¿Qué son los grupos solubles?

José Cuevas Barrientos

Pontificia Universidad Católica de Chile

26 de noviembre de 2021

Motivación

Al estudiar extensiones de cuerpo mediante soluciones a polinomios, Galois encontró una relación entre un grupo (llamado *grupo de Galois*) y la solubilidad del polinomio. A ésta clase de grupos, que estaban relacionados a ecuaciones solubles, los llamo grupos solubles. Así, el famoso problema de la insolubilidad de la quíntica se redujo a notar que el grupo asociado (S_5) no es soluble.

Nota: Existen demostraciones que no dependen de teoría de Galois que prueban la insolubilidad de la quíntica, pero que sí emplean el hecho de que S_5 es no soluble.

El gran resultado que se pretende deducir en la charla es el teorema de Jordan-Hölder que se puede explicar (moviendo las manos) como una analogía a que los grupos son “moléculas” cuyos “átomos” son grupos simples. Ésto también construye una correspondencia entre los grupos simples y los números primos, que se extiende a los misterios que ambos abarcan.

Series subnormales

Una sucesión

$$\{e\} =: G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n := G$$

de subgrupos de G se dice una *serie subnormal* ssi G_i es un subgrupo normal de G_{i+1}.
En una serie subnormal, los términos de la forma G_{i+1}/G_i se llaman los *factores* de la serie. Una serie subnormal se dice *cíclica* o *abeliana* si sus factores lo son respectivamente.

Definición

Un grupo G se dice *soluble* si posee una serie subnormal abeliana.

Definición

Un grupo G se dice *soluble* si posee una serie subnormal abeliana.

Ejemplos.

- Todo grupo abeliano es soluble.

Definición

Un grupo G se dice *soluble* si posee una serie subnormal abeliana.

Ejemplos.

- Todo grupo abeliano es soluble.
- Un grupo simple no-abeliano NO es soluble.

Definición

Un grupo G se dice *soluble* si posee una serie subnormal abeliana.

Ejemplos.

- Todo grupo abeliano es soluble.
- Un grupo simple no-abeliano NO es soluble.
- Los diedrales D_n son solubles, pues

$$\{e\} \lhd \langle r \rangle \lhd D_{2n}$$

  es una serie abeliana.

Definición

Un grupo G se dice *soluble* si posee una serie subnormal abeliana.

Ejemplos.

- Todo grupo abeliano es soluble.
- Un grupo simple no-abeliano NO es soluble.
- Los diedrales D_n son solubles, pues

$$\{e\} \lhd \langle r\rangle \lhd D_{2n}$$

  es una serie abeliana.

- Los cuaterniones Q_8 son solubles, pues $|Q_8| = 8$, $|\langle i\rangle| = |\{1, i, -1, -i\}| = 4$ y así

$$\{e\} \lhd \langle i\rangle \lhd Q_8$$

  es una serie abeliana. (Aplica para Q_{2^n}.)

Teorema

Si G es soluble, y $H \leq G$. Entonces H es soluble.

Teorema

Si G es soluble, y $H \leq G$. Entonces H es soluble.

DEMOSTRACIÓN: Como G es soluble, tomemos la siguiente serie abeliana

$$\{e\} =: G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n := G$$

Luego definiremos $H_i := G_i \cap H$ y notemos que

$$\frac{H_{i+1}}{H_i} = \frac{H_{i+1}}{G_i \cap H_{i+1}} \cong \frac{G_i \cdot H_{i+1}}{G_i} \leq \frac{G_{i+1}}{G_i}$$

Donde hemos empleado el segundo teorema de isomorfismos y donde el factor es abeliano por ser subgrupo de uno abeliano.

Teorema

Si G es soluble, y $H \leq G$. Entonces H es soluble.

DEMOSTRACIÓN: Como G es soluble, tomemos la siguiente serie abeliana

$$\{e\} =: G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n := G$$

Luego definiremos $H_i := G_i \cap H$ y notemos que

$$\frac{H_{i+1}}{H_i} = \frac{H_{i+1}}{G_i \cap H_{i+1}} \cong \frac{G_i \cdot H_{i+1}}{G_i} \leq \frac{G_{i+1}}{G_i}$$

Donde hemos empleado el segundo teorema de isomorfismos y donde el factor es abeliano por ser subgrupo de uno abeliano.

Corolario

A_5 es no-soluble. En consecuencia, para $n \geq 5$ se cumple que A_n y S_n tampoco lo son.

Definición

Una serie subnormal estricta

$$\{e\} =: G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n := G$$

se dice *de composición* si los factores son simples.

Por el teorema de correspondencia es equivalente a exigir que G_i sea normal y maximal en G_{i+1}.

Definición

Una serie subnormal estricta

$$\{e\} =: G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n := G$$

se dice *de composición* si los factores son simples.

Por el teorema de correspondencia es equivalente a exigir que G_i sea normal y maximal en G_{i+1}.

Teorema

Si un grupo finito G posee dos series de composición

$$\{e\} =: G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n := G$$
$$\{e\} =: H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_m := G$$

entonces $n = m$ y los factores H_{i+1}/H_i son isomorfos a G_{i+1}/G_i bajo una permutación.

Demostración. En contexto de las demostración diremos que dos series de composición que satisfacen el enunciado son equivalentes. La demostración es por inducción fuerte sobre la cardinalidad de G. El caso $|G| = 2$ es trivial, ya que el grupo es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ que sólo posee una serie de composición.
Si $G_{n-1} = H_{m-1}$, entonces el problema es trivial, pues, por inducción, toda serie de G_{n-1} son equivalentes.

Si $G_{n-1} \neq H_{m-1}$, entonces como G_{n-1} es normal y $G_{n-1}H_{m-1}$ también y contiene estrictamente a G_{n-1}, entonces $G_{n-1}H_{m-1} = G$. Luego $K := G_{n-1} \cap H_{m-1}$ es normal en ambos y por segundo teorema de isomorfismos satisface que $G_{n-1}/K \cong G/H_{m-1}$ y que $H_{m-1}/K \cong G/G_{n-1}$. Luego si $(K_i)_{i=1}^{p}$ es una serie de composición de K, entonces, podemos reemplazar la serie de G_{n-1} por la de K que satisface que:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & G_{n-1} \arrow[dr, equal] & \\
K_0 \arrow[r, equal] & K_1 \arrow[r, equal] & \cdots \arrow[r, equal] & K_p \arrow[ur, equal] \arrow[dr, equal] & & G \\
 & & & & H_{m-1} \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}
$$

por hipótesis de inducción y lo mismo con las Hs luego las series G_i y H_i son JH-equivalentes con $n = p + 2 = m$, por lo ya señalado. □

Corolario

Son equivalentes:

1. G es soluble.
2. G posee una serie cíclica.
3. G posee una serie de composición cuyos factores son de la forma $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con p primo (pues son simples abelianos).

Teorema

1. Si G es soluble y $N \trianglelefteq G$, entonces G/N es soluble.

Teorema

1. Si G es soluble y $N \trianglelefteq G$, entonces G/N es soluble.
2. Si $N \trianglelefteq G$ tales que N y G/N son solubles, entonces G es soluble.

Más propiedades

Teorema

1. Si G es soluble y $N \trianglelefteq G$, entonces G/N es soluble.
2. Si $N \trianglelefteq G$ tales que N y G/N son solubles, entonces G es soluble.
3. Si $H \trianglelefteq G$ y $K \leq G$ son solubles, entonces HK es soluble.

Más propiedades

Teorema

1. Si G es soluble y $N \trianglelefteq G$, entonces G/N es soluble.
2. Si $N \trianglelefteq G$ tales que N y G/N son solubles, entonces G es soluble.
3. Si $H \trianglelefteq G$ y $K \leq G$ son solubles, entonces HK es soluble.

Demostración.

En el ~~drive~~ informe, principalmente se trata de extender series de composición. $\square$

Teorema

1. Si G es soluble y $N \trianglelefteq G$, entonces G/N es soluble.
2. Si $N \trianglelefteq G$ tales que N y G/N son solubles, entonces G es soluble.
3. Si $H \trianglelefteq G$ y $K \leq G$ son solubles, entonces HK es soluble.

Demostración.

En el ~~drive~~ informe, principalmente se trata de extender series de composición. $\square$

Corolario

A_5 es el primer (bajo orden) grupo no soluble.

Bibliografía

1. Aluffi, P. Algebra. Chapter 0. (American Mathematical Society, 1960).
2. Castillo, C. I. Álgebra. `https://www.uv.es/ivorra/Libros/Al.pdf` (2020).