0,$$

multiplicando todo por un número real A no nulo:

$$A(x^2 + y^2) - 2Aax - 2Aby + A(a^2 + b^2 - r^2) = 0,$$

de modo que las circunferencias son los conjuntos de puntos que satisfacen una ecuación del estilo:

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0,$$

tales que $A \neq 0$ y $(A^2 r^2 =) B^2 + C^2 - AD > 0$. Si $A = 0$, entonces es claro que $2Bx + 2Cy + D = 0$ representa la ecuación de una recta exceptuando por el caso degenerado de que $B = C = 0$; no obstante, los casos no degenerados

siguen satisfaciendo la desigualdad $B^2 + C^2 - AD > 0$, por lo que ésta engloba todos los conjuntos de nuestro interés.

Cambiando al par (x, y) por un único número complejo z , vemos que debe satisfacer que

$$Az\bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0, \quad (1.2)$$

(donde $E := B + iC$) tal que $E\bar{E} - AD > 0$.

Ahora veamos el caso de la transformación de Möbius $1/z$: consideremos una recta o una circunferencia fija, dada por una ecuación de la forma (1.2), y nótese que su imagen es el conjunto de puntos que satisface la ecuación:

$$A\frac{1}{z\bar{z}} + \bar{E}\frac{1}{z} + E\frac{1}{\bar{z}} + D = 0,$$

multiplicando ambos lados por $z \cdot \bar{z}$ se obtiene que corresponden a los puntos que satisfacen la ecuación

$$Dz\bar{z} + Ez + \bar{E}\bar{z} + A = 0$$

y ésta ecuación es tal que sus coeficientes satisfacen la desigualdad $E\bar{E} - AD > 0$, por lo que corresponde a una recta o una circunferencia.

El caso $M(z) = az + b$ también es bastante claro: ya que $z \mapsto |a|z$ es una homotecia, $z \mapsto e^{i\arg a}z$ es una rotación y $z \mapsto z + b$ es una traslación; y todas las operaciones preservan rectas y circunferencias. Análogamente se deduce para el caso $M(z) = \frac{az+b}{d}$.

Finalmente, el caso general ($c \neq 0$) se deduce pues

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)},$$

por lo que M es la composición de transformaciones que o bien preservan o bien intercambian rectas y circunferencias, como se quería probar. \square

Teorema 1.22: Toda transformación de Möbius tiene un punto fijo y la identidad es la única que fija a tres puntos.

DEMOSTRACIÓN: Sea

$$M(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

una transformación de Möbius. Si $c = 0$, entonces $M(\infty) = \infty$ es un punto fijo, y se tiene a lo sumo otro punto fijo dado por $z = \frac{b}{d-a}$ (ésto se sigue de un simple despeje algebraico, decimos a lo sumo puesto que si $d = a$ entonces

corresponde al mismo punto). Si $c \neq 0$, entonces $M(\infty) \neq \infty$ y, por tanto, los puntos fijos corresponden a las soluciones del polinomio

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0,$$

el cual tiene a lo más dos soluciones y siempre tiene una solución pues \mathbb{C} es algebraicamente cerrado (?!). \square

En la última línea invocamos el teorema fundamental del álgebra: en éste libro daremos una demostración de éste teorema (teo. 1.77), pero nos permitimos aplicarlo dado que ya hay otras varias en mi libro de topología y en mi libro de álgebra resp.

Citar adecuadamente la ubicación del TFA en mis textos.

Teorema 1.23: Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^\infty$ una terna de puntos distintos y $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^\infty$ otra terna de puntos distintos. Entonces existe una única transformación de Möbius $M(z)$ tal que $M(z_i) = w_i$.

DEMOSTRACIÓN: La unicidad se sigue del teorema anterior: Si M, N fuesen tales transformaciones de Möbius, entonces MN^{-1} sería una transformación de Möbius que fija a z_1, z_2, z_3 , por lo cual ha de ser la identidad y $M = N$.

Para la existencia, empleando el mismo truco anterior, basta probarlo para la terna $(w_1, w_2, w_3) = (0, \infty, 1)$. Si $M(z_1) = 0$, entonces $az_1 + b = 0$, es decir, $az + b = a(z - z_1)$. Por otro lado, si $M(z_2) = \infty$, entonces $cz_2 + d = 0$ y $cz + d = c(z - z_2)$, por lo que

$$M(z) = \frac{a}{b} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Finalmente como basta ajustar a/b para que $M(z_3) = 1$. \square

1.2 Series de potencias y funciones analíticas

Comenzaremos por un tratamiento a las series formales de potencias. Para nuestros propósitos, toda la teoría será desarrollada en \mathbb{C} , pero en álgebra abstracta se puede trabajar con cuerpos (¡e incluso anillos!) arbitrarios.

Definición 1.24: Se denota por $\mathbb{C}[[t]]$ al anillo de elementos dados por sumas formales:

$$f := \sum_{n \geq 0} a_n t^n \in \mathbb{C}[[t]],$$

donde la suma y el producto vienen dados por:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_n t^n + \sum_{n \geq 0} b_n t^n &= \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) t^n \\ \left(\sum_{n \geq 0} a_n t^n \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} b_n t^n \right) &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j+k=n} a_j b_k \right) t^n. \end{aligned}$$

Sea $f = \sum_{n \geq 0} a_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]$ no nulo, entonces se define su orden como

$$\text{ord } f := \min\{m : a_m \neq 0\}.$$

El lector atento reconocerá la fórmula del producto como el *producto de Cauchy* (cf. [6, Def. 1.66]). La ventaja de trabajar con series formales es que no nos preocupamos (todavía) de la convergencia de éstos. Nótese que $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}[t] \subseteq \mathbb{C}[[t]]$.

Proposición 1.25: Sean $f, g \in \mathbb{C}[[t]]$ no nulos. Entonces $\text{ord}(f \cdot g) = \text{ord } f + \text{ord } g$. En consecuencia, los elementos inversibles de $\mathbb{C}[[t]]$ tienen orden cero.

Ejemplo. En $\mathbb{C}[t]$ sucedía que $\mathbb{C}[t]^\times = \mathbb{C}^\times$ (los elementos inversibles del anillo eran constantes no nulas), nótese que aquí la historia es distinta: En efecto, es fácil comprobar (¡por definición!) que

$$(1 - t)(1 + t + t^2 + t^3 + \cdots) = 1.$$

Ésto es de hecho un caso particular de:

Proposición 1.26: Los elementos inversibles de $\mathbb{C}[[t]]$ son exactamente las series formales de orden cero.

DEMOSTRACIÓN: Sea $f = \sum_{n \geq 0} a_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]$ de orden cero, es decir, con $a_0 \neq 0$. Luego $a_0^{-1}f$ tiene término constante 1, así que nos reduciremos a ese caso.

Sea $f = 1 - h \in \mathbb{C}[[t]]$ con h o bien nulo, o bien $\text{ord } h > 0$. Supongamos que h no es nulo, entonces la inversa de f es $g := 1 + h + h^2 + h^3 + \cdots$ (?!). \square

Como ejercicio justifique por qué dicho g existe (si bien las series formales de potencias son «sumas infinitas», ésto no justifica que en un anillo podamos

«sumar infinitos términos arbitrarios»; en $\mathbb{C}[[t]]$ la suma $1 + 1 + 1 + \dots$ sigue indefinida).

Un resultado de convergencia de series:

Teorema 1.27: Sea $f = \sum_{n \geq 0} |a_n| t^n \in \mathbb{C}[[t]]$, entonces f converge absolutamente para todo $|z| < r$ donde:

1. $\frac{1}{r} = \limsup_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ (criterio de la razón de d’Alambert, [6, Teo. 1.57]).
2. $\frac{1}{r} = \limsup_n |a_n|^{1/n}$ (criterio de la raíz de Cauchy, [6, Teo. 1.59]).

(Con el criterio usual de que $1/r = 0$ si $r = \infty$ y $1/r = \infty$ si $r = 0$.)

Tradicionalmente sólo se enuncia el criterio de Cauchy, pero el criterio de d’Alambert es útil en ciertos casos (como con la serie de exp).

Definición 1.28: Sea $f = \sum_{n \geq 0} |a_n| t^n \in \mathbb{C}[[t]]$, se define su radio de convergencia $r \geq 0$ como el real tal que

$$\frac{1}{r} = \limsup_n |a_n|^{1/n}.$$

Dada una serie formal de potencias f , se dice que un punto $z \in \mathbb{C}$ es una *singularidad* si $f(z)$ diverge.

También será útil la siguiente notación para $\phi = \sum_{n \geq 0} c_n t^n \in \mathbb{R}[[t]]$ con $0 \leq c_n$:

$$f \prec \phi \iff \forall n \in \mathbb{N} \ |a_n| \leq c_n.$$

En particular, si $f \prec \phi$ se cumple que el radio de convergencia de f es mayor o igual al de ϕ . La razón detrás de la definición de radio de convergencia es que fuera de él una serie formal de potencias tendrá singularidades (cf. teorema 1.72).

Proposición 1.29: Sean $f, g \in \mathbb{C}[[t]]$ y $\phi, \psi \in \mathbb{R}[[t]]$ tales que $f \prec \phi$ y $g \prec \psi$. Entonces:

$$f + g \prec \phi + \psi, \quad f \cdot g \prec \phi \cdot \psi.$$

Lema 1.30: Sea $\sum_{n \geq 0} a_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]$ con radio de convergencia $r > 0$. Entonces existe $C \geq 0$ tal que si $A > 1/r$ se cumple que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ |a_n| \leq C \cdot A^n.$$

PISTA: Ver demostración del criterio de la raíz de Cauchy. \square

Será útil saber que la suma de series convergentes es una serie convergente y que el producto también lo es (por [6, Teo. 1.67]), falta ver que el cociente lo es, y para ello está el siguiente resultado:

Teorema 1.31: Sea $f \in \mathbb{C}[[t]]$ inversible con radio de convergencia no nulo y sea $g \in \mathbb{C}[[t]]$ tal que $f \cdot g = 1$. Entonces el radio de convergencia de g es no nulo.

DEMOSTRACIÓN: Sin pérdida de generalidad sea $f = 1 - h$ con $\text{ord } h > 0$. Por el lema sabemos que existe algún $A \geq 0$ tal que $|a_n| \leq A^n$ (podemos elegir un A más grande para compensar a $C \geq 0$). Luego su inversa es:

$$g = \frac{1}{f} = \frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + \dots$$

Notemos que se cumple que

$$h \prec \sum_{n \geq 0} A^n t^n = \frac{At}{1-At}.$$

Por lo que

$$g \prec 1 + \frac{At}{1-At} + \left(\frac{At}{1-At}\right)^2 + \dots = \left(1 - \frac{At}{1-At}\right)^{-1}.$$

Y finalmente

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{At}{1-At}\right)^{-1} &= (1-At)(1+2At+(2At)^2+\dots) \\ &\prec (1+At)(1+2At+(2At)^2+\dots), \end{aligned}$$

el cual tiene radio de convergencia no nulo, que induce lo que queríamos probar. \square

Teorema 1.32: Sean,

$$f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n, \quad h(t) = \sum_{n \geq 1} b_n t^n$$

series formales y supongamos que $f(z)$ es absolutamente convergente para $|z| \leq r$ con $r > 0$ y que $s \geq 0$ es tal que

$$\sum_{n \geq 1} |b_n| s^n \leq r.$$

Sea $g := f(h)$ la composición formal, vale decir,

$$g(t) = \sum_{n \geq 0} a_n \left(\sum_{j \geq 1} b_j t^j \right)^n,$$

entonces $g(z)$ es absolutamente convergente para $|z| \leq s$ y $g(z) = f(h(z))$.

DEMOSTRACIÓN: Definamos la serie formal real

$$\phi(t) := \sum_{n \geq 0} |a_n| \left(\sum_{j \geq 1} |b_j| t^j \right)^n,$$

entonces $g \prec \phi$ y la hipótesis se traduce que ϕ converge absolutamente en s , por lo que g también. Sea

$$f_N(z) := a_0 + a_1 z + \cdots + a_{N-1} z^{N-1},$$

luego se cumple que

$$g(z) - f_N(h(z)) = f(h(z)) - f_N(h(z)) \prec \sum_{n \geq N} |a_n| \left(\sum_{j \geq 1} |b_j| t^j \right)^n.$$

Dado que $g(z)$ y $f_N(h(z))$ son continuas en $\overline{B_s(0)}$, que es compacto, entonces se concluye por convergencia uniforme de f_N hacia f . \square

Definición 1.33: Sea $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ con $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Se dice que f es *analítica* en z_0 si existe una serie de potencias formal

$$g(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]$$

con radio de convergencia $r > 0$, y existe $0 < \delta < r$ tal que $B_\delta(z_0) \subseteq A$ y $f(z_0 + h) = g(h)$ para todo $z_0 + h \in B_\delta(z_0)$. Es decir

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < \delta.$$

A ésta representación le decimos su «serie de potencias *cerca* de z_0 ».

f se dice analítica (a secas) si lo es en todo punto de su dominio. Se denota por $C^{\text{an}}(A)$ al conjunto de funciones analíticas en A .

Aquí es donde la expansión de Taylor alcanza su gloria puesto que nos otorga la receta para descifrar la serie de potencias cerca de todo punto.

Proposición 1.34: Sean $U, V \subseteq \mathbb{C}$ abiertos no vacíos. Se cumplen:

1. Si $f, g \in C^{\text{an}}(U)$, entonces $f + g, f \cdot g \in C^{\text{an}}(U)$ y si g no se anula en U entonces $f/g \in C^{\text{an}}(U)$.
2. Si $f \in C^{\text{an}}(U; V)$ y $g \in C^{\text{an}}(V)$, entonces $f \circ g \in C^{\text{an}}(U)$.

Teorema 1.35: Sea $f = \sum_{n \geq 0} a_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]$ con radio de convergencia $r > 0$. Entonces f es analítica en $B_r(0)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $z_0 \in B_r(0)$ y sea $0 < s \leq r - |z_0|$. Como $z = z_0 + (z - z_0)$ se cumple que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z_0 + (z - z_0))^n = \sum_{n \geq 0} a_n \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z_0^{n-j} (z - z_0)^j \right).$$

Si $|z - z_0| < s$, entonces $|z_0| + |z - z_0| < r$ y

$$\sum_{n \geq 0} |a_n| (|z_0| + |z - z_0|)^n = \sum_{n \geq 0} |a_n| \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} |z_0|^{n-j} |z - z_0|^j \right),$$

el cual converge absolutamente, luego podemos reordenar los términos y

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j}{j} a_{n+j} z_0^j \right) (z - z_0)^n. \quad \square$$

Definición 1.36: Sea $f = \sum_{n \geq 0} a_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]$ una serie formal, entonces se define su derivada formal como la serie:

$$f'(t) := \sum_{n \geq 1} n a_n t^{n-1} \in \mathbb{C}[[t]].$$

Teorema 1.37: Sea $f = \sum_{n \geq 0} a_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]$ de radio de convergencia $r > 0$. Entonces se cumple:

1. Su derivada formal tiene el mismo radio de convergencia.
2. f es holomorfa en $B_r(0)$ y su derivada compleja coincide con la derivada formal. En consecuencia:

$$\text{analítica} \implies \text{holomorfa}.$$

DEMOSTRACIÓN:

1. Basta notar que

$$\limsup_n |na_n|^{1/n} = \lim_n n^{1/n} \cdot \limsup_n |a_n|^{1/n} = r.$$

2. Sea $|z| < r$ y $\delta > 0$ tal que $|z| + \delta < r$, así pues

$$f(z+h) = \sum_{n \geq 0} a_n(z+h)^n = \sum_{n \geq 0} a_n(z^n + nz^{n-1}h + h^2P_n(z,h)),$$

donde

$$P_n(z,h) := \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} z^{n-j} h^{j-2},$$

el cual se puede acotar por

$$|P_n(z,h)| \leq \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} |z|^{n-j} \delta^{j-2} = P_n(|z|, \delta).$$

Consideremos la siguiente igualdad dada por convergencia absoluta:

$$f(z+h) - f(z) - h \sum_{n \geq 1} na_n z^{n-1} = h^2 \sum_{n \geq 0} a_n P_n(z,h),$$

luego dividamos por h :

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n \geq 1} na_n z^{n-1} = h \sum_{n \geq 0} a_n P_n(z,h),$$

nótese que el lado izquierdo converge absolutamente, así que el lado derecho también. Y podemos acotar la sumatoria por

$$\left| \sum_{n \geq 0} a_n P_n(z,h) \right| \leq \sum_{n \geq 0} |a_n| |P_n(z,h)| \leq \sum_{n \geq 0} |a_n| P_n(|z|, \delta).$$

Luego aplicando límites se concluye pues

$$\left| h \sum_{n \geq 0} a_n P_n(z, h) \right| \leq \lim_{h \rightarrow 0} |h| \sum_{n \geq 0} |a_n| P_n(|z|, \delta) = 0. \quad \square$$

Proposición 1.38: Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f \in C^{\text{an}}(A)$. Sea $z_0 \in A$ tal que $f(z_0) = 0$, entonces solo una se cumple:

- a) Existe $\delta > 0$ tal que $f|_{B_\delta(z_0)} \equiv 0$.
- b) Existe $\delta > 0$ tal que $f|_{B_\delta(z_0)}$ sólo se anula en z_0 .

DEMOSTRACIÓN: Sea $f = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ cerca de z_0 . Si todos los a_n 's son nulos entonces estamos en el caso a), así que supongamos que no. Luego sea m el mínimo índice tal que $a_m \neq 0$ y sea

$$g(z) := \sum_{n \geq 0} a_{n+m} (z - z_0)^n,$$

entonces $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ cerca de z_0 . Como $g(z_0) = a_m \neq 0$, entonces, por continuidad, g no se anula en $B_\delta(z_0)$. \square

Proposición 1.39: Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y sea $f \in C^{\text{an}}(A)$. Si existe un abierto $\emptyset \neq U \subseteq A$ tal que $f|_U \equiv 0$, entonces $f \equiv 0$ en todo A .

DEMOSTRACIÓN: Sea

$$B := \{z \in A : \forall n \in \mathbb{N} f^{(n)}(z) = 0\},$$

luego $U \subseteq B$ así que es no vacío, es claramente abierto por la proposición anterior y también cerrado por continuidad de $f^{(n)}$. \square

Teorema 1.40: Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y sea $f \in C^{\text{an}}(A)$. Si el conjunto de ceros tiene un punto de acumulación, entonces f es idénticamente nula. En general, si $f, g \in C^{\text{an}}(A)$ coinciden en un conjunto con puntos de acumulación, entonces $f = g$.

Corolario 1.41: Sean $A, B \subseteq \mathbb{C}$ abiertos conexos y sea $f \in C^{\text{an}}(A)$. Si f posee una extensión que es analítica en B , entonces dicha extensión es única.

1.3 Integración compleja

La primera discordancia teórica que encontramos con el análisis real surge en la integración. En el capítulo de integración extendimos la definición a funciones de codominio \mathbb{R}^n , y para el caso particular de \mathbb{C} se tiene lo siguiente:

Definición 1.42: Sea Ω un espacio de medida. Una función $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se dice *integrable*, denotado $f \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbb{C})$, si su parte real e imaginaria $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lo son, en cuyo caso se define:

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} (\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f) \, d\mu = \int_{\Omega} \operatorname{Re} f \, d\mu + i \int_{\Omega} \operatorname{Im} f \, d\mu.$$

Un par de propiedades típicas, inducidas por la teoría de la medida:

Teorema 1.43: Se cumplen:

1. Sean $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbb{C})$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces

$$\int_{\Omega} (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_{\Omega} f \, d\mu + \beta \int_{\Omega} g \, d\mu.$$

2. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ integrable con $a < c < b$, entonces

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^c f(t) \, dt + \int_c^b f(t) \, dt.$$

3. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ integrable y $g: [a, b] \rightarrow [c, d]$ biyectiva y de clase C^1 , entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(t) \, dt = \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) \, dt.$$

4. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es integrable syss $|f|$ también lo es. En cuyo caso:

$$\left| \int_{\Omega} f \, d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f| \, d\mu.$$

Lo interesante es que en \mathbb{C} podemos combinar integrales con curvas:

Definición 1.44: Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un arco, se define:

Su traza (denotada γ^*) Como la imagen de γ (como función). $\gamma^* := \operatorname{Im} \gamma$.

Su inversa (denotada $-\gamma$) Como el arco $-\gamma: t \mapsto \gamma(a+b-t)$. Es decir, el arco de igual traza recorrido en sentido inverso.

Una reparametrización Sea $t: [c, d] \rightarrow [a, b]$ un C^1 -difeomorfismo, al que llamamos un *cambio de parámetro*. Se dice que $t \circ \gamma: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ es una reparametrización de γ . Se dice que una reparametrización preserva (resp. invierte) la orientación si t es creciente (resp. decreciente).

La concatenación Sea $\eta: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ otro arco tal que $\gamma(b) = \eta(c)$. Se define:

$$\gamma \cup \eta: [a, b + (d - c)] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \longmapsto \begin{cases} \gamma(t), & t \in [a, b] \\ \eta(t - b + c), & t \in [b, b + (d - c)] \end{cases}$$

Se dice que un arco es:

Diferenciable a trozos Si existen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tales que $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ es diferenciable para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Si γ es diferenciable a trozos, podemos definir su longitud como la siguiente integral:

$$\ell(\gamma) := \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)| dt.$$

Curva cerrada Si es una función continua $\gamma: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$. Usualmente, suele aparecer en libros como una función continua $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$; nótese que ambas definiciones son equivalentes.

Curva de Jordan Si es una curva cerrada inyectiva.

En general, la palabra *arco* se reserva para cualquier clase de arco, mientras que *curva* se reserva para las curvas cerradas. El término «curva de Jordan» hace referencia al famoso «teorema de la curva de Jordan».¹

¹Éste teorema dice que dada una curva de Jordan sobre el plano \mathbb{R}^2 , entonces ésta curva separa al plano en dos regiones abiertas disjuntas, ambas de frontera la misma curva. Más aún, una y solo una de las curvas está acotada, y se le suele llamar la *región interna* determinada por la curva.

Ejemplo. Un ejemplo muy típico de arco son los segmentos: Formalmente sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces se denota por $[z, w]$ a la curva:

$$\begin{aligned}\gamma: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto (1-t)z + tw.\end{aligned}$$

Nótese que $\ell([z, w]) = |w - z|$ y que $-[z, w] = [w, z]$ así que los segmentos sí vienen con orientación.

Proposición 1.45: La longitud de un arco diferenciable a trozos es invariante bajo reparametrización (tanto que preserva como invierte orientación).

PISTA: Es una mera aplicación del teorema de cambio de variable. \square

Definición 1.46: Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un arco diferenciable y sea $f: \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se define la integral curvilínea de f a lo largo de γ como:

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Si γ es diferenciable a trozos también podemos definir su integral curvilínea como la suma de integrales (ésto además no varía en nada la integral por tratarse de un conjunto Lebesgue-nulo). A γ se le suele decir el «camino de integración». A veces se suele enfatizar que γ es curva cerrada con la notación

$$\oint_{\gamma} f(z) dz.$$

Teorema 1.47: Sean γ, η arcos diferenciables a trozos. Se cumplen:

1. Sea $f, g: \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ continua y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces:

$$\int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz.$$

2. Sea η una reparametrización que preserva la orientación de γ . Entonces:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\eta} f(z) dz.$$

3. $\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$

4. Sean γ, η arcos compatibles y sea $f: (\gamma \cup \eta)^* \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Entonces:

$$\int_{\gamma \cup \eta} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\eta} f(z) dz.$$

5. Sea $f: \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ continua y sea $S := \sup\{|f(z)| : z \in \gamma^*\}$ (¿por qué está bien definido?). Entonces:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \ell(\gamma) \cdot S.$$

Teorema 1.48: Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un arco diferenciable a trozos, sea $A \subseteq \mathbb{C}$ un abierto con $\gamma^* \subseteq A$ y sea $f \in \mathcal{H}(A)$. Entonces:

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

en particular, si γ es una curva cerrada, entonces

$$\oint_{\gamma} f'(z) dz = 0. \quad (1.3)$$

DEMOSTRACIÓN: Como es costumbre, supondremos que γ es diferenciable (a secas) y luego basta aplicar ésta demostración a cada trozo para concluir el caso general. Por definición

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = \int_a^b f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b (\gamma \circ f)'(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

donde en la última parte hemos empleado la regla de Barrow sobre cada componente real. \square

Ejemplo 1: Uno puede preguntarse si es que no se puede generalizar las ramas uniformes del logaritmo a una función sobre todos los puntos salvo el 0, y la respuesta es que no. Para ello consideremos la curva cerrada diferenciable:

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto re^{it} \end{aligned}$$

Nótese que $\gamma'(t) = -r \sin t + ir \cos t = ire^{it}$, por lo que

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = 2\pi i. \quad (1.4)$$

Ésto comprueba que $1/z$ no posee primitiva en ningún círculo centrado en el 0, y ya vimos que las ramas uniformes del logaritmo son primitivas, pero que siempre les «falta una línea».

Este comportamiento parece curioso: un matemático que hace teoría de la medida diría que $1/z$ tiene primitiva casi dondequiera, pero aún así, ese conjunto que parece insignificante marca una diferencia sustancial.

§1.3.1 El teorema de Cauchy. Ahora nos adentramos en uno de los resultados vitales del análisis complejo: el teorema de Cauchy que, a grandes rasgos, consiste en quitar la derivada de la fórmula (1.3). La demostración clásica va mutando los tipos de dominio –a veces llamados «dominios de prueba» o «de juguete»– hasta llegar a su forma general, y el primer paso reside en los triángulos:

Definición 1.49: Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$, se define el *triángulo orientado* (ver fig. 1.3) $[a, b, c]$ como la unión de los tres arcos:

$$[a, b, c] := [a, b] \cup [b, c] \cup [c, a].$$

Nótese que de que *no* se exige que los tres puntos no sean colineales. Dado un triángulo T se denota:

$$[T] := \text{conv } T = \{at_1 + bt_2 + ct_3 \in \mathbb{C} : t_1 + t_2 + t_3 = 1, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}.$$

y se define su *perímetro* como la longitud de su contorno, vale decir,

$$\ell(T) := \ell([a, b, c]).$$

Un par de propiedades topológicas:

Teorema 1.50: Sea T un triángulo. Entonces:

1. $\partial[T] = T$ (el borde del triángulo sólido es la curva que le define).
2. $[T]$ es compacto y convexo.
3. Si $A \subseteq \mathbb{C}$ es convexo y los vértices de T están en A , entonces $[T] \subseteq A$.

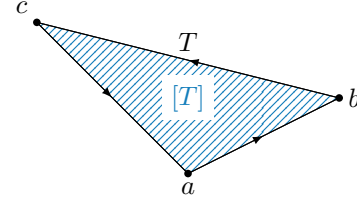


Figura 1.3

$$4. \text{diam}([T]) \leq \ell(T).$$

Lema 1.51: Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y sea $f \in \mathcal{H}(A)$. Para todo $z_0 \in A$ y todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo triángulo $[T] \subseteq D_\delta(z_0)$ se cumple que:

$$\left| \oint_T f(z) dz \right| \leq \epsilon \cdot \ell(T) \cdot \sup_{z \in T^*} |z - z_0|.$$

DEMOSTRACIÓN: Nótese que $f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)$ tiene primitiva holomorfa, luego por (1.3)

$$\oint_T (f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)) dz = 0,$$

así que

$$\begin{aligned} \left| \oint_T f(z) dz \right| &= \left| \oint_T (f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)) dz \right| \\ &\leq \ell(T) \sup_{z \in T^*} (f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)) \end{aligned}$$

y finalmente concluimos pues f es holomorfa (¿por qué?). \square

Teorema 1.52 (de Cauchy para triángulos): Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y sea $f \in \mathcal{H}(A)$. Sea T_0 un triángulo con $[T_0] \subseteq A$, entonces:

$$\oint_{T_0} f(z) dz = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Si el triángulo es degenerado entonces es claro. Sea $T_0 = [a, b, c]$ un triángulo no degenerado y supongamos, por contradicción, que $\oint_{T_0} f(z) dz = c \neq 0$. Elijamos m_1, m_2, m_3 los puntos medios de $[a, b]$, $[b, c]$ y $[c, a]$ resp., y definamos los siguientes triángulos:

$$T_0^1 := [a, m_1, m_3], T_0^2 := [b, m_2, m_1], T_0^3 := [c, m_3, m_2], T_0^4 := [m_1, m_2, m_3].$$

Éstos cumplen que

$$c = \oint_{T_0} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \oint_{T_0^j} f(z) dz,$$

donde la igualdad viene dada de que algunos segmentos se cancelan con sus opuestos (ver fig. 1.4). Así que podemos elegir un T_0^j tal que

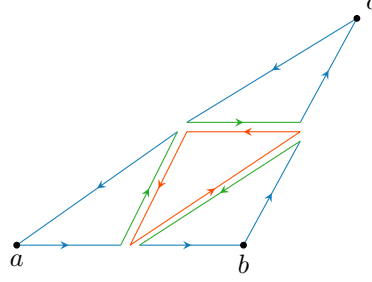


Figura 1.4

$$\left| \oint_{T_0} f(z) dz \right| \geq |c|/4.$$

A éste llamémoslo T_1 , y del mismo modo construimos T_2 y recursivamente T_n . Éstos triángulos gozan de las siguientes propiedades, puesto que son semejantes:

$$\left| \oint_{T_n} f(z) dz \right| \geq \frac{|c|}{4^n}, \quad \ell(T_n) = \frac{\ell(T_0)}{2^n}, \quad \text{diam}(T_n) = \frac{\text{diam}(T_0)}{2^n}.$$

Como los $[T_n]$'s son subconjuntos cerrados del compacto $[T_0]$ entonces existe $z_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [T_n]$. Luego, por el lema, para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que si $n \geq N$ entonces

$$\left| \oint_{T_n} f(z) dz \right| \leq \epsilon \cdot \ell(T_n) \cdot \text{diam}(T_n),$$

pero podemos elegir ϵ de modo que $\epsilon \cdot \ell(T_0) \cdot \text{diam}(T_0) < |c|$ y por lo tanto

$$\left| \oint_{T_n} f(z) dz \right| \leq \epsilon \cdot \frac{\ell(T_0) \cdot \text{diam}(T_0)}{4^n} < \frac{|c|}{4^n},$$

lo cual es absurdo. □

Definición 1.53: Se dice que un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ (y en particular los de \mathbb{C}^m) es *estrellado* con *centro* $p \in S$ si para todo $x \in S$ y todo $t \in [0, 1]$ se cumple que $(1 - t)p + tx \in S$.

Es decir, es estrellado cuando contiene a todos los segmentos que emergen del punto. Los conjuntos convexos son estrellados (y su centro es cualquier punto). Los conjuntos estrellados son arcoconexos.

Otra terminología es que al centro se le dice «bombilla» dado que un conjunto estrellado es como una «habitación completamente iluminada por su bombilla».

Teorema 1.54: Sea A un abierto estrellado no vacío y $f \in \mathcal{H}(A)$. Entonces, existe un $F \in \mathcal{H}(A)$ tal que $F' = f$.

DEMOSTRACIÓN: Sea z_0 un centro de A . Para todo $z \in A$ se define:

$$F(z) := \int_{[z_0, z]} f(w) dw.$$

Dado $z_1 \in A$ elijamos $\delta > 0$ tal que $B_\delta(z_1) \subseteq A$ y sea $z_2 \in B_\delta(z_1)$, de modo que $[z_1, z_2]^* \subseteq A$ y luego $[[z_0, z_1], z_2] \subseteq A$ (¿por qué?), por lo que

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{[z_0, z_1, z_2]} f(w) dw \\ &= F(z_1) - F(z_2) + \int_{[z_1, z_2]} f(w) dw. \end{aligned}$$

reordenando los términos se tiene que

$$F(z_2) - F(z_1) = f(z_1)(z_2 - z_1) + \int_{[z_1, z_2]} (f(w) - f(z_1)) dw,$$

luego restando y acotando obtenemos que

$$|F(z_2) - F(z_1) - f(z_1)(z_2 - z_1)| \leq |z_2 - z_1| \sup_{w \in [z_1, z_2]^*} |f(w) - f(z_1)|.$$

Luego podemos dividir por $z_2 - z_1$ y concluir que tiene derivada compleja por continuidad de f . \square

Si el lector nota, hemos probado algo más fuerte:

Corolario 1.55: Sea A un abierto estrellado no vacío y f continua en A . Si para todo triángulo T en A se cumple que $\oint_T f(z) dz = 0$, entonces f tiene primitiva holomorfa.

Teorema 1.56 (de Cauchy para abiertos estrellados): Sea A un abierto estrellado no vacío y $f \in \mathcal{H}(A)$. Sea γ una curva cerrada contenida en A , entonces:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Se sigue del teorema anterior combinado con (1.3). \square

De hecho, nuevamente, podemos volver a mejorar el teorema con la siguiente definición:

Definición 1.57: Se dice que un abierto conexo no vacío $S \subseteq \mathbb{C}$ es *simplemente conexo holomórficamente* (abreviado s.c.h.) si para todo $f \in \mathcal{H}(S)$ y toda curva cerrada diferenciable a trozos γ contenida en S se cumple que

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

El teorema anterior dice que los abiertos estrellados son hsc. Recordemos que un espacio es *simplemente conexo (topológicamente)* si todo lazo es contractible. La versión definitiva del teorema de Cauchy será probar que los abiertos simplemente conexos son s.c.h., y más aún, veremos que el converso es también cierto para abiertos de \mathbb{C} .

Teorema 1.58: Sea f continua en $A \subseteq \mathbb{C}$ un abierto s.c.h., tal que para todo triángulo $[T] \subseteq A$ se cumple que

$$\oint_T f(z) dz = 0,$$

entonces f tiene primitiva holomorfa.

DEMOSTRACIÓN: Sean γ, η dos arcos diferenciables a trozos desde $z_0 \in A$ hasta z , luego $\gamma \cup -\eta$ es una curva cerrada diferenciable a trozos y $\oint_{\gamma \cup -\eta} f(z) dz = 0$. Así que

$$F(z) := \int_{\gamma} f(z) dz$$

está bien definida y seguimos el razonamiento previo. \square

Teorema 1.59: Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ un abierto s.c.h., y sea $f \in \mathcal{H}(A)$ con $f' \in \mathcal{H}(A)$. Si f no se anula en A , entonces:

1. Existe $h \in \mathcal{H}(A)$ tal que $e^{h(z)} = f(z)$.
2. Para todo $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ existe $g_n \in \mathcal{H}(A)$ tal que $(g_n)^n = f$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $z_0 \in A$ y sea h_0 un logaritmo de $f(z_0)$. Como f no se anula, entonces f'/f está bien definida y es holomorfa en A , luego posee primitiva holomorfa F . Definamos $g(z) := f \cdot \exp(-h_0 - F(z) + F(z_0))$ luego por regla del producto y de la cadena se concluye que $g' \equiv 0$ y es claro que $g(z_0) = 1$, así que $g \equiv 1$, por lo que $h := h_0 + F(z) - F(z_0)$ cumple lo exigido y $g_n := \exp(h/n)$ también. \square

Ahora procedemos a construir dos tipos de regiones muy importantes: Se define la *corona* de radios $0 \leq r < R < \infty$ como el conjunto

$$\mathbb{A}_{r,R} := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$$

y se define el sector angular entre los argumentos $\alpha < \beta$ con $\beta - \alpha \leq 2\pi$ dado por

$$S_{\alpha,\beta} := \{re^{i\theta} : r > 0, \alpha < \theta < \beta\}.$$

Por ejemplo, $S_{\alpha,\alpha+2\pi} = H_\alpha$.

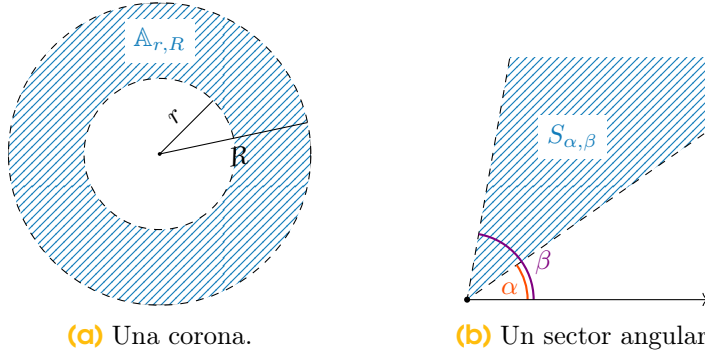


Figura 1.5

Lema 1.60: Sean $\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$ y $0 \leq r < R < \infty$ tales que

$$\cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) > \frac{r}{R},$$

entonces $\mathbb{A}_{r,R} \cap S_{\alpha,\beta}$ es un abierto estrellado.

DEMOSTRACIÓN: Si $r = 0$ y $\beta - \alpha < \pi$ entonces la región es de hecho convexa. Si $r > 0$... \square

Teorema 1.61: Sean $\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$ y $0 \leq r < R < \infty$ arbitrarios. Entonces $\mathbb{A}_{r,R} \cap S_{\alpha,\beta}$ es un abierto s.c.h.

DEMOSTRACIÓN: Nótese que H_π es un abierto estrellado con centro en $z_0 = 1$. La función $f(z) = z$ es holomorfa en H_π , luego por el teorema 1.59 debe darse que una rama $g_n(z) = z^{1/n}$ es holomorfa en H_π . Así pues, rotando para que $\alpha = -\beta$ tenemos que $h_n(z) := z^n$ es biholomorfa de derivada holomorfa desde $B_n := \mathbb{A}_{r^{1/n}, R^{1/n}} \cap S_{-\frac{\beta}{n}, \frac{\beta}{n}}$ hasta $\mathbb{A}_{r, R} \cap S_{-\beta, \beta}$, así que basta algún B_n es s.c.h. Para ello, empleando las expansiones de Taylor, recordamos que

$$\cos\left(\frac{\beta}{n}\right) = 1 - \frac{\beta^2}{6n^2} + O(n^{-4}), \quad \left(\frac{r}{R}\right)^{1/n} = 1 - \frac{1}{n} \log(r/R) + O(n^{-2}).$$

De lo que se deduce que para algún n suficientemente grande se cumple que $\cos(\beta/n) > (r/R)^{1/n}$ con lo que B_n es estrellado y por tanto s.c.h. \square

Teorema 1.62 – Teorema de Cauchy: Sean γ_0, γ_1 dos curvas cerradas diferenciables a trozos homotópicas en un abierto conexo $A \subseteq \mathbb{C}$ y sea $f \in \mathcal{H}(A)$, entonces:

$$\oint_{\gamma_0} f(z) dz = \oint_{\gamma_1} f(z) dz.$$

En particular, si A es simplemente conexo, entonces es s.c.h.

DEMOSTRACIÓN: Un par de observaciones preliminares:

- a) Si f es una función localmente constante (i.e., si todo $z \in \text{Dom } f$ posee un entorno U donde $f|_U$ es constante) y su dominio es conexo, entonces f es constante.
- b) Si γ_0, γ_1 son cerradas diferenciables a trozos homotópicas, entonces existe una homotopía $\gamma_s: \gamma_0 \simeq \gamma_1$ tal que γ_s es diferenciable a trozos para todo $s \in [0, 1]$.

Justificar mejor la existencia de ésta homotopía.

Elijamos una homotopía dada por la observación (b) y definamos

$$C(s) := \oint_{\gamma_s} f(z) dz,$$

notemos que el dominio de C es $[0, 1]$ por lo que, por la observación (a), basta probar que es localmente constante para concluir el enunciado.

Sea $s_0 \in [0, 1]$. Si $A = \mathbb{C}$, entonces definamos $\delta := 1$ y sino definamos $\delta := \frac{1}{2}d(\gamma_{s_0}^*, \mathbb{C} \setminus A)$. Así pues, se tiene que definiendo $U_t := B_\delta(\gamma_{s_0}(t))$, entonces $\gamma_{s_0}^* \subseteq \bigcup_{t \in [0, 1]} U_t \subseteq A$, por lo que existen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tales que $\gamma_{s_0}[[t_j, t_{j+1}]] \subseteq U_j$ por compacidad.

Sea $\epsilon > 0$ tal que si $|s - s_0| < \epsilon$ y $t \in [t_j, t_{j+1}]$ se cumple que $\gamma_s(t) \in U_j$ para todo j , lo cual es posible dado que la homotopía es una aplicación (uniformemente) continua sobre un compacto. Fijando s definamos η_j la curva cerrada dada por la unión de las siguientes curvas: primero γ_{s_0} desde t_j hasta t_{j+1} , luego $[\gamma_{s_0}(t_{j+1}), \gamma_s(t_{j+1})]$, luego γ_s (en sentido inverso) desde t_{j+1} hasta t_j y finalmente $[\gamma_s(t_j), \gamma_{s_0}(t_j)]$ (ver fig. 1.6).

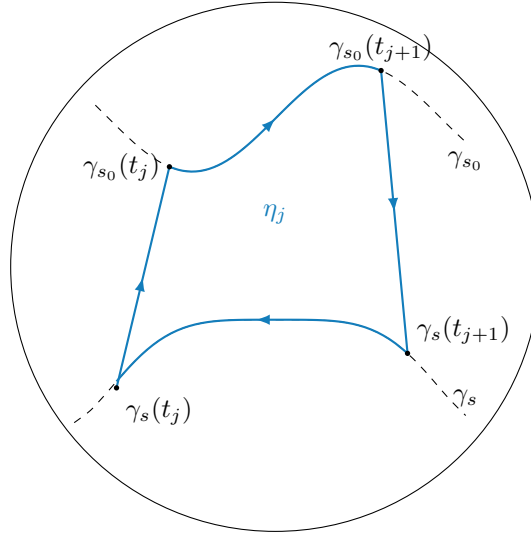


Figura 1.6

Como cada U_j es una bola, entonces son estrelladas y

$$\oint_{\eta_j} f(z) dz = 0,$$

sumando sobre todos los η_j se obtiene que

$$0 = \sum_{j=0}^{n-1} \oint_{\eta_j} f(z) dz = \int_{\gamma_{s_0}} f(z) dz - \int_{\gamma_s} f(z) dz,$$

lo que prueba que C es localmente constante como se quería. \square

Ejemplo 2 (integrales de Fresnel): Considere las integrales

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx, \quad \int_0^\infty \cos(x^2) dx.$$

Así formulado, en variable real es conocido por ser un problema particularmente difícil, pero en variable compleja veremos que hay ciertas técnicas para facilitar nuestro desempeño. En primer lugar notemos que

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx + i \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \int_0^\infty e^{it^2} dt.$$

Luego considere

$$\omega := \exp\left(-\frac{\pi}{4}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i),$$

que satisface $\omega^2 = -i$, de modo que

$$\int_0^\infty e^{it^2} dt = \int_0^\infty e^{-(\omega t)^2} dt,$$

ahora nos veríamos tentados a aplicar un cambio de variable $u = \omega t$, de modo que $dt = \frac{du}{\omega}$ y obtengamos una integral de Gauss a la derecha. En su lugar justificaremos la igualdad construyendo los siguientes caminos en \mathbb{C} (ver fig. 1.7):

$$\gamma_1(t) = R\omega t, \quad \gamma_2(t) = R \exp\left(\frac{\pi}{4}(t-1)i\right), \quad \gamma_3(t) = Rt.$$

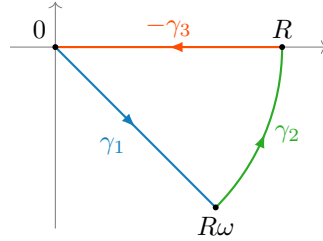


Figura 1.7

De modo que $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup -\gamma_3$ es una curva cerrada y es claramente diferenciable a trozos. Luego el teorema de Cauchy nos dice que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup -\gamma_3} e^{-z^2} dz &= 0 \\ \int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz &= \int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz \\ \int_0^R e^{-x^2} dx &= \int_0^R \omega e^{-(\omega t)^2} dt + \int_0^1 \exp(-R^2 e^{\frac{\pi}{2}(t-1)i}) \cdot R e^{\frac{\pi}{4}(t-1)i} \cdot \frac{\pi}{4} i dt. \end{aligned}$$

Veremos que la última integral de hecho converge a cero cuando $R \rightarrow \infty$, para ello basta acotar el integrando:

$$\left| \exp(-R^2 e^{\frac{\pi}{2}(t-1)i}) \cdot R e^{\frac{\pi}{4}(t-1)i} \cdot \frac{\pi}{4} i \right| \leq \frac{\pi R}{4} e^{-R^2} |\exp(e^{\frac{\pi}{2}(t-1)i})|,$$

para acotar el último factor basta notar que $|e^{x+iy}| \leq e^x$ cuando $x, y \in \mathbb{R}$ y claramente $e^{\frac{\pi}{2}(t-1)i}$ alcanza parte real máxima 1. En consecuencia, el integrando está acotado por:

$$\frac{\pi R}{4} e^{1-R^2},$$

el cual claramente converge a 0 cuando $R \rightarrow \infty$. De modo que

$$\int_0^\infty e^{-(\omega t)^2} dt = \frac{1}{\omega} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

y comparando parte real con parte imaginaria obtenemos que

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx = \int_0^\infty \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

§1.3.2 Fórmula integral de Cauchy. Aquí trabajaremos harto en circunferencias, pero una simple transformación afín nos permite reducirnos al caso de los conjuntos:

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad \overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$$

Además cuando hablemos de la curva $|z - z_0| = r$ nos referiremos a la curva cerrada:

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto z_0 + r e^{it}, \end{aligned}$$

que recorre la circunferencia de radio r centrada en z_0 en sentido antihorario.

Lema 1.63: Sea $z_0 \in \mathbb{D}$ y sea $\rho < 1 - |z_0|$. Para toda función g holomorfa en algún entorno de $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{z_0\}$ se cumple que

$$\oint_{|z|=1} g(z) dz = \oint_{|z-z_0|=\rho} g(z) dz.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea θ un argumento de z_0 y para todo $\epsilon > 0$ sea γ_ϵ la curva cerrada que es frontera del conjunto

$$\mathbb{D} \setminus (\overline{B_\rho(z_0)} \cup S_{\theta-\epsilon, \theta+\epsilon})$$

que recorre en sentido antihorario el borde de \mathbb{D} (ver fig. 1.8). Además llamemos η_1 a la curva $|z| = 1$ y η_2 a la curva $|z - z_0| = \rho$.

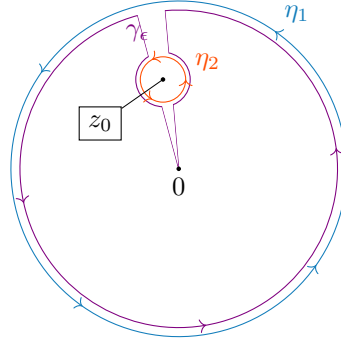


Figura 1.8

Como g es holomorfa en algún entorno de $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{z_0\}$ podemos elegir un $\delta > 0$ tal que g es holomorfa en $B_{1+\delta}(0) \cap H_\theta$ (una región que contiene a γ_ϵ), por lo que

$$\oint_{\gamma_\epsilon} g(z) dz = 0,$$

haciendo tender $\epsilon \rightarrow 0$ vemos que los segmentos lineales de γ_ϵ se cancelan y finalmente $\oint_{\gamma_\epsilon} g(z) dz \rightarrow \oint_{\eta_1} g(z) dz - \oint_{\eta_2} g(z) dz$. \square

Bajo el mismo argumento, podemos aumentar la cantidad de puntos:

Proposición 1.64: Sean $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{D}$ y sea

$$\rho < \min \left\{ \min_{j=1}^k \{1 - |z_j|\}, \frac{1}{2} \min_{i,j} |z_i - z_j| \right\}.$$

Sea η_0 la curva $|z| = 1$ y η_j la curva $|z - z_j| = \rho$. Entonces:

$$\oint_{\eta_0} g(z) dz = \sum_{j=1}^k \oint_{\eta_j} g(z) dz, \quad (1.5)$$

donde g es holomorfa en algún entorno de $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$.

Lema 1.65: Sea h continua en $z = 0$, entonces:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{|z|=\epsilon} \frac{h(z)}{z} dz = 2\pi h(0)i.$$

DEMOSTRACIÓN: Por la fórmula (1.4) el enunciado se reduce a probar que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{|z|=\epsilon} \frac{h(z) - h(0)}{z} dz = 0,$$

y nótese que podemos acotar la integral de la izquierda por $2\pi \sup_{|z|=\epsilon} \{h(z) - h(0)\}$, el cual converge a cero por continuidad. \square

Teorema 1.66 (Fórmula integral de Cauchy para circunferencias): Sea f holomorfa en un entorno de $\overline{\mathbb{D}}$ y sea $z_0 \in \mathbb{D}$. Entonces:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (1.6)$$

DEMOSTRACIÓN: Definiendo

$$g(z) := \frac{f(z)}{z - z_0},$$

por el lema 1.63 se cumple que la integral sobre $|z| = 1$ es igual a la integral sobre $|z - z_0| = \epsilon$ para cualquier $0 < \epsilon < 1 - |z_0|$, pero eligiendo $h(z) = f(z + z_0)$ se cumple que dicha integral converge a $h(0) = f(z_0)$ por el lema anterior. \square

Teorema 1.67 (Fórmula integral de Cauchy para coronas): Sea f holomorfa en un entorno de $\overline{\mathbb{A}_{r,R}}$ con $r < R$. Entonces para todo $z_0 \in \mathbb{A}_{r,R}$ se cumple:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (1.7)$$

DEMOSTRACIÓN: Para demostrarlo, hay que probar primero un análogo al lema 1.63 lo que se logra cambiando adecuadamente la curva cerrada γ_ϵ y siguiendo el mismo argumento. \square

Finalizamos con una serie de corolarios de la fórmula integral de Cauchy:

Teorema 1.68 – Teorema de series de potencias de Cauchy:

Si f es holomorfa en z_0 , entonces es analítica en z_0 . Más aún, si su expansión en $B_\delta(z_0)$ es de la forma

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n,$$

entonces los coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\delta'} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad (1.8)$$

para cualquier $\delta' < \delta$.

DEMOSTRACIÓN: Podemos trasladar y reescalar de modo que $z_0 = 0$, $\delta' = 1$ y $\delta > 1$. Por la fórmula integral de Cauchy se obtiene que para todo $w \in \mathbb{D}$:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-w} dz,$$

Para todo $z \in \partial\mathbb{D}$ (en particular, no nulo) y todo $w \in \mathbb{D}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-w} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-w/z} \\ &= \sum_{n=0}^N w^n z^{-n-1} + w^{N+1} z^{-N-1} (z-w)^{-1} \end{aligned}$$

sustituyéndolo se obtiene que

$$\begin{aligned} f(w) &= \sum_{n=0}^N \frac{w^n}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz + \frac{w^{N+1}}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{N+1}(z-w)} dz \\ &= \sum_{n=0}^N a_n w^n + R_N(w), \end{aligned}$$

y finalmente acotamos a $R_N(w)$ por:

$$|R_N(w)| \leq \frac{|w|^{N+1}}{1-|w|} \sup_{|z|=1} |f(z)|,$$

el cual converge uniformemente a cero en un conjunto $B_{1-\epsilon}(0)$ para cualquier $0 < \epsilon < 1$. \square

Como corolario tenemos:

Teorema 1.69 – Teorema fundamental del análisis complejo:

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo no vacío. Una función f es analítica en A si y sólo si es holomorfa en A . En particular, las funciones holomorfas son C^∞ .

Teorema 1.70 – Teorema de Morera:

Sea f continua en un abierto conexo $A \subseteq \mathbb{C}$. Supongamos que para todo $z_0 \in A$ existe $\delta > 0$ tal que para todo triángulo $[T] \subseteq B_\delta(z_0)$ se cumple que

$$\oint_T f(z) dz = 0,$$

entonces f es holomorfa en A .

DEMOSTRACIÓN: Sea $z_0 \in A$ arbitrario y sea $\delta > 0$ dado por la hipótesis. Se cumplen las condiciones del corolario 1.55 así que f tiene primitiva holomorfa en $B_\delta(z_0)$, pero la derivada de una función holomorfa es holomorfa por el teorema anterior, así que f es holomorfa en $B_\delta(z_0)$. \square

Teorema 1.71 (de convergencia de Weierstrass): Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas en A . Sea f una función en A tal que para todo $K \subseteq A$ compacto se satisface que

$$\limsup_n \sup_{z \in K} |f(z) - f_n(z)| = 0,$$

entonces f es holomorfa.

DEMOSTRACIÓN: Sea $z_0 \in A$ y sea δ tal que $B_{2\delta}(z_0) \subseteq A$, luego $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$ en $\overline{B}_\delta(A)$. Por el teorema de Cauchy sabemos que para todo triángulo $[T] \subseteq B_\delta(z_0)$ se cumple que $\oint_T f_n(z) dz = 0$. Como T^* es compacto, entonces $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$ en T^* por lo que $\oint_T f(z) dz = 0$ y luego concluimos por el teorema de Morera. \square

Teorema 1.72: Sea f analítica en z_0 que se ve como

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

cerca de z_0 y sea r el radio de convergencia de su serie formal. Entonces f posee una singularidad en $\partial B_r(z_0)$.

DEMOSTRACIÓN: Si f no posee singularidades en $z_1 \in \partial B_r(z_0)$, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que podemos extender f a $B_r(z_0) \cup B_{\delta_1}(z_1)$. Por compacidad, podemos encontrar z_1, \dots, z_k tales que

$$\bigcup_{j=1}^k B_{\delta_j}(z_j) \supseteq \partial B_r(z_0).$$

Luego podemos ir extendiendo f analíticamente a $B_r(z_0) \cup \bigcup_{j=1}^k B_{\delta_j}(z_j)$, de modo que el radio de convergencia es > 1 lo que es absurdo. \square

Teorema 1.73 (Desigualdades de Cauchy): Sea f holomorfa en un entorno de $\overline{B_r(0)}$ y sea $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ cerca del 0, entonces:

1. $|a_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta.$
2. $|a_n| \leq r^{-1} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(re^{i\theta})|.$

DEMOSTRACIÓN: De la primera se deduce la segunda. Para la primera reescribamos la fórmula integral de Cauchy para circunferencias como

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}} dz. \quad \square$$

Definición 1.74: Una función f se dice *entera* si es holomorfa en todo \mathbb{C} .

Teorema 1.75: Si f es una función entera y para algún $\alpha \geq 0$ y algún $0 < C < \infty$ se tiene que

$$|f(z)| \leq C(|z| + 1)^\alpha$$

entonces f es un polinomio de grado a lo más $\lfloor \alpha \rfloor$. Más aún, si α es un entero y

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |z|^{-\alpha} |f(z)| = 0$$

entonces f tiene grado $\leq \alpha - 1$ (si $\alpha = 0$, entonces $f \equiv 0$).

DEMOSTRACIÓN: Como f es entera, entonces es holomorfa en un entorno de $\overline{B_r(0)}$ para r arbitrariamente grande. Por las cotas de Cauchy, para $n > \alpha$ se tiene que

$$|a_n| \leq C(r+1)^\alpha r^{-n} \rightarrow 0,$$

por lo que $a_n = 0$ y $f(z) = \sum_{j=0}^{\lfloor \alpha \rfloor} a_j z^j$. \square

Para el caso particular de $\alpha = 0$ se obtiene:

Teorema 1.76 – Teorema de Liouville: Una función entera acotada es constante.

Y la aplicación estándar es la siguiente:

Teorema 1.77 (Teorema fundamental del álgebra): Todo polinomio complejo no constante tiene al menos una raíz.

DEMOSTRACIÓN: Sea $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \in \mathbb{C}[z]$ de grado n , vale decir, $a_n \neq 0$. Si no tuviera raíces, entonces $g(z) := 1/f(z)$ es una función entera. Más aún, g tiene que estar acotada pues $|f(z)| \cdot |z|^{-n} \rightarrow |a_n|$ cuando $|z| \rightarrow \infty$. Luego podemos elegir un radio $R \geq 1$ tal que $|g(z)| = 1/|f(z)| \leq 1/|a_n| + \epsilon$ y dentro de $\overline{B_R(0)}$ la función está acotada por ser continua sobre un compacto. Como $g(z)$ es entera y acotada, por Liouville es constante, lo que es absurdo. \square

2

Más aplicaciones del teorema de Cauchy

2.1 Números de giro y ceros

§2.1.1 Nociones de la topología algebraica. Al final del capítulo anterior vimos dos fórmulas que tienen *algo* de mágico y misterioso: las fórmulas integrales de Cauchy y el teorema de series de potencias de Cauchy. «Un matemático es un mago que *sí* revela sus secretos» leí alguna vez y siguiendo éste aforismo vamos a matar el misterio para el lector que tiene un poco de conocimientos previos en topología algebraica.

Proposición 2.1: La función $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es un recubrimiento (en sentido de la topología).¹

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que \exp es continua y suprayectiva. Sea $z \in \mathbb{C}_{\neq 0}$, luego $z = re^{i\theta}$ para un único $r \geq 0$ y algún $\theta \in \mathbb{R}$. Consideremos el entorno abierto conexo $U := \mathbb{A}_{r/2, 3r/2} \cap S_{\theta-\epsilon, \theta+\epsilon}$ de z , donde $\epsilon > 0$ puede ser cualquier valor $< \pi$ y tomaremos $\epsilon = \pi/8$; luego llamando $a := \ln(r/2)$, $b := \ln(3r/2)$, y llamando

$$V_n := \{x + iy \in \mathbb{C} : x \in (a, b), y \in (\theta - \epsilon + 2\pi n, \theta + \epsilon + 2\pi n)\},$$

¹Una función $p: \tilde{X} \rightarrow X$ se dice un *recubrimiento* si es continua, suprayectiva y todo $x \in X$ posee un entorno abierto conexo U tal que la restricción de p a cada componente conexa de $p^{-1}[U]$ es un homeomorfismo.

es fácil notar que $\exp^{-1}[U] = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ (ver fig. 2.1). Cada uno de los V_n son abiertos conexos, y la restricción $\exp|_{V_n}: V_n \rightarrow U$ es inyectiva, así que por el teorema de la función inversa, se cumple que $\exp|_{V_n}$ es un difeomorfismo y, en particular, un homeomorfismo como se quería ver. \square

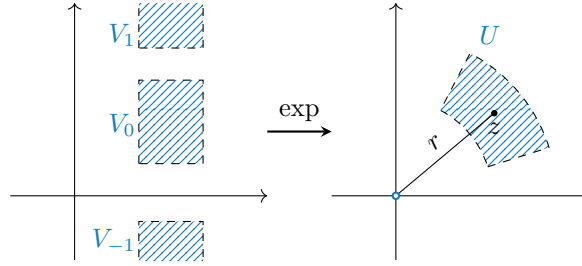


Figura 2.1

Autocitar adecuadamente el teorema.

Luego, hay un teorema de topología algebraica que dice que todo arco continuo admite elevaciones a través de un recubrimiento de espacios topológicos. En nuestro contexto:

Definición 2.2: Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un arco que no pasa por el 0. Una *determinación (continua) del logaritmo* sobre γ , es una función continua $L: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) = e^{L(t)}$ para todo t . Una *determinación (continua) del argumento* es una función continua $A: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{iA(t)}$ para todo t .

Como \exp es un recubrimiento todo arco admite una determinación del logaritmo y del argumento. Al igual que en la proposición 1.11 y en la definición 1.13 tenemos un análogo claro:

Proposición 2.3: Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un arco que no pasa por el 0. Si $L: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una determinación del logaritmo de γ , entonces $A(t) := \text{Im}(L(t))$ es una determinación del argumento. Y viceversa: como $|\gamma|: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ es continua, $\ln |\gamma|$ está bien definido y es continuo, y si $A: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una determinación del argumento, entonces $L(t) := \ln |\gamma(t)| + iA(t)$ es una determinación del logaritmo. Más aún, si A_1, A_2 son determinaciones del argumento de γ , entonces existe un único $k \in \mathbb{Z}$ tal que $A_1 = A_2 + 2\pi k$.

Así pues, podemos importar otra definición de la topología algebraica:

Definición 2.4: Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva cerrada, entonces definimos:

$$\begin{aligned} \text{ind}(\gamma, -): \mathbb{C} \setminus \gamma^* &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ z &\longmapsto \frac{1}{2\pi} (A_z(b) - A_z(a)) = \frac{1}{2\pi i} (L_z(b) - L_z(a)), \end{aligned}$$

donde A_z, L_z son determinaciones continuas del argumento y del logaritmo resp. sobre la curva $\gamma - z$. A $\text{ind}(\gamma, 0)$ usualmente le decimos el *número de giro* de γ (al rededor del 0).

Y por último otro teorema útil de la topología algebraica:

Teorema 2.5: Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva cerrada, entonces $\text{ind}(\gamma, -)$ es constante sobre todas las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Ahora bien, a las propiedades específicas sobre \mathbb{C} :

Teorema 2.6: Sea γ una curva cerrada diferenciable a trozos y sea $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Entonces:

$$\text{ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

DEMOSTRACIÓN: Veamos primero el enunciado equivalente del teorema para arcos diferenciables (no necesariamente cerrados) al rededor de $z = 0$, i.e., queremos probar que si $L(t)$ es una determinación continua de $\gamma(t)$, entonces:

$$\frac{L(b) - L(a)}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta} d\zeta,$$

claramente podemos cancelar el $2\pi i$. Para cada t se cumple que $\gamma(t) \neq 0$ así que podemos elegir un argumento $A(t)$ y así pues $U_t := H_{A(t)+\pi}$ es un entorno de $\gamma(t)$, en donde existe una rama uniforme del logaritmo. Como γ^* es compacto, podemos elegir $a = t_0 < \dots < t_n = b$ y U_0, \dots, U_{n-1} tales que $\gamma[[t_j, t_{j+1}]] \subseteq U_j$ para todo $j = 0, \dots, n-1$; en cada uno de ellos tenemos una rama uniforme \log_j del logaritmo y se cumple

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta} d\zeta &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\gamma[[t_j, t_{j+1}]]} \frac{1}{z} dz \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \log_j(\gamma(t_{j+1})) - \log_j(\gamma(t_j)) = L(b) - L(a), \end{aligned}$$

(donde empleamos el teorema 1.48) que es lo que se quería probar. \square

§2.1.2 Ceros de funciones analíticas.

Definición 2.7: Sea f una función analítica en un entorno de z_0 tal que $f(z_0) = 0$, pero f no es idénticamente nula (cerca de z_0). Así pues

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

cerca de z_0 y algún a_n no es nulo. Se define el orden de f cerca de z_0 como:

$$\text{ord}_{z_0}(f) := \min\{m : a_m \neq 0\} = \min\{m : f^{(m)}(z_0) \neq 0\}.$$

Nótese que si f es una serie formal de potencias entonces coincide en cero con nuestra vieja definición de orden.

Otra ventaja es que siempre podemos definir la serie formal en el punto y , en particular, un punto p no es un cero de f si $\text{ord}_p(f) = 0$.

Como los ceros de una función analítica son aislados se satisface que si S es un subconjunto relativamente compacto del dominio (i.e., si \bar{S} es compacto o si S está acotado), entonces f tiene a lo sumo finitos ceros, luego podemos definir

$$N_S(f, a) := \sum_{p \in S} \text{ord}_p(f - a);$$

y a la cantidad $N_S(f, 0)$ le decimos «la cantidad de ceros de f en S , contando multiplicidad».

Lema 2.8: Sea f analítica en un abierto conexo $A \subseteq \mathbb{C}$. Sea z_0 un cero de f de orden m , y sea

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m}, & z \neq z_0 \\ \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}, & z = z_0 \end{cases}$$

Entonces g es analítica en A .

PISTA: Es simplemente expandir f cerca de z_0 . □

Teorema 2.9 (principio del argumento): Sea f analítica en un entorno de $\bar{B}_r(z_0)$ que no se anula en $\partial B_r(z_0)$. Entonces:

$$N_{B_r(z_0)}(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

En general, si q es analítica en un entorno de $\overline{B_r(z_0)}$ y z_1, \dots, z_k son los ceros de f en $B_r(z_0)$ de ordenes m_1, \dots, m_k resp., entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{q(z)f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^k m_j q(z_j).$$

DEMOSTRACIÓN: En particular, podemos elegir g analítica en un entorno de $\overline{B_r(z_0)}$ que no se anula en $\overline{B_r(z_0)}$ tal que

$$f(z) = \prod_{j=1}^k (z - z_j)^{m_j} g(z).$$

Si $h = f_1 \cdots f_\ell$, donde todas son holomorfas, entonces por la regla de Leibniz

$$\frac{h'}{h} = \sum_{j=1}^k \frac{f'_j}{f_j},$$

y para q holomorfa se da que

$$\frac{qf'}{f} = \frac{qg'}{g} + \sum_{j=1}^k \frac{m_j q}{z - z_j},$$

finalmente como g'/g es holomorfa, entonces $\oint_{|z-z_0|=r} g'/g dz = 0$ y

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{q(z)}{z - z_j} dz = q(z_j),$$

de lo que se concluye el enunciado. \square

Teorema 2.10: Sea f analítica en un entorno de $\overline{B_r(z_0)}$ que no se anula en $\partial B_r(z_0)$. Sea η la curva $|z - z_0| = r$. Entonces $N_{B_r(z_0)}(f) = \text{índ}(\eta \circ f)$.

Geométricamente ésto nos dice que podemos contar cuántos ceros tiene la función f viendo la cantidad de vueltas que una curva cerrada de la frontera de la región da al poscomponerla con f .

Ejemplo 3: Consideremos la función $f(z) := 1/z$. Ésta función es analítica, pero no en \mathbb{D} (pues no está definida en 0), no obstante, y sólo por

diversión, calculemos la siguiente integral que, en el caso de que estuviera bien definida, nos daría la cantidad de ceros con multiplicidad en \mathbb{D} :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{-1/z^2}{1/z} dz = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = -1.$$

Esto es extraño, la función $1/z$ no tiene ceros en \mathbb{D} (no los tiene en ninguna parte), pero pareciera que hay un cero de multiplicidad -1 en el punto $z = 0$. De hecho, esto es correcto en el sentido de que $f(z) = (z - 0)^{-1} \cdot g(z)$ donde $g(z) \neq 0$ en $z = 0$.

El siguiente corolario podría verse como una trivialidad con las técnicas de la topología algebraica, así que daremos una demostración que no las emplea (al menos no directamente).

Corolario 2.11: Sean $f_t: f_0 \simeq f_1$ una homotopía de funciones analíticas en $B_{r+\epsilon}(z_0)$ que no se anulan en $\partial B_r(z_0)$. Entonces $N_{B_r(z_0)}(f_t)$ es independiente de t .

DEMOSTRACIÓN: Nótese que, por la fórmula integral de Cauchy

$$f'_t(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f_t(z)}{z - z_0} dz$$

luego $t \mapsto f'_t(z_0)$ es una función continua. Como f_t son analíticas sobre $B_{r+\epsilon}(z_0)$ entonces para todo $z \in \partial B_r(z_0)$ el mismo argumento aplica (cambiando el contorno de la integral naturalmente), así que f'_t/f_t es continua sobre todos los puntos de la frontera y por el teorema anterior, la función:

$$t \mapsto N_{B_r(z_0)}(f_t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f'_t(z)}{f_t(z)} dz,$$

es continua y toma valores naturales, luego es constante. \square

Teorema 2.12 (de Rouché para circunferencias): Sean f, g analíticas sobre un entorno de $\overline{B_r(z_0)}$ y supongamos que sobre $\partial B_r(z_0)$ se cumple que

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

(el « \leq » siempre se tiene por desigualdad triangular, aquí exigimos « $<$ »). Entonces f, g no se anulan en $\partial B_r(z_0)$ y

$$N_{B_r(z_0)}(f) = N_{B_r(z_0)}(g).$$

DEMOSTRACIÓN: Construyamos la homotopía

$$f_t(z) := (1-t)f(z) + tg(z),$$

si es que $f_t(z) = 0$ para algún $t \in (0, 1)$, entonces $f(z) = t \cdot (f(z) - g(z))$ y

$$\begin{aligned} tg(z) &= -(1-t)f(z) \iff g(z) = (1-t) \cdot (g(z) - f(z)), \\ |f(z)| + |g(z)| &= (t + (1-t))|f(z) - g(z)| \end{aligned}$$

pero ésto no se puede por hipótesis. Así pues, f_t satisface las condiciones del corolario anterior y se concluye el enunciado. \square

Como aplicación otorgamos una segunda demostración del teorema fundamental del álgebra:

DEMOSTRACIÓN (TEO. 1.77): Sea

$$f(z) := a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n \in \mathbb{C}[z]$$

con $a_n \neq 0$ y $g(z) := a_nz^n$. Y consideremos

$$|z| > \frac{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|}{|a_n|} \geq 1,$$

entonces

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &\leq |z|^{n-1}(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|) \\ &< |a_n| |z|^n = |g(z)| \leq |f(z)| + |g(z)|. \end{aligned}$$

Luego aplicando el teorema de Rouché se tiene que f, g tienen la misma cantidad n de ceros con multiplicidad en dicha región. \square

Teorema 2.13: Sean $f_t: f_0 \simeq f_1$ una homotopía de funciones continuas definidas sobre $\overline{\mathbb{D}}$, tales que para todo $t \in [0, 1]$ se cumple que f_t es analítica en \mathbb{D} y no se anula en $\partial\mathbb{D}$. Entonces $N_{\mathbb{D}}(f_t)$ es finito e independiente de t .

DEMOSTRACIÓN: Que $N_{\mathbb{D}}(f_t)$ es finito resulta trivial. Vamos a probar que existe un $\epsilon > 0$ tal que $f_t(z) \neq 0$ para todo $t \in [0, 1]$ y todo $|z| \geq 1 - \epsilon$. Si no lo hubiese, entonces el conjunto $\{|z| : \exists t \in [0, 1] f_t(z) = 0\}$ tiene como punto de acumulación al 1; pero el conjunto es cerrado por continuidad, así que existe un $|z_0| = 1$ y un t tal que $f_t(z_0) = 0$, lo que contradice la hipótesis. Finalmente $N_{\mathbb{D}}(f_t) = N_{B_{1-\epsilon}(0)}(f_t)$ y el resultado se sigue del corolario 2.11. \square

Y se sigue el siguiente teorema:

Teorema 2.14 (agudo de Rouché para circunferencias): Sean f, g continuas sobre un entorno de $\overline{B_r(z_0)}$ y supongamos que sobre $\partial B_r(z_0)$ se cumple que

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|.$$

Entonces f, g no se anulan en $\partial B_r(z_0)$ y

$$N_{B_r(z_0)}(f) = N_{B_r(z_0)}(g).$$

§2.1.3 Puntos críticos. Se le llaman *puntos críticos* de una función diferenciable f a los puntos donde $f'(p) = 0$. Nótese que si $f'(p) \neq 0$, entonces por el teorema de la función inversa, f es biholomorfa en un entorno de p ; por ello sólo nos interesan los puntos críticos. Otra observación es que si f es analítica y no constante, entonces f' es analítica no nula, luego los puntos críticos están aislados.

Teorema 2.15: Sea f analítica no constante en un abierto conexo $A \subseteq \mathbb{C}$. Sea $z_0 \in A$ un punto crítico de f con $w_0 := f(z_0)$, de tal manera que $p := \text{ord}_{z_0}(f - w_0) \geq 2$. Entonces:

1. Existen $\epsilon > 0, \delta > 0$ tal que para todo $w \in B_\epsilon(w_0) \setminus \{w_0\}$, hay exactamente p soluciones de $f(z) = w$ para $z \in B_\delta(z_0)$. Más aún, para cada z, w de esa forma se cumple que $\text{ord}_z(f - w) = 1$.
2. Existe una función analítica g en $B_{\epsilon^{1/p}}(0)$ con $\text{ord}_0(g) = 1$ tal que para todo $w \in B_\epsilon(w_0)$ escrito como

$$w = w_0 + re^{i\theta}, \quad 0 < r < \epsilon, 0 \leq \theta < 2\pi$$

se cumple que todas las soluciones de $f(z) = w$ son de la forma

$$z = z_0 + g\left(r^{1/p} \exp\left(i \cdot \frac{\theta + 2\pi j}{p}\right)\right),$$

con $j = 0, 1, \dots, p-1$.

3. Existe una serie formal de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n$ con radio de convergencia $\geq \epsilon$ tal que para todo $w \in B_\epsilon(w_0)$ las soluciones de $f(z) = w$ vienen dadas por

$$z = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^n, \quad (2.1)$$

donde ζ es alguna de las raíces p -ésimas de $(w - w_0)$.

Revisar mejor los detalles del teorema agudo de Rouché [4 pág. 98].

A dicha serie de potencias se le llama *serie de Puiseux*.

DEMOSTRACIÓN: Por hipótesis, se cumple que $f(z) = (z - z_0)^p q(z)$, donde $q(z_0) \neq 0$ y es analítica cerca de z_0 . Restringamos el dominio a $B_{\delta_1}(z_0)$ de modo que q no se anule allí. Luego, por el teorema 1.59 se cumple que $q = (q_1)^p$ en dicho dominio.

Definiendo $h(z) := (z - z_0)q_1(z)$ notamos que $f(z) - w_0 = h(z)^p$ en $B_{\delta_1}(z_0)$, que h es analítica, que $h(z_0) = 0$ y que $h'(z_0) \neq 0$. Luego, por el teorema de la inyectividad local, podemos volver a restringirnos a $B_\delta(z_0)$ de modo que h es inyectiva, y que por ende es biholomorfa allí. Por lo tanto, $w - w_0 = h(z)^p$ tiene exactamente p soluciones y, más aún, definiendo $g := h^{-1}$ (la inversa local) se obtiene el inciso 2; y el inciso 3 sale de expandir a g cerca de 0 (lo que se puede pues g es holomorfa, luego analítica). \square

Intuitivamente una serie de Puiseux te dice que si tenemos un cero en z_0 de orden p es porque la función holomorfa se ve localmente como $(z - z_0)^p$.

2.2 Residuos y polos

Sea f una función que es holomorfa en $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, pero $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ no existe, i.e., f tiene una singularidad no removible en z_0 . Luego si $1/f$ es holomorfa en un entorno de z_0 debe cumplirse que $1/f(z_0) = 0$, en cuyo caso decimos que z_0 es un **polo** de f y llamamos el **orden** del polo a $\text{ord}_{z_0}(1/f)$.

Definición 2.16: Si f es holomorfa en un entorno reducido de z_0 llamamos su **residuo**, denotado $\text{Res}_{z_0} f$, al coeficiente a_{-1} en la expansión de Laurent en torno a z_0 .

Es claro que si f es holomorfa en z_0 (i.e., z_0 no es un polo), entonces $\text{Res}_{z_0} f = 0$. Si f tiene un polo simple en z_0 , entonces

$$\text{Res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

El caso general es ligeramente más delicado:

Teorema 2.17: Sea f una función holomorfa con un polo de orden m en z_0 , entonces:

$$\text{Res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)).$$

DEMOSTRACIÓN: Basta notar que si f tiene un polo de orden m en z_0 , es porque la función

$$g(z) := (z - z_0)^m f(z),$$

es holomorfa en z_0 . Luego, notamos que g tiene una expansión en serie de Laurent con los términos desfasados respecto a los de f :

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \implies g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n.$$

El coeficiente que deseamos es a_{-1} el cual es el término que acompaña al monomio $(z - z_0)^{m-1}$ en la expansión por serie de Taylor de $g(z)$. Luego se calcula así:

$$a_{-1} = \operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)). \quad \square$$

Teorema 2.18: Sea f una función meromorfa en un abierto conexo $A \subseteq \mathbb{C}$ cuya frontera es una curva cerrada γ diferenciable a trozos. Entonces se cumple que:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{z_0 \in A} \operatorname{Res}_{z_0} f.$$

Nótese que como f sólo puede poseer finitos polos, entonces la sumatoria de la derecha está bien definida.

§2.2.1 Aplicaciones.

Teorema 2.19 (problema de Basilea): Se cumple que

$$\zeta(2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

DEMOSTRACIÓN: Para ello comenzamos considerando la función

$$f(z) := \frac{\cot z}{z^2},$$

la cual tiene polos en todos los $z = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$. Si $n \neq 0$, entonces $z_0 = n\pi$ es un polo simple de f , y en z_0 hay un polo triple (pues $\cot z$ tiene un polo simple en $z_0 = 0$).

Ahora procedemos a calcular los residuos en todos los casos. Si $n \neq 0$, entonces:

$$\operatorname{Res}_{n\pi}(f) = \lim_{z \rightarrow n\pi} (z - n\pi)f(z) = \frac{1}{n^2\pi^2} \lim_{z \rightarrow n\pi} (z - n\pi) \cot(z) = \frac{1}{n^2\pi^2}.$$

Y en cero, podemos emplear la fórmula y ver que $g(z) := z^3 f(z) = z \cos z / \sin z$, luego

$$g'(z) = \cot z - z \csc^2 z,$$

$$g''(z) = -\csc^2 z - \csc^2 z + 2z \csc z \cdot (\cot z \cdot \csc z) = 2 \csc^2 z (z \cot z - 1).$$

Luego, vemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_0(f) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{g''(z)}{2!} = \lim_{z \rightarrow 0} (z \cot z - 1) \csc^2 z = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cos z - \sin z}{\sin^3 z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cancel{\cos z} - z \sin z - \cancel{\cos z}}{3 \sin^2(z) \cos(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-z}{3 \sin z \cos z} = \frac{-1}{3}. \end{aligned}$$

Finalmente vamos a elegir un contorno...

□

APÉNDICE

Índice de notación

$\mathcal{H}(A; \mathbb{C}^m)$	Funciones holomorfas de dominio A y codominio \mathbb{C}^m , p. 5.
H_α	$= \mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} : r \in [0, \infty)\}$, plano complejo sin la semirrecta cerrada de argumento α , p. 9.
\log_α	Rama uniforme del logaritmo sobre $H_\alpha \rightarrow \{x + iy \in \mathbb{C} : y \in (\alpha, \alpha + 2\pi)\}$, p. 9.
\arg_α	$= \text{Im } \log_\alpha$, rama uniforme del argumento, p. 9.
\mathbb{C}^∞	$= \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, la esfera de Riemann, i.e., la compactificación de Alexandroff de \mathbb{C} con los convenios aritméticos usuales sobre ∞ , p. 11.
$\mathbb{C}[[t]]$	Anillo de series formales de potencias con coeficientes en \mathbb{C} , p. 14.
$\text{ord } f$	Orden de una serie formal de potencias, i.e., el mínimo índice de un coeficiente no nulo, p. 15.
$C^{\text{an}}(A)$	Clase de funciones analíticas en un abierto A , p. 19.
$\mathcal{L}^1(\Omega; \mathbb{C})$	Clase de funciones de dominio Ω y codominio \mathbb{C} que son (Lebesgue-)integrables, p. 22.
γ^*	$= \text{Img } \gamma$, la traza de un arco γ , p. 22.
$-\gamma$	Arco opuesto a γ , p. 23.

$\gamma \cup \eta$	Concatenación de dos arcos γ, η que comparten punto final y punto inicial resp., p. 23.
$\ell(\gamma)$	Longitud de un arco diferenciable a trozos γ , p. 23.
$[z, w]$	Segmento (arco continuo) desde z hasta w , p. 24.
$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$	$= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$, integral curvilínea de f a lo largo de un arco diferenciable γ , p. 24.
$\oint_{\gamma} f(z) dz$	$= \int_{\gamma} f(z) dz$, pero enfatizando que γ es una curva cerrada en lugar de un arco cualquiera, p. 24.
$S_{\alpha, \beta}$	$= \{re^{i\theta} : r > 0, \alpha < \theta < \beta\}$, p. 31.
$\text{ord}_{z_0}(f)$	Orden de anulamiento de f en z_0 , p. 44.

Bibliografía

Análisis complejo

1. CASTILLO, C. I. *Funciones de Variable Compleja* <https://www.uv.es/ivorra/Libros/VC.pdf> (2020).
2. KODAIRA, K. *Complex Analysis* (Cambridge University Press, 2007).
3. LANG, S. *Complex Analysis* (Springer-Verlag, 1999).
4. SIMON, B. *Basic Complex Analysis* (American Mathematical Society, 2015).

Libros de autoría propia

5. CUEVAS, J. *Álgebra* <https://github.com/JoseCuevasBtos/apuntes-tex/raw/master/algebra/algebra.pdf> (2022).
6. CUEVAS, J. *Topología y Análisis* <https://github.com/JoseCuevasBtos/apuntes-tex/raw/master/topologia-analisis/topologia-analisis.pdf> (2022).

Índice alfabético

- analítica (función), 18
- arco
 - diferenciable a trozos, 23
- argumento, 8
- biholomorfa (función), 5
- biholomorfos (espacios), 5
- conforme (función), 11
- corona, 31
- curva
 - cerrada, 23
 - de Jordan, 23
 - regular, 10
- determinación
 - del argumento, 44
 - del logaritmo, 44
- ecuaciones
 - de Cauchy-Riemann, 5
- entera (función), 40
- esfera
 - de Riemann, 11
- estrellado (conjunto), 28
- fórmula
 - de Euler, 7
 - integral de Cauchy, 37
- holomorfa (función), 5
- integrable (función), 22
- logaritmo, 8
- polo, 51
- principio
 - del argumento, 46
- punto
 - crítico, 50
- residuo, 51
- serie
 - de Puiseux, 51
- simplemente conexo, 30
 - holomórficamente (s.c.h.), 30
- singularidad, 16
- teorema
 - de Cauchy, 32

de Liouville, 41	del análisis complejo, 39
de Morera, 39	del álgebra, 41
de series de potencias de	transformación
Cauchy, 38	de Möbius, 11
fundamental	triángulo, 26



Lista de tareas pendientes

Citar adecuadamente la ubicación del TFA en mis textos.	14
Justificar mejor la existencia de ésta homotopía.	32
Autocitar adecuadamente el teorema.	44
Revisar mejor los detalles del teorema agudo de Rouché [4, pág. 98]. .	50