Topología y Análisis

José Cuevas Barrientos

3 de diciembre de 2023

Índice general

Preámbulo

Pre requisitos. Este libro supone que el lector está familiarizado con la teoría de conjuntos (ultra) básica que es lo que comprende los primeros diez capítulos del libro «Naïve Set Theory» de Paul Halmos o equivalentemente el primer capítulo de mis apuntes de teoría de conjuntos. Algunos ejemplos asumen conocimientos básicos sobre la teoría de ordinales y cardinales, y se recomienda unas lecturas sobre el axioma de elección. Más adelante, se empieza, *in crescendo*, a hacer más enfático y necesario el uso de una cierta dosis de teoría de categorías.

Métodos y objetivos. En mi lectura de textos matemáticos he caído en la conclusión de que hay dos factores inversamente proporcionales: el contenido y la explicación, por ende, si he de elegir, prefiero siempre el primero ante el segundo. Esto no quiere decir que el texto no se explaye bien, sino que en lugar de explicar una definición varias veces asumo que el lector la releerá hasta comprenderla; esto puede dificultar la lectura, pero hace el progreso en ella más placentero. También estoy consciente de que un lector prefiera un libro con hartos ejercicios, en su lugar mi libro sólo otorga demostraciones explícitas para resultados complejos, mientras que para los que no poseen demostración (que son la mayoría por cierto) se asume que el lector tomará cartas en el asunto.

Orden y propósitos. En esta sección se explica a grandes rasgos cuales son los objetivos de cada capítulo así como sus relaciones entre sí:

1. **Números reales:** Se introduce el concepto de los números reales a partir de dos propiedades fundamentales: el orden y la métrica. Orden refiere a su cualidad de corresponder a los números que conforman la recta numérica. Métrica refiere a distancia y a la cualidad de cercanía

entre conjuntos de números. En ambos casos, $\mathbb{R}$ es una forma reducida de "espacio completo" respecto a ciertos requísitos nuestros, además su estructura es única en varios sentidos. El capítulo termina estudiando algunas propiedades de límites y series que ayudan a su construcción rigurosa.

2. **Topología:** Dado que el concepto de límite, y el de continuidad de funciones se traducen en conceptos de "cercanía entre puntos" se define la topología de un conjunto cualquiera que formaliza la noción de estar o no cerca. Se discuten las topologías estándares a espacios métricos y ordenados, así como algunas de sus propiedades. Se discuten los axiomas de separación que hablan acerca de los grados de separabilidad entre dos puntos del espacio. Se termina el capítulo analizando propiedades que se heredan a subespacios (espacios contenidos en otros) y a espacios producto (multiplicación estándar de espacios).

3. **Compacidad:** Motivados por los intervalos cerrados y acotados de los reales, se generalizan en la noción de *compacidad* en espacios topológicos. Para ello se definen los conceptos de filtros y ultrafiltros que serán útiles en ciertas equivalencias a la cualidad de *ser compacto*. Se presentan los resultados del teorema de Tychonoff, así como versiones más débiles y equivalencias al axioma de elección. Luego se revisan los espacios de funciones y teoremas aplicando compacidad. El capítulo finaliza analizando teoremas de metrización y las compactificaciones usuales.

4. **Conexión y espacios vectoriales:** Se comienza por la definición y propiedades básicas de los espacios vectoriales topológicos, así como que los espacios normados son vectoriales. Se continua con la definición de espacio dual, polares, representación y más. Luego, motivados por una idea de separación del espacio se define la cualidad de ser conexo. Se estudian tipos de conexión y se termina por tipos de desconexión.

5. **Derivadas:** Se define el concepto de derivada como la idea de aproximar una función cerca de un punto por una recta. Se estudian reglas usuales de las derivadas, así como la noción de función conexa y convexa. Se estudian aplicaciones usuales de las derivadas: la regla de L'Hôpital para límites y el teorema de Taylor que permite aproximar funciones derivables por polinomios. Se estudia el concepto de integral de Darboux-Riemann y su relación con las derivadas. Se termina por ver una serie de desigualdades clásicas e importantes en matemáticas

que son facilmente deducibles a partir de las nociones de diferenciabilidad.

6. **Derivadas en varias dimensiones:** Se amplia el concepto de derivada para aproximar funciones entre espacios vectoriales reales localmente como funciones lineales.

7. **Teoría de medida e integración:** Se define el concepto de medida, una función que generaliza las nociones geométricas de longitud, área y volumen. Se enseñan métodos teóricos para construir medidas con una aplicación a la medida de Lebesgue. Se construyen los conceptos de función medible e integrable, según Lebesgue. Se demuestran teoremas fundamentales en la teoría de la medida como lo son: el teorema de Fubini y el teorema de cambio de variable.

8. **Introducción a las variedades:** Se define el concepto de variedad topológica y homotopía. Se define el concepto de variedad diferencial como un objeto que posee una estructura topológica (continuidad) y una estructura diferencial; en esencia una variedad diferencial es un espacio que es localmente $\mathbb{R}$-vectorial, de modo que admite derivadas. Se amplían las nociones concretas de espacio tangente y subvariedad a un contexto abstracto.

Introducción

Uno de los temas que más atrae a los jóvenes en matemáticas es el del análisis matemático, aquí apliamos el término para poder referirnos a un análisis que no se restringe exclusivamente a los números reales ni a espacios vectoriales reales, sino que puede generalizarse, y para ello, la topología tiene un rol fundamental. No obstante, hay que cuidarse de que ella es un arma de doble filo, pues si bien está hecha con claros fines analíticos y geométricos, utiliza una base fuerte sobre teoría de conjuntos, que suele criticarse por su abstracción; asimismo, un mal acercamiento a la topología puede generar confusión y tedio debido a que en gran medida suele sentirse como cualquier cosa menos el cálculo con el que uno suele estar familiarizado.

El análisis en general busca características en funciones reales –antes de explicarlos quiero que el lector piense en las funciones no como en el gráfico sino una operación que «mueve» puntos–, que se sintetizan en lo siguiente: puntos que están cerca los unos a los otros luego de moverse se mantienen cerca (continuidad), la «cercanía» vista como una proporción implica que cerca de un punto la función asemeja una línea (diferenciabilidad), si la función es vista como un gráfico, la región inferior puede ser medida (integrabilidad). Cabe destacar que no sólo se espera una intuición tras estas nociones, sino que se busca una interacción entre ellas, eso nos obliga a tomar ciertas restricciones para que todas coexistan.

Uno de los objetivos de éste libro sera tomar estas ideas que conforman un curso inicial de cálculo y generalizarlas. Es claro que la continuidad es un concepto que sólo depende de que se define como «cerca», para lo cual se dedican los capítulos en topología que cumplen dicha finalidad. Sin embargo, la segunda y tercera son definiciones más delicadas que inicialmente dependen fuertemente de propiedades intrínsecas a $\mathbb{R}$; para la diferenciabilidad veremos que se puede generalizar a espacios vectoriales y que en particular funciona en cosas que en regiones pequeñas parecen espacios vectoriales, y para la integrabilidad veremos que se puede generalizar a cualquier conjunto dotado de una «forma de medir», y no sólo eso, sino que veremos cómo construir medidas especiales sobre ciertos espacios de nuestro agrado (ésto incluye a $\mathbb{R}$ y a sus espacios vectoriales, pero sorprendentemente, también a los grupos topológicos localmente compactos).

Sobre la forma de pensar topológicamente. (Este ejercicio asume familiaridad con la noción real de límite.) Sabemos que algo del estilo de $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se describe analíticamente como

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ (0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon).$$

Que se lee como que cerca de a la función toma valores cerca de L. El ϵ es indispensable, por que subjetivamente podríamos decir que si las imágenes están cerca de 1 también lo están de 1,1 o de 1,01, pero queremos darnos el lujo de hablar con unicidad; el ϵ nos dice que las imágenes se acercan lo más posible a L.

Si utilizamos una función distancia de la forma $d(x, y) := |x-y|$, entonces podemos describir el límite como

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ (0 < d(x, a) < \delta \implies d(f(x), L) < \epsilon).$$

Esta definición es mejor porque ahora sólo se requiere que exista una función distancia como la que propusimos. Pero se puede mejorar aún más: considere que

$$B_r(p) := \{x : d(x, p) < r\}.$$

Lo que se lee como "bola de radio r y centro p". Mediante este objeto nos queda la definición de límite como

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ (x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \implies f(x) \in B_\epsilon(L)).$$

Donde aquí la definición sólo requiere de definir que significa $B_r(p)$ en un espacio. De hecho podemos erradicar una implicancia escribiendo el enredo como

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ (B_\delta(a) \setminus \{a\} \subseteq f^{-1}[B_\epsilon(L)]).$$

Pero notemos por última y final vez que podemos eliminar los cuantificadores, el uso del ϵ y el δ, y decir que lo de arriba se aplica para U_a, V_L donde U_a, V_L es cualquier conjunto formado a partir de uniones de bolas. Y aquí es donde podemos incluso prescindir de las bolas, pues podríamos definir de antemano una familia de conjuntos convenientemente llamados *básicos* y decir que se aplica para uniones de básicos. Podemos llamar *abiertos* a los conjuntos formados a partir de uniones de básicos, y entonces decimos que $f(a)$ está cerca de L diciendo que para todo abierto V_L que contiene a L, existe un abierto U_a que contiene a a tal que

$$U_a \setminus \{a\} \subseteq f^{-1}[V_L].$$

Esta es la magia de la topología. Y aquí sólo basta definir una familia de básicos para que podamos pensar en continuidad en dicho espacio.

Usualmente las definiciones topológicas suelen ser bastante más abstractas y más difíciles de visualizar, pero son más potentes y permiten generalizar bastantes resultados del cálculo real. Un ejemplo es ver como, en contexto de los espacios conexos, un resultado como el teorema de los valores intermedios resulta casi trivial.

Sobre el axioma de elección (AE)

¿Por qué es un axioma? Es difícil entender por qué debemos introducir un axioma para emplear un argumento tan común. ¿Acaso no se nos permite elegir elementos cuando un conjunto es no vacío? Pues en verdad no es tan simple como eso. Al elegir un elemento aleatorio, lo que estamos haciendo lógicamente es algo así:

$$A \neq \varnothing \implies \exists x \, (x \in A \land \dots)$$

Lo cual se identifica por la introducción de un cuantificador del cual eventualmente se concluye algo como $\exists x \, (x \in A \land \phi(x))$ (existe un elemento de A que cumple $\phi(x)$). Podemos seguir empleando y metiendo cuantificadores tantas (finitas) veces como se quiera, y matemáticamente el argumento sigue siendo válido, no obstante que ocurre si tenemos una familia infinita de conjuntos $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, entonces el argumento se vería algo así:

$$\exists x_0 \in A_0 \, (\exists x_1 \in A_1 \, (\exists x_2 \in A_2 \, (\dots)))$$

Lo cuál tiene toda la pinta de no ser válido, pues en esencia utilizaría infinitos signos. Otro detalle es que tampoco podemos usar un argumento inductivo para concluir que se puede extraer una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de términos correspondientes a cada conjunto. En dicho caso, la inducción sólo nos permite concluir que se puede extraer una sucesión finita que lo satisfaga, no infinita, y es que las elecciones infinitas son la parte que se asume en el AE.

¿Cuándo es válido tomar infinitas elecciones? Otra forma de verlo es que un par (x_0, x_1) de A_0 y A_1 resp. es, en efecto, un par ordenado que es un elemento del conjunto. Con esto es fácil concluir que el problemas de las infinitas (en particular numerables) elecciones se reduce a buscar un elemento:

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) \in \prod_{i=0}^{\infty} A_i$$

Y esto ***debe*** ser válido, ¿no? Nuevamente no lo es. Y eso es porque, de ser posible, podríamos extraer una sucesión de términos distintos dos a dos en un conjunto infinito cualquiera. ¿Y eso qué tiene de malo? Esto es equivalente a considerar que existe un elemento **primero**, un elemento **segundo**, un elemento **tercero** y así dentro de un conjunto arbitrario. Aquí es importante tomar en cuenta una de las descripciones más honestas sobre la teoría de conjuntos: "los conjuntos son objetos amorfos". Lo que significa que, al referirse a *un conjunto arbitrario*, la frase es tan completa como suena: los conjuntos arbitrarios no poseen ninguna característica distintiva, y mucho menos un *buen orden*.

No obstante, hay conjuntos que no son amorfos del todo y los cuales conocemos muy bien, especialmente por su orden: los naturales. Los naturales poseen esta característica, luego expresiones como *extraer inductivamente elementos de un subconjunto natural* están justificadas. Asimismo, conjuntos equipotentes a los naturales también tienen éstas facultades como lo son: los enteros y los racionales.

Distintos tipos de elecciones. Como vimos el axioma de elección está fuertemente ligado a la característica de un conjunto de estar bien ordenado, pero en general, la proposición es ***muy*** fuerte, en el sentido de que al aceptar el axioma de elección de forma general ocurren cosas muy extrañas como la conocida paradoja de Banach-Tarski. Por ello varios matemáticos rechazan su uso, sin embargo, pueden aceptar el uso de versiones más débiles que el axioma de elección para demostrar alguna proposición. La versión más conocida de esto es el **axioma de elecciones numerables** (AEN) que nos dice que entre numerables conjuntos no vacíos podemos extraer una sucesión de elementos de ellos. Como se detalla en el libro, los usos más comunes de AEN es en los temas que involucran sucesiones. También hay otras versiones más débiles del axioma de elección, pero no voy a entrar en tanto detalle, y cuando lo haga siempre pondré énfasis en su uso y se hará de manera opcional respecto de la lectura general.

0.1 Historia de la topología general

Se le suele llamar topología general, o topología de los puntos, o topología conjuntista, al estudio primitivo de los espacios topológicos casi sin restricción, es decir, a casi todo lo involucrado en la primera parte del libro; ésto se hace con el propósito de distinguirlo de la topología algebraica (que principalmente se encarga del estudio de las variedades topológicas mediante invariantes algebraicos como los grupos fundamentales, o las clases de homologías) y de la topología diferencial (que se encarga del estudio de las variedades diferenciales y las funciones diferenciables entre ellas).

La topología general fue inventada por Felix Hausdorff en 1914, y en ella introdujo formalmente las nociones de «entorno», «abierto» y «componentes conexas», basándose en la noción previa de conexión dada por Jordan en 1893. Una de las ideas de la filosofía de Hausdorff respecto a la conexión es la de comparar las funciones continuas desde un espacio X a otro espacio E, contenido en alguna clase $\mathcal{E}$, y ver que sea necesariamente constante. Si $\mathcal{E} = \{D(2)\}$ entonces obtenemos la conexión en sentido usual, pero eligiendo otras clases se llegan a distintas nociones de conexión, estudiadas principalmente por los analistas.

Previo a Hausdorff, varios matemáticos se habían acercado a la noción de topología especialmente motivados por el análisis matemático (de hecho, a la misma disciplina se le llamada *Analysis Situs*). En 1895, Poincaré realiza las preguntas acerca de qué clase de funciones preservaban las ideas de cercanía con lo que llega a una definición de difeomorfismo; en su momento, uno de los espacios que motivaban el estudio de Poincaré en los espacios de Riemann definidos en un *memoire* datado en 1854.

Hausdorff enfatizaba la noción de metrizabilidad, pero progresivamente otros matemáticos (como Tietze y Vietoris) fueron descubriendo que podían sustituirse las hipótesis y debilitar los axiomas de numerabilidad por nuevos axiomas de separación en los años veinte. La invención de los espacios normales y el teorema de extensión de Tietze servirían como punto de partida para los trabajos de Urysohn sobre la caracterización de espacios normales. Vietoris, en 1921, introduciría el concepto que hoy conocemos como las redes (no tratado en éste libro), que serviría para la definición de convergencia de filtros por Birkhoff en 1935. No sólo eso, sino que Vietoris también daría la definición actual de compacidad en el mismo artículo (su caracterización por convergencia de filtros) y demostraría, en términos contemporáneos, que «espacios compactos de Hausdorff son normales».

Moore impulsaría la idea de fundamentar la topología en el lenguaje de la teoría de conjuntos, y varios de los problemas que trataría entre los años treinta y cuarenta se volverían piedras angulares para los fundamentos lógicos de las matemáticas; estudiantes de su escuela incluyen a Bing, Moise, Halmos, Rudin y Whyburn. Moore escribiría un libro sobre los fundamentos de la topología general en 1962 que, según Arhangel'skiĭ, sigue siendo relevante en la actualidad.

Entre una de las definiciones de Moore se incluye la de un espacio de Moore.[1] En 1935, Jones se pregunta si es que todo espacio de Moore que es normal es metrizable, luego conocido como la *conjetura de Jones*. La intuición detrás de la conjetura radica en que se conocían contraejemplos si se debilitiban las hipótesis de separabilidad, pero que indirectamente, los cubrimientos en la definición de espacio de Moore se comportan como las bolas radio $1/n$. La respuesta tomaría bastante tiempo en llegar, y en el entretiempo se vería que de hecho depende de los axiomas elegidos (la respuesta es afirmativa bajo la hipótesis del continuo), pero lo más concluyente es el llamado teorema de metrización de Bing que señala que un espacio normal de Moore es metrizable syss es completamente normal. Para su pregunta, Jones les presentó a sus alumnos, de manera informal, un contraejemplo intuitivo que se describe como «el espacio de caminos de Jones» el cual consiste de un espacio contenido en un plano bidimensional sin borde descrito como:

> Primero, dos caminos (sin borde) se bifurcan y avanzan unos cuantos metros; luego se vuelven a bifurcar y avanzan otros cuantos metros y así sucesivamente... Hasta llegar al borde del plano, éstos no se detienen y siguen (sin bifurcarse) otros cuantos metros.

Si bien el ejemplo sería expuesto en palabras entre los años treinta y cuarenta, no sería sino hasta 1965 que Jones lograría formalizar su contraejemplo. La idea de Jones se corresponde con un objeto, en la teoría combinatorial de conjuntos, descrito como el *árbol de Aronszajn*. Fleissner probó en 1975, que si se asume el axioma de Martin y la negación de la hipótesis del continuo, el árbol de Aronszajn es un contraejemplo a la conjetura de Jones.

Ahora damos un largo desvío a la historia de la topología en Japón. Morita, quien previamente había estado más relacionado a la teoría de anillos no conmutativos, era uno de los pocos especialistas en topología de Japón y terminó por fundar una escuela de topología en la Universidad de Educación de Tokyo (más tarde llamada Universidad de Tsukuba), la cuál formó

[1] Un espacio regular tal que existe una sucesión $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de cubrimientos por abiertos que satisface que para todo entorno U de un punto P existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup\{V \in \mathcal{G}_n : p \in V\} \subseteq U$.

a la gran mayoría de topólogos nipones competentes de la época, curiosamente exceptuando a Jun-iti Nagata (¡no confundir con el algebrista Masayoshi Nagata!). Nagata aprendió topología por su propia cuenta del libro de Alexandroff-Hopf y luego trabajó en los EEUU. y en Holanda. En 1950, Nagata reavivó la investigación acerca de los espacios metrizables con su teorema de Nagata-Smirnov (demostrado independientemente por Smirnov en 1951). Morita y el resto de matemáticos por aquel entonces comenzaron a re-estudiar condiciones de metrizabilidad, principalmente enfocados en sus aplicaciones a la teoría topológica de la dimensión.

Un par de anécdotas curiosas para complementar el repaso histórico:

- En 1908, Bernstein construyó un ejemplo de un subconjunto de $\mathbb{R}$ no numerable cuyos subconjuntos son todos no-perfectos.[2] En 1920, basado en los conjuntos de Bernstein, Sierpiński hizo lo mismo con el plano, pero lo hizo en un pie de página, lo cual terminó siendo la parte más citada del artículo, y dio a lugar una técnica particular para construir contraejemplos en topología.

- Hausdorff y su esposa (Charlotte Goldschmidt) eran judíos y el ascenso del partido nazi los obligó a mudarse y trabajar (y publicar) en Varsovia, Polonia hasta noviembre de 1938. En ese mes, Goebbels organizó una redada contra la minoría judía los días 9 y 10. Aquella noche, los Hausdorff's fueron molestados a mitad de la noche y la hija de Felix, Leonore König, dice que los oficiales exclamaron:

  > Allí está, el Rabbi Jefe. Mirad. Os vamos a mandar a Madagascar, donde podeís enseñar matemáticas a los monos.

  Finalmente, fueron mandados a un campo de concentración en enero de 1942, del que sólo su hija logró escapar.

- Zariski no fue el autor de la topología de Zariski, sino que le fue sugerida luego de un coloquio en Princeton en 1941 por Chevalley y Turkey. El problema era que una de sus demostraciones en geometría algebraica requería trabajar en un espacio compacto [**stone:topologists_40s**].

Año	**Suceso**	**Fuente**
1893	Definición de conexión.	Camille Jordan. *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique.*

[2]Un conjunto se dice *perfecto* si es cerrado y no contiene puntos aislados.

Año	**Suceso**	**Fuente**
1895	Acercamiento a la definición de homeomorfismo/difeomorfismo.	Henri Poincaré. *Analysis Situs.*
1911	Primer teorema de invarianza de dimensión.	L. E. J. Brouwer. *Beweis der invarianz der dimensionenzahl.*
1914	Definición de espacio topológico. Definición de componentes conexas y cuasicomponentes.	Felix Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre.*
1921		Bronisław Knaster y Kazimierz Kutarowski. *Sur les ensembles connexes.*
	Generalización de las sucesiones a la convergencia de conjuntos dirigidos y a las redes. Definición contemporánea de compacidad.	Leopold Vietoris. *Stetige Mengen.*
1922	Definición de espacios normales y completamente normales.	Heinrich Tietze. *Uber ein Beispiel von L. Vietoris zu den Hausdorffschen Umgebungsaxiomen.*
1935	Convergencia de (bases de) filtros.	George Birkhoff. *A new definition of limit.*
	Conjetura de Jones: todo espacio normal de Moore es metrizable.	Floyd Burton Jones. *Concerning normal and completely normal spaces.*
1937	Espacios uniformes.	André Weil. *Sur les espaces á structure uniforme et sur la topologie genérale.*
1950	Teorema de metrizabilidad de Nagata-Smirnov.	Jun-iti Nagata. *On a necessary and sufficient condition of metrizability.*
1951	Teorema de metrizabilidad de Bing. Tratamiento de la conjetura de Jones.	R. H. Bing. *Metrization of topological spaces.*
	Teorema de metrizabilidad de Nagata-Smirnov.	Yuriĭ M. Smirnov. *A necessary and sufficient condition for metrizability of a topological space.*

Parte I.

Introducción a la Topología

1

Números reales y sucesiones

$\mathbb{R}$ es un conjunto numérico bastante especial por muchas razones, pero principalmente goza de dos caracterizaciones fundamentales: $\mathbb{R}$ como espacio métrico y como espacio linealmente ordenado. A la hora de ver topología veremos por qué éstas dos características se complementan y más específicamente que propiedades son las que otorga cada una a $\mathbb{R}$, pero el lector debe siempre pensar en $\mathbb{R}$ como un conjunto de números que es unidimensional o donde sus elementos yacen en una recta (i.e., linealmente ordenado) y como una estructura algebraica (i.e., cuerpo métrico, con distancias); eso sumado a una caracterización de completitud respecto a ambos sentidos. Por ejemplo $\mathbb{Q}$ está ordenado, pero no es completo; y $\mathbb{C}$ es incluso más completo que $\mathbb{R}$, pero no está ordenado.

1.1 Construcción basada en el orden

Para esto recordamos ciertas definiciones que teníamos sobre conjuntos ordenados:

Definición 1.1 – *Intervalos y conjunto denso*: Se definen los intervalos sobre un conjunto linealmente ordenado $(X, \leq)$ dado como:

$$(a, b) := \{x : a < x < b\} \qquad [a, b] := \{x : a \leq x \leq b\}$$
$$[a, b) := \{x : a \leq x < b\} \qquad (a, b] := \{x : a < x \leq b\}$$

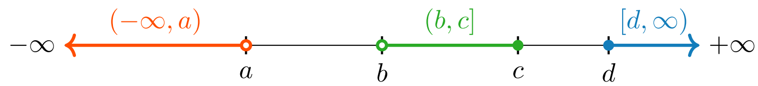


Figura 1.1. Diagramas de intervalos.

$$(a,\infty) := \{x : a < x\} \qquad [a,\infty) := \{x : a \le x\}$$
$$(-\infty,b) := \{x : x < b\} \qquad (-\infty,b] := \{x : x \le b\}$$

Los intervalos $(a,b),(a,\infty)$ y $(-\infty,b)$ se dicen *abiertos*; los intervalos $[a,b],[a,\infty)$ y $(-\infty,b]$ se dicen *cerrados*. Los símbolos "$\pm\infty$" son puramente de notación, a menos que el conjunto posea máximo y mínimo, en cuyo caso $\pm\infty$ les representa. En general si denotamos un intervalo (a,b) se asume de antemano que $a < b$, así que nos permitiremos obviar ese detalle, por ende, cosas como (a,a) o $[a,a]$ se dicen intervalos triviales.

Se dice también que es denso si todo intervalo abierto no-trivial es no vacío. Decimos que D es un subconjunto denso (en orden) de X si todo intervalo abierto posee elementos de D. X se dice no acotado (a secas) si no posee máximo ni mínimo.

Como los conjuntos son linealmente ordenados podemos dibujarles como rectas y los intervalos vendrían a ser secciones de dichas rectas. Si un intervalo incluye a un extremo, tal será pintado con un punto coloreado, si le excluye, se pintará con un punto blanco.

Los morfismos entre conjuntos ordenados son los que preservan orden inclusivo (i.e., $x \le y$ implica $f(x) \le f(y)$). También se dice que una estructura es única bajo isomorfismos, si cualesquiera dos estructuras que comparten dichas propiedades son isomorfas.

Para los teoremas posteriores llamaremos a un par ordenado (A,B) un *corte de Dedekind* si resulta ser una partición estricta[1] de X y A es una sección inicial no-trivial[2] de X.

Teorema 1.2: En un conjunto linealmente ordenado X son equivalentes:

1. Todo subconjunto no vacío acotado superiormente posee supremo (axioma del supremo).

2. Todo subconjunto no vacío acotado inferiormente posee ínfimo.

[1] Esto es, si $A \cup B = X$ y $A \cap B = \varnothing$.
[2] Esto es, si para todo $a \in A$ y $b < a$ entonces $b \in A$. Y $A \notin \{\varnothing, X\}$.

3. Un subconjunto $I \subseteq X$ cumple que
$$\forall a, b \in I; x \in X \ (a < x < b \implies x \in I)$$
syss es un intervalo.

4. Si (A, B) es un corte de Dedekind, entonces A o B posee máximo o mínimo resp.

Demostración: 1) $\iff$ 2). Sea A no vacío y acotado inferiormente. Entonces definimos B como el conjunto de cotas inferiores de A, el que por definición es no vacío y está acotado superiormente por cualquier elemento de A. Luego basta probar que $\sup B = \inf A$. Notemos que $\sup B$ es cota inferior de A por ser la mínima cota superior de B, y es obvio que es la mayor de las cotas inferiores (pues es mayor o igual que todo elemento de B). La otra implicancia es análoga.

1) $\implies$ 3). Es claro que todo intervalo cumple con lo pedido. Notemos que si $I = X$ o $I = \varnothing$ entonces es trivialmente un intervalo. Si sólo está acotado superiormente, entonces posee supremo b, luego probaremos que $(-\infty, b) \subseteq I \subseteq (-\infty, b]$.

Si $x \in (-\infty, b)$, como I no posee cota inferior, entonces existe $a \in I$ tal que $a < x$, y como $x < b$ entonces no puede ser cota superior de I, ergo existe $c \in I$ tal que $a < x < c$, por lo que $x \in I$. La otra inclusión es análoga ya que sólo cambia que $b \in I$. El resto de casos también.

3) $\implies$ 4). Es fácil ver que A, B satisfacen las condiciones de la propiedad 3), ergo son intervalos, y como A es una sección inicial no-vacía se cumple que no es acotado inferiormente, pero como no es X entonces debe ser un intervalo de la forma $(-\infty, m)$ o $(-\infty, m]$ (pues algún elemento de B ha de ser cota superior). Algo análogo pasa con B que ha de ser $(m, +\infty)$ o $[m, +\infty)$. $m \in X$ así que $m \in A$ o $m \in B$, que resulta ser máximo de A o mínimo de B.

4) $\implies$ 1). Sea S no vacío acotado superiormente, entonces llamemos B al conjunto de sus cotas superiores y $A := B^c$, luego (A, B) resulta ser un corte de Dedekind, por lo que alguno posee máximo o mínimo m. Sabemos que $m = \inf B$. Probaremos que m es cota superior de S. Sea $x \in S$, como $b \in B$ es cota superior, entonces $x \leq b$ para todo $b \in B$, ergo, x es cota inferior de B, luego por maximalidad del ínfimo, se cumple que $x \leq m$, luego m es cota superior de S y pertenece a B, por lo que es el mínimo de B, y el mínimo de las cotas superiores de S es, por definición, su supremo. □

Definición 1.3: Decimos que un conjunto linealmente ordenado es *com-*

pleto si satisface cualquiera (y por ende todas) de las propiedades del teorema anterior.

Teorema 1.4: Se cumple:

1. Hay un único conjunto linealmente ordenado, numerable, denso y no acotado bajo isomorfismos.

2. Hay un único conjunto linealmente ordenado completo no acotado que contiene un subconjunto denso numerable bajo isomorfismos.

Demostración:

1. El isomorfismo de orden se realiza por recursión siguiendo un procedimiento similar: Sean $\{P_0, P_1, P_2, \dots\}$ y $\{Q_0, Q_1, Q_2, \dots\}$ los conjuntos ordenados. Definamos $f(P_0) = Q_0$ y $f(P_1)$ va así: si $P_1 > P_0$ entonces $f(P_1)$ es el primer Q_{n_1} tal que $Q_n > Q_0$ o viceversa. En general vemos en qué intervalo cae P_m y buscamos el primer Q_{n_m} tal que caiga en el mismo intervalo.

   Es claro que f es un monomorfismo de orden, pero no queda claro si es suprayectivo. Por lo tanto supongamos que hubieran Q_n's sin preimagen y sea Q_k el primero de ellos. Luego $Q_k \in (Q_{k_-}, Q_{k_+})$ donde $Q_{k_\pm}$ son los puntos de índice máximo tal que se cumple la condición anterior, admitiéndose también que si no existiera alguno de ellos se reemplaza por $\pm\infty$ resp. Luego por minimalidad de los índices se cumple que Q_k debería tener preimagen, lo que constituye la contradicción.

2. Sean R_1, R_2 dos conjuntos con éstas características, entonces sus subconjuntos densos, denotemoslos D_1 y D_2 resp., son orden-isomorfos por el ítem anterior así pues sea $f : D_1 \to D_2$ el orden-isomorfismo entre ambas. Luego definamos $\overline{f} : R_1 \to R_2$ definido así:

   $$\overline{f}(x) := \sup\{f(d) : d \leq x \wedge d \in D_1\}$$

   Y veamos que $\overline{f}$ es un orden-isomorfismo.

   i) <u>$\overline{f}$ es un morfismo de orden inyectivo:</u> Sean $x, y \in R_1$, sin perdida de generalidad $x < y$ así pues, por definición de denso, existe $z \in (x, y)$ que $z \in D_1$, luego

   $$\overline{f}(x) < f(z) < \overline{f}(y)$$

   donde las desigualdades estrictas vienen dadas de que existen puntos en (x, z) y (z, y).

II) $\overline{f}$ es suprayectiva: Sea $x \in R_2$ basta notar que $x = \sup\{d : d < x \wedge d \in D_2\} =: \sup S$. Claramente x es cota superior de S y es ínfimo pues para todo $y < x$ se cumple, por densidad, que existe $d \in (y, x)$, luego $y < \sup S$. □

Este teorema es muy importante, pues $(\mathbb{Q}, \leq)$ es un conjunto conocido que satisface la primera propiedad, es decir, cualquier otra estructura que cumpla dichas características es equivalente a $\mathbb{Q}$; y la segunda propiedad describe a $\mathbb{R}$, y también señala equivalencia. Esto es otra forma de decir que la recta numérica real es completa para lo que necesitamos, o que con $\mathbb{R}$ ya no nos "faltan" números en la recta.

Teorema 1.5: Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado denso y no acotado. Entonces existe $(C, \preceq)$ totalmente ordenado no acotado completo tal que posee un subconjunto D orden-isomorfo a X que es denso en C.

DEMOSTRACIÓN: Sea C el conjunto de los cortes de Dedekind de X, donde si $(A, B) \in C$ se cumple que A no posee máximo, entonces definimos $(A_1, B_1) \preceq (A_2, B_2)$ syss $A_1 \subseteq A_2$. Probemos ahora que es completo: Sea Y un conjunto de elementos de C, entonces definimos

$$S := \left(\bigcup_{(A,B) \in Y} A, \bigcap_{(A,B) \in Y} B \right).$$

Sabemos que $\bigcup_{(A,B)\in Y} A$ es el supremo de $\pi_1[Y]$, sólo basta ver que $S \in C$, lo cuál se hereda del hecho de que la unión de secciones iniciales es una sección inicial. Finalmente notemos que $\iota : X \to C$ definido como $\iota(x) = \big(\{y : y < x\}, \{y : x \leq y\}\big)$ es evidentemente un monomorfismo de orden (por cualidad de ser denso), luego $D := \iota[X]$ satisface ser el conjunto del enunciado; sólo basta notar que sea denso en C. □

Definición 1.6: Definimos $\mathbb{R}$, también llamado conjunto de los "números reales", como la extensión de $\mathbb{Q}$ basada en el teorema anterior.

Notemos que esto es equivalente a decir que $\mathbb{R}$ es la mínima extensión de $\mathbb{Q}$ que cumple el axioma del supremo, que es como varios otros libros lo definen.

1.2 Construcción analítica

El método anterior define el conjunto de los reales respecto al orden y esto es particularmente placentero visualmente pues equivale a ver que $\mathbb{R}$ es el conjunto de todos los números que representan puntos de la recta numérica; no obstante, no es muy sencillo probar que la estructura algebraica de $\mathbb{Q}$ (las propiedades de *cuerpo*) se conservan. Para esto debemos introducir un par de nuevos conceptos propios del análisis matemático.

Definición 1.7 (Anillo ordenado arquimediano): Un anillo unitario ordenado $(R, +, \cdot, \leq)$ se dice *arquimediano* si satisface con la propiedad de arquímedes: Para todo $r \in R$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r < \phi(n)$ donde $\phi(n) := \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n}$ donde 1 es el neutro multiplicativo de R. En general obviaremos la parte de ordenado y unitario (en caso de ser anillo) ya que están implícitas en la definición de arquimediano.

Es claro que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo arquimediano, la idea es poder definir $\mathbb{R}$ de modo que sea también un cuerpo arquimediano. Desde aquí en adelante R representará un anillo arquimediano.

Definición 1.8 – *Función valor absoluto*: En R se define el *valor absoluto* $|\,| : R \to R^+ \cup \{0\}$ así:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Teorema 1.9: Sean $x, a \in R$, son equivalentes:

1. $-a \leq x \leq a$.
2. $x \leq a \wedge -x \leq a$.
3. $|x| \leq a$.

Proposición 1.10: Sean $x, y \in R$, se cumple:

a) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

b) $|xy| = |x|\,|y|$.

Definición 1.11 – *Norma y distancia*: Sea un espacio vectorial V de un anillo arquimediano A. Una norma $\| \, \| : V \to R$ es una aplicación que satisface los siguientes axiomas para $u, v \in V$ y $\alpha \in A$:

(1) $\|u\| = 0$ syss $u = 0$.

(2) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualdad triangular).

(3) $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$.

Dado un espacio M, una aplicación $d : M \times M \to [0, +\infty)$ es una *pseudo-métrica* si satisface los siguientes axiomas para $x, y \in M$:

(1) $d(x, x) = 0$.

(2) $d(x, y) = d(y, x)$.

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad triangular).

Diremos que x, y distintos son *distinguibles* si $d(x, y) \neq 0$. Si x, y no son distinguibles entonces se dice que son *indistinguibles*. Un par (M, d) se dice un *espacio pseudo-métrico*. Si M es pseudo-métrico y no posee puntos indistinguibles, entonces d se dice una *métrica* y M un *espacio métrico*.

Un espacio vectorial dotado de una norma se dice un *espacio normado*. Notemos que en un espacio normado podemos definir la distancia como $d(x, y) = \|x - y\|$ la cual llamamos distancia inducida por la norma.

También denotamos las *bolas abiertas* y *cerradas* como

$$B_r(x) := \{y : d(x, y) < r\}, \quad B'_r(x) := \{y : d(x, y) \leq r\}$$

respectivamente.

Decimos que una aplicación $f : M \to M'$ entre dos espacios métricos es una *isometría*[a] o es *isométrica* si conserva las distancias, i.e:

$$d(x, y) = d'(f(x), f(y)).$$

Dos espacios métricos se dicen *isométricos* si existe una isometría biyectiva entre ambos.

[a]gr. ἴσος: igual, μέτρον: medida.

Desde ahora en adelante convenimos que $\mathbb{M}$ representa un espacio pseudométrico, $\overline{\mathbb{M}}$ un espacio métrico y $\mathbb{K}$ un cuerpo normado.

Ejemplo (norma L_p). Es usual, al tomar $\mathbb{R}^n$ considerar la norma

$$\|\boldsymbol{v}\|_2 := \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + \cdots + |v_n|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}$$

donde $v_i = \pi_i(\boldsymbol{v})$. Y por otro lado, es también conocida la norma taxi[3] definida por

$$\|\boldsymbol{v}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

Así se generaliza a que la norma L_p sea

$$\|\boldsymbol{v}\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p}$$

Que efectivamente cumple ser una norma con $p > 1$, la desigualdad triangular en la norma L_p se le dice *desigualdad de Minkowski* y se demuestra en la sección §6.5, no obstante, los casos enteros son perfectamente demostrables y quedan de ejercicios para el lector. Asimismo, se define la norma L_∞

$$\|\boldsymbol{v}\|_\infty := \max\{v_i : 1 \le i \le n\}.$$

La norma L_2 se le suele decir euclídea, y a $\mathbb{R}^n$ con la norma L_2 se le dice un *espacio euclídeo*.

Proposición 1.12: En $\mathbb{K}$:

a) $\|x\| - \|y\| \le \big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\|$.

b) $\|x - z\| \le \|x - y\| + \|y - z\|$.

Además, la función valor absoluto en todo anillo arquimediano es una norma; ergo todo anillo arquimediano puede ser un espacio normado y métrico.

Pista: Usar desigualdad triangular. □

Proposición 1.13: Dos puntos u, v de $\mathbb{M}$ son indistinguibles syss $d(u, x) = d(v, x)$ para todo $x \in \mathbb{M}$.

[3] El nombre se le da pues aquí las distancias se miden de la misma manera que lo hacen las "cuadras" en una ciudad.

Teorema 1.14: Todo espacio pseudo-métrico $\mathbb{M}$ puede restringirse a un espacio métrico $\overline{\mathbb{M}}$. Esto es, existe $\overline{\mathbb{M}}$ tal que existe una isometría suprayectiva $\pi : \mathbb{M} \to \overline{\mathbb{M}}$.

Demostración: Se define $\sim$ una relación sobre $\mathbb{M}$ tal que $x \sim y$ si son indistinguibles. Se cumple que $\sim$ es de equivalencia (¿por qué?). Luego se define $\overline{\mathbb{M}} := \mathbb{M}/\sim$. Finalmente se define la aplicación d' sobre $\overline{\mathbb{M}}$ como $d'([x],[y]) = d(x,y)$ que resulta ser una métrica sobre $\overline{\mathbb{M}}$. Es claro que $\pi(x) = [x]$ es una isometría suprayectiva. □

Definición 1.15 – *Sucesiones, límites y etc.*: Una sucesión es una función $s : \mathbb{N} \to X$ donde en lugar de denotar $s(n)$ convenimos a denotar s_n. Usualmente se abrevian como $(s_n)_{n=0}^{\infty}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o $(s_n)_n$ cuando no haya ambigüedad.

Decimos que una sucesión sobre $\mathbb{M}$ es *convergente* a un límite L si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ natural se cumple que $s_n \in B_\epsilon(L)$, en cuyo caso denotamos $s_n \to L$. Si una sucesión es convergente y su límite es único le denotamos $\lim_n s_n$. Si una sucesión no es convergente se dice divergente.

Se dice que una sucesión sobre R "converge a infinito" (pese a ser un tipo de divergencia) si para todo $C > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ natural se cumple que $C < s_n$, en cuyo caso denotamos $\lim_n s_n = +\infty$. Así mismo decimos que s_n converge a $-\infty$ si $-s_n \to \infty$. Algunos textos admiten que se escriba $\lim_n s_n = \infty$ si $(s_n)_n$ no está acotado.

Decimos que una sucesión sobre $\mathbb{M}$ es de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$ naturales se cumple que $s_m \in B_\epsilon(s_n)$. Una sucesión en R es *creciente* (resp. *decreciente*) si para todo $i < j$ naturales se da que $s_i \leq s_j$ (resp. $s_i \geq s_j$). Se le añade el prefijo *estricto* si es inyectiva como función (i.e., si todos sus términos son distintos). Una sucesión es *monótona* si es creciente o decreciente.

A ver, vamos a re analizar los conceptos definidos: una sucesión es *convergente* a un número L llamado límite si sus términos están eventual y arbitrariamente cerca de dicho límite. Una sucesión es de Cauchy si sus términos están eventual y arbitrariamente cerca los unos de los otros.

En general una sucesión sobre un anillo arquimediano usara la métrica inducida por la norma dada por la función valor absoluto.

Definición 1.16 – *Conjunto acotado*: En $\mathbb{M}$ se dice que un conjunto A es *acotado* si las distancias entre sus puntos lo son. Se define el diámetro de dicho conjunto

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Además se define la distancia entre conjuntos como

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\},$$

y la distancia punto-conjunto como

$$d(x, A) := d(\{x\}, A).$$

Proposición 1.17: En $\mathbb{M}$ están acotados:

1. Los conjuntos finitos.
2. Las bolas, tanto abiertas como cerradas.
3. La unión finita de acotados.
4. La intersección arbitraria (pero no vacía) de acotados.

Teorema 1.18: Se cumple que:

1. El límite de una sucesión convergente en $\overline{\mathbb{M}}$ es único.
2. Toda sucesión convergente en $\mathbb{M}$ está acotada.

Demostración:

1. Supongamos, por contradicción, que tuviese dos límites L_1, L_2 distintos, luego $\epsilon := d(L_1, L_2) > 0$, por definición existen N_1, N_2 desde los cuales los términos están a menos de $\epsilon/2$ de distancia de los límites, luego para todo $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ se cumple que:

$$\epsilon = d(L_1, L_2) \leq d(L_1, s_n) + d(L_2, s_n) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

2. Sea $\epsilon > 0$. Por definición existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $s_n \in B_\epsilon(L)$. Definamos $\delta := \operatorname{diam}(\{s_0, s_1, \dots, s_{n_0-1}, L\})$.

Si $i \leq n_0$ entonces $d(s_i, L) \leq \delta$ y si $i \geq n_0$ entonces $d(s_i, L) < \epsilon$, luego si definimos $\eta := \text{máx}\{\delta, \epsilon\}$ entonces $d(s_i, s_j) \leq d(s_i, L) + d(L, s_j) \leq 2\eta$. Ergo $\operatorname{Img} s_n$ está acotado por 2η.

□

Teorema 1.19 – *Álgebra de límites*: En $\mathbb{K}$ con $v \in \mathbb{K}$, $s_n \to x$ y $r_n \to y$:

1. $\text{lím}_n v = v$.
2. La suma de convergentes también converge y $(s_n + r_n) \to x + y$.
3. La resta de convergentes también converge y $(s_n - r_n) \to x - y$.

En R:

4. El producto de convergentes también converge y $(s_n \cdot r_n) \to xy$.
5. La división de convergentes en un cuerpo con $y \neq 0$, también converge y $s_n/t_n \to x/y$.
6. Si $s_n \to 0$ y r_n está acotada, entonces $(s_n \cdot t_n) \to 0$.
7. Si $|r_n| \to \infty$ entonces $1/r_n \to 0$.

Demostración: Sólo probaremos la división dejando el resto como ejercicios para el lector: Como $y \neq 0$ entonces $|y/2| > 0$, por lo cuál, por definición existe N_1 tal que para todo $n \geq N_1$ se cumple $d(r_n, y) < |y/2|$, por lo cual, es fácil ver que $|y/2| < |r_n| < |3y/2|$. Veamos que

$$\left|\frac{s_n}{r_n} - \frac{x}{y}\right| = \left|\frac{s_n y - r_n x}{r_n y}\right| = \left|\frac{s_n y - xy + xy - r_n x}{r_n y}\right| \leq \frac{|x_n - x|\,|y|}{|r_n|\,|y|} + \frac{|r_n - y|\,|x|}{|r_n|\,|y|}.$$

Al igual que con las anteriores, el truco se basa en acotar los términos por un $\epsilon/2$. El primero es sencillo, para el cual decimos que $|s_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{|y|}{2}$ para $n \geq N_2$. Para el segundo decimos que $|r_n - y| < \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{|y^2|}{2\,\text{máx}\{|x|,1\}}$, ese término con máximo es para evitar problemas en caso de que $|x|$ fuese nulo. Un razonamiento similar basta en el resto de expresiones. □

Teorema 1.20: En R, dada una sucesión convergente $(s_n)_n$ tal que $m \leq s_n$ (resp. $s_n \leq M$) para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $m \leq \text{lím}_n s_n$ (resp. $\text{lím}_n s_n \leq M$).

Demostración: Supongamos, por contradicción, que $L := \lim_n s_n < m$, entonces definimos $\epsilon := m - L > 0$ y por definición de convergencia, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $|L - s_n| < \epsilon$, i.e., $s_n < L + \epsilon = m$ lo que es absurdo por construcción. □

Teorema 1.21: Dadas dos sucesiones convergentes $(s_n)_n, (t_n)_n$ tales que $s_n \leq t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_n s_n \leq \lim_n t_n$.

Teorema 1.22 (Teorema del sandwich): En R dado $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ y $(c_n)_n$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumpla que $a_n \leq b_n \leq c_n$ tales que a_n y c_n converjan a L, entonces $\lim_n c_n = L$.

Un ejercicio para el lector es comprobar que todos estos resultados también se mantienen si ocurren *eventualmente*, i.e., que hay un n para el cual, desde él en adelante las desigualdades de los enunciados se cumplen.

Proposición 1.23 (Ejemplos de límites): En R:

- $s_n = n \to \infty$ y $\frac{1}{n+1} \to 0$.
- $\lim\limits_n r^n = \begin{cases} \infty, & r > 1 \\ 1, & r = 1 \\ 0, & |r| < 1 \\ \text{ind}, & r \leq -1 \end{cases}$
- Si $\lim\limits_n s_n = L$ entonces $\lim\limits_n \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k = L$.

Pista: Para la segunda se recomienda utilizar la desigualdad de Bernoulli deducida en la sección sobre números naturales, enteros y racionales. Es fácil ver que dicha propiedad y el binomio de Newton son generalizables a R. □

Definición 1.24 – *Subsucesiones*: Dadas, $(s_n)_n, (t_n)_n$ sucesiones se dice que $(t_n)_n$ es *subsucesión* de $(s_n)_n$ si existe una función estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $t = \sigma \circ s$, i.e., si $t_n = s_{\sigma(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.25: En $\mathbb{M}$ si $(s_n)_n$ converge a L entonces toda subsucesión suya lo hace. Conversamente si toda subsucesión de $(s_n)_n$ converge a L, entonces $(s_n)_n$ también converge a L.

1. $(s_n)_n$ es convergente a L syss todas sus subsucesiones también.

2. $(s_n)_n$ es acotada syss todas sus subsucesiones lo son.

3. $(s_n)_n$ es de Cauchy syss todas sus subsucesiones lo son.

Como ejercicio puede plantearse ciertos criterios (y demostrarlos) bajo los cuales uno puede corroborar la convergencia de una sucesión en base a la de sus subsucesiones.

Teorema 1.26: Toda sucesión en un conjunto linealmente ordenado admite una subsucesión monótona.

Demostración: Sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera y denotemos S a su conjunto imagen. Si S es finito entonces algún elemento se repite infinitas veces con el cual se puede formar una subsucesión constante que resulta trivialmente monótona.

Si S es infinito, pero está bien ordenado, entonces comienzas por considerar el mínimo para construir a s_{n_0}, luego defines s_{n_1} como el mínimo de $(s_n)_{n=n_0+1}^{\infty}$. Y así inductivamente debido al buen orden de S.

Si S no está bien ordenado entonces admite un subconjunto S' que es infinito y no posee mínimo. Luego sea s_{n_0} un término cualquiera de S', como $\{s_0, \dots, s_{n_0}\}$ es finito entonces su complemento es infinito y sin mínimo, así que se elige[4] s_{n_1} como el primer término posterior que es menor que s_{n_0} y que está contenido en S', y así se procede inductivamente para formar una subsucesión decreciente. □

Teorema 1.27 – *Criterio de convergencia de Cauchy*: Se cumple:

1. Toda sucesión convergente en $\mathbb{M}$ es de Cauchy.

2. Toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{M}$ está acotada.

3. Toda sucesión monótona acotada en R es de Cauchy.

Proposición 1.28: Se cumple:

1. Las subsucesiones de una sucesión de Cauchy son también de Cauchy.

[4]Aquí no hacemos uso del AEN, puesto que este método está fundamentado por el buen orden de los índices de s_n, que son naturales.

2. Conversamente si todas las subsucesiones de una son de Cauchy, entonces la original también lo es.

3. Si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge a L, entonces la original también lo hace.

De esta forma las sucesiones de Cauchy evidencian tener varias cosas en común con las sucesiones convergentes, es por ello que se define:

Definición 1.29: Decimos que $\mathbb{M}$ es completo según Cauchy o Cauchy-completo si toda sucesión de Cauchy converge.

Desde inicio se hace esta distinción pues podemos considerar la siguiente sucesión (informal) en $\mathbb{Q}$:

$$3; \quad 3{,}1; \quad 3{,}14; \quad 3{,}141; \quad \dots$$

La cuál tiene toda la *apariencia* de converger, no obstante, podemos ver que se "acerca" a π, que es irracional, por ende no puede ser convergente o contradiciría la unicidad del límite en $\mathbb{R}$; pese a ello, como es creciente y acotada es de Cauchy. Esto evidencia un *punto vacío* en la recta numérica racional, que es lo que $\mathbb{R}$ vendría a completar.

Lema (AEN) 1.30: Si un espacio métrico admite un subconjunto denso Cauchy-completo, entonces dicho espacio es Cauchy-completo.

Teorema (AEN) 1.31: Para todo espacio métrico $(\mathbb{M}, d)$, existe otro $(\mathbb{M}^*, d^*)$ que es Cauchy-completo tal que posee un subconjunto isométrico a $\mathbb{M}$.

Demostración: Denotaremos $C_{\mathbb{M}}$ como el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{M}$ y la relación $\sim$ sobre $C_{\mathbb{M}}$ tal que $(s_n)_n \sim (t_n)_n$ syss $\lim d(s_n, t_n) = 0$. Esta relación resulta ser de equivalencia (¿por qué?), de manera que se define $\mathbb{M}^* := C_{\mathbb{M}}/\sim$. La métrica se define como:

$$d^*([(s_n)_n], [(t_n)_n]) := \lim_n d(s_n, t_n)$$

La cuál está bien definida puesto que si $(s_n)_n \sim (x_n)_n$ y $(t_n)_n \sim (y_n)_n$, entonces, por desigualdad triangular:

$$d(s_n, t_n) \leq d(s_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, t_n)$$

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, s_n) + d(s_n, t_n) + d(t_n, y_n).$$

Por lo que, despejando se obtiene que

$$|d(s_n, t_n) - d(x_n, y_n)| \leq d(s_n, x_n) + d(t_n, y_n) \to 0.$$

Ergo, $\lim_n d(s_n, t_n) = \lim_n d(x_n, y_n)$. Además cumple ser una métrica (¿por qué?).

Se define $\hat{x} := [(x)_{n\in\mathbb{N}}]$ y $\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{M}^*$ es $\varphi(x) := \hat{x}$ que es trivialmente isométrica. Un dato importante es que si $x^* := [(x_n)_n]$ y $x'_n := \hat{x}_n$, entonces $\lim_n x'_n = x^*$. Finalmente, para ver que $\mathbb{M}^*$ es completo basta ver que $\mathbb{M}$ es denso. Las observaciones de éste párrafo quedan al lector. □

Esto ya nos permite definir $\mathbb{R}$, no obstante, hay otras propiedades que no se conservan trivialmente, para ello hay un teorema similar para cuerpos métricos.

Lema 1.32: Si $(s_n)_n$ es de Cauchy en R, entonces se cumple alguna de las siguientes:

1. $s_n \to 0$.

2. Existe algún $k > 0$ y N natural para el cuál para todo $n \geq N$ se cumple que $k < s_n$.

3. Existe algún $k < 0$ y N natural para el cuál para todo $n \geq N$ se cumple que $k > s_n$.

Demostración: Supongamos que s_n no converge a 0, probaremos la que cumple 2) o 3). Por definición existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ existe un $n \geq N$ tal que $|s_n| \geq \epsilon$. Además como por definición de sucesión de Cauchy, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i, j \geq n_0$ se da que $|s_i - s_j| < \epsilon/2$. Luego, existe un $N \geq n_0$ tal que $|s_N| \geq \epsilon$. Finalmente para todo $j \geq n_0$ se cumple que $s_N - \epsilon/2 < s_j < s_N + \epsilon/2$. Si $s_N > 0$ entonces $\epsilon/2 \leq s_N - \epsilon/2 < s_j$. Si $s_N < 0$ entonces $s_j < s_N + \epsilon/2 \leq -\epsilon/2$. En cualquier caso se cumple lo esperado y basta reemplazar k por $\pm\epsilon/2$ (que es no nulo). □

Proposición 1.33: Si $(s_n)_n$, $(t_n)_n$ son de Cauchy en R, entonces $(s_n + t_n)_n$, $(s_n \cdot t_n)_n$ son de Cauchy. Además, si t_n no converge a 0 y es no nulo para todos los términos entonces $(s_n/t_n)_n$ es de Cauchy.

Teorema (AEN) 1.34: Dado un **cuerpo** arquimediano R existe una extensión R' que resulta ser Cauchy-completa y para la cual existe un monomorfismo de R a R' y que conserva las propiedades algebraicas, las propiedades de orden y la propiedad arquimediana.

A las extensiones propuestas en los teoremas 1.31 y 1.34 les decimos *extensiones de Cauchy*. Luego definimos los números reales $\mathbb{R}$ como la extensión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ bajo el teorema anterior.

Teorema 1.35: El límite de una sucesión creciente (resp. decreciente) convergente en R es el supremo de su conjunto imagen.

Definición 1.36 (Sucesión de intervalos encajados): Decimos que una sucesión $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de *intervalos encajados* si $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ y $\operatorname{lím}_n(a_n - b_n) = 0$.

Teorema 1.37: En R son equivalentes:

1. R es Cauchy-completo.
2. Dada una sucesión de intervalos encajados $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se cumple que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$ (teorema de los intervalos encajados).
3. Todo subconjunto no vacío acotado superiormente de R posee supremo (axioma del supremo).

Demostración: 1) $\implies$ 2). Observemos que para que $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea una sucesión de intervalos encajados debe darse que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sean crecientes y decrecientes resp. Es claro también que serían acotadas (pues $a_1 \le a_n \le b_n \le b_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$), por lo que serían de Cauchy y por ende serían convergentes. Como $\operatorname{lím}_n b_n - a_n = 0$, entonces se concluye que $L := \operatorname{lím}_n a_n = \operatorname{lím}_n b_n$ y queda al lector comprobar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{L\}$.

2) $\implies$ 3). Sea A no vacío y acotado superiormente, de manera que $a \in A$ y b es cota superior de A. Si a fuese cota superior, entonces sería el máximo y, en particular, el supremo de A, así que demostraremos el caso contrario. Como b es cota superior y a no, entonces necesariamente $a < b$, por lo que construimos una sucesión $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pares ordenados en R^2 de forma que $a_0 := a$ y $b_0 := b$, también se define $c_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}$, de tal modo que si $c_n \in A$ entonces $a_{n+1} := c_n$ y $b_{n+1} := b_n$, y de caso contrario,

entonces $a_{n+1} := a_n$ y $b_{n+1} := c_n$. De esta forma se puede ver que

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0.$$

Por lo que, se cumple que $\big([a_n, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de intervalos encajados, de modo que se cumple que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = \{x\}$. Luego se cumple que este x es una cota superior de a_n y cota inferior de b_n. Queda al lector probar que x es efectivamente el supremo e ínfimo de $a[\mathbb{N}]$ y $b[\mathbb{N}]$ resp., y que corresponde con el supremo de A.

3) $\implies$ 1). Sea $(s_n)_n$ de Cauchy. Sabemos que $(s_n)_n$ está acotada y que admite una subsucesión monótona. Si dicha subsucesión es creciente, entonces por axioma del supremo su imágen admite supremo la que sabemos que resulta ser su límite, y también sabemos que si una subsucesión de Cauchy converge, entonces todas lo hacen y al mismo límite, ergo $(s_n)_n$ es convergente. Si posee una subsucesión decreciente $(s_{\sigma(n)})_n$ entonces $(-s_{\sigma(n)})_n$ es creciente y por el razonamiento anterior se da que $(-s_n)_n$ es convergente, luego por álgebra de límites, $(s_n)_n$ lo es. □

De esta forma podemos ver la unicidad de $\mathbb{R}$ de manera que el lector puede interpretar que $\mathbb{R}$ representa un cuerpo arquimediano completo. Asimismo, el teorema anterior nos permite la formalización de $\mathbb{R}$ independiente del AEN como sugería nuestros teoremas sobre extensión de Cauchy, pues le construimos mediante el método de Dedekind y llegamos al mismo conjunto.

Proposición 1.38 (Teorema de Bolzano-Weierstrass): En $\mathbb{R}$ toda sucesión acotada posee una subsucesión convergente.

Definición 1.39 (Conjunto denso): Se dice que un subconjunto D de $\mathbb{M}$ es *denso* según la métrica o M-denso si para todo punto $x \in \mathbb{M}$ y todo $\epsilon > 0$ existe $d \in D$ tal que $d \in B_\epsilon(x)$.

Se dice que D es denso según límites de sucesiones, o L-denso, si para todo punto $x \in \mathbb{M}$ existe una sucesión en D de límite x.

Teorema (AEN) 1.40: Todo conjunto en $\mathbb{M}$ es L-denso syss es M-denso.

Definición 1.41 (Raíz n-ésima): Sea $x > 0$ se define su raíz n-ésima con $n \in \mathbb{N}_{\leq 0}$ como

$$\sqrt[n]{x} := \sup\{y : y \geq 0 \land y^n \leq x\}.$$

Vemos que todo real positivo posee n-ésima raíz pues $\mathbb{R}$ es completo, dicho conjunto contiene al 0 y está acotado por $\max\{x, 1\}$ (¿por qué?).

Se define $\sqrt[n]{0} = 0$. Y si $x < 0$ y n es impar, entonces se define $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$. Tradicionalmente se opta por escribir $\sqrt{x} := \sqrt[2]{x}$.

Proposición 1.42: Siendo $x, y > 0$ reales positivos y $n, m \geq 1$ naturales, se cumple:

1. $y = \sqrt[n]{x}$ syss $y^n = x$.
2. $x < y$ syss $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$.
3. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$.
4. $\sqrt[n]{(\sqrt[m]{x})} = \sqrt[nm]{x}$.

Proposición 1.43 (Series geométricas): Sea $r \in \mathbb{R}$, entonces

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

En particular, si $|r| < 1$ se cumple que

$$\lim_n \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1}{1 - r}.$$

Demostración: Vamos a llamar $S := \sum_{i=0}^{n} r^i$, entonces

$$rS = r + \cdots + r^{n+1} \implies (1 - r)S = 1 - r^{n+1}.$$

Si $|r| < 1$ entonces $\lim_n r^{n+1} = 0$ y el resto es álgebra de límites. □

Proposición 1.44: Todo intervalo no-trivial de $\mathbb{R}$ es equipotente a $\mathbb{R}$.

Teorema 1.45:

$$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}.$$

Demostración: Este teorema utilizara el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein. $|\mathbb{R}| \leq 2^{\aleph_0}$. Esto es trivial, dado que definimos $\mathbb{R}$ como el conjunto cociente de sucesiones de Cauchy bajo una equivalencia, ergo, el cardinal de

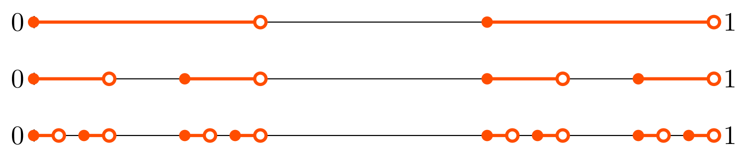


Figura 1.2. Conjunto y función de Cantor.

$\mathbb{R}$ está acotado por el de las sucesiones de Cauchy, el cual está acotado por el total de sucesiones que es $|\mathbb{Q}|^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0}$.

$2^{\aleph_0} \leq |\mathbb{R}|$. Este es verdaderamente el punto interesante, y para esto basta construir una aplicación biyectiva desde algún conjunto de cardinal $2^{\aleph_0}$ a $\mathbb{R}$. Dicho conjunto es el conjunto de sucesiones binarias y para realizar la aplicación inyectiva se utilizará el llamado *conjunto de Cantor* que resulta ser, además, un ejemplo de "fractal": comenzamos por considerar el intervalo $[0, 1)$ al cual en la primera iteración le quitamos el intervalo central $[1/3, 2/3)$; luego procedemos a quitarle los intervalos centrales a los que nos quedan que son los trozos $[1/9, 2/9)$ y $[7/9, 8/9)$. Los puntos de nuestra sucesión son los extremos izquierdos de nuestro conjunto tras las iteraciones.

Para esto consideramos $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \operatorname{Func}(\{0, 1\}; \mathbb{N})$ y llamamos f a la aplicación tal que

$$f(s_i)_{i\in\mathbb{N}} = \lim_n \sum_{i=0}^{n} s_i \cdot \frac{2}{3^{i+1}}.$$

Queda al lector probar que la función está bien definida para toda sucesión binaria, y para notar que dicha función es inyectiva se recomienda usar buen orden para buscar el primer índice para el cual dos sucesiones distintas difieren y usar desigualdades para probar que sus imágenes son efectivamente distintas. El dibujo en este caso sirve como un hint bastante sugestivo. □

En virtud del resultado anterior se denota $\mathfrak{c} := 2^{\aleph_0}$ denominado cardinal del continuo.

Definición 1.46 (Número algebraico): Se dice que $x_0 \in \mathbb{R}$ es *algebraico* si existe algún polinomio de coeficientes racionales $p \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $p(x_0) = 0$. De lo contrario x_0 se dice *trascendental*.

Proposición 1.47: El conjunto de números algebraicos es numerable. Por ende, los trascendentales tienen cardinal $\mathfrak{c}$.

1.3 Series infinitas

En esta sección, de no especificarse, se asume que el resultado se aplica para $\mathbb{K}$.

Definición 1.48 – *Serie*: Dada una sucesión $(a_n)_n$ sobre $\mathbb{K}$, se le dice *serie derivada* a la sucesión $(S_n)_n$ tal que

$$S_n := \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Si la serie derivada de una sucesión converge a L, entonces nos daremos el lujo de escribir

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = L.$$

Decimos que S_n converge absolutamente syss la serie derivada de $\|a_n\|$ converge.

Ojo que la última notación no tiene sentido si la serie diverge.

Proposición 1.49: La serie de $(a_n)_n$ converge syss para todo $\epsilon > 0$ existe un N natural tal que para todo $n_0 \leq p < q$ se cumple que

$$\left| \sum_{i=p}^{q} a_i \right| < \epsilon.$$

Corolario 1.50: Toda serie absolutamente convergente es convergente.

El recíproco de este enunciado es falso, lo que veremos luego, de momento considere que llamaremos *condicionalmente convergente* a una serie convergente pero no absolutamente convergente.

Teorema 1.51: Si la serie de $(a_n)_n$ converge, entonces $\lim_n a_n = 0$.

Demostración: Sea L el límite de la serie. Entonces por definición, existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$

$$\left| L - \sum_{i=0}^{n} a_i \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego, existe $n_0 + 1$ tal que para todo $n + 1 \geq n_0 + 1$ se cumple que

$$|a_{n+1}| = \left\| \sum_{i=0}^{n+1} a_i - \sum_{i=0}^{n} a_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=0}^{n+1} a_i - L \right\| + \left\| L - \sum_{i=0}^{n} a_i \right\| < \epsilon.$$

□

Corolario 1.52 (criterio de comparación): Sean a_n, b_n sucesiones reales de términos no-negativas. Llamando $L := \lim_n \frac{a_n}{b_n}$ se cumple:

- $L < \infty$: Si b_n converge, entonces a_n converge.
- $L > 0$: Si b_n diverge, entonces a_n diverge.

Teorema 1.53 (criterio de condensación de Cauchy): La serie de una sucesión a_n decreciente y de términos no-negativos es convergente syss lo es la serie de $2^n a_{2^n}$.

Ejemplo 1.54 (serie harmónica)**:** Por el criterio de Cauchy es fácil notar que la serie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

diverge. ⌟

Sin embargo, por el mismo argumento se puede ver que otras similares convergen:

Corolario 1.55 (series p-harmónicas): Se le dice serie p-harmónica a la de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}.$$

Nótese que las series p-harmónicas convergen para $p > 1$.

De hecho, se define la función dseta $\zeta\colon (1, \infty) \to \mathbb{R}$ como $\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$. Más adelante veremos ejemplos icónicos de valores de ζ.

Definición 1.56 – *Límite superior e inferior*: Dada una sucesión real acotada a_n se define

$$\limsup_n a_n := \lim_n (\sup\{a_k : k \geq n\}),$$

$$\liminf_n a_n := \lim_n(\inf\{a_k : k \geq n\}).$$

Nótese que sólo basta que la sucesión sea acotada para que existan sus límites superiores e inferiores. Además, si a_n converge, entonces $\limsup a_n = \liminf a_n = \lim_n a_n$ (¿por qué?).

Teorema 1.57: Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es real y de términos positivos, entonces

$$\lim_n na_n = 0.$$

Teorema 1.58 – *Criterio de d'Alembert*: Dada una sucesión a_n real de términos estrictamente positivos:

a) Si $\limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, entonces su serie converge.

b) Si $\liminf_n \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, entonces su serie diverge.

Demostración:

a) Sea $L := \limsup_n a_{n+1}/a_n$, luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{k\geq N} \frac{a_{k+1}}{a_k} < L + \frac{1-L}{2} = \frac{L+1}{2} =: M < 1$$

Luego, como es el supremo, entonces

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \leq \sup_{k\geq N} \frac{a_{k+1}}{a_k} < M \implies a_{N+1} < Ma_N$$

Y así se puede iterar para probar que $a_{N+k} < M^k a_N$ con $M < 1$, luego definamos $R := \max\{a_0, a_1, \dots, a_N\}$, por lo que se comprueba que $a_k \leq \frac{R}{M^N} M^k$, donde la serie de la última converge por ser geométrica.

b) El razonamiento es análogo y queda de ejercicio para el lector. □

Corolario 1.59: La serie

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

es absolutamente convergente para todo x.

También como consecuencia de esto se cumple que

$$\lim_n \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Esta última serie es muy importante, y la retomaremos en capítulos posteriores.

Teorema 1.60 – *Criterio de la raíz de Cauchy*: Sea a_n una sucesión real de términos estrictamente positivos, entonces:

1. Si $\limsup_n \sqrt[n]{a_n} < 1$, entonces su serie converge.
2. Si $\liminf_n \sqrt[n]{a_n} > 1$, entonces su serie diverge.

Demostración:

1. Sea $L := \limsup_n \sqrt[n]{a_n} < 1$, luego existe un $N \in \mathbb{N}$ para el que $\sup_{k\geq N} \sqrt[k]{a_k} < L + \frac{1-L}{2} = \frac{L+1}{2} =: M < 1$. Para todo $n \geq N$ se cumple que $\sqrt[n]{a_n} \leq M < 1$, es decir, $a_n \leq M^n < 1$. Luego la comparamos convenientemente con la geométrica de M^n y converge.
2. Análogo. □

Teorema 1.61 (Criterio de Kummer): Sea a_n una sucesión real de términos estrictamente positivos y D_n otra sucesión real de términos estrictamente positivos arbitraria. Si

$$\liminf_n D_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - D_{n+1} > 0,$$

entonces la serie de a_n converge. Si existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumpla

$$D_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - D_{n+1} \leq 0,$$

y la serie de $1/D_n$ diverge, entonces la serie de a_n diverge.

Demostración: Si el límite inferior es positivo, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple que $0 < M < D_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - D_{n+1}$, ergo,

$$M a_{n+1} < D_n a_n - D_{n+1} a_{n+1}.$$

Luego, para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$a_{N+1} + \cdots + a_{N+k+1} < \frac{1}{M}(D_N a_N - D_{N+k+1} a_{N+k+1}) < \frac{D_N a_N}{M}.$$

Como entonces la serie está acotada, y su sucesión es monótona, entonces converge.

En el otro caso, se cumple que $D_n a_n \leq D_{n+1} a_{n+1}$, i.e., la sucesión $D_n a_n$ es creciente a partir de $n \geq N$. Definamos $M := D_N a_N$, luego para $n \geq N$ se cumple que $M \leq D_n a_n$, es decir, $a_n \geq M/D_n$, y como esta última diverge, por criterio de comparación, la de a_n también. □

Notemos que usando $D_n := 1$ se obtiene que el criterio de Kummer implica el criterio de d'Alembert.

Corolario 1.62 (criterio de Raabe): Sea a_n una sucesión real de términos estrictamente positivos con

$$L := \lim_k k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right)$$

se cumple que:

1. Si $L > 1$ entonces la serie de a_n converge.
2. Si $L < 1$ entonces la serie de a_n diverge.

Teorema 1.63 – *Criterio de Leibniz*: Sea $a_n \to 0$ una sucesión real decreciente, entonces $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ converge.

Demostración: Como es costumbre llamemos $S_n := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Intuitivamente la sucesión S_n parece oscilar, y esto lo formalizaremos de la siguiente manera. Como a_n decrece, entonces $a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$, por ende

$$S_{2(n+1)} = S_{2n} + (-a_{2n+1} + a_{2n+2}) \leq S_{2n},$$

es decir, la subsucesión S_{2n} decrece. Por el mismo argumento, se cumple que $a_{2n+2} \geq a_{2n+3}$ y luego S_{2n+1} es creciente.

Finalmente, veamos que a_n decrece y converge a 0, ergo, 0 es el ínfimo de su conjunto imágen, por lo que los términos de a_n son no-negativos, por lo que $S_{2n+1} \leq S_{2n}$. Con ello están todas las herramientas listas para encontrar el límite de los S_n por intervalos encajados $\{[S_{2n+1}, S_{2n}]\}_{n=0}^{\infty}$. □

Ejemplo. Mediante el criterio de Leibniz se comprueba que la serie derivada de $\frac{(-1)^k}{k+1}$ es condicionalmente convergente, pues la harmónica diverge.

Teorema 1.64 (Criterio de Dirichlet): Sea $a_n \to 0$ es una sucesión real decreciente y $b_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tal que $\sum_{k=0}^{n} b_k$ está acotada, entonces la serie de $a_n b_n$ converge.

Demostración: Definamos $s_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$ y $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|s_n\| < M$ para todo n. Por construcción existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple que $a_n < \epsilon/2M$, entonces vamos a probar que la serie es de Cauchy. Usando que $s_n - s_{n-1} = b_n$, sean $N \leq n < m$ arbitrarios:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=n}^{m} a_k b_k \right\| &= \|a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1} + \cdots + a_m b_m\| \\
&= \|a_n(s_n - s_{n-1}) + a_{n+1}(s_{n+1} - s_n) + \cdots + a_m(s_m - s_{m-1})\| \\
&\leq a_n \|s_{n-1}\| + (a_n - a_{n+1})\|s_n\| + \cdots + (a_{m-1} - a_m)\|s_{m-1}\| + a_m \|s_m\| \\
&\leq M \left(a_n + \sum_{k=n}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) + a_m \right) = 2a_n M < \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Uno de los própositos del criterio de Dirichlet es generalizar el criterio de Leibniz. Por ejemplo, mediante el criterio de Leibniz sabemos que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

converge, pero no sabemos si la misma serie pero siguiendo el patrón de signos

$$+ - + - - + - + + - + \cdots$$

converge. Mediante el criterio de Dirichlet podemos responder afirmativamente.

Esta última parte se dedica al reordenamiento y producto de series:

Teorema 1.65: Si la serie de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es absolutamente convergente y $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una biyección, entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}.$$

Demostración: Sea $\epsilon > 0$. Existe n_0 tal que

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n_0} a_k \right\| \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \|a_k\| = \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| - \sum_{k=0}^{n_0} \|a_k\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego sea $m_0 := \max \sigma^{-1}[0, \dots, n_0]$, entonces para todo $n \geq m_0$ se cumple que

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right\| \leq \left\| \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n_0} a_k \right\| + \left\| \sum_{k=0}^{n_0} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right\|$$

$$< \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \|a_k\| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \qquad \square$$

Ejemplo. Considere la sucesión

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots$$

que converge por criterio de Leibniz y viendo el lado derecho como subsucesión notamos que converge a un valor positivo, sin embargo, si reordenamos

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \cdots &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k} - \frac{1}{2(2k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{4k \cdot (2k+1)}, \end{aligned}$$

la última igualdad nos permite ver que converge (comparamos con $1/k^2$) y que su límite es negativo.

Teorema 1.66 (de reordenamiento de Riemann): Si la serie de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es condicionalmente convergente, entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ existe una biyección $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = x.$$

Demostración: Si a_n es condicionalmente convergente, entonces ha de poseer infinitos términos positivos e infinitos términos negativos (¿por qué?). Además, se debe dar que la serie de los términos positivos de a_n converja a $+\infty$ y la de los negativos a $-\infty$ (¿por qué?).

Luego, sin perdida de generalidad, supongamos que $c > 0$. Como la suma de términos positivos no está acotada, entonces consideramos los términos positivos hasta que sobrepasan c y luego sumamos negativos de forma que lo sobrepasa por debajo y así sucesivamente. Como los términos van convergiendo a 0, eventualmente nuestra sucesión formada se «estabiliza» y converge a c. □

Como problema propuesto se le pide al lector formalizar la demostración anterior, llenar los detalles y describir por qué podemos construir dicha biyección sin utilizar AEN.

Definición 1.67 (Producto de Cauchy): Sean $(a_n)_n, (b_n)_n$ series en $\mathbb{K}$, llamamos *producto de Cauchy* a la serie derivada de $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$.

Teorema 1.68: Si las series de a_n y b_n convergen, y alguna lo hace absolutamente, entonces el producto de Cauchy entre las dos también y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

Demostración: Sin perdida de generalidad supongamos que a_n converge absolutamente y definamos:

$$A := \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \; B := \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \; c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k},$$
$$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \; B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k, \; C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k, \; \beta_n := B_n - B.$$

Luego, notemos que

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + \cdots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + \cdots + a_n B_0 = a_0(B + \beta_n) + \cdots + a_n(B + \beta_0) \\ &= A_n B + (a_0 \beta_n + \cdots a_n \beta_0). \end{aligned}$$

Basta probar que $\sum_{k=0}^{n} a_k \beta_{n-k} \to 0$.

Sea $\epsilon > 0$. Como $\beta_n \to 0$, entonces $M_b := \sup\{\|\beta_n\| : n \in \mathbb{N}\}$. Asímismo, como la serie de a_n converge absolutamente, entonces $M_a := \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|$. Por definición, existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$\sum_{k=n_0}^{n} \|a_k\| < \frac{\epsilon}{2M_b}.$$

Y existe un n_1 tal que para todo $n \geq n_1$ se cumple que

$$\|\beta_n\| < \frac{\epsilon}{2M_a}.$$

Luego consideramos $n \geq 2\max\{n_0, n_1\}$ para ver que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k \beta_{n-k} \right\| &\leq \sum_{k=0}^{n_0} \|a_k \beta_{n-k}\| + \sum_{k=n_0+1}^{n} \|a_k \beta_{n-k}\| \\ &< \frac{\epsilon}{2M_a} \sum_{k=0}^{n_0} \|a_k\| + M_b \sum_{k=n_0+1}^{n} \|a_k\| < \epsilon. \end{aligned}$$

□

2

Topología y continuidad

La topología es una sub-rama de las matemáticas relativamente nueva que surge de una abstracción de la geometría para el análisis matemático; en general suele ser bastante confusa y poco concisa para los estudiantes, pero confío que en contexto de este libro no resultará repulsiva la primera impresión, y espero que el lector pueda ver la potencia y generalidad de ella tanto como herramienta, como un bien en sí mismo. Igual que el álgebra define una serie de conceptos y estructuras basados en operaciones binarias, la topología hace lo mismo con subconjuntos de un espacio fijado, permitiendo responder a preguntas sobre la clasificación general de figuras, y debido a las libertades generales que nos damos la topología permite dar una mirada general a un análisis que puede ser real, pero con otras definiciones fácilmente puede ser complejo o funcional, he ahí su fama.

2.1 Espacios topológicos

Definición 2.1 – *Topología*: Dado un conjunto X usualmente llamado el «espacio», definimos una topología $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ como una familia de conjuntos que satisface:

T1. $\varnothing, X \in \tau$.

T2. Sean $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$.

T3. $U, V \in \tau \implies U \cap V \in \tau$.

A un par (X, τ) le diremos un *espacio topológico* o así llamaremos a X cuando no haya ambigüedad en los signos. A los elementos de la topología de un espacio les diremos *abiertos*.

Dadas dos topologías sobre un espacio común X tales que $\tau_1 \subseteq \tau_2$, entonces se dice que τ_1 es más débil que τ_2, o que τ_2 es más fuerte que τ_1.

U es un *entorno* (o «vecindad») de un subconjunto C de un espacio topológico X si existe un abierto A tal que $C \subseteq A \subseteq U$. El entorno de un punto $x \in X$ es un entorno de $\{x\}$. Decimos que un punto x de un espacio topológico está *aislado* si $\{x\}$ es abierto.

Usualmente las propiedades II) y III) se dicen como que una topología es cerrada bajo uniones posiblemente infinitas e intersecciones finitas. El uso de la palabra *espacio* es meramente para permitirnos llamar a los elementos del conjunto *puntos*.

Ejemplo 2.2 (espacio (in)discreto)**:** Dado un espacio X cualquiera, $\{\varnothing, X\}$ y $\mathcal{P}(X)$ resultan ser topologías sobre X. A la primera le diremos *indiscreta* (o *trivial* en ciertos textos) y a la segunda *discreta*. Notemos que un espacio topológico es discreto syss todos sus puntos están aislados. Otra observación es que la topología indiscreta es la más débil, y la discreta la más fuerte en cualquier espacio dado. ⌟

En este capítulo (X, τ) siempre representará un espacio topológico.

Proposición 2.3: Un conjunto es abierto syss es un entorno de todos sus puntos.

Demostración: Una implicancia es trivial, mientras que si es entorno de todos sus puntos se tiene que $A = \bigcup\{U \in \tau : U \subseteq A\}$ (¿por qué?) y la unión de abiertos es abierta. □

Definición 2.4 – *Base, subbase*: Decimos que una familia de abiertos $\mathcal{B}$ es una *base* de la topología si todo abierto puede expresarse como una unión de una subfamilia de $\mathcal{B}$. Fijada una base $\mathcal{B}$ de un espacio topológico diremos que los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos básicos.

Se dice que $\mathcal{B}_x$ es una *base de entornos de x* si para todo entorno U de x existe otro entorno B de x en $\mathcal{B}_x$ tal que $B \subseteq U$. Una familia de abiertos $\mathcal{S}$ es una *subbase* si las intersecciones finitas de sus elementos forman una base.

Al igual que en el álgebra lineal, las bases topológicas tienen como objetivo generar todos los objetos de una topología, veamos un criterio simple:

Proposición 2.5: Toda base $\mathcal{B}$ cumple las siguientes propiedades:

B1. $\bigcup \mathcal{B} = X$.

B2. Si $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ tales que $x \in U_1 \cap U_2$ entonces existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Y toda familia de abiertos que satisfaga lo anterior es una base de la topología.

Teorema 2.6: Una familia de conjuntos $\mathcal{B}$ que cumple con las siguientes propiedades:

B1. $\bigcup \mathcal{B} = X$.

B2. Si $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ tales que $x \in U_1 \cap U_2$ entonces existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Define una única topología en X para la cual es base, la cual se dice *topología inducida por la base*. Esta topología además es la mínima (respecto a la inclusión) para la cuál los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos.

Demostración: Definimos $\tau := \{\bigcup \mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}\}$. Notemos que $\bigcup \varnothing = \varnothing$ y $\bigcup \mathcal{B} = X$, por lo que cumple T1.

Sea $\mathscr{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{B}))$ (de forma que sus elementos sean subconjuntos de $\mathcal{B}$, que sabemos, su unión define elemenetos de τ). Luego como para todo $S \in \mathscr{F}$ se cumple que $S \subseteq \mathcal{B}$ entonces $\bigcup \mathscr{F} \subseteq \mathcal{B}$, luego se concluye que $\bigcup \bigcup \mathscr{F} \in \tau$, demostrando T2.

Para demostrar T3 sean $A, B \in \tau$. Luego sea $\mathcal{F} := \{U \in \mathcal{B} : U \subseteq A \cap B\}$, probaremos que $A \cap B = \bigcup \mathcal{F}$. Está claro que $\bigcup \mathcal{F} \subseteq A \cap B$. Por definición existen $\mathscr{A}, \mathscr{B} \subseteq \mathcal{B}$ tales que $A = \bigcup \mathscr{A}$ y $B = \bigcup \mathscr{B}$, luego si $x \in A \cap B$ entonces $x \in \bigcup \mathscr{A}$ y $x \in \bigcup \mathscr{B}$, por tanto, $x \in U_1 \in \mathscr{A}$ y $x \in U_2 \in \mathscr{B}$ con $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$, por lo que usando la propiedad B2 de $\mathcal{B}$ existe $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2 \subseteq A \cap B$, luego $U \in \mathcal{F}$, por lo que $x \in \bigcup \mathcal{F}$, i.e., $A \cap B \subseteq \mathcal{F}$.

La unicidad y minimalidad yacen de que si τ' es tal que los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos, entonces $\tau \subset \tau'$, por lo que $\mathcal{B}$ no es base de τ'. $\square$

Ejemplo 2.7 (espacio ordenado)**:** Dado un conjunto linealmente ordenado X, definimos la *topología inducida por el orden* como aquella que tiene por base los intervalos abiertos (incluyendo a aquellos que tienen a «$\pm\infty$» por extremos). ⌟

Lema 2.8: En un espacio pseudométrico, las bolas abiertas cumplen las condiciones para ser una base. La topología inducida por las bolas abiertas se dice la topología *inducida por la (pseudo)métrica*.

Demostración: Es claro que la unión de todas las bolas da el espacio, por ende hemos de probar que se cumple la segunda propiedad. Consideremos las bolas $B_r(u)$ y $B_R(v)$ de modo que su intersección no sea vacía, y exista $w \in B_r(u) \cap B_R(v)$. Sea $\delta := \min\{r - d(u, w), R - d(v, w)\} > 0$, de modo que $B_\delta(w)$ es una bola abierta y veremos que sus elementos están en la intersección deseada. Para ello, sea $x \in B_\delta(w)$, entonces

$$d(u, x) \leq d(u, w) + d(w, x) < d(u, w) + \delta \leq d(u, w) + r - d(u, w) = r,$$

y análogamente se muestra que $d(v, x) < R$, de modo que $B_\delta(w) \subseteq B_r(u) \cap B_R(v)$ como se quería probar. □

Notemos que tanto la topología inducida por la métrica, como la topología inducida por el orden en $\mathbb{Q}$, y en $\mathbb{R}$ por separado, son las mismas. No obstante, la topología del orden nos permite definir cosas más interesantes como la topología de orden sobre el conjunto de ordinales, o sobre el conjunto de cardinales de von Neumann. Para los que han leído acerca de ambos, es fácil comprobar que los ordinales y los cardinales límite son efectivamente puntos límite o de acumulación en dichos espacios, además de que los conjuntos "cerrados" también lo son.

Teorema 2.9: Cualquier familia de subconjuntos $\mathcal{S}$ de un espacio define una única topología para la cual es subbase. Esta topología es además la mínima (respecto de la inclusión) para la cuál los elementos de $\mathcal{S}$ son abiertos.

Definición 2.10 – *Cerrado*: Decimos que un conjunto F es cerrado si $X \setminus F$ (o F^c si no hay ambigüedad sobre los signos) es abierto.

Como consecuencia de las propiedades de los abiertos, se tiene que:

Proposición 2.11: En un espacio topológico X se cumplen:

C1. $X, \varnothing$ son cerrados.

C2. La intersección arbitraria de cerrados es cerrada.

C3. La unión de finitos cerrados es cerrada.

Y dada una familia de conjuntos que satisfacen lo anterior, entonces determinan una única topología para la cual son los cerrados.

Definición 2.12 – *Clausura, interior*: Dado un subconjunto $S \subseteq X$ definimos su *clausura* como

$$\overline{S} := \bigcap \{F : S \subseteq F \wedge F \text{ es cerrado}\}.$$

Asimismo definimos el *interior* de S como

$$\operatorname{Int} S := \bigcup \{A : A \subseteq S \wedge S \text{ es abierto}\}.$$

Los puntos de $\overline{S}$ se dicen *adherentes* a S, mientras que los de $\operatorname{Int} S$ se dicen *interiores* de S. Dado un conjunto S, definimos su *frontera* (o borde) como

$$\partial S := \overline{S} \setminus \operatorname{Int} S.$$

Observaciones:

- Cerrado no implica no-abierto, es fácil comprobar que $\varnothing, X$ son siempre cerrados y abiertos sin importar la topología.
- Pueden existir conjuntos que no sean ni abiertos ni cerrados. En efecto, todo conjunto distinto del vacío y del espacio no es ni cerrado ni abierto en la topología indiscreta.
- La clausura representa el mínimo cerrado que contiene a dicho conjunto. Recíprocamente se puede ver que el interior de un conjunto es el máximo abierto que dicho conjunto contiene.
- Por definición, un conjunto cerrado contiene a toda su frontera, uno abierto no contiene nada de su frontera, y un conjunto ni abierto ni cerrado contiene sólo parte de su frontera.

Si el conjunto es una forma de dos dimensiones (e.g. un polinomio, una elipse, etc.) dibujaremos la frontera faltante con un borde punteado como lo muestra la figura.

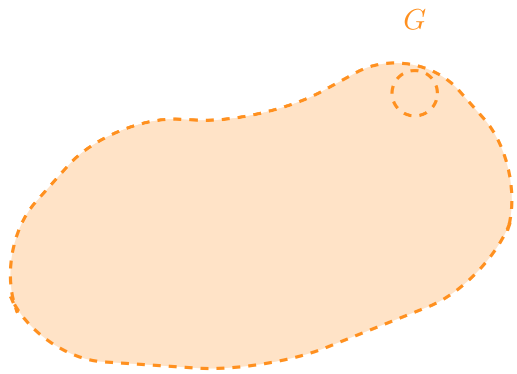


Figura 2.1. Diagrama de conjunto abierto.

Teorema 2.13: Un punto es adherente a A syss todos sus entornos intersecan a A.

Demostración: Lo haremos por contrarrecíproca en ambas: $\implies$. Si existe U entorno de x que no interseca a A, entonces $U \subseteq A^c$ y $A \subseteq U^c$, ergo, $\overline{A} \subseteq U^c$ y como $x \notin U^c$ se cumple que $x \notin \overline{A}$.

$\impliedby$. Si $x \notin \overline{A}$, entonces $x \in \overline{A}^c$ que es abierto pues $\overline{A}$ es cerrado, luego es un entorno de x que no interseca a A. □

Proposición 2.14: Las bolas cerradas de un espacio pseudométrico son cerradas.

Demostración: Sea $A := [B'_r(x)]^c$, probar que $B'_r(x)$ es cerrado, equivale a ver que A es abierto; para lo que basta probar que es entorno de todos sus puntos, es decir, que para todo $y \in A$, existe un abierto U tal que $y \in U \subseteq A$. A esto recordemos que de momento los únicos conjuntos abiertos son los básicos, es decir las bolas abiertas.

Sea $y \in A$, por definición $d(x, y) > r$, llamemos $R := d(x, y) - r > 0$, luego queremos probar que $B_R(y) \subseteq A$, es decir, que si $z \in B_R(y)$ (i.e., $d(y, z) < R$) entonces $z \in A$ (i.e., $d(x, z) > r$). Veamos que (reordenando la desigualdad triangular)

$$d(x, z) \geq d(x, y) - d(y, z) > d(x, y) - R = r,$$

de modo que $z \in A$. □

Teorema 2.15: Sea A un conjunto, entonces:

1. $\operatorname{Int} A \subseteq A \subseteq \overline{A}$.
2. $\operatorname{Int} A = X \setminus \overline{X \setminus A}$ y $\overline{A} = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$.
3. $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$ y $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
4. $\operatorname{Int}(\partial A) = \varnothing$ y $\overline{\partial A} = \partial A$. En consecuente, $\partial(\partial A) = \partial A$.
5. $A \subseteq B \subseteq X$ implica que $\operatorname{Int} A \subseteq \operatorname{Int} B$ y $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
6. A es abierto syss $A = \operatorname{Int} A$ y A es cerrado syss $A = \overline{A}$.
7. $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$ y $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
8. $\operatorname{Int}(A \cup B) \supseteq \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$ y $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.
9. $\overline{A} = \operatorname{Int} A \cup \partial A = A \cup \partial A$.
10. $\partial A = \partial A^c$ y $\operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} A^c \cup \partial A = X$.
11. $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$ y $\partial(A \cap B) \subseteq \partial A \cap \partial B$.

DEMOSTRACIÓN: Probaremos un par, dejando el resto al lector:

2. Lo haremos por doble contención:

   $$\operatorname{Int} A \subseteq A \iff A^c \subseteq (\operatorname{Int} A)^c$$

   pero $(\operatorname{Int} A)^c$ es cerrado, luego por definición se cumple que $\overline{A^c} \subseteq (\operatorname{Int} A)^c$.

   Así mismo,

   $$A^c \subseteq \overline{A^c} \iff (\overline{A^c})^c \subseteq A,$$

   pero $(\overline{A^c})^c$ es abierto, luego $(\overline{A^c})^c \subseteq \operatorname{Int} A$, es decir, $(\operatorname{Int} A)^c \subseteq \overline{A^c}$.

4. Como $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$ se nota que ∂A es cerrado, por lo que simplemente basta ver que $\operatorname{Int}(\partial A) = \varnothing$. Ésto se deduce de ver lo siguiente:

   $$\operatorname{Int}(\partial\partial A) \subseteq \operatorname{Int}(\partial A), \qquad \operatorname{Int}(\partial\partial A) \subseteq \partial\partial A \subseteq \operatorname{Int}(\partial A)^c$$

   luego, necesariamente tiene que ser vacío.

7. Se deduce de que $A \subseteq A \cup B \subseteq \overline{A \cup B}$ y $B \subseteq \overline{A \cup B}$, por ende las clausuras también están acotadas por $\overline{A \cup B}$ y
$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}.$$
Finalmente nos basta ver la contención complementaria, para lo cual basa aplicar la segunda propiedad para notar que $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ siendo el segundo un cerrado, por lo que $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ por definición. □

Proposición 2.16 (Clausura de Kuratowski): Sea X un conjunto dotado de una operación $c\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tal que satisface los siguientes axiomas:

CK1. $c(\varnothing) = \varnothing$.

CK2. $A \subseteq c(A)$.

CK3. $c(c(A)) = c(A)$.

CK4. $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$.

Entonces existe una única topología tal que c es la función clausura en dicho espacio, y dicha topología es aquella que tiene por cerrados a los conjuntos fijos de c.

Demostración: Es fácil ver que $X, \varnothing \in \tau$ mediante los axiomas CK1 y CK2 de c. Las intersecciones finitas también son directas del axioma CK4.

El gran problema es la unión de abiertos, que equivale a ver que la intersección de cerrados es cerrada: Sea $C := \bigcap_{i \in I} C_i$ con C_i punto fijo de c. En primer lugar combinando los axiomas CK2 y CK4 se concluye que $A \subseteq B$ implica $c(A) \subseteq c(B)$ y C es el ínfimo de los C_i, luego
$$c(C) \subseteq c(C_i) = C_i, \quad \forall i \in I.$$
Luego $c(C)$ es una cota inferior de $\{C_i\}_{i \in I}$, ergo, $c(C) \subseteq C$, con lo que $C = c(C)$.

Ya probamos que c induce una topología, ahora veamos que es efectivamente la clausura de dicha topología, para ello sólo basta probar que $c(A)$ es el mínimo cerrado que incluye a A. Sea B otro cerrado que incluye a A, entonces $A \subseteq B$ implica $c(A) \subseteq c(B) = B$.

Si hubiése otra topología para la cual c fuese el operador clausura, entonces compartirían cerrados, ergo, los abiertos en una topología serían los de la otra, probando así que son las mismas, i.e., que la topología inducida es única. □

Definición 2.17 (Puntos de acumulación): Dado un subconjunto A del espacio diremos que $x \in A$ es un *punto de acumulación* o *punto límite* si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Al conjunto de puntos de acumulación de A le llamaremos *conjunto derivado* de A y denotaremos por A^{d} (o A'). Los puntos de A que no son de acumulación (y que pertenecen a $A \setminus A^{\mathrm{d}}$) se dicen *aislados*.

Notemos que los puntos aislados de un espacio lo son en todo subconjunto de él, pues si $\{x\}$ es abierto, entonces $\{x\} = \operatorname{Int}\{x\} = (\overline{\{x\}^c})^c = X \setminus \overline{X \setminus \{x\}}$. Además, en un espacio discreto ningún conjunto posee puntos de acumulación; mientras que en uno indiscreto, todos los puntos de un conjunto no-singular son de acumulación, si el conjunto es singular, todos los puntos menos el del conjunto son de acumulación.

Teorema 2.18: Se cumple:

1. x es de acumulación de A syss todo entorno de x interseca a $A_{\neq x}$.
2. $\overline{A} = A \cup A^{\mathrm{d}}$.
3. $A \subseteq B$ implica $A^{\mathrm{d}} \subseteq B^{\mathrm{d}}$.
4. $(A \cup B)^{\mathrm{d}} = A^{\mathrm{d}} \cup B^{\mathrm{d}}$.
5. $\bigcup_{i \in I} A_i^{\mathrm{d}} \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^{\mathrm{d}}$.

Un corolario de la propiedad 2) del teorema anterior es que un conjunto es cerrado syss contiene a todos sus puntos de acumulación.

Definición 2.19 (Familia discreta, localmente finita): Se dice que una familia de subconjuntos de un espacio topológico es *discreta* si para todo $x \in X$ se cumple que posee un entorno tal que interseca a lo más a un conjunto de la familia. Se dice que una familia de subconjuntos de un espacio topológico es *localmente finita* si para todo $x \in X$ se cumple que posee un entorno tal que interseca a lo más a finitos conjuntos de la familia.

Las familias localmente finitas son útiles dentro del contexto de la geometría diferencial para las particiones de la unidad.

Proposición 2.20: Toda familia finita y toda familia discreta son localmente finitas.

Teorema 2.21: Para toda familia localmente finita $\{A_i\}_{i\in I}$ se cumple que $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$.

Demostración: Como $\overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$, entonces es claro que $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$, por lo que sólo queda probar la otra inclusión.

Si $x \in \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$ entonces x es de adherencia, luego todos sus entornos intersecan a la unión, luego, por definición de ser localmente finita, ha de haber algún entorno que interseque finitos elementos conjuntos, en particular, digamos que interseca a $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$, por lo que es fácil probar que

$$x \in \overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_{i_k}} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_{i_k}},$$

lo cuál está contenido en $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$, como se quería probar. □

Corolario 2.22: La unión (arbitraria) de localmente finitos cerrados es cerrada.

§2.1.1 Continuidad.

Definición 2.23 – *Continuidad*: Dada una aplicación entre espacios topológicos $f\colon X \to Y$, se dice que f converge a L cerca de un punto de acumulación a si para todo entorno U_L de L se cumple que $f^{-1}[L] \cup \{a\}$ es un entorno de a. Si f converge de forma única a L cerca de a, entonces escribiremos $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ entonces se dice que es *continua* en a. f se dice *continua* (a secas) si lo es en todos los puntos de acumulación del dominio. El conjunto de aplicaciones continuas desde X a Y se denota como $C(X, Y)$. Si $Y = \mathbb{R}$ entonces nos permitimos escribir $C(X)$.

Diremos que una aplicación $f\colon X \to Y$ es un *homeomorfismo* si es biyectiva y f, f^{-1} son continuas. Dos espacios se dicen *homeomorfos* o *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo entre ellos, en cuyo caso escribiremos $X \simeq Y$.[a]

[a] Ocupamos $\simeq$ para decir homeomorfos como espacios topológicos y $\cong$ para decir isomorfos como estructuras algebraicas (ya sea como grupo, anillo o espacio vectorial).

Trivialmente todo espacio es homeomorfo a sí mismo por la identidad.

Un ejercicio para el lector es notar que dos espacios discretos son homeomorfos syss poseen el mismo cardinal, debido a lo cual denotaremos $D(\kappa)$ a un representante[1] de espacio discreto de cardinal κ.

Teorema 2.24: Sea $f\colon X \to Y$, entonces son equivalentes:

1. f es continua.
2. Todo abierto en el codominio posee preimagen abierta.
3. Todo cerrado en el codominio posee preimagen cerrada.
4. Para todo $A \subseteq X$ se cumple que $f[\,\overline{A}\,] \subseteq \overline{f[A]}$.
5. Para todo $B \subseteq Y$ se cumple que $\overline{f^{-1}[B]} \subseteq f^{-1}[\,\overline{B}\,]$.
6. Para todo $B \subseteq Y$ se cumple que $f^{-1}[\operatorname{Int} B] \subseteq \operatorname{Int} f^{-1}[B]$.

Una conclusión del teorema anterior es que dos espacios son homeomorfos si «sus abiertos coinciden», esto da una mejor mirada al por qué de que se le diga *equivalencia topológica*.

Proposición 2.25: Son funciones continuas:

1. Aquellas de dominio discreto.
2. Aquellas de codominio indiscreto.
3. Las funciones constante.
4. La función identidad.
5. La composición de continuas. En consecuencia, los espacios topológicos (como objetos) y las funciones continuas (como flechas) conforman una categoría denotada Top.

Otra observación es que los homeomorfismos son los isomorfismos de Top.

Definición 2.26 – *Topología inicial*: Dado un conjunto X y una familia $\mathcal{F} := \{(X_i, \tau_i, f_i) : i \in I\}$ donde (X_i, τ_i) son espacios topológicos y $f_i\colon X \to X_i$, se define la *topología inicial sobre X por $\mathcal{F}$* como la topología más débil tal que las f_i son continuas. Nótese que la topología

[1] Formalmente este representante es el conjunto de los ordinales estrictamente menores que κ.

discreta hace cumplir la propiedad, así que esta bien definida.

Proposición 2.27: La topología inicial sobre X inducida por $\{(X_i, \tau_i, f_i) : i \in I\}$ es la topología que tiene por subbase a $f_i^{-1}[U_i]$ donde $U_i \in \tau_i$.

§2.1.2 Axiomas de numerabilidad.

Definición 2.28 – *Denso*: Decimos que un subconjunto D es *topológicamente denso* o T-denso si su clausura es el espacio. Se le dice la *densidad* de un espacio, al mínimo cardinal de sus subconjuntos densos, y se denota por $d(X)$.

Si $d(X) \leq \aleph_0$ entonces se dice que el espacio es *separable*.

Ejemplo.

- En el espacio indiscreto todo conjunto singular es denso. En consecuencia, el espacio indiscreto tiene densidad 1.
- En el espacio discreto un conjunto es denso syss es el espacio mismo. En consecuencia, un espacio discreto X tiene densidad $|X|$ y $D(\aleph_0)$ es separable.
- $\mathbb{R}$ como espacio métrico es separable, pues $\mathbb{Q}$ es denso.

Teorema 2.29: Se cumple que:

1. D es denso syss todo abierto contiene puntos de D.
2. Si D es denso entonces para todo abierto U se cumple que $\overline{U} = \overline{U \cap D}$.
3. Un conjunto que contiene a otro denso es también denso.
4. Si D_1 y D_2 son conjuntos densos, entonces dado cualquier conjunto $S \subseteq X$ se cumple que $(D_1 \setminus S) \cup (D_2 \cap S)$ es denso.

Demostración: La primera deriva de otro teorema, por lo que demostraremos la 2 por doble contención: Es inmediato que $\overline{U \cap D} \subseteq \overline{U}$. Sea $x \in \overline{U}$, luego para todo V entorno de x debe darse que $U \cap V \neq \varnothing$, y $U \cap V$ es abierto, luego por la propiedad 1, se obtiene que $(U \cap V) \cap D \neq \varnothing$, por ende, todo entorno de x interseca $U \cap D$, ergo, $x \in \overline{U \cap D}$. □

Sabemos que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}^c$ son densos en $\mathbb{R}$, luego la última propiedad nos sirve para formar nuevos conjuntos densos que puede verse como agarrar $\mathbb{Q}$, sacarle, por ejemplo, el intervalo $[0, 1]$ y reemplazarlo por $[0, 1]_{\mathbb{Q}^c}$ y así obtener otro conjunto denso nuevo.

Proposición 2.30: Sea $f\colon X \to Y$ suprayectiva continua, entonces $d(Y) \leq d(X)$.

Corolario 2.31: La imagen continua de espacios separables es separable.

Definición 2.32 (Característica, peso): Se le dice *peso* de un espacio al mínimo cardinal que posee alguna de sus bases y se denota por $w(X)$.

Se le llama *característica* de x, y lo denotamos por $\chi(x)$, al mínimo cardinal de una base de entornos de x. Se le llama la *característica* de un espacio al supremo del conjunto de las características de sus elementos, i.e., $\chi(X) := \sup \chi[X]$.

Se dice que un espacio cumple el *primer axioma de numerabilidad* (1AN) si $\chi(X) \leq \aleph_0$. Se dice que cumple el *segundo axioma de numerabilidad* (2AN) si $w(X) \leq \aleph_0$.

Proposición 2.33: Todo espacio pseudométrico es 1AN.

Teorema 2.34: Todo espacio 1AN separable es 2AN. En consecuencia, todo espacio pseudométrico separable es 2AN.

Proposición 2.35: Para todo espacio se cumple que:

$$\chi(x) \leq \chi(X) \leq w(X) \leq 2^{|X|}.$$

Corolario 2.36: Se cumple:

1. Todo espacio 2AN es 1AN.
2. Todo espacio numerable 1AN es 2AN.
3. Todo espacio finito es 2AN.

Teorema (AE) 2.37: Se cumple que $d(X) \leq w(X)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{B} = \{B_s\}_{s \in S}$ una base de cardinal $w(X)$, luego se define $D := \{a_s : s \in S\}$ donde a_s es un elemento elegido de B_s. Vemos que D es denso sobre X (¿por qué?), y con AE es fácil ver que $d(X) \leq |D| \leq |S| = w(X)$. □

Corolario (AEN) 2.38: Todo espacio 2AN es separable.

Es decir, un espacio 2AN es lo más fuerte en axiomas de separabilidad. Existen espacios que son separables pero no 1AN ($\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$, ej. 2.97) y espacios 1AN que no son separables ($[0, \omega_1)$, ej. 5.97).

Aplicación: Infinitud de primos. Es extraño, pero existe una demostración de la infinitud de primos empleando topología. La demostración viene descrita en el artículo **[0].**

Teorema 2.39: Hay infinitos números primos.

Demostración: Primero comenzaremos por definir una topología conveniente en $\mathbb{Z}$: Sea τ la familia de conjuntos U con la propiedad de que para todo $a \in U$ existe un $m \geq 1$ tal que $a + m\mathbb{Z} \subseteq U$. Veamos que τ es efectivamente una topología:

i) $\varnothing \in \tau$ trivialmente y $\mathbb{Z} \in \tau$ pues para todo $a \in \mathbb{Z}$ se cumple que $a + \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$.

ii) Sean $\{U_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos y sea $U := \bigcup_{i \in I} U_i$. Para todo $a \in U$ existe un i tal que $a \in U_i$ y como $U_i \in \tau$, entonces existe un $m \geq 1$ tal que $a + m\mathbb{Z} \subseteq U_i \subseteq U$.

iii) Sean $U_1, U_2 \in \tau$ y sea $U := U_1 \cap U_2$, entonces para todo $a \in U$ se cumple que $a \in U_1$ y $a \in U_2$; por definición de estar en τ existen $m_1, m_2 \geq 1$ tales que $a + m_1\mathbb{Z} \subseteq U_1$ y $a + m_2\mathbb{Z} \subseteq U_2$. Pero nótese que $a + m_1 m_2 \mathbb{Z} \subseteq a + m_1\mathbb{Z} \subseteq U_1$ y análogamente con U_2. Así pues $a + m_1 m_2 \mathbb{Z} \subseteq U$ con $m_1 m_2 \geq 1$.

Genial, he ahora la prueba: Como todo número es o invertible (de la forma ± 1 en $\mathbb{Z}$) o múltiplo de un primo, entonces se da que

$$\bigcup_{p \text{ primo}} p\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\} = \{\pm 1\}^c.$$

Nótese que cada $p\mathbb{Z}$ es cerrado: en efecto, para todo $a \in (p\mathbb{Z})^c$ se cumple que $a + p\mathbb{Z} \subseteq (p\mathbb{Z})^c$. Y $\{\pm 1\}$ no es abierto, pues todo abierto es claramente infinito, así que su complemento no es cerrado. Pero la unión finita de cerrados es cerrada, así que la unión ha de ser infinita y en consecuencia los primos también. $\square$

2.2 Axiomas de separación

Definición 2.40 – *Axiomas de separación I*: Una topología puede cumplir con algunas de las siguientes propiedades:

T_0 **(Kolmogorov)** Para todo par de puntos distintos uno admite un entorno que no contiene al otro.

T_1 Para todo par de puntos distintos ambos admiten entornos que no contienen al otro.

T_2 **(Hausdorff)** Todo par de puntos distintos poseen entornos disjuntos.

$T_{2,5}$ **(Completamente Hausdorff)** Todo par de puntos distintos poseen entornos cerrados disjuntos.

T_3 Un conjunto cerrado y un punto fuera de él admiten entornos disjuntos.

T_4 Un par de conjuntos cerrados disjuntos admiten entornos disjuntos.

Un espacio que cumple T_0+T_3 se dice *regular* y otro que cumple T_1+T_4 se dice *normal*.

Como pequeño ejercicio, la definición de los axiomas de separación utiliza entornos abiertos, reflexione por qué dicha distinción es irrelevante. Además, algunos libros definen regular como $T_1 + T_3$, esta definición es equivalente a decir que es $T_0 + T_3$ (¿por qué?). Cabe destacar que estaremos utilizando fuertemente a los axiomas de separación a lo largo del libro, por lo que es importante que el lector se acostumbre a ellos, y se recomienda anotar las definiciones en alguna nota o algún material de acceso rápido.

Ejemplo 2.41 (espacio de Sierpiński)**:** Se le llama *topología del punto excluido* p a

$$\tau = \{A \subseteq X : p \notin A \vee A = X\}.$$

La topología del punto excluido sobre un espacio no singular es siempre T_0 pero no T_1, pues el único entorno de p es X mismo. Además es T_4, pues todo par de cerrados no vacíos no son disjuntos ya que contienen a p. El ejemplo más básico es el *espacio de Sierpiński* el cual es una topología sobre $\{0, 1\}$ que que excluye al 0; i.e., $\{\varnothing, \{1\}, \{0, 1\}\}$ ⌟

Ejemplo 2.42 (topología cofinita)**:** Dado un espacio X infinito (¿qué ocurre si fuese finito?), se define la topología cofinita como aquella que posee por abiertos los conjuntos cuyo complemento es finito (¿por qué es una topología?). Es claro que es T_1 pues dados x, y distintos se cumple que $X_{\neq x}$ es entorno de y que no contiene a x y viceversa. No obstante, no es de Hausdorff, pues siendo F_1, F_2 finitos se cumple que $X \setminus F_1 \cap X \setminus F_2 = X \setminus (F_1 \cup F_2)$ y la unión de finitos es finita, luego la intersección finita de abiertos no vacíos es nunca vacía y en particular los entornos de cualquier par de puntos siempre se intersecan. ⌟

En general la propiedad de ser de Hausdorff es estándar para casi todos los espacios topológicos que se suelen investigar, sin embargo, la topología de Zariski es un ejemplo de un espacio «común» que no es de Hausdorff.

Teorema 2.43: Se cumple:

1. Todo espacio pseudo-métrico T_0 es métrico.
2. Todo espacio métrico es de Hausdorff.
3. Un espacio es T_0 syss para todo $x \neq y$ se cumple que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. De hecho $\{x, y\} \not\subseteq \overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$.
4. Un espacio es T_1 syss sus subconjuntos finitos son cerrados.
5. Un espacio X es de Hausdorff syss la diagonal $\Delta := \{(x, x) : x \in X\}$ es cerrada en X^2.
6. Un espacio T_1 es regular syss para todo entorno sub-básico V de x existe un entorno U tal que $U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.
7. Para espacios se cumple:

$$\text{Normal} \implies \text{Regular} \implies T_{2,5} \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0.$$

Demostración:

5. $\Longleftarrow$. Si Δ es cerrado, entonces para todo $p \notin \Delta$ se cumple que $p \notin \overline{\Delta}$. Los puntos fuera de Δ son pares de coordenadas distintas, y hemos probado que un punto es adherente a Δ syss todo entorno interseca a Δ, ergo, hay un entorno de (x, y) disjunto de Δ. Dicho entorno contiene a un entorno básico $U_{(x,y)}$, los que sabemos son un producto de abiertos V_x, V_y en X. Como son disjuntos, podemos concluir que los pares (x, x) e (y, y) no pertenecen a $V_x \times V_y$. No obstante sabemos que $x \in V_x$ e $y \in V_y$, luego $y \notin V_x$ y $x \notin V_y$, que es la propiedad de Hausdorff.

   El caso restante queda al rector.

6. $\Longrightarrow$. Notemos inmediatamente que $x \notin V^c \subseteq \overline{V^c}$ el cual es cerrado, luego admiten entornos abiertos $x \in U$ y $\overline{V^c} \subseteq W$ disjuntos. Luego $U \subseteq W^c$ y se cumple que $\overline{U} \subseteq W^c \subseteq \operatorname{Int} V \subseteq V$.

   $\Longleftarrow$. Sea C un cerrado que no contenga a x, luego por definición de sub-base existen $V_1, \dots, V_n$ sub-básicos tales que $x \in \bigcap_{i=1}^n V_i \subseteq C^c$. Por enunciado, existen entornos W_i de x tales que $\overline{W}_i \subseteq V_i$. Luego $x \in U_1 := \bigcap_{i=1}^n W_i$ y

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i^c \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{W}_i^c =: U_2.$$

   Donde U_1 y U_2 son disjuntos.

7. Probaremos que regular $\Longrightarrow$ $T_{2,5}$, y para ello demostraremos que regular $\Longrightarrow$ T_2: Sea x, y distintos, como el espacio es T_0 existe un entorno abierto S de alguno, que sin perdida de generalidad supondremos que es x, que no contiene al otro. Luego S^c es un cerrado que no contiene a x, ergo, admiten entornos abiertos disjuntos U_x e U_s por T_3. Pero $y \in S^c \subseteq U_s$ y $x \in U_x$ con $U_x \cap U_s$ disjuntos.

   Por la propiedad anterior sabemos que dichos entornos admiten subentornos cerrados y que son disjuntos, lo que es la definición de $T_{2,5}$. $\square$

Las siguientes son comparaciones interesantes de cardinales, opcionales por cierto:

Lema 2.44: En un espacio T_1:

Densidad finita $\iff$ cardinal finito $\Longrightarrow$ carac. fínita $\Longrightarrow$ discreto.

DEMOSTRACIÓN: Probaremos que característica finita implica discreto: Esto significa que todo x posee una base de entornos finito $\mathcal{B}(x)$, como los elementos de dicha base son abiertos y la intersección finita de abiertos es abierta, entonces $\bigcap \mathcal{B}(x) = \{x\} \in \tau$. $\square$

Teorema 2.45: Se cumple:

1. Si X es T_0 entonces $|X| \leq 2^{w(X)}$.
2. Si X es de Hausdorff entonces $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$.
3. (AE) Si X es de Hausdorff entonces $|X| \leq d(X)^{\chi(X)}$.

4. Si X es regular entonces $w(X) \leq 2^{d(X)}$.

Demostración:

1. Sea $\mathcal{B}$ una base de cardinal $w(X)$. Luego definimos $\mathcal{B}(x) := \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$ y la propiedad T_0 equivale a que para todo $x \neq y$ se cumpla $\mathcal{B}(x) \neq \mathcal{B}(y)$, luego el conjunto de los $\mathcal{B}(x)$ es equipotente a X y hay a lo más $2^{w(X)}$ de dichos conjuntos, por lo que $|X| \leq 2^{w(X)}$.

2. Sea D un conjunto denso de cardinal $d(X)$ y $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ una familia de bases de entornos de x, entonces se define $\mathcal{D}(x) := \{U \cap D : U \in \mathcal{B}(x)\}$. Luego, queda al lector probar que
$$\bigcap_{A\in\mathcal{D}(x)} \overline{A} = \{x\}$$
por lo que $\mathcal{D}(x) \neq \mathcal{D}(y)$ para $x \neq y$. Notemos que todo $\mathcal{D}(x) \subseteq \mathcal{P}(D)$, por lo que hay $2^{2^{d(X)}}$ familias $\{\mathcal{D}(x)\}_{x\in X}$.

3. Sea $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ una familia de bases de entornos de x, resp. de cardinal $\leq \chi(X)$. Entonces se define $\mathcal{D}_0$ como el conjunto $[D]^{\leq\chi(X)}$ el cual hemos probado posee cardinal $d(X)^{\chi(X)}$ (para $d(X)$ infinito, de lo contrario $|X| = d(X)$ y el resultado es trivial). Definimos $c : \tau \to D$ una función de elección tal que $c(U) \in U$, luego definimos $D(x) := \{c(U) : U \in \mathcal{B}(x)\}$ que evidentemente cumple que $|D(x)| \leq \chi(X)$ por lo que $D(x) \in \mathcal{D}_0$. Seguido definimos $\mathcal{D}_0(x) := \{U \cap D(x) : U \in \mathcal{B}(x)\} \subseteq \mathcal{D}_0$. Como $x \in \overline{U \cap D(x)} \subseteq \overline{U}$, se cumple que la intersección de la clausura de $\mathcal{D}_0(x)$ es $\{x\}$ para todo punto del espacio, ergo, dichos conjuntos son distintos respecto a todo punto. Como son subconjuntos de $\mathcal{D}_0$ y son a lo más de tamaño $\chi(X)$ se cumple que
$$|X| \leq |\mathcal{D}_0|^{\chi(X)} = \left(d(X)^{\chi(X)}\right)^{\chi(X)} = d(X)^{\chi(X)}.$$
(Si $\chi(X)$ es infinito, en caso contrario, el espacio es discreto y es trivial.)

4. Sea D denso en X y de cardinal $d(X)$, luego se define $\mathcal{B} := \{\operatorname{Int} \overline{U} : U \subseteq D\}$. Basta ver que $\mathcal{B}$ sea base de X. Lo que se da por la propiedad que ya probamos. Como $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(D)$ se da que $w(X) \leq 2^{d(X)}$. □

Teorema 2.46 (Unicidad del límite): El límite (si existe) de una sucesión en un espacio de Hausdorff es único. También si $f(x_0) \to L$ donde $f\colon X \to Y$ con Y de Hausdorff, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

Teorema (DE) **2.47 – *Lema de Urysohn***: En un espacio normal se cumple que dados dos conjuntos A, B cerrados disjuntos, existe una función $f\colon X \to [0,1]$ tal que es continua y que $f[A] = \{0\}$, y $f[B] = \{1\}$.

Demostración: Vamos a construir una sucesión de abiertos $(V_{r_i})_{i\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\overline{V}_r \subseteq V_s \iff r \leq s$$

y donde los $r_i \in \mathbb{Q}$. Notemos que como los racionales son numerables y hay infinitos de ellos en cada intervalo no-trivial (¿por qué?) hay una sucesión $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que es una biyección con $r_i\colon \mathbb{N} \to [0,1]_{\mathbb{Q}}$. Ésto nos permitirá construir nuestra sucesión de abiertos de forma inductiva. Además reordenaremos la sucesión de forma que $r_0 = 0$ y $r_1 = 1$.

En primer lugar, sea V_0 (pues todo espacio normal es regular) cualquier abierto que satisfaga

$$A \subseteq V_0 \subseteq \overline{V}_0 \subseteq B^c$$

y sea $V_1 := B^c$. Así, proseguimos para que se cumpla que

$$\phi(n) \equiv \forall i, j \leq n\ (\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j} \iff r_i \leq r_j).$$

Si $\phi(n)$ se cumple para n, entonces se elige r_i, r_d con $i, d \leq n$ como los términos más cercanos a r_{n+1} por la izquierda y por la derecha resp. y se elige $V_{r_{n+1}}$ como cualquiera que hace cumplir que

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_{n+1}} \subseteq \overline{V}_{r_{n+1}} \subseteq V_{r_d}.$$

Finalmente se construye f como

$$f(x) := \begin{cases} \inf\{r : x \in V_r\} & x \in V_1 \\ 1 & x \notin V_1 \end{cases}$$

Y probaremos que es efectivamente continua: por definición basta probar que las preimágenes de abiertos básicos son abiertos. Los abiertos básicos de $[0,1]$ son de la forma $[0,a)$ y $(b,1]$ con $a, b \in (0,1)$. Veamos que $f(x) < a$ syss existe algún $r < a$ tal que $x \in V_r$, ergo:

$$f^{-1}\big[[0,a)\big] = \bigcup\{V_r : r < a\},$$

la cual es abierta por ser la unión de abiertos. Mientras que $f(x) > b$ syss existe algún $r > b$ tal que $x \notin V_r$, lo que implica que existe algún $r' > b$ tal que $x \notin \overline{V}_{r'}$, por ende:

$$f^{-1}\big[(b,1]\big] = \bigcap\{(\overline{V}_r)^c : r > b\} = X \setminus \bigcap\{\overline{V}_r : r > b\},$$

la cual es abierta pues es el complemento de un cerrado. Por lo tanto, es una aplicación continua. □

En virtud del resultado anterior llamamos a ese tipo de funciones como de Urysohn entre A y B. También se utiliza la expresión *completamente separados*.

Lema 2.48: Supongamos que X es un espacio T_1 en donde para todo cerrado C contenido en un abierto U existe una sucesión de abiertos $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $C \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i$ y $\overline{U}_i \subseteq U$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces X es normal.

Demostración: Sean A, B cerrados disjuntos. Considerando $C := A$ y $U := B^c$ entonces existe una sucesión de abiertos $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i, \quad \forall i \in \mathbb{N},\ B \cap \overline{U}_i = \varnothing.$$

Análogamente, con $C' := B$ y $U' := A^c$ se obtiene una sucesión de abiertos $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tales que

$$B \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i, \quad \forall i \in \mathbb{N},\ A \cap \overline{V}_i = \varnothing.$$

Luego, definamos

$$G_i := U_i \setminus \bigcap_{j\leq i} V_j, \quad H_i := V_i \setminus \bigcap_{j\leq i} U_j.$$

que resultan formar sucesiones de abiertos (¿por qué?), tales que

$$A \subseteq G := \bigcup_{i=0}^{\infty} G_i, \quad B \subseteq H := \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i.$$

(¿por qué?).

Sólo basta probar que G y H son disjuntos. Si no lo fueran habría algún $x \in G_i$ y $x \in H_j$ para algunos $i, j \in \mathbb{N}$, no obstante, notemos que por definición de G_i, se cumple que $G_i \cap H_j = \varnothing$ para $j \leq i$; y viceversa, por lo que no existen tales “x”. Por ende, el espacio es T_4, y por definición es normal. □

Teorema 2.49: Todo espacio regular 2AN es normal.

Demostración: Sea C un cerrado y V un abierto que le contiene. Todo $x \in C$ posee un entorno básico tal que $U_x \subseteq \overline{U}_x \subseteq V$ y evidentemente $C \subseteq \bigcup_{x\in C} U_x$. Pero como la base es numerable, entonces los U_x lo son, lo que forma una sucesión de abiertos que cumple con la condición del lema anterior, ergo, el espacio es normal. □

Teorema 2.50: Todo espacio regular numerable es normal.

Pista: Vea la prueba anterior. □

Los teoremas relacionados a Urysohn otorgan una nueva perspectiva para lo que significa la separación topológica, de ello se introducen nuevos axiomas, para los cuales debemos probar el siguiente teorema de antemano. Para ello, introducimos las siguientes definiciones:

Definición 2.51: Decimos que un conjunto A es un *conjunto cero* si existe alguna función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f^{-1}(0) = A$. Un conjunto es un *cocero*[2] si su complemento es un cero.

Decimos que un conjunto es un[3] F_σ si es la unión numerable de cerrados, y un[4] G_δ si es la intersección numerable de abiertos.

Trivialmente todo cerrado (resp. abierto) es un conjunto F_σ (resp. G_δ).

Ejemplo. Trabajaremos sobre la topología usual sobre $\mathbb{R}$ y probaremos tres casos distintos para F_σ.

- $\{[k, k+1]\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de cerrados, y por propiedad arquimediana se cumple que su unión es $[0, +\infty)$ que es cerrado.
- $\{[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]\}_{k>0}$ es una familia numerable de cerrados, cuya unión es $(-1, 1)$ que es abierto.
- $\{\{x\} : x \in \mathbb{Q}\}$ es también una familia numerable de cerrados y su unión es $\mathbb{Q}$ que no es ni cerrado ni abierto.

Proposición 2.52: Se cumple:

1. Todo conjunto cero (resp. cocero) es cerrado (resp. abierto).

[2] Castillo [**0**] emplea *cero* y *cocero*, mientras que Engelking [**0**] opta por «funcionalmente cerrado» y «funcionalmente abierto».

[3] fr. *fermé*: cerrado, *somme*: suma.

[4] de. *gebiet*: abierto, *durchschnitt*: intersección.

2. La unión e intersección de finitos conjuntos ceros (resp. coceros) es un cero (resp. cocero).

3. La intersección (resp. unión) de numerables conjuntos cero (resp. cocero) es un cero (resp. cocero).

4. La preimagen continua de un conjunto F_σ (resp. G_δ) es un conjunto F_σ (resp. G_δ).

Demostración: Probaremos la 2 y la 3 solo para ceros (pues luego es trivial ver que se cumple para coceros): Si C_1, C_2 son ceros por las funciones f_1, f_2, entonces se cumple que

$$f(x) := \frac{1}{2}(f_1(x) + f_2(x))$$

demuestra que $C_1 \cap C_2$ es un cero. Para ver que $C_1 \cup C_2$ lo es, la siguiente función:

$$g(x) := f_1(x) \cdot f_2(x),$$

lo comprueba.

Sean $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de ceros por las funciones $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$, entonces

$$f(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i(x)}{2^{i+1}}$$

es continua y prueba que la intersección lo es. □

Proposición 2.53: Se cumple:

1. Todo conjunto cero (resp. cocero) es G_δ (resp. F_σ).

2. (DE) En un espacio normal todo cerrado G_δ (resp. abierto F_σ) es cero (resp. cocero).

Demostración:

1. Es claro que $\{0\}$ es cerrado en $[0, 1]$, y basta notar que $\{[0, 1/k)\}_{k>0}$ es una familia de abiertos cuya intersección es $\{0\}$ para ver que dicho punto es un conjunto G_δ. Luego ambas se preservan mediante preimágenes continuas.

2. Sea A un cerrado G_δ, por ende, A^c es un conjunto F_σ, i.e., $A^c = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$ donde C_i es cerrado. Mediante el lema de Urysohn se cumple que existen funciones continuas $f_i\colon X \to [0,1]$ tales que $f_i[A] = \{0\}$ y $f_i[C_i] = \{1\}$. Luego se define $g\colon X \to [0,1]$ como

$$g(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i(x)}{2^{i+1}}$$

luego es continua, $g[A] = \{0\}$, pero falta probar que si $x \notin A$ entonces $g(x) \neq 0$. Por definición, $x \in A^c$, luego $x \in C_i$, para algún $i \in \mathbb{N}$, luego $g(x) \geq \frac{f_i(x)}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^{i+1}} > 0$, como se quería probar. □

Teorema 2.54: Para todo par de ceros disjuntos A, B existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f^{-1}[\{0\}] = A$ y $f^{-1}[\{1\}] = B$.

DEMOSTRACIÓN: Como A, B son ceros existen funciones $g, h\colon X \to [0,1]$ continuas tales que $g^{-1}[0] = A$ y $h^{-1}[0] = B$. Luego

$$f(x) := \frac{g(x)}{g(x) + h(x)},$$

cumple lo pedido. □

La última se asemeja mucho a la cualidad de estar completamente separados, mas ésta es una propiedad más fuerte, pues dice que f toma valor 0 **sólo** en A y 1 **sólo** en B.

Teorema 2.55 (Vedenissoff): En un X espacio T_1 son equivalentes:

1. (DE) Todo cerrado es G_δ, o equivalentemente, todo abierto es F_σ.
2. Todo cerrado es un cero.
3. Para todo par de cerrados disjuntos A, B existe $f\colon X \to [0,1]$ continua tal que $f^{-1}[\{0\}] = A$ y $f^{-1}[\{1\}] = B$.

DEMOSTRACIÓN: (1) $\implies$ (2). Por la proposición 2.48 se cumple que todo P-espacio T_1 es normal, luego, por la proposición anterior, todo cerrado G_δ es un cero.

(2) $\implies$ (3). Basta ver el teorema anterior.

(3) $\implies$ (1). Sea C un cerrado no vacío y propio, como es propio existe un punto fuera de él $\{x\}$, y como ambos conjuntos son cerrados disjuntos,

entonces por (3) existe una función continua f tal que $f^{-1}[\{0\}] = C$ y $f^{-1}[\{1\}] = \{x\}$, luego C es por definición un cero. Y como todo cero es G_δ, entonces queda demostrado. □

Definición 2.56 – *Axiomas de separación II*: Sean A, B subconjuntos de un espacio topológico X. Se dice que A y B están *separados* si $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$.

Además de los axiomas de separación conocidos se unen los espacios:

Urysohn Todo par de puntos distintos están completamente separados.

$T_{3,5}$ o T_Π Un punto y un conjunto cerrado que le excluye están completamente separados.

T_5 Todo par de conjuntos separados admiten entornos disjuntos.

T_6 Si todo cerrado es G_δ.

Si un espacio es $T_0 + T_{3,5}$ se dice *de Tychonoff*, uno $T_1 + T_5$ se dice *completamente normal*, y otro $T_1 + T_6$ se dice *perfectamente normal*.

Ejemplo. El espacio de Sierpiński es T_5, pero como vimos, no es T_1; así pues no es completamente normal. Tampoco es T_6 ya que $\{1\}$ es un cerrado que no es G_δ.

Ejemplo 2.57 (topología de partición)**:** Sea X un espacio y $\{A_i\}_{i\in I}$ una partición estricta de él, luego todas las posibles uniones forman una topología la que llamamos *topología de partición*, un tipo de ella muy sencilla es la topología en $\mathbb{N}$ tal que los abiertos son $\varnothing, \mathbb{N}$, el conjunto de pares y el de los impares. La cualidad de la topología de partición es que todo conjunto es abierto syss es cerrado, en particular, toda topología de partición es T_i con $i \geq 3$, pero si alguno de los A_i no es singular, entonces la topología de partición no es T_0, y por ende, no es T_1 ni T_2 ni $T_{2,5}$. ⌟

2.3 Sobre continuidad

Definición 2.58: Se dice que una aplicación $f\colon X \to Y$ continua es abierta (resp. cerrada) si la imagen de todo conjunto abierto (resp. cerrado) es abierta (resp. cerrado).

Como hemos probado, todo homeomorfismo es una función abierta y cerrada. Si $\{y\}$ es un cerrado en Y, entonces $f\colon X \to Y$ dado por $f(x) = y$ es cerrado.

Proposición 2.59: Una función $f\colon X \to Y$ es abierta syss existe una base de X tal que la imagen de los abiertos básicos es abierta.

Teorema 2.60: Si $f\colon X \to Y$ es una biyección, entonces las siguientes son equivalentes:

1. f es un homeomorfismo.
2. f es cerrada.
3. f es abierta.

Proposición 2.61: Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una partición (no necesariamente estricta) de X por abiertos, y $f_i\colon U_i \to Y$ son una familia de funciones continuas compatibles, entonces $f := \bigcup_{i\in I} f_i$ es continua.

DEMOSTRACIÓN: Sea V un abierto de Y, luego se cumple que

$$f^{-1}[V] = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}[V]$$

como la unión arbitraria de abiertos es abierta comprobamos que f es continua. □

Proposición 2.62: Sean $\{C_i\}_{i\in I}$ una partición (no necesariamente estricta) de X localmente finita por cerrados y $f_i\colon C_i \to Y$ una familia de funciones continuas compatibles. Entonces $f := \bigcup_{i\in I} f_i$ es continua.

PISTA: Análoga a la versión con abiertos. □

En particular la proposición vale para finitos cerrados.

Teorema 2.63: Si $f, g\colon X \to Y$ son continuas e Y es de Hausdorff, entonces $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

DEMOSTRACIÓN: Probaremos que $A := \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ es abierto. Si $f(x) \neq g(x)$, entonces como Y es de Hausdorff, por definición existen U_1, U_2 tales que $f(x) \in U_1$ y $g(x) \in U_2$ pero $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, luego $f^{-1}[U_1] \cap g^{-1}[U_2]$ es un entorno de x contenido en A, luego x es interior a A. □

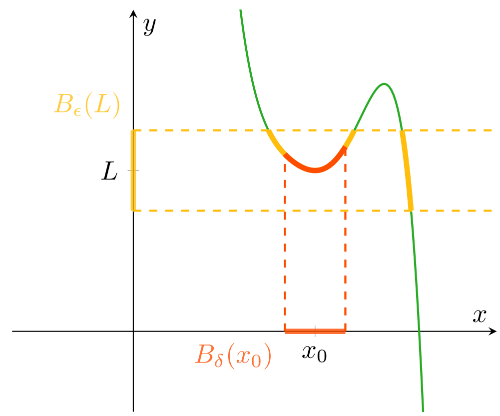


Figura 2.2. Continuidad en funciones entre espacios métricos.

Corolario 2.64: Si $D \subseteq X$ es denso, Y es de Hausdorff y $f: D \to Y$ es una función continua que admite una extensión continua a X, entonces dicha extensión es única.

Corolario 2.65:

$$|C(\mathbb{R}, \mathbb{R})| = \mathfrak{c}.$$

§2.3.1 Continuidad en espacios métricos. Por el momento sólo hemos definido los límites y la noción de forma general mediante topología, pero suele ser común que la forma de enseñar es particular a $\mathbb{R}$. Las definiciones se desprenden automáticamente del que $\mathbb{R}$ es un espacio métrico:

Definición 2.66 – *Límites y continuidad (espacio métrico)*: Dada una aplicación $f : X \to Y$, donde X, Y son subconjuntos de M, se escribe $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ donde $x_0 \in X^{\mathrm{d}}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $x \in B_\delta(x_0; X_{\neq x_0})$ (o $d(x, x_0) < \delta$ y $x \in X_{\neq x_0}$) implica $f(x) \in B_\epsilon(L; Y)$ (o $d(f(x), L) < \epsilon$). Igualmente se dice que f es continua en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Y f se dice continua en general si lo es en todo punto de X^{d}.

Como $\mathbb{R}$ es métrico, entonces es de Hausdorff y ya probamos la unicidad del límite. Pero también hay otras definiciones importantes:

Proposición 2.67: Se cumple:

1. Si $f: X \to \overline{\mathbb{M}}$ converge en $x_0 \in X^{\mathrm{d}}$, entonces está acotada cerca de x_0.

2. La imagen de un conjunto acotado, bajo una función continua, está acotada.

Proposición 2.68: En $\overline{\mathbb{M}}$:

1. Un punto está a distancia nula de un conjunto syss es adherente a él.
2. Dos conjuntos están a distancia nula syss no están separados.

Teorema 2.69: Todo espacio métrico completo es perfectamente normal.

DEMOSTRACIÓN: Sea A, B cerrados en M, luego definimos

$$f(x) := \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Es claro que $f[A] = \{0\}$ y $f[B] = \{1\}$. Por la proposición anterior la función está bien definida y ya hemos visto que la aritmética sobre continuas en continua. Luego f es de Urysohn. □

Esta es un propiedad muy importante, pues hemos visto que los distintos niveles de separación de un espacio lo dotan de más propiedades, y mediante el teorema anterior hemos probado que un espacio métrico admite la mayor clasificación.

Definición 2.70 – *Propiedad de Lipschitz*: Se dice que una función $f : M_1 \to M_2$ donde M_1, M_2 son pseudo-métricos tiene la *propiedad de Lipschitz* si existe un $\lambda > 0$ tal que para todo $x, y \in M$ se cumple que

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

Teorema 2.71: Toda función entre espacios métricos con la propiedad de Lipschitz es continua.

Corolario 2.72: La norma de un espacio normado es continua.

§2.3.2 Cálculo de límites.

Teorema 2.73: Si $\mathbb{k}$ es un cuerpo métrico, entonces la aplicación $f : \mathbb{k}_{\neq 0} \to \mathbb{k}$ definida como $f(x) := x^{-1}$ es continua.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$ y $x \in \mathbb{k}_{\neq 0}$, como $\mathbb{k}$ es métrico y no pseudométrico, podemos afirmar que $|x| > 0$, luego sea

$$\delta := \frac{|x|}{2} \min\{1, |x|\epsilon\},$$

si $|x-y| < \delta$, entonces por desigualdad triangular $|x| < |x-y|+|y| < \frac{|x|}{2}+|y|$, luego $|y| > |x|/2$, lo que equivale a que $1/|y| < 2/|x|$.

Finalmente

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| = \frac{|x-y|}{|x|\,|y|} < \frac{|x|\epsilon}{2|y|} < \epsilon.$$

□

Finalmente por composición de continuas podemos confirmar que, por ejemplo, sobre cualquier cuerpo métrico (en particular sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$) se cumple que todo polinomio es continuo.

Proposición 2.74: En $\mathbb{R}$ dado un $n \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ cualquiera se cumple que $\sqrt[n]{\ }: [0, \infty) \to [0, \infty)$ es continua.

Demostración: Ya vimos que $f(x) := x^n$ es continua y es una biyección sobre $[0, \infty)$ pues $\sqrt[n]{\ }$ es su inversa. Ahora veremos que es una función abierta, sean $0 \leq a < b$, luego si $x \in (a, b)$ entonces $a < x < b$, por lo que, $a^n < x^n < b^n$, ergo $f(x) \in \big(f(a), f(b)\big)$, es decir, $f\big[(a, b)\big] = \big(f(a), f(b)\big)$. Asimismo se comprueba que $f\big[[0, b)\big] = \big[0, f(b)\big)$. Como la imagen de los básicos es abierta, la función es abierta, luego tanto f como su inversa, la raíz n-ésima, son homeomorfismos. □

2.4 Construcción de espacios

§2.4.1 Subespacios.

Proposición 2.75: Sea $A \subseteq X$, el conjunto $\tau_A := \{U \cap A : U \in \tau\}$ es una topología en A.

Definición 2.76 – *Subespacio*: Dado un subconjunto A no vacío de X, el conjunto τ_A definido por la proposición anterior se dice *topología relativa en* A y el par (A, τ_A) se dice un *subespacio* de X. Cabe destacar que denotaremos $\operatorname{Int}_A B$, $\partial_A B$ y $\overline{B}_A$ al interior, la frontera y la clausura de B respecto de A.

Se dice que $f\colon X \to Y$ es un *encaje* si $f\colon X \to f[X]$ es un homeomorfismo. De existir un encaje de X a Y se dice que X está *encajado* en Y.

Se dice que una propiedad de un espacio es *hereditaria* si todo subespacio también la posee. Si una propiedad no es generalmente hereditaria, pero se quiere especificar que en un caso particular lo es, entonces añadiremos el prefijo «hereditariamente», e.g., espacio hereditariamente normal.

Proposición 2.77: Sea A un subespacio de X. Un conjunto $B \subseteq A$ es cerrado en A syss existe un cerrado C en X tal que $B = A \cap C$. Se cumple también que $\overline{B}_A = \overline{B} \cap A$.

Demostración: Está claro que si $B := A \cap C$ con C cerrado en X entonces B es cerrado en A. Si B es cerrado en A entonces $A \setminus B$ es abierto, ergo, $A \cap B^c = A \cap U$ con U abierto. Por el contrario, si B es cerrado en A, entonces $B^c \cap A$ es abierto en A, ergo, existe U abierto en X tal que $A \cap B^c = A \cap U$. Probaremos que $F := U^c \cap A = B \cap A = B$: Es claro que

$$(A \cap U) \cup (A \cap U^c) = A \cap (U \cup U^c) = A = (A \cap B^c) \cup (A \cap F) = A \cap (B^c \cup F).$$

Luego $B^c \cup F \supseteq A$, veamos que la desigualdad se mantiene tras considerar la intersección con B:

$$B \subseteq (B^c \cup F) \cap B = (B \cap B^c) \cup (B \cap F) = B \cap F \subseteq B$$

Finalmente es claro que $B \cap F = B$, luego $F \supseteq B$. □

Proposición 2.78: Todo subespacio está encajado en su espacio original y la inclusión es dicho encaje.

Teorema 2.79: Son hereditarios:

1. Los axiomas de separación T_i con $i \leq 3{,}5$.
2. La cualidad de ser perfectamente normal.
3. Los axiomas de numerabilidad (1AN, 2AN).

4. La cualidad de ser separable.

Demostración: Probaremos que los axiomas de separación indicados son hereditarios. $T_2, T_{2,5}$, T_3 y $T_{3,5}$ salen por definición. T_0 y T_1 de propiedades básicas vistas en el teorema 2.43. La cualidad de ser perfectamente normal sale de que todo cerrado es funcionalmente cerrado. Los axiomas de numerabilidad y separabilidad son triviales. □

Teorema 2.80: En un espacio T_1 son equivalentes:

1. El espacio es hereditariamente normal.
2. Todo subespacio abierto es normal.
3. El espacio es completamente normal.

En consecuencia, ser completamente normal es hereditario.

Demostración: Es claro que (1) $\implies$ (2).

(2) $\implies$ (3). Sean A, B conjuntos separados, es decir, tales que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$. Definimos $S := (\overline{A} \cap \overline{B})^c$, notemos que $\overline{A}_S$ y $\overline{B}_S$ son cerrados disjuntos en S, luego admiten entornos abiertos disjuntos U, V en S que es abierto. Y también como A, B están separados, entonces $A, B \subseteq S$, luego U, V les separan en X.

(3) $\implies$ (1). Sea $S \subseteq X$ cualquiera y sean $A, B \subseteq S$ cerrados disjuntos en S, vamos a probar que están separados en X. En efecto, si A cerrado en S entonces $A = C_A \cap S$ con C_A cerrado en X, lo mismo con B, luego

$$\overline{A} \cap B = \overline{C_A \cap S} \cap (C_B \cap S) \subseteq (C_A \cap C_B) \cap S = \varnothing,$$

la otra igualdad es análoga, de modo que admiten entornos disjuntos, luego se les intersecan en S para ver que son entornos disjuntos en S, lo que es la definición de ser espacio normal. □

Teorema 2.81: Entre espacios se cumple la siguiente cadena de implicancias:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \text{PN} & \Longrightarrow & \text{CN} & \Longrightarrow & \text{N} & \overset{\text{(DE)}}{\Longrightarrow} & \text{Tyc} & \Longrightarrow & \text{Ury} & & & & \\ & & & & & & \Downarrow & & \Downarrow & & & & \\ & & & & & & \text{Reg} & \Longrightarrow & T_{2,5} & \Longrightarrow & T_2 & \Longrightarrow & T_1 & \Longrightarrow & T_0 \end{array}$$

Todas las flechas del teorema anterior son implicancias estrictas: Hay espacios que son T_0 pero no T_1 (espacio de Sierpiński, ej. 2.41), espacios que son T_1 pero no T_2 (espacio infinito cofinito, ej. 2.42), espacios que son T_2 pero no $T_{2,5}$ (cuadrado simplificado de Arens, ej. 2.93), espacios que son de Urysohn pero no regulares (tabla de Alexandroff, ej. 5.99), espacios que son regulares pero no Urysohn (sacacorchos de Tychonoff, ej. 5.100), espacios que son regulares y de Urysohn pero no de Tychonoff (sacacorchos reducido de Tychonoff, ej. 5.100), espacios que son de Tychonoff pero no normales ($\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$, ej. 2.97), espacios que son normales pero no completamente normales (tabla de Tychonoff, ej. 5.98) y espacios que son completamente normales pero no perfectamente normales ($[0,\omega_1]$, ej. 5.97).

§2.4.2 Suma y producto de espacios.

Definición 2.82 – *Suma de espacios*: Siendo $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, entonces se denota $\bigoplus_{i\in I} X_i$ al espacio topológico cuyo conjunto es $\bigcup_{i\in I}\{i\}\times X_i$ (es decir, la unión disjunta de los X_i's), y cuyos abiertos U son los conjuntos tales que $U\cap\{i\}\times X_i$ es abierto en X_i.

En general, denotamos por $\iota_j\colon X_j\to\bigoplus_{i\in I} X_i$ a la inclusión canónica.

Proposición 2.83: *F es cerrado en $\bigoplus_{i\in I} X_i$ syss $F\cap X_i$ lo es para todo $i\in I$.*

Corolario 2.84: Cualquier unión de X_j's es cerrada y abierta en $\bigoplus_{i\in I} X_i$.

Proposición 2.85: Si un espacio X puede expresarse como la unión de una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ de subespacios abiertos disjuntos dos a dos, entonces $X=\bigoplus_{i\in I} X_i$.

Teorema 2.86: Dada una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ de espacios topológicos, entonces:

1. Las inclusiones canónicas, $\iota_j\colon X_j\to\bigoplus_{i\in I} X_i$, son continuas.

2. Una función $f\colon \bigoplus_{i\in I} X_i \to Y$ es continua syss $\iota_j \circ f\colon X_j \to Y$ lo es para todo $j \in I$.

Es decir, la suma de espacios es un coproducto en Top.

Definición 2.87 – *Producto de espacios*: Se le llama *topología producto* a la topología inicial inducida por $\{(X_i, \pi_i)\}_{i\in I}$ donde π_i es la proyección, y se denota $\prod_{i\in I} X_i$.

Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, se le llama *topología por cajas* a aquella inducida por la base:

$$\left\{\prod_{i\in I} U_i : \forall i \in I\ (U_i \in \tau_i)\right\}$$

y se denota $\prod_{i\in I}^{\text{Box}} X_i$.

Se dice que una propiedad es κ-multiplicativa si toda topología producto $\prod_{i\in I} X_i$ en donde todo factor posee dicha propiedad e $|I| \leq \kappa$ conserva dicha propiedad. Si no se especifica, entonces se asume que se aplica para todo cardinal.

Para productos de finitos espacios topológicos, la topología por cajas y producto coinciden; no obstante la diferencia se da cuando se consideran productos infinitos. En cuyo caso, en la topología por cajas los básicos son productos de abiertos, mientras que en la producto los básicos son productos de espacios con finitos abiertos; esa distinción es fundamental. Por definición, la topología por cajas es más fuerte que la producto.

Proposición 2.88: Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia tal que $A_i \subseteq X_i$ para todo $i \in I$, entonces en la topología producto se tiene que

$$\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}. \tag{2.1}$$

Pista: Utilice el hecho de que el entorno de todo punto adherente interseca al conjunto. □

Corolario 2.89: Un producto es cerrado en la topología producto syss todos los factores lo son en sus respectivos espacios.

Corolario 2.90: Un producto es denso en la topología producto syss todos los factores lo son en sus respectivos espacios.

Teorema 2.91: Dada una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ de espacios topológicos, entonces:

1. Las proyecciones canónicas, $\pi_j\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_j$, son continuas.
2. Una función $f\colon Y \to \prod_{i\in I} X_i$ es continua syss $f \circ \pi_j\colon Y \to X_j$ lo es para todo $j \in I$.

Es decir, el producto de espacios es un producto (en el sentido categórico) en Top.

Enfatizo el como un resultado así de fuerte resulta ser meramente un corolario de la proposición 2.88. Una aplicación trivial es considerar una función desde $\mathbb{R}$ a cualquier espacio euclídeo.

Teorema 2.92: Los axiomas de separación T_i son multiplicativos para $i \leq 3{,}5$. Si un producto es no vacío y T_i entonces los factores son T_i para $i \leq 6$.

Ejemplo 2.93 (cuadrado simplificado de Arens)**:** Sea $S := (0,1)^2$ y sea $X := S \cup \{(0,0),(0,1)\}$. Consideremos a S como subespacio de X con la topología usual sobre $\mathbb{R}^2$. En cambio, la base de entornos de $(0,0)$ es de la forma:

$$U_n(0,0) := \{(0,0)\} \cup (0,1/2) \times (0,1/n)$$

y la base de entornos de $(0,1)$ es de la forma:

$$V_n(0,1) := \{(0,1)\} \cup (1/2,1) \times (0,1/n).$$

A X se le conoce como el *cuadrado simplificado de Arens*.

Veamos que X es de Hausdorff: Claramente la condición de ser Hausdorff aplica para todo par de puntos en S, además $U_1(0,0)$ y $V_1(1,0)$ son entornos disjuntos de $(0,0)$ y $(0,1)$ resp., y si $(x,y) \in S$, entonces existe n tal que $1/n < y$ y $U_n(0,0)$ y $B_{y-1/n}(x,y)$ son entornos disjuntos de ambos puntos.

Sin embargo X no es completamente Hausdorff: Basta notar que $(0,0)$ y $(0,1)$ no poseen entornos cerrados disjuntos. ⌟

Teorema 2.94: Sea $|I| \leq \kappa \geq \aleph_0$. Si $w(X_i) \leq \kappa$ entonces $w\left(\prod_{i\in I} X_i\right) \leq \kappa$. Si $\chi(X_i) \leq \kappa$ entonces $\chi\left(\prod_{i\in I} X_i\right) \leq \kappa$.

Teorema (AE) 2.95 (Hewitt-Marczewski-Pondiczery): El producto de a lo más 2^κ espacios de densidad menor o igual que $\kappa \geq \aleph_0$ tiene densidad menor o igual que κ.

Demostración: Sean X_i los espacios con $i \in I$ donde $|I| = \kappa$, cada uno con un subconjunto denso D_i, luego se cumple que $\mathcal{D} := \prod_{i\in I} D_i$ es denso en el espacio producto, por lo que la prueba se reduce a mostrar que $\mathcal{D}$ es de densidad menor o igual que κ. Para ello, construyamos unas funciones suprayectivas $f_i : D(\kappa) \to D_i$ que resultan ser continuas, luego $f := \prod_{i\in I} f_i : [D(\kappa)]^{2^\kappa} \to \mathcal{D}$ es una aplicación continua suprayectiva, de modo que basta con probar que $d\left([D(\kappa)]^{2^\kappa}\right) \leq \kappa$.

Sea $T := [D(2)]^\kappa$, luego $[D(\kappa)]^{2^\kappa} \simeq \operatorname{Func}(T; D(\kappa)) =: X$. Sea $\mathcal{B}$ una base de T de cardinal $\leq \kappa$, luego sea $\mathcal{T}$ la familia de tuplas finitas de $\mathcal{B}$ formada por básicos disjuntos dos a dos. Sea A la familia de X formada por las funciones f para las cuales existe $\{B_1, \dots, B_n\} \in \mathcal{T}$ tal que f es constante en B_i y $T \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_n)$, luego como $|\mathcal{T}| \leq \kappa$, entonces $|A| \leq \kappa$, probaremos que A es denso.

Sea U un abierto no vacío, hemos de probar que corta a A. Sean $t_1, \dots, t_k \in T$ distintos dos a dos, y sea $y_1, \dots, y_k \in D(\kappa)$ tales que $\bigcap_{i=1}^k \pi_{t_i}^{-1}[y_i] \subseteq U$ (lo que se cumple pues las preimágenes de puntos forman una subbase), es decir, U contiene funciones f tales que $f(t_i) = y_i$. Como T es de Hausdorff, existe $\{U_1, \dots, U_k\} \in \mathcal{T}$ tal que $t_i \in U_i$ con $i = 1, \dots, k$, luego la función

$$f(x) := \begin{cases} y_i, & x \in U_i \text{ con } i = 1, \dots, k; \\ y_1, & x \in T \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_k). \end{cases}$$

pertenece tanto a A como a U. □

Corolario 2.96: Los axiomas de numerabilidad son $\aleph_0$-multiplicativos. La separabilidad es $\mathfrak{c}$-multiplicativa.

Ejemplo 2.97 ($\mathbb{N}^\mathbb{R}$)**:** Sea $X := \mathbb{N}^\mathbb{R}$, recuerde que $f \in X$ es una aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ y que la proyección $\pi_\alpha(f) := f(\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Como los axiomas de separación son multiplicativos, X es de Tychonoff.

- X es separable, sin embargo no es 1AN ni 2AN, es más para todo $x \in X$ se cumple que $\chi(x) > \aleph_0$: Supongamos que x tuviera una base de entornos numerable $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, entonces para todo $i \in \mathbb{N}$ se cumple que $\pi_\alpha[B_i] = \mathbb{N}$ para todo α excepto tal vez finitos de ellos. Como $\mathbb{R}$

es no numerable, existe un β tal que $\pi_\beta[B_i] = \mathbb{N}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, pero entonces $\pi_\beta^{-1}[x]$ es un entorno básico de x que no contiene a ningún B_i, contradicción.

- X no es normal: Sea P_i el conjunto de puntos tales que todo entero exceptuando i no se repite entre coordenadas, probaremos que P_0 y P_1 son cerrados disjuntos sin entornos disjuntos. Nótese P_i^c es el conjunto que posee alguna coordenada distinta de i repetida, luego $P_i^c = \bigcup_{\substack{\alpha\neq\beta \\ n\neq i}} \pi_\alpha^{-1}[n] \cap \pi_\beta^{-1}[n]$ por lo que es abierto.

  Sean U, V entornos de P_0 y P_1, resp. En primer lugar notemos que si $F \subseteq \mathbb{R}$ es finito, entonces para todo $x \in X$ se cumple que $F(x) := \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}[x_\alpha]$ es un entorno básico de x. Definiremos inductivamente una sucesión de subconjuntos finitos encajados $F_k := \{\alpha_i\}_{i=0}^k$ junto a una sucesión $x^n \in P_0$. Sea $x_\alpha^0 := 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, dados x^n y F_{n-1} se define $F_n \supseteq F_{n-1}$ tal que $F_n(x^n) \subseteq U$ y sea x^{n+1} definido como aquél tal que $x_{\alpha_i}^{n+1} = i$ y $x_\alpha^{n+1} = 0$ si $\alpha \notin F_n$. Sea $y \in P_1$ tal que $y_{\alpha_i} = i$ y $y_\alpha = 0$ si $\alpha \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Sea $G \subseteq \mathbb{R}$ finito tal que $G(y) \subseteq V$, luego ha de existir un natural m tal que $G \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = G \cap F_m$. Sea $z \in \mathbb{R}$ definido como que $z_{\alpha_i} = i$ si $\alpha_i \in F_m$, $z_{\alpha_i} = 0$ si $\alpha_i \in F_{m+1} \setminus F_m$ y $z_\alpha = 0$ en otro caso. Notemos que $z_\alpha = y_\alpha$ si $\alpha \in G \cap F_m$ y $z_\alpha = 0 = y_\alpha$ si $\alpha \in G \setminus F_m$, por ende $z \in G(y) \subseteq V$. Además, $z_{\alpha_i} = x_{\alpha_i}^{m+1}$ si $\alpha_i \in F_m$ y $z_\alpha = 0 = x_\alpha^{m+1}$ si $\alpha \in F_{m+1} \setminus F_m$, por lo que

$$z \in \bigcap_{\alpha\in F_{m+1}} \pi_\alpha^{-1}[x^{m+1}] = F_{m+1}(x^{m+1}) \subseteq U;$$

  por ende, $z \in U \cap V$ como se quería probar. ⌟

§2.4.3 Espacios cociente.

Definición 2.98 – *Espacio cociente*: Sea X un espacio topológico y $f\colon X \to Y$ una epiyección. Se dice que Y es el *espacio cociente* de X por f si su topología es la inducida por f.

Más aún, si R es una relación de equivalencia sobre X, denotamos por X/R al conjunto cociente de X con la topología inducida por la proyección π_R.

En general, en esta sección X/R siempre representará el espacio cociente por la proyección π.

Proposición 2.99: Se cumple:

1. $C \subseteq X/R$ es cerrado syss $\pi^{-1}[C]$ lo es en X.
2. $f\colon X/R \to Y$ es continua syss $\pi \circ f$ lo es.

Definición 2.100: Dada una función $f\colon X \to Y$ denotamos por R_f a la relación sobre X tal que aR_fb syss $f(a) = f(b)$. Además denotamos por $\bar{f}\colon X/R_f \to Y$ a la aplicación tal que $\pi \circ \bar{f} = f$. Si X, Y son topológicos, diremos que f es una *identificación* syss $\bar{f}$ es un homeomorfismo.

Teorema 2.101: Dada una aplicación continua y suprayectiva $f\colon X \to Y$, son equivalentes:

1. f es una identificación.
2. Para todo $A \subseteq Y$ se cumple que A es abierto en Y syss $f^{-1}[A]$ es abierto en X.
3. Para todo $C \subseteq Y$ se cumple que C es cerrado en Y syss $f^{-1}[C]$ es cerrado en X.

Demostración: $1 \implies 2$. A es abierto en Y syss $\bar{f}^{-1}[A]$ es abierto en X/R_f syss $\pi^{-1}\left[\bar{f}^{-1}[A]\right] = f^{-1}[A]$ es abierto en X.

Es claro que $2 \iff 3$.

$2 \implies 1$. Sea $\bar{f}$, por construcción es continua y biyectiva, basta probar que es abierta: Sea $U \subseteq X/R_f$ abierto, luego, $\pi^{-1}[U]$ ha de serlo. Probaremos que $f^{-1}\left[f\left[\pi^{-1}[U]\right]\right] = \pi^{-1}[U]$. Si $x \in f^{-1}\left[f\left[\pi^{-1}[U]\right]\right]$, entonces por definición existe $y \in \pi^{-1}[U]$ tal que $f(x) = f(y)$ y por ende xR_fy y $\pi(x) = \pi(y) \in U$. La otra inclusión es una propiedad general de las funciones. En conclusión y por 2) se cumple que $f\left[\pi^{-1}[U]\right] = \bar{f}[U]$ es abierto en Y. □

Corolario 2.102: Se cumple:

1. La composición de identificaciones es una identificación.
2. Una función suprayectiva y abierta (o cerrada) es una identificación.
3. Toda identificación biyectiva es un homeomorfismo.

Definición 2.103: Una relación de equivalencia R sobre un espacio topológico X se dice *cerrada* (resp. *abierta*) si para todo $A \subseteq X$ cerrado (resp. abierto) se cumple que la unión de clases de equivalencia que cortan a A dan un conjunto cerrado (resp. abierto).

Teorema 2.104: Sea R una relación de equivalencia sobre un espacio topológico X. Son equivalentes:

1. R es cerrado (abierto).
2. Para todo $A \subseteq X$ cerrado (resp. abierto) se cumple que la unión de clases de equivalencia de R que están contenidas en A es un conjunto cerrado (abierto).
3. $\pi\colon X \to X/R$ es una aplicación cerrada (abierta).

El teorema anterior nos dice que es lo mismo ser una relación cerrada que ser una relación abierta. Veamos una aplicación:

Teorema 2.105: Si X es normal y R es una relación de equivalencia cerrada en X, entonces X/R es normal.

Demostración: Como las clases de equivalencia son cerradas, entonces los puntos en X/R son cerrados y, por tanto, X/R es T_1. Sean $A, B \subseteq X/R$ cerrados disjuntos, entonces $\pi^{-1}[A], \pi^{-1}[B]$ son cerrados disjuntos en X y, por normalidad, admiten entornos $\pi^{-1}[A] \subseteq U_1, \pi^{-1}[B] \subseteq U_2$ disjuntos. Como R es abierta, la unión V_1, V_2 de clases de equivalencia contenidas en U_1, U_2 resp. son abiertas; y también son entornos disjuntos de $\pi^{-1}[A], \pi^{-1}[B]$ resp. De modo que:

$$A \subseteq \pi[V_1], \quad B \subseteq \pi[V_2], \quad V_1 \cap V_2 = \varnothing. \qquad \square$$

3

Espacios compactos

Uno de los principales y más fuertes resultados de la topología general es el teorema de Tychonoff presentado en la sección sobre espacios compactos, no obstante, es indispensable mencionar su relación al AE, el cual está ligado al tópico (opcional por cierto) de los filtros. Por eso, se advierte que esta sección tendrá un fuerte enfoque a equivalencias y versiones débiles del AE.

3.1 Álgebras booleanas y filtros

Definición 3.1 – *Álgebra booleana*: Es una cuádrupla $(\mathbb{B}, \wedge, \vee, \neg)$ donde $\wedge, \vee \colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ y $\neg \colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ tales que para todo $p, q, r \in \mathbb{B}$:

1. $\neg(\neg p) = p$ (doble negación).
2. $p \wedge q = q \wedge p$ (conmutatividad).
3. $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$ (asociatividad).
4. $p \wedge p = p$ (idempotencia).
5. $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (distributividad).
6. $p \vee (p \wedge q) = p$ (absorción).
7. $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ (ley de De Morgan).

8. $p \vee \neg p = q \vee \neg q =: 1$.

También definimos $0 := \neg 1$. Se dice que un subconjunto es una ***subálgebra*** de $\mathbb{B}$ si es no vacío y cumple ser un álgebra booleana.

Se definen las operaciones:

$$(p \to q) := \neg p \vee q, \quad (p \leftrightarrow q) := (p \to q) \wedge (q \to p).$$

Para aclarar $\neg p \vee q = (\neg p) \vee q$. Cuando apliquemos el operador $\neg$ sin paréntesis se aplica al elemento más cercano, si se quiere aplicar a una operación pondremos paréntesis a la operación. En general $\mathbb{B}$ representará un álgebra booleana.

Proposición 3.2: Un subconjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{B}$ es una subálgebra si para todo $a, b \in A$ se cumple que $a \vee \neg b \in A$.

Corolario 3.3: La intersección arbitraria de subálgebras es una subálgebra.

Dado $S \subseteq \mathbb{B}$ denotamos

$$\langle S \rangle := \bigcap \{B : S \subseteq B \wedge B \text{ es subálgebra}\}.$$

Proposición 3.4: Para todo $p, q, r \in \mathbb{B}$:

1. $p \vee q = q \vee p$ (conmutatividad).
2. $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$ (asociatividad).
3. $p \vee p = p$ (idempotencia).
4. $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributividad).
5. $p \wedge (p \vee q) = p$ (absorción).
6. $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$ (ley de De Morgan).
7. $0 = p \wedge \neg p = p \wedge 0$.
8. $p \vee 0 = p \wedge 1 = p$ y $p \vee 1 = 1$.
9. $p \vee q = p$ syss $p \wedge q = q$.

Es fácil notar que un álgebra booleana modela un sistema lógico proposicional y que dado un conjunto S entonces $(\mathcal{P}(S), \cap, \cup, (\,)^c)$ con $0 = \varnothing$ y $1 = S$ es un álgebra booleana, que llamaremos álgebra conjuntista sobre S.

Teorema 3.5: Definamos la relación $\leq$ como $p \leq q$ syss $p \vee q = p$ sobre $\mathbb{B}$ entonces:

1. $\leq$ es de orden parcial.
2. Bajo $\leq$, 0 es el mínimo y 1 el máximo de B.
3. $p \wedge q = \inf\{p, q\}$ y $p \vee q = \sup\{p, q\}$.
4. $p \leq q$ syss $\neg q \leq \neg p$.
5. $p \leq q$ syss $p \to q = 1$.
6. $p \leftrightarrow q$ syss $p = q$.
7. $p = \neg q$ syss $p \vee q = 1$ y $p \wedge q = 0$.

Demostración: Voy a demostrar las que considero más difíciles:

3. Probaremos que $p \wedge q = \inf\{p, q\}$ y la otra es análoga. Primero veamos que $(p \wedge q) \leq p$ por definición, lo mismo para q; por lo que basta probar que es la máxima cota inferior. Sea $r \leq p$ y $r \leq q$. Luego

$$r \vee (p \wedge q) = (r \vee p) \wedge (r \vee q) = r \wedge r = r$$

ergo $r \leq (p \wedge q)$ como se quería probar.

5. $\Longrightarrow$. $p \to q = \neg p \vee q = \neg p \vee (p \vee q) = 1 \vee q = 1$.
$\Longleftarrow$. Basta ver que

$$p = p \wedge 1 = p \wedge (\neg p \vee q) = (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) = p \wedge q.$$

7. $\Longrightarrow$. Trivial.
$\Longleftarrow$. Basta ver que $p \leq \neg q$ y que $\neg q \leq p$. Para el primero, por la propiedad anterior, basta ver que

$$p \to (\neg q) = \neg p \vee \neg q = \neg(p \wedge q) = \neg 0 = 1.$$

Para el segundo hacemos lo mismo y $\neg q \to p = \neg(\neg q) \vee p = q \vee p = 1$.

□

Definición 3.6 – *Morfismos, ideales y filtros*: Un morfismo entre álgebras booleanas es una aplicación f que respeta las operaciones, es decir,

$$f(\neg a) = \neg f(a),\ f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b),\ f(a \vee b) = f(a) \vee f(b);$$

por leyes de De Morgan, se pueden reducir a que $f(a\wedge\neg b) = f(a)\wedge\neg f(b)$.

Se dice que un ideal I sobre un álgebra booleana $\mathbb{B}$ si se cumple que:

1. $0 \in I, 1 \notin I$.
2. $p, q \in I \implies p \vee q \in I$.
3. $p \leq q$ y $q \in I$ implica $p \in I$.

Por otro lado, F es un filtro si $I := \{\neg p : p \in F\}$ es un ideal, en cuyo caso I y F se dicen ***duales***. Un ideal se dice ***primo*** si para todo $p \in \mathbb{B}$ se cumple que $p \in I$ o $\neg p \in I$. El dual de un ideal primo se dice un ***ultrafiltro***.

Proposición 3.7: Dado un álgebra booleana, un conjunto I es un ideal primo syss es $I = f^{-1}(0)$ donde $f : \mathbb{B} \to \{0, 1\}$ es un morfismo de álgebras.

Así podemos caracterizar los ideales primos y los ultrafiltros, esto nos será útil más adelante.

Lema 3.8: Un ideal sobre $\mathbb{B}$ es primo syss es maximal respecto de la inclusión.

Demostración: $\implies$. Es trivial.

$\impliedby$. Lo probaremos por contrarrecíproca. Si I no es primo, entonces hay algún $p \in \mathbb{B}$ tal que $p \notin I$ y $\neg p \notin I$. Notemos que $p \vee q = 1$ syss $\neg p \leq q$, y como $\neg p \notin I$ entonces $p \vee q \neq 1$ para todo $q \in I$. Luego sea

$$I' := \{r \in \mathbb{B} : r \leq \vee_{i=1}^{n} q_i, \quad q_i \in I \cup \{p\}\}$$

es decir, el conjunto de los elementos menores a la disyunción de elementos de $I \cup \{p\}$ que es siempre distinta de 1 por el argumento ya explicado. Es fácil notar que I' es un ideal y que incluye a I; ergo I no es maximal. □

Teorema (AE) 3.9 (Teorema de los ideales primos): Todo ideal sobre un álgebra booleana está contenido en un ideal primo.

Demostración: Basta aplicar el lema anterior con el lema de Zorn que es equivalente a AE. □

Definición 3.10: En general, llamaremos ***filtro*** sobre S a cualquier filtro del álgebra conjuntista de S.

Diremos que una familia de conjuntos tiene la ***propiedad de intersecciones finitas*** si toda intersección de finitos conjuntos de la familia es no vacía.

Ejemplos:

1. $\{S\}$ es un filtro, usualmente llamado el trivial.

2. Dado $\varnothing \subset X_0 \subset S$ se cumple que

$$\{X : X_0 \subseteq X\}$$

es un filtro, usualmente llamado principal. Si en su lugar consideramos la inclusión estricta le llamamos principal estricto.

3. Para todo $x \in S$ se cumple que

$$\{A : x \in A\}$$

es un ultrafiltro, el cual llamaremos principal centrado en x.

4. Si S es infinito, entonces[1] $[S]^{<\omega}$ es un ideal, cuyo dual es llamado el ***filtro de Fréchet***.

Proposición 3.11: Se cumple que:

1. Todo filtro tiene la PIF.

2. Dada una familia $\mathcal{F}$ de filtros sobre S, entonces $\bigcap \mathcal{F}$ es un filtro sobre S.

3. Dada una $\subseteq$-cadena $\mathcal{F}$ de filtros sobre S, entonces $\bigcup \mathcal{F}$ es un filtro sobre S.

4. Dado $G \subseteq \mathcal{P}(S)$ con PIF, entonces existe un filtro que le contiene.

[1] Esto denota la familia de todos los subconjuntos finitos de S.

Demostración: Probaremos la última. Definimos F como el subconjunto de $\mathcal{P}(S)$ tal que sus elementos contienen a alguna intersección finita de elementos de G y es fácil probar que F es un filtro y de hecho el mínimo que contiene a G. □

La importancia del 1 y el 2 es que los filtros tienen mínimo y máximo respecto de la inclusión.

Teorema (AE) 3.12 – *Teorema del ultrafiltro, TUF*: Todo filtro está contenido en un ultrafiltro.

§3.1.1 Convergencia de filtros en espacios. Para poder asociar la continuidad entre funciones con la de sucesiones hay un vacío que llenar, y es el AEN el que suele completar el agujero; sin embargo, ya se ha hecho hincapié de que es recomendable prescindir del axioma de elección y todas sus formas débiles, los filtros nos son útiles pues pueden servir como un sustituto a las sucesiones sin emplear elecciones.

Definición 3.13: $\mathcal{B}$ es una ***base de filtro*** si:

1. $\varnothing \notin \mathcal{B}$.
2. Para todo $A, B \in \mathcal{B}$ existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subseteq A \cap B$.

Como toda base de filtro posee la PIF, entonces se extiende a un filtro en cualquier espacio prefijado (que contenga todos los conjuntos de $\mathcal{B}$, claro).

Se dice que un filtro sobre un espacio topológico converge a x si todo entorno de x está contenido en el filtro. Una base de filtro converge a x si su mínima extensión converge a x. La misma notación de límites para las redes se aplica.

Se dice que un punto x es adherente a un filtro F si se cumple que

$$x \in \bigcap_{A \in F} \overline{A}.$$

Es decir, si todo entorno de x corta a todo elemento del filtro.

Por definición podemos decir que una base de filtro converge a x syss todo entorno de x contiene un elemento de la base.

Proposición 3.14: Dada una base de filtro $\mathcal{B}$, entonces $\lim \mathcal{B}$ es cerrado.

DEMOSTRACIÓN: Sea x de adherencia a $\lim \mathcal{B}$, eso quiere decir que todo entorno de x corta a $\lim \mathcal{B}$, en particular todo entorno abierto U_x lo hace. Supongamos que $y \in U_x \cap \lim \mathcal{B}$, como $\mathcal{B}$ converge a y, entonces todo entorno abierto V tiene algún elemento de la base. Pero U_v es abierto, luego es entorno de y, luego contiene a algún elemento de $\mathcal{B}$, luego $x \in \lim \mathcal{B}$. □

Teorema 3.15: Un espacio es de Hausdorff syss toda base de filtro tiene a lo más un punto límite.

Proposición 3.16: Un punto x es adherente a A syss existe una base de filtro en A que converge a x.

Sean F_1, F_2 filtros tales que $F_1 \subseteq F_2$ entonces se dice que F_2 es un ***refinamiento*** de F_1.

Proposición 3.17: Se cumple:

1. Un punto adherente al refinamiento de un filtro es adherente al original.
2. Un punto límite de un filtro lo es de todo refinamiento suyo.
3. Un punto adherente a un filtro es límite de un refinamiento suyo.

Definición 3.18: Sea $f: X \to Y$ y F un filtro sobre X, entonces llamamos ***imagen*** del filtro $f[F] := \{A \subseteq Y : f^{-1}[A] \in F\}$.

Esta definición «extraña» se debe a que de esta forma la imagen de un filtro es también un filtro, y porque:

Teorema 3.19: Una aplicación es continua en $x \in X$ syss para todo filtro F tal que $x \in \lim F$ entonces $f(x) \in \lim f[F]$. Asimismo, f es continua si para todo filtro se cumple

$$f[\lim F] \subseteq \lim f[F].$$

DEMOSTRACIÓN: $\Longrightarrow$. Como f es continua, entonces si U es un entorno de $f(x)$ entonces $f^{-1}[U]$ lo es de x, ergo $U \in f[F]$, por ende $f(x) \in \lim f[F]$.

$\Longleftarrow$. Lo haremos por contrarrecíproca. Sea f discontinua en x, ergo, hay algún entorno U de $f(x)$ tal que $f^{-1}[U]$ no es un entorno de x. Entonces sea F el filtro de todos los entornos de x, claramente F converge a x, no obstante

$f[F]$ no converge a $f(x)$ pues U en un entorno de $f(x)$ que no pertenece a $f[F]$. □

3.2 Espacios compactos

Definición 3.20 – *Espacio compacto*: Dado un subconjunto $A \subseteq X$ decimos que un ***cubrimiento por abiertos*** de A es una familia de abiertos $\mathcal{S} := \{U_i\}_{i\in I}$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Un ***subcubrimiento*** es un subconjunto de $\mathcal{S}$ que también satisface ser un cubrimiento, mientras que un ***refinamiento*** de $\mathcal{S}$ es una familia $\mathcal{F}$ que también es un cubrimiento pero que para cada $V \in \mathcal{F}$, existe un $U \in \mathcal{S}$ tal que $V \subseteq U$. Todo subcubrimiento es necesariamente un cubrimiento por abiertos, mientras que un refinamiento puede ser un cubrimiento que emplee conjuntos que no sean abiertos.

Decimos que A es ***compacto*** si todo cubrimiento por abiertos de A admite un subcubrimiento finito.

Ejemplos de espacios compactos lo son el vacío, todo espacio finito y todo espacio indiscreto. Pruebe que todo espacio discreto es compacto syss es finito.

Teorema 3.21: Un espacio es compacto syss toda familia de cerrados con PIF tiene intersección total no vacía.

Demostración: $\Longrightarrow$. Se hace por contradicción. Supongamos que el espacio es compacto y la intersección de dicha familia $\{F_i\}_{i\in I}$ es vacía, luego definiendo $U_i := F_i^c$ se consigue una familia de abiertos tal que

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} F_i^c = \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)^c = \varnothing^c = X.$$

Es decir, $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de X, ergo, admite un subcubrimiento finito $\{U_{n_i}\}_{i=0}^N$ tal que $\bigcap_{i=0}^N F_{n_i} = \varnothing$, contradiciendo el que la familia poseía la PIF.

$\Longleftarrow$. Es análogo. □

Teorema 3.22: Todo espacio es compacto syss todo filtro tiene un punto adherente.

Teorema 3.23: Se cumple:

1. Todo subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.
2. Todo subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.

Demostración:

1. Basta aplicar la equivalencia con la PIF.
2. Sea $K \subseteq X$ compacto en X de Hausdorff. Luego basta probar que K^c es abierto y sabemos que eso se da syss es entorno de todos sus puntos. Sea $x \in K^c$, luego sean $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos tales que son disjuntos a algún entorno abierto de x; notemos que $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de K por definición de T_2, ergo, admite un subcubrimiento abierto. Por definición de los U_i existen V_i entornos de x disjuntos a los U_i resp. Luego $x \in \bigcap_{i=0}^{N} V_i \subseteq K^c$, ergo, K^c es entorno de x. □

Ejemplo. Sea X un espacio infinito con la topología cofinita (ej. 2.42), es decir, los abiertos son los conjuntos de complemento finito y los cerrados los conjuntos finitos. Nótese que X es compacto, pues sí U es un abierto entonces cubre a todo X salvo finitos puntos, que pueden a su vez cubrirse por finitos otros abiertos. Asimismo, cada abierto en X es trivialmente homeomorfo a X, luego X posee subespacios compactos que no son cerrados en X.

Nótese que la situación de éste ejemplo es posible pues ya vimos que el espacio no es de Hausdorff.

Corolario 3.24: La unión finita de cerrados es compacta syss todos los sumandos lo son.

Definición 3.25: Decimos que un conjunto A es relativamente compacto si $\overline{A}$ es compacto.

Teorema 3.26: La imagen continua de un compacto es compacta.

Corolario 3.27 (lema de la función cerrada): Toda función continua desde un espacio compacto hacia un espacio de Hausdorff es cerrada. En consecuencia, si la función es además biyectiva, entonces es un homeomorfismo.

Proposición 3.28: En un espacio métrico todo subespacio compacto es cerrado y acotado.

El recíproco no es cierto. Recordemos que un espacio discreto puede inducir su topología por la métrica discreta, bajo la cual todo conjunto es cerrado y acotado, no obstante, si el conjunto es infinito es fácil probar que no es compacto. Otro ejemplo más curioso es el siguiente:

Ejemplo 3.29: Sea $E \subseteq \operatorname{Func}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ el espacio de sucesiones acotadas con la métrica d tal que

$$d((x_i), (y_i)) := \sup\{|x_i - y_i| : i \in \mathbb{N}\}$$

de forma que E es métrico. Notemos que $[0,1]^{\mathbb{N}}$ es cerrado y es acotado (pues posee diámetro 1), sin embargo, no es compacto. Para ello basta notar que el producto de los $C_{i,j}$ con j fijo donde

$$C_{i,j} := \begin{cases} [0,1], & i = j \\ (1/3, 2/3), & i \neq j \end{cases}$$

forman un cubrimiento abierto sin subcubrimientos finitos. ⌟

Teorema 3.30 – *Teorema de Heine-Borel*: En $\mathbb{R}$ todo subespacio cerrado y acotado es compacto.

Demostración: Todo subespacio cerrado y acotado está contenido en un intervalo cerrado y acotado, así que probaremos que éstos son compactos, y de hecho como todos son homeomorfos basta con $[0,1]$: Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de $[0,1]$, luego sea

$$t := \sup\{x \in [0,1] : [0,x] \text{ tiene subcubrimiento finito de } \mathcal{U}\},$$

que existe pues el conjunto es no vacío ya que contiene al 0.
Si $t \neq 1$, entonces para todo $\epsilon > 0$ se cumpliría que $[0, t+\epsilon]$ no tiene subcubrimiento finito. Como $t \in \bigcup \mathcal{U}$, existe $U_t \in \mathcal{U}$ y un $\epsilon > 0$ tal que $(t - 2\epsilon, t + 2\epsilon) \subseteq U_t$, luego, por definición existe un subcubrimiento finito $\{U_1, \dots, U_n\} \subseteq \mathcal{U}$ que cubre a $[0, t-\epsilon]$ y claramente $[0, t+\epsilon] \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_k \cup U_t$; en conclusión $t = 1$ como se quería probar. □

Después veremos que el teorema se extiende a subespacios cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$.

Lema 3.31: Sea A un subespacio compacto de un espacio regular y B un cerrado disjunto de él, entonces ambos conjuntos admiten entornos disjuntos. Si el espacio es de Hausdorff y B es compacto, entonces también se cumple.

Demostración: Para todo $x \in A$ elijamos U_x y V_x de tal forma que son entornos abiertos disjuntos de x y B resp. Luego, $A \subseteq \bigcup_{x\in A} U_x$, i.e., $\{U_x\}_{x\in A}$ es un cubrimiento abierto. Por compacidad de A se cumple que admite un subcubrimiento finito tal que $A \subseteq \bigcup_{i=0}^n U_i =: U$ donde U es abierto por definición. Por otro lado, $B \subseteq \bigcap_{i=0}^n V_i =: V$ que también es abierto.

Para demostrar el caso cuando es de Hausdorff se comienza por considerar B un conjunto singular para obtener el caso particular de que un compacto y un punto fuera de él admiten entornos disjuntos para luego generalizar al enunciado. □

Observación. En la demostración evidentemente se utiliza AE, pero puede ser erradicado de la siguiente manera: Se considera primero el conjunto de los entornos de puntos de A y mediante él extraemos el subconjunto de entornos que son disjuntos a algún entorno de B, con él formamos un cubrimiento abierto y extraemos el subcubrimiento finito, luego la aplicación de elección para elegir los entornos de B disjuntos es válida pues basta aplicar finitas elecciones.

Teorema 3.32: Todo espacio de Hausdorff compacto es normal.

Teorema 3.33: $\bigoplus_{i\in I} X_i$ es compacto con $X_i \neq \varnothing$ syss los X_i son compactos e I es finito.

Demostración: $\Longrightarrow$. Basta notar que los X_i son cerrados, luego compactos. I es finito pues de lo contrario $\{X_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto sin subcubrimiento finito contradiciendo la compacidad de la suma.

$\Longleftarrow$. La unión finita de compactos es compacta. □

§3.2.1* Compacidad y elección. El AE tiene muchísimas equivalencias comprobadas, dentro de las cuales hay varias «selectas» como el lema de Zorn, el teorema del buen orden y el teorema de Tychonoff. Esto no debe de ser sorpresa para el lector pues usualmente teoremas relacionados con productos infinitos y sucesiones suelen estar estrictamente relacionados al AE o a una de sus equivalencias. Si usted asume AE puede evitar esta subsección, de lo contrario la recomiendo pues me parece igualmente interesante.

Definición 3.34: Se le llama ***κ-cubo de Tychonoff***, ***Cantor*** y ***Alexandroff*** a los espacios producto $[0,1]^\kappa$, $D(2)^\kappa$ y F^κ resp., donde F es el espacio de Sierpiński. Al $\aleph_0$-cubo de Tychonoff y de Cantor se le dicen ***cubo de Hilbert*** y ***conjunto de Cantor*** resp.

Definición 3.35: Un espacio es ***Ultrafiltro-compacto*** (o UF-compacto) si todo ultrafiltro en él converge.

Proposición 3.36: Todo espacio compacto es UF-compacto.

Lema 3.37: El producto de espacios de Hausdorff UF-compactos es UF-compacto.

Demostración: Sean $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios de Hausdorff UF-compactos. Luego sea U un ultrafiltro sobre $\prod_{i\in I} X_i$, notemos que $\pi_i[U]$ es un ultrafiltro, luego converge y como los X_i son de Hausdorff posee un único límite. Finalmente definamos $\boldsymbol{x} := (\lim \pi_i[U])_{i\in I}$, es fácil comprobar que U converge a $\boldsymbol{x}$. □

Teorema 3.38: Son equivalentes:

1. **Teorema de los ideales primos**.
2. **TUF**.
3. Todo espacio UF-compacto es compacto.
4. Producto de compactos de Hausdorff es compacto.
5. Producto de espacios discretos finitos es compacto.
6. Producto de espacios finitos es compacto.
7. Los cubos de Tychonoff son compactos.
8. Los cubos de Cantor son compactos.

Demostración: Las implicaciones triviales son (1) $\implies$ (2) y (3) $\implies$ (4) $\implies$ (7) $\implies$ (6) $\implies$ (5) $\implies$ (8).

(2) $\implies$ (3). Sea X UF-compacto, sabemos que es compacto syss todo filtro posee un punto adherente, sea F un filtro, por TUF está contenido en un ultrafiltro U que converge por ser UF-compacto, luego un punto límite de U es adherente a F.

(5) $\implies$ (1). Notemos que probar que todo ideal está contenido en un ideal primo es equivalente a probar que todo filtro está contenido en un ultrafiltro, así que probaremos la segunda.

Sea $\mathbb{B}$ un álgebra booleana, y llamemos $\mathcal{F}$ al conjunto de todas las subálgebras booleanas finitas de $\mathbb{B}$. Para todo $A \in \mathcal{F}$, denotaremos X_A el conjunto de morfismos de Boole de A a $D(2) := \{0, 1\}$; X_A es siempre no vacío, pues todo álgebra finita admite ultrafiltros, ergo, podemos formar un morfismo considerando a los elementos que pertenecen y los que no a tal. Luego podemos considerar los X_A como espacios discretos, de manera que $\prod_{A\in\mathcal{F}} X_A$ es no vacío y compacto. Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$, entonces definimos

$$C(A, B) := \{(x_C)_{C\in\mathcal{F}} \in X : x_A = x_B|_A\},$$

es decir, es el conjunto de morfismos cualesquiera en donde sólo se requiere que el morfismo de A a $D(2)$ sea la restricción del de B. Se cumple que todos los $C(A, B)$ son cerrados y el conjunto de todos ellos tiene la PIF. Como X es compacto, la intersección de ellos es no vacía y contiene a algún $\boldsymbol{x} := (x_C)_{C\in\mathcal{F}}$ (recuerde, cada coordenada es un morfismo), que cumple que para todo $A \subseteq B \in \mathcal{F}$ se da que $\boldsymbol{x}_A = \boldsymbol{x}_B|_A$. Finalmente definimos $f : \mathbb{B} \to D(2)$ como $f(a) := \boldsymbol{x}_{\langle a\rangle}(a)$, y se puede notar que es un morfismo de álgebras (¿por qué?), luego $f^{-1}(0)$ es un ideal primo.

(8) $\implies$ (5). En primer lugar queremos ver si cualquier espacio discreto finito está encajado en un cubo de Cantor de forma canónica (sin uso de elecciones me refiero), para ello éste será el método, definamos $f_i : X_i \to D(2)^{\mathrm{Func}(X_i;D(2))}$ de la siguiente manera, la imagen de todo $f_i(y)$ con $y \in X_i$ es una función de dominio $\mathrm{Func}(X_i; D(2))$ y codominio $D(2)$, por ende, para todo $F \in \mathrm{Func}(X_i; D(2))$ se define

$$(f_i(y))(F) := F(y) \in D(2)$$

Luego, es claro que f_i es un encaje, por ende,

$$\prod_i f_i : \prod_{i\in I} X_i \to \prod_i D(2)^{\mathrm{Func}(X_i;D(2))} \simeq D(2)^{\coprod_i \mathrm{Func}(X_i;D(2))}.$$

Es decir, todo producto de espacios discretos finitos está encajado en un cubo de Cantor, luego si éstos últimos son compactos, el producto de espacios discretos finitos también. $\square$

Teorema 3.39: Son equivalentes:

Axioma de Elección

Teorema de Tychonoff El producto de espacios no vacíos es compacto syss los factores lo son.

Demostración: AE $\implies$ TT. Por AE el producto es no vacío y como AE $\implies$ TUF lo que equivale a que todo espacio UF-compacto es compacto, así que basta probar que el producto de UF-compactos es UF-compacto. Sea U un ultrafiltro del producto, ya hemos probado que $\pi_i[U]$ es también un ultrafiltro y como los factores son UF-compactos, entonces $\lim \pi_i[U]$ es no vacío, luego sea $x_i \in \lim \pi_i[U]$. Finalmente $\boldsymbol{x} := (x_i)_{i\in I}$ es un punto de adherencia de U, donde usamos AE para armar $\boldsymbol{x}$.

TT $\implies$ AE. Sean $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos no vacíos. Sea ∞ un punto cualquiera que no pertenezca a $\bigcup_{i\in I} X_i$, entonces definimos el espacio topológico $Y_i := X_i \cup \{\infty\}$ con la topología $\{\varnothing, \{\infty\}, Y_i\}$, de manera que todo Y_i es compacto. Definamos $Y := \prod_{i\in I} Y_i$ que es compacto por el teorema de Tychonoff y no vacío pues $(\infty)_{i\in I}$ es un elemento de Y. Como X_i es cerrado en Y_i por definición, entonces $Z_i := \pi_i^{-1}[X_i]$ es cerrado en Y y $\{Z_i : i \in I\}$ es una familia de cerrados de Y con la PIF, luego $\bigcap_{i\in I}\{Z_i : i \in I\} = \prod_{i\in I} X_i$ es no vacío. $\square$

El teorema anterior es una de las más famosas equivalencias con el axioma de elección. Nuestro enfoque ha sido usar los ultrafiltros, los cuales considero herramientas increíblemente potentes y transversales (tienen aplicaciones fuera de la topología), pero la mayoría de libros suelen optar por una aplicación del *lema de la subbase de Alexander* y argumentos por *redes*. En lo personal, prefiero los filtros antes que las redes, puesto que los filtros suceden más «naturalmente» y no requieren elección, mientras que las redes tienen los mismos problemas (¡de diseño!) que las sucesiones.

El lector puede notar que si cambiamos la definición de completitud de Cauchy por «toda sucesión de Cauchy converge» a «todo filtro de Cauchy converge», la mayoría de resultados que dependen de AEN, ahora son libres de elección.

Y ahora un par de casos particulares del teorema de Tychonoff que no requieren de elección:

Teorema 3.40: El producto finito de espacios es compacto syss los factores lo son.

Demostración: Una implicancia es trivial, para la otra la haremos por inducción probando que el producto de dos espacios compactos es compacto. Para ello veremos que todo filtro tiene un punto adherente.

Sean X, Y espacios compactos y sea F un filtro en $X \times Y$. Luego considere la imagen de un filtro $\pi_X[F]$ que es un filtro sobre X, de modo que posee un punto adherente x. Definamos F' como el filtro generado por

$$F \cup \{\pi_X^{-1}[U] : U \text{ es entorno de } x\}.$$

(pues tienen la PIF). Como Y es compacto, la imagen del filtro $\pi_Y[F']$ posee un punto adherente y. Definamos F'' como el filtro generado por

$$F' \cup \{\pi_Y^{-1}[U] : U \text{ es entorno de } y\}.$$

Veamos, finalmente que $\boldsymbol{z} := (x, y) \in X \times Y$ es adherente a F. Sea U un entorno de $\boldsymbol{z}$, entonces existen V_x, V_y entornos de x, y resp. tales que $V_x \times V_y \subseteq U$ (por definición de topología producto), luego $\pi_X^{-1}[V_x] \in F' \subseteq F''$ y $\pi_Y^{-1}[V_y] \in F''$, luego

$$V_x \times V_y = \pi_X^{-1}[V_x] \cap \pi_Y^{-1}[V_y] \in F''$$

luego $U \in F''$, es decir, que $U \cap A \neq \varnothing$ para todo $A \in F''$, así que $\boldsymbol{z}$ es adherente a F'' y en consecuencia a F. □

Y se puede demostrar un poco más con un poco de elección:

Teorema 3.41: Cada una implica la posterior:

1. **El axioma de dependientes elecciones**.
2. El producto numerable de espacios compactos es compacto.
3. **El axioma de elecciones numerables**.

Demostración: 1 $\implies$ 2. Basta seguir la demostración anterior.

2 $\implies$ 3. Imite la demostración de que Tychonoff implica AE. □

Por el anterior, todo cubo de Tychonoff finito es compacto y de hecho:

Teorema 3.42: El cubo de Hilbert es compacto. En consecuencia, el conjunto de Cantor también.

Demostración: Basta probar que todo filtro tiene un punto adherente. Sea F un filtro de $[0,1]^{\mathbb{N}}$, luego construiremos una sucesión de puntos y de filtros por recursión como prosigue:

x_0 es el mínimo punto adherente al filtro $\{G : \pi_0^{-1}[G] \in F\}$ sobre $[0,1]$ (pues el conjunto de puntos adherentes es cerrado, y como $[0,1]$ es compacto, entonces está acotado). Se define F_0 como el filtro generado por $F \cup \{\pi_0^{-1}[U] : U \in \mathcal{B}(x_0)\}$ que tiene la PIF.

x_{n+1} es el mínimo punto adherente al filtro $\{G : \pi_{n+1}^{-1}[G] \in F_n\}$ sobre $[0,1]$. Se define F_{n+1} como el filtro generado por $F_n \cup \{\pi_{n+1}^{-1}[U] : U \in \mathcal{B}(x_{n+1})\}$.

Luego basta probar que $\boldsymbol{x} := (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es adherente en $\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$ para notar que es adherente a F. En efecto, si U es un entorno de $\boldsymbol{x}$... □

Completar demostración.

3.3 Otros tipos de compacidad

Definición 3.43: Se dice que un espacio es ***localmente compacto*** si todo punto tiene una base de entornos relativamente compactos. Se dice ***débil-localmente compacto*** si todo punto admite un entorno compacto.

Proposición 3.44: Se cumple:

1. Todo espacio localmente compacto es débil-localmente compacto.
2. Todo espacio débil-localmente compacto de Hausdorff es localmente compacto.
3. Todo espacio compacto es localmente compacto.

La inclusión es estricta: existen espacios débil-localmente compactos que no son localmente compactos (ej. 3.59).

Ejemplo. $\mathbb{R}$, con la topología usual, es de Hausdorff localmente compacto, pero no es compacto.

Teorema 3.45: Todo espacio localmente compacto de Hausdorff es de Tychonoff.

Demostración: Sea C un cerrado y $x \notin C$. Como el espacio es localmente compacto, x posee un entorno abierto U cuya clausura $\overline{U}$ es compacta. Luego definimos $D := (\overline{U} \setminus U) \cup (\overline{U} \cap C)$ y D resulta ser cerrado en $\overline{U}$ y ser disjunto a $\{x\}$ también cerrado. Como todo espacio compacto de Hausdorff es normal, entonces existe $f_1 : \overline{U} \to [0,1]$ tal que $f_1(x) = 0$ y $f_1[C] = \{1\}$. Notemos que la función constante $f_2 : U^c \to [0,1]$ dada por $f_2(x) = 1$ también es continua en X. Finalmente, como f_1 y f_2 son compatibles (¿por qué?), entonces $f_1 \cup f_2$ es función y hemos probado que es continua por que sus sumandos lo son, que es lo que se quería probar. □

Teorema 3.46: Se cumple:

1. Si X es localmente compacto, todo subespacio de la forma $A \cap C$ con A abierto y C cerrado es localmente compacto.
2. Si X es de Hausdorff e Y es un subespacio localmente compacto, entonces es abierto en su clausura.

Demostración:

1. Basta probar que ser localmente compacto es hereditario a conjuntos abiertos y cerrados...

   Completar demostración.

2. Sea Y un subespacio localmente compacto, entonces con $C := \overline{Y}$ basta probar que existe A abierto tal que $Y = A \cap C$. Para ello, nos basta probar que todo subespacio localmente compacto denso es abierto.

   Sea Y localmente compacto y denso en X y sea $y \in Y$. Por definición, existe un entorno U abierto de y tal que $Y \cap \overline{U}$ es compacto en Y, luego en X, luego es cerrada. Por ende, $\overline{U} \subseteq \overline{U} \cap Y = Y$. Como U es abierto en Y, existe un abierto V en X tal que $U = V \cap Y$, luego

   $$y \in V \subseteq \overline{V} = \overline{U} \cap Y \subseteq Y,$$

   ergo, Y es entorno de y, luego Y es abierto. □

Teorema 3.47: Si X es débil-localmente compacto, entonces para todo conjunto compacto C contenido en un abierto V, existe otro abierto U tal que $C \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.

Demostración: Sea $x \in C$. Existe un entorno A_x tal que $\overline{A}_x \subseteq V$, y está contenido en un entorno B_x relativamente compacto. Luego $U_x := A_x \cap B_x$ es un entorno relativamente compacto con $\overline{U}_x \subseteq V$. Finalmente si consideramos toda la familia de entornos de los elementos de A, vemos que forman un cubrimiento abierto, luego admiten un subcubrimiento $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$ finito, de modo que $A \subseteq U := \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \subseteq V$. Por lo que U es relativamente compacto y $\overline{U} \subseteq V$ como se quería probar. □

Definición 3.48: Se dice que un espacio es ***numerablemente compacto*** si todo cubrimiento abierto numerable posee un subcubrimiento finito.

Teorema 3.49: Se cumple:

1. Un espacio es numerablemente compacto syss toda familia numerable de cerrados con la PIF tiene intersección total no vacía.
2. Todo cerrado en un espacio numerablemente compacto es numerablemente compacto.
3. La imagen continua de un espacio numerablemente compacto es numerablemente compacto.

Definición 3.50: Un punto x es de ω-acumulación de un conjunto infinito S si todo entorno de x corta a $S \setminus \{x\}$ en infinitos puntos.

Se dice que un espacio es:

Weierstrass compacto Si todo conjunto infinito posee un punto de ω-acumulación.

Débil-Weierstrass compacto Si todo conjunto infinito posee un punto de acumulación.

Proposición 3.51: Dado un espacio T_1 y un subconjunto infinito A se cumple que todo punto es de acumulación de A syss es de ω-acumulación. En consecuente todo espacio T_1 débil-Weierstrass compacto es Weierstrass compacto.

Demostración: Sea x de acumulación de A, por definición todo entorno U de x interseca a A, supongamos que lo hace en finitos puntos $F := \{x_1, \dots, x_n\}$, luego como los puntos son cerrados se concluye que F es cerrado, luego $U \cap F^c$ es un entorno de x que no interseca a A, lo que es absurdo. □

Definición 3.52: Se dice que un espacio es:

Débil-secuencialmente compacto Si toda sucesión posee un punto de acumulación.

Secuencialmente compacto Si toda sucesión posee una subsucesión convergente.

Totalmente acotado Si es pseudométrico y para todo $r > 0$ existe un conjunto finito F tal que para todo punto $x \in X$ existe $y \in F$ tal que $d(x, y) < r$.

Proposición 3.53: Un espacio 1AN es débil-secuencialmente compacto syss es secuencialmente compacto.

Proposición 3.54: Entre espacios se cumple que:

$$\begin{tikzcd}
& \text{Weierstrass} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{Compacto} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{Débil-secuencialmente} \\
& \text{Numerablemente} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Entre espacios métricos:

$$\begin{tikzcd}
& \text{Compacto} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{Numerablemente} \arrow[dr, Rightarrow] & \text{Weierstrass} \arrow[d, Rightarrow] & \text{Tot. acotado y completo} \arrow[dl, Rightarrow] \\
& \text{Secuencialmente} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Completo}
\end{tikzcd}$$

Demostración: Compacto $\implies$ Weierstras compacto. Sea A infinito, entonces $\{\overline{A \setminus F} : F \subseteq A \wedge F \text{ finito}\}$ es una familia de cerrados con la PIF, luego x es un elemento de la intersección, lo que quiere decir que x es de adherencia a cada $A \setminus F$, luego todo entorno de x les interseca, pero no puede ser en finitos puntos, de lo contrario $A \setminus (A \setminus F \cap U)$ no interseca a un entorno de x lo que sería contradictorio.

Compacto $\implies$ totalmente acotado y completo. Dado $r > 0$ es claro que $\{B_r(x)\}_{x \in X}$ es un cubrimiento abierto, luego posee un subcubrimiento finito cuyos centros conforman F. Para ver que es completo, basta notar que todo compacto es débil-secuencialmente compacto, como todo espacio pseudométrico es 1AN, entonces es secuencialmente compacto, y si una sucesión de Cauchy posee una subsucesión convergente entonces la original también lo es. □

Notemos que como $\mathbb{Q}$ y todo subespacio infinito de él no es completo, entonces todo subespacio infinito de $\mathbb{Q}$ no es compacto.

Ejemplo. Sea $X := [0,1]^{[0,1]}$, es decir, el $\mathfrak{c}$-cubo de Tychonoff.

- X es de Hausdorff, por ser multiplicativa y también es compacto (TUF), por lo tanto, es normal. Sin embargo, X no es completamente normal: Sea $A := \{1/n : n \in \mathbb{N}_{\neq 0}\}$, luego $A^{[0,1]}$ es subespacio de X que es homeomorfo a $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ que hemos probado que no es normal (ej. 2.97).
- <u>X no es secuencialmente compacto:</u> Sea $\alpha_n \colon [0,1] \to [0,1]$ la función que mapea al n-ésimo dígito de la expansión binaria de x, si tuviera una subsucesión convergente α_{n_k} tendría que darse que convergiése puntualmente, pero es fácil notar que siempre existe un punto $p \in [0,1]$ tal que $\alpha_{n_k}(p) = k \mod 2$ y dicha sucesión diverge, por lo tanto, X no es secuencialmente compacto.
- Como X es compacto pero no secuencialmente compacto se concluye que no es 1AN, luego tampoco es 2AN; pero sí es separable (puesto que es una propiedad $\mathfrak{c}$-multiplicativa).

Teorema (AEN) 3.55: Un espacio es numerablemente compacto syss Weierstrass compacto.

Demostración: Por AEN todo conjunto infinito contiene un conjunto numerable, luego es fácil adaptar la demostración previa para ver que el subconjunto numerable posee un punto de ω-acumulación.

Weierstrass $\implies$ numerablementecompacto. Lo haremos por contrarrecíproca. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de cerrados con la PIF pero con intersección total vacía, luego podemos definir $B_k := \bigcap_{i=0}^{k} F_i$ que comparte las mismas propiedades. Sea x_i un elemento elegido de B_i, y $C := \{x_i\}_{i=0}^{\infty}$, veremos que C no posee un punto de ω-acumulación. En efecto, supongamos que y lo fuera en C, luego todo entorno de y contiene infinitos puntos de C, en particular, todo entorno de y corta a todo B_k, pues B_k contiene a toda la subsucesión $\{x_i\}_{i=k}^{\infty}$, luego y es adherente a todo B_k, en sintesis, $y \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k$, lo que es absurdo. □

Teorema (AEN) 3.56: Si X es un espacio pseudo-métrico, entonces son equivalentes:

1. X es compacto.
2. X es numerablemente compacto.
3. X es Weierstrass compacto.
4. X es totalmente acotado y completo.
5. X es secuencialmente compacto.

Demostración: Por la proposición anterior basta probar que ser secuencialmente compacto implica ser compacto. Para ello primero probaremos que

Secuencialmente compacto $\implies$ totalmente acotado y completo. Sólo basta probar que es totalmente acotado, lo que haremos por contrarrecíproca. Si X no fuera totalmente acotado, existiría un real $r > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ se cumple que

$$X_n := \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : \forall i \neq j \ (d(x_i, x_j) \geq r)\}$$

es no vacío, luego por AEN se cumple que existe un $\boldsymbol{x} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Definamos $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ como la sucesión dada por la unión de cada sucesión finita de $\boldsymbol{x}$. Después, definimos una subsucesión y_{n_i} por recursión de modo que $y_{n_1} := y_1$ y $y_{n_{i+1}}$ sea el primer y_k con $k > n_i$ tal que esté a distancia mayor o igual a $r/2$ de los y_{n_i}. Este $y_{n_{i+1}}$ siempre existe, pues de lo contrario, bastaría con considerar una parte de la sucesión de $i+1$ términos todos a distancia mayor que r de si mismos y ver que por principio del palomar habrían al menos dos términos a menos de $r/2$ de un mismo y_{n_k}, luego

$$r < d(y_i, y_j) \leq d(y_i, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y_j) \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

lo que sería absurdo.

Finalmente, dado que $(y_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que todos sus términos están a distancia $\geq r/2$, entonces no posee subsucesiones de Cauchy, luego todas divergen. Luego X no es secuencialmente compacto.

Totalmente acotado y completo $\implies$ compacto. Lo haremos por contradicción. Sea X totalmente acotado, completo, pero no compacto, de modo que existe un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ sin subcubrimiento finito. Luego, si definimos

$$X_n := \{(x_1, \dots, x_m) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} X^k : X = \bigcup_{i=1}^{m} B_{1/n}(x_i)\}$$

podemos ver que cada X_n es no vacío, por ser totalmente acotado, luego por AEN existe $(y_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, donde cada y_n es una sucesión finita $(x_{n,1}; \dots ; x_{n,m})$.

Defina $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ por recursión como prosigue:
z_1 es el $x_{1,i}$ donde i es el primer índice tal que ningún subcubrimiento finito de $\mathcal{U}$ cubre a $B_1(x_{1,i})$.
z_{n+1} es el $x_{n+1,i}$ donde i es el primer índice tal que ningún subcubrimiento finito de $\mathcal{U}$ cubre a $B_{1/(n+1)}(x_{n+1,i}) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{1/j}(z_j)$.

De este modo, z_i resulta ser de Cauchy, luego converge a algún z. Como $z \in X = \bigcup \mathcal{U}$, entonces $z \in U \in \mathcal{U}$, luego como U es entorno de z, existe $n \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ tal que $B_{1/n}(z) \subseteq U$ lo que es absurdo. □

Definición 3.57: Dado un espacio X llamaremos su ***número de Lindelöf***, denotado $L(X)$, como el mínimo cardinal κ tal que todo cubrimiento abierto de X posee un subcubrimiento de cardinal $\leq \kappa$.

Un espacio X tal que $L(X) = \aleph_0$ (es decir, tal que todo cubrimiento abierto posea un subcubrimiento numerable) se le dice un ***espacio de Lindelöf***.

Proposición 3.58: Un espacio es compacto syss es de Lindelöf y numerablemente compacto.

Ejemplo 3.59 (espacio no numerable con punto incluído)**:** Sea $|X| > \aleph_0$ (un espacio no numerable) y consideremos la topología del punto incluído $p \in X$ sobre X, vale decir, un conjunto aquí es abierto syss posee a p o si es vacío.

1. X no es compacto, ni de Lindelöf: Basta considerar el cubrimiento abierto $\bigcup_{x\in X}\{p, x\}$.
2. X tampoco es numerablemente compacto: Sea N un conjunto numerable, entonces $\bigcup_{x\in N} N^c \cup \{p, x\}$ es un cubrimiento numerable por abiertos sin subcubrimientos finitos.
3. X es débil-localmente compacto: Todo punto $x \in X$ pertenece a un entorno $\{p, x\}$ que es compacto por ser finita.
4. X no es localmente compacto: Nótese que $\overline{\{p\}} = X$.
5. De las anteriores X no es Hausdorff. El lector puede comprobar facilmente que X sí es T_0, pero no T_1. ⌟

Hay espacios de Lindelöf que no son numerablemente compactos (topología co-numerable, ej. 3.93) y espacios numerablemente compactos que no son de Lindelöf ($[0, \omega_1)$, ej. 5.97).

Proposición 3.60: Si F es un cerrado en X, entonces $L(F) \leq L(X)$. En particular, todo subespacio cerrado de un espacio de Lindelöf es de Lindelöf.

Teorema (AE) 3.61: Entre espacios topológicos se cumple que $L(X) \leq w(X)$.

Demostración: Sea $\mathcal{B}$ una base X de cardinal $w(X)$ y sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos que cubre a X. Definamos

$$\mathcal{B}_0 := \{B \in \mathcal{B} : \exists i \in I\ (B \subseteq U_i)\}.$$

Sea $s : \mathcal{B}_0 \to I$ una función de elección tal que para todo $B \in \mathcal{B}_0$ cumpla que $B \subseteq U_{s(B)}$ y definamos $I_0 := \operatorname{Img} s$.

En primer lugar notemos que $|I_0| \leq |\mathcal{B}_0| \leq |\mathcal{B}| = w(X)$, y en segundo lugar veamos que $\bigcup_{i\in I_0} U_i = X$. Para ello, sea $x \in X$, luego existe $i \in I$ tal que $x \in U_i$, como U_i es abierto existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U_i$, luego $B \in \mathcal{B}_0$ y por ende

$$x \in B \subseteq U_{s(B)} \subseteq \bigcup_{i\in I_0} U_i,$$

como se quería probar. $\square$

Corolario (AEN) 3.62: Todo espacio 2AN es hereditariamente de Lindelöf.

El siguiente teorema utiliza varios conceptos de la aritmética cardinal:

Teorema (AE) 3.63 (Arkhangel'skiĭ): Si X es de Hausdorff y $\kappa := L(X) + \chi(X) \geq \aleph_0$, entonces $|X| \leq 2^\kappa$.

Demostración: Para todo x sea $\mathcal{B}(x)$ una base de entornos de cardinal $\leq \kappa$ y sea[2] $F\colon \kappa^+ \to \mathcal{P}(X)$ una sucesión definida por recursión transfinita como prosigue:

- $F_0 := \{x\}$ para algún $x \in X$ cualquiera.

[2] Aquí κ^+ representa el álef sucesor, en lenguaje técnico, el número de Hartogs de κ (cf. [**0,** Def. 4.23-4.25, p. 89]).

- Si F_α está definido, sea $\mathcal{B}_\alpha := \bigcup_{x\in F_\alpha}\mathcal{B}(x)$, claramente $\mathcal{B}_\alpha$ es un cubrimiento abierto de F_α, luego posee un subcubrimiento abierto $\mathcal{U}$ y si tal subcubrimiento no cubre a X, entonces denotamos por $x_{\mathcal{U}}$ a un elemento cualquiera de $X \setminus \bigcup \mathcal{U}$. Finalmente $F_{\alpha+1}$ es la clausura de F_α unido a los $x_{\mathcal{U}}$ para todo subcubrimiento $\mathcal{U}$ de cardinal κ.
- Si λ es límite, entonces $F_\lambda := \overline{\bigcup_{\delta<\lambda} F_\delta}$.

Por recursión transfinita se prueba que todo F_α tiene cardinal $\leq 2^\kappa$: F_0 es trivial. Si $|F_\alpha| \leq 2^\kappa$, por construcción para todo x se cumple que $|\mathcal{B}(x)| \leq \kappa$, luego $|\mathcal{B}_\alpha| \leq \sum_{x\in F_\alpha}\kappa \leq \kappa \cdot 2^\kappa = 2^\kappa$. Por aritmética cardinal $|[\mathcal{B}_\alpha]^\kappa| = |\mathcal{B}_\alpha|^\kappa \leq 2^\kappa$, luego $F_{\alpha+1}$ es la clausura de la unión de dos conjuntos de cardinal $\leq 2^\kappa$, luego tiene cardinal $\leq 2^\kappa$. Si $|F_\delta| \leq 2^\kappa$ con $\delta < \lambda$, entonces $|F_\lambda| \leq |\lambda| \cdot 2^\kappa \leq \kappa^+ \cdot 2^\kappa = 2^\kappa$. Sea $F := \bigcup_{\alpha<\kappa^+} F_\alpha$, entonces también tiene cardinal a lo más 2^κ.

i) <u>F es cerrado:</u> Sea $x \notin F$, entonces sea $\mathcal{B}(x) := \{U_\gamma : \gamma < \kappa\}$ (pues $\kappa \geq \chi(X)$), luego para todo $\alpha < \kappa^+$ sea $n(\alpha) := \min\{\gamma < \kappa : U_\gamma \cap F_\alpha = \varnothing\}$. Notemos que el codominio de n es κ y el dominio es κ^+, luego debe haber algún subconjunto S de κ^+ de cardinal κ^+ tal que $n[S] = \{\eta\}$, probaremos que U_η no corta a F. Sea $\alpha < \kappa^+$, luego hay a lo más κ ordinales bajo α, ergo, existe $\gamma \in S$ tal que $\alpha \leq \gamma$ y $F_\alpha \cap U_\eta \subseteq F_\gamma \cap U_\eta = \varnothing$. Ergo $x \in U_\eta \subseteq F^c$, lo que es la definición de F cerrado.

ii) Como F es cerrado, entonces existe $\mathcal{V} \subseteq \bigcup_{x\in X}\mathcal{B}(x)$ tal que $|\mathcal{V}| \leq \kappa$ (pues $\kappa \geq L(X)$) y que cubre a F. <u>$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}_\alpha$ para algún $\alpha < \kappa^+$:</u> Para todo $V_\gamma \in \mathcal{V}$ sea $\nu(\gamma)$ el mínimo ordinal tal que $V_\gamma \in \mathcal{B}_{\nu(\gamma)}$. Luego, sea $\nu := \lim_{\gamma\to\kappa}\nu(\gamma)$ que de hecho cumple que $\nu < \kappa^+$ pues todo cardinal sucesor es regular. Ergo $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}_\nu$.

iii) <u>$\mathcal{V}$ es un cubrimiento de X:</u> Notemos que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}_\nu$ cubre a F_ν, tiene cardinal $\leq \kappa$ y no cubre a X, luego agregamos $x_{\mathcal{V}} \in F_{\nu+1} \subseteq F$, pero luego, por definición, $x \in F \setminus \bigcup \mathcal{V}$ lo que contradice la construcción de $\mathcal{V}$.

iv) <u>$X = F$:</u> En particular hemos probado algo más fuerte antes, que todo subcubrimiento de $\mathcal{B}$ que cubre a F también cubre a X. Por contradicción, sea $p \notin F$, luego como X es de Hausdorff existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $p \notin B$ para todo $x \neq p$, luego sea $\mathcal{U}$ el cubrimiento formado por todos los entornos de puntos de F que no incluyen a p, luego $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de F que no cubre a X, lo que es absurdo.

Como $X = F$ y $|F| \leq 2^\kappa$, entonces se cumple el enunciado. $\square$

Corolario (AEN) 3.64: Si X es de Hausdorff, de Lindelöf y 1AN, entonces $|X| \leq \mathfrak{c}$.

Teorema 3.65: Se cumplen:

1. (AEN) La suma de espacios no vacíos es de Lindelöf syss todos los espacios lo son y la suma es a lo más numerable.
2. (AE) Más generalmente, la suma de κ espacios cuyo número de Lindelöf es $\leq \kappa$ tiene número de Lindelöf $\leq \kappa$.

> **Teorema (AEN) 3.66:** En un espacio métrico son equivalentes:
>
> 1. Ser 2AN.
> 2. Ser de Lindelöf.
> 3. Ser separable.
> 4. Toda familia de abiertos $\{A_i\}_{i\in I}$ con elementos disjuntos dos a dos, es (a lo más) numerable.

Demostración: $1 \implies 2$. Es el teorema 3.62.

$2 \implies 1$. Para todo $n \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ llamemos $\mathcal{B}_n$ el subcubrimiento numerable de las bolas de radio $1/n$, luego $\mathcal{B} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_{\neq 0}} \mathcal{B}_n$ es numerable, basta notar que es base. En efecto sea U un abierto, luego como $\mathcal{B}$ incluye básicos de radios arbitrariamente pequeños existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $\operatorname{diam} B < d(x, U^c)$ de modo que $x \in B \subseteq U$.

$1 \iff 3$. Se sabe que $w(X) \leq d(X)\chi(X)$ y como $\chi(X) = \aleph_0$ (i.e., ser 1AN) por ser métrico, entonces es claro que $w(X) = \aleph_0$ (i.e., ser 2AN). Además si el espacio es 2AN posee una base numerable e invocando el AEN se elije un punto de cada abierto básico, conformando así un conjunto que es denso y numerable, es decir, X es separable.

$3 \implies 4$. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos disjuntos dos a dos. Y sea D un subconjunto denso numerable, por definición de conjunto denso se cumple que cada A_i posee al menos un elemento de D, ergo $|I| \leq |D| = \aleph_0$.

$4 \implies 2$. ... $\square$

Teorema 3.67: Todo espacio regular de Lindelöf es normal.

Demostración: Para ello aplicaremos el lema 2.48 que dice que basta probar que si C es cerrado contenido en un abierto U basta probar que existe una sucesión numerable de abiertos que cubren a C y cuya clausura está contenida en U. Para demostrarlo usaremos una propiedad del teorema 2.43 que dice que para todo $x \in C$ existe U_x abierto (?!) tal que $U_x \subseteq \overline{U}_x \subseteq U$. De este modo $\{U_x\}_{x\in C} \cup \{C^c\}$ es un cubrimiento del espacio, ergo posee un subcubrimiento numerable $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}} \cup \{C^c\}$ y es claro que los U_i's cumplen lo pedido. □

La demostración mostrada usa elección, pero queda al lector erradicar el uso de elección.

Lema 3.68: Sean X, Y un par de espacios topológicos y sea $K \subseteq X \times Y$ un subconjunto compacto. Si $F \subseteq X$ es cerrado, entonces

$$K_F := \{y \in Y : (F \times \{y\}) \cap K \neq \varnothing\} \subseteq Y$$

es compacto. En particular, si $\{x\}$ es cerrado, la fibra $\{y : (x, y) \in K\}$ es compacta.

Demostración: Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos de K_F en Y. Luego, definiendo $V := (X \setminus F) \times Y$ tenemos que $\{X \times U_i\}_{i\in I} \cup \{V\}$ es un cubrimiento por abiertos de K en $X \times Y$, de modo que admite un subcubrimiento finito $X \times U_{i_1}, \dots, X \times U_{i_n}, V$. Para $y \in K_F$, sea $x \in F$ tal que $(x, y) \in K$; luego $(x, y) \notin V$, así que $(x, y) \in X \times U_{i_j}$ para algún $1 \leq j \leq n$, por lo que $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ es un subcubrimiento finito para K_F. □

Teorema (AEN) 3.69: Si X es compacto e Y es de Lindelöf, entonces $X \times Y$ es de Lindelöf.

Demostración: Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de $X \times Y$ y denótese $\mathcal{V}$ la familia de los conjuntos $V \subseteq Y$ tales que $X \times V$ está cubierto por finitos elementos de $\mathcal{U}$.

$\mathcal{V}$ es un cubrimiento por abiertos de Y. En efecto, dado $y \in Y$ sea $\mathcal{V}_y$ la familia de los abiertos $A \subseteq X$ tales que existe un entorno $y \in B \subseteq Y$ y un elemento $U \in \mathcal{U}$ tales que $A \times B \subseteq U$. Como $\mathcal{U}$ es un cubrimiento y, por definición de la topología producto, es fácil verificar que cada $\mathcal{V}_y$ es un cubrimiento por abiertos de X y, como X es compacto, admite un subcubrimiento $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{V}_y$. Sean $B_1, \dots, B_n$ los entornos de y y $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$

los elementos tales que $A_i \times B_i \subseteq U_i$. Luego $B := B_1 \cap \cdots \cap B_n$ es un entorno de y tal que

$$X \times B \subseteq (A_1 \cup \cdots \cup A_n) \times B \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n,$$

de modo que $B \in \mathcal{V}$ y, por lo tanto, $\mathcal{V}$ es un cubrimiento por abiertos de Y.

Como Y es de Lindelöf, existe un cubrimiento numerable $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$. Luego, para cada $V \in \mathcal{V}_0$ existe una subfamilia finita $\mathcal{U}_V \subseteq \mathcal{U}$ (?!) tal que $X \times V \subseteq \bigcup \mathcal{U}_V$ y, por tanto, $\bigcup_{U \in \mathcal{V}_0} \mathcal{U}_V$ es un subcubrimiento numerable de $\mathcal{U}$, lo que demuestra que $X \times Y$ es de Lindelöf. $\square$

Definición 3.70: Un espacio se dice ***σ-compacto*** si es la unión de numerables compactos.

Teorema 3.71: Se cumplen:

1. Todo espacio σ-compacto es de Lindelöf.

2. Todo espacio regular σ-compacto es normal.

3.4* Compactificaciones

El objetivo principal es el de formalizar la noción de la compactificación de Čech-Stone. Sin embargo, pese a ser una parte fundamental de la topología, la mayoría la deja para el último debido a su complejidad; comenzaremos en primer lugar por ver dos teoremas de cubos universales para *ablandar* la construcción posterior.

§3.4.1 Cubos universales. El concepto de «espacio universal» está estrictamente relacionado al de la *representación matemática* que es la noción de identificar una clase o categoría de objetos con un representante general. En particular veremos que los cubos de Tychonoff y de Alexandroff representan a los espacios de Tychonoff y los T_0 resp.

Definición 3.72: Siendo $\{f_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ una familia de funciones, denotamos por $f := \Delta_{i \in I} f_i \colon X \to \prod_{i \in I} Y_i$ Siendo $\{f_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ una familia de funciones, denotamos por $f := \Delta_{i \in I} f_i \colon X \to \prod_{i \in I} Y_i$ a la función tal que $f(x) := (f_i(x))_{i \in I}$, a la que también le decimos la ***función diagonal***.

Se dice que la familia ***separa puntos y cerrados*** si para todo C cerrado y $x \notin C$ existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \notin \overline{f_i[C]}$.

Categorialmente, la diagonal es como el «producto» de flechas, es decir:

Proposición 3.73: Sean $\{f_i\colon X \to Y_i\}$ una familia de funciones. Entonces:

1. La diagonal es una función continua $F := \Delta_{i\in I} f_i\colon X \to \prod_{i\in I} Y_i$ que satisface que
2. La diagonal es una función continua $F := \Delta_{i\in I} f_i\colon X \to \prod_{i\in I} Y_i$ que satisface que $F \circ \pi_j = f_j$ para todo $j \in I$.
3. Si existe otra función continua $G\colon X \to Z$, con una familia de funciones continuas $\{q_i\colon Z \to Y_i\}_{i\in I}$ tal que $G \circ q_j = f_j$ para todo $j \in I$, entonces existe una única $H\colon Z \to \prod_{i\in I} Y_i$ tal que $H \circ \pi_j = q_j$ para todo $j \in I$. En síntesis se satisface el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dr, "q_j"] \arrow[dd, dashed, "\exists! H"] & \\ X \arrow[ur, "G"] \arrow[dr, "\Delta_{i\in I} f_i"'] & & Y_j \\ & \prod_{i\in I} Y_i \arrow[ur, two heads, "\pi_j"'] & \end{tikzcd}$$

Es decir, F es el producto de los f_i's en la categoría de co-corte X/Top.

Pista: Para H considere $H := \Delta_{i\in I} q_i\colon Z \to \prod_{i\in I} Y_i$. Para H considere $H := \Delta_{i\in I} q_i\colon Z \to \prod_{i\in I} Y_i$. □

Lema 3.74: Toda aplicación continua, inyectiva y que separa puntos y cerrados es un encaje.

Pista: Basta probar que tales funciones son cerradas. □

Teorema 3.75 (de la diagonal): Si $\mathcal{F} := \{f_i\colon X \to Y_i\}_{i\in I}$ es una familia de aplicaciones continuas que separan puntos, entonces la función diagonal es inyectiva. Si, además, $\mathcal{F}$ separa puntos y cerrados, entonces la función diagonal es un encaje. En particular, si alguna función en $\mathcal{F}$ es un encaje, entonces la diagonal también.

Demostración: Es fácil probar que la función diagonal es inyectiva si la familia separa puntos. Para probar que la diagonal es un encaje simplemente probaremos que separa puntos y cerrados: Si $x \notin F$, entonces existe $i \in I$ tal que $\pi_i(f(x)) = f_i(x) \notin \overline{f_i[F]} = \pi_i\left[\overline{f[F]}\right] \supseteq \pi_i\left[\overline{f[X]}\right]$. □

Una aplicación directa:

Teorema 3.76: Todo espacio T_0 de peso κ está encajado en un κ-cubo de Alexandroff.

Demostración: Sea X un espacio T_0. Para todo $U \subseteq X$ abierto definimos

$$\begin{aligned} f_U \colon X &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto 1 - \chi_U(x) = \begin{cases} 0, & x \in U \\ 1, & x \notin U \end{cases} \end{aligned}$$

luego la diagonal de $\{f_U\}_{U\in\mathcal{B}}$, donde $\mathcal{B}$ es una base de cardinalidad κ, es una función continua, pero aún queda probar que es un encaje. Para ello, sea $x \notin C$, donde C es un cerrado de X; luego existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq C^c$, luego $f_i(x) \in f_U[U] \subseteq f_U[C^c]$ y como $f_U[U] = \{0\}$ es un abierto en el espacio de Sierpiński se tiene que $f_U[U] \subseteq \operatorname{Int} f_U[C^c]$, por lo que $\overline{f_U[C]} = (\operatorname{Int} f_U[C^c])^c \subseteq f_U[U]^c$ y $f_U(x) \notin \overline{f_U[C]}$. Es decir, la familia de funciones separa puntos y por ende la diagonal es un encaje. □

Lema 3.77: Un espacio es de Tychonoff syss el conjunto de coceros es base.

Demostración: $\Longrightarrow$. Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de los coceros de X, hay que probar que para todo U entorno de x existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subseteq U$. Para ello, sea $f \in C(X, [0,1])$ tal que $f[U^c] = \{0\}$ y $f(x) = 1$, luego $U^c \subseteq Z := f^{-1}(0)$, donde por definición Z es un cero, luego $Z^c \subseteq U$ y como $f(x) \neq 0$, entonces $x \in Z^c$ como se quería probar.

$\Longleftarrow$. Sea $x \in X$ y F un cerrado que no contiene a x, luego F^c es entorno de x y por construcción existe un cocero C tal que $x \in C \subseteq F^c$. Sea $f \in C(X, [0,1])$ tal que $g^{-1}\left[(0,1]\right] = C$, de modo que $g[F] = \{0\}$ y sabemos que $g(x) \neq 0$. Como $[0,1]$ es de Tychonoff en particular es de Urysohn y existe $h \in C([0,1],[0,1])$ tal que $h(0) = 0$ y que $h(g(x)) = 1$. Finalmente $f := g \circ h$ cumple lo pedido. □

Teorema 3.78: Se cumple:

1. Todo espacio de Tychonoff está encajado en un cubo de Tychonoff.

2. (AE) Si X es de Tychonoff, entonces está encajado en el $w(X)$-cubo de Tychonoff.

3. (AEN) Todo espacio de Tychonoff 2AN está encajado el cubo de Hilbert.

Demostración: Como X es de Tychonoff los coceros forman una base, luego como $L(X) \leq w(X)$, entonces hay una base de coceros de cardinal $w(X)$, que denotaremos por $\mathcal{B}$. Para todo $C \in \mathcal{B}$ sea f_C la función tal que $f_C^{-1}\big((0,1]\big) = C$, entonces $\mathcal{F} := \{f_C \in C(X,[0,1]) : C \in \mathcal{B}\}$ separa puntos y cerrados, por ende su función diagonal es un encaje. $\square$

Nótese que el AE es sólo empleado para «elegir un cubo más pequeño»; sin AE todo espacio de Tychonoff sigue estando encajado en un cubo de Tychonoff.

§3.4.2 Compactificaciones (de Alexandroff, de Čech-Stone).

Definición 3.79: Dado un espacio X, se dice que un par (K, c) es una ***compactificación*** de X si K es compacto y $c\colon X \to K$ es un encaje y $\overline{c[X]} = K$. Se le llama ***resto*** de una compactificación a $K \setminus c[X]$. En general denotamos por $K = cX$.

Teorema 3.80: Se cumple:

1. Todo espacio de Hausdorff que tiene una compactificación es de Tychonoff.

2. (TUF) Todo espacio de Tychonoff tiene una compactificación.

3. (AE) Todo espacio de Tychonoff tiene una compactificación que comparte su peso.

En este sentido, podemos notar que X es compacto syss para toda compactificación cX se tiene que $cX \setminus c[X] = \varnothing$

Definición 3.81: Si c_1X y c_2X son compactificaciones de X, entonces denotamos $c_1X \geq c_2X$ si existe $f \in C(c_1X; c_2X)$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, hook, "c_1"'] & X \arrow[d, hook, "c_2"] \\ c_1X \arrow[r, dashed, "f"'] & c_2X \end{tikzcd}$$

conmuta. Si tal f cumple además ser un homeomorfismo, entonces se dice que las compactificaciones son equivalentes.

Proposición 3.82: Dos compactificaciones c_1X y c_2X son equivalentes syss $c_1X \leq c_2X$ y $c_2X \leq c_1X$.

Lema 3.83: Sea D un subconjunto denso de un espacio de Hausdorff X y sea $f\colon X \to Y$ continua. Si $f|_D$ es un encaje, entonces $f[D^c] \cap f[D] = \varnothing$.

Demostración: Procedemos por contradicción: Supongamos que existe $x \in D$ tal que $f(x) \in f[D^c]$, es decir, existe $y \in D$ tal que $f(x) = f(y)$. Supongamos, sin perdida de generalidad que $X = D \cup \{x\}$ y que $Y = f[D]$. Como X es de Hausdorff, sean U, V entornos disjuntos de x e y resp. Luego $f[D \setminus V] = (f|_D)[D \setminus V]$ es cerrado en $f[D] = Y$, luego $f^{-1}[f[D \setminus V]] = D \setminus V$ es cerrado en X. Como $x \in U \subseteq \operatorname{Int}(V^c)$, entonces $x \notin \operatorname{Int}(V^c)^c = \overline{V}$ y por tanto

$$x \notin \overline{V} \cup (D \setminus V) = \overline{V} \cup \overline{D \setminus V} = \overline{V \cup (D \setminus V)} = \overline{D} = X$$

lo que es absurdo. □

Teorema 3.84: Sean c_1X, c_2X dos compactificaciones de X tales que c_2X es de Hausdorff y $f\colon c_1X \to c_2X$ satisface que $c_1 \circ f = c_2$. Entonces $f[c_1[X]] = c_2[X]$ y $f[c_1X \setminus c_1[X]] = c_2X \setminus c_2[X]$.

Demostración: La primera propiedad se sigue de que $c_1 \circ f = c_2$, la segunda se sigue del lema y de que $c_1[X]$ es denso en c_1X. □

Teorema 3.85: Si X es de Tychonoff, entonces son equivalentes:

1. X es localmente compacto.
2. En toda compactificación de X, el resto es cerrado.
3. En alguna compactificación de X, el resto es cerrado.

Demostración: 1 $\implies$ 2. Sabemos que cX es de Hausdorff y $c[X]$ es localmente compacto, de modo que es abierto en su clausura, ergo, el resto es cerrado.

2 $\implies$ 3. Trivial.

3 $\implies$ 1. Sea cX alguna de tales compactificaciones, si $x \in X$, entonces $c(x)$ admite un entorno abierto V_x, luego $U_x := V_x \cap c[X]$ es también entorno de $c(x)$ relativamente compacto. Luego $c^{-1}[\overline{U}_x]$ es un entorno de x por lo que X es débil-localmente compacto y por ser de Tychonoff es localmente compacto. □

Teorema 3.86 – *Teorema de compactificación de Alexandroff*: Todo espacio X no compacto y débil-localmente compacto posee una compactificación de resto singular. Ésta es la mínima de las compactificaciones bajo el orden $\leq$ y conserva el peso de X.

Demostración: Sea $\infty \notin X$, entonces definamos $\alpha X := X \cup \{\infty\}$. Y definamos la topología sobre αX como aquella formada por todos los abiertos de X y los conjuntos $\infty \cup X \setminus K$, donde K es compacto. La aplicación de la compactificación es la inclusión $\iota(x) = x$. Queda al lector probar que αX es compacto.

Sea cX otra compactificación, entonces construyamos $f : cX \to \alpha X$ como:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\big(c^{-1}(x)\big), & x \in c[X] \\ \infty, & x \notin c[X] \end{cases}$$ □

Denotamos por αX a la compactificación dada por el teorema, a la que denominamos ***compactificación de Alexandroff*** o ***de un solo punto***.

Lema 3.87: Si $\{c_iX\}_{i\in I}$ es una familia de compactificaciones de X, entonces posee cota superior. Si se asume AE, posee supremo. Por ende, si se asume AE posee una compactificación máxima.

Demostración: Definamos primero $\kappa := \Delta_{i\in I} c_i \colon X \to \prod_{i\in I} c_iX$ que por el teorema de la diagonal es un encaje. Definamos primero $\kappa := \Delta_{i\in I} c_i \colon X \to \prod_{i\in I} c_iX$ que por el teorema de la diagonal es un encaje. Luego, si $\kappa X := \overline{\kappa[X]} \subseteq \prod_{i\in I} c_iX$.

Las proyecciones $\pi_i \colon \kappa X \to c_iX$ cumplen que $\kappa \circ \pi_i = c_i$ de modo que $c_iX \leq \kappa X$. Además, si cX es cota es cota superior existen $f_i \colon cX \to c_iX$ con $c \circ f_i = c_i$, luego $F := \Delta_{i\in I} f_i \colon cX \to \prod_{i\in I} c_iX$ satisface que $F \circ \pi_i = f_i$, de modo que $F[cX] \subseteq \kappa X$, $F := \Delta_{i\in I} f_i \colon cX \to \prod_{i\in I} c_i X$ satisface que $F \circ \pi_i = f_i$, de modo que $F[cX] \subseteq \kappa X$, por lo que, $cX \geq \kappa X$. Es decir, κX es la mínima de las cotas superiores, luego es el supremo.

Finalmente, como toda familia de compactificaciones (y por lo tanto toda cadena) tiene supremo, por el lema de Zorn, existe una compactificación maximal. □

Definición 3.88: Si X es de Tychonoff, denotamos βX su compactificación máxima, también llamada ***compactificación de Čech-Stone*** de X.

Teorema 3.89: Toda aplicación continua $f \colon X \to K$ desde un espacio de Tychonoff X a un espacio compacto K admite una extensión $\bar{f} \colon \beta X \to K$.

Más aún, si existe otra compactificación κX con la misma propiedad, entonces κX es equivalente a βX.

Demostración: Sea $f \colon X \to K$, entonces por el teorema de la diagonal $\beta\Delta f \colon X \to \beta X \times K$ es un encaje. Sea $Y := \overline{(\beta\Delta f)[X]}$, y definamos $c := \beta\Delta f \colon X \to Y$ que también resulta un encaje y demuestra que Y es una compactificación de X, por ende, por maximalidad de βX existe un morfismo $g \colon \beta X \to cX$, tal que $\beta \circ g = c$, como $f = c \circ \pi$, se tiene que $\bar{f} := g \circ \pi$ es el morfismo buscado. Visualmente lo podemos entender mediante el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & cX \arrow[r, hook, "\iota"] & \beta X \times K \arrow[dd, two heads, "\pi"] \\
\beta X \arrow[ur, dashed, "g"] & & \\
 & X \arrow[ul, hook', "\beta"] \arrow[uu, hook, "c"'] \arrow[r, "f"'] & K
\end{tikzcd}$$

Si κX tiene la misma propiedad, entonces considerando el encaje canónico $\beta \colon X \to \beta X$ se obtiene que $\bar{\beta} \colon \kappa X \to \beta X$ satisface que $\kappa \circ \bar{\beta} = \beta$ lo que comprueba que $\kappa X \geq \beta X$ y por maximalidad de βX se concluye la equivalencia. □

La compactificación de Čech-Stone tiene varias utilidades, véase la sección §5.2.

3.5 Paracompacidad

Definición 3.90: Un espacio X se dice ***paracompacto*** si todo cubrimiento por abiertos admite un refinamiento localmente finito.

Proposición 3.91: Todo espacio compacto es paracompacto.

Ejemplo. Todo espacio discreto es paracompacto. Así pues, todo espacio discreto infinito es paracompacto, pero no compacto.

Sea X un espacio discreto infinito y sea $N \subseteq X$ numerable tal que N^c también es infinito, luego $\{N \cup \{x\} : x \in X\}$ es un cubrimiento por abiertos que no posee subcubrimientos localmente finitos.

La condición puede mejorarse:

Teorema 3.92: Todo espacio X regular de Lindelöf es paracompacto.

Demostración: Sea $\mathcal{S}$ un cubrimiento por abiertos de X. Por regularidad, para todo $x \in X$ existen $x \in U_x \subseteq \overline{U}_x \subseteq V_x$ (?!) donde V_x está contenido en algún miembro de $\mathcal{S}$. Por ser de Lindelöf, admite un subcubrimiento numerable $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$. Luego, definamos para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n := V_{x_n} \setminus (\overline{U}_{x_1} \cup \cdots \cup \overline{U}_{x_n}),$$

y notemos que $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ forma un refinamiento de $\mathcal{S}$ que es, además, un cubrimiento localmente finito de X. En efecto, para todo $x \in X$ definamos m como el mínimo índice tal que $x \in U_{x_m}$, luego $x \in W_m$ y para todo $k > m$ se cumple que $x \notin W_k$. □

Como ejercicio, elimine el uso de elección general en «(?!)».

Ejemplo. El espacio discreto $X := D(\aleph_1)$ es paracompacto, pero claramente no es de Lindelöf, puesto que $\{\{x\} : x \in X\}$ es un cubrimiento por abiertos sin subcubrimientos numerables.

Si se quita la condición de regularidad, entonces el teorema es falso:

Ejemplo 3.93: Sea X cualquier conjunto no numerable, y sea τ la topología formada por conjuntos co-numerables, vale decir, un abierto en X es o vacío o de complemento a lo más numerable.

1. X es T_1, pero no T_2. Otros axiomas claros es que X no es separable (ya que todo numerable es cerrado), X tampoco es 1AN ni 2AN (¿por qué?).

2. X es de Lindelöf: Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto, entonces $U_j = X \setminus N_j$ donde N_j es un conjunto a lo más numerable, luego basta extraer a lo más numerables U_i's que cubran a N_j para formar un subcubrimiento a lo más numerable.

3. X no es numerablemente compacto, ni paracompacto: Sea N un subconjunto numerable de X, luego $\{N^c \cup \{x\}\}_{x\in N}$ es un cubrimiento abierto numerable sin subcubrimientos finitos. Más aún, dicho cubrimiento tampoco admite refinamientos y es claro que para todo $x \in N^c$ se corrobora que la familia no es localmente finita. ⌟

Teorema 3.94 (Dieudonné): Todo espacio de Hausdorff paracompacto es normal.

Demostración: Sea X de Hausdorff paracompacto. Procedemos por pasos:

(i) X es regular: Sea F un cerrado y $x \notin F$. Para todo $y \in F$ elíjanse (?!) U_y, V_y abiertos disjuntos tales que $y \in U_y, x \in V_y$ (pues X es Hausdorff). Así pues la familia $\mathcal{U} := \{U_y\}_{y\in F} \cup \{X \setminus F\}$ es un cubrimiento por abiertos de X, por lo que, por paracompacidad, admite un refinamiento localmente finito $\{W_i\}_{i\in I}$. Eliminemos todos los W_j's tales que $W_j \nsubseteq X \setminus F$, de modo que la familia resultante $\{W_i\}_{i\in I}$ es ahora un cubrimiento de F. Sea $V := \bigcup_{i\in I} W_i \supseteq F$. Para cada i se cumple que $W_i \subseteq U_{y_i}$ para algún $y_i \in F$ (?!). Como la familia $\{W_i\}_{i\in I}$ es localmente finita, entonces existe un entorno V_0 de x tal que $I' := \{i \in I : W_i \cap V_0 \neq \varnothing\}$ es finito; definamos

$$U := U_0 \cap \bigcap_{j\in I'} V_{y_j},$$

el cual es un entorno de x y es fácil verificar que $U \cap V = \varnothing$ (¡hagalo!).

(ii) X es normal: Sean F, F' un par de cerrados disjuntos. Para cada $x \in F$ elíjanse (?!) U_x, V_x un par de abiertos disjuntos tales que $x \in U_x$ y $F' \subseteq V_x$. Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ un refinamiento localmente finito de $\{U_x\}_{x\in F} \cup \{X \setminus F'\}$ y quedémonos sólo con los índices tales que W_i corta a F. Elijamos para cada $i \in I$ un punto $x_i \in F$ tal que $W_i \subseteq U_{x_i}$, y sea $U := \bigcup_{i\in I} W_i \supseteq F$.

Para cada $y \in F'$ elíjase (!?) V'_y un entorno de y que solo corta a finitos $\{W_i\}_{i\in I}$. Sea $J_y := \{i \in I : W_i \cap V'_y \neq \varnothing\}$ y sea $V_y := V'_y \cap \bigcap_{j\in J_y} V_{x_j}$. Nótese que $V_y \cap U = \varnothing$ (¿por qué?), de modo que $V := \bigcup_{y\in F'} V_y$ satisface lo exigido. □

Nuevamente, en la demostración los «(?!)» denotan usos de elección que pueden ser erradicados; no obstante, soy incapaz de discernir si el uso de elección en «(!?)» puede ser erradicado.

Teorema (AE) 3.95: Si X es compacto e Y es paracompacto, entonces $X \times Y$ es paracompacto.

Teorema 3.96 (A.H. Stone): Todo espacio métrico es paracompacto.

Notas históricas

La noción de paracompacidad fue introducida por **Jean Dieudonné** en [**0**] (1944); en el mismo artículo él demostró el teorema que le atribuimos. El teorema de A.H. Stone es original de Arthur Harold Stone (¡no confundir con M.H. Stone!) en [**0**] (1948).

4

Conexión y la categoría de espacios topológicos

En éste capítulo veremos una introducción a los métodos categoriales. Más específicamente, comenzaremos dando una breve introducción a otra de las definiciones vitales de la topología: la conexión y sus derivados. Luego, al hablar del extremo opuesto, los espacios *hereditariamente* disconexos, introduciremos ciertas nociones de límite categoriales de espacios topológicos. Después retomaremos un problema de compacidad: las compactificaciones como un tipo de adjunción. Y finalmente hablaremos de espacios de funciones desde la perspectiva de una adjunción, lo que a mi juicio esclarece la topología que uno le quiere dar (convergencia puntual, uniforme y compacto-abierto).

4.1 Espacios conexos

Proposición 4.1: Son equivalentes:

1. X no puede expresarse como $X_1 \oplus X_2$ con X_1, X_2 subespacios de X.
2. $\varnothing, X$ son los únicos conjuntos cerrados y abiertos de X.
3. Si $X = X_1 \cup X_2$ con X_1, X_2 separados; entonces algunos es vacío.
4. Para toda aplicación continua $f : X \to D(2)$ se cumple que $f[X] = \{0\}$ o $f[X] = \{1\}$.

> **Definición 4.2 – *Espacio conexo*:** Se le dice ***conexo*** a cualquier espacio que cumple alguna condición del teorema anterior. De lo contrario se dice que un espacio es ***disconexo***.

Ejemplos triviales de conjuntos conexos lo son $\varnothing$ y los conjuntos singulares. Como ejercicio argumente por qué $[0,1]\cup[2,3]$ y $\mathbb{Q}$ son subespacios disconexos de $\mathbb{R}$.

Corolario 4.3: Sea X un espacio topológico, $C \subseteq X$ conexo y X_1, X_2 conjuntos separados tales que $C \subseteq X_1 \cup X_2$. Entonces $C \subseteq X_1$ o $C \subseteq X_2$.

Demostración: Veamos la contrarrecíproca: si $C \not\subseteq X_1$ y $C \not\subseteq X_2$, entonces $C \cap X_1 \neq \varnothing \neq C \cap X_2$. Definamos $A := C \cap X_1$ y $B := C \cap X_2$, nótese que $A \cap B = \varnothing$ y que $A \cup B = C$. Además

$$\overline{A} \cap B \subseteq (\overline{C} \cap \overline{X}_1) \cap (C \cap X_2) = \varnothing$$

y análogamente $A \cap \overline{B} = \varnothing$, por lo que están separados y C es disconexo. □

> **Teorema 4.4:** Todo subespacio de $\overline{\mathbb{R}}$ (bajo la topología del orden) es conexo syss es un intervalo.

Demostración: $\Longrightarrow$. En $\overline{\mathbb{R}}$ todo subespacio S posee ínfimo y supremo a, b; luego para probar que es un intervalo basta probar que para todo $a < x < b$ se cumple que $x \in S$. De lo contrario $S \cap [-\infty, x)$ y $S \cap (x, \infty]$ son abiertos disjuntos cuya unión es S.

$\Longleftarrow$. Supongamos por contradicción que un intervalo puede representarse como la suma de dos subespacios abiertos no vacíos U, V de tal forma que $x \in U$, $y \in V$ y $x < y$. Sea $U' := U \cap [x, y]$, $V' := V \cap [x, y]$ tal que $U' \cup V' = [x, y]$. Notemos que U, V son abiertos-cerrados en el subespacio I, de forma que U', V' son cerrados. Sea $s := \sup(U')$, luego se puede comprobar que $s \in \overline{U}' \subseteq U$ y que $s \in \overline{V}' \subseteq V$; lo que contradice a la cualidad de subespacios disjuntos. □

Es fácil notar que la topología del orden sobre $\overline{\mathbb{R}}$ genera la topología usual sobre $\mathbb{R}$ como subespacio. Ergo, se concluye el mismo resultado para $\mathbb{R}$.

Teorema 4.5: La imagen continua de conexos es conexa.

Corolario 4.6: Si X es de Urysohn, conexo y $|X| \geq 2$, entonces $|X| \geq \mathfrak{c}$.

DEMOSTRACIÓN: Sean $x, y \in X$, por ser de Urysohn están competamante separados por lo que existe $f: X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$. Como X es conexo, entonces f ha de ser suprayectiva, luego $|X| \geq \mathfrak{c}$. $\square$

Nótese que algun axioma de separación fuerte es necesario, ya que el espacio de Sierpiński es un ejemplo sencillo de un espacio T_0 conexo con dos puntos (en general, hay toda una familia de espacios espectrales que incurren en el mismo fenómeno). Otro ejemplo es $\mathbb{N}$ con la topología cofinita, el cual es T_1 y conexo.

Teorema 4.7 – *Teorema del valor intermedio de Weierstrass*:
Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, donde $f(a) < f(b)$, entonces para todo $y \in (f(a), f(b))$ existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = y$.

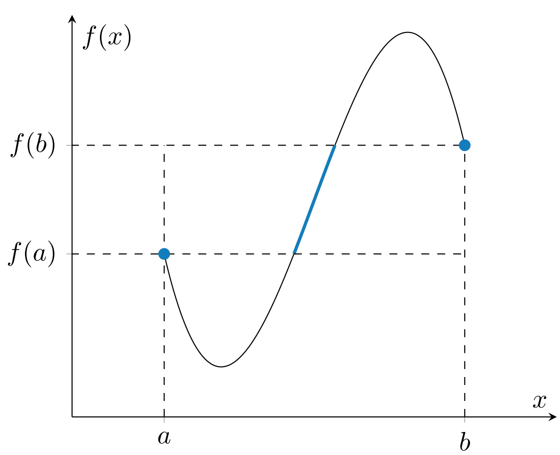


Figura 4.1. Teorema del valor intermedio de Weierstrass.

Corolario 4.8: Si $f: A \to \mathbb{R}$ es inyectiva y continua con $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, entonces f es estrictamente monótona.

Corolario 4.9 (Bolzano): Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, donde $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Corolario 4.10: Toda función continua de la forma $f: [a,b] \to [a,b]$ posee un punto fijo.

Teorema 4.11: Sean $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios conexos de X, tal que existe algún $i_0 \in I$ tal que C_{i_0} no está separado del resto de C_i, entonces $\bigcup_{i\in I} C_i$ es conexo.

Demostración: Sea $C := \bigcup_{i\in I} C_i = X_1 \cup X_2$ donde X_1, X_2 están separados. Como C_{i_0} es conexo (por hipótesis) entonces C_{i_0} está contenido en X_1 o en X_2, supongamos sin perdida de generalidad que $C_{i_0} \subseteq X_1$. Lo mismo aplica para el resto de C_j's, pero como C_j no está separado de C_{i_0}, entonces $C_j \subseteq X_1$ para todo $j \in I$. En conclusión $C \subseteq X_1$ y por ende $X_2 = \varnothing$. □

Corolario 4.12: Sean $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios conexos de X, tal que su intersección es no-vacía, entonces $\bigcup_{i\in I} C_i$ es conexo.

Corolario 4.13: Sea A un conjunto cualquiera tal que $C \subseteq A \subseteq \overline{C}$ con C conexo, entonces A es conexo. En particular la clausura de un conexo es conexa.

Demostración: Notemos que para todo $x \in A$ se cumple que C y $\{x\}$ no están separados. Luego el conjunto $\{C\} \cup \{\{x\} : x \in A\}$ es una familia de conexos tal que uno no está separado del resto. □

Corolario 4.14: Si X posee un subconjunto denso conexo, entonces X es conexo.

Corolario 4.15: Si todo par de puntos en X están contenidos en un subconjunto conexo de X, entonces X es conexo.

Teorema 4.16: La topología producto de espacios no vacíos es conexa syss lo son los factores.

Demostración: Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ tal que $X := \prod_{i\in I} X_i$.

$\Longrightarrow$. Si X es conexo entonces $\pi_j(X) = X_j$ lo es pues la proyección es continua y la imagen de conexos es conexa.

$\Longleftarrow$. Para $I = \{0, 1\}$ basta notar que $X = (X_1 \times \{x_2\}) \cup (\{x_1\} \times X_2)$ donde ambos son conexos no-disjuntos, por ende, X es conexo. Luego se puede aplicar inducción para notar que el producto finitos de conexos es conexo.

Si los X_i son conexos y no vacíos, entonces basta considerar un $\boldsymbol{u} \in X$, y notar que dado[1] $J \in [I]^{<\omega}_{\neq\varnothing}$ se define

$$\prod_{j\in J} X_j \simeq C_J := \prod_{i\in I} A_i, \quad A_i := \begin{cases} \{\boldsymbol{u}_i\} & i \notin J \\ X_i & i \in J \end{cases}$$

Luego la unión de los C_J es un conjunto denso (¿por qué?) de X que es conexo pues es la intersección de conexos cuya intersección contiene a $\boldsymbol{u}$, es decir, es no vacía. □

Nótese que aquí se puede criticar de que hace falta AE para extraer el $\boldsymbol{u} \in X$, pero de darse que el producto sea nulo entonces es también trivialmente conexo.

Corolario 4.17: Los espacios euclídeos, los cubos de Tychonoff y los cubos de Alexandroff son conexos. Los cubos de Cantor son siempre disconexos.

Ejemplo (la topología por cajas puede no ser conexa). Sea $\prod^{\text{Box}}_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$. Sea A el conjunto de las sucesiones acotadas y $B := A^c$ es el conjunto de las sucesiones no-acotadas. Para probar que A y B son abiertos, basta notar que son entornos de todos sus puntos, para ello si $\boldsymbol{x} := (x_i)_{i=0}^\infty \in A$, entonces $\boldsymbol{x} \in \prod_{i=0}^\infty B_1(x_i) \subseteq A$, y de manera similar si $\boldsymbol{y} := (y_i)_{i=0}^\infty \in B$ entonces $\boldsymbol{y} \in \prod_{i=0}^\infty B_1(y_i) \subseteq B$, en donde, el producto de abiertos es abierto por lo que se prueba que A y B lo son.

Definición 4.18: Se define la ***componente conexa*** $C(x)$ de un punto x es la unión de todos los subespacios conexos que le contienen. La ***cuasicomponente*** $Q(x)$ de un punto x es la intersección de los entornos abiertos cerrados de x.

Proposición 4.19: Se cumple que:

1. $C(x)$ es cerrado y es el máximo subespacio conexo que contiene a x.
2. Para todo par de puntos sus componentes conexas (y cuasi-componentes) son iguales o disjuntas.
3. $Q(x)$ es cerrado y el conjunto de las cuasi-componentes forma una partición estricta del espacio.

[1] Un subconjunto finito de I.

4. Si $x \sim y$ syss x, y están contenidos en un subespacio conexo, entonces $\sim$ es de equivalencia, cuyas clases de equivalencia son las componentes conexas del espacio.

5. $C(x) \subseteq Q(x)$.

Demostración: Probaremos la última: Sea F un entorno abierto-cerrado de x, de modo que está separado de F^c. Luego $C(x) \cap F$ y $C(x) \cap F^c$ están separados, pero como $C(x)$ es conexo, entonces o $C(x) \cap F$ o $C(x) \cap F^c$ es disjunto. Pero $x \in C(x) \cap F$, luego $C(x) \cap F^c = \varnothing$, ergo $C(x) \subseteq F$. Como $C(x)$ es una cota inferior y $Q(x)$ es el ínfimo, se cumple que $C(x) \subseteq Q(x)$ como se quería probar. □

Un ejemplo es que si consideramos el subespacio $[0, 1] \cup [2, 3]$ de $\mathbb{R}$ es claro que es disconexo, pero sus componentes conexas son $[0, 1]$ y $[2, 3]$ que vendrían a ser las partes conexas del conjunto.

Ejemplo. En $\mathbb{Q}$ es fácil comprobar que todo conjunto con al menos dos elementos es disconexo, de modo que las componentes conexas son puntos. No obstante, $\mathbb{Q}$ *no* es homeomorfo al espacio discreto $D(\aleph_0)$. Para demostrar esto, basta notar que $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ es un conjunto que no es cerrado, mientras que en el espacio discreto todo conjunto es cerrado.

La confusión de querer descomponer $\mathbb{Q}$ como suma de sus componentes yace de que las componentes son siempre cerradas, pero no siempre abiertas. Por ejemplo, son abiertas cuando hay solo finitas componentes.

Proposición 4.20: En un espacio de Hausdorff compacto, las componentes y cuasicomponentes coinciden.

Demostración: Por la proposición anterior, basta probar que $C(x) \supseteq Q(x)$, vale decir, que toda cuasicomponente es conexa. Denotemos $Q := Q(x)$ y sean X_1, X_2 un par de cerrados disjuntos en Q tales que $X_1 \cup X_2 = Q$. Supongamos que $x \in X_1$, como el espacio es compacto Hausdorff, entonces es normal y existen un par de abiertos (en X) disjuntos U_1, U_2 tales que cada $X_i \subseteq U_i$. Así pues, $Q \subseteq U_1 \cup U_2$ y, por compacidad, existen finitos abiertos-cerrados $F_1, F_2, \ldots, F_k$ tales que

$$Q \subseteq F := \bigcap_{i=1}^{k} F_i \subseteq U \cup V,$$

donde claramente F es abierto-cerrado. Como $\overline{U \cap F} \subseteq \overline{U} \cap F = \overline{U} \cap (U \cup V) \cap F = U \cap F$, vemos que $U \cap F$ también es abierto y cerrado. Como $x \in U \cap F$, entonces $Q \subseteq U \cap F$ y

$$X_2 \subseteq Q \subseteq U \cap F \subseteq U,$$

como $X_2 \subseteq V$, entonces ha de darse que $X_2 = \varnothing$ como se quería probar. □

Definición 4.21: Se le llama un ***arco*** entre a y b a una función continua $\gamma \colon [0,1] \to X$ tal que $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$. Un espacio se dice ***arcoconexo*** si entre todo par de puntos existe un arco.

En un EVT se le dice un ***segmento*** entre a y b al conjunto $\{\lambda a + (1-\lambda)b : \lambda \in [0,1]\}$. Un subconjunto se dice ***convexo*** si contiene todo segmento entre sus puntos.

Es claro que todo segmento es un tipo de arco.

Proposición 4.22: Se cumple:

1. Todo espacio convexo es arcoconexo.
2. La imagen continua de un arcoconexo es arcoconexa.
3. La unión de una familia de intersección total no vacía de espacios arcoconexos es arcoconexa.
4. Todo espacio arcoconexo es conexo.

Demostración: En particular probaremos la última: Llamemos $\operatorname{Img}(C([0,1], X))$ a la familia de las imágenes de todas las funciones continuas de dominio $[0,1]$ y codominio X. Luego si X es no vacío entonces posee un elemento x, luego basta considerar el subconjunto S de $C([0,1], X)$ que contiene a las funciones que pasan por x, como $[0,1]$ es conexo, entonces $\operatorname{Img}(S)$ es una familia de conexos que contienen x, y por definición, para todo $y \in X$ existe $f \in C([0,1], X)$ tal que $x, y \in \operatorname{Img} f$, luego $\bigcup \operatorname{Img}(S) = X$, luego X es conexo. □

Teorema (AE) 4.23: El producto de espacios arcoconexos no vacíos es arcoconexo.

Demostración: Sean $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de arcoconexos, como son no vacíos, por AE $Y := \prod_{i\in I} X_i$ es no vacío. Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in Y$, luego si $f_i : [0,1] \to X_i$ es un arco de extremos u_i y v_i, entonces la diagonal $f\colon [0,1] \to Y$ es continua y es un arco entre $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$. $\square$

Definición 4.24: Un espacio se dice ***débil-localmente conexo*** si todo punto posee un entorno conexo.

Proposición 4.25: Para un espacio topológico X son equivalentes:

1. X es débil-localmente conexo.
2. Las componentes conexas de X son abiertas.
3. X es la suma de espacios topológicos.

Más aún, los factores de la suma son únicos salvo isomorfismo y salvo permutación.

Ejemplo. Sea X un espacio con más de tres puntos, con el punto excluído η. Es decir, un abierto de X es cualquier subconjunto que no contiene a η o todo X. Éste espacio es conexo, pues para que $X = U \cup V$, entonces sin perdida de generalidad $\eta \in U$ y luego $U = X$; así que también es débil-localmente conexo. Pero $V := X \setminus \{\eta\}$ es un subespacio abierto de X con la topología discreta y con dos puntos, luego es disconexo.

También podemos elegir que X sea infinito con punto excluido η, en cuyo caso será compacto y $X \setminus \{\eta\}$ no lo será, por lo que X no es localmente compacto.

El ejemplo anterior exhibe las falencias de la definición anterior, lo que motiva la siguiente definición.

> **Definición 4.26:** Se dice que un espacio es ***localmente conexo*** (resp. ***arcoconexo***) si todo punto posee una base de entornos conexos (resp. arcoconexos).

Así, lo que probamos es que el ejemplo anterior es débil-localmente conexo, pero no localmente conexo.

Teorema 4.27: Un espacio es localmente conexo (resp. localmente arcoconexo) syss todas las componentes conexas (resp. arcoconexas) de todo subespacio abierto son abiertas (y, por tanto, cerradas).

DEMOSTRACIÓN: La demostración es la misma reemplazando conexo por arcoconexo donde corresponda.

$\Longrightarrow$. Sea C una componente conexa y sea $x \in C$. Sea $\mathcal{B}$ una base formada por conexos, como $\mathcal{B}$ es base existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$, como B es conexo y C es el mayor conexo que contiene a x debe darse que $x \in B \subseteq C$, luego C es entorno de x.

$\Longleftarrow$. Sea $\mathcal{B}$ la familia de componentes conexas de todo subespacio abierto. Sea U un entorno abierto cualquiera de x, luego $x \in C_U(x) \subseteq U$ y $C_U(x) \in \mathcal{B}$, por lo que $\mathcal{B}$ es base. □

Nótese que como la clausura de un subespacio conexo es conexo, entonces las componentes conexas siempre son cerradas, pero ese no es el caso para subespacios arcoconexos; por ello, la observación en paréntesis es interesante para componentes arcoconexas.

Ejemplo. Considere $X = \mathbb{Q}$. Veremos que las componentes conexas son puntos: para ello, sea $x \in \mathbb{Q}$ y sea $S \subseteq \mathbb{Q}$ que contiene a x y a otro punto y. Ahora bien, por densidad de los irracionales, existe $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que z está entre x, y. Así, $(-\infty, z) \cap \mathbb{Q}, (z, \infty) \cap \mathbb{Q}$ son abiertos disjuntos de $\mathbb{Q}$ y al intersectarlos con S prueban que S es disconexo.

Se nota que las componentes arcoconexas son también puntos, luego todas son cerradas, pero ninguna es abierta.

Teorema 4.28: Un espacio localmente arcoconexo es conexo syss es arcoconexo.

DEMOSTRACIÓN: Ya vimos que todo arcoconexo es conexo, así que veremos el converso: Si el espacio es localmente arcoconexo, entonces sus componentes arcoconexas son abiertas y cerradas (y no vacías), como el espacio es conexo, entonces la componente debe igualar al espacio. □

4.2 Límites inversos y espacios disconexos

Definición 4.29: Se dice que un conjunto parcialmente ordenado $(I, \leq)$ es un ***conjunto dirigido*** si para todo $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$.

Dado un conjunto ordenado dirigido $(I, \leq)$, un ***sistema inverso***[2] es una

[2] ENGELKING [**0**] les llama *sistema inverso*, mientras que BOURBAKI [**0**] les llama *sistema proyectivo*.

familia $\{X_i\}_{i\in I}$ de espacios topológicos con funciones continuas $\varphi_j^i\colon X_i \to X_j$ para $i \geq j$, tal que:

1. $\varphi_i^i = \mathrm{Id}_{X_i}$.
2. $\varphi_j^i \circ \varphi_k^j = \varphi_k^i$ cuando $i \geq j$ y $j \geq k$.

De manera compacta, denotaremos que $(X_\bullet, \varphi_\bullet^\bullet, I)$ o que $\{X_i\}_{i\in I}$ es el sistema inverso.

El ejemplo prototípico de un conjunto dirigido es $(\mathbb{N}, \leq)$. Secretamente los sistemas inversos capturan la noción de un diagrama filtrado en Top; como ésta categoría es completa, entonces posee toda clase de límites inversos, pero estos serán más fáciles de calcular.

Definición 4.30: Sea $S := \{X_i\}_{i\in I}$ un sistema inverso. Una ***hebra***[3] es una tupla $(x_i)_{i\in I}$ de elementos $x_i \in X_i$ tales que $\varphi_j^i(x_i) = x_j$. Denotamos por $\varprojlim_{i\in I} X_i$ al subespacio de todas las hebras en $\prod_{i\in I} X_i$, llamado el ***límite inverso*** del sistema S.

También decimos que S es el ***límite cofiltrado***[4] de los espacios $\{X_i\}_{i\in I}$; esto será útil para sentencias de la forma «el límite cofiltrado de $\mathcal{P}$ es $\mathcal{P}$».

El siguiente ejemplo, fundamental el teoría de números, da una buena imagen:

Ejemplo 4.31: Considere los anillos $A_n := \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Entonces la reducción $\operatorname{mód} p^n$ induce un homomorfismo de anillos $\varphi_n^{n+1}\colon A_{n+1} \to A_n$. Para hacer que $(A_\bullet, \varphi_\bullet^\bullet)$ sea un sistema inverso dotamos a cada A_n con la topología discreta (que es la única topología Hausdorff posible), y así, denotamos $\mathbb{Z}_p := \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
& & \mathbb{Z}_p \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\cdots \arrow[r, two heads] & \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \arrow[r, two heads] & \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \arrow[r, two heads] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

A los elementos de $\mathbb{Z}_p$ se le denominan *números p-ádicos*.[5] ⌟

[3] eng. *thread*.

[4] Esto se debe a que en la teoría de categorías existe una noción de «categoría filtrada» y lo que llamamos un *sistema inverso* es un diagrama contravariante filtrado.

[5] En realidad, a $\mathbb{Z}_p$ se le otorga un carácter dual. Por un lado ha de ser un espacio topológico, pero también un anillo.

Proposición 4.32: Sea $(X_\bullet, \varphi_\bullet^\bullet, I)$ un sistema inverso y sea X su límite inverso.

1. Para cada $i \in I$, existe una función continua $p_i \colon X \to X_i$ tal que para cada $j \le i$ se cumple que $p_i \circ \varphi_j^i = p_j$.
2. Si Y es un espacio topológico con una familia de funciones continuas $\{q_i \colon Y \to X_i\}_{i \in I}$ tales que $q_i \circ \varphi_j^i = q_j$ para todo $j \le i$, entonces existe una única función continua $f \colon Y \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & & X_i \arrow[dd, "\varphi_j^i"] \\
Y \arrow[r, dashed, "\exists! f"] \arrow[urr, bend left, "q_i"] \arrow[drr, bend right, "q_j"'] & X \arrow[ur, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & \\
 & & X_j
\end{tikzcd}$$

Demostración:

1. Basta definir $p_i := \pi_i|_X$ donde $\pi_i \colon \prod_{j \in I} X_j \to X_i$ es la proyección a la i-ésima coordenada.
2. Basta definir $f(y) := \big(q_i(y)\big)_{i \in I}$ y notar que la unicidad se sigue de la definición de X. □

La proposición anterior, que no es más que un ejercicio, pero nos dice que la notación coincide con la interpretación categórica.

Ejemplo 4.33: Sea $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in S}$ una familia de espacios topológicos. Definamos I como la familia de subconjuntos finitos de S con el orden parcial dado por la inclusión. Definamos $X_i := \prod_{\alpha \in i} Y_\alpha$ para $i \in I$ y definamos $\varphi_j^i \colon X_i \to X_j$ como la proyección canónica (nótese que X_i «tiene más coordenadas» que X_j, de modo que φ_j^i «borra las coordenadas adicionales»). Mediante la propiedad universal de la proposición anterior es fácil comprobar que

$$\varprojlim_i X_i = \prod_{\alpha \in S} Y_\alpha.$$ ⌟

Proposición 4.34: El límite cofiltrado de espacios T_i es T_i con $i \le 3{,}5$.

Proposición 4.35: El límite $\varprojlim S$ de un sistema inverso $S = \{X_i\}_{i \in I}$ de espacios de Hausdorff es un cerrado en $\prod_{i \in I} X_i$.

Demostración: Para todo $j \leq i$ defínamos:

$$F_{ij} := \left\{ (x_k)_k \in \prod_{k\in I} X_k : \varphi_j^i(x_i) = x_j \right\},$$

nótese que es un cerrado pues los espacios son Hausdorff, y $\varprojlim S = \bigcap_{i,j} F_{ij}$ de modo que es cerrado. □

Corolario (AE) 4.36: Sea $(X_\bullet, \varphi_\bullet^\bullet, I)$ un sistema inverso de espacios compactos de Hausdorff y sea $X := \varprojlim_{i\in I} X_i$ con $f_i \colon X \to X_i$. Entonces:

1. X es compacto y para todo $i \in I$:
$$f_i[X] = \bigcap_{j\geq i} \varphi_i^j[X_j]. \tag{4.1}$$

2. Si cada X_i es no vacío, entonces X no es vacío.

Por ejemplo, $\mathbb{Z}_p$ debe ser entonces un espacio de Hausdorff compacto.

Corolario (AE) 4.37: Sea $(X_\bullet, \varphi_\bullet^\bullet, I)$ un sistema inverso tal que para todo $x_i \in X_i$ y todo $j \leq i$, la fibra $(\varphi_i^j)^{-1}[\{x_i\}]$ es compacto y Hausdorff. Entonces la relación (4.1) se satisface y las fibras $p_i^{-1}[\{x_i\}]$ son compactas Hausdorff.

Demostración: Fijemos $i \in I$ y para todo $x_i \in \bigcap_{j\geq i} \varphi_i^j[X_j] \subseteq X_i$, definamos $F_j := (\varphi_i^j)^{-1}[\{x_i\}]$. Para todo $i \leq j \leq k$ se tiene que $\varphi_j^k[F_k] \subseteq F_j$ por la transitividad de los índices, de modo que $(F_\bullet, \varphi_\bullet^\bullet, \{j \in I : j \geq i\})$ constituye un sistema inverso cuyo límite es $p_i^{-1}[\{x_i\}]$. □

Corolario (AE) 4.38: Sea I un conjunto dirigido y $(X_\bullet, \varphi_\bullet^\bullet), (Y_\bullet, \psi_\bullet^\bullet)$ un par de sistemas inversos de espacios de Hausdorff. Sea $\{f_i \colon X_i \to Y_i\}_{i\in I}$ una familia de funciones continuas tal que para todo $j \leq i$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\varphi_j^i"'] & Y_i \arrow[d, "\psi_j^i"] \\ X_j \arrow[r, "f_j"'] & Y_j \end{tikzcd}$$

Sea $X := \varprojlim_i X_i$, $Y := \varprojlim_i Y_i$ y $f := \varprojlim_i f_i \colon X \to Y$. Entonces:

1. Si para cada $\boldsymbol{y} := (y_i)_i \in Y$ se cumple que $f_i^{-1}[\{y_i\}]$ es compacto y no vacío, entonces $f^{-1}[\{\boldsymbol{y}\}]$ es compacto y no vacío.

2. Si cada X_i es compacto y cada f_i es suprayectivo, entonces f también es suprayectivo y, en consecuente, Y es compacto.

Definición 4.39: Se dice que un espacio es:

Hereditariamente disconexo Si todo subespacio de cardinalidad > 1 es disconexo.[6]

Cerodimensional Si es no vacío, es T_1 y todo punto posee una base de entornos abiertos-cerrados.

Fuertemente cerodimensional Si es no vacío, de Tychonoff y si para todo par de conjuntos A, B completamente separados existe un abierto-cerrado C tal que $A \subseteq C \subseteq B^c$.

Todo espacio discreto es fuertemente cerodimensional y extremadamente disconexo.

Ejercicio 4.40: Demuestre que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son hereditariamente disconexos y cerodimensionales.

El siguiente corolario es claro:

Corolario 4.41: Las propiedades de ser hereditariamente disconexo o cerodimensional son hereditarias.

Teorema 4.42: Se cumple que:

1. Un espacio es hereditariamente disconexo syss sus componentes conexas son singulares.

2. En un espacio cerodimensional las cuasi-componentes son singulares, luego es hereditariamente disconexo.

3. Todo espacio fuertemente cerodimensional es cerodimensional.

[6]Ésta es terminología de ENGELKING **[0]**. Desgraciadamente, la mayoría de autores (e.g., BOURBAKI **[0]**) opta por *totalmente disconexo* o *discontinuo*, el cual es relativamente conflictivo.

Ejemplo. El espacio $X := \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}_{\neq 0}\}$ es hereditariamente disconexo: En efecto, sea $C \subseteq X$ conexo no vacío y supongamos que $1/n \in C$, nótese que $\{1/n\}$ es un conjunto abierto-cerrado de X, luego como C es conexo se ha de cumplir que $C = \{1/n\}$. Si $1/n \notin C$ para todo n, entonces $C = \{0\}$.

Teorema 4.43: Para un espacio de Tychonoff no vacío X son equivalentes:

1. X es fuertemente cerodimensional.

2. Todo cubrimiento finito por coceros $\{U_i\}_{i=1}^k$ admite un refinamiento finito por abiertos $\{V_i\}_{i=1}^m$ tal que $V_i \cap V_j = \varnothing$ para $i \neq j$.

Demostración: 2 $\implies$ 1. Sea $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f[A] \subseteq \{0\}$ y $f[B] \subseteq \{1\}$. Los conjuntos $U_1 := f^{-1}\big[(0,1]\big]$ y $U_2 := f^{-1}\big[[0,1)\big]$ constituye un cubrimiento por coceros, de modo que admiten un refinamiento por abiertos disjuntos $\{V_i\}_{i=1}^m$. Si elegimos los V_i's de modo que exactamente $V_1, V_2, \dots, V_n$ cortan a A y $V_{n+1}, \dots, V_m$ cortan a B, entonces $U := V_1 \cup \cdots \cup V_n$ es un abierto-cerrado tal que $A \subseteq U \subseteq B^c$.

1 $\implies$ 2. Basta proceder por inducción sobre k. El caso base $k = 1$ es trivial. Veamos el caso general: sea $\{U_i\}_{i=1}^k$ un cubrimiento por coceros, y definamos $U_j' := U_j$ para $j < k-1$ y $U_{k-1}' := U_{k-1} \cup U_k$. Por hipótesis inductiva, existe un refinamiento finito por abiertos y cerrados disjuntos $\{W_i\}_{i=1}^M$; es fácil modificarlo de modo que $M = k-1$ y $W_j \subseteq U_j$ para cada $j < k$.

Los conjuntos $W_{k-1} \setminus U_{k-1}$ y $W_{k-1} \setminus U_k$ son ceros, de modo que están completamente separados por el teorema 2.54. Luego, existe un conjunto abierto y cerrado G tal que

$$W_{k-1} \setminus U_{k-1} \subseteq G \subseteq X \setminus (W_{k-1} \setminus U_k) = W_{k-1}^c \cup U_k.$$

Así pues, $V_{k-1} := W_{k-1} \setminus U \subseteq U_{k-1}$ y $V_k := W_{k-1} \cap U \subseteq U_k$ son abiertos y cerrados. Rellenando con $V_i := W_i$ para $i < k-1$ se puede verificar que $\{V_i\}_{i=1}^{k-1}$ satisface lo exigido. □

Teorema 4.44: Todo espacio cerodimensional y de Lindelöf (e.g., compacto) es fuertemente cerodimensional.

Demostración: Sean A, B un par de cerrados disjuntos. Para cada punto $x \in X$ elíjase un abierto y cerrado $x \in W_x \subseteq X$ tal que $A \cap W_x = \varnothing$ o

$B \cap W_x = \varnothing$. Como el espacio es Lindelöf, sea $\{W_{x_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ un subcubrimiento numerable, y defínanse los conjuntos

$$U_i := W_{x_i} \setminus \bigcup_{j<i} W_{x_j} \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Entonces $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento de X por abiertos y cerrados disjuntos dos a dos, y el conjunto $U := \bigcup\{U_i : A \cap U_i = \varnothing\}$ satisface que $A \subseteq U \subseteq B^c$. □

Corolario 4.45: Todo espacio no vacío numerable y regular es fuertemente cerodimensional.

Demostración: Como X es numerable, entonces es normal y es Lindelöf. Basta probar que X es cerodimensional, es decir, que X posee una base de abiertos-cerrados. Sea $x \in X$ un punto y V un entorno de x. Por el lema de Urysohn, existe $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f[X \setminus V] = \{1\}$. Como X es numerable, entonces su imagen también lo es, luego existe $r \in [0,1] \setminus \operatorname{Img} f$. Así, $U := f^{-1}\big[[0,r)\big] = f^{-1}\big[[0,1]\big]$ es un subentorno abierto y cerrado de V que contiene a x. □

Teorema 4.46: Todo espacio no vacío, T_1, heriditariamente disconexo y localmente compacto es cerodimensional.

Demostración: Sea $x \in X$ un punto, V un entorno de x y sea $W \subseteq V$ un subentorno de x tal que $\overline{W}$ es compacto. Como la componente conexa de x en $\overline{W}$ es $\{x\}$ y como las componentes conexas y cuasicomponentes coinciden, entonces, denotando por $\mathcal{K}$ a la familia de abiertos-cerrados que contienen a x en el subespacio $\overline{W}$, se cumple que $\{x\} = \bigcap \mathcal{K}$. Por la propiedad de las intersecciones finitas, tenemos que existen finitos $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{K}$ tales que $x \in U := F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k \subseteq W \subseteq V$. Nótese que U es cerrado en $\overline{W}$, luego es cerrado también en X, y U es abierto en W, luego también es abierto en X. □

Corolario 4.47: Sea X un espacio topológico no vacío localmente compacto y paracompacto (e.g., compacto y Hausdorff). Son equivalentes:

1. X es hereditariamente disconexo.
2. X es cerodimensional.
3. X es fuertemente cerodimensional.

Teorema 4.48: El producto de espacios no vacíos hereditariamente disconexos (resp. cerodimensionales) es hereditariamente disconexo (resp. cerodimensional).

En consecuencia, el límite cofiltrado de espacios hereditariamente disconexos (resp. cerodimensionales) es hereditariamente disconexo (resp. cerodimensional o vacío).

Teorema (AE) 4.49: Para un espacio topológico X no vacío, son equivalentes:

1. X es el límite cofiltrado de espacios discretos finitos.
2. X es Hausdorff, compacto y hereditariamente disconexo.
3. X es Hausdorff, compacto y cerodimensional.

Demostración: Ya vimos que $1 \implies 2 \iff 3$.

$3 \implies 1$. Sea X Hausdorff, compacto y cerodimensional. Sea $\mathcal{R}$ el conjunto de todas las relaciones de equivalencias $R \subseteq X \times X$ que son conjuntos abiertos. Para $R \in \mathcal{R}$, nótese que el espacio cociente X/R es finito y discreto; esto pues cada clase $[x]_R$ es abierta y $X = \bigcup_{x \in X}[x]$, de modo que solo hay finitas clases de equivalencia. Para $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ denotamos $R_1 \preceq R_2$ syss para todo $x \in X$ se tiene que $[x]_{R_1} \supseteq [x]_{R_2}$ (o equivalentemente, $R_1 \supseteq R_2$). Entonces $(\mathcal{R}, \preceq)$ es un conjunto dirigido, pues para $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ se cumple que $R_i \preceq R_1 \cap R_2$. Ahora bien, si $R \preceq S$ entonces $\varphi_{RS} \colon X/R \to X/S$ mandando $\varphi_{RS}([x]_R) = [x]_S$.

Finalmente, sea $Y := \varprojlim_{R \in \mathcal{R}} X/R$, entonces como las proyecciones canónicas $\pi_R \colon X \to X/R$ son compatibles con el sistema inverso, tenemos una aplicación $\psi \colon X \to Y$ canónica. Como las proyecciones son suprayectivas, entonces ψ también por el corolario 4.38, y como Y es Hausdorff y X es compacto, entonces basta ver que ψ es inyectiva. Sean $x, y \in X$, entonces como X es cerodimensional, existe U abierto y cerrado tal que $x \in U$ e $y \notin U$. Definiendo R como la relación que identifica todo el conjunto U y todo el conjunto $X \setminus U$, entonces vemos que $\pi_R(x) \neq \pi_X(y)$, de modo que $\psi(x) \neq \psi(y)$ como se quería probar. □

Definición (AE) 4.50: Se dice que un espacio topológico es ***de Stone***[7] si satisface alguna de las condiciones del teorema anterior.

[7] También llamados *espacios profinitos* o *espacios booleanos*.

Corolario (AE) 4.51: Un espacio de Stone X es 2AN syss $X = \varprojlim_{i\in I} X_i$ donde $\{X_i\}_{i\in I}$ es un sistema inverso cuyos índices I son numerables.

Demostración: $\Longleftarrow$. Basta notar que X es un subespacio de $\prod_{i\in I} X_i$, el cual es de Stone y 2AN.

$\Longrightarrow$. Sea $\mathcal{R}$ el conjunto de relaciones de equivalencia abiertas en X como en la demostración anterior. Entonces, para todo $x \in X$ se nota que su clase $[x] \subseteq X \times X$ es un abierto, y como $X = \bigcup_{x\in X}[x]$, entonces tiene que haber finitas clases, cada una siendo cerrada y abierta, luego compacta, de modo que es una unión de finitos elementos de la base. Así pues, podemos notar que $\mathcal{R}$ es numerable, lo que basta siguiendo la demostración anterior. $\square$

Ejemplo 4.52 (el espacio «escoba» reducido)**:** Sea

$$X := \{(x, x/n) : x \in [0,1], n \in \mathbb{N}_{\neq 0}\} \cup \{(1,0)\}.$$

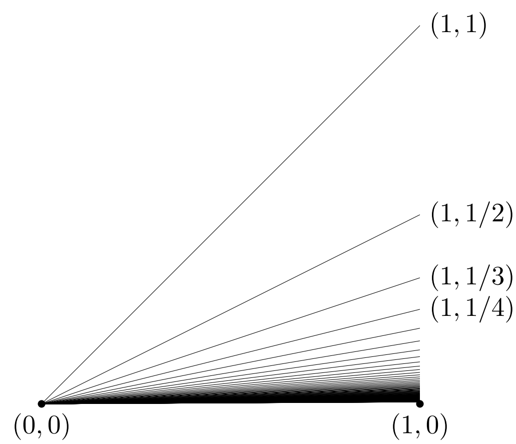


Figura 4.2. Espacio «escoba» reducida.

1. <u>X es conexo:</u> Claramente $X\setminus\{(1,0)\}$ es conexo, dado que es la unión de conexos (las «hebras» $\{(x, x/n) : x \in [0,1]\}$ con un n fijo) que tienen un punto en común, el $(0,0)$. Luego, basta probar que el conjunto $\{(1,0)\}$ no está separado del resto, para ello nótese que todo entorno $B_\epsilon\big((1,0)\big) \cap X$ contiene un punto de la forma $(1, 1/n)$ para algún $n < \epsilon$, luego $(1,0)$ es un punto de acumulación de $X \setminus \{(1,0)\}$ y sanseacabó.

2. X no es arcoconexo: Sea $p\colon [0,1] \to X$ un arco tal que $p(0) = (1,0)$, queremos probar que $p(t) = (1,0)$ para todo t. Luego definamos

$$C := \{t \in [0,1] : p(t) = (1,0)\}.$$

Nótese que $C = p^{-1}\big[\{(1,0)\}\big]$, luego es cerrado.

Veamos que también es abierto: Sea $t_0 \in C$, como p es continuo, entonces existe un $\delta > 0$ tal que si $|t - t_0| < \delta$, entonces $\|p(t) - p(t_0)\| < 1/2$. Como $\|(0,0) - (1,0)\| = 1 > 1/2$, entonces $p(t) \neq (0,0)$ y por lo tanto tiene coordenada en x no nula. Ahora, definimos la función

$$\begin{aligned} m\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto y/x \end{aligned}$$

que es claramente continua. Notemos que $p \circ m$ toma valores en $Z := \{0\} \cup \{1/n : n > 0\}$. Sea $I := (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0,1]$, I es claramente conexo en $[0,1]$, luego $(p \circ m)[I]$ es conexo en Z, pero Z es hereditariamente disconexo, luego ha de corresponder a un punto, que ha de ser el 0 (pues $(p \circ m)(t_0) = 0$ y $t_0 \in I$). Así que $t_0 \in I \subseteq C$, por lo que C es entorno de todos sus puntos y por ende es abierto.

Finalmente, como C es un abierto y cerrado no vacío de $[0,1]$, entonces ha de ser $[0,1]$. Luego todo arco desde $(1,0)$ es constante, así que X no puede ser arcoconexo. ⌟

Otro ejemplo son los siguientes:

Ejemplo. Sea

$$X := \{(1/n, y) : y \in [0,1]\} \cup \{0\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{0\}, \quad Y := X \setminus \{0\} \times (0,1)$$

A X se le conoce como el ***peine del topólogo*** y a Y como el *peine reducido del topólogo*.

1. X, Y son conexos: Es claro que X lo es, puesto que las «hebras» (los conjuntos de la forma $\{(x,y) : y \in [0,1]\}$ para $x = 1/n$ o $x = 0$) son conexas, el «mango» (el conjunto $[0,1] \times \{0\}$) también y todas las hebras cortan el mango. El problema con Y es que hay un punto, el $(0,1)$, que no está en una hebra, sin embargo, es fácil notar que todo entorno del $(0,1)$ corta al resto del conjunto, que sí es conexo, por lo que Y también lo es.

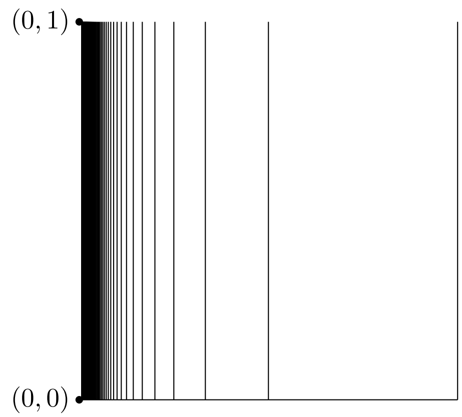


Figura 4.3. Peine reducido del topólogo.

2. <u>X es arcoconexo, pero Y no:</u> Podemos notar que $X = \bigcup_{x=1/n,x=0} H_x$ donde $H_x := \{x\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{0\}$ es arcoconexo; luego X es la unión de arcoconexos de intersección no vacía, por lo que X es arcoconexo.

   Para demostrar que Y no es arcoconexo, podemos emplear un argumento similar al del espacio «escoba» reducido, pero empleando dos funciones en lugar de una: una que proyecta sobre la coordenada y para notar que todo arco siempre tiene coordenada $y = 1$ y una segunda que proyecta sobre la coordenada x empleando la disconexión hereditaria de $\{0\} \cup \{1/n : n > 0\}$.

3. <u>X, Y no son localmente conexos:</u> Nótese que $B_r\big((0,1)\big) \cap P$ con $r < 1$ siempre contiene a un segmento $S_0 := \{0\} \times (1-r, 1]$ y a otro segmento $S_n := \{1/n\} \times (f(n), 1]$ con $f(n) := \sqrt{r^2 - 1/n^2}$. Nótese que el siguiente segmento está a distancia horizontal

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}, \quad \delta_n := \frac{1}{2n(n+1)}$$

   Así pues $(1/n - \delta_n, 1/n + \delta_n) \times (f(n)/2, 2) \cap P$ es un abierto que contiene a S_n, pero no contiene puntos de S_0. Mientras que $(-1/2n, 1/2n) \times (\frac{1-r}{2}, 2)$ es un abierto que contiene a S_0, pero es disjunto de S_n.

Una característica común al espacio escoba reducido y al peine reducido es que son espacios conexos, no arcoconexos, pero cuyas clausuras (en $\mathbb{R}^2$) son arcoconexas. Topológicamente ésto puede verse como que no son compactos (demuéstrelo). Sin embargo, ésto no ocurre para el seno del topólogo, que es conexo, no arcoconexo, y cuya clausura (que es compacta) tampoco es arcoconexa.

§4.2.1 Objetos proyectivos. En ésta subsección seguimos el artículo de Gleason [**0**]. En una primera lectura es opcional, pero los resultados de Gleason han adquirido una nueva luz en la teoría de objetos condensados de Clausen-Scholze.

Definición 4.53: Se dice que un espacio X es ***extremadamente disconexo*** si es de Hausdorff y la clausura de todo abierto es abierta.

Teorema 4.54: Todo espacio extremadamente disconexo es hereditariamente disconexo.

No obstante, la mayoría de ejemplos a los que nos hemos enfrentado no lo son: queda al lector verificar que ni $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ni $\mathbb{Z}_p$ son extremadamente disconexos.

La razón, como veremos en ésta sección, tiene que ver con el hecho de que los espacios extremadamente disconexos resultan increíblemente restrictivos.

Definición 4.55: Una ***categoría de Gleason*** es una subcategoría $\mathscr{C} \subseteq \mathsf{Haus}$ de espacios de Hausdorff tal que:

1. Dado $X \in \operatorname{Obj} \mathscr{C}$, entonces $X \times D(2) \in \operatorname{Obj} \mathscr{C}$ y cada proyección $\pi_i \colon X \times D(2) \to X$ está en $\operatorname{Mor} \mathscr{C}$.
2. Sea $X \in \operatorname{Obj} \mathscr{C}$ y $F \subseteq X$ un subespacio cerrado. Entonces $F \hookrightarrow X \in \operatorname{Mor} \mathscr{C}$.

Varias subcategorías son de Gleason. Claramente $\mathsf{Haus}, \mathsf{KHaus}$ y, más importante, Stone son de Gleason.

Teorema 4.56: Sea $\mathscr{C}$ una categoría de Gleason. Entonces los objetos proyectivos de $\mathscr{C}$ son espacios extremadamente disconexos.

Demostración: Sea X un objeto proyectivo de $\mathscr{C}$ y sea $U \subseteq X$ un abierto. Sea $D(2) = \{0, 1\}$ y en $X \times D(2)$ considere el cerrado $Y := (X \setminus U) \times \{0\} \cup \overline{U} \times \{1\}$ y su inclusión $i \colon Y \to X \times D(2)$. Sea $\pi \colon X \times D(2) \to X$ la proyección, de modo que $i \circ \pi \in \operatorname{Mor} \mathscr{C}$ y es suprayectivo (luego un epimorfismo). Como

X es proyectivo, tomando $\mathrm{Id}_X\colon X \to X$ vemos que existe $g\colon X \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, equal] \\ Y \arrow[r, two heads, "i\circ\pi"'] & X \end{tikzcd}$$

Nótese que $i\circ\pi|_{U\times\{1\}}\colon U\times\{1\} \to U$ es biyectivo, de modo que $g(x) = (x,1)$ para $x \in U$ y, por el corolario 2.64 vemos que $g(x) = (x,1)$ para $x \in \overline{U}$. Luego $g^{-1}[\overline{U}\times\{1\}] = \overline{U}$, pero $\overline{U}\times\{1\}$ es abierto en Y, de modo que $\overline{U}$ es abierto. □

Teorema 4.57: Sean X un espacio extremadamente disconexo. Entonces:

1. Toda sucesión convergente en X es eventualmente constante.

2. En consecuencia, si X es 1AN, entonces es discreto.

Demostración:

1. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a y y supongamos, por contradicción, que no es eventualmente constante.

   Construyamos recursivamente una subsucesión de $(x_n)_n$ y una sucesión de abiertos $(U_k)_k$. El abierto U_0 contiene al primer $x_{\sigma(0)} \neq y$ e $y \notin \overline{U}_0$. Construido U_n, definamos $V := X\setminus(\overline{U}_1\cup\cdots\cup\overline{U}_n)$ el cual es un entorno de y, luego existe un $\sigma(n+1) \in \mathbb{N}$ mayor que $\sigma(n)$ tal que $x_{\sigma(n+1)} \in V$, $x_{\sigma(n+1)} \neq y$ y sea W un entorno de $x_{\sigma(n+1)}$ tal que $y \notin \overline{W}$. Definimos $U_{n+1} := W \cap V$.

   Definamos ahora $G := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{2n}$. Como X es extremadamente disconexo, $\overline{G}$ es abierto y claramente $y \in \overline{G}$ (pues $\lim_n x_{\sigma(2n)} = y$), así que $\overline{G}$ es entorno de y y algún $x_{\sigma(2m+1)} \in \overline{G}$. Así que $U_{2m+1}\cap G \neq \varnothing$, lo cual es absurdo pues U_{2m+1} es disjunto del resto de U_{2n}'s.

2. Basta notar que la clausura de un conjuntos en un espacio 1AN viene determinado por los límites de sucesiones, los cuales son eventualmente constantes, luego todo conjunto es cerrado. □

Lema 4.58: Sea $\rho\colon X \twoheadrightarrow Y$ una función continua suprayectiva tal que para todo $F \subset X$ cerrado propio se tiene que $\rho[F] \neq Y$ (e.g., ρ biyectiva).

Entonces, para todo abierto $U \subseteq X$ tenemos que

$$\rho[U] \subseteq \overline{Y \setminus \rho[X \setminus U]}.$$

Demostración: Supongamos que $U \neq \varnothing$. Sea $y \in \rho[U]$ y sea V un entorno de y. Basta ver que V corta a $Y \setminus \rho[X \setminus U] =: S$. Como $U \cap \rho^{-1}[V] \subseteq X$ es un abierto no vacío, entonces $Y \neq \rho\big[X \setminus (U \cap \rho^{-1}[V])\big]$, así que, tómese $y' \in Y \setminus \rho\big[X \setminus (U \cap \rho^{-1}[V])\big]$. Como ρ es suprayectiva, existe $x' \in X$ tal que $\rho(x') = y'$. Como $y' \in Y \setminus \rho[X \setminus U] = S$, necesariamente $x' \in U \cap \rho^{-1}[V]$ y, por tanto, $y' = \rho(x') \in \rho\big[\rho^{-1}[V]\big] = V$, por lo que $y' \in V \cap S$ como se quería ver. □

Lema 4.59: Si Y es extremadamente disconexo y U_1, U_2 son un par de abiertos disjuntos, entonces $\overline{U}_1, \overline{U}_2$ también son disjuntos.

Demostración: Como U_2 es abierto, entonces $\overline{U}_1, U_2$ son disjuntos. Análogamente como $\overline{U}_1$ es abierto, entonces $\overline{U}_1, \overline{U}_2$ son disjuntos. □

Lema 4.60: Sean X, Y un par de espacios de Hausdorff compactos con Y extremadamente disconexo. Si $\rho\colon X \to Y$ es continua suprayectiva y para todo cerrado propio $F \subset Y$ tenemos que $\rho[F] \neq X$, entonces ρ es un homeomorfismo.

Demostración: Por el lema de la función cerrada, basta verificar que ρ es inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $\rho(x_1) = \rho(x_2)$ y sean U_1, U_2 abiertos disjuntos con $x_i \in U_i$. Ambos $X \setminus U_i$ son compactos, luego $\overline{Y \setminus \rho[X \setminus U_i]}$ son abiertos y son disjuntos (¿por qué?), luego $\overline{Y \setminus \rho[X \setminus U_i]}$ son abiertos disjuntos, pero por el lema 4.58 vemos que

$$\rho(x_1) = \rho(x_2) \in \overline{Y \setminus \rho[X \setminus U_1]} \cap \overline{Y \setminus \rho[X \setminus U_2]},$$

lo que es absurdo. □

Lema 4.61: Sea $\pi\colon Z \twoheadrightarrow Y$ una función suprayectiva entre espacios de Hausdorff compactos. Entonces Z contiene un compacto $K \subseteq Y$ tal que $\pi[K] = Y$, pero $\pi[F] \neq Y$ para todo $F \subset K$ cerrado propio.

Demostración: Es una aplicación del lema de Zorn. □

Teorema 4.62: En las siguientes categorías:

(a) La subcategoría plena KHaus de espacios Hausdorff compactos.

(b) La subcategoría plena de espacios de Tychonoff (aquellos que poseen compactificaciones).

(c) La categoría de espacios Hausdorff localmente compactos cuyas flechas son las funciones propias.

Los objetos proyectivos son precisamente los espacios extremadamente disconexos.

Demostración: Claramente las categorías (a)-(c) son de Gleason, así que basta probar que todo espacio extremadamente disconexo es proyectivo.

Realizaremos la primera, empleando los lemas anteriores. Para el resto hay que apropiadamente ver que los lemas tienen su análogo. Sea $Y \in \operatorname{Obj} \mathsf{KHaus}$ extremadamente disconexo y sean $f \colon A \twoheadrightarrow B$ una función continua suprayectiva con $f \in \operatorname{Mor} \mathsf{KHaus}$ y $g \colon Y \to B$ una función continua. Hay que probar que existe $\bar{f} \colon Y \to A$ tal que $f = \bar{f} \circ g$.

Considere $Z := \{(y, a) \in Y \times A : g(y) = f(a)\}$ como subespacio de $Y \times A$. Como los espacios son Hausdorff, Z es cerrado y, por tanto, compacto. Como f es suprayectivo, entonces la proyección $\pi_1 \colon Z \twoheadrightarrow Y$ es suprayectiva. Así, existe $K \subseteq Z$ compacto tal que $\pi_1[K] = Y$ y $\pi_1[F] \neq Y$ para todo cerrado propio $F \subset K$. Luego $\rho := \pi_1|_K \colon K \to Y$ es un homeomorfismo y podemos definir $\bar{f} := \rho^{-1} \circ \pi_2$, donde $\pi_2 \colon Z \to A$ es la otra proyección. □

Corolario 4.63: Un espacio de Tychonoff es extremadamente disconexo syss su compactificación de Čech-Stone lo es.

Demostración: Se sigue de la propiedad universal de los objetos proyectivos y la compactificación de Čech-Stone □

Ejemplo. Considere el subespacio $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ (el cual es discreto), entonces $\beta\mathbb{N}$ es un espacio extremadamente disconexo y compacto.

Corolario 4.64: Todo espacio de Hausdorff compacto es la imagen continua de un espacio extremadamente disconexo compacto. En resumen, la categoría KHaus tiene suficientes proyectivos.

Demostración: Sea X de Hausdorff compacto, entonces $D(X)$, el espacio discreto cuyo conjunto subyacente es X, induce una función continua suprayectiva $D(X) \twoheadrightarrow X$, donde $D(X)$ es extremadamente disconexo. Luego, por propiedad universal, esta función se factoriza por $\beta D(X) \twoheadrightarrow X$ la cual satisface lo exigido. □

4.3 Espacios normados y espacios vectoriales topológicos

Comenzamos por recordar la siguiente definición:

Definición 4.65: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo con valor absoluto. Una aplicación $\| \,\| \colon V \times V \to \mathbb{R}$ se dice una ***semi-norma*** si:

SN1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ y $\|\vec{0}\| = 0$.

SN2. $\|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \, \|\boldsymbol{x}\|$.

SN3. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

Nótese que todo espacio semi-normado es pseudo-métrico tomando $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$. Un espacio semi-normado que es métrico se dice ***normado***, vale decir, si en lugar de satisfacer SN1, satisface

N1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ y $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ syss $\boldsymbol{x} = \vec{0}$.

Dos (semi)normas sobre un espacio se dicen ***equivalentes*** si inducen la misma topología.

Teorema 4.66: Si $\| \,\|_1$ y $\| \,\|_2$ son normas sobre X, éstas son equivalentes syss existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\boldsymbol{x} \in X$ se cumple que

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq \alpha \|\boldsymbol{x}\|_2, \quad \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \beta \|\boldsymbol{x}\|_1.$$

Demostración: $\Longleftarrow$. Queda al lector.

$\Longrightarrow$. La demostración es por contradicción. Si las normas son equivalentes, pero las constantes no existen entonces sin perdida de generalidad supondremos que

$$\inf_{\boldsymbol{x} \neq \vec{0}} \frac{\|\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_1} = 0$$

de esta forma, definimos:

$$f \colon X \longrightarrow X$$

$$\boldsymbol{x} \longmapsto \begin{cases} \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_1}, & \boldsymbol{x} \neq \vec{0} \\ \vec{0}, & \boldsymbol{x} = \vec{0} \end{cases}$$

notemos que f no es continua en $(X, \| \|_1)$ pues si aplicamos f primero y luego $\| \|_1$, entonces la función es discontinua en $\vec{0}$, pero la norma es continua y la composición de continuas es continua. No obstante, f sí es continua en $(X, \| \|_2)$, pues lo es en todo $\boldsymbol{x} \neq \vec{0}$ por ser cociente entre continuas, y en $\boldsymbol{x} = \vec{0}$ también ya que de no serlo, entonces $f[B_\epsilon(\vec{0})]$ no sería entorno de $\vec{0}$, luego al aplicarle $\| \|_2$ ... □

Teorema 4.67: Las normas sobre un espacio de dimensión finita son equivalentes.

Demostración: En particular probaremos que son todas equivalentes a $\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \text{máx}\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$. Sea $\| \|$ una norma cualquiera, luego como E es de dimensión finita posee una base canónica $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ de modo que

$$\|\boldsymbol{x}\| = |x_1|\,\|\boldsymbol{e}_1\| + \cdots + |x_n|\,\|\boldsymbol{e}_n\| \leq \lambda\|\boldsymbol{x}\|_\infty$$

donde $\lambda := \|\boldsymbol{e}_1\| + \cdots + \|\boldsymbol{e}_n\|$.

Para ver la otra desigualdad probaremos por inducción que para todo n y todo $i \leq n$ existe $\mu_i > 0$ tal que $|x_i| < \mu_i\|\boldsymbol{x}\|$ con $\boldsymbol{x} \in \mathbb{k}^n$, pues, luego $\mu := \text{máx}\{\mu_i : i \leq n\}$ satisface que $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq \mu\|\boldsymbol{x}\|$.
Para $n = 1$ veamos que $\mu := 1/\|1\|$ cumple lo pedido.
El caso $E := \mathbb{k}^{n+1}$, se demostrará que $\boldsymbol{e}_{n+1}$ es adherente a $F := \mathbb{k}^n \times \{0\}$ que es cerrado (por hipótesis inductiva), lo que sería absurdo. Supongamos que hay un índice que no cumple la hipótesis, sin perdida de generalidad podemos suponer que uno de ellos es el $(n+1)$-ésimo (de lo contrario reordenamos índices), es decir que para todo $\mu > 0$ existe $\boldsymbol{x} \in E$ tal que $|x_{n+1}| > \mu\|\boldsymbol{x}\|$. Podemos asumir que $x_{n+1} = 1$ pues basta dividir por tal $\boldsymbol{x}$ por x_{n+1}. Para probar que $\boldsymbol{e}_{n+1}$ es adherente, sea $\epsilon > 0$, luego $\mu := 1/\epsilon > 0$ y existe $\boldsymbol{y} \in F$ tal que $d(-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_{n+1}) = \|\boldsymbol{y} + \boldsymbol{e}_{n+1}\| < 1/\mu = \epsilon$. Pero esto es absurdo, lo que completa la demostración. □

Definición 4.68 – *Espacio vectorial topológico*: Se dice que (V, τ) es un $\mathbb{k}$-***espacio vectorial topológico*** (abrevaido, EVT) si V es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y τ es una topología sobre V tal que la suma $+\colon V^2 \to V$ y el producto por escalar $\cdot\colon \mathbb{k} \times V \to V$ son funciones continuas.

Proposición 4.69: Un EVT es de Hausdorff syss $\{\vec{0}\}$ es cerrado.

Demostración: Basta notar que el gráfico de la diagonal es preimagen del $\{\vec{0}\}$ bajo la función $f\colon V^2 \to V$ dada por $f(x,y) := x - y$. □

Teorema 4.70: Todo espacio normado es un EVT.

Demostración: Denotaremos E al espacio.

i) La suma es continua: Consideremos E^2 con la norma L_1, luego, sean $(a,b),(c,d) \in E^2$

$$\|(a+b)-(c+d)\| \leq \|a-c\|+\|b-d\| = \|(a-c,b-d)\|_1 = \|(a,b)-(c,d)\|_1,$$

ergo, $+$ tiene la propiedad de Lipschitz, por ende es continua.

ii) El producto escalar es continuo: Consideremos $\mathbb{K} \times E$ con la norma L_∞, luego sean $(\lambda,x),(\lambda',y) \in \mathbb{K}\times E$, sea $\epsilon > 0$, entonces consideremos

$$\delta := \frac{\epsilon}{|\lambda| + \|x\| + 1} > 0,$$

y digamos que (λ',y) está a menos de $\min(\delta,1)$ de distancia de (λ,x), por lo que

$$\|(\lambda,x) - (\lambda',y)\|_\infty = \max\{|\lambda-\lambda'|, \|x-y\|\} < \min(\delta,1).$$

Luego, veamos que

$$\|\lambda x - \lambda' y\| = \|\lambda(x-y) + (\lambda-\lambda')y\| \leq |\lambda|\,\|x-y\| + |\lambda-\lambda'|\,\|y\|$$

ahora estamos casi listos, el único factor extraño es $\|y\| \leq \|x-y\| + \|x\| \leq 1 + \|x\|$. Ahora acotando los factores convenientes por δ se obtiene:

$$\|\lambda x - \lambda' y\| < |\lambda|\delta + \delta(1 + \|x\|) = \epsilon.$$ □

Teorema 4.71: Un espacio normado es localmente compacto syss es de dimensión finita.

Demostración: $\Longrightarrow$. Sea X el espacio. Como X es localmente compacto, entonces $\overline{B}_1(\vec{0})$ es compacto, luego es totalmente acotado y existen $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n \in \overline{B}_1(\vec{0})$ tales que:

$$\bigcup_{i=1}^n B_{1/2}(\boldsymbol{x}_i) \supseteq \overline{B}_1(\vec{0}).$$

Definamos $F := \operatorname{Span}\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\}$, veremos que $F = X$. Sea $\boldsymbol{x} \in X \setminus F$, entonces sea $r := d(\boldsymbol{x}, F)$, luego nótese que $K := \overline{B}_{r+1}(\boldsymbol{x}) \cap F$ es un conjunto compacto (¿por qué?) y no vacío; por ende la función $d(\boldsymbol{x}, -)$ que es continua, alcanza un mínimo y necesariamente dicho mínimo es r; vale decir, existe $\boldsymbol{y} \in F$ tal que $r = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$. Como F es cerrado, se debe cumplir que $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, luego existe $\boldsymbol{x}_i$ tal que

$$\left\| \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|} - \boldsymbol{x}_i \right\| < \frac{1}{2}.$$

Finalmente, multiplicando todo por $r > 0$ se obtiene que

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + r\boldsymbol{x}_i) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - r\boldsymbol{x}_i\| < \frac{r}{2},$$

pero $\boldsymbol{y} + r\boldsymbol{x}_i \in F$, lo que contradice la definición de r.

$\Longleftarrow$. Todo espacio normado de dimensión finita es necesariamente $\mathbb{R}^n$ con la topología usual, el cual es localmente compacto. $\square$

Proposición 4.72: Si N, M son normados y $f \in L(N, M)$ es lineal, entonces son equivalentes:

1. f es continua.
2. f es continua en $\vec{0}$.
3. f tiene la propiedad de Lipschitz.
4. $f[\overline{B}_1(\vec{0})]$ es acotado en M.

Demostración: Basta notar que $3 \implies 1 \implies 2 \implies 4 \implies 3$ (donde $2 \implies 4$ deriva que ser continua en $\vec{0}$ implica estar acotada cerca de $\mathbf{0}$, luego se multiplica por un escalar). $\square$

Definición 4.73: Sean E, F un par de $\Bbbk$-EVTs, se denota por $\mathcal{L}(N, M)$ al conjunto de funciones continuas y lineales desde E a F.

Proposición 4.74: Sea E un $\mathbb{R}$-EVT y F un espacio normado, entonces

$$\begin{aligned} \|\ \|_\infty \colon \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \sup\{\|f(\boldsymbol{x})\| : \|\boldsymbol{x}\| = 1\} \end{aligned}$$

determina una norma.

En particular, si $f \in \mathcal{L}(V, V)$ y definimos $C := \|f\|_\infty$, entonces

$$\forall \boldsymbol{x} \in V \quad \|f(\boldsymbol{x})\| \leq C\|\boldsymbol{x}\|.$$

Proposición 4.75: Sean E, F, G un trío de $\Bbbk$-EVTs. Entonces se cumplen:

1. $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{L}(E, E)$.
2. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ y $g \in \mathcal{L}(F, G)$, entonces $f \circ g \in \mathcal{L}(E, G)$.

En consecuencia, los espacios vectoriales topológicos (como objetos) y las funciones lineales continuas entre ellos (como flechas) constituyen una categoría denotada TVS, la cual es una subcategoría tanto de Top como Vect.

Definición 4.76: Dado un $\mathbb{R}$-EVT V, una aplicación de $\mathcal{L}(V, V)$ se dice un ***operador***. Los isomorfismos de TVS (vale decir, las funciones lineales continuas que poseen inversa lineal y continua) se dicen ***isomorfismo topológico***.[8]

Definición 4.77: Un espacio normado que es completo (como espacio métrico) se dice un ***espacio de Banach***.

Proposición 4.78: Si E es un $\mathbb{R}$-EVT y F es de Banach, entonces $\mathcal{L}(E, F)$ también es de Banach.

Definición 4.79: Un conjunto A de un $\Bbbk$-EVT se dice:

(Linealmente) acotado Si para todo entorno U de $\vec{0}$ existe $\lambda \in \Bbbk$ tal que $A \subseteq \lambda U$.

Absorvente Si para todo $\boldsymbol{x} \in V$ existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $|\alpha| \leq \epsilon$ se cumple que $\alpha \boldsymbol{x} \in A$.

Equilibrado Si para todo $|\alpha| \leq 1$ y todo $\boldsymbol{x} \in A$ se cumple que $\alpha \boldsymbol{x} \in A$.

Si $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}$ se dice que A es:

[8] Algunos libros le dicen *isomorfismo topológico* a los homeomorfismos, en inglés también suele aparecer ésta definición como *toplinear isomorphism*.

Convexo Si para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ y todo $\lambda \in [0,1]$ se cumple que $\lambda \boldsymbol{u} + (1-\lambda)\boldsymbol{v} \in A$.

Absolutamente convexo Si es convexo y equilibrado.

Localmente convexo Si posee una base de entornos convexos.

Proposición 4.80: Si V es normado, entonces:

1. Las bolas son absorventes y equilibradas.
2. La intersección finita de conjuntos absorventes es absorvente.
3. La intersección de equilibrados es equilibrado.

Si $\mathbb{K}$ contiene a $\mathbb{R}$:

4. Las bolas son convexas, en consecuente, son absolutamente convexas.
5. La intersección de convexos es convexo, en consecuente, la intersección de absolutamente convexos es absolutamente convexo.

Definición 4.81: Si $A \subseteq V$ donde V es un $\mathbb{K}$-EVT que contiene a $\mathbb{R}$, entonces se definen la envoltura (absolutamente) convexa como

$$\begin{aligned}\operatorname{conv} A &:= \bigcap\{C : A \subseteq C \wedge C \text{ convexo}\},\\ \operatorname{aco} A &:= \bigcap\{C : A \subseteq C \wedge C \text{ abs. convexo}\};\end{aligned}$$

resp.

Proposición 4.82: Si A es convexo, entonces $\operatorname{Int} A$ y $\overline{A}$ son convexos.

Demostración: Sea $\boldsymbol{u} \in A$ y $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Int} A$, luego para todo $0 < \lambda < 1$ se cumple que $\lambda\boldsymbol{u} + (1-\lambda)\boldsymbol{v} \in \lambda\boldsymbol{u} + (1-\lambda)\operatorname{Int} A$ donde el último es un subconjunto abierto de A, es decir, A es entorno de $\lambda\boldsymbol{u} + (1-\lambda)\boldsymbol{v}$, luego pertenece a $\operatorname{Int} A$, ergo es convexo.

Sea $f : \mathbb{R} \times V^2 \to V$ la aplicación tal que $f(\lambda, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \lambda\boldsymbol{u} + (1-\lambda)\boldsymbol{v}$ la cual es continua pues V es un EVT, luego, un conjunto A es convexo syss $f\left[[0,1] \times A^2\right] \subseteq A$, luego

$$f\left[[0,1] \times \overline{A}^2\right] = f\left[\overline{[0,1] \times A^2}\right] \subseteq \overline{f\left[[0,1] \times A^2\right]} \subseteq \overline{A}. \qquad \square$$

Ejemplo. Considere el subespacio $X \subseteq \mathbb{R}^2$ dado por

$$X = \{(x, 1/x) : x \in (0, \infty)\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Nótese que X es cerrado (¿por qué?), y luego compruebe que

$$\operatorname{conv} X = (0, \infty) \times (0, \infty) \cup \{(0, 0)\}.$$

De modo que X es cerrado, pero $\operatorname{conv} X$ no lo es.

Teorema 4.83: Si U es entorno de $\vec{0}$ en un $\mathbb{k}$-EVT, entonces:

1. Si $\alpha \in \mathbb{k}$ no nulo, entonces αU es entorno de $\vec{0}$.

Si $\mathbb{k}$ es normado:

2. U es absorvente.
3. U contiene un entorno de $\vec{0}$ equilibrado.

DEMOSTRACIÓN:

1. Queda al lector.
2. Por continuidad del producto externo $f(\alpha, \boldsymbol{v}) := \alpha \boldsymbol{v}$ se cumple que $f^{-1}[U]$ es entorno de $(\vec{0}, \boldsymbol{v})$, luego contiene a un abierto de la forma $B_{2\epsilon}(\vec{0}) \times W$ con W entorno de $\vec{0}$, por ende, para todo $|\alpha| \leq \epsilon$ se cumple que $\alpha \boldsymbol{u} \in U$ con $\boldsymbol{u} \in U$ y para un cierto $\epsilon > \vec{0}$.
3. Siguiendo la construcción anterior, consideremos $W' := W \cap U$ que es entorno de 0 contenido en U tal que para todo $|\alpha| < 2\epsilon$ se cumple que $\alpha W \subseteq U$. Luego existe $|\alpha_0| < \epsilon$, de forma que

$$U_0 := \bigcup_{|\alpha| \leq 1} \alpha \alpha_0 W' \subseteq U$$

y U_0 es equilibrado. □

Lema 4.84: Sean V, W un par de $\mathbb{k}$-EVTs y $f \in L(V, W)$. Entonces f es continua syss para todo entorno $U \subseteq W$ de $\vec{0}$, se cumple que $f^{-1}[U] \subseteq V$ es un entorno de $\vec{0}$.

DEMOSTRACIÓN: $\Longrightarrow$. Trivial.

$\Longleftarrow$. Como las traslaciones son homeomorfismos, entonces basta probar que la preimagen de todo entorno abierto $U \subseteq W$ de $\vec{0}$ es abierta. Sea $\boldsymbol{v} \in f^{-1}[U]$, es decir, $f(\boldsymbol{v}) \in U$; consideremos $g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$ el cual es un homeomorfismo sobre V, luego existe un entorno abierto U' de $\vec{0}$ tal que $f(\boldsymbol{v}) + U' \subseteq U$. Por hipótesis existe U'' entorno abierto de $\vec{0}$ tal que $f[U''] \subseteq U'$, luego

$$f[\boldsymbol{v} + U''] = f(\boldsymbol{v}) + f[U''] \subseteq f(\boldsymbol{v}) + U' \subseteq U,$$

por lo que $\boldsymbol{v} + U'' \subseteq f^{-1}[U]$ y f es continua. $\square$

Teorema 4.85: Sea V un $\mathbb{K}$-EVT, entonces $f \in L(V, \mathbb{K})$ es continua syss el núcleo es cerrado.

DEMOSTRACIÓN: $\Longrightarrow$. $\{0\}$ es cerrado en $\mathbb{K}$, luego $f^{-1}[\{0\}] = \ker f$ es cerrado.

$\Longleftarrow$. En primer lugar, como $\dim \mathbb{K} = 1$, entonces se tiene que f es o nula (lo que es claramente continua) o suprayectiva. Si f es suprayectiva, tenemos que probar, por el lema, que para todo $\epsilon > 0$ se cumple que $f^{-1}[B_\epsilon(0)]$ es un entorno del $\vec{0}$.

Sea $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $0 < |\alpha| < \epsilon$, luego existe $\boldsymbol{v}_0$ tal que $f(\boldsymbol{v}_0) = \alpha$ y concretamente $f^{-1}[\{\alpha\}] = \boldsymbol{v}_0 + \ker f$, el cual es un cerrado del espacio, luego su complemento es un entorno abierto del $\vec{0}$, el cual contiene a un subentorno abierto equilibrado U; vale decir, $\alpha \notin f[U]$. Sea $\boldsymbol{u} \in U$, si $f(\boldsymbol{u}) \neq 0$, entonces como

$$f\left(\frac{\alpha}{f(\boldsymbol{u})}\boldsymbol{u}\right) = \frac{\alpha}{f(\boldsymbol{u})} f(\boldsymbol{u}) = \alpha,$$

entonces, como U es equilibrado se sigue que $|\alpha/f(\boldsymbol{u})| > 1$, vale decir, $|f(\boldsymbol{u})| < |\alpha| < \epsilon$. Si $f(\boldsymbol{u}) = 0 < \epsilon$. Así pues, en cualquier caso, $U \subseteq f^{-1}[B_\epsilon(0)]$ como se quería probar. $\square$

Teorema 4.86: Sea W un subespacio vectorial de un EVT V. Entonces $\overline{W}$ también es un subespacio vectorial.

DEMOSTRACIÓN: Hay que ver que $\overline{W}$ es cerrado bajo suma y producto por escalar.

Para ello, sea $\boldsymbol{v} \in W$, entonces $\boldsymbol{v} + W \subseteq W \subseteq \overline{W}$, luego $W \subseteq -\boldsymbol{v} + \overline{W}$, pero como las traslaciones son homeomorfismos, entonces $-\boldsymbol{v} + \overline{W}$ es cerrado y por ende $\overline{W} \subseteq -\boldsymbol{v} + \overline{W}$, y sumando $\boldsymbol{v}$ se tiene que $\boldsymbol{v} + \overline{W} \subseteq \overline{W}$. Como aplica para todo $\boldsymbol{v} \in W$ se tiene que $W + \overline{W} \subseteq \overline{W}$.

Sea ahora, $\boldsymbol{v} \in \overline{W}$, luego como $\boldsymbol{v} + W \subseteq W + \overline{W} \subseteq \overline{W}$, se repiten los pasos y se concluye que $\boldsymbol{v} + \overline{W} \subseteq \overline{W}$. Es decir, $\overline{W}$ es cerrado por suma de vectores.

Sea $\alpha \in \Bbbk$. Si $\alpha = 0$, entonces $\alpha\overline{W} = \{\vec{0}\} \subseteq W \subseteq \overline{W}$. Si $\alpha \neq 0$, entonces $\alpha W \subseteq W \subseteq \overline{W}$, luego $W \subseteq (1/\alpha)\overline{W}$, pero $\boldsymbol{x} \mapsto (1/\alpha)\boldsymbol{x}$ es homeomorfismo, entonces $(1/\alpha)\overline{W}$ es cerrado y así $\overline{W} \subseteq (1/\alpha)\overline{W}$, y así finalmente $\alpha\overline{W} \subseteq \overline{W}$. □

Como ejercicio para el lector otorgue una demostración alternativa al teorema anterior.

Teorema 4.87: Para todo subespacio vectorial U con interior no vacío de un EVT V se cumple que $U = V$. En consecuente, toda aplicación lineal abierta entre EVTs debe ser suprayectiva.

Demostración: Como U posee interior no vacío, entonces contiene a un abierto de la forma $\boldsymbol{u} + W$ donde W es un entorno de $\vec{0}$ y $\boldsymbol{u} \in U$, como W es vectorial entonces $W \subseteq U$. Como W es absorvente, para todo $\boldsymbol{v} \in V$ existe $\alpha \in \mathbb{K}_{\neq 0}$ tal que $\alpha\boldsymbol{v} \in W \subseteq U$, luego $\alpha^{-1}(\alpha\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \in U$, ergo $U = V$. □

Teorema (AEN) 4.88: Sean M, N espacios $\mathbb{K}$-normados con N completo, y sea F un subespacio vectorial de M. Si $f \in \mathcal{L}(F, N)$, entonces posee una extensión $\bar{f} \in \mathcal{L}(\overline{F}, N)$ tal que $\|\bar{f}\|_\infty = \|f\|_\infty$.

Demostración: Sea $\boldsymbol{x} \in \overline{F}$, entonces podemos elegir $\boldsymbol{x}_n \in F$ tal que $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_n) < 1/n$, de modo que $\lim_n \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$. Luego, nótese que como $\boldsymbol{x}_n$ es convergente en $\overline{F}$, entonces es de Cauchy en F. Sea $C := \|f\|_\infty > 0$ y sea $\epsilon > 0$, entonces para n, m suficientemente grande se tiene que

$$\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m\| < \frac{\epsilon}{C} \implies \|f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{x}_m)\| = \|f(\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m)\| \leq C\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m\| < \epsilon.$$

Vale decir, la sucesión de los $f(\boldsymbol{x}_n)$'s es de Cauchy, luego es convergente pues N es completo. Luego podemos definir:

$$\bar{f}(\boldsymbol{x}) = \lim_n f(\boldsymbol{x}_n).$$

Y así para cualquier sucesión que aproxime a todo punto en $\overline{F}$.

I) $\bar{f}$ está bien definida: Sean $\lim_n \boldsymbol{x}_n = \lim_n \boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{x}$. Luego, por continuidad de la suma se tiene que $\lim_n \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n = \vec{0}$, lo que equivale a ver que $\lim_n \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n\| = 0$. De aquí se sigue claramente que $\lim_n \|f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{y}_n)\| = 0$.

II) $\bar{f}$ es lineal: Se reduce a aplicar la continuidad de la suma y del producto escalar para poder hacer álgebra con dichos límites.

III) $\bar{f}$ está acotada por la misma cota: Se reduce a ver que

$$\lim_n \|f(\boldsymbol{x}_n)\| \leq \lim_n C\|\boldsymbol{x}_n\| = C\|\lim_n \boldsymbol{x}_n\| = C\|\boldsymbol{x}\|. \qquad \square$$

Los siguientes teoremas se demuestran usando el axioma de elección, pero está probado que basta con asumir el teorema del ultrafiltro.

Teorema (AE) 4.89 – *Teorema de Hahn-Banach*: Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, W un subespacio vectorial, $f \in L(W, \mathbb{R})$ un funcional y $p\colon V \to \mathbb{R}$ tal que

$$p(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \leq p(\boldsymbol{u}) + p(\boldsymbol{v}), \quad p(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda p(\boldsymbol{u}), \quad f(x) \leq p(x)$$

entonces existe $\bar{f}\colon V \to \mathbb{R}$ tal que $\bar{f}|_W = f$ y que $\bar{f}(\boldsymbol{u}) \leq p(\boldsymbol{u})$ para todo $\boldsymbol{u} \in V$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $W \subseteq W_1 \subset V$ un subespacio vectorial y $f_1 : W_1 \to \mathbb{R}$ cumpliendo las condiciones del enunciado, luego si $\boldsymbol{w} \in V \setminus W_1$, entonces sea $W_2 := W_1 \oplus \langle \boldsymbol{w} \rangle$, veremos que existe $f_2\colon W_2 \to \mathbb{R}$ que también cumple las condiciones.

Sean $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1 \in W_1$, entonces

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{u}_1) - f_1(\boldsymbol{v}_1) &= f_1(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v}_1) \leq p(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v}_1) \\ &= p(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{w} - (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w})) \leq p(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{w}) + p(-\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{w}), \end{aligned}$$

reordenando nos queda que

$$-p(-\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{w}) - f(\boldsymbol{v}_1) \leq p(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{w}) - f_1(\boldsymbol{u}_1)$$

como desigualdad real, luego, se concluye facilmente que

$$\sup_{\boldsymbol{v}_1 \in W_1} \left(-p(-\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{w}) - f(\boldsymbol{v}_1)\right) \leq \inf_{\boldsymbol{u}_1 \in W_1} \left(p(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{w}) - f_1(\boldsymbol{u}_1)\right).$$

Sea k un real cualquiera entre los dos valores de la desigualdad superior y definamos $f_2(\boldsymbol{v} + \alpha\boldsymbol{w}) := f_1(\boldsymbol{v}) + \alpha k$ donde $\boldsymbol{v} \in W_1$. Claramente f_2 es un funcional y por definición

$$\gamma \leq p\left(\frac{\boldsymbol{v}}{\alpha} + \boldsymbol{w}\right) - f_1\left(\frac{\boldsymbol{v}}{\alpha}\right)$$

luego se concluye facilmente que $f_2(\boldsymbol{v} + \alpha\boldsymbol{w}) \leq p(\boldsymbol{v} + \alpha\boldsymbol{w})$ como se quería probar.

Ahora invocamos el AE en forma del lema de Zorn construyendo la familia de funcionales que cumplen lo del enunciado para encontrar un funcional maximal que sería el que buscamos. □

Nótese que el AE o TUF sólo se requiere si V es de dimensión infinita.

Teorema (AE) **4.90 – *Teorema de Hahn-Banach*:** Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial (con $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$), W un subespacio vectorial, $f \in L(W, \mathbb{K})$ un funcional y $p\colon V \to \mathbb{R}$ una seminorma tal que para todo $\boldsymbol{w} \in W$ se cumple que $|f(\boldsymbol{w})| \leq p(\boldsymbol{w})$, entonces existe $\bar{f}\colon V \to \mathbb{K}$ tal que $\bar{f}|_W = f$ y que $|\bar{f}(\boldsymbol{u})| \leq p(\boldsymbol{u})$ para todo $\boldsymbol{u} \in V$.

Demostración: Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, toda seminorma cumple los requisitos de la versión anterior del teorema de Hahn-Banach, luego f admite una extensión $\bar{f}$, pero $\bar{f}(-\boldsymbol{v}) \leq p(-\boldsymbol{v}) = p(\boldsymbol{v})$, luego $|f(\boldsymbol{v})| \leq p(\boldsymbol{v})$ como se quería probar.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces comenzamos por considerar a V como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, de modo que $g := \operatorname{Re}(f) \in L(W, \mathbb{R})$ por lo que admite una extensión $\bar{g}$ por el inciso anterior, de modo que probaremos que $\bar{f}(\boldsymbol{v}) := \bar{g}(\boldsymbol{v}) - \mathrm{i}\bar{g}(\mathrm{i}\boldsymbol{v})$ cumple lo pedido. En primer lugar nótese que $\operatorname{Re} f(\mathrm{i}\boldsymbol{v}) = \operatorname{Re}(\mathrm{i}f(\boldsymbol{v})) = -\operatorname{Im} f(\boldsymbol{v})$, por lo que $\bar{f}|_W = f$. □

§4.3.1 Aplicaciones.

Definición 4.91: Sea V un $\mathbb{R}$-EVT. Dado un $f \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$, entonces un conjunto de la forma $H_c := f^{-1}[\{c\}]$ se dice un ***hiperplano*** de V. Nótese que si $f(\boldsymbol{v}_0) = c$, entonces $H_c = \boldsymbol{v}_0 + H_0 = \boldsymbol{v}_0 + \ker f$. Los conjuntos de la forma $f^{-1}\big[[c, \infty)\big]$ y $f^{-1}\big[(-\infty, c]\big]$ se dicen ***semi-espacios cerrados***.

Dado un punto $\boldsymbol{x}_0$ y un cerrado S, se dice que un hiperplano ***separa*** a S y $\boldsymbol{x}_0$ si están completamente contenidos en los dos semi-espacios cerrados asociados a H.

Teorema 4.92: Sea V un $\mathbb{R}$-EVT, $S \subseteq V$ un cerrado convexo y $\boldsymbol{x}_0 \notin S$; entonces existe un hiperplano que separa a S y a $\boldsymbol{x}_0$.

DEMOSTRACIÓN: Primero haremos el caso en que V es de dimensión finita: Consideremos la aplicación $\boldsymbol{v} \mapsto \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}_0\|$, la cual alcanza un mínimo $\boldsymbol{q} \in S$ tal que $\boldsymbol{n} := \boldsymbol{q} - \boldsymbol{x}_0$ tiene distancia mínima. Consideremos la aplicación lineal $f(\boldsymbol{v}) := \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$, donde $\cdot$ es el producto interno de $\mathbb{R}^n$, queremos probar que el semi-espacio $f^{-1}\big[[\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}, +\infty)\big]$ contiene completamente a S. Sea $\boldsymbol{p} \in S$ arbitrario, entonces para todo $t \in [0,1]$ se cumple que

$$\|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{x}_0\| \leq \|\boldsymbol{q} + t(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) - \boldsymbol{x}_0\| = \|(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{x}_0) + t(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})\|$$

Luego elevando al cuadrado se obtiene que

$$0 \leq 2\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) + t(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})^2,$$

y considerando el límite cuando $t \to 0$, se concluye que

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{q} = \boldsymbol{n}^2 + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} > \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p}.$$

Lo que concluye que están contenidos en semi-espacios distintos. □

Completar caso general, [**0,** p. 86].

Definición 4.93: Sea V un $\mathbb{R}$-EVT y $S \subseteq V$ convexo. Un punto $\boldsymbol{x} \in V$ se dice un ***extremo*** si $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{y}_1 + (1-t)\boldsymbol{y}_2$ con $t \in [0,1]$ y $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in S$ implica que $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}$.

Teorema (AE) 4.94: Sea V un $\mathbb{R}$-EVT. Entonces todo subconjunto compacto convexo no vacío S de V posee extremos.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{F}$ la familia de subconjuntos K de S que sean convexos, compactos, no vacíos, tales que si $\boldsymbol{x} \in K$ y $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in S$ satisfacen que $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{y}_1 + (1-t)\boldsymbol{y}_2$ para algún $t \in [0,1]$, entonces $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in K$.

Sea $\{K_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{F}$ es una $\subseteq$-cadena (descendiente), entonces

$$K := \bigcap_{i \in I} K_i \in \mathcal{F},$$

para ello nótese que como los K_i's son de Hausdorff y compactos, entonces, fijando $j \in I$ se cumple que todo $i \in I$ tal que $K_i \subseteq K_j$ debe cumplir que K_i sea un subespacio convexo cerrado de K_j. Luego K es una intersección de cerrados, así que es cerrado; por compacidad tampoco es vacío puesto que la familia tiene la PIF, luego K es compacto y ya hemos visto que la intersección de convexos es convexa. Además es fácil ver que K también posee la última propiedad, luego $K \in \mathcal{F}$. Finalmente por el lema de Zorn (versión descendiente) se cumple que $\mathcal{F}$ posee un $\subseteq$-minimal S_0.

Hay que probar que S_0 consta de un sólo elemento, que sería un extremo de S. Para ello, veremos que para todo $\lambda \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ se satisface que $\lambda[S_0]$ consta de un solo punto. Como S_0 es compacto, entonces $\lambda[S_0]$ también y luego podemos elegir el máximo c y ver que $S_0 \cap \lambda^{-1}[\{c\}] \in \mathcal{F}$: Para ello, claramente S_0 es compacto y convexo, y para la última propiedad veamos que si

$$\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{y}_1 + (1-t)\boldsymbol{y}_2 \in S_0 \cap \lambda^{-1}[\{c\}]$$

luego aplicando λ a ambos lados se tiene que necesariamente $\lambda(\boldsymbol{y}_1) = \lambda(\boldsymbol{y}_2) = c$, por definición de máximo. Finalmente, por minimalidad de S_0, entonces $\lambda[S_0] = \{c\}$.

Queda al lector comprobar que $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ separa puntos: vale decir, que para todo par de puntos distintos podemos encontrar un funcional continuo que toma valores distintos en dos puntos distintos. □

Corolario (AE) 4.95: Sea V un $\mathbb{R}$-EVT, sea $\varnothing \neq K \subseteq V$ compacto y convexo, y sea $\lambda \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$. Si c es un extremo de $\lambda[K]$, entonces $K \cap \lambda^{-1}[\{c\}]$ posee un extremo de K.

Teorema (AE) 4.96 (de Krein-Milman): Sea V un $\mathbb{R}$-EVT y $\varnothing \neq K \subseteq V$ compacto y convexo. Entonces si S es el conjunto de los extremos de K, entonces $K = \overline{\operatorname{conv} S}$.

Demostración: Llamemos $K' := \overline{\operatorname{conv} S}$, claramente $K' \subseteq K$. Como K' es cerrado en K que es compacto, entonces K' es compacto y es claramente convexo por definición, luego si $\boldsymbol{x}_0 \in K \setminus K'$, entonces existe $\lambda \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ que separa a $\boldsymbol{x}_0$ y K', por lo que, sin perdida de generalidad supondremos que $\lambda(\boldsymbol{x}_0) > \lambda(\boldsymbol{v})$ para todo $\boldsymbol{v} \in K'$. No obstante, si c es el máximo de $\lambda[K]$, entonces existe un extremo en $K \cap \lambda^{-1}[\{c\}]$, luego existe que $\boldsymbol{y} \in K'$ tal que $\lambda(\boldsymbol{y}) = c \geq \lambda(\boldsymbol{x}_0)$; lo que es absurdo. □

4.4 Espacios (pre)hilbertianos

Definición 4.97 – *Espacio prehilbertiano*: Sea H un $\mathbb{K}$-espacio vectorial (con $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) donde $\overline{\alpha}$ es el conjugado,entonces una aplicación $\langle -, - \rangle : H^2 \to \mathbb{k}$ se dice una *forma hermitiana definida positiva* si para todo $x, y, z \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$:

FH1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

FH2. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

FH3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$.

FH4. $\langle x, x\rangle \in [0,\infty)$ y $\langle x, x\rangle = 0$ syss $x = 0$.

Un par $(H, \langle -, -\rangle)$ se dice un ***espacio prehilbertiano***. Si H es prehilbertiano, entonces se define

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

En esta subsección H siempre representará un espacio prehilbertiano. Notemos también que

$$\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\langle \alpha y, x\rangle} = \overline{\alpha}\, \langle x, y\rangle\,.$$

Teorema 4.98 – *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*: Para todo $x, y \in H$:

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $y \neq 0$ (pues $y = 0$ es trivial), entonces notemos que

$$\begin{aligned} 0 &\le \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle = \langle x, x\rangle - \alpha \langle y, x\rangle - \overline{\alpha} \langle x, y\rangle + |\alpha|^2 \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha \langle y, x\rangle) + |\alpha|^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \Bbbk$, luego sea $\alpha := \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$ y despejemos un poco:

$$0 \le \|x\|^2 - 2\frac{\langle x, y\rangle \langle y, x\rangle}{\|y^2\|} + \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|^2} = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2},$$

de lo que se concluye el resultado. $\square$

Teorema 4.99: Para todo $x, y \in H$ se cumple que

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|,$$

luego, $\|\ \| : H^2 \to \mathbb{R}$ es una norma.

DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar el siguiente procedimiento:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2|\,\langle x, y\rangle\,| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \qquad \square
\end{aligned}$$

Definimos la topología estándar sobre un espacio prehilbertiano como la inducida por su norma, ergo, son EVTs. Llamaremos ***unitarios*** a los vectores de norma 1.

Teorema 4.100: La aplicación $\langle , \rangle : H^2 \to \mathbb{K}$ es continua. En consecuencia, las aplicaciones de la forma $x \mapsto \langle x, y\rangle$ con y fijo y la norma $\|\ \| \colon H \to \mathbb{R}$ son continuas.

Demostración: Sean $x, y, u, v \in H$, entonces

$$\begin{aligned}
|\,\langle x, y\rangle - \langle u, v\rangle\,| &\leq |\,\langle x - u, y\rangle\,| + |\,\langle u, y - v\rangle\,| \\
&\leq \|x - u\|\,\|y\| + \|u\|\,\|y - v\| \\
&\leq \|x - u\|\,\|y\| + \|u - x\|\,\|y - v\| + \|x\|\,\|y - v\|,
\end{aligned}$$

Sea $M := \text{máx}\{\|x\|, \|y\|, 1\}$, entonces si $\epsilon \in (0, 1)$ se exige $\|x - u\|, \|y - v\| < \epsilon/3M$, pues

$$|\,\langle x, y\rangle - \langle u, v\rangle\,| < \frac{\epsilon}{3M}M + \frac{\epsilon^2}{9M^2} + M\frac{\epsilon}{3M} < \epsilon. \qquad \square$$

Definición 4.101 – *Ortogonalidad*: Un par $x, y \in H$ se dicen ***ortogonales*** si $\langle x, y\rangle = 0$, en cuyo caso se escribe $x \perp y$. Más aún, dado un subconjunto $A \subseteq H$, le llamamos ***complemento ortogonal*** a

$$A^\perp := \{x \in H : \forall a \in A\ (x \perp a)\}.$$

Diremos que una sucesión (finita o infinita) de vectores es ***ortogonal***, si los vectores lo son dos a dos. Diremos que una sucesión es ***ortonormal***, si los vectores son unitarios y la sucesión es ortogonal.

Teorema 4.102: Se cumple:

1. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (ley del paralelogramo).
2. $x \perp y$ syss $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (teorema de Pitágoras I).

3. Si $\{x_i\}_{i=1}^n$ es una sucesión ortonormal, entonces para todo $i \leq n$ se cumple $x_i \perp \sum_{j \neq i} x_j$.

4. Si $\{x_i\}_{i=1}^n$ es una sucesión ortonormal, entonces para todo $x \in H$ se cumple
$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 + \left\| x - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\|^2,$$
donde $\alpha_i := \langle x, x_i \rangle$ (teorema de Pitágoras II).

5. El complemento ortogonal de cualquier subespacio es cerrado.

Demostración:

4. Obsérvese que
$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \left(x - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right).$$
Donde hay $n+1$ vectores, hemos de probar que todos son ortogonales entre sí para aplicar el teorema de Pitágoras. Es claro que $x_i \perp x_j$ con $i \neq j$, por ende, basta notar que
$$\begin{aligned} \left\langle x_k, x - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\rangle &= \langle x_k, x \rangle - \sum_{i=1}^n \langle x_k, \alpha_i x_i \rangle \\ &= \langle x_k, x \rangle - \overline{\alpha_k} \cancelto{1}{\langle x_k, x_k \rangle} = 0. \end{aligned}$$

5. Sea $a \in H$, entonces notemos que $\{a\}^\perp$ es igual a $f^{-1}[0]$ con $f(x) := \langle a, x \rangle$, luego es cerrado, y luego
$$A^\perp := \bigcap_{a \in A} \{a\}^\perp$$
por lo que $A^\perp$ es cerrado.

∎

Corolario 4.103 (desigualdad de Bessel): Sea $\{x_i\}$ una sucesión[9] ortonormal, entonces para todo $x \in H$ se cumple
$$\sum_i |\alpha_i|^2 \leq \|x\|^2,$$

[9] Aquí se obvian los límites de los índices pues el resultado es válido tanto para sucesiones finitas como infinitas.

donde $\alpha_i := \langle x, x_i \rangle$.

Pista: Para probar el caso de un conjunto ortonormal infinito, basta notar que para todo n se cumple por el teorema de Pitágoras, por ende, la sucesión dada por las sumas parciales es creciente y acotada, ergo, converge. $\square$

Teorema 4.104: Sea $\{x_i\}_{i=0}^n$ una sucesión finita ortonormal y $x \in H$. Entonces, los escalares $\lambda_i \in \Bbbk$ que minimizan el valor de

$$\left\| x - \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i \right\|$$

son únicos y son $\lambda_i = \langle x, x_i \rangle$.

Demostración: Observe que

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i \right\|^2 &= \|x\|^2 - \sum_{i=0}^n (\overline{\lambda_i} \langle x, x_i \rangle + \lambda_i \overline{\langle x, x_i \rangle}) + \left\| \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i \right\|^2 \\
&= \|x\|^2 + \sum_{i=0}^n |\lambda_i|^2 - \sum_{i=0}^n (\overline{\lambda_i} \langle x, x_i \rangle + \lambda_i \overline{\langle x, x_i \rangle}) \\
&\qquad + \sum_{i=0}^n |\langle x, x_i \rangle|^2 - \sum_{i=0}^n |\langle x, x_i \rangle|^2 \\
&= \|x\|^2 + \sum_{i=0}^n |\lambda - \langle x, x_i \rangle|^2 - \sum_{i=0}^n |\langle x, x_i \rangle|^2,
\end{aligned}$$

de aquí es fácil deducir el enunciado. $\square$

Corolario 4.105: Si una sucesión ortonormal $\{x_i\}$ genera un subespacio V de H, entonces todo $x \in V$ se escribe de forma única como combinación lineal con

$$x = \sum_i \langle x, x_i \rangle x_i.$$

Proposición 4.106 (identidad de Parseval): Una sucesión ortonormal $\{x_i\}$ es base de H syss para todo $x \in H$ se cumple

$$\|x\|^2 = \sum_i |\langle x, x_i \rangle x_i|^2.$$

Definición 4.107: Un espacio H es de Hilbert si es prehilbertiano y de Banach bajo la norma inducida por su forma hermitiana.

Teorema (AEN) 4.108: Sea H de Hilbert y C un subespacio cerrado convexo, entonces C posee un único elemento con norma mínima.

Demostración: Sea δ el ínfimo de las normas de C, entonces es claro que el ser de Banach implica que existe un elemento de norma δ, probaremos su unicidad.

Sean $x, y \in C$, por ley del paralelogramo sobre sus mitades se obtiene

$$\frac{1}{4}\|x-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2$$

como $\frac{x+y}{2} \in C$ entonces se reordenan los términos en

$$\|x-y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\delta^2,$$

en consecuente si $\|x\| = \|y\| = \delta$ es obvio que $x = y$. □

Proposición (AEN) 4.109: Si V es subespacio lineal cerrado en H de Hilbert, entonces todo $x \in H$ admite descomposición única como $x = P(x) + Q(x)$ donde $P \colon H \to V$ y $Q \colon H \to V^\perp$, que además cumplen ser funcionales, osea, $H = V \oplus V^\perp$. También, $P(x)$ y $Q(x)$ son los puntos más próximos de V y $V^\perp$ a x; y $\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2$.

Demostración: Como V es lineal, entonces es conexo, luego $x + V$ lo es y definimos $Q(x)$ como el elemento de norma mínima en $x + V$ (que está bien definido por el teorema anterior). Luego $P(x) := x - Q(x) \in V$, hay que probar que $Q(x) \in V^\perp$. Como V es lineal no perdemos generalidad si probamos que $y \in V$ unitario cumple $Q(x) \perp y$, para ello recordemos que $Q(x)$ es de norma mínima, luego

$$\|Q(x)\|^2 \leq \|Q(x) - \alpha y\|^2 = \|Q(x)\|^2 + |\alpha|^2 - \left(\overline{\alpha}\, \langle Q(x), y\rangle + \alpha\overline{\langle Q(x), y\rangle}\right)$$

para todo $\alpha \in \mathbb{k}$. Tomemos $\alpha = \langle Q(x), y\rangle$, con lo que nos queda que

$$0 \leq -|\, \langle Q(x), y\rangle\, |^2;$$

en definitiva, $\langle Q(x), y\rangle = 0$.

La unicidad se deduce de que $V \cap V^\perp = \{0\}$.

Nótese que para todo $y \in V$

$$\|x - y\|^2 = \|Q(x) + (P(x) - y)\|^2 = \|Q(x)\|^2 + \|P(x) - y\|^2,$$

luego la proximidad es obvia, y el resultado es análogo para $y \in V^\perp$. $\square$

Teorema (AEN) 4.110 – *Teorema de Riesz-Fréchet*: Sea H de Hilbert y $f\colon H \to \mathbb{K}$ una transformación lineal continua, entonces existe un único $y \in H$ tal que $f(x) = \langle x, y\rangle$.

Demostración: Si f es nula, entonces $y = 0$. Si f es no nula, sea $V := \ker f$, como $V \neq H$, entonces existe $z \in V^\perp$ con $\|z\| = 1$, luego si $u := f(x)z - f(z)x$ para algún x prefijado, entonces $f(u) = 0$, ergo $u \in V$ y $u \perp z$, por lo que:

$$\langle u, z\rangle = \langle f(x)z - f(z)x, z\rangle = f(x)\langle z, z\rangle - f(z)\langle x, z\rangle \implies f(x) = f(z)\langle x, z\rangle,$$

por lo tanto, $y := \overline{f(z)}z$ cumple lo pedido.

La unicidad queda al lector. $\square$

4.5 Espacios duales

Definición 4.111: Dado un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, denotamos por V^* su ***dual algebraíco*** $L(V, \mathbb{K})$, el espacio vectorial conformado por las funcionales. Si V es un EVT, entonces denotamos por V' su ***dual topológico*** $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$, el subespacio vectorial conformado por las funcionales continuas.

Un par dual $(V, W, \langle,\rangle)$ es un par donde V y W son $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y en donde $\langle,\rangle : V \times W \to \mathbb{K}$ es una forma bilineal, esto es:

1. Para todo $v_1, v_2 \in V$ y $w \in W$ se cumple $\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$.

2. Para todo $v \in V$ y $w_1, w_2 \in W$ se cumple $\langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle$.

3. Para todo $v \in V$, $w \in W$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumple $\langle \alpha v, w\rangle = \langle v, \alpha w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle$.

4. Para todo $w \in W$ se cumple que $\forall v \in V$ $(\langle v, w\rangle = 0 \implies w = 0)$.

5. Para todo $v \in V$ se cumple que $\forall w \in W$ $(\langle v, w\rangle = 0 \implies v = 0)$.

En general obviaremos la forma bilineal de no haber ambigüedad en los signos. Si (V, W) es un par dual entonces la forma bilineal determina un par de monomorfismos vectoriales $\phi_V : V \to W^*$ y $\phi_W : W \to V^*$ como $[\phi_V(v)](w) := \langle v, w\rangle$ y $[\phi_W(w)](v) := \langle v, w\rangle$ (recordemos que $\phi_V(v)$ y $\phi_W(w)$ son funcionales).

El par dual más simple es claramente $(V, V*)$ en donde la forma bilineal canónica es $\langle v, f\rangle := f(v)$.

Teorema 4.112: Si V es normado, entonces V' también con

$$\|f\|_\infty := \sup_{\boldsymbol{u}\neq 0} \frac{|f(\boldsymbol{u})|}{\|\boldsymbol{u}\|}.$$

Más aún, si V es de Banach, entonces V' también.

Demostración: El que la norma este bien definida es consecuencia del lema, y el que cumpla con el resto de propiedades de una norma queda al lector.

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy, lo que significa, por definición que para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i, j \geq n_0$ se cumple que

$$d(f_i, f_j) = \|f_i - f_j\| = \sup_{\boldsymbol{u}\neq 0} \frac{|f_i(\boldsymbol{u}) - f_j(\boldsymbol{u})|}{\|\boldsymbol{u}\|} < \epsilon.$$

Luego, es fácil comprobar que para todo $\boldsymbol{u} \in V$ se cumple que $(f_n(\boldsymbol{u}))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, luego como N es de Banach dichas sucesiones convergen, con lo que definimos

$$f(\boldsymbol{u}) := \lim_n f_n(\boldsymbol{u}),$$

luego es fácil comprobar que f está bien definida, que es lineal, y para comprobar que es continua veamos que

$$|f(\boldsymbol{u})| = \lim_n |f_n(\boldsymbol{u})| \leq \left(\lim_n \|f_n\|_\infty\right) \|\boldsymbol{u}\|$$

y notemos que el término en paréntesis corresponde al límite de una sucesión de Cauchy, luego converge, por ende, $f[B_1(\mathbf{0})]$ está acotado. $\square$

Esto nos permite definir una topología apropiada sobre el dual topológico, pero veremos que no es sencillo si V no es normado.

Corolario (AEN) 4.113: Si H es de Hilbert, entonces H' también y, más fuerte aún, $H \simeq H'$.

Tratemos de visualizar a V^{**}, un elemento sería un funcional $\Phi : L(V, \mathbb{k}) \to \mathbb{k}$, luego $\Phi(\phi) \in \mathbb{k}$. Un ejemplo canónico de elementos de V^{**} es el ***mapa de evaluación*** Φ_x tal que $\Phi_x(\phi) = \phi(x) \in \mathbb{k}$. Es fácil notar que todo mapa de evaluación depende estrictamente del subíndice, luego determina un monomorfismo de $\mathbb{k}$-espacios vectoriales desde V a V^{**}, con lo que nos gustaría que V estuviese encajado en V'', pero si los mapas de evaluación son continuos o no depende de la topología sobre V', con lo que se define:

Definición 4.114 (Topología débil): Sea (V, W) un par dual entre $\mathbb{k}$-espacios vectoriales, luego se define la ***topología*** $\sigma(V, W)$ sobre V, como la topología inicial inducida por la familia $\{(\mathbb{k}, \Phi_w) : w \in W\}$ (recordemos que $\Phi_w \in V^*$).

Se define la topología débil sobre V como la $\sigma(V, V')$, y la topología débil* sobre V' como la $\sigma(V', V)$.

Teorema 4.115: La topología débil* sobre V' es la subespacio de $\mathbb{K}^V$.

Pista: Basta notar que la topología débil* viene inducida por proyecciones. □

Teorema 4.116: Si V, W son EVTs sobre un mismo campo escalar y $E \subseteq \mathcal{L}(V, W)$ es equicontinuo, entonces la clausura de E en W^V está contenida en $\mathcal{L}(V, W)$ y es equicontinua.

Demostración: Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ cualesquiera, luego $\phi : W^V \to W$ dada por $\phi(f) := f(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) - \alpha f(\boldsymbol{u}) - \beta f(\boldsymbol{v})$ es continua (¿por qué?), luego $\phi[E] = \{0\}$, de lo que se concluye que $E \subseteq L(V, W)$.

Ahora probaremos que $\overline{E}$ es equicontinuo. Basta ver que lo es en $\mathbf{0}$, luego sea U_1 un entorno cerrado de $\mathbf{0}$ en W y U_2 un entorno de $\mathbf{0}$ en V tal que para todo $f \in E$ se cumpla que $f[U_2] \subseteq U_1$. Como la proyección $\pi_x : W^V \to W$ en x, dada por $\pi_x(f) = f(x)$ es continua por definción, entonces para todo $x \in U_2$ se cumple que $\pi_x[\overline{E}] \subseteq \overline{\pi_x[E]} \subseteq U_1$, ergo $\overline{E}$ es equicontinuo, luego está contenido en $\mathcal{L}(V, W)$. □

Teorema (TUF) 4.117 – *Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki*: Si V es un $\mathbb{K}$-EVT, todo conjunto equicontinuo en $\sigma(V', V)$ es relativamente compacto.

DEMOSTRACIÓN: Dado que $\mathbb{K}$ es métrico y E es equicontinuo, existe un entorno U de 0 en V tal que para todo $f \in E$ se cumple que $f[U] \subseteq B_1(0)$. Como U es absorvente, para todo $\boldsymbol{v} \in V$ existe $\lambda_v > 0$ tal que para todo $|\alpha| < \lambda_v$ en $\mathbb{K}$ se cumple que $\alpha\boldsymbol{v} \in U$, por ende, $|f(\alpha\boldsymbol{v})| = \lambda_v|f(\boldsymbol{v})| < 1$, osea, $|f(\boldsymbol{v})| \leq \lambda_v^{-1}$, con lo que $E \subseteq \prod_{\boldsymbol{v}\in V} \overline{B_{\lambda_v^{-1}}(0)}$, donde el conjunto de la derecha es un compacto por el teorema de Tychonoff; por lo que $\overline{E}$ es compacto. Por el teorema anterior $\overline{E}$ es $\sigma(V', V)$-cerrado y sabemos que la topología sobre $\sigma(V', V)$ es la subespacio del producto. $\square$

(El uso del TUF yace en la compacidad del conjunto construido, debido a que los factores son de Hausdorffi, para erradicar la elección en el λ_v puedes tomar el ínfimo de los valores y sumarle 1.)

§4.5.1 Polares.

Definición 4.118 – *Polar*: Si (V, W) es un par dual, y $A \subseteq V$, llamaremos ***polar*** de A a

$$A^\circ := \{y \in W : \forall x \in A\ (|\langle x, y\rangle| \leq 1)\},$$

de no especificarse se asume $W = V'$.

Proposición 4.119: Si A, B son subconjuntos de un $\mathbb{K}$-EVT V, se cumple:

1. $\{\mathbf{0}\}^\circ = V'$ y $V^\circ = \{0\}$.
2. Si $A \subseteq B$ entonces $A^\circ \supseteq B^\circ$.
3. $A \subseteq A^{\circ\circ}$.
4. Si $\lambda \in \mathbb{K}_{\neq 0}$ entonces $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda}(A^\circ)$.
5. Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de V, entonces

$$\left(\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A\right)^\circ = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A^\circ.$$

Proposición 4.120: Si (V, W) es un par dual y $A \subseteq V$, entonces:

1. A° es absolutamente convexo y $\sigma(W, V)$-cerrado.
2. A° es absorvente syss es $\sigma(V, W)$-acotado.

DEMOSTRACIÓN:

1. Basta notar que
$$A^\circ = \bigcap_{a \in A} \{x \in W : |\langle a, x\rangle| \leq 1\}$$
donde es claro que los componentes son absolutamente convexos y cerrados.
2. ...

$\square$

§4.5.2 Teoremas del punto fijo.

Definición 4.121: Si f tiene la propiedad de Lipschitz, entonces denotamos por $L(f)$ a la *constante de Lipschitz* definida como el mínimo λ que hace cumplir lo anterior. Se dice que f es una ***contracción*** si $L(f) < 1$, y que es ***no-expansiva*** si $L(f) \leq 1$.

Como las funciones con propiedad de Lipschitz son continuas, entonces las contracciones y las funciones no-expansivas también lo son.

Teorema 4.122 (Teorema del punto fijo de Banach): Una contracción sobre un espacio métrico completo posee exactamente un punto fijo.

DEMOSTRACIÓN: Sea f la contracción sobre M con constante de Lipschitz $\alpha \in (0, 1)$. Sea $x \in M$ cualquiera, luego definamos por recursión:
$$y_0 := x, \quad y_{n+1} := f(y_n),$$
probaremos que y_i es de Cauchy. En efecto, notemos que
$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n+k}) &\leq d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_{n+2}) + \cdots + d(y_{n+k-1}, y_{n+k}) \\ &\leq d(y_n, Y_{n+1}) + \alpha d(y_n, y_{n+1}) + \cdots + \alpha^{k-1} d(y_n, y_{n+1}) \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(y_n, y_{n+1}) \leq \frac{\alpha^{n+k}}{1-\alpha} d(y_0, y_1).$$

Por ende, basta definir $k := d(y_0, y_1)$, para notar que

$$d(y_n, y_{n+k}) \leq \alpha^n \frac{k}{1-\alpha}.$$

A partir del término de la derecha podemos formar una sucesión que converja a cero, luego es fácil probar que y_i es de Cauchy con lo que converge a algún z, veamos que z es punto fijo. Basta notar que

$$f(z) = f\left(\lim_n y_n\right) = \lim_n f(y_n) = \lim_n y_{n+1} = z.$$

Queda al lector probar la unicidad de los puntos fijos. □

Corolario 4.123 (Teorema del punto fijo de Edelstein): Si X es un compacto métrico y $f : X \to X$ satisface que para todo par $x \neq y$:

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

entonces f posee un único punto fijo.

5

Espacios topológicos con estructura

5.1 Espacios (pseudo)métricos

Definición 5.1 – *Espacio métrico*: Sea X un espacio y $d : X \times X \to [0, +\infty)$ una función tal que para todos $x, y \in X$ satisfaga:

1. $d(x, x) = 0$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría).
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad triangular).

Entonces d se dice una ***pseudométrica***. Si $x \neq y$, pero $d(x, y) = 0$, entonces decimos que x, y son ***indistinguibles***. Una pseudométrica es una ***métrica*** si no posee puntos indistinguibles. Un par (X, d) donde d es una (pseudo)métrica se dice un espacio (pseudo)métrico.

Se definen:

$$B_r(x) := \{y \in X : d(x, y) < r\}, \quad \overline{B}_r(x) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

donde a la primera se le dice ***bola abierta*** centrada en x de radio r y a la segunda ***bola cerrada***. La topología estandar a la que dotaremos a un espacio pseudométrico, es aquella que tiene por subbase a las bolas abiertas.

Bajo ésta definición es claro que las bolas abiertas son abiertas. Veamos más:

Proposición 5.2: En un espacio pseudométrico, las bolas cerradas son efectivamente conjuntos cerrados.

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar que $\overline{B}_r(x) =: F$ es cerrado. Para ello hay que ver que F^c sea abierto. Sea $y \in F^c$, esto quiere decir que $d(x, y) > r$, luego sea $s := d(x, y) - r > 0$, entonces veremos que $B_s(y) \subseteq F^c$. Sea $z \in B_s(y)$, por definición se cumple que $d(y, z) < s$, luego:

$$d(x, z) \geq d(x, y) - d(y, z) > r - s = d(x, y) - (d(x, y) - r) = r. \qquad \square$$

Estaríamos tentados a decir que $\overline{B_r(x)} = \overline{B}_r(x)$, pero ésta igualdad no siempre se da.

Ejemplo 5.3 (D_2)**:** Consideremos a $D_2 = \{a, b\}$ [el espacio discreto de dos elementos], cuya topología viene inducida por la métrica discreta

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Luego sea $B_1(a) = \{y : d(a, y) < 1\} = \{a\}$ y notemos que $B_1(a)$ es cerrado en éste espacio (pues todo conjunto es abierto y cerrado en el espacio discreto), luego

$$\overline{B_1(a)} = \{a\} \neq \{a, b\} = \overline{B}_1(a).$$

⌟

Definición 5.4: Se dice que un espacio pseudométrico es ***métricamente denso*** si para todo par de puntos distintos y distinguibles x, y con $r := d(x, y)$, y para todo real $s > 0$ existe un tercer punto z tal que $0 < d(x, z) < s$ y $d(z, y) < r$ (ver fig. 5.1).

Teorema 5.5: Dado un espacio pseudiométrico X, son equivalentes:

1. X es métricamente denso.
2. $\overline{B_r(x)} = \overline{B}_r(x)$ para todo $x \in X$ y todo $r > 0$.
3. $\partial B_r(x) = \{y : d(x, y) = r\}$.

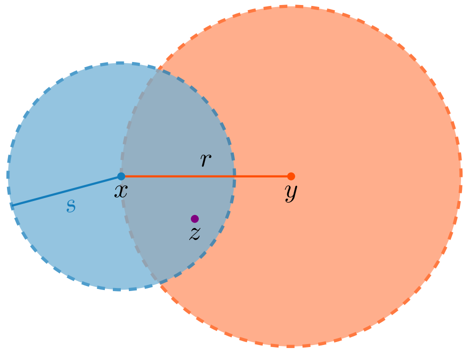


Figura 5.1. Representación de ser métricamente denso.

Demostración: Es claro que (2) $\iff$ (3).

(1) $\implies$ (2). Ya vimos que $F := \overline{B}_r(x)$ es cerrado, así que basta ver que todo punto de F es adherente a $B_r(x)$. Sea $y \in F$, si x, y son indistinguibles entonces es claro que y es adherente, sino sea $s > 0$, por definición de métricamente denso existe z tal que $z \in B_s(y) \cap B_r(x)$, es decir, y es adherente a $B_r(x)$.

El recíproco queda de ejercicio al lector. □

Teorema 5.6: Sean X, Y espacios pseudométricos, entonces son equivalentes:

1. $f : X \to Y$ es continua.
2. Para todo $x \in X$ y todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $0 < d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Pista: Basta notar que los abiertos básicos son bolas abiertas. □

Lema 5.7: Dado X un espacio pseudométrico, $x, y \in X$ y $A \subseteq X$ no vacío, entonces se satisface:

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

Demostración: Sea $a \in A$, por definición y por desigualdad triangular se cumple

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

y como la desigualdad de los extremos se cumple para todo $a \in A$ se tiene que $d(x, A) - d(x, y)$ es una cota inferior de $d(y, a)$, por lo que, por definición de ínfimo se tiene que

$$d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,A) \iff d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$$

y análogamente se prueba que $d(y,A) - d(x,A) \leq d(x,y)$. □

Teorema 5.8: Sea X un espacio pseudométrico y $A \subseteq X$ no vacío, entonces la función $d(-,A)\colon X \to [0,\infty)$ es continua.

Sin embargo, nótese que la propiedad de «ser métrico» no es estrictamente topológica, ya que no es intrínseca a la topología misma del espacio, por ello se introducen las dos siguientes definiciones:

Definición 5.9: Un espacio topológico X se dice ***metrizable*** si existe una métrica d tal que induce la misma topología.

Teorema 5.10: Todo espacio metrizable es perfectamente normal.

Proposición 5.11: Si un espacio es metrizable, entonces su topología está inducida por una métrica acotada.

Demostración: Sea X un espacio topológico y d la métrica que induce su topología. Denótese $\underline{d}$ a la métrica dada por:

$$\underline{d}(x,y) := \min\{1, d(x,y)\}.$$

Es fácil notar que efectivamente es una métrica, y $\mathcal{B} := \{B(x,1/n) : x \in X, n \in \mathbb{N}_{\neq 0}\}$ es una base para ambas topologías, como las bases inducen una única topología se concluye que concuerdan. □

En general denotaremos $\underline{d}$ a la métrica dada en la demostración.

Teorema 5.12: La suma de espacios métricos es métrico.

Demostración: Sea $Y := \bigoplus_{i \in I} X_i$ y sea d_i la métrica sobre X_i resp. Entonces definimos d sobre Y como:

$$d(x,y) := \begin{cases} \underline{d}_i(x,y) & \exists i \in I : x,y \in X_i \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Luego es claro que la base inducida por d son abiertos de cada X_i o Y entero, lo que induce la topología de la suma. □

Teorema 5.13: El producto a lo más numerable de espacios métricos es métrico.

Demostración: Sean (X_i, d) espacios métricos e Y su producto, veamos dos casos:

a) Producto finito: Es claro que

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$$

es una métrica que induce la topología producto.

b) Producto numerable: Acá hacemos algo parecido y definimos

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \underline{d}_i(x_i, y_i)$$

que notemos está acotada por $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$ e induce la topología producto. □

Cabe destacar que el caso infinito y general de la suma y producto de espacios metrizables depende del AE para elegir una métrica, pero usualmente trabajaremos con espacios donde la métrica venga elegida de antemano de modo que no habrá necesidad de invocarlo.

Corolario 5.14: El cubo de Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$ es metrizable.

Teorema (DE) 5.15 – *Teorema de metrización de Urysohn*: Un espacio 2AN es metrizable syss es regular.

Demostración: $\Longrightarrow$. Nótese que

$$\text{metrizable} \implies \text{perfectamente normal} \implies \text{regular.}$$

$\Longleftarrow$. Se cumple que

$$\text{regular} + 2\text{AN} \overset{(2.49)}{\Longrightarrow} \text{normal} \implies \text{Tychonoff}$$

Y sabemos que todo espacio de Tychonoff 2AN está encajado en el cubo de Hilbert (3.78) que es metrizable. □

Teorema (DE) 5.16: Un espacio de Hausdorff compacto es metrizable syss es 2AN.

Demostración: $\Longleftarrow$. Se cumple que

$$\text{Hausdorff} + \text{compacto} \overset{(3.32)}{\Longrightarrow} \text{normal} \implies \text{regular}$$

y todo espacio regular 2AN es metrizable por el teorema de metrización de Urysohn.

$\Longrightarrow$. Si X es compacto entonces es de Lindelöf y si es de Lindelöf y métrico entonces es 2AN. $\square$

Y un teorema curioso:

Teorema 5.17 (Alexandroff-Hausdorff): Sea X un espacio metrizable compacto. Entonces existe una función $f : C \to X$, donde C es el conjunto de Cantor, que es continua y suprayectiva.

Demostración: En primer lugar, recuerde que $C := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, de modo que se comprueba que C es homeomorfo a C^n para todo $n \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ y $C^{\aleph_0}$. Comencemos por probar algo más débil: hay una función continua suprayectiva $g : C \to [0,1]$. Los elementos de C pueden verse como sucesiones $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2, x_3, \dots) \in C$ donde $x_i \in \{0,1\}$, luego construimos

$$g(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i},$$

y notamos que, por representación en base 2, se cumple que es suprayectiva. Para la continuidad, notemos que todo $y \in [0,1]$ está contenido en algún intervalo de la forma $\left(\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^{m+1}}\right)$. Existe alguna representación $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ tal que $g(\boldsymbol{x}) = \frac{k}{2^m}$. Luego la preimagen corresponde al conjunto

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n)\} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \{(x_1, x_2, \dots, x_n, 1, 1, \dots)\},$$

el cual sí es abierto (el primer conjunto es claramente abierto y los puntos son cerrados en C pues es Hausdorff).

Luego, consideramos la función $g \times g : C^2 \to [0,1]^2$ la cual es continua y suprayectiva, y recordamos que $C^2 \approx C$. Y así, podemos construir en general una función $h := g^{\aleph_0} : C \to [0,1]^{\aleph_0} =: H$ el cual es cubo de Hilbert. Todo espacio métrico compacto es de Tychonoff y 2AN, luego está encajado en el cubo de Hilbert digamos por $\iota\colon X \to H$. Como X es compacto, entonces $\iota[X]$ es cerrado en H.

Ahora probaremos que para todo $A \subseteq C$ cerrado se cumple que existe $f\colon C \to A$ continua con $f|_A = \mathrm{Id}_A$. Construiremos $f_n\colon C \to \{0,1\}^n$ por recursión como prosigue: Sea $\boldsymbol{x} \in C$, definimos $f_1(\boldsymbol{x}) := x_1$ si existe $\boldsymbol{a} \in A$ con $a_1 = x_1$, y definimos $f_1(\boldsymbol{x}) := 1 - x_1$ en otro caso. Si tenemos definido $f_n(\boldsymbol{x})$ definiremos $f_{n+1}(\boldsymbol{x}) := (f_n(\boldsymbol{x}), x_{n+1})$ si existe $\boldsymbol{a} \in A$ tal que $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) = (f_n(\boldsymbol{x}), x_{n+1})$ y $f_{n+1}(\boldsymbol{x}) := (f_n(\boldsymbol{x}), 1 - x_{n+1})$ en otro caso.

Así, podemos ver que para todo n y todo $\boldsymbol{x}$ se cumple que $f_n(\boldsymbol{x})$ coincide con las primeras n-ésimas coordenadas de algún $\boldsymbol{a} \in A$. Definimos $f(\boldsymbol{x}) := (\pi_1 f_1(\boldsymbol{x}), \pi_2 f_2(\boldsymbol{x}), \dots)$ y vemos que es una función $f\colon C \to A$ tal que $f|_A = \mathrm{Id}_A$; falta comprobar la continuidad de f. Para ello nótese que f es continua syss $f \circ \pi_n\colon C \to \{0,1\}$ lo es para todo $n \in \mathbb{N}_{\neq 0}$, pero $\pi_n(f(\boldsymbol{x})) = \pi_n(f_n(\boldsymbol{x}))$, el cual sólo depende de las n-ésimas primeras coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$, luego es claro ver que es continua.

Finalmente definamos $A := h^{-1}[\iota X]$ el cual es un cerrado en C por continuidad de h y se cumple que existe $f\colon C \to A$ continua y suprayectiva, así que $f \circ h \circ \iota^{-1}\colon C \to X$ es continua y suprayectiva. □

5.2 Espacios de Baire y espacios Čech-completos

Definición 5.18: Un espacio X se dice ***completamente metrizable*** si existe una métrica d sobre X que es completa y que induce su topología.

Ojo que inicialmente el lector pensará que un espacio métrico, como $\mathbb{Q}$, no es topológicamente completo puesto que su métrica no lo es; sin embargo, la definición implica que *alguna* métrica sea completa, así que el argumento no es tan directo. Aún así, $\mathbb{Q}$ no es completamente metrizable, pero necesitamos caracterizar mejor la noción de lo que significa *topológicamente* la cualidad de ser «completamente metrizable».

Un ejemplo es que el intervalo $(0,1)$ no es completo con la métrica usual, sin embargo, si es completamente metrizable puesto que es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Teorema 5.19: Todo espacio compacto y metrizable es completamente metrizable.

El converso no es cierto, basta notar que $\mathbb{R}$ es completamente metrizable y no compacto.

Definición 5.20: Sea $A \subseteq X$, se le dice un conjunto:

Diseminado Si $\operatorname{Int}(\overline{A}) = \varnothing$.

Primera categoría Si es la unión numerable de diseminados.

Segunda categoría Si no es de primera categoría.

La idea es que los conjuntos diseminados son «pequeños», por ejemplo, en $\mathbb{R}$ los conjuntos diseminados son cosas como los conjuntos finitos, $\mathbb{Z}$, $\{1/n : n > 0\}$, etc. Un conjunto abierto no vacío nunca es diseminado. $\mathbb{Q}$ no es diseminado, pero sí es de primera categoría y además también tiene interior vacío.

Teorema 5.21: Sea $A \subseteq X$, entonces son equivalentes:

1. Ser diseminado.
2. $X \setminus \overline{A}$ es un abierto denso.
3. Existe F cerrado tal que $A \subseteq F$ y $\operatorname{Int} F = \varnothing$.
4. Todo abierto no vacío U de X contiene otro abierto no vacío V tal que $A \cap V = \varnothing$.

Demostración: Es claro que $1 \iff 2 \iff 3$.

$1 \implies 4$. Sea U, como $X \setminus \overline{A}$ es un abierto denso, entonces $V := U \cap (X \setminus \overline{A})$ es un abierto no vacío tal que $A \cap V = \varnothing$.

$4 \implies 2$. Nótese que si $V \subseteq U$ satisface que $A \cap V = \varnothing$, entonces

$$\overline{A} \cap V \subseteq \overline{A \cap V} = \overline{\varnothing} = \varnothing.$$

Luego $\varnothing \neq V \subseteq U \cap (X \setminus \overline{A})$, por lo que $X \setminus \overline{A}$ es denso y es claramente abierto. □

Proposición 5.22: Se cumplen las siguientes:

1. Todo abierto no vacío es no diseminado.
2. $\varnothing$ es de primera categoría.

3. Todo subconjunto de un conjunto de primera categoría es también de primera categoría.

4. La unión numerable de conjuntos de primera categoría es también de primera categoría.

Sin embargo, nos gustaría extender la condición 1 por «Todo abierto no vacío es de segunda categoría», ésto es la base de la noción de ésta sección:

Lema 5.23: En un espacio topológico son equivalentes:

1. Todo abierto no vacío es de segunda categoría.

2. Todo conjunto de primera categoría tiene interior vacío.

3. Toda unión numerable de cerrados de interior vacío tiene interior vacío.

4. Toda intersección numerable de abiertos densos es también densa.

Definición 5.24: Un espacio se dice ***de Baire*** si cumple cualquiera de las condiciones del lema anterior.

Claramente todo espacio de Baire es de segunda categoría, pero el converso no es cierto:

Ejemplo 5.25: Consideremos a $X := \mathbb{R} \amalg \mathbb{Q} = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Q} \times \{1\})$.

Nótese que X es de segunda categoría ya que $\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq X$ es de segunda categoría. Sin embargo, X no es de Baire: Nótese que $X \setminus \{(q, 1)\}$ es un abierto denso para todo $q \in \mathbb{Q}$, sin embargo, $\mathbb{R} \times \{0\} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} X \setminus \{(q, 1)\}$ es un abierto en X que no es denso. ⌟

§5.2.1 Teorema de categorías de Baire y elección. Al igual que en la sección §3.2.1 aquí nos dedicaremos a enunciar equivalencias fuertes con el axioma de elección. Si al lector le desinteresa le basta con revisar el teorema 5.29. La ventaja es que todos los teoremas tienen más o menos la misma demostración, pero con consciencia de los distintos grados de AE admitidos en cada caso.

Teorema 5.26: Todo espacio completamente pseudometrizable y separable es de Baire.

Demostración: Sea d una métrica completa que induce la topología sobre X. Sea $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso de X, $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de abiertos densos y U_0 un abierto no vacío de X. Como cada D_n es abierto y denso, $U_0 \cap D_n$ es abierto y no vacío.

Construiremos la siguiente sucesión por recursión: Sea y_1 el x_i de menor índice tal que $y_1 \in U_0 \cap D_0$ y $\epsilon_1 := 1/m$, donde m es el menor índice tal que

$$y_1 \in U_1 := B_{\epsilon_0}(y_0) \subseteq \overline{B_{\epsilon_0}(y_0)} \subseteq U_0 \cap D_0.$$

Y sea y_{n+1} el x_i de menor índice tal que $y_{n+1} \in U_n \cap D_n$ y $\epsilon_{n+1} := 1/m$, donde m es el menor índice tal que $\epsilon_{n+1} < \epsilon_n$ e $y_{n+1} \in U_{n+1} := B_{\epsilon_n}(y_0) \subseteq \overline{U}_{n+1} \subseteq U_n \cap D_n$.

Finalmente, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y, por completitud, converge a un límite L tal que

$$L \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} \subseteq U_0 \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n. \qquad \square$$

Ejemplo. Nótese que $\mathbb{Q}$ es metrizable, pero es un espacio de primera categoría, así que no es de Baire, luego no es completamente metrizable.

Como señalé, casi todas las demostraciones son idénticas salvo los detalles que admiten modificaciones:

Teorema 5.27: Todo espacio numerablemente compacto y pseudometrizable es de Baire.

Demostración: Sea d una métrica compatible para X, $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y U_0 como en el teorema anterior.

Ahora la sucesión no es de puntos sino sólo de abiertos y de índices: Sea k_0 el menor índice m tal que existe x tal que $\overline{B(x, 1/m)} \subseteq U_0 \cap D_0$ y sea

$$U_1 := \bigcup \{B_{1/k_0}(x) : \overline{B(x, 1/k)} \subseteq U_0 \cap D_0\},$$

y así sucesivamente.

Ésta sucesión es $\subseteq$-decreciente, luego notamos que si $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \varnothing$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}^c = X$, es decir, se tiene un cubrimiento numerable por abiertos de X, pero como es numerablemente compacto se daría que algún $\overline{U_N}^c = X$, es decir, que $\overline{U_N} = \varnothing$, lo que es absurdo. $\square$

Teorema 5.28: Son equivalentes:

1. **El axioma de elecciones numerables**.

2. Todo espacio completamente metrizable y totalmente acotado es de Baire.

3. Todo espacio completamente metrizable y 2AN es de Baire.

DEMOSTRACIÓN: 1 $\implies$ 2. Basta notar que AEN implica que totalmente acotado y completo sea equivalente a compacto.

2 $\implies$ 3. Basta comprobar que todo espacio 2AN es totalmente acotado.

3 $\implies$ 1. ... □

Completar demostración.

Teorema 5.29: Son equivalentes:

1. **El axioma de dependientes elecciones**.

2. **El teorema de Baire:** Todo espacio completamente pseudometrizable es de Baire.

3. Las dos condiciones:

   (a) Todo espacio compacto de Hausdorff es de Baire.

   (b) El producto numerable de espacios compactos de Hausdorff es compacto.

4. El producto numerable de espacios compactos de Hausdorff es de Baire.

5. El producto numerable de espacios discretos es de Baire.

6. $X^{\mathbb{N}}$ es de Baire para todo espacio discreto X.

7. $(\alpha X)^{\mathbb{N}}$ es de Baire para todo espacio discreto X.

DEMOSTRACIÓN: 1 $\implies$ 2. Ejercicio para el lector (PISTA: Vea el teorema 5.27).

1 $\implies$ 3. La condición (b) es el teorema 3.41. La condición (a) es el teorema de pseudometrizable numerablemente compacto, pero empleando el DE para elegir correctamente los abiertos de la sucesión.

2 $\implies$ 5. Sean $\boldsymbol{x} := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \boldsymbol{y} := (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in I} X_i$, entonces la métrica

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \begin{cases} 0, & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \\ 2^{-\{\text{mín}\, n : x_n \neq y_n\}}, & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \end{cases}$$

induce la topología producto en dicho espacio y es Cauchy completa (¿por qué?).

$5 \implies 6$. Trivial.

$6 \implies 1$. Sea (X, ρ) tal que para todo $x \in X$ el conjunto $\{y : x \varrho y\}$ es no vacío. Considere $Y := X^{\mathbb{N}}$ como el producto de X tomado como espacio discreto y definamos:

$$D_n := \{(x_n)_n \in Y : \exists m \in \mathbb{N} x_n \varrho x_m\},$$

queremos ver que los D_n's son densos y abiertos. Primero definamos $Z := \{z \in X : \exists x \; x \varrho z\}$ (nótese que Z no es el espacio entero *a priori*). Entonces

$$\boldsymbol{x} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} W_i \subseteq D_n, \quad W_i := \begin{cases} Z \cup \{x_n\}, & i = n \\ X, & i \neq n \end{cases}$$

Y por la definición de ϱ es claro que todo D_n corta a todo abierto.

Ahora, como Y es de Baire, existe $\boldsymbol{x} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$, es decir,

$$\forall n \in \mathbb{N} \; \exists m \in \mathbb{N} \; x_n \varrho x_m$$

luego podemos construir y_n por recursión de tal manera que $y_0 \varrho y_1 \varrho y_2 \varrho \dots$, empleando la minimalidad del índice sobre la sucesión $\boldsymbol{x}$.

$3 \implies 4 \implies 7$. Trivial.

$7 \implies 1$. Sigua la misma demostración que $6 \implies 1$. □

§5.2.2 Consecuencias del teorema de Baire.

Teorema (DE) 5.30 (de Banach-Steinhaus): Sea X un espacio de Banach e Y un espacio normado. Sea $\{T_i : X \to Y\}_{i\in I}$ una familia de operadores continuos, son equivalentes:

1. Para todo $\boldsymbol{x} \in X$ el conjunto $\{T_i\boldsymbol{x} : i \in I\}$ está acotado.
2. El conjunto $\{\|T_i\| : i \in I\}$ está acotado.

Demostración: $2 \implies 1$. Trivial.

$1 \implies 2$. Definamos los conjuntos

$$E_n := \{\boldsymbol{x} \in X : \forall i \in I \quad \|T_i\boldsymbol{x}\| \leq n\}$$

los cuales son claramente cerrados. Por hipótesis de 1 se satisface que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Luego, por el teorema de categorías de Baire, algún E_n debe de tener interior no vacío. Es fácil ver que $E_n - E_n \subseteq E_{2n}$, luego E_{2n} debe de contener alguna bola centrada en $\vec{0}$. Finalmente por principio arquimediano, algún E_N debe contener a la bola $\overline{B}_1(\vec{0})$, por ende, el conjunto de las normas está acotado por dicho N como se quería probar. □

§5.2.3* Espacios Čech-completos.

Lema 5.31: En un espacio de Tychonoff X son equivalentes:

1. En toda compactificación cX el resto $cX \setminus c[X]$ es un conjunto F_σ.
2. En la compactificación de Čech-Stone el resto es un conjunto F_σ.
3. En alguna compactificación el resto es un conjunto F_σ.

Demostración: Es claro que $1 \implies 2 \implies 3$.

$3 \implies 2$. Sea cX una compactificación donde el resto $R := cX \setminus c[X]$ es un F_σ. Luego, por maximalidad sea $f\colon \beta X \to cX$ tal que $\beta \circ f = c$. Nótese que $f^{-1}[R^c] = f^{-1}[c[X]] = \beta[X] \subseteq \beta X$, de modo que $f^{-1}[R] = \beta X \setminus \beta[X]$ que es un F_σ por ser la preimagen continua de un F_σ.

$2 \implies 1$. Sea cX una compactificación arbitraria. Por maximalidad existe $f\colon \beta X \to cX$ tal que $\beta \circ f = c$. Sea $\beta X \setminus \beta[X] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, con F_n cerrados. Luego, como $cX \setminus c[X] = f[\beta X \setminus \beta[X]] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f[F_n]$ y $f[F_n]$ es cerrado, entonces $cX \setminus c[X]$ es un conjunto F_σ. □

Definición 5.32: Un espacio X es ***Čech-completo*** si es de Tychonoff y satisface cualquiera de las condiciones del lema anterior.

Corolario 5.33: Todo espacio localmente compacto de Tychonoff es Čech-completo.

Teorema 5.34: En un espacio X de Tychonoff, son equivalentes:

1. X es Čech-completo.
2. Existe una familia numerable $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de cubrimientos por abiertos de X tal que si $\mathcal{F}$ es una familia de cerrados con la PIF y tal que para todo $i \in \mathbb{N}$ existe un $F_i \in \mathcal{F}$ y un $A_{i,j} \in \mathcal{C}_i$ con $F_i \subseteq A_{i,j}$; entonces $\bigcap \mathcal{F} \neq \varnothing$.

Demostración: 2 $\implies$ 1. Sea X de Tychonoff y sea $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia como la del enunciado, donde cada $\mathcal{C}_i = \{A_{i,s}\}_{s\in S_i}$. Sea $V_{i,s}\beta X$ tal que $V_{i,s} \cap X = A_{i,s}$, entonces claramente

$$X \subseteq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{s\in S_i} V_{i,s},$$

de modo que, efectivamente, el resto es un F_σ.

1 $\implies$ 2. ... □

Teorema 5.35 – *Teorema de categorías de Baire*: Todo espacio Čech-completo es de Baire.

Escribir demostración (ver [**0**, pp. 196–198]).

5.3 Espacios uniformes

El estudio de los espacios métricos demuestra que conforman una clase extremadamente distinguida de espacios en la topología general (énfasis en lo último, nótese que en la topología diferencial se estudian las *variedades diferenciales* y no es difícil ver que todas ellas son espacios métricos, y claramente su estudio no es menos difícil por ello). No obstante, es particularmente fuerte exigir, además de una noción de cercanía, un número real asociado. Ésto asemeja la teoría de distancias sobre geometrías de Hilbert, en donde, los axiomas no exigen una medida natural entre puntos, sino que sólo exigen una manera natural de comparar distancias (contrástese con la geometría de Birkhoff). La idea general está en que si exigimos una idea de cercanía global, pero sin necesidad de un real asociado, obtenemos varios de los resultados previos y además ampliamos arduamente nuestra clase de espacios topológicos: de hecho, una de las ventajas que ganamos con los espacios uniformes son un lenguaje con el cual definir topológicamente ciertos tipos de espacios de funciones e incluso estructuras sobre grupos topológicos.

Volvamos al caso de los espacios métricos, la idea que queremos rescatar es la siguiente: En un espacio métrico X dado un radio $r > 0$, se satisface que los conjuntos de la forma $\{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < r\}$ caracterizan la métrica; en particular, satisfacen que contienen a la diagonal y son simétricos.

Un subconjunto de $X \times X$ es (al menos formalmente) una relación sobre X, de modo que dados $A, B \subseteq X \times X$ entonces –como relaciones– poseen inversa y composición, denotaremos:

$$-A := A^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in A\},$$

$$A + B := A \circ B = \{(x, z) : \exists y \in X \ (x, y) \in A, (y, z) \in B\}.$$

Como la composición de relaciones es asociativa, se tiene que $(A+B)+C = A+(B+C)$. Ojo que entre subconjuntos arbitrarios de $X\times X$ se satisface que «+» no es una operación conmutativa. Luego podemos definir, por recursión:

$$1 \cdot A := A, \qquad (n+1) \cdot A := n \cdot A + A.$$

Definición 5.36: Se dice que un conjunto $V \subseteq X \times X$ es una ***banda*** de X si:

B1. $\triangle \subseteq V$ (reflexividad).

B2. $V = -V$ (simetría).

(Es decir, es una relación reflexiva y simétrica). Denotamos por $\mathcal{D}_X$ la familia de todas las bandas sobre X.

Dados dos puntos $x, y \in X$ y una banda V denotamos $d(x, y) < V$ si $(x, y) \in V$; de lo contrario denotaremos que $d(x, y) \geq V$. Dado un conjunto $A \subseteq X$ decimos que su diámetro es menor que V, denotado $d(A) < V$, si

$$\forall x, y \in A \ d(x, y) < V \iff A \times A \subseteq V.$$

Finalmente, dado un punto $x \in X$ y una banda V, definimos la bola de centro x y radio V como:

$$B_V(x) := \{y \in X : d(x, y) < V\},$$

en particular $d\big(B_V(x)\big) < 2V$.

Se pueden comprobar las siguientes propiedades, para V, V_1, V_2 bandas:

1. $d(x, x) < V$.
2. $d(x, y) < V$ syss $d(y, x) < V$.
3. Si $d(x, y) < V_1$ y $d(y, z) < V_2$, entonces $d(x, z) < V_1 + V_2$.

Ésto justifica el paralelo con los espacios métricos.

Definición 5.37: Una ***uniformidad*** $\mathcal{U}$ sobre un conjunto X es un subconjunto $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}_X$ tal que:

U1. Si $V \in \mathcal{U}$ y $V \subseteq W \in \mathcal{D}_X$, entonces $W \in \mathcal{U}$.

U2. Si $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$, entonces $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}$.

U3. Para todo $V \in \mathcal{U}$ existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $2W \subseteq V$.

Más aún, una uniformidad se dice ***de Hausdorff*** si satisface:

U4.* $\bigcap \mathcal{U} = \triangle$.

Un par $(X, \mathcal{U})$, donde $\mathcal{U}$ es una uniformidad sobre X, se dice un ***espacio uniforme***. Cuando no haya ambigüedad sobre los signos obviaremos la uniformidad. Cuando hablemos de una banda en un espacio uniforme se asumirá que nos referimos a un elemento de su uniformidad.

Ejemplo. Sea X un conjunto cualquiera.

- $\mathcal{U} := \mathcal{D}_X$ es una uniformidad sobre X conocida como la ***uniformidad discreta***.
- $\mathcal{U} := \{X \times X\}$ es una uniformidad sobre X conocida como la ***uniformidad indiscreta***.

Proposición 5.38: Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y definamos $\tau \subseteq \mathcal{P}X$ así: Un subconjunto $G \subseteq X$ está en τ syss para todo $x \in G$ existe una banda $V \in \mathcal{U}$ tal que $B_V(x) \subseteq G$. Entonces τ es una topología a la que llamamos la ***inducida por la uniformidad***.

Demostración: Es claro que $\varnothing, X \in \tau$ y que la unión de elementos de τ está en τ.

Sean $G_1, G_2 \in \tau$ y sea $x \in G_1 \cap G_2$. Existen $V, W \in \mathcal{U}$ tales que $B_V(x) \subseteq G_1$ y $B_W(x) \subseteq G_2$, luego, como $V \cap W \in \mathcal{U}$ por U2., es fácil notar que $B_{V \cap W}(x) \subseteq G_1 \cap G_2$. □

Desde ahora en adelante, siempre estudiemos los espacios uniformes con su topología inducida. Es claro que la unifomidad (in)discreta da lugar a la topología (in)discreta sobre el espacio.

Proposición 5.39: Sea X un espacio uniforme y sea $A \subseteq X$. Entonces un punto $x \in A$ es interior syss existe una banda V tal que $B_V(x) \subseteq A$.

Al igual que con los espacios topológicos, es difícil dar una topología así como así, por lo cual es menester una idea de base:

Definición 5.40: Una ***base*** de un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ es una subfamilia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ tal que para todo $V \in \mathcal{U}$ existe un $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subseteq V$.

Proposición 5.41: Una familia de bandas $\mathcal{B}$ que es base de un espacio uniforme X satisface:

BU1. Si $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ entonces existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subseteq V_1 \cap V_2$.

BU2. Para todo $V \in \mathcal{B}$ existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $2W \subseteq V$.

Y conversamente, toda familia de bandas que cumple las condiciones anteriores determina una única uniformidad

$$\mathcal{U} = \{V \in \mathcal{D}_X : \exists W \in \mathcal{B}\ W \subseteq V\}$$

de la cual es base. Más aún, la uniformidad es de Hausdorff syss $\bigcap \mathcal{B} = \triangle$.

Ejemplo. Todo espacio pseudométrico es uniforme: En efecto, sea (X, d) un espacio pseudométrico, luego para todo $n \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ podemos definir:

$$V_n := \left\{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \tfrac{1}{n}\right\},$$

así pues $\mathcal{B} := \{V_n : n \in \mathbb{N}_{\neq 0}\}$ es una base de una uniformidad $\mathcal{U}$ que llamamos ***uniformidad inducida por la métrica***. Se puede demostrar (¡hágalo!) que $\mathcal{U}$ induce la misma topología que la pseudométrica.

Consideremos a $\mathbb{R}$ como espacio uniforme con la uniformidad del ejemplo anterior. Luego, nótese que el conjunto

$$V := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| \leq 1\}$$

es una banda y que $B_V(x) = [x - 1, x + 1]$. Ésto comprueba que dada una banda V arbitraria, puede darse que $B_V(x)$ no sea un abierto, no obstante:

Proposición 5.42: Sea X un espacio uniforme. Dada una banda V y un punto $x \in X$, el conjunto $B_V(x)$ es un entorno de x y, en particular, $\operatorname{Int} B_V(x)$ es un abierto que contiene a x.

Ésto, sin embargo, puede arreglarse.

Proposición 5.43: Sea X un espacio uniforme. Dado un conjunto A se cumple que un punto x es adherente a A si para toda banda V se cumple que $A \cap B_V(x) \neq \varnothing$.

Corolario 5.44: Sea X un espacio uniforme. Sea $A \subseteq X$ y V una banda tales que $d(A) < V$, entonces $d(\overline{A}) < 3V$.

Ahora, la razón detrás del nombre de uniformidad de Hausdorff:

Teorema 5.45: Un espacio uniforme es T_0 syss su uniformidad es de Hausdorff, en cuyo caso es un espacio topológico de Hausdorff.

Demostración: $\Longrightarrow$. Sean $x, y \in X$ distintos, luego existe un entorno A de x tal que $y \notin A$. Luego existe una banda V tal que $d(x, y) \geq V$, es decir, para todo par de puntos existe una banda que *no* les contiene, y luego se comprueba que la uniformidad es de Hausdorff.

$\Longleftarrow$. Si $\bigcap \mathcal{U} = \triangle$, entonces para todo par de puntos distintos $x, y \in X$ existe una banda V tal que $d(x, y) \geq V$; luego por U3. existe una banda W tal que $2W \subseteq V$, por lo que $d(x, y) \geq 2W$ y luego $B_W(x), B_W(y)$ son entornos disjuntos de x, y (pues si $d(x, z) < W$ y $d(y, z) < W$, entonces $d(x, y) < 2W$, contradicción) y el espacio es de Hausdorff. □

Definición 5.46: Sean $(X, \mathcal{U})$ e $(Y, \mathcal{V})$ un par de espacios uniformes. Una aplicación $f : (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ se dice ***uniformemente continua*** si para todo $V \in \mathcal{V}$ existe una banda $U \in \mathcal{U}$ tal que $d(x, y) < U$ implica que $d\big(f(x), f(y)\big) < V$.

Proposición 5.47: Dados X, Y, Z espacios uniformes. Entonces:

1. $\mathrm{Id}_X : X \to X$ es uniformemente continua.
2. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son uniformemente continuas, entonces $f \circ g : X \to Z$ también lo es. En consecuencia, los espacios uniformes (como objetos) y las funciones uniformemente continuas (como flechas) constituyen una categoría, denotada Unif.
3. Toda aplicación uniformemente continua es continua. En consecuencia, $\mathsf{Unif} \subseteq \mathsf{Top}$.

Categorialmente, Unif no es una subcategoría plena; de modo que existen objetos isomorfos en Top que no son isomorfos en Unif. Por ello:

Definición 5.48: Sean X, Y un par de espacios uniformes. Se dice que una aplicación $f : X \to Y$ es un ***homeomorfismo uniforme*** si es biyectiva, uniformemente continua y si f^{-1} es uniformemente continua (i.e., es un isomorfismo en Unif). Si existe un homeomorfismo uniforme entre X, Y, entonces se dicen ***uniformemente homeomorfos***.

Se dice que una aplicación $f\colon X\to Y$ es un ***encaje uniforme*** si $f\colon X\to f[X]$ es un homeomorfismo uniforme, en cuyo caso X se dice ***uniformemente encajado*** en Y.

Teorema 5.49: Sea X un espacio uniforme e $Y\subseteq X$. Entonces:

$$\mathcal{U}_Y := \{V\cap(Y\times Y) : V\in\mathcal{U}\}$$

es una uniformidad sobre Y que induce la topología subespacio. Más aún, la aplicación $\iota\colon (Y,\mathcal{U}_Y)\to(X,\mathcal{U})$ es un encaje uniforme.

Una de las grandes (¡y buenas!) diferencias con los espacios métricos, es que con los métricos sólo puedes hacer producto de a lo más numerables y conservar la estructura métrica; no obstante, con espacios uniformes el producto se admite arbitrario:

Teorema 5.50: Sean $\{(X_i,\mathcal{U}_i)\}_{i\in I}$ espacios uniformes y denotemos $X := \prod_{i\in I} X_i$. Así pues, sea $\mathcal{B}$ la familia de los conjuntos de la forma

$$\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in X\times X : \forall i\in J\ d(x_i,y_i)<V_i\}$$

donde $J\subseteq I$ es finito, y $V_i\in\mathcal{U}_i$. Entonces $\mathcal{B}$ es base de una uniformidad en X que induce la topología producto.

Demostración: Que $\mathcal{B}$ sea base de una uniformidad $\mathcal{U}$ queda de ejericio al lector. Que ambas topologías coinciden lo veremos por doble inclusión: Sea A un entorno de $\boldsymbol{x}\in X$ en el sentido de la topología producto, entonces posee un subentorno básico B, es decir, que existe $J\subseteq I$ finito tal que $B=\prod_{i\in I} B_i$ donde $B_i=X_i$ para todo $i\notin J$, y $x_i\in B_i$ para todo $i\in J$; de modo que $B_{V_i}(x_i)\subseteq B_i$ para alguna banda V_i de X_i para todo $i\in J$. Luego, definiendo $V_i := X_i$ para todo $i\notin J$ se cumple que $W := \prod_{i\in I} V_i$ es una banda de la base $\mathcal{B}$ y de que $B_W(\boldsymbol{x})\subseteq B$, de modo que B es un entorno en la topología dada por la uniformidad. Así mismo es fácil ver que todo abierto en la topología inducida por la uniformidad lo es en la topología producto. □

Proposición 5.51: Sean $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios uniformes no vacíos. Entonces:

1. Las proyecciones $\pi_j\colon \prod_{i\in I} X_i\to X_j$ son uniformemente continuas.

2. Sea $(f_i\colon Y \to X_i)_{i\in I}$ una familia de funciones uniformemente continuas. Entonces la diagonal $f := \Delta_{i\in I} f_i\colon Y \to \prod_{i\in I} X_i$ es la única función uniformemente continua tal que el siguiente diagrama conmuta para todo $j \in I$:

$$\begin{tikzcd} & \prod_{i\in I} X_i \arrow[d, two heads, "\pi_j"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\exists! f"] \arrow[r, "f_j"'] & X_j \end{tikzcd}$$

   En consecuencia, $\prod_{i\in I} X_i$ es un producto categorial en Unif.

3. Una aplicación $f\colon Y \to \prod_{i\in I} X_i$ es uniformemente continua syss $f \circ \pi_i$ lo es para todo $i \in I$.

Proposición 5.52: Sea X un espacio uniforme, $x \in X$ y V una banda en X. Si V es abierto (resp. cerrado) en $X \times X$, entonces $B_V(x)$ es abierto (resp. cerrado).

Demostración: Basta notar que $\iota\colon y \mapsto (x, y)$ es continua, luego $B_V(x) = \iota^{-1}[V]$ y se sigue el enunciado. □

Teorema 5.53: Sea X un espacio uniforme y $A \subseteq X \times X$. Si V es una banda de X, entonces $V + A + V$ es un entorno de A y

$$\overline{A} = \bigcap_{V\in\mathcal{U}} (V + A + V).$$

Demostración: Sea $(x, y) \in (V + A + V)$. Por definición existen $p, q \in X$ tales que $(x, p) \in V, (p, q) \in A, (q, y) \in V$, o equivalentemente, tales que $(x, y) \in B_V(p) \times B_V(q)$. Nótese que

$$A \subseteq \bigcup_{(p,q)\in A} (B_V(p) \times B_V(q)) \subseteq V + A + V,$$

luego A está contenido en la unión de los interiores de $(B_V(p) \times B_V(q))$ de modo que efectivamente $V + A + V$ es un entorno de A.

Para la segunda parte nótese que $(x, y) \in (V + A + V)$ syss existe $(p, q) \in A \cap \big(B_V(x) \times B_V(y)\big)$, por ende, $(x, y) \in V + A + V$ para todo V syss todo entorno de (x, y) corta a A syss es adherente a A. □

Definición 5.54: Sea X un espacio uniforme, $A \subseteq X$ y V una banda en X. Se define el ***entorno uniforme*** de A como

$$V[A] := \bigcup_{a \in A} B_V(a).$$

Al igual que con las bolas de radio V, los entornos uniformes sí son entornos del conjunto A, pero no necesariamente son abiertos.

Proposición 5.55: Sea X un espacio uniforme y $A \subseteq X$. Entonces

$$\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{U}} V[A].$$

Demostración: Sea V una banda, luego es fácil ver que

$$V + (A \times A) + V = V[A] \times V[A],$$

y luego, aplicando el teorema anterior vemos que

$$\overline{A} \times \overline{A} = \overline{A \times A} = \bigcap_{V \in \mathcal{U}} (V + (A \times A) + V) = \bigcap_{V \in \mathcal{U}} (V[A] \times V[A]),$$

que es lo que se quería probar. □

Teorema 5.56: Sea X un espacio uniforme, los interiores (resp. las clausuras) de las bandas en $X \times X$ son una base de su uniformidad. En particular, las bandas abiertas (resp. cerradas) son una base de su uniformidad.

Demostración: Sea V una banda en X, luego existe otra banda W tal que $3W \subseteq V$ (¿por qué?).y el teorema 5.53 nos dice que $W + W + W$ es un entorno de W, luego $W \subseteq \operatorname{Int} V \subseteq V$; y de aquí se concluye el caso para los interiores de las bandas. Para las clausuras, la proposición anterior nos da que $\overline{W} \subseteq W + W + W \subseteq V$. □

Teorema 5.57: Todo espacio uniforme de Hausdorff es regular.

Demostración: Si X es uniforme de Hausdorff, entonces es un espacio topológico de Hausdorff, luego es T_1. Por el teorema 2.43 inciso 6 para probar que X es regular basta probar que todo punto posee una base de entornos cerrados, lo que se sigue pues si W es una banda cerrada, entonces $B_W(x)$ es un entorno cerrado de X y por el teorema anterior, las bolas cerradas centradas en X forman una base de sus entornos. □

Definición 5.58: Sea X un espacio uniforme. Una función $\rho\colon X\times X\to\mathbb{R}$ se dice una ***pseudométrica uniforme*** si es una pseudométrica y además es una función uniformemente continua.

Proposición 5.59: Sea X un espacio uniforme. Una pseudométrica $\rho\colon X\times X\to\mathbb{R}$ es uniforme syss para todo $\epsilon>0$ existe una banda V en X tal que

$$d(x,y)<V \implies \rho(x,y)<\epsilon.$$

Demostración: $\Longleftarrow$. ρ es una función uniformemente continua syss para todo $\epsilon>0$ existe una banda W en $X\times X$ tal que

$$d\big((x,y),(x',y')\big)<W \implies |\rho(x,y)-\rho(x',y')|<\epsilon.$$

Ahora bien, por hipótesis, sea V una banda en X tal que $d(x,y)<V \implies \rho(x,y)<\epsilon/2$ y definamos $W:=V\times V$, que es banda en $X\times X$, luego $d\big((x,y),(x',y')\big)<V\times V$ syss $d(x,x')<V$ y $d(y,y')<V$, lo que implica que

$$\epsilon=\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}\geq\rho(x,x')+\rho(y,y')\geq|\rho(x,y)-\rho(x',y')|.$$

. $\implies$. Si ρ es uniformemente continua, entonces para todo $\epsilon>0$ existe una banda V en X tal que si $d(x,x')<V$ y $d(y,y')<V$, entonces $|\rho(x,y)-\rho(x',y')|<\epsilon$. En particular, tomando $y=y'=x'$ entonces se obtiene que $d(x,y)<V \implies \rho(x,y)<\epsilon$ como se quería probar. □

Teorema 5.60: Sea X un espacio uniforme. Dada una sucesión de bandas $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $V_0=X\times X$ y que $3V_{i+1}\subseteq V_i$, entonces existe una pseudométrica $\rho\colon X\times X\to\mathbb{R}$ tal que para todo $i\geq 1$:

$$\left\{(x,y):\rho(x,y)<\frac{1}{2^i}\right\}\subseteq V_i\subseteq\left\{(x,y):\rho(x,y)\leq\frac{1}{2^i}\right\}.$$

Más aún, dicha pseudométrica es uniforme.

Demostración: Sean $x,y\in X$ y definamos $\rho(x,y)$ como el ínfimo de los valores

$$1/2^{i_1}+\cdots 1/2^{i_k}<1/2^i$$

donde $d(x_{j-1},x_j)<V_{i_j}$, $x_0:=x$ y $x_k:=y$. Queda al lector comprobar que ρ es efectivamente una pseudométrica sobre X y es claro que $V_i\subseteq\{(x,y):\rho(x,y)\leq 1/2^i\}$.

Aún queda probar que si $\rho(x, y) < 1/2^i$, entonces $d(x, y) < V_i$, i.e., si existe $x_0, x_1, \dots, x_k$ con

$$1/2^{i_1} + \cdots 1/2^{i_k} < 1/2^i,$$

$d(x_{j-1}, x_j) < V_{i_j}$, $x_0 := x$ y $x_k := y$; entonces $d(x, y) < V_i$. Procedemos por inducción (fuerte) sobre k: El caso base $k = 1$ es claro pues $d(x, y) < V_{i_1}$ con $1/2^{i_1} < 1/2^i$, entonces $i_1 > i$ y $d(x, y) < V_{i_1} < V_i$.

Para el caso inductivo podemos suponer que $k > 1$ y así tenemos que $1/2^{i_1} < 1/2^{i+1}$ o que $1/2^{i_k} < 1/2^{i+1}$; sin perdida de generalidad suponemos la primera. Definamos n como el mayor natural $\leq k - 1$ tal que

$$1/2^{i_1} + 1/2^{i_2} + \cdots + 1/2^{i_n} < 1/2^{i+1}.$$

Si $n < k - 1$, entonces $1/2^{i_1} + \cdots + 1/2^{i_n} + 1/2^{i_{n+1}} \geq 1/2^{i+1}$, de modo que

$$1/2^{i_{n+2}} + \cdots + 1/2^{i_k} < 1/2^{i+1}.$$

Así pues, por hipótesis inductiva se cumple que $d(x_0, x_n) < V_{i+1}$ y que $d(x_{n+1}, x_k) < V_{i+1}$. Además, como $1/2^{i_{n+1}} < 1/2^i$, entonces $i_{n+1} \geq i + 1$, entonces $d(x_{i_n}, x_{i_{n+1}}) < V_{i_{n+1}} \subseteq V_{i+1}$; por lo que $d(x_0, x_k) < 3V_{i+1} \subseteq V_i$ como se quería probar. □

Corolario (DE) 5.61: Sea X un espacio uniforme y V una banda de X. Entonces, existe una pseudométrica uniforme ρ sobre X tal que

$$\{(x, y) : \rho(x, y) < 1\} \subseteq V.$$

Demostración: Basta emplear el teorema anterior considerando una sucesión inducida por $V_0 := X \times X$ y $V_1 := V$. □

Corolario (DE) 5.62: Todo espacio uniforme T_0 es de Tychonoff.

Demostración: Sean $x \in X$ un punto que no pertenece a un cerrado $F \subseteq X$ no vacío. Luego existe una banda V tal que $B_V(x) \subseteq F^c$ y por el corolario anterior, existe una métrica ρ tal que $\rho(x, y) \geq 1$ si $d(x, y) \geq V$; luego $f(y) := \text{mín}\{1, \rho(x, y)\}$ es una función continua que separa a x y a F. □

Teorema 5.63: Sea X un conjunto y P una familia de pseudométricas sobre X. Entonces los conjuntos de la forma:

$$V(F, \epsilon) := \left\{(x, y) : \max_{\rho \in P} \rho(x, y) < \epsilon\right\},$$

donde $\epsilon > 0$ y $F \subseteq P$ finito, conforman una uniformidad en X bajo la cual todas las pseudométricas de P son uniformes. Ésta uniformidad es de Hausdorff syss para todo par de puntos distinto x, y existe $\rho \in P$ tal que $\rho(x, y) > 0$.

Demostración: Es claro que los conjuntos $V(F, \epsilon)$ son (vistos como relaciones sobre X) reflexivos y simétricos. La propiedad U2 se cumple pues

$$V\big(F_1 \cup F_2, \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}\big) \subseteq V(F_1, \epsilon_1) \cap V(F_2, \epsilon_2).$$

Y la propiedad U3 se cumple pues $2V(F, \epsilon/2) \subseteq V(F, \epsilon)$ (por la desigualdad triangular de las pseudométricas). □

Definición 5.64: Dado un conjunto X y una familia P de pseudométricas sobre X, se le llama la ***unifomidad inducida por las pseudométricas*** P a la uniformidad definida en el teorema anterior.

Proposición 5.65: Sea X un espacio topológico y P una familia de pseudométricas continuas sobre X tales que para todo punto $x \in X$ y todo cerrado $F \subseteq X$ con $x \notin F$ se cumple que existe $\rho \in P$ tal que $\rho(x, F) > 0$. Entonces la uniformidad inducida por las pseudométricas P induce la misma topología original en X.

Teorema 5.66: Sea X un espacio de Tychonoff. Entonces existe una uniformidad de Hausdorff $\mathcal{U}$ que induce su topología.

Demostración: Sea $f \in C(X)$, i.e., una función $f : X \to \mathbb{R}$ continua. Entonces determina una pseudométrica $\rho_f(x, y) := |f(x) - f(y)|$ que es continua (¿por qué?). Luego, sea P la familia de todas las pseudométricas de dicha forma, y también sea $P^* \subseteq P$ la familia de pseudométricas de la forma ρ_f, donde $f : X \to \mathbb{R}$ es continua y acotada. Finalmente, la proposición anterior nos dice que tanto P como P^* inducen una uniformidad que induce la topología original sobre X. □

No deja de ser curioso que DE solo sea necesario para ver que el converso se cumple.

Teorema 5.67: Un espacio uniforme (resp. uniforme de Hausdorff)

X es pseudometrizable (resp. metrizable) syss existe una base de su uniformidad numerable.

Demostración: $\Longrightarrow$. Ejercicio para el lector.

$\Longleftarrow$. Sea $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ una base numerable de la uniformidad. Luego podemos extraer de la base una sucesión de bandas $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiendo $V_0 := X \times X$ tal que $3V_{i+1} \subseteq V_i$ y por ser base eventualmente posee bandas más pequeñas que toda banda de la uniformidad. Luego la pseudométrica del teorema 5.60 nos induce la topología.

Para ver la propiedad de Hausdorff basta notar que si $\rho(x, y) = 0$ debe darse que $d(x, y) < V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $x = y$ pues $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \triangle$ dado que la uniformidad es de Hausdorff. □

5.4 Espacios de funciones

La sección anterior nos otorgó un fuerte y elegante lenguaje con el cual construir nuevos tipos de espacios topológicos. Tal vez una de las mejores razones para aprender de espacios uniformes es que permiten aclarar varios detalles sobre los distintos tipos de espacios de funciones en topología. En ésta sección nos enfocaremos en tres tipos de espacios, o mejor dicho, de convergencia sobre ellos: la convergencia puntual, la convergencia uniforme y la convergencia casi-uniforme; lo que generalizaremos en uno de los espacios más formidables, la topología compacto-abierto.

Teorema 5.68: Un espacio de Hausdorff compacto K posee una única uniformidad que induce su topología y que tiene por base a las bandas abiertas de $K \times K$.

Demostración: El que posea (al menos) una se sigue del teorema anterior, así que, sea $\mathcal{U}$ una uniformidad que induce la topología en K. Sea $V \subseteq K \times K$ una banda (en el sentido absoluto) que es un subconjunto abierto. El teorema **??** implica que las bandas cerradas $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ forman una base y, como K es de Hausdorff, $\bigcap \mathcal{B} = \triangle \subseteq W$. Tomando complementos se comprueba que existen finitas bandas cerradas $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{B}$ tales que $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \subseteq W$, de modo que $W \in \mathcal{U}$. Así, vemos que todas las bandas abiertas (en sentido absoluto) de $K \times K$ son bandas abiertas de $\mathcal{U}$ y, por el teorema **??**, son base como se quería probar. □

Corolario 5.69: Sea X un espacio de Hausdorff compacto e Y un espacio uniforme. Toda función continua $f : X \to Y$ es uniformemente continua.

Demostración: Sea $V \subseteq Y \times Y$ una banda abierta, entonces $(f \times f)^{-1}[V] \subseteq X \times X$ es una banda abierta de X, pero en la prueba del teorema anterior vimos que toda banda abierta pertenece a la uniformidad de X, por lo que ganamos. □

Definición 5.70: Sean X un conjunto arbitrario e Y un espacio topológico, entonces se dice que una sucesión de funciones $(f_i : X \to Y)_{i \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a otra f si para todo $x \in X$ se cumple que $\lim_n f_n(x) = f(x)$, en cuyo caso simplemente escribiremos $f = \lim_n f_n$.

En particular, este comportamiento se replica en la topología producto $\prod_{x \in X} Y = Y^X$, por ello a éste último le decimos la ***topología de convergencia puntual***.

Ejemplo. Consideremos $[0,1]^{\mathbb{R}}$ donde $f_n(x) = x^n$, es fácil probar que el límite puntual $f = \lim_n f_n$ es la función $f(x) = \lfloor x \rfloor$ que es discontinua, es decir, el límite puntual de continuas puede no ser continua. Por éste y muchos otros ejemplos se puede notar que la topología de convergencia puntual otorga poca información en términos de funciones.

Definición 5.71: Sean X un conjunto arbitrario y sea Y un espacio uniforme. Se define la ***uniformidad de convergencia uniforme*** sobre Y^X como aquella que tiene por base a

$$\widetilde{V} := \{(f,g) \in Y^X : \forall x \in X \quad d(f(x), g(x)) < V\},$$

donde V recorre todas las bandas de Y. Denotaremos por $\operatorname{Func}_u(X,Y)$ al conjunto Y^X con esta uniformidad.

Proposición 5.72: Sea X un conjunto e Y un espacio métrico. Entonces $\operatorname{Func}_u(X,Y)$ es metrizable.

Teorema 5.73 – *Teorema del límite uniforme*: Sean X un espacio topológico e Y un espacio uniforme. El conjunto de funciones $f \in Y^X$ continuas en un punto $x_0 \in X$ es cerrado en $\operatorname{Func}_u(X,Y)$. En consecuencia, $C(X,Y)$ es cerrado en $\operatorname{Func}_u(X,Y)$.

Demostración: ... □

Ejemplo. Sean $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Claramente éstas funciones son discontinuas y convergen uniformemente a la función nula que es continua.

Definición 5.74: Sea X un conjunto, $\Sigma \subseteq \mathcal{P}X$ un cubrimiento de X e Y un espacio uniforme. Se denota por $\operatorname{Func}_\Sigma(X, Y)$ al conjunto Y^X con la uniformidad que tiene por base a las intersecciones finitas de bandas

$$\widetilde{V}_A := \{(f, g) : \forall x \in A \quad d(f(x), g(x)) < V\},$$

donde V recorre las bandas de Y, y A recorre los elementos de Σ.

Sea X un espacio topológico y Σ es la familia de subconjuntos compactos de X, denotamos $\operatorname{Func}_c(X, Y) := \operatorname{Func}_\Sigma(X, Y)$. Esta se conoce como la ***uniformidad de convergencia uniforme sobre compactos***.

Proposición 5.75: Sea X un conjunto, $\Sigma \subseteq \mathcal{P}X$ un cubrimiento de X e Y un espacio uniforme. Se cumplen:

1. Si $A \in \Sigma$, la restricción $\rho_A\colon \operatorname{Func}_\Sigma(X, Y) \to \operatorname{Func}_u(A, Y)$ es uniformemente continua.
2. En consecuencia, para todo $x \in X$ la aplicación de evaluación

$$\begin{aligned} \operatorname{ev}_x\colon \operatorname{Func}_\Sigma(X, Y) &\longrightarrow Y \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

   es uniformemente continua.
3. Si Y es de Hausdorff, entonces $\operatorname{Func}_\Sigma(X, Y)$ también.

Demostración:

1. Basta notar que, dada la banda $\widetilde{V}$ sobre $\operatorname{Func}_u(A, Y)$, su preimagen $(\rho_A \times \rho_A)^{-1}[\widetilde{V}] = \widetilde{V}_A$ es una banda de $\operatorname{Func}_\Sigma(A, Y)$.
2. Sea $A \in \Sigma$ tal que $x \in A$. Basta notar que el siguiente diagrama conmuta (en Unif):

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Func}_\Sigma(X,Y) & \xrightarrow{\rho_A} & \operatorname{Func}_u(A,Y) \\ {\scriptstyle \operatorname{ev}_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \operatorname{ev}_x} \\ Y & = & Y \end{array}$$

3. Ejercicio para el lector.

□

Teorema 5.76: Sea X un espacio topológico, e Y un espacio uniforme. La topología de convergencia uniforme en compactos sobre $C_c(X,Y)$ tiene por subbase a los conjuntos

$$T(K;U) := \{f \in C(X,Y) : f[K] \subseteq U\},$$

donde K recorre los subespacios compactos de X y U recorre los abiertos de Y.

Definición 5.77: Sea X, Y un par de espacios topológicos. Se denota por $C_c(X,Y)$ al espacio de funciones continuas $C(X,Y)$ con la topología inducida por la subbase de conjuntos

$$T(K;U) := \{f \in C(X,Y) : f[K] \subseteq U\},$$

donde K recorre los subespacios compactos de X y U recorre los abiertos de Y. Esta se llama la ***topología compacto-abierto***.

Teorema 5.78: Sea X, Y, Z un trío de espacios topológicos. Se cumplen:

1. Si X es de Hausdorff localmente compacto, la aplicación de evaluación
$$\operatorname{ev}\colon C_c(X,Y) \times X \longrightarrow Y, \qquad \operatorname{ev}(f,x) := f(x)$$
es continua.

2. Si Y es de Hausdorff localmente compacto, la composición $-\circ-\colon C_c(X,Y)\times C_c(Y,Z) \to C_c(X,Z)$ es continua.

Lema 5.79: Sean X, Y un par de espacios de Hausdorff, sea $\mathcal{S}$ una subbase de Y y sea $\mathcal{K}$ una familia de subespacios compactos de X tal que para todo compacto $K \subseteq X$ y abierto $U \subseteq X$ que satisfagan que $K \subseteq U$ existen $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}$ de modo que $K \subseteq K_1 \cup \cdots \cup K_n \subseteq U$. Entonces la familia de los $T(K;V)$ con $K \in \mathcal{K}, V \in \mathcal{S}$ es una subbase de $C_c(X,Y)$.

Teorema 5.80: Sean X, Y, Z un trío de espacios de Hausdorff. Entonces la aplicación

$$C_c(X \times Y, Z) \hookrightarrow C_c(X, C_c(Y, Z))$$

dada por $\Phi(f)(x)(y) := f(x, y)$ es continua y es un encaje topológico. Si Y es localmente compacto, entonces Φ es de hecho un homeomorfismo.

Lema (DE) 5.81: Si X es normal, $A \subseteq X$ cerrado y $g \in C(A)$ es tal que $|g(a)| \leq c$ para todo $a \in A$, entonces existe $h \in C(X)$ tal que

1. $|h(x)| \leq \frac{1}{3}c$ para todo $x \in X$.
2. $|h(a) - g(a)| \leq \frac{2}{3}c$ para todo $a \in A$.

DEMOSTRACIÓN: Sean

$$A_+ := \left\{a \in A : g(a) \geq \frac{1}{3}c\right\}, \quad A_- := \left\{a \in A : g(a) \leq -\frac{1}{3}c\right\}.$$

que son claramente cerrados y disjuntos en A, que es cerrado, luego son cerrados y disjuntos en X. Como X es normal, existe una función de Urysohn $h\colon X \to \left[-\frac{1}{3}c, \frac{1}{3}c\right]$ tal que $h[A_+] = \frac{1}{3}c$ y $h[A_-] = -\frac{1}{3}c$. h satisface todos los requerimientos. □

Teorema (DE) 5.82 (de extensión de Tietze-Urysohn): Si X es normal, $A \subseteq X$ cerrado y $f \in C(A)$, entonces f es continuamente extensible a X. Más aún si $|f(a)| \leq c$ (resp. $< c$) para todo $a \in A$, entonces la extensión $\bar{f}$ cumple que $\bar{f}(x) \leq c$ (resp. $< c$) para todo $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN: Contemplamos tres casos:

a) $\underline{|f(a)| \leq c \text{ para todo } a \in A}$:
Por el lema anterior existe g_0 tal que $|f(a) - g_0(a)| \leq \frac{2}{3}c$ y $|g_0(x)| \leq \frac{1}{3}c$. Luego aplicamos el lema anterior sobre $f - g_0$ para obtener g_1 tal que $|f(a) - g_0(a) - g_1(a)| \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}c$ y $|g_1(x) \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}c$. Y así, para obtener inductivamente[1] una función g_{n+1} tal que $|f(a) - g_0(a) - \cdots - g_n(a)| \leq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n c$ y que $|g_n(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n c$.
Ahora se define $F \in C(X)$ tal que

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x),$$

[1] Aquí se aplica también DE.

que por el teorema del sandwich satisface que $F|_A = f$, mientras que

$$|F(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |g_n(x)| \leq \frac{1}{3}c \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = c.$$

La continuidad se hereda del hecho de que las sumas parciales son continuas y convergen uniformemente a F.

b) $\underline{|f(a)| < c \text{ para todo } a \in A}$: Aplicando el inciso anterior se construye F tal que $|F(x)| \leq c$ para todo $x \in X$, luego sea $B := F^{-1}[\{\pm c\}]$, claramente B es cerrado y disjunto de A, luego por el lema de Urysohn existe una función continua $\phi : X \to [0,1]$ tal que $\phi[B] = 0$ y $\phi[A] = 1$, luego $\bar{f} := F \cdot \phi$ es una extensión continua de f y cumple la desigualdad.

c) $\underline{f \text{ no es necesariamente acotado}}$: Basta notar que $(-c, c)$ es homeomorfo a $(0,1)$ que es homeomorfo a $\mathbb{R}$. □

Proposición 5.83: Si Y es métrico, entonces el conjunto de funciones acotadas $(Y^X)^*$ es métrico con

$$d(f,g) := \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\} = \operatorname{diam}(\operatorname{Img} f \cup \operatorname{Img} g),$$

a la que llamamos ***métrica de Cebyshev***. En consecuente si Y es de completo, $(Y^X)^*$ también.

Notemos que si X es compacto e Y es métrico, entonces $C(X,Y)^* = C(X,Y)$. Si Y es normado, entonces $(Y^X)^*$ también con $\|f\|_\infty := \sup(\operatorname{Img}(\|f\|))$, a la que usualmente se le dice ***norma de Chebyshev***.

En particular, la norma de Chebyshev induce la topología de convergencia uniforme sobre $(Y^X)^*$.

Proposición 5.84 (teorema de Dini): Sea X compacto y $(f_i)_{i \in I}$ una sucesión de $C(X, \mathbb{R})$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ se cumpla que $f_i(x) \leq f_{i+1}(x)$. Si existe $f \in \operatorname{Func}(X, \mathbb{R})$ tal que para todo $x \in X$ se da que $f(x) = \lim_i f_i(x)$, entonces la convergencia es uniforme.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$. Definamos $F_i := \{x : |f(x) - f_i(x)| \geq \epsilon\}$, luego F_i son cerrados pues F_i^c son abiertos (¿por qué?), además $F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$. Por construcción se cumple que $\bigcap_{i=0}^{n} F_i = \varnothing$, luego no pueden tener la PIF, por ende hay algún F_i que es vacío, que es lo que se quería probar. □

En esta sección usaremos la noción de polinomios funcionales, éstos se asemejan a los comunes pero sus variables son funciones continuas, e.g. $\frac{1}{2}f(x)^3 + g(x) \cdot h(x) + 5$. En general obviaremos el «(x)», por comodidad.

Lema 5.85: Sea $f \in C\big(X, [0,1]\big)$, entonces existe una sucesión de polinomios funcionales tal que convergen uniformemente a $\sqrt{f}$.

Demostración: Vamos a definir recursivamente la sucesión como

$$g_0 := 0, \quad g_{i+1} := g_i + \frac{1}{2}(f - g_i^2).$$

Ahora queremos probar convergencia por teorema de Dini, así que hemos de probar que $g_i(x) \le \sqrt{f}(x)$ para todo i y x, lo haremos por inducción, el caso $i = 0$ es trivial y

$$\sqrt{f} - g_{i+1} = \sqrt{f} - g_i - \frac{1}{2}(f - g_i^2) = (\sqrt{f} - g_i)\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{f} + g_i)\right)$$

dado que $g_i \le \sqrt{f} \le 1$, se da que

$$\sqrt{f} - g_{i+1} \ge (\sqrt{f} - g_i)\left(1 - \frac{1}{2}2\sqrt{f}\right) \ge 0$$

lo que completa la demostración de la desigualdad. Usando que $g_i \le \sqrt{f}$ y la definición de g_i se comprueba que son uniformemente crecientes, luego queda al lector probar que en el límite los g_i se van a $\sqrt{f}$. □

Vemos que el teorema se aplica para el intervalo $[0,1]$, pero si $f \in C(X, \mathbb{R})$ como X es compacto, la imagen ha de ser compacta, luego posee un máximo global M y $\frac{1}{M}f(x)$ está en el intervalo $[0,1]$ y así podemos conseguir la raíz en casos generales.

Definición 5.86: Se dice que una familia $\{f_i\}_{i \in I}$ de funciones de dominio X ***separa puntos*** si para todo par de puntos distintos $x, y \in X$ existe alguna f_i tal que $f_i(x) \ne f_i(y)$.

Teorema 5.87 – *Teorema de Stone-Weierstrass*: Todo anillo de funciones continuas A que separan puntos y que contiene a las constantes sobre un compacto X es denso en $C(X, \mathbb{R})$.

Demostración: Probaremos que $\overline{A} = C(X, \mathbb{R})$.

Primero notemos que $\text{mín}(f, g)(x) := \text{mín}(f(x), g(x))$ pertenece a $\overline{A}$, pues

$$\text{mín}(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|), \quad \text{máx}(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|),$$

donde $|f| = \sqrt{f^2}$ y vimos que la raíz de toda función positiva-valorada de A pertenece a $\overline{A}$.

Sea $f \in C(X, \mathbb{R})$, queremos probar que para todo $\epsilon > 0$ existe $f_\epsilon \in \overline{A}$ tal que para todo $x \in X$ se cumple que

$$|f(x) - f_\epsilon(x)| < \epsilon.$$

Por construcción para todo $a, b \in X$ existe $h_{a,b} \in A$ tal que $h_{a,b}(a) \neq h_{a,b}(b)$, luego se define $g_{a,b}(x) := \frac{h(x)-h(a)}{h(b)-h(a)} \in A$ tal que $g_{a,b}(a) = 0$ y $g_{a,b}(b) = 1$. Luego, definimos

$$f_{a,b}(x) := (f(b) - f(a))g_{a,b}(x) + f(a) \in A,$$

que cumple que $f_{a,b}(a) = f(a)$ y $f_{a,b}(b) = f(b)$. Luego, definimos

$$U_{a,b} := \{x : f_{a,b}(x) < f(x) + \epsilon\}, \quad V_{a,b} := \{x : f_{a,b}(x) > f(x) - \epsilon\},$$

los cuales resultan ser entornos de a y de b. Luego $(U_{a,b})_{a \in X}$ es un cubrimiento abierto de X, por ende, posee un subcubrimiento abierto finito $(U_{a_i,b})_{i=1}^n$. Notemos que $f_b := \text{mín}(f_{a_i,b})_{i=1}^n \in \overline{A}$ que cumple que $f_b(x) < f(x) + \epsilon$ para todo $x \in X$ y que $f_b(x) > f(x) - \epsilon$ para todo $x \in V_b := \bigcap_{i=1}^n V_{a_i,b}$ donde V_b es entorno de b. Por lo tanto $(V_b)_{b \in X}$ es un cubrimiento abierto de X, por ende, posee un subcubrimiento abierto finito $(V_{b_i})_{i=1}^m$. Finalmente, $f_\epsilon := \text{máx}(f_{b_i})_{i=1}^m$ cumple lo pedido y pertenece a $\overline{A}$.

Como $\overline{A}$ es cerrado y todo entorno de toda función continua corta a A, luego toda función continua es adherente a $\overline{A}$, en conclusión $\overline{A} = C(X, \mathbb{R})$ como se quería probar. □

Algunos le agregan a X la condición de ser de Hausdorff, de modo que sea un espacio normal y, en consecuencia de Urysohn. Sin embargo, en el enunciado admitimos que simplemente basta que sepamos que A contiene tales funciones. La condición de ser de Hausdorff (sumado a DE) simplemente probaría que tal subanillo propio siempre existe, sin embargo, si nosotros proponemos, por ejemplo, el anillo de polinomios no haría falta elección para aplicar el resultado anterior.

Corolario 5.88: Toda función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ puede ser uniformemente aproximada por polinomios.

Otro ejemplo interesante es aproximar mediante polinomios de la función exponencial, pues $\exp(x)^n = \exp(nx)$, esto en algún momento se puede generalizar mucho más y en el cuerpo de los números complejos en un resultado conocido como el teorema de Fourier.

> **Teorema 5.89 – *Teorema de Stone-Weierstrass*:** Todo anillo de funciones continuas A que es cerrado por conjugados, que separa puntos y contiene a las constantes sobre un compacto X es denso en $C(X, \mathbb{C})$.

Demostración: Para ello definimos $A_{\mathrm{Re}} := \{\mathrm{Re}(f) : f \in A\}$ y $A_{\mathrm{Im}} := \{\mathrm{Im}(f) : f \in A\}$ y vemos que cumplan la hipótesis de la versión real. Claramente separan puntos, son cerrados por suma, contienen constantes y para ver que son cerradas por producto vamos a ver que es cerrado bajo producto supongamos que sean $f, g \in A$ y definamos $f_1 := \mathrm{Re}(f)$ y $f_2 := \mathrm{Im}(f)$, y análogo para g. Como A es cerrado por conjugados, vemos que $f_1 = \frac{f+\overline{f}}{2} \in A$, de modo que es fácil ver que $f_1 g_1 \in A_{\mathrm{Re}}$. Por un argumento similar es fácil ver que $f_2 \in A$, de modo que $f_2 g_2 \in A$ y luego $\mathrm{i} f_2 g_2 \in A$ luego $f_2 g_2 \in A_{\mathrm{Im}}$. Finalmente, si $f \in C(X, \mathbb{C})$, entonces $f_1, f_2 \in C(X)$. Luego, por Stone-Weierstrass real se cumple que para todo $\epsilon > 0$ existen $g_\epsilon, h_\epsilon \in \overline{A_{\mathrm{Re}}}$ tales que para todo $x \in X$ se cumple:

$$\max\{|f_1(x) - g_\epsilon(x)|, |f_2(x) - h_\epsilon(x)|\} < \frac{\epsilon}{2}$$

finalmente, por desigualdad triangular $f_\epsilon := g_\epsilon + \mathrm{i} h_\epsilon \in \overline{A}$ está a menos de ϵ de f, como se quería probar. □

Corolario 5.90: Si $\mathbb{D} := \overline{B_1(0)}$, entonces

$$A := \left\{ \sum_{k=-n}^{n} \alpha_n \exp(inz) : n \in \mathbb{N} \land \forall i \; (\alpha_i \in \mathbb{C}) \right\}$$

es denso en $C(\mathbb{D}, \mathbb{C})$.

Teorema 5.91: Sea X un espacio compacto, sea $R := C(X; \mathbb{R})$ considerado como espacio normado y sea $\mathfrak{a}$ un ideal cerrado en R. Denotemos

$$Z := \{x \in X : \forall f \in \mathfrak{a} \; f(x) = 0\},$$

si $g \in R$ se anula en Z, entonces $g \in \mathfrak{a}$.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$, definamos $U := g^{-1}\big[(-1,\epsilon)\big] \subseteq X$ que es abierto y contiene a Z, luego $S := U^c$ es cerrado y, por tanto, compacto. Todo $y \in S$ no está en Z, luego existe $h_y \in \mathfrak{a}$ tal que $h_y(y) \neq 0$ y de hecho, f_y no se anula en un entorno abierto V_y de y. Los conjuntos V_y's forman un cubrimiento abierto de S y como S es compacto posee un subcubrimiento finito:

$$S \subseteq V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}.$$

Y a dichos V_{y_i}'s tiene un h_{y_i} asociado; luego

$$h := h_{y_1}^2 + \cdots + h_{y_n}^2 \in \mathfrak{a}$$

y además no se anula en S. Como S es compacto, h alcanza un mínimo $a > 0$ en S. Definamos la función

$$H_n := \frac{nh}{1+nh}.$$

Nótese que $1 + nh$ es estrictamente positiva y continua en X, luego posee inversa continua, y $h \in \mathfrak{a}$, así que $H_n \in \mathfrak{a}$ también. Nótese que $fH_n \in \mathfrak{a}$ y que H_n converge a 1 en S. $\square$

Definición 5.92: Si M es métrico, se dice que un conjunto $A \subseteq M^X$ es

Equicontinuo Si para todo $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$ existe un entorno U de x_0 tal que para todo $f \in A$ se cumple que $f[U] \subseteq B_\epsilon(f(x_0))$.

Uniformemente equicontinuo Si X es métrico y para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x_0 \in X$ y $f \in A$ se cumple que $d(x, x_0) < \delta \implies d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.

Claramente si X es métrico todo conjunto uniformemente equicontinuo es equicontinuo, pero de hecho:

Proposición 5.93: Si X es métrico compacto, todo conjunto equicontinuo en M^X es uniformemente equicontinuo.

Pista: La demostración ocupa el mismo truco que para probar que continuo $\implies$ uniformemente continuo en dominio compacto. $\square$

Teorema (AEN) 5.94 – *Teorema de Ascoli-Arzelà*: Sea X métrico compacto e Y métrico completo. F es relativamente compacto en la topología de convergencia uniforme syss cumple las siguientes condiciones:

- F es uniformemente equicontinuo.
- Para todo $x \in X$ el conjunto $\{f(x) : f \in F\}$ es relativamente compacto.

Demostración: $\Longleftarrow$. Si X es compacto, entonces es totalmente acotado, por lo que para todo $n \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ se puede definir D_n como un conjunto finito $\{x_1, \dots, x_k\}$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^k B_{1/n}(x_i)$, y por ende, $D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\neq 0}} D_n$. Sea F equicontinuo y uniformemente acotado, vamos a probar que es secuencialmente compacto.

Sea $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en A, de él se puede extraer una sucesión como $(f_i(d_0))_{i\in\mathbb{N}}$ está contenido en un compacto, entonces posee una subsucesión convergente, sea $(f_{\sigma(0,i)})_{i\in\mathbb{N}}$ dicha subsucesión. Asimismo, de ésta se puede extraer la subsucesión $(f_{\sigma(1,i)})_{i\in\mathbb{N}}$ de modo que $(f_{\sigma(1,i)}(d_1))_{i\in\mathbb{N}}$ converja y así. Defínase $g_i := f_{\sigma(i,i)}$.

Sea $\epsilon > 0$. Por la equicontinuidad existe $\delta > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $d(x, y) < \delta$ implica $d(g_n(x), g_n(y)) < \epsilon/3$. Sea $m > 1/\delta$ un natural, por construcción existe $n_0 \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ tal que para todo $p, q \geq n_0$ y todo $d \in D_m$ se cumple que $d(g_p(d), g_q(d)) < \epsilon/3$. Finalmente, para todo $x \in X$ existe $d \in D_m$ tal que $d(x, d) < 1/m < \delta$ que cumple que para todo $p, q \geq n_0$ pasa

$$d(g_p(x), g_q(x)) \leq d(g_p(x), g_p(d)) + d(g_p(d), g_q(d)) + d(g_q(d), g_q(x)) < \epsilon.$$

Como se quería probar.

$\Longrightarrow$. Si F es relativamente compacto, entonces es totalmente acotado, por ende, dado $\epsilon > 0$ existen $f_1, \dots, f_k \in F$ tales que $F \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_{\epsilon/3}(f_i)$. Luego, dado $x \in X$ se cumple que

$$F(x) := \{f(x) : f \in F\} \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_{\epsilon/3}(f_i(x))$$

luego $F(x)$ es totalmente acotado, y su clasurura también y es cerrado, ergo es completa, en conclusión $\overline{F(x)}$ ha de ser compacto.

Sea $\epsilon > 0$, hemos de probar que F es equicontinuo, como X es compacto, los f_is son uniformemente continuos, por ende existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in X$ se cumple $d(x, y) < \delta$ implica $d(f_i(x), f_i(y)) < \epsilon/3$. Por el cubrimiento para todo $f \in F$ existe f_i tal que $d(f, f_i) < \epsilon/3$, por lo que

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(y)) + d(f_i(y), f(y)) < \epsilon. \qquad \square$$

5.5 Espacios ordenados

Definición 5.95: Sea $(X, \leq)$ un conjunto linealmente ordenado, se define la topología inducida por el orden como la que tiene por base a los intervalos abiertos del conjunto.

Se dice que $C \subseteq X$ es ***convexo*** si para todo $x, y \in C$ se cumple que $[x, y] \subseteq C$.

Queremos ver que los espacios ordenados son completamente normales, para ello veremos algo más fuerte.

Definición 5.96: Un espacio X que es T_1 se dice ***monótonamente normal*** si existe una función G que a cada par (A, B) de cerrados disjuntos se cumple que $G(A, B)$ es un abierto tal que

1. $A \subseteq G(A, B) \subseteq \overline{G(A, B)} \subseteq B^c$.
2. Si $A \subseteq A'$ y $B' \subseteq B$ entonces $G(A, B) \subseteq G(A', B')$ (monotonía).

En éste caso G se dice un ***operador monótono de normalidad***.

Proposición 5.97: Si X es monótonamente normal entonces posee un operador monótono de normalidad G_0 tal que $G_0(A, B) \cap G_0(B, A) = \varnothing$.

Demostración: Basta definir $G_0(A, B) := G(A, B) \setminus \overline{G(B, A)}$. $\square$

Teorema 5.98: Sea X un espacio que es T_1 es monótonamente normal syss existe un operador H tal que para todo par (p, U) donde $p \in U \subseteq X$ y U es abierto se cumple que $H(p, U)$ es un abierto tal que:

1. $p \in H(p, U) \subseteq U$.
2. Si $H(p, U) \cap H(q, V) \neq \varnothing$, entonces $p \in V$ o $q \in U$.

Demostración: $\Longrightarrow$. Sea G un operador monótono de normalidad tal que $G(A, B) \cap G(B, A) = \varnothing$. Luego sea $H(p, U) := G(\{p\}, U^c)$, entonces claramente H cumple la propiedad 1. Si $p \notin V$ y $q \notin U$, entonces aplicando la monotonía se cumple

$$H(p,U) \cap H(q,V) = G(\{p\},U^c) \cap G(\{q\},V^c) \subseteq G(\{p\},\{q\}) \cap G(\{q\},\{p\}) = \varnothing.$$

$\Longleftarrow$. Sean A, B cerrados disjuntos, entonces definamos

$$G(A,B) := \bigcup\{H(a,U) : a \in A \wedge U \subseteq B^c\}$$

que es abierto por ser unión de abiertos. Nótese que para todo $a \in A$ se cumple que $a \in H(a,B^c) \subseteq G(A,B)$, es decir, $A \subseteq G(A,B)$. Sea $b \in B$, entonces $b \in V := H(b,A^c)$, luego por la propiedad 2. de H se deduce que $V \cap G(A,B) = \varnothing$ y que

$$G(A,B) \subseteq V^c \implies \overline{G(A,B)} \subseteq V^c$$

por minimalidad de la clausura y porque V^c es cerrado. En definitiva $b \notin \overline{G(A,B)}$ como se quería ver. □

Proposición 5.99: Sea X un espacio que es T_1 y H un operador como el teorema anterior pero sólo aplicable para (p,B) donde B es un abierto perteneciente a una base $\mathcal{B}$, entonces existe un operador $\overline{H}$ que funciona para todo par (p,U) y en consecencia X es monótonamente normal.

Demostración: Basta definir:

$$\overline{H}(p,U) := \bigcup\{H(p,B) : B \subseteq U\}$$

que claramente cumple con las hipótesis exigidas. □

Teorema 5.100: Ser monótonamente normal es hereditario. En consecuencia, todo espacio monótonamente normal es completamente normal.

Demostración: Sea $Y \subseteq X$ un subespacio y sea H el operador descrito en el teorema ante-anterior. Para U abierto en Y definamos:

$$U^* := \bigcup\{V : V \text{ es abierto en } Y \wedge V \cap Y = U\}$$

Y definamos $H_Y(p,U) := H(p,U^*) \cap Y$ que cumple con las hipótesis exigidas. □

Teorema (AE) 5.101: Todo espacio ordenado es monótonamente normal y, en consecuencia, es completamente normal.

Demostración: Sea X un espacio ordenado y consideremos:

$$X^* := \{(-n, 0) : n \in \mathbb{N}\} \cup X \times \{1\} \cup \{(+n, 2) : n \in \mathbb{N}\}$$

bajo el orden lexicográfico. Es decir, X^* es también un conjunto ordenado que extiende a X, pero que no posee ni máximo ni mínimo. Por AE sea $\preceq$ un buen orden sobre X^* de modo que $E(A) := \min_{\preceq}(A)$ es una función de elección sobre X^*. Veremos que X^* es monótonamente normal construyendo un operador H sobre una base.

Para ello consideremos un par $\big(p, (a, b)\big)$ y definamos:

$$x(p, a) := \begin{cases} a, & (a, p) = \varnothing \\ E\big((a, p)\big), & (a, p) \neq \varnothing \end{cases}, \quad y(p, b) := \begin{cases} b, & (p, b) = \varnothing \\ E\big((p, b)\big), & (p, b) \neq \varnothing \end{cases}$$

Luego definimos $H\big(p, (a, b)\big) = \big(x(p, a), y(p, b)\big)$ que es efectivamente abierto. Claramente $p \in H\big(p, (a, b)\big) \subseteq (a, b)$.

Sean $p, q, (a, b), (c, d)$ tales que se cumpla que $H\big(p, (a, b)\big) \cap H\big(q, (c, d)\big) \neq \varnothing$ que contiene a un elemento z. Sin perdida de generalidad supongamos que $x(p, a) \leq x(q, c)$. Queremos probar que $p \in (c, d)$ o que $q \in (a, b)$. Vemos dos posibles casos:

a) $\underline{y(q, d) \leq y(p, b)}$: Luego $q \in \big(x(q, c), y(q, d)\big) \subseteq \big(x(p, a), y(p, b)\big) \subseteq (a, b)$.

b) $\underline{y(q, d) > y(p, b)}$: Éste caso se hará por contradicción. Primero recordar que la situación es la siguiente:

$$x(p, a) \leq x(q, c) < z < y(p, b) < y(q, d).$$

Luego si $p > x(q, c)$, entonces $p \in \big(x(q, c), y(q, d)\big) \subseteq (c, d)$; así que suponemos que $p \leq x(q, c)$. Similarmente si $q < y(p, b)$, entonces $q \in \big(x(p, a), y(p, b)\big) \subseteq (a, b)$; así que suponemos que $q \geq y(p, b)$. Es decir:

Pero si $p = x(q, c)$, considerando que $c \leq x(q, c) < z < y(p, b) \leq q$ entonces $z \in (c, q) \neq \varnothing$ así que $p \in (c, q) \subseteq (c, d)$. Y si $q = y(p, b)$, considerando que $p < x(q, c) < z < y(p, b) \leq b$ entonces $z \in (p, b) \neq \varnothing$ así que $q \in (p, b) \subseteq (a, b)$. Es decir, la situación es la siguiente:

$$x(p, a) < p < x(q, c) < z < y(p, b) < q < y(q, d).$$

Pero entonces $x(q,c) \in (p,z) \subseteq (p,b)$ y por definición $y(p,b) := \min_{\preceq}(p,b)$, es decir, $y(p,b) \preceq x(q,c)$. Y similarmente $y(p,b) \in (z,q) \subseteq (c,q)$ y por definición $x(q,c) := \min_{\preceq}(c,q)$, es decir, $x(q,c) \preceq y(p,b)$. En conclusión, $x(q,c) = y(p,b)$, lo que contradice la existencia de z. $\square$

Definición 5.102: Se dice que un conjunto ordenado es ***orden-completo*** si todo subconjunto acotado posee ínfimo.

Teorema 5.103: Un espacio ordenado no vacío es compacto syss es orden-completo y posee extremos (mínimo y máximo).

DEMOSTRACIÓN: $\Longrightarrow$. Veamos las dos condiciones:

I) X posee extremos: De lo contrario entonces $\{(-\infty,x)\}_{x\in X}$ sería un cubrimiento por abiertos que no posee subcubrimiento finito (pues todo conjunto finito posee máximo). Análogamente para el mínimo.

II) X es completo: De lo contrario habría un corte (A,B) tal que A,B son convexos, todo elemento de A es menor que todo elemento de B y ni A ni B poseen mínimo ni máximo. En cuyo caso se daría que

$$A = \bigcup_{a\in A}(-\infty,a), \quad B = \bigcup_{b\in B}(b,\infty)$$

lo que prueba que A,B son abiertos y aquí se forma un cubrimiento por abiertos de X que no posee subcubrimiento finito.

$\Longleftarrow$. Sea X completo y con mínimo m y máximo M. Si $m = M$, entonces $X = \{m\}$ que es compacto. Sino, fijemos un cubrimiento por abiertos $\mathcal{C}$ de X, y sea

$$S := \{y \in X : [m,y] \text{ tiene subcubrimiento finito}\};$$

nótese que S no es vacío pues $m \in S$ y está acotado así que admite un supremo s. Veamos que $s \in S$, en efecto existe un entorno U_s de s en $\mathcal{C}$, de modo que $s \in (a,b) \subseteq U$. Luego $a < s$, es decir, $a \in S$ así que existe un subcubrimiento $\mathcal{C}_a$ finito de $[m,a]$ y $\mathcal{C}_a \cup \{U_s\}$ es un subcubrimiento finito de $[m,s]$. Similarmente sea U_b un entorno de b en $\mathcal{C}$, luego $\mathcal{C}_a \cup \{U_s, U_b\}$ es un subcubrimiento finito de $[m,b]$, por lo que si $s \neq M$, entonces b contradiciría la maximalidad de s, es decir, necesariamente $s = M$, lo que prueba que X admite un subcubrimiento finito y que es compacto. $\square$

De ésto inmediatamente sigue una generalización del teorema de Heine-Borel:

Teorema 5.104: Un subespacio de un espacio ordenado completo es compacto syss es cerrado y acotado.

Ejemplo 5.105: Sea $X := [0, \omega_1]$ y $Y := [0, \omega_1)$.

1. Como X e Y son espacios ordenados, entonces son completamente normales, sin embargo, nótese que $\{\omega_1\}$ es un cerrado que no es un conjunto G_δ pues tendría que ser la intersección de numerables cerrados que podemos suponer de la forma $\{[\alpha_n, \omega_1]\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $\lim_{n\to\omega_0} \alpha_n = \omega_1$, pero $\operatorname{cf} \omega_1 \neq \omega_0$ por lo que la sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no existe; en consecuencia X no es perfectamente normal.

2. Por el mismo argumento, X no es 1AN pues ω_1 no posee una base de entornos numerable. Sin embargo, Y sí es 1AN pues el único punto con una base de entornos no numerable de X es ω_1, como consecuencia, X no es metrizable. X, Y no son separables pues para toda sucesión numerable $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos siempre existe un intervalo (β, ω_1) que es un abierto que no contiene ningún α_n. Una modificación de éste argumento también permite ver que ni X ni Y son 2AN.

3. X es compacto pues es orden-completo, por el mismo argumento Y no es compacto. Sin embargo, tanto X como Y son secuencialmente compactos. Luego Y no es metrizable (pues todo espacio métrico y secuencialmente compacto es compacto). Además, tanto X como Y son numerablemente compactos, pero como Y no es compacto, entonces Y no es de Lindelöf. Luego X es de Lindelöf, pero no hereditariamente de Lindelöf.

⌟

Éste es otro ejemplo que emplea la noción de cofinalidad:

Ejemplo 5.106 (tabla de Tychonoff)**:** Sea $T := [0, \omega_1] \times [0, \omega_0]$ con la topología usual, llamado la ***tabla de Tychonoff*** y $T_\infty := T \setminus \{\omega_1, \omega_0\}$ con la topología subespacio, llamado la ***tabla reducida de Tychonoff***.

- T es normal: Puesto que $[0, \omega_1]$ y $[0, \omega_0]$ son espacios de Hausdorff compactos, luego T también es de Hausdorff compacto, por ende, es normal.

- T no es completamente normal, dado que T_∞ no es normal: Sean $A := \{\omega_1\} \times [0, \omega_0)$ y $B := [0, \omega_1) \times \{\omega_0\}$. Es fácil comprobar que A, B son cerrados y claramente disjuntos; sin embargo veamos que no poseen entornos disjuntos. En efecto, sea U un entorno de A. Entonces para todo $(\omega_1, n) \in U$ necesariamente existe $\alpha_n < \omega_1$ tal que $(\alpha_n, \omega_1] \times \{n\} \subseteq U$. Sea $\gamma := \lim_{n\to\omega} \alpha_n < \omega_1$ (puesto que ω_1 es un ordinal regular), de modo que $(\gamma, \omega_1] \times [0, \omega_0) \subseteq U$. Pero claramente todo entorno de $(\gamma + 1, \omega_0) \in B$ corta a U, por la caracterización anterior, por lo que T_∞ no es normal.

⌟

Ejemplo 5.107 (tabla de Alexandroff)**:** Sea $X := [0, \omega_1] \times [-1, 1]$ y $p := (\omega_1, 0)$ con la topología cuya base son los abiertos en la topología producto usual junto a los conjuntos de la forma

$$U(\alpha, n) := \{p\} \cup (\alpha, \omega_1] \times (0, 1/n).$$

Nótese que la topología en X es, por definición, más fuerte que la topología producto, que es de Tychonoff, por lo que X es al menos Urysohn. Pero no es regular, dado que $C := (0, \omega_1) \times \{0\}$ es un cerrado (nótese que su complemento es trivialmente un entorno de todo punto distinto de p, y para p basta considerar que $p \in U(0, 1) \subseteq C^c$) y todo entorno de C corta a todo entorno de p. Como X no es regular, tampoco es de Tychonoff. ⌟

Ejemplo 5.108 (sacacorchos de Tychonoff)**:** La construcción del espacio a continuación es complicada, así que recomendamos leerlo con detalle: En primer lugar sea T la tabla reducida de Tychonoff, vale decir, el subespacio $[0, \omega_1] \times [0, \omega_0] \setminus \{(\omega_1, \omega_0)\}$. Luego definamos $P_k := T \times \{k\}$ e $Y := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} P_k$. Pictóricamente cada P_i es el cuadrante del sacacorchos de Tychonoff, de modo que por definición diremos que P_{4k} es el primer cuadrante, P_{4k+1} es el segundo, P_{4k+2} el tercero y P_{4k+3} el cuarto. De momento Y posee únicamente la topología producto, pero ahora definiremos X como un espacio cociente de Y bajo la siguiente relación de equivalencia $\sim$ dada por que:

- Dos puntos que sean iguales.
- $(\Omega, n, 2k) \sim (\Omega, n, 2k + 1)$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$.
- $(\alpha, \omega, 2k + 1) \sim (\alpha, \omega, 2k + 2)$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq \alpha < \Omega$.

Denotamos por $L_k := P_{4k} \cup P_{4k+1} \cup P_{4k+2} \cup P_{4k+3}$. A ésto le sumamos dos puntos a_+ y a_- que son los que están «al final arriba» y «al final abajo» del sacacorchos, y tal que la base de entornos de a_+ es $\bigcup_{k\geq n} L_k$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $\bigcup_{k\leq n} L_k$ para a_-. Denotamos por $Z := X \setminus \{a_-\}$. ⌟

Completar construcción, ver [0, pp. 109–111].

Parte II.

Análisis real

6

Funciones derivadas

6.1 Derivada

Definición 6.1 – *Derivada*: Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y sea $a \in A$ interior a A. Decimos que f es diferenciable o derivable en a si existe

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{6.1}$$

En cuyo caso le decimos a $f'(a)$ la derivada de f en a. f' es la *función derivada* de f que representa la derivada de f en todos los puntos donde dicho valor existe. Si $\operatorname{Dom} f' = \operatorname{Int} A$ entonces decimos que f es derivable (a secas).

También denotaremos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(a) = f'(a)$$

en ciertos casos.

Otra forma de comprender la derivada es que la función, cerca de $f(a)$ se parece a algo de la forma $f(a) + kh$ donde k es constante (y sabemos que es de hecho $f'(a)$). Esta interpretación es útil para generalizar más adelante la noción de derivada.

Teorema 6.2: Si f es diferenciable en a entonces es continua en a.

Demostración: Como f es derivable, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = f'(a)(\lim_{x\to a} x - a) = 0.$$

Por ende $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, por lo que es continua en a. □

Por contrarrecíproca, entonces si f no es continua en a no puede ser diferenciable en a.

Ejemplo. Notemos que trivialmente $f(x) = |x|$ es continua en todo su dominio, no obstante notemos que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1, \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

Por ende $f(x)$ no es diferenciable en 0, pese a que es continua en 0. Esto también nos otorga una buena intuición acerca de que la cualidad de ser diferenciable implica cierto nivel de "suavidad" en el gráfico de una función.

Teorema 6.3 – *Álgebra de derivadas*: Sean f, g aplicaciones entre subespacios de $\mathbb{R}$ tales que son diferenciables en a, luego:

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
2. $(\lambda f)(a) = \lambda f'(a)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
4. Si $g(a) \neq 0$ entonces f/g es diferenciable en a y
$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Demostración: Probaremos el producto, pues el resto son análogas:

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} g(a+h) + f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h} \\
&= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).
\end{aligned}$$ □

Ejemplo. Es fácil probar que la derivada de $f(x) = x$ es 1 y aplicando la derivada del producto se puede probar por inducción que

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\neq 0} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1} \tag{6.2}$$

Luego también sigue que toda función polinómica es diferenciable.

> **Teorema 6.4 – *Regla de la cadena*:** Sean $f : X \to Y$ diferenciable en a y $g : Y \to \mathbb{R}$ diferenciable en $b := f(a)$, luego $f \circ g$ es diferenciable en a y
> $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \circ g)(a) = g'(b)f'(a) = (f \circ g')(a) \cdot f'(a). \tag{6.3}$$

Demostración: Definamos

$$G(k) := \frac{g(b+k) - g(b)}{k} - g'(b).$$

Sobre todos los $k \neq 0$ tales que $b + k \in Y$. Podemos extender continuamente G para que tome el valor 0 en 0, de forma que se cumple

$$g(b+k) - g(b) = (g'(b) + G(k))k$$

Sea $h \neq 0$, entonces $a + h \in X$ y se define $k := f(a+h) - f(a)$, por lo que

$$(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a) = \big(g'(b) + G(f(a+h) - f(a))\big) \cdot (f(a+h) - f(a))$$

Luego dividiendo por h y considerando que $G(0) \to 0$ se deduce el enunciado.

□

> **Definición 6.5 – *Monotonía*:** Se dice que f es creciente (resp. estrictamente creciente, decreciente, estrictamente decreciente) si para todos $x, y \in \operatorname{Dom} f$ se cumple que $x < y$ implica $f(x) \leq f(y)$ (resp. $<$, $\geq$, $>$). Si f es alguna de las anteriores se dice que es monótona. Se dice que f es monótona de algún tipo en torno a a si existe un entorno U de a tal que $f|_U$ es monótona de dicho tipo.
>
> Se dice que $a \in (\operatorname{Dom} f)^{\mathrm{d}}$ es un máximo (resp. mínimo) local si existe algún entorno U de a tal que $f(a)$ es el máximo (resp. mínimo) de $f|_U$. En dichos casos, diremos que a es un extremo local.

Teorema 6.6: Una aplicación real f diferenciable es creciente (resp. decreciente) si su derivada en todo punto es ≥ 0 (resp. ≤ 0). Si la derivada de f es ≥ 0 (resp. > 0, ≤ 0, < 0) entonces es creciente (resp. estrictamente creciente, decreciente, estrictamente decreciente).

Ejemplo. Consideremos $f(x) = x^3$. f es estrictamente creciente, sin embargo, posee derivada $f'(x) = 3x^2$ la cuál es nula en el punto 0, ergo, no toda función estrictamente creciente posee derivada estrictamente positiva.

Teorema 6.7 – *Teorema de la función inversa*: Sea A un intervalo abierto, $f : A \to \mathbb{R}$ inyectiva y diferenciable, entonces $B := f[A]$ es un intervalo abierto, f es el homeomorfismo que prueba $A \simeq B$, y $g := f^{-1} : B \to A$ es diferenciable tal que para todo $b = f(a) \in B$ se cumple que

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}. \tag{6.4}$$

Demostración: Notemos que basta probar que g sea diferenciable (y existe pues si restringimos el codominio a B entonces prueba ser biyectiva). Para ello, como sabemos que su dominio es conexo y es inyectiva, entonces es estrictamente monótona, por ende es fácil probar que B es efectivamente un intervalo abierto. Así mismo puedes considerar la restricción de f a cualquier intervalo abierto para ver que su imagen es otro intervalo abierto, ergo, g es continua (en el sentido topológico, que implica el sentido analítico).

Sea $b \in B$, entonces definimos $k(h) := g(b+h) - g(b)$, luego si $h \neq 0$ entonces $k(h) \neq 0$ por monotonía estricta y luego $a + k = g(b+h)$, por ende, $f(a+k) - b = h$, finalmente se cumple que

$$\frac{g(b+h) - g(b)}{h} = \frac{1}{\frac{f(a+k)-f(a)}{k}}. \tag{6.5}$$

Finalmente por continuidad de g se cumple que $k(0) \to 0$, luego es fácil concluir que el término de la derecha converge a $1/f'(a)$. □

Nótese que si hubiésemos demostrado que g es diferenciable sin calcular su derivada por regla de la cadena habríamos llegado a la misma conclusión.

Ejemplo ($\mathbb{R}$ es homeomorfo a $(-1, 1)$). Para probar que $\mathbb{R} \simeq (-1, 1)$ basta construir dicho homeomorfismo, para lo que elegimos $f(x) := \frac{x}{1-x^2}$ donde $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$. En primer lugar, veamos que f es diferenciable, ya que por cociente de diferenciables se tiene que

$$f'(x) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$$

Es fácil notar que la derivada siempre es estrictamente positiva, luego f es estrictamente creciente en todo el dominio. Por último

$$\lim_{x \to \pm 1} f(x) = \pm\infty$$

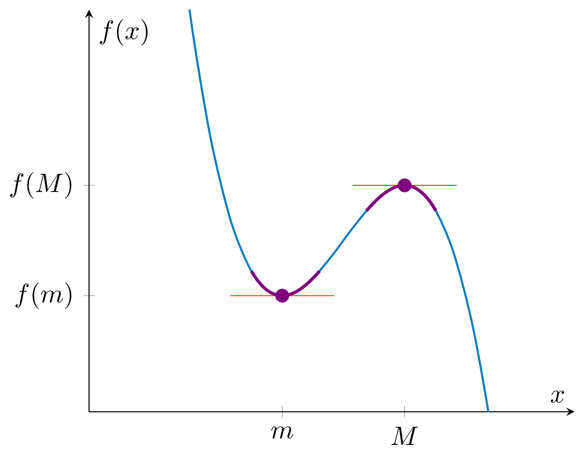


Figura 6.1. Teorema de Fermat.

concluyendo, por teorema de la función inversa, que f es un homeomorfismo.

Nótese que tomando la restricción $f \upharpoonright (0,1)$ se comprueba que $(0,1) \simeq (0,+\infty)$. En consecuencia todo par de intervalos abiertos no vacíos son homeomorfos entre sí.

Teorema 6.8 (Fermat): Todo extremo local de una función diferenciable en dicho punto tiene derivada nula.

Lema 6.9 (Teorema de Rolle): Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que es continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración: Como $[a,b]$ es compacto y f es continua entonces la imagen es compacta, ergo, está acotada y como es cerrada posee máximo M y mínimo m. Si $M = m = f(a) = f(b)$, entonces la función es constante, ergo todo punto tiene derivada nula. Si $f(a) < M$, entonces M es máximo local y es la imagen de algún punto distinto de a, b; ergo, la función es diferenciable en dicho punto y por ende posee derivada nula. El caso es análogo si $M = f(a) > m$. □

Teorema 6.10 – *Teorema de Cauchy*: Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a,b]$ y diferenciables en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ tal

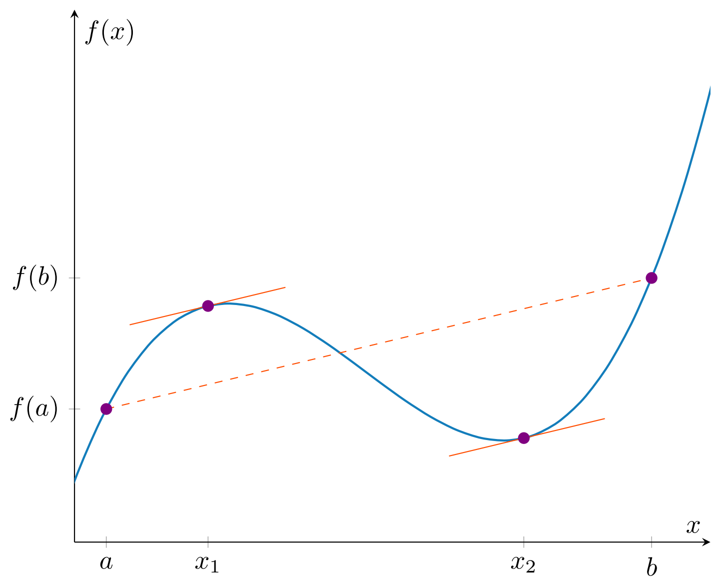


Figura 6.2. Teorema del valor medio.

que
$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

Demostración: Basta considerar la función

$$h(x) := f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)).$$

La cuál cumple con la hipótesis del teorema de Rolle, de la cual se deduce el enunciado. □

Utilizando $g(x) = x$ se obtiene:

Teorema 6.11 – *Teorema del valor medio*: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que:
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema 6.12 (Darboux): Si f es real y diferenciable en $[a, b]$ entonces para todo d entre $f'(a)$ y $f'(b)$ existe c entre a y b tal que $f'(c) = d$.

Demostración: Para esto vamos a seguir similar a como lo hicimos con el teorema del valor medio, i.e., consideraremos caso base $f'(a) \cdot f'(b) < 0$ y probaremos que $f'(c) = 0$ para $c \in (a, b)$.

Sin perdida de generalidad, supongamos que $f'(a) < 0 < f'(b)$ y $f(a) < f(b)$. Como $f'(a) < 0$ existe un punto p cerca de a tal que $f(p) < f(a)$. Como $[a, b]$ es un intervalo cerrado y f es continua en $[a, b]$ (por ser diferenciable), entonces $f[a, b]$ es un intervalo cerrado, y vimos que hay un punto bajo $f(a)$, i.e., $f(a)$ no es el mínimo de $f[a, b]$ y $f(b)$ tampoco, por lo que existe un mínimo local, por ende, posee derivada nula. El resto de casos son análogos o se demuestran de teoremas anteriores.

Para el caso general sea d entre $f'(a)$ y $f'(b)$, luego definamos

$$g(x) := f(x) - d \cdot x.$$

Si $f'(a) < f'(b)$ entonces $g'(a) < 0 < g'(b)$ por lo que existe c tal que $g'(c) = 0$, y finalmente $f'(c) = g'(c) + d = d$. $\square$

Corolario 6.13: Sea $f : I \to \mathbb{R}$, con I un intervalo, una función real y diferenciable, si su derivada es nunca nula, entonces f es inyectiva.

Lema 6.14: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) tal que $f'(c) = 0$, entonces es constante.

Demostración: Tomemos $u < v \in (a, b)$, luego por teorema del valor medio existe $x_0 \in (u, v)$ tal que

$$f'(x_0) = 0 = \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \implies f(u) = f(v)$$

luego, se comprueba para todo par en (a, b) y por continuidad también para a y b. $\square$

Teorema 6.15: Sean $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciables en un intervalo I. $f' = g'$ syss $f = g + k$ con $k \in \mathbb{R}$.

Definición 6.16 – *Concavidad y convexidad*: Se dice que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es convexa o cóncava resp. si para todo $a < x < y < b$ y todo $0 < \lambda < 1$ se cumple que

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

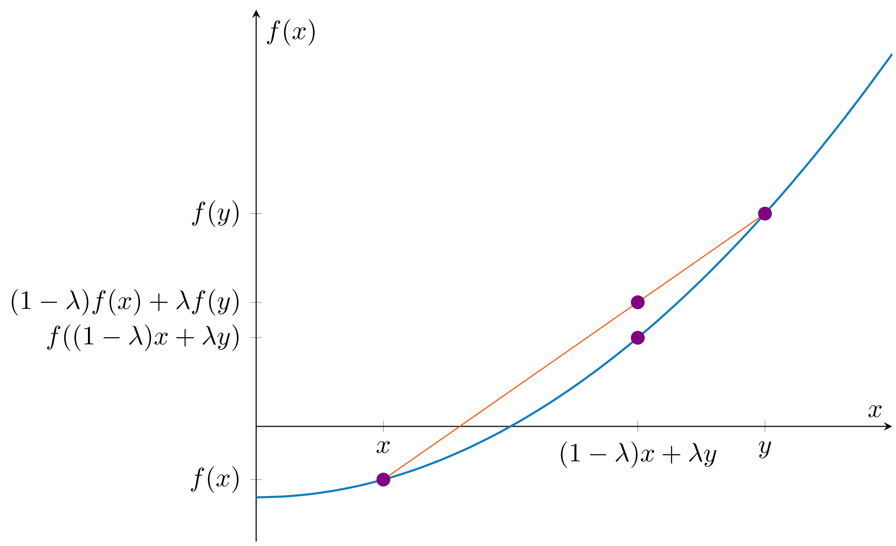


Figura 6.3. Función convexa.

o

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \geq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$$

respectivamente.

Nótese que dado $z := (1-\lambda)x+\lambda y = x+\lambda(y-x)$, la condición de convexidad se puede reescribir como que

$$f(z) \leq \frac{y-z}{y-x}f(x) + \frac{z-x}{y-x}f(y)$$

Proposición 6.17: Una función es convexa si cumple cualquiera (y por ende todas) de las tres desigualdades siguientes:

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

Es cóncava si cumple cualquiera de las desigualdades anteriores cambiando $\leq$ por $\geq$.

Teorema 6.18: Si una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es diferenciable y su derivada es creciente (resp. decreciente), entonces la función es convexa (resp. cóncava).

DEMOSTRACIÓN: Como f es diferenciable, por el teorema del valor medio existen a, b tales que para todo $x < a < z < b < y$ se cumple, por monotonía de la derivada:

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(a) \leq f'(b) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}. \qquad \square$$

Corolario 6.19: Dada una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tal que es diferenciable y su derivada es diferenciable (que denotaremos f''). f es convexa (resp. cóncava) syss la derivada de su derivada es positiva (resp. negativa).

Por ejemplo una función cuadrática $ax^2 + bx + c$ es convexa si $a > 0$ y cóncava si $a < 0$.

6.2 Aplicaciones de la derivada

§6.2.1 Regla de L'Hôpital. La regla de L'Hôpital es una de las técnicas más comunes de cálculo de límites, sin embargo, cabe notar que en realidad no es una sino varias reglas las cuales requieren demostraciones individuales según el caso:

Teorema 6.20: Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferenciables tales que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ y que g, g' sean no nulas en todo el dominio. Se cumple que

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

DEMOSTRACIÓN: Extendamos f, g a $[a, b)$ con $f(a) = g(a) := 0$ para conservar continuidad. Por teorema de Cauchy, para todo $x \in (a, b)$ se cumple que existe $c \in (a, x)$ tal que

$$(f(x) - f(a))g'(c) = f(x)g'(c) = g(x)f'(c) = (g(x) - g(a))f'(c).$$

Y como $g(x) \neq 0 \neq g'(c)$, entonces se reescribe como

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Por definición de límite real se cumple que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $a < c < a + \delta$ implica

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| < \epsilon.$$

Luego para todo $a < x < a + \delta$ existe un $a < c < x < a + \delta$ tal que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| < \epsilon.$$

Lo que es la definición de límite. $\square$

Nótese que los métodos utilizados nos permiten fácilmente adaptar el teorema si $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0$. Utilizando ambas calculamos los límites laterales, por ende, el método también funciona si consideramos $a \in A$ un intervalo abierto.

Algo común es que la regla de L'Hôpital se suele aplicar recursivamente, es decir, cuando el límite no se facilita al derivar una vez, se suele aplicar varias veces la regla de L'Hôpital hasta que el límite queda lo suficientemente sencillo.

Teorema 6.21: Sean $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ con $a > 0$ funciones diferenciables tales que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ y que g, g' sean no nulas en todo el dominio. Se cumple que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Demostración: Definamos $F, G : (0, 1/a) \to \mathbb{R}$ como $F(x) := f(1/x)$ y $G(x) := g(1/x)$, luego, claramente F, G son diferenciables y cumplen que $\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} G(x) = 0$. Notemos que

$$\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)}.$$

Luego, se cumple que

$$\lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = L,$$

por la regla de L'Hôpital ya demostrada, se cumple que

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{G(x)} = L = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$ $\square$

Una técnica similar se utiliza para probar el caso en que $x \to -\infty$.

Teorema 6.22: Sean $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ con $a > 0$ funciones diferenciables tales que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ y que g, g' sean no nulas en todo el dominio. Se cumple que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Demostración: Sea $\epsilon > 0$, entonces por definición de límite existe $M > 0$ tal que para todo $x > M$ se cumple que

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \epsilon.$$

Notemos que como g' nunca se anula y $g(+\infty) \to +\infty$, entonces g es estrictamente creciente. Luego, por teorema de Cauchy existe $y \in (M, x)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(M)}{g(x) - g(M)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

De modo que, para todo $x > M$ se cumple que

$$\left| \frac{f(x) - f(M)}{g(x) - g(M)} - L \right| < \epsilon.$$

Finalmente, notemos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(M)}{g(x) - g(M)} \cdot \frac{f(x)}{f(x) - f(M)} \cdot \frac{g(x) - g(M)}{g(x)}.$$

donde los dos últimos factores convergen a 1, luego los detalles a completar quedan al lector para comprobar que se cumple el enunciado. □

Nuevamente, casos con alteraciones a los signos derivan fácilmente de lo probado hasta ahora.

Teorema 6.23: Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ con $a > 0$ funciones diferenciables tales que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ y que g, g' sean no nulas en todo el dominio. Se cumple que

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

En síntesis podemos decir que la regla de L'Hôpital nos permite aplicar derivadas cuando hayan límites de la forma $0/0$ o ∞/∞.

Ejemplo sencillo. Mediante la regla de L'Hôpital es fácil probar que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

§6.2.2 Series de potencias. Supongamos que tenemos una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de reales. Luego queremos definir una función f tal que

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

a las que llamaremos *series de potencias*.

Teorema 6.24: Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{K}$, entonces definiendo

$$r := \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(con el criterio de que $r = \infty$ si el límite en el denominador es nulo) se cumple que su serie de potencias converge en $B_r(0)$ (con el convenio de que $B_\infty(0) = \mathbb{K}$).

Pista: Basta aplicar el criterio de la raíz de Cauchy. □

Teorema 6.25: Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones reales de clase $C^1\big((a,b)\big)$ que convergen uniformemente a f. Si (f_n') es una sucesión que converge uniformemente a g, entonces f es $C^1\big((a,b)\big)$ y $f' = g$.

Demostración: Fijemos un $c \in (a,b)$, entonces definimos

$$F_n^c(x) := \begin{cases} \frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c}, & x \neq c \\ f_n'(c), & x = c \end{cases} \qquad F^c(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}, & x \neq c \\ g(c), & x = c \end{cases}$$

El que las $f_n \in C^1$ implica que $F_n^c \in C^0$. Como el espacio de continuas acotadas con convergencia uniforme es completo (respecto a la métrica de Cebyshev) basta probar que las F_n^c formen una sucesión de Cauchy para ver que convergen uniformemente a F^c (pues convergen puntualmente a F^c).

Sea $\epsilon > 0$. Queremos que se cumpla que $|F_n^c(x) - F_m^c(x)| < \epsilon$ para lo cual debemos contemplar dos casos: $x = c$ y $x \neq c$. Aquí entra la convergencia uniforme de las derivadas: sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq n_0$ y todo x se cumpla que $|f_n'(x) - f_m'(x)| < \epsilon$; entonces claramente se cumple nuestra condición en c.

Fuera de c se obtiene que

$$|F_n^c(x) - F_m^c(x)| = \left| \frac{[f_n(x) - f_m(x)] - [f_n(c) - f_m(c)]}{x - c} \right|,$$

luego como $(f_n - f_m)$ es una función diferenciable, por el teorema del valor medio existe y entre c y x tal que

$$|F_n^c(x) - F_m^c(x)| = |(f_n - f_m)'(y)| < \epsilon$$

donde la última desigualdad emerge de que $n, m \geq n_0$. □

Definición 6.26 – *n-ésima derivada*: Sea f una función real diferenciable sobre un abierto A, se define recursivamente su n-ésima derivada (si existe) como $f^{(n)}(x)$, donde

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n)}(x),$$

además, la solemos anotar como

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x).$$

Se denota $C^n(A)$ a la clase de funciones de dominio A que poseen n-ésima derivada y que ésta cumple ser continua. Diremos que f es de clase C^∞ si f es de clase C^n para todo n natural.

Es fácil notar que para todo $k \leq n$ naturales se cumple que una función de clase C^n es C^k. Toda función que posee $n+1$-ésima derivada es de clase C^n. Otra propiedad que ya hemos probado es que la suma y producto de funciones de clase C^n es C^n, luego $C^n(A)$ es un dominio (como estructura algebraica). Notemos que hasta ahora podemos comprobar que las funciones polinómicas, las exponenciales y los logaritmos son de clase C^∞.

Ejemplo. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Luego se puede probar que es diferenciable y que su derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

No obstante, $f'(x)$ es discontinua en 0, luego no toda derivada es continua.

Una observación es que el teorema de Darboux nos indica que las discontinuidades de una función derivada no puede ser de cualquier tipo, por ejemplo, es imposible que una función posea derivada algo como 0 en todo $\mathbb{R}_{\neq 0}$ y 1 en 0, en su lugar, la discontinuidad anterior corresponde a algo que se le dice una discontinuidad oscilante, en este sentido vemos que la derivada podría tener derivada en cualquier punto entre -1 y 1.

Aquí recordamos nuestro conocimiento de series y las aplicamos sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K}$ es métrico, ejemplos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$).

Lema 6.27: La serie de potencias $f : A \subseteq \mathbb{K} \to \mathbb{K}$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kz^k$$

tiene radio de convergencia 1.

Lema 6.28: Sea $f : A \subseteq \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ la serie de potencias

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

entonces la serie de potencias

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

tiene el mismo radio de convergencia.

Demostración: Sean $|v| < |w|$.

I) <u>Si $g(w)$ converge abs., entonces $f(w)$ también:</u> Sigue del criterio de comparación puesto que

$$|a_k w^k| \leq |k a_k w^{k-1}| \cdot |w|,$$

donde claramente $|w| < \infty$.

II) <u>Si $f(w)$ converge abs., entonces $g(v)$ también:</u> Por el lema anterior sabemos que $\sum_{k=1}^{\infty} k|v/w|^k$ converge, de modo que $(k|v/w|^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión real acotada superiormente, digamos por M; es decir,

$$k\left|\frac{v}{w}\right|^k \leq M \iff \frac{k}{|w|^k} \leq \frac{M}{|v|^k}$$

por lo tanto

$$\left|ka_k|v|^{k-1}\right| = |a_k|\,|v|^{k-1}\frac{k}{|w|^k}|w|^k \le |a_k w^k| \cdot \frac{M}{|v|}$$

por lo que, por el criterio de comparación, se cumple que $g(v)$ converge abs. □

Teorema 6.29: Si $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ es la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

entonces es diferenciable y

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Es más, de hecho es $C^\infty\big((-r, r)\big)$ y se cumple que $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Demostración: Sea $x \in (-r, r)$ no nulo. Entonces basta considerar $R := \frac{r+|x|}{2} \in (0, r)$ para ver que $f \restriction [-R, R]$ puede ser visto como el límite uniforme de las sumas parciales, las que convergen uniformemente a la derivada por el lema anterior y por ende $f'(x)$ es lo que señala el enunciado. □

En el siguiente capítulo veremos una aplicación de las series de potencias.

§6.2.3 Expansión de Taylor. No es casualidad de que en la subsección anterior se vieran las series de potencias. Vimos que si una función era una serie de potencias, entonces es infinitamente diferenciable y podemos obtener de hecho sus coeficientes mediante derivadas, Taylor vió que era posible aplicar el truco incluso cuando las funciones no son ni series de potencias ni infinitamente diferenciables, pero con un cierto grado de error.

Definición 6.30 – *Expansión de Taylor*: Sea A un intervalo y $f : A \to \mathbb{R}$ una función n-veces diferenciable en un punto $a \in A$, definimos la expansión o el polinomio de Taylor de f de grado a lo más n como

$$T_a^n f(x) := \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots \tag{6.6}$$

La expansión de Taylor nos otorga una aproximación de f cerca de a, en general se admite que

$$R_f(x) := f(x) - T_a^n f(x).$$

A cuya función le decimos el *error*. Notemos que el error es siempre continuo cerca de a.

Lema 6.31: Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase C^n y $a \in D$, nótese que para todo k entero tal que $0 \le k \le n$ se cumple

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[T_a^n f(a)] = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(a).$$

Demostración: Construyamos la función polinómica

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k,$$

veamos que $g(a) = c_0$, para las derivadas tenemos que

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot c_k (x-a)^{k-1},$$

es decir, que $g'(a) = c_1$. Luego

$$g''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) c_k (x-a)^{k-2},$$

es decir, que $g''(a) = 2c_2$. Luego

$$g^{(3)}(x) = \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2) c_k (x-a)^{k-3},$$

por lo tanto, $g^{(3)}(a) = 3 \cdot 2c_3 = 3!c_3$. Por inducción para todo $k \le n$ se cumple que $g^{(k)}(a) = k!c_k$, para lo cual consideramos $c_k = f^{(k)}(a)/k!$ de forma que se cumple que $g^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$. □

En particular puede ver porque a los matemáticos nos gusta está expansión, pues las funciones polinómicas son siempre más fáciles de trabajar o son más *familiares* para nosotros. Nótese que si f es una función polinómica de grado k, para todo $r \in \mathbb{R}$ se cumple que $T_r^k f(x) = f(x)$.

Teorema 6.32 – *Teorema de Taylor*: Sea $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ de clase C^{k+1}. Sea $u \in I$, entonces para todo $v \in I$ existe c entre u y v tal que

$$f(v) = T_u^k f(v) + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(v-u)^{k+1}.$$

Demostración: No perdemos generalidad suponiendo que $u < v$. Luego definimos $g : [u, v] \to \mathbb{R}$ como

$$g(x) = f(v) - T_x^k f(v),$$

tal que su derivada es

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x) = -\frac{(v-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x).$$

Además, definamos $h : [u, v] \to \mathbb{R}$ como

$$h(x) = g(x) - \left(\frac{v-x}{v-u}\right)^{k+1} g(u).$$

Tal que $h(u) = h(v) = 0$, por teorema de Rolle existe un $c \in (u, v)$ tal que $h'(c) = 0$, es decir:

$$h'(c) = g'(c) + (k+1)\frac{(v-c)^k}{(v-u)^{k+1}} g(u) = 0$$

Despejando $g(u)$:

$$\begin{aligned} g(u) &= -\frac{1}{k+1}\frac{(v-u)^{k+1}}{(v-c)^k} g'(c) \\ &= \frac{1}{k+1}\frac{(v-u)^{k+1}}{\cancel{(v-c)^k}}\frac{\cancel{(v-c)^k}}{k!} f^{(k+1)}(c) \\ &= \frac{(v-u)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c). \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} g(u) = f(v) - T_u^k f(v) &= \frac{(v-u)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c) \\ \implies f(v) &= T_u^k f(v) + \frac{(v-u)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c). \end{aligned}$$

Que es lo que se quería demostrar. □

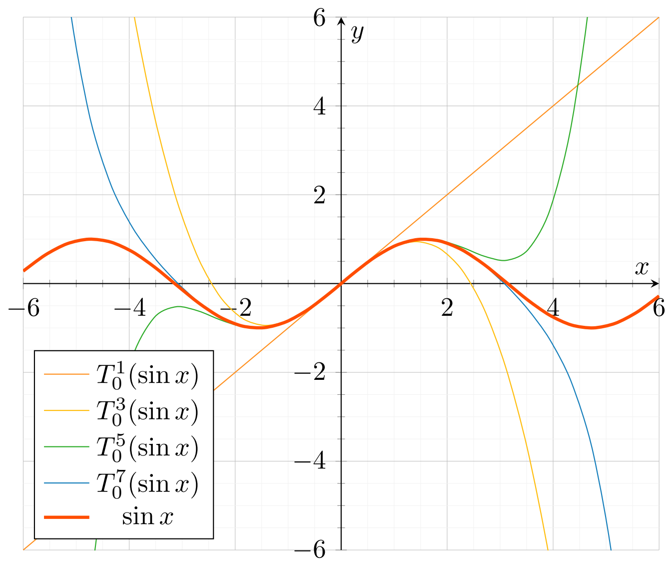


Figura 6.4. Aproximación por serie de Taylor de $\sin x$.

Notemos que el término final viene a representar el grado de error en la expansión de Taylor, pero puede ser nulo. Para ello basta ver lo siguiente:

Teorema 6.33: Sea $f : A \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ donde $a \in A$ es un intervalo abierto. Luego si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in A$ se cumple que

$$\left| \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) \right| \le M^n$$

Entonces se cumple que

$$T_a^\infty f(x) = f(x).$$

El teorema anterior nos da un criterio para saber cuando aplicar el teorema de Taylor, pero algo curioso es que implicita que puede darse que no toda función incluso de clase C^∞ sea aproximable por Taylor. A ésta clase de funciones se les dice *analíticas* y se estudiarán más adelante.

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}_{\neq 1} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) := \frac{1}{1-x}.$$

Notemos que

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Por lo que, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1 - x}.$$

Notemos que el término de la derecha converge a 0 para todo $|x| < 1$, por ende,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1$$

Luego la expansión de Taylor de f cerca de 0 es esa. Ésta fórmula nos será útil más adelante.

Teorema 6.34: Sea f una función real tal que es n-veces diferenciable en a con $f^{(n)}(a)$ siendo la primera derivada no nula de a:

1. Si n es par y $f^{(n)}(a)$ es positivo (resp. negativo) entonces a es un mínimo (resp. máximo) local.
2. Si n es impar entonces a no es ni máximo ni mínimo local.

PISTA: Es una aplicación de la expansión de Taylor aplicando la continuidad del error. □

6.3 Cálculo de derivadas

§6.3.1 Exponencial y logaritmos. Como definimos en la sección sobre series denotaremos

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

La cual pretende ayudarnos a definir formalmente la noción de exponencial. En primer lugar:

Proposición 6.35: Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y). \tag{6.7}$$

Pista: Aplicar el producto de Cauchy, pues vimos que la serie exponencial es absolutamente convergente. □

De esto se concluyen varias cosas muy importantes:

Proposición 6.36: Se cumple que:

1. exp es siempre no-nula y positiva.
2. exp es estrictamente creciente.
3. Se cumple que

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0.$$

Teorema 6.37: $\exp(x)$ es diferenciable en $\mathbb{R}$ y se cumple que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp(x) = \exp(x). \tag{6.8}$$

Corolario 6.38: $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ es una biyección continua. Luego posee inversa $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ llamada *logaritmo natural*. Además su inversa es diferenciable en todo su dominio y tiene derivada

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x}. \tag{6.9}$$

Por ende, exp es un homeomorfismo.

Definición 6.39 – *Funciones exponenciales*: Sea $a > 0$ denotaremos

$$a^x := \exp(x \cdot \ln a).$$

Proposición 6.40: Para todo $a > 0$ se cumple que

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad a^1 = a.$$

Además, $a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ es siempre diferenciable y para todo $a \neq 1$ se cumple que es un homeomorfismo cuya inversa denotamos por $\log_a(x)$ y llamamos *logaritmo en base a*.

Proposición 6.41 (Propiedades de los logaritmos): Para todo $1 \neq a > 0$:

1. $a^0 = 1$ y $\log_a 1 = 0$.

2. $(a^x)^y = a^{xy}$.

3. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ con $x, y > 0$.

4. $\log_a(x^y) = y \log_a x$ con $x > 0$.

5. $$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

   con $x, b > 0$ y $b \neq 1$. En particular,

   $$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

6. Si $a, b > 0$ tales que $a^n = b$, entonces $a = \sqrt[n]{b}$ y $n = \log_a(b)$.

Mediante las exponenciales podemos probar que para todo $r \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^r) = rx^{r-1}, \tag{6.10}$$

para $x > 0$.

Mediante la regla de L'Hôpital se puede probar que para todo $\alpha > 1$ y $\beta > 1$ se cumple que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0.$$

Proposición 6.42: Se cumple:

1. Si $\alpha > 1$ y $\beta > 0$, entonces las series

   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$$

   convergen.

2. Si $\alpha = 1$, entonces las series

   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^\beta n}$$

   convergen syss $\beta > 1$ (en particular, para $\beta = 1$ diverge).

3. Si $\alpha \in (0,1)$, entonces para todo $\beta > 0$ las series
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$$
divergen.

Pista: Basta aplicar los criterios de comparación y de condensación de Cauchy. □

Definición 6.43: Le llamamos constante exponencial e a $\exp(1)$, o número de Euler, y vale
$$e \approx 2{,}71828182845904523536...$$

Lema 6.44: Para $n \geq 4$ se cumple que $2^n < n!$

Pista: La demostración es por inducción usando que $2^4 = 16 < 24 = 4!$ □

Proposición 6.45: Se cumple que

1. $\displaystyle\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$
2. $2 < 8/3 < e < 67/24 < 3.$

Demostración:

1. Como ln es una función continua podemos aplicar ln a ambos lados y queda probar que
$$\lim_n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_n n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_n \frac{\ln(1 + 1/n)}{1/n} = 1.$$
Para demostrar la última igualdad basta aplicar la regla de L'Hôpital:
$$\lim_n \frac{\ln(1 + 1/n)}{1/n} = \lim_n \frac{\frac{1}{1+1/n} \cdot \frac{-1}{n^2}}{\frac{-1}{n^2}} = \lim_n \frac{1}{1 + 1/n} = 1.$$

2. Como la definición de e es una suma positiva, entonces podemos usar sumas parciales para acotar e por abajo, de lo que se deduce que $2 < e$. Para acotarlo por arriba, entonces notamos que
$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$

$$
\begin{aligned}
&< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots \\
&= \frac{8}{3} + \frac{1}{2^4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) = \frac{8}{3} + \frac{1}{8} = \frac{67}{24} < 3. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Teorema 6.46: e es irracional.

Demostración: Supongamos por contradicción que $e = p/q$ para algún $p, q \in \mathbb{N}$, por la segunda propiedad anterior sabemos que $q > 3$. Por definición veamos que

$$e = \frac{p}{q} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \cdots$$

luego si multiplicamos ambos lados por $q!$, se obtiene que

$$q!e - 2q! - \frac{q!}{2!} - \frac{q!}{3!}1 \cdots - \frac{q!}{q!} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots$$

Claramente los términos del lado izquierdo son todos enteros, luego el lado derecho también debería serlo, probaremos que no es así. Para ello usaremos que

$$0 < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \cdots = \frac{1}{q} < 1.$$

Lo que concluye la contradicción. $\square$

Cálculo de los logaritmos. Por una de las propiedades vista pudimos notar que basta con poder encontrar una forma de calcular $\ln x$ y podremos tener una forma de calcular $\log_a x$. Se sabe que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x} \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(1+x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}.$$

Luego, podemos calcular la derivada de $\ln(x)$ cuando $0 < x \leq 2$. Notemos que la siguiente función:

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

Cumple que $f'(x) = \ln'(x+1)$ para $|x| < 1$. Luego, como vimos, $f(x) = k + \ln(x+1)$ por compartir derivadas. En este caso, $k = 0$ pues para $x = 0$ se comprueba la igualdad, es decir, que

$$\ln(x+1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad |x| < 1.$$

Por criterio de Leibniz, la expresión también converge para $x = 1$ lo que nos da

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

conocida como la *serie harmónica alternante*. Sin embargo, ésta expresión converge muy lentamente, así que veamos de qué otras maneras podemos explotar las propiedades del logaritmo.

Notemos que como $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$, entonces por regla de la cadena se cumple que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2^x) = 2^x \cdot \ln 2$. Ya hemos visto que $\ln 2 > 0$, por ende, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2^x) > 0$, ergo, 2^x es estrictamente creciente, además de que $\lim_n 2^{-n} = 0$; por ende, para todo $x > 0$ positivo existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$2^n \leq x < 2^{n+1} \implies 1 \leq \frac{x}{2^n} < 2.$$

Y por propiedades de los logaritmos naturales se cumple que $\ln(x/2^n) = \ln x - n \ln 2$. Mediante éste método se puede calcular siempre el logaritmo natural de cualquier real. Nótese que el 2 no tiene nada de especial y se puede iterar el procedimiento utilizando cualquier real entre 1 y 2.

Usando esa formula podemos intentar calcular el logaritmo natural de $3/2$ para el cual sólo sumando los primeros 40 y 41 términos se obtiene 0,405465108108157 y 0,405465108108168 resp. (certeza sobre los primeros 13 decimales). Como $3/2 < 2 < (3/2)^2 = 9/4$ se cumple que $\ln 2 = \ln(4/3) + \ln(3/2)$, y $\ln(4/3) \approx 0{,}2876820724517808458564616$ (25 decimales de precisión con sólo 30 sumandos), por lo tanto,

$$\ln 2 \approx 0{,}6931471805599451752044615...$$

§6.3.2 Funciones trigonométricas. En geometría se definen las funciones sin, cos, tan en base a una construcción con el círculo unitario. Por ende nos gustaría saber si son diferenciables y cuál sería su derivada.

En primer lugar asumiremos que son diferenciables[1] en 0, notemos que cos toma un valor máximo local de 1 en dicho punto, luego por el teorema de Fermat ha de tener derivada nula. Por ende, el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0. \tag{6.11}$$

[1]Usualmente se suele calcular a mano el límite de la derivada de seno, pero esto es tan informal como asumir de antemano que es diferenciable, pues asume, de forma incluso peor, que se conoce la fórmula del área de un sector circular, lo que es paradójico, pues esos mismos libros suelen hacer el cálculo *a posteriori*.

Notemos que sin es creciente al rededor de 0, luego si posee derivada no nula entonces vale $\sin'(0) = k > 0$, pero notemos que por regla de la cadena, entonces debería de cumplirse que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x/k)\bigg|_{x=0} = 1.$$

Luego, se redefinen las funciones trigonométricas para que la derivada en 0 de seno valga 1, es decir, que el límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1. \tag{6.12}$$

Finalmente, resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \sin h\cos x - \sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\cos x\cdot\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\cdot\frac{\sin h}{h} = \cos x. \qquad (6.13)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\cos x\cdot\frac{\cos h - 1}{h} + (-\sin x)\cdot\frac{\sin h}{h} = -\sin x. \qquad (6.14)
\end{aligned}$$

Para el resto de límites trigonométricos basta aplicar el álgebra de derivadas:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) = \frac{\sin' x\cos x - \sin x\cos' x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x. \tag{6.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cot x) = -\frac{\tan' x}{\tan^2 x} = -1 - \cot^2 x = -\csc^2 x.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec x) = \tan x\cdot\sec x, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\csc x) = -\cot x\cdot\csc x.$$

Esto nos permite deducir por ejemplo en qué puntos las funciones trigonométricas son (o no son) continuas.

Además, queda al lector explicar por qué

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Veamos que se cumple que

$$\sin 0 = 0, \quad \sin'(0) = \cos 0 = 1, \quad \sin''(0) = -\sin 0 = 0,$$

$$\sin^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1, \quad \sin^{(4)}(0) = \sin 0 = 0.$$

De aquí es obvia la periocidad de las derivadas en 0 de la función seno, luego podemos describir la función mediante la expansión de Taylor. Pero eso no es todo, sino que como las derivadas de sin y cos son alguna de ellas con un posible cambio de signo entonces su valor absoluto está siempre acotado por $M = 1$, por lo cual, son iguales a su expansión de Taylor en todo el dominio, en particular:

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \sin^{(k)}(0) \cdot \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sin^{(2k+1)}(0) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad (6.16)\\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \cos^{(k)}(0) \cdot \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \cos^{(2k)}(0) \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad (6.17)\end{aligned}$$

Cálculo de π. En primer lugar vamos a definir a π como el valor tal que su mitad es la primera raíz de la función coseno. Nótese que como, por definición $\cos(\pi/2) = 0$, entonces en particular $\sin(\pi/2) = 1$ (por identidad trigonométrica y la cualidad de ser la primera raíz). Por suma de ángulos se tiene que

$$\sin \frac{\pi}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{4} = 0.$$

De ambas se concluye que $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, por ende se cumple que $\tan(\pi/4) = 1$.

La función tan es bastante interesante, notemos que su derivada es siempre mayor o igual que 1, por ende es una función estrictamente creciente. También como se sabe que el primer cero de la función cos se da en $\pi/2$, se puede concluir fácilmente que $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ es una biyección, y como es también diferenciable, por teorema de la función inversa se cumple que su inversa $f(x)$ ha de satisfacer:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{1}{\tan'(f(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(f(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Usualmente se acostumbra escribir las inversas de las funciones trigonométricas con el prefijo *arc-*, i.e., $\arctan x := f(x)$, esto se hace sobretodo para evitar confusiones sobre si $\tan^{-1}$ representa la función inversa o la inversa multiplicativa de la función tan.

Notemos que ya demostramos que la derivada de $\arctan x$ es $\frac{1}{1+x^2}$, pero también:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k},$$

cuando $x \in (-1,1]$. Luego se cumple que

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

posee la misma derivada que $\arctan(x)$ en $(-1,1]$ y comparten valores en 0, luego son iguales en ese dominio. Finalmente, sabemos que arctan es inyectiva y $\tan(\pi/4) = 1$, por ende se concluye que

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right).$$

Esta se conoce como la *fórmula de Leibniz*, no obstante, al igual que con la fórmula para $\ln 2$ es extremadamente lenta e ineficaz; por lo que vamos a recurrir a las llamadas fórmulas de Machin[2]:

Nótese que

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}\right) = \frac{1/2+1/3}{1-1/2\cdot 1/3} = \frac{5/6}{1-1/6} = 1.$$

Luego $\pi = 4(\arctan(1/2) + \arctan(1/3))$, donde esta fórmula es más fácil de evaluar pues los valores son menores. Similarmente podemos notar que

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{1}{3}\right) = \frac{1/7+1/3}{1-1/3\cdot 1/7} = \frac{10/21}{1-1/21} = \frac{1}{2}.$$

Luego nos queda que

$$\pi = 4\left(2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}\right).$$

Cuya convergencia se describe en la fig. 6.5.

[2]Originalmente, Machin propone que $\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)$. En su honor, todas las fórmulas que describen $\pi/4$ como la suma de arco-tangentes de ángulos pequeños llevan su nombre, en ésta página se describen varias fórmulas de tipo Machin.

1	3.1354425368030809373	9	3.1415926535567266775
2	3.1420744981576116395	10	3.1415926535931451014
3	3.1415512358677064597	11	3.1415926535894507232
4	3.1415964071156099457	12	3.1415926535898281990
5	3.1415923014558742032	13	3.1415926535897895633
6	3.1415926874439574767	14	3.1415926535897935601
7	3.1415926502749842442	15	3.1415926535897931160
8	3.1415926539189968913	16	3.1415926535897931160

Figura 6.5. Cálculo de π.

6.4 Integración de Riemann

En esencia, la integral viene a representar (en el caso de funciones reales), el área *signada* bajo la curva de una función. Las definiciones tras las integrales son diversas y han evolucionado al punto de desarrollarse tal vez la más potente de todas por Lebesgue que se describe en un capítulo posterior, pero debido a la simpleza, la definición de Darboux-Riemann también ha adquirido fuerza y popularidad; en esta sección la tratamos de forma superficial (a comparación a otros textos) y si bien se recomienda la segunda, éste capítulo pretende otorgar cierta intuición previa que además podremos vincular a la noción de diferenciabilidad.

Definición 6.47: Si $f : [a_1, a_n] \to \mathbb{R}$ es una función real y $P = \{a_1, \dots, a_n\}$ donde $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, entonces se definen las sumas inferiores y superiores de f sobre P como

$$s(f, P) := \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{ínf}\big(f[a_i, a_{i+1}]\big)(a_{i+1} - a_i),$$
$$S(f, P) := \sum_{i=1}^{n-1} \sup\big(f[a_i, a_{i+1}]\big)(a_{i+1} - a_i).$$

Se escribe $P \in \Pi(a, b)$ si P es finito y $\operatorname{mín} P = a$ y $\operatorname{máx} P = b$.

Proposición 6.48: Si f es una función real y $P \in \Pi(a, b)$, entonces:

1. $s(f, P) \le S(f, P)$.

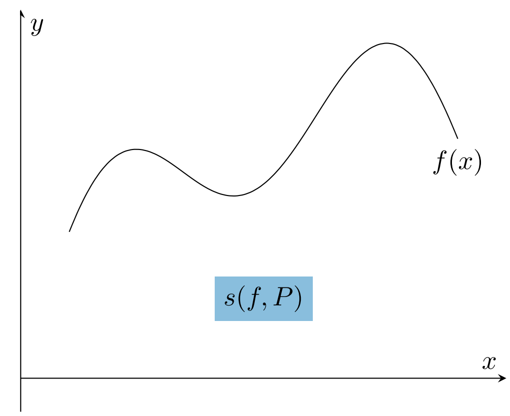


Figura 6.6. Suma inferior de Riemann.

2. Si $P \subseteq Q \in \Pi(a, b)$, entonces

$$s(f, P) \leq s(f, Q) \quad S(f, Q) \leq S(f, P).$$

3. Si $Q \in \Pi(a, b)$, entonces $s(f, P) \leq S(f, Q)$.

Demostración: Para la última simplemente basta considerar $R := P \cup Q$ y ver que $P, Q \subseteq R$ tal que $s(f, P) \leq s(f, R) \leq S(f, R) \leq s(f, Q)$. □

Definición 6.49 – *Integral de Riemann*: Si f es una función real acotada en $[a, b]$, entonces se define:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{s(f, P) : P \in \Pi(a, b)\},$$
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{S(f, P) : P \in \Pi(a, b)\}.$$

f se dice Riemann-integrable en $[a, b]$ si los valores de arriba concuerdan, en cuyo caso se denota

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

denotamos por $\mathcal{R}(a,b)$ al conjunto de funciones Riemann-integrables en $[a,b]$.

Proposición 6.50: Si f es una función real acotada en $[a,b]$, entonces siempre se cumple que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ejemplo 6.51 (función de Dirichlet)**:** Sea

$$f(x) := \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

entonces $f(x)$ es discontinua en todo punto de su dominio (de hecho, no existen límites en ningún punto de su dominio tampoco) y no es Riemann-integrable en ningún intervalo pues

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \overline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Sin embargo, más adelante se comprueba que sí es Lebesgue-integrable. ⌟

Teorema 6.52: Si f es una función real, entonces es $f \in \mathcal{R}(a,b)$ syss para todo $\epsilon > 0$ existe $P \in \Pi(a,b)$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$.

Demostración: $\Longrightarrow$. Sea $\epsilon > 0$ y llamemos $I := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Luego, por definición existe $Q \in \Pi(a,b)$ tal que $I - \epsilon/3 \le s(f,Q)$ y existe $R \in \Pi(a,b)$ tal que $S(f,R) \le I + \epsilon/3$. Sea $P := Q \cup R \in \Pi(a,b)$, luego $I - \epsilon/3 \le s(f,P) \le S(f,P) \le I + \epsilon/3$, ergo, $S(f,P) - s(f,P) \le \frac{2}{3}\epsilon < \epsilon$.

$\Longleftarrow$. Para que sea Riemann-integrable basta probar que

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Y nótese que $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le S(f,P)$ y $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \ge s(f,P)$ para todo $P \in \Pi(a,b)$, luego

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le S(f,P) - s(f,P).$$

Y dado que la diferencia es menor que cualquier epsilon positivo, y sabemos que la diferencia no puede ser estrictamente negativa, sólo puede ser cero. □

Teorema 6.53: Si f es continua en $[a,b]$, entonces es Riemann-integrable en $[a,b]$.

Pista: Usar la continuidad uniforme. □

Teorema 6.54: Si $f,g \in \mathcal{R}(a,b)$ entonces:

1. $f+g \in \mathcal{R}(a,b)$ y
$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que $\lambda f \in \mathcal{R}(a,b)$ y
$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
4. $|f| \in \mathcal{R}(a,b)$ y
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$
5. El producto $(f \cdot g)$ es Riemann-integrable en $[a,b]$.

Demostración: Probaremos el último solamente: Notemos que la expresión $S(f,\{a,b\}) - s(f,\{a,b\})$ es realmente el supremo valor de $|f(x)-f(y)|$ con $x,y \in [a,b]$. Luego, veamos que

$$\begin{aligned} |(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(y)| &\leq |f(x)|\,|g(x)-g(y)| + |g(y)|\,|f(x)-f(y)| \\ &\leq K(w_i(f) + w_i(g)) \end{aligned}$$

Donde K es una cota superior para $|f|, |g|$ en $[a,b]$ y $w_i(f)$ representa la diferencia entre el supremo y el ínfimo de f en el intervalo $[a_i, a_{i+1}]$, y así mismo para g, de modo que $S(fg;P) - s(fg;P) \leq K(S(f;P) - s(f;P) + S(g;P) - s(g;P))$. □

Teorema 6.55: Si $a < b < c$ reales, entonces $f \in \mathcal{R}(a, c)$ syss $f \in \mathcal{R}(a, b)$ y $f \in \mathcal{R}(b, c)$.

Demostración: $\Longrightarrow$. Si $f \in \mathcal{R}(a, c)$, entonces existe $P \in \Pi(a, c)$ tal que $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$ por el teorema 6.52, luego $P \subseteq P' := P \cup \{b\}$, luego P' también satisface la condición y luego se define $Q := P' \cap [a, b]$ y $R := P' \cap [b, c]$ de modo que $Q \cup R = P'$ y es fácil probar que $S(f, P') = S(f, Q) + S(f, R)$ y análogo con la función s, de modo que

$$S(f, P') - s(f, P') = (S(f, Q) - s(f, Q)) + (S(f, R) - s(f, R)) < \epsilon.$$

Y como los sumandos son positivos, se concluye que cada uno es estrictamente menor que ϵ.

$\Longleftarrow$. Es análogo. □

Teorema 6.56: Si $f \in \mathcal{R}(a, b)$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que f es continua en c.

Demostración: Construiremos una sucesión de intervalos encajados tal que el punto en la intersección cumplirá el enunciado. Para ello definiremos $a_0 := a$ y $b_0 := b$ por recursión.
Si $D_m := \{a_n, a_n + h, a_n + 2h, \dots, a_n + nh = b_n\}$ con $h := \frac{b_n - a_n}{m}$ entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe m tal que

$$S(f, D_m) - s(f, D_m) = \sum_{i=1}^{m} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = h \sum_{i=1}^{m} (M_i - m_i) < \epsilon$$

Luego si fijamos $\epsilon := \frac{1}{n+1} \frac{b_n - a_n}{2}$, entonces se obtiene que existe algún $m \geq 4$ tal que

$$\sum_{i=1}^{m} (M_i - m_i) < \frac{1}{n+1} \frac{m}{2} \leq \frac{1}{n+1}(m - 2).$$

Luego existen al menos tres índices tales que $M_i - m_i < \frac{1}{n+1}$. En particular, elegimos $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$ (pues existen al menos tres índices) que cumplen que $\sup f[a_{n+1}, b_{n+1}] - \inf f[a_{n+1}, b_{n+1}] < \frac{1}{n+1}$.
Finalmente $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ y los radios convergen a cero, así que por teorema de las invervalos encajados, existe un punto en la intersección total para el que claramente la función es continua. □

Corolario 6.57: Si $f \in \mathcal{R}(a, b)$, entonces el conjunto de continuidades de f es denso en $[a, b]$.

Definición 6.58 – *Primitiva*: Dada una función f definida sobre un conjunto conexo no singular, se dice que otra función g es una primitiva de f si comparten dominio y para todo $x \in \operatorname{Dom} g$ se cumple que $g' = f$. Si f es real, entonces hemos visto que si g_1, g_2 son primitivas, entonces $g_1 = g_2 + C$ para algún $C \in \mathbb{R}$, por ello, se suele denotar la primitiva de una función con un $+C$.

Teorema 6.59 – *Teorema fundamental del cálculo*: Se cumple:

1. Sea $f \in \mathcal{R}(a, b)$ y continua en $c \in (a, b)$. Definamos $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ como
$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$
entonces F es diferenciable en c y $F'(c) = f(c)$. En consecuencia si f es continua en todo el intervalo, F es diferenciable en todo el interior del intervalo.

2. Si f es continua en $[a, b]$ y tiene primitiva F, entonces
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$
(regla de Barrow).

3. Si f es Riemann-integrable en $[a, b]$ y tiene primitiva F, entonces
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

DEMOSTRACIÓN:

1. Veamos por definición que
$$F'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Ahora, nótese que $\inf f[x, x+h] \le f|_{[x,x+h]} \le \sup f[x, x+h]$ donde las funciones son constantes, de modo que su integral es la constante por h y:
$$\lim_{h\to 0} \inf f[x, x+h] \le F'(x) \le \lim_{h\to 0} \sup f[x, x+h],$$

pero como f es continua, los límites de la izquierda y derecha convergen a $f(x)$, por lo que, por el teorema del sandwich, el límite existe y es $f(x)$ como se quería probar.

2. Es corolario de la propiedad 1.

3. Vamos a probar el recíproco, i.e., que si F tiene derivada Riemann-integrable, entonces

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Para ello, sea $P \in \Pi(a,b)$, entonces usaremos el teorema del valor medio pues entonces existe la sucesión finita $\gamma_i \in [a_i, a_{i+1}]$ tal que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n-1} F(a_{i+1}) - F(a_i) = \sum_{i=1}^{n-1} F'(\gamma_i)(a_{i+1} - a_i).$$

En particular, si se elige $P_n := \{a, a+\delta, \dots, a+n\delta = b\}$, entonces la expresión de la derecha converge a la integral buscada. Para evitar usos de AE, se puede usar un argumento como que siempre se puede encontrar P_n tal que la suma está a menos de ϵ de la integral. □

Teorema 6.60 – *Teorema de cambio de variable*: Si $f \in C^1([a,b])$ y g diferenciable en $[c,d]$ con derivada integrable, tal que $g\big[[c,d]\big] \subseteq [a,b]$. Entonces

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{6.18}$$

Demostración: Como f es continua, el teorema fundamental del cálculo dice que si F es primitiva de f, entonces

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,\mathrm{d}x = F(g(d)) - F(g(c)).$$

Además, por la regla de la cadena

$$(g \circ F)' = (g \circ f) \cdot g',$$

luego por teorema fundamental del cálculo:

$$\int_c^d f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d (g \circ F)'(t)\,\mathrm{d}t = F(g(d)) - F(g(c)). \qquad \square$$

Teorema 6.61 – *Integración por partes*: Si f, g tienen derivadas integrables en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = [fg]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x. \tag{6.19}$$

Teorema 6.62 (Teoremas del valor medio para integrales): Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que f es continua, y g es Riemann-integrable y no cambia de signo, entonces:

1. Existe $c \in (a, b)$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = f(c)(b - a)$.
2. Existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Demostración: Basta probar la segunda, pues implica la primera con $g = 1$. Notemos que si m, M son el mínimo y el máximo resp. de f en $[a, b]$ (por continuidad), luego $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ y

$$m \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b (f \cdot g)(x) \, \mathrm{d}x \leq M \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Luego existe $d \in [m, M]$ tal que $d \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b (f \cdot g)(x) \, \mathrm{d}x$ y por teorema de los valores intermedios existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$. □

Una aplicación curiosa de las integrales es una demostración sencilla de la irracionalidad de π, contenida en **[0]**.

Teorema 6.63: π es irracional.

Demostración: La demostración es por contradicción. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^2, entonces por integración por partes

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) \sin x \, \mathrm{d}x &= \big[-f(x) \cos x \big]_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \cos x \, \mathrm{d}x \\ &= f(0) + f(\pi) + \cancelto{0}{\big[f'(x) \sin x \big]_0^\pi} - \int_0^\pi f''(x) \sin x \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

En particular, si f fuera un polinomio, como es de clase C^∞, podemos emplear el proceso por recursión. Si $\pi = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}$ (pues $\pi > 0$), entonces definamos el siguiente polinomio

$$f_n(x) := \frac{x^n(p-qx)^n}{n!}$$

que es de grado $2n$, y cumple que es positivo (incluyendo al cero) en $[0,\pi]$ y que todas sus derivadas son positivas en 0 y en π (demuéstrelo por inducción).

Volviendo a la ecuación principal, nótese que

$$\int_0^\pi f_n(x)\sin x\,\mathrm{d}x = F_n(0) + F_n(\pi)$$

donde

$$F_n(x) = f_n(x) - f_n^{(2)}(x) + f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)$$

de modo que la integral $\int_0^\pi f_n(x)\sin x\,\mathrm{d}x$ siempre es un número entero, pues todas las derivadas del 0 y de π lo son, y como $f_n(x)\sin x$ es positivo en $[0,\pi]$, entonces es de hecho un número natural. Nótese sin embargo que $f_n(x)$ está acotado por

$$f_n(x) = \frac{q^n x^n(\pi - x)^n}{n!} \leq \frac{q^n\pi^{2n}}{n!}$$

luego

$$\int_0^\pi f_n(x)\sin x\,\mathrm{d}x \leq \frac{q^n\pi^{2n+1}}{n!} < \frac{p^{2n+1}}{n!} = p\cdot\frac{(p^2)^n}{n!}$$

pero ya vimos que $x^n/n! \to 0$ para todo x, lo que implica que para algún n se da que la expresión de la derecha es menor que 1 y la expresión de la izquierda es no nula pues para todo $x \in (0,\pi)$ se cumple que $f_n(x) > 0$ (y luego se puede aplicar el teorema del valor medio), lo que es absurdo pues no hay enteros entre 0 y 1. □

§6.4.1 Cálculo de primitivas e integrales. Sea f una función con primitiva, entonces denotaremos sus primitivas como $\int f(x)\,\mathrm{d}x = g(x) + C$. Ejemplos de primitivas conocidas:

$$\int x^r\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, & r \neq -1 \\ \ln x + C, & r = -1 \end{cases} \tag{6.20}$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C \tag{6.21}$$

Forma	Sustitución	Resultado	Derivando
$\sqrt{1-x^2}$	$x=\sin u$	$\sqrt{1-x^2}=\cos u$	$\mathrm{d}x=\cos u\,\mathrm{d}u$
$\sqrt{1+x^2}$	$x=\tan u$	$\sqrt{1+x^2}=\sec u$	$\mathrm{d}x=\sec^2 u\,\mathrm{d}u$
$\sqrt{x^2-1}$	$x=\sec u$	$\sqrt{x^2-1}=\tan u$	$\mathrm{d}x=\tan u\sec u\,\mathrm{d}u$

Figura 6.7. Sustituciones trigonométricas.

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C \tag{6.22}$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C \tag{6.23}$$

Usando el método de integración por partes se puede deducir que

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int (\ln x)\cdot(x')\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x = x(\ln x - 1).$$

Integrales y sustitución trigonométrica Comenzaremos viendo las potencias del $\sin x$ y del $\cos x$. Para ello se distinguen entre potencias impares y pares, para las impares se aplica un simple cambio de variable:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sin^{2n+1} x\,\mathrm{d}x &= \int_a^b (\sin x)^{2n}\sin x\,\mathrm{d}x = -\int_{\cos a}^{\cos b}(1-u^2)^n\,\mathrm{d}u \quad u=\cos x\\
\int_a^b \cos^{2n+1} x\,\mathrm{d}x &= \int_a^b (\cos x)^{2n}\cos x\,\mathrm{d}x = \int_{\sin a}^{\sin b}(1-u^2)^n\,\mathrm{d}u \quad u=\sin x
\end{aligned}$$

Para las potencias pares se utiliza la siguiente identidad trigonométrica

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

de modo que:

$$\int \sin^{2n} x\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^n \mathrm{d}x$$

Y así itera hasta reducirse a potencias impares.

Aprovechando las propiedades algebraicas de las funciones trigonométricas se recomienda hacer sustituciones trigonométricas como las descritas en la fig. 6.7.

Un ejemplo sencillo es la integral

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos(2u)+1}{2}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{2}\left[u + \frac{\cos(2u)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

6.5 Desigualdades

Definición 6.64: Dada una sucesión $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ finita de reales positivos, y unos valores $\lambda_i \in [0, 1]$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, entonces se define:

Media geométrica $a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_n^{\lambda_n}$.

Media aritmética $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$.

Usualmente se les señala como "medias ponderadas" y a los λ_i como las respectivas ponderaciones. Varios libros se referirán a ellas sin el término *ponderadas* cuando $\lambda_i = 1/n$.

Teorema 6.65 (desigualdad de Jensen): Sea f una aplicación real es convexa en un intervalo I syss dada una sucesión $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in I^n$ y unas ponderaciones λ_i, entonces

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i).$$

PISTA: Una implicancia es trivial mientras que la otra sale por inducción. □

Teorema 6.66 – *Desigualdad MG-MA*: Dada una sucesión de reales estrictamente positivos $(a_1, \dots, a_n)$ y unas ponderaciones λ_i, entonces

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_n^{\lambda_n} \le \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$$

DEMOSTRACIÓN: Como los a_i son no nulos y positivos, y como $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, entonces definamos $t_i := \ln a_i$. Luego, por el criterio de convexidad de la segunda derivada es fácil notar que la función exponencial es convexa, por lo que, por la desigualdad de Jensen se obtiene que

$$\begin{aligned} a_1^{\lambda_1} \cdots a_n^{\lambda_n} &= \exp(\lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_n t_n) \\ &\le \lambda_1 \exp(t_1) + \cdots + \lambda_n \exp(t_n) = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n. \end{aligned}$$ □

Definición 6.67 (p-medias): Dada una sucesión de números positivos $(a_1, \dots, a_n)$, entonces dado p real no nulo, se le dice la p-media a

$$\sqrt[p]{\frac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}{n}}$$

Al caso $p = -1$ y $p = 2$ les llamamos media harmónica y cuadrática resp.

Teorema 6.68 (Desigualdad de la media general): Dada una sucesión de números estrictamente positivos $(a_1, \dots, a_n)$ y unas ponderaciones λ_i de forma que se define $f : \mathbb{R}_{\neq 0} \to (0, \infty)$ como $f(p) := \sqrt[p]{\lambda_1 a_1^p + \cdots + \lambda_n a_n^p}$, entonces f es creciente.

Demostración: Si $p = 1 < q$, entonces vemos que la monotonía de f se reduce a probar que

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n)^q \leq \lambda_1 a_1^q + \lambda_2 a_2^q + \cdots + \lambda_n a_n^q,$$

lo que se deduce de la desigualdad de Jensen sobre $g(q) := x^q$ que es convexa (¿por qué?).

Si $0 < p < q$, entonces basta reescribir la desigualdad como

$$(\lambda_1(a_1^p) + \lambda_2(a_2^p) + \cdots + \lambda_n(a_n^p))^{q/p} \leq \lambda_1(a_1^p)^{q/p} + \lambda_2(a_2^p)^{q/p} + \cdots + \lambda_n(a_n^p)^{q/p},$$

con lo que lo hemos reducido al caso anterior. Los casos involucrando argumentos negativos quedan al lector. □

Notemos que si $\boldsymbol{x} := (a_1, \dots, a_n)$, entonces la p-media es

$$\frac{\|\boldsymbol{x}\|_p}{\sqrt[p]{n}}.$$

Teorema 6.69 – Desigualdad MH-MG-MA-MC: Sea $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ una secuencia finita de reales positivos, entonces

$$\begin{aligned} \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} &\leq \frac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}} \\ &\leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \\ &\leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \\ &\leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \\ &\leq \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Donde las desigualdades son iguales syss los a_i lo son.

Demostración: Aunque no lo parezca, éste límite se reduce a probar que la $(-\infty)$-media es el mínimo, la 0-media es la MG y la ∞-media es el máximo mediante límites, haremos la 0-media que es, en mi opinión la más difícil:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)}$$

donde $f(x)\to 1$ y $g(x)\to\infty$, por ende, dicho límite se acerca a (si existe)

$$\exp\Big(\lim_{x\to 0}(f(x)-1)g(x)\Big)=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x-n}{nx}\right)$$

veamos que el límite de adentro es de la forma $0/0$, luego conviene aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x-n}{nx}=\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x\ln a_1+\cdots+a_n^x\ln a_n}{n}=\frac{\ln a_1+\cdots+\ln a_n}{n}.$$

Finalmente basta reemplazar y usar propiedades de la exponencial y los logaritmos para comprobar que el límite daba $\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$ como se quería probar.

Finalmente el enunciado se deduce de la monotonía de las p-medias. □

Teorema 6.70 (desigualdad de Minkowski): Dados $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n$ y $p\geq 1$, entonces

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|_p\leq\|\boldsymbol{u}\|_p+\|\boldsymbol{v}\|_p.$$

Demostración: El caso $p=1$ ya está probado. Para $p>1$, se cumple que $f(x):=|x|^p$ es convexa, luego

$$\begin{aligned}\|(1-\lambda)\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{v}\|_p^p&=\sum_{i=1}^n|(1-\lambda)u_i+\lambda v_i|^p\leq\sum_{i=1}^n((1-\lambda)|u_i|+\lambda|v_i|)^p\\&\leq\sum_{i=1}^n(1-\lambda)|u_i|^p+\lambda|v_i|^p=(1-\lambda)\|\boldsymbol{u}\|_p^p+\lambda\|\boldsymbol{v}\|_p^p.\end{aligned}$$

En particular si $\|\boldsymbol{u}\|_p=\|\boldsymbol{v}\|_p=1$, esto prueba que para todo $\lambda\in[0,1]$ se cumple que $\|(1-\lambda)\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{v}\|_p\leq 1$.

Luego, si $\boldsymbol{u}\neq 0\neq\boldsymbol{v}$, entonces $\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|_p}$ y $\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|_p}$ son vectores unitarios, finalmente se demuestra el enunciado pues

$$\frac{\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|_p}{\|\boldsymbol{u}\|_p+\|\boldsymbol{v}\|_p}=\left\|\underbrace{\frac{\|\boldsymbol{u}\|_p}{\|\boldsymbol{u}\|_p+\|\boldsymbol{v}\|_p}}_{1-\lambda}\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|_p}+\underbrace{\frac{\|\boldsymbol{v}\|_p}{\|\boldsymbol{u}\|_p+\|\boldsymbol{v}\|_p}}_{\lambda}\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|_p}\right\|_p\leq 1.$$ □

La desigualdad de Minkowski es esencial para que las normas L_p que habíamos definido comprueben ser, en efecto, normas sobre $\mathbb{R}^n$.

Lema 6.71 (desigualdad de Young): Si $x, y \geq 0$ y $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Demostración: Basta aplicar la desigualdad ponderada MG-MA sobre x^p e y^q con ponderaciones $(1/p, 1/q)$:

$$xy = (x^p)^{1/p}(y^q)^{1/q} \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q. \qquad \square$$

Teorema 6.72 (desigualdad de Hölder): Dados $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ y $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$$|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| \leq \|\boldsymbol{u}\|_p \|\boldsymbol{v}\|_q$$

Demostración: Por la desigualdad de Young se cumple que

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| &\leq \sum_{i=1}^n |u_i v_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{|u_i|^p}{p} + \frac{|v_i|^q}{q} = \frac{\|\boldsymbol{u}\|_p^p}{p} + \frac{\|\boldsymbol{v}\|_q^q}{q}. \end{aligned}$$

Nuevamente, si $\|\boldsymbol{u}\|_p = \|\boldsymbol{v}\|_q = 1$, entonces vemos que la desigualdad de Hölder se cumple. Si $\boldsymbol{u} \neq 0 \neq \boldsymbol{v}$, entonces

$$\left| \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|_p} \cdot \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|_q} \right| \leq 1$$

luego, multiplicando a ambos lados por $\|\boldsymbol{u}\|_p \|\boldsymbol{v}\|_q$ se obtiene el resultado buscado. $\square$

De la desigualdad de Hölder se deduce el siguiente conocido resultado:

Teorema 6.73 – *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*: Dados $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| \leq \|\boldsymbol{u}\|_2 \|\boldsymbol{v}\|_2.$$

7

Derivadas en varias variables

7.1 Derivada en espacios vectoriales

Nuestro objetivo en está sección será tratar de generalizar el concepto de derivada, para ello notemos que en $\mathbb{R}$ una función es derivable en a si

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = k,$$

otra forma sería notar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-kh}{h} = 0.$$

donde notemos que $g(h) := kh$ es una función lineal.

Definición 7.1 – *Derivada en espacios vectoriales*: Sean V, W un par de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales normados y sea $f : A \subseteq V \to W$. Se dice que f es *diferenciable* en $\boldsymbol{a} \in \operatorname{Int} A$ si existe una transformación lineal $T : V \to W$ tal que

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to \vec{0}} \frac{\|f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-T(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

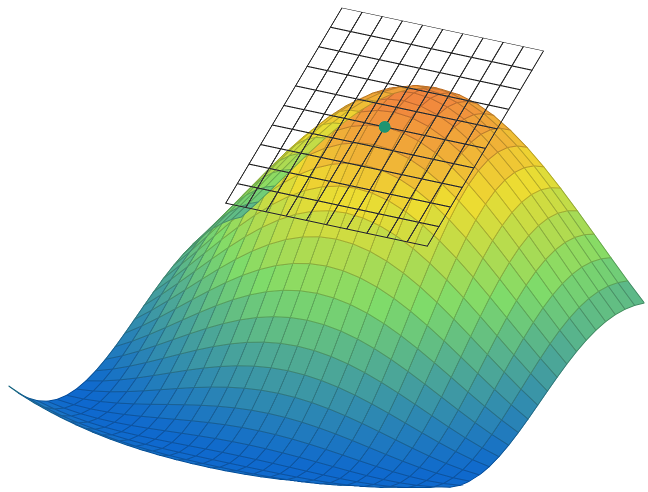


Figura 7.1. Interpretación gráfica de la derivada.

Teorema 7.2: Si $f : A \subseteq V \to W$ es diferenciable en $\boldsymbol{a} \in \operatorname{Int} A$, entonces es continua en $\boldsymbol{a}$.

Lema 7.3: Si $f : A \subseteq V \to W$ es diferenciable en $a \in \operatorname{Int} A$, entonces existe una **única** transformación lineal $T : V \to W$ tal que

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\vec{0}} \frac{\|f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - T(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

Demostración: Sean T, S lineales que cumplan con el enunciado. Si $d(\boldsymbol{h}) := f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a})$, entonces vemos que se cumple que

$$\begin{aligned}\lim_{\boldsymbol{h}\to\vec{0}} \frac{\|T(\boldsymbol{h}) - S(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|} &= \lim_{\boldsymbol{h}\to\vec{0}} \frac{\|T(\boldsymbol{h}) - d(\boldsymbol{h}) + d(\boldsymbol{h}) - S(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|} \\ &\leq \lim_{\boldsymbol{h}\to\vec{0}} \frac{\|T(\boldsymbol{h}) - d(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|} + \lim_{\boldsymbol{h}\to\vec{0}} \frac{\|d(\boldsymbol{h}) - S(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.\end{aligned}$$

Si $\boldsymbol{v} \in V_{\neq \mathbf{0}}$, entonces vemos que $\lim_{t\to 0} t\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, luego

$$\frac{\|T(\boldsymbol{v}) - S(\boldsymbol{v})\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \lim_{t\to 0} \frac{\|T(t\boldsymbol{v}) - S(t\boldsymbol{v})\|}{\|t\boldsymbol{v}\|} = 0.$$

es decir, para todo $\boldsymbol{v} \in V$ se cumple que $T(\boldsymbol{v}) = S(\boldsymbol{v})$, ergo $T = S$. □

Así ampliamos la definición de "derivable", pero aún no tenemos un valor para la derivada, para ello se define:

Definición 7.4 – *Matriz jacobiana*: Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\boldsymbol{a} \in \operatorname{Int} A$, se le llama *matriz jacobiana* de f en $\boldsymbol{a}$, denotada por $Jf(\boldsymbol{a}) \in \operatorname{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$, a la matriz determinada por la única transformación lineal que hace a la función diferenciable en dicho punto, de modo que si T es el diferencial, entonces $T(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h} \cdot Jf(\boldsymbol{a})$.

Se le llama la *derivada direccional* de f en $\boldsymbol{a}$ respecto de $\boldsymbol{u} \neq \vec{0}$ al siguiente límite (si existe):

$$f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{u}) := \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

En particular, se definen las *derivadas parciales* de f respecto de la i-ésima coordenada o de la variable x_i a

$$D_i f(\boldsymbol{a}) := \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{a}} := f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{e}_i).$$

Teorema 7.5: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $\boldsymbol{a} \in \operatorname{Int} A$. Si f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$, entonces para todo $\boldsymbol{u} \neq \vec{0}$ existe la derivada direccional de f en $\boldsymbol{a}$ respecto a $\boldsymbol{u}$. En cuyo caso se cumple que

$$f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \cdot Jf(\boldsymbol{a}). \tag{7.1}$$

Esto último nos permite calcular la jacobiana de la función.

Ejemplo. Si $f(x, y) := x^5 y^7$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 5a^4 b^7, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 7a^5 b^6.$$

Por ende, su jacobiano es

$$Jf(a, b) = \begin{bmatrix} 5a^4 b^7 \\ 7a^5 b^6 \end{bmatrix}$$

Proposición 7.6: Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función lineal, esto es que $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \cdot B$ para $B \in \operatorname{Mat}_{n\times m}$, entonces es diferenciable y para todo $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ se cumple $Jf(\boldsymbol{a}) = B$.

Corolario 7.7: La suma $+ : (\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable.

Teorema 7.8 – *Regla de la cadena*: Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en $\boldsymbol{b} := f(\boldsymbol{a})$, entonces $f \circ g$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y

$$J(f \circ g)(\boldsymbol{a}) = Jf(\boldsymbol{a}) \cdot Jg(\boldsymbol{b}). \tag{7.2}$$

Demostración: Sean λ, ν las aplicaciones lineales tales que hacen a f y g diferenciables en $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ resp. Sea $h := f \circ g$ y $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} \in A$, luego

$$h(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}) - h(\boldsymbol{a}) = g(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{u}) - g(\boldsymbol{b})$$

donde $\boldsymbol{u} := f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{b}$. Luego sean

$$\alpha(\boldsymbol{v}) := \frac{f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a}) - \lambda(\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{v}\|}, \quad \beta(\boldsymbol{u}) := \frac{g(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{u}) - g(\boldsymbol{b}) - \mu(\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|},$$

definidas en un entorno de $\vec{0}$ y extendidas continuamente para tomar el valor $\vec{0}$ en $\vec{0}$.
Nos queda que

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}) - h(\boldsymbol{a}) &= \mu(\boldsymbol{u}) + \|\boldsymbol{u}\|\beta(\boldsymbol{u}) \\ &= \mu\big(\lambda(\boldsymbol{v}) + \|\boldsymbol{v}\|\alpha(\boldsymbol{v})\big) + \|\boldsymbol{u}\|\beta(\boldsymbol{u}) \\ &= \mu(\lambda(\boldsymbol{v})) + \|\boldsymbol{v}\|\mu(\alpha(\boldsymbol{v})) + \|\boldsymbol{u}\|\beta(\boldsymbol{u}), \end{aligned}$$

donde hemos aplicado la linealidad de μ. Nótese que sólo basta probar que

$$\lim_{\boldsymbol{v} \to \vec{0}} \frac{\|\boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}\beta(\boldsymbol{u}) = \vec{0},$$

lo que se reduce a ver que $\|\boldsymbol{u}\|/\|\boldsymbol{v}\|$ está acotado cerca de $\vec{0}$, lo que se da pues

$$\frac{\|\boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \le \|\alpha(\boldsymbol{v})\| + \left\|\lambda\left(\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}\right)\right\| \le \|\alpha(\boldsymbol{v})\| + \|\lambda\|$$

y $\|\alpha(\boldsymbol{v})\| \to 0$ mientras $\boldsymbol{v} \to \vec{0}$, lo que completa la demostración. $\square$

Teorema 7.9: Si $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g = A \subseteq \mathbb{R}^n$ son diferenciables en $\boldsymbol{a} \in \operatorname{Int} A$, entonces:

1. $f + g$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y $J(f + g)(\boldsymbol{a}) = Jf(\boldsymbol{a}) + Jg(\boldsymbol{a})$.
2. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces αf es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y $J(\alpha f)(\boldsymbol{a}) = \alpha Jf(\boldsymbol{a})$.

3. $f \cdot g$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y

$$J(f \cdot g)(\boldsymbol{a}) = Jf(\boldsymbol{a}) \cdot g(\boldsymbol{a}) + Jg(\boldsymbol{a}) \cdot f(\boldsymbol{a}).$$

4. Si $\operatorname{Img} g \subseteq \mathbb{R}$ y $g(\boldsymbol{a}) \neq 0$, entonces f/g es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y

$$J(f/g)(\boldsymbol{a}) = \frac{Jf(\boldsymbol{a}) \cdot g(\boldsymbol{a}) - Jg(\boldsymbol{a}) \cdot f(\boldsymbol{a}).}{g(\boldsymbol{a})^2}$$

DEMOSTRACIÓN: Sean $\lambda := df(\boldsymbol{a})$ y $\mu := dg(\boldsymbol{a})$ los diferenciales y

$$\alpha(\boldsymbol{v}) := \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a}) - \lambda(\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{v}\|}, \quad \beta(\boldsymbol{v}) := \frac{g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}) - g(\boldsymbol{a}) - \mu(\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{v}\|},$$

extendidas continuamente para anularse en $\vec{0}$.

Luego

$$(fg)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}) - (fg)(\boldsymbol{a}) = (f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a}))g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{a})(g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}) - g(\boldsymbol{a})),$$

Lo que queremos probar es que

$$\lim_{\boldsymbol{v}\to\vec{0}} \frac{(fg)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}) - (fg)(\boldsymbol{a}) - (\lambda(\boldsymbol{v})g(\boldsymbol{a}) + \mu(\boldsymbol{v})f(\boldsymbol{a}))}{\|\boldsymbol{v}\|} = \vec{0}.$$

Para lo cual, reemplazamos con $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{v}\|\alpha(\boldsymbol{v}) + \lambda(\boldsymbol{v})$ y $g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}) = g(\boldsymbol{a}) + \mu(\boldsymbol{v}) + \|\boldsymbol{v}\|\beta(\boldsymbol{v})$, con lo cual debemos probar que el término

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{v})\mu(\boldsymbol{v}) + \|\boldsymbol{v}\|\big(\alpha(\boldsymbol{v})\mu(\boldsymbol{v}) + \lambda(\boldsymbol{v})\beta(\boldsymbol{v}) + \alpha(\boldsymbol{v})g(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a})\beta(\boldsymbol{v})\big)& \\ + \|\boldsymbol{v}\|^2\alpha(\boldsymbol{v})\beta(\boldsymbol{v})&\end{aligned}$$

al ser dividido por $\|\boldsymbol{v}\|$ converge a $\vec{0}$, lo cual es claro para todos los términos exceptuando el primero, para el cual, al ser lineal y continua satisface $\|\lambda(\boldsymbol{v})\| \leq \|\boldsymbol{v}\|\,\|\lambda\|$, por lo que

$$\lim_{\boldsymbol{v}\to\vec{0}} \frac{\|\lambda(\boldsymbol{v})\mu(\boldsymbol{v})\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \leq \lim_{\boldsymbol{v}\to\vec{0}} \frac{\|\lambda\|\,\|\mu\|\,\|\boldsymbol{v}\|^2}{\|\boldsymbol{v}\|} = 0. \qquad \square$$

Teorema 7.10: Si A es abierto y $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tiene derivadas parciales continuas en todas las variables y en todo A, entonces es diferenciable en todo A.

Demostración: Sea $\boldsymbol{a} \in A$, entonces podemos definir $\lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ como la única función lineal tal que $\lambda(\boldsymbol{e}_i) = D_i f(\boldsymbol{a})$ (pues los $\boldsymbol{e}_i$ conforman una base). Ahora queda probar que

$$\lim_{\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a}) - \lambda(\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{v}\|} = \boldsymbol{0},$$

lo que equivale a que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $\|\boldsymbol{v}\| < \delta$ se cumple que $\|f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a}) - \lambda(\boldsymbol{v})\| < \epsilon \|\boldsymbol{v}\|$. En particular, notemos que $\lambda(v_i \boldsymbol{e}_i) = v_i D_i f(\boldsymbol{a})$ donde $D_i f(\boldsymbol{a})$ es el vector.
Como las derivadas son continuas existe un $\delta > 0$ tal que para todo $\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\| < \delta$ e $\boldsymbol{b} \in A$ se cumple que $\|D_i f(\boldsymbol{b}) - D_i f(\boldsymbol{a})\| < \epsilon/n$ para todo i. Además si se define $g_i(t) := f(a_1 + v_1, \dots, a_i + t v_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$, se cumple que $g_i(1) = g_{i+1}(0)$, $f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}) = g_n(1)$ y $f(\boldsymbol{a}) = g_1(0)$; luego por desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} \|f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a}) - \lambda(\boldsymbol{v})\| &\le \left\| g_n(1) - g_1(0) + \sum_{i=1}^n v_i D_i f(\boldsymbol{a}) \right\| \\ &\le \left\| \sum_{i=1}^n (g_i(1) - g_i(0) + v_i D_i f(\boldsymbol{a})) \right\| \\ &\le \sum_{i=1}^n \|g_i(1) - g_i(0) + v_i D_i f(\boldsymbol{a})\|. \end{aligned}$$

Por ende, como $|v_i| \le \|\boldsymbol{v}\|$, basta probar que

$$\|g_i(1) - g_i(0) + v_i D_i f(\boldsymbol{a})\| < \frac{\epsilon}{n} |v_i| \le \frac{\epsilon}{n} \|\boldsymbol{v}\|.$$

El truco yace en que las g_i son continuas en $[0, 1]$ y derivables en $(0, 1)$ con derivada

$$g_i'(t) = v_i D_i f(a_1 + v_1, \dots, a_i + t v_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

luego por el teorema del valor medio existe $t_i \in (0, 1)$ tal que

$$g_i(1) - g_i(0) = g_i'(t_i).$$

Por lo tanto, si $\boldsymbol{b}^i := (a_1 + v_1, \dots, a_i + t_i v_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$, entonces $\|\boldsymbol{b}^i - \boldsymbol{a}\| = \|(v_1, \dots, t_i v_i, 0, \dots, 0)\| \le \|\boldsymbol{v}\| < \delta$ se cumple

$$\|g_i(1) - g_i(0) + v_i D_i f(\boldsymbol{a})\| = \|D_i f(\boldsymbol{b}^i) v_i - D_i f(\boldsymbol{a}) v_i\| < \frac{\epsilon}{n} |v_i|,$$

como se quería probar. □

Definición 7.11: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con A abierto tal que posee derivadas parciales sobre todas las coordenadas y todo el abierto A, entonces diremos que f es diferenciable en A. Si $D_i f : A \to \mathbb{R}^m$ es también diferenciable en A, entonces denotamos

$$D_{ij} f(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := D_j(D_i f)(\boldsymbol{a}).$$

Y más generalmente denotaremos $D_{i_1,\dots,i_k} f$ al resultado de derivar f respecto a i_1, y luego derivarla respecto de i_2 y así. Denotaremos $f \in C^k(A; \mathbb{R}^m)$ si $f : A \to \mathbb{R}^m$ y para todo $\boldsymbol{a} \in A$ y toda sucesión $(i_1, \dots, i_k)$ existe $D_{i_1,\dots,i_k} f(\boldsymbol{a})$ y es continua. Se define

$$C^\infty(A; \mathbb{R}^m) := \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(A; \mathbb{R}^m).$$

En particular las funciones de clase C^0 son las continuas y esta definición extiende las clases C^k en los reales.

Teorema 7.12 – *Teorema de Schwarz*: Si $f \in C^2(A \subseteq \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, entonces para todo $\boldsymbol{a} \in A$ se cumple que $D_{ij} f(\boldsymbol{a}) = D_{ji} f(\boldsymbol{a})$.

Demostración: Si se define $F(x_i, x_j) := f(a_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, a_n)$, entonces se reduce a probar que $D_{12}F(a_i, a_j) = D_{21}F(a_i, a_j)$, o a probar el caso específico de funciones sobre abiertos de $\mathbb{R}^2$.

Con

$$\Delta f(h) := f(a_1 + h, a_2 + h) - f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2 + h) + f(a_1, a_2),$$

vamos a probar que

$$D_{12} f(\boldsymbol{a}) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\Delta f(h)}{h^2},$$

lo que probaría que $D_{12} f(\boldsymbol{a}) = D_{21} f(\boldsymbol{a})$ por simetría.
Sea $\epsilon > 0$, por continuidad, existe $\delta > 0$ tal que para todo $\|(k_1, k_2)\|_\infty < \delta$ se cumple que

$$\|D_{12} f(a_1 + k_1, a_2 + k_2) - D_{12} f(\boldsymbol{a})\| < \epsilon.$$

Luego, con $0 < h < \delta$

$$G(t) := f(t, a_2 + h) - f(t, a_2),$$

se cumple que $\Delta f(h) = G(a_1 + h) - G(a_1)$. Por el teorema de valor medio se cumple que existe $k_1 \in (0, h)$ tal que

$$\Delta f(h) = hG'(a_1 + k_1) = h(D_1 f(a_1 + k_1, a_2 + h) - D_1 f(a_1 + k_1, a_2)),$$

nuevamente, el término en el paréntesis también es continuo, así que por valor medio existe $k_2 \in (0, h)$ tal que

$$\Delta f(h) = h^2 D_{12} f(a_1 + k_1, a_2 + k_2).$$

Finalmente, para todo $h \in (0, \delta)$ existe $\|(k_1, k_2)\|_\infty \leq h$ tal que

$$\left| \frac{\Delta f(h)}{h^2} - D_{12} f(\boldsymbol{a}) \right| = |D_{12} f(a_1 + k_1, a_2 + k_2) - D_{12} f(\boldsymbol{a})| < \epsilon.$$

Lo que completa la demostración. □

Teorema 7.13 (Fermat): Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{a}$ es un extremo local, entonces $Df(\boldsymbol{a}) = 0$.

Pista: Basta aplicar la regla de la cadena, o lo que es lo mismo, analizar las derivadas parciales. □

Teorema 7.14: Sea $U := B_r(\boldsymbol{a}) \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua en $\overline{U}$ y diferenciable en U, tal que para todo $\boldsymbol{x} \in U$ se cumpla que $\det(Jf(\boldsymbol{x})) \neq 0$ y tal que para todo $\boldsymbol{y} \in \partial U$ se cumpla que $f(\boldsymbol{y}) \neq f(\boldsymbol{a})$. Entonces $f[U]$ es un entorno de $f(\boldsymbol{a})$.

Demostración: Sea $g : \partial U \to [0, \infty)$ definida por $g(\boldsymbol{x}) := \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})\|$. Como ∂U es compacto, entonces la imagen también por lo que existe $\boldsymbol{y} \in \partial U$ tal que $g(\boldsymbol{y}) = \min(\operatorname{Img} g)$, vamos a probar que si $m := g(\boldsymbol{y})/2$, entonces $B_m(f(\boldsymbol{a})) \subseteq f[U]$.

Sea $\boldsymbol{z} \in B_m(f(\boldsymbol{a}))$, probaremos que $\boldsymbol{z} \in f[U]$. Sea $h : \overline{U} \to \mathbb{R}$ dada por $h(\boldsymbol{x}) := \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{z}\|$. Nuevamente, como $\overline{U}$ es compacto y h es continua, entonces la imagen es compacta y existe $\boldsymbol{w} \in \overline{U}$ tal que $h(\boldsymbol{w})$ es el mínimo de $\operatorname{Img} h$, y como $h(a) < m$, entonces $h(\boldsymbol{w}) < m$. Si $\boldsymbol{x} \in \partial U$, entonces

$$h(\boldsymbol{x}) = \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{z}\| \geq \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})\| - \|f(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{z}\| > 2m - m = m,$$

en conclusión, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{w}$.
Si $\boldsymbol{w}$ es mínimo de h, también lo es de h^2:

$$h(\boldsymbol{x})^2 = \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{z}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (f_k(\boldsymbol{x}) - z_k)^2$$

como h es diferenciable en U y tiene un extremo local en $\boldsymbol{w}$ se cumple que

$$D_i h^2(\boldsymbol{w}) = \sum_{k=1}^{n} 2(f_k(\boldsymbol{w}) - z_k) D_i f_k(\boldsymbol{w}) = 0 = [(f(\boldsymbol{w}) - \boldsymbol{z}) Df(\boldsymbol{w})^t]_i.$$

Y como $\det(Jf(\boldsymbol{w})) \neq 0$, entonces $\boldsymbol{z} = f(\boldsymbol{w}) \in f[U]$ como se quería probar. □

Corolario 7.15: Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto y $f \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$ es inyectiva y con $\det(Jf(\boldsymbol{a})) \neq 0$ para todo $\boldsymbol{a} \in A$. Entonces f es abierta y por ende es un encaje.

Teorema 7.16 – *Teorema de la función inversa*: Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto y $f \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$ es inyectiva y tal que para todo $\boldsymbol{x} \in A$ se cumple que $\det(Jf(\boldsymbol{x})) \neq 0$. Entonces $B = f[A]$ es abierto y $f^{-1} \in C^k(B; A)$.

Demostración: Sea $g := f^{-1}$ ya sabemos que g es continua. Probaremos que sus derivadas parciales existen y son continuas. Sea $\boldsymbol{u} \in B$ y $\boldsymbol{v} := g(\boldsymbol{u}) \in A$. Sea $r > 0$ tal que $B_r(\boldsymbol{v}) \subseteq A$ y sea $t > 0$ tal que el segmento de extremos $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{e}_i$ esté contenido en $f[B_r(\boldsymbol{v})] \subseteq B$. Sea $\boldsymbol{w} := g(\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{e}_i)$, por construcción el segmento entre $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ está en A.
Por construcción $f(\boldsymbol{w}) - f(\boldsymbol{v}) = t\boldsymbol{e}_i$, de modo que para todo j:

$$f_j(\boldsymbol{w}) - f_j(\boldsymbol{v}) = t\delta_{ij}$$

aquí definimos una función auxiliar $h(x) := f_j(\boldsymbol{v} + x(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}))$ que es real, de modo que por teorema del valor medio existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$t\delta_{ij} = h(1) - h(0) = h'(\lambda) = f_j'(\boldsymbol{v} + \lambda(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}); \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v})$$

dónde la última expresión denota derivada direccional. Definiendo $\boldsymbol{z}^j := \boldsymbol{v} + \lambda(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v})$ se obtiene que

$$\lambda\delta_{ij} = (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}) \cdot Df_j(\boldsymbol{z}^j) = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{w}_k - \boldsymbol{u}_k) D_k f_j(\boldsymbol{z}^j)$$

así que

$$tI_n = (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v})[D_i f_j(\boldsymbol{z}^j)]_{ij}.$$

Ahora definimos $h : A^n \to \mathbb{R}$ por $h(\boldsymbol{z}^1, \dots, \boldsymbol{z}^n) := \det[D_i f_j(\boldsymbol{z}^j)]_{ij}$. Como h es un producto de las derivadas parciales que son continuas, entonces h es continua. Exigimos que $h(\boldsymbol{v},\dots,\boldsymbol{v})$ fuese no nulo, luego existe un entorno U de $(\boldsymbol{v},\dots,\boldsymbol{v})$ donde h no se anula. Exigiendo que r sea lo suficientemente pequeño se obtiene que $(\boldsymbol{w},\dots,\boldsymbol{w})\in U$ y por ende, $(\boldsymbol{z}^1,\dots,\boldsymbol{z}^n)$ también. Finalmente, hemos visto (en álgebra lineal) que la inversa es la matriz adjunta (formada por cofactores) escalada por el inverso del determinante, los cofactores son polinomios de los términos de la matriz por ser determinantes, y el determinante mismo también, luego existen polinomios P_k, Q_k tales que

$$\frac{(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v})_k}{t} = \left([D_i f_j(\boldsymbol{z}^j)]_{ij}^{-1}\right)_k = \frac{P_k(D_k f_j(\boldsymbol{z}^j))}{Q_k(D_k f_j(\boldsymbol{z}^j))}.$$

Finalmente notemos que como $\|\boldsymbol{z}^i-\boldsymbol{v}\|<r$, por continuidad podemos hacer r tan pequeño de modo que $|D_k f_j(\boldsymbol{z}^j)-D_k f_j(\boldsymbol{v})|$ es suficientemente pequeño, luego cuando $r\to 0$ la expresión de la derecha converge al valor que toma en $\boldsymbol{v}$, dicho de otro modo se cumple:

$$D_i g_k(\boldsymbol{u}) = \lim_{t\to 0}\frac{g_k(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{e}_i)-g_k(\boldsymbol{u})}{t} = \frac{P_k(D_k f_j(\boldsymbol{v}))}{Q_k(D_k f_j(\boldsymbol{v}))}. \qquad \square$$

Definición 7.17 – *Difeomorfismo*: Sean A, B dos abiertos del mismo espacio euclídeo. Si $f\in C^k(A;B)$ es tal que $f^{-1}\in C^k(B;A)$ con $k\geq 1$, entonces se dice que f es un *difeomorfismo* de clase C^k, o un C^k-difeomorfismo para acortar; de no especificarse se asume que es de clase C^1.

Teorema 7.18 – *Teorema de la inyectividad local*: Si $f\in C^k(A\subseteq \mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ es tal que $\det[Jf(\boldsymbol{a})]\neq 0$, entonces existe un entorno $U\subseteq A$ de $\boldsymbol{a}$ tal que $f|_U$ es un C^k-difeomorfismo.

Demostración: Definamos $h: A^n\to\mathbb{R}$

$$h(\boldsymbol{z}^1,\dots,\boldsymbol{z}^n) := \det[D_i f_j(\boldsymbol{z}^j)]_{ij}.$$

Como indicamos en el teorema de la función inversa, h resulta ser continua. De momento sabemos que $h(\boldsymbol{a},\dots,\boldsymbol{a})\neq 0$, luego existe un entorno de $\boldsymbol{a}$ donde h no se anula, en particular podemos considerar un entorno de la forma $U := (B_\delta(\boldsymbol{a}))^n$.

Veamos que f es inyectiva en $B_\delta(\boldsymbol{a})$: Sean $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B_\delta(\boldsymbol{a})$, entonces si consideramos $\phi(\lambda) := f_i(\boldsymbol{x}+\lambda(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))$, de tal modo que por teorema del valor medio existe $\lambda_i\in(0,1)$ tal que

$$f_i(y)-f_i(x) = \phi(1)-\phi(0) = \phi'(\lambda_i) = (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})Df_i(\boldsymbol{x}+\lambda_i(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))$$

luego definiendo $\boldsymbol{z}^i := \boldsymbol{x} + \lambda_i(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \in B_\delta(\boldsymbol{a})$, entonces se concluye que

$$f(y) - f(x) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})[D_i f_j(\boldsymbol{z}^j)]_{ij}$$

pero la matriz de la derecha es invertible pues $h(\boldsymbol{z}^1, \dots, \boldsymbol{z}^n) \neq 0$, por ende $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$.

Luego por el teorema de la función inversa f en $B_\delta(\boldsymbol{a})$ es un difeomorfismo. □

Ejemplo. El tema de la inyectividad es menester, para ello basta considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = e^x \cdot (\cos y, \sin y),$$

luego vemos que

$$Jf(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}, \quad \det[Jf(x, y)] = e^{2x} > 0,$$

y $\mathbb{R}^2$ es abierto y conexo, así que si fuera un caso entre abiertos conexos de $\mathbb{R}$ se tendría inmediatamente que f es C^1-difeomorfismo, sin embargo $f(x, 0) = f(x, 2\pi)$ para todo x, lo que demuestra que no es una función inyectiva, por ende no es difeomorfismo.

§7.1.1 El teorema de la función implícita. El teorema de la función implícita es uno de los teoremas más notables del cálculo diferencial, usualmente se enseña en dimensión-1 donde no es más que una conveniente mezcla de regla de la cadena y función inversa, pero es más complicado cuando se adhieren más dimensiones.

En general se trata de tener un conjunto de variables $\boldsymbol{x} := (x_1, \dots, x_n)$ y una supuesta función $\boldsymbol{y}$ de $\boldsymbol{x}$ de tal modo que les ordenamos en una ecuación de la forma

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0,$$

donde podemos exigir que f sea diferenciable. Lo que queremos es encontrar una función g diferenciable tal que $\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x})$ y tal que g esté definida de modo que

$$f(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})) = 0$$

para todo $\boldsymbol{x}$ en un abierto. De tal modo que derivando finalmente f podamos deducir la derivada de g con respecto a algún x_i.

Definición 7.19: Sea $f \in C^1(A \subseteq \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Denotaremos f_i las coordenadas de $f(\boldsymbol{x})$ y x_i las coordenadas de $\boldsymbol{x}$, entonces denotamos:

$$\frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_k})}{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_\ell})}(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} D_{j_1} f_{i_1}(\boldsymbol{a}) & D_{j_1} f_{i_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & D_{j_1} f_{i_k}(\boldsymbol{a}) \\ D_{j_2} f_{i_1}(\boldsymbol{a}) & D_{j_2} f_{i_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & D_{j_2} f_{i_k}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{j_\ell} f_{i_1}(\boldsymbol{a}) & D_{j_\ell} f_{i_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & D_{j_\ell} f_{i_k}(\boldsymbol{a}) \end{bmatrix} \in \operatorname{Mat}_{\ell \times k}(\mathbb{R}).$$

Bajo ésta notación, se cumple, por ejemplo que

$$Jf(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}(\boldsymbol{a}).$$

Teorema 7.20: Sea $f \in C^1(A \subseteq \mathbb{R}^{k+n}; \mathbb{R}^n)$. Escribamos $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ donde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$ e $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Si existe $g \in C^1(B \subseteq \mathbb{R}^k; \mathbb{R}^n)$ tal que para todo $\boldsymbol{x} \in B$ se cumpla que

$$f(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})) = 0,$$

entonces se cumple que

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})) + Dg(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})) = \vec{0}. \tag{7.3}$$

Pista: Esto es simple aplicación de regla de la cadena. □

Teorema 7.21 – *Teorema de la función implícita*: Sea $f \in C^\ell(A \subseteq \mathbb{R}^{k+n}; \mathbb{R}^n)$ con $\ell \geq 1$. Escribamos $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ donde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$ e $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Sea $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in A$ tal que

$$f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \vec{0}, \quad \det\left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\right] \neq 0.$$

Entonces existen abiertos $V \subseteq A$, $U \subseteq \mathbb{R}^k$ y una función $g \in C^\ell(U; \mathbb{R}^n)$ de tal modo que $\boldsymbol{a} \in U$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in V$ y

$$\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in V : f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\} = \operatorname{Grf}(h \circ f),$$

donde $h : B \to \mathbb{R}^{k+n}$ está definido como $h(\boldsymbol{x}) := (\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x}))$.

Demostración: Definamos $F \in C^\ell(A; \mathbb{R}^{k+n})$ como $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$. Notemos que

$$DF(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} I_k & \boldsymbol{0} \\ \partial f / \partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) & \partial f / \partial \boldsymbol{y}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \end{bmatrix}$$

De tal modo que $\det[DF(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})] = \det[\partial f/\partial \boldsymbol{y}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})] \neq 0$. Luego por teorema de la función implícita se cumple que F es un difeomorfismo en un entorno V de $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ tal que $W := F[V]$, de modo que su inversa $G \in C^\ell(W;V)$ satisface que

$$G(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \quad G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}))$$

Notemos que $F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a},\vec{0}) \in W$, de modo que

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{x},\vec{0}) &= (\boldsymbol{x}, h(\boldsymbol{x},\vec{0})) \\ (\boldsymbol{x},\vec{0}) &= F(\boldsymbol{x}, h(\boldsymbol{x},\vec{0})) = \big(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}, h(\boldsymbol{x},\vec{0}))\big) \\ f(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})) &= 0 \end{aligned}$$

donde $g(\boldsymbol{x}) := h(\boldsymbol{x},\vec{0})$ y cumple con las propiedades exigidas. □

§7.1.2 Aplicación: Teorema fundamental del álgebra I. Ésta es una demostración contenida en **[0]** que utiliza conceptos que hemos visto en el libro y una aplicación del teorema chino del resto.

Definición 7.22 (Discriminante): Sea $\varphi_{f,g} : \mathbb{C}[x]/(f) \times \mathbb{C}[x]/(g) \to \mathbb{C}[x]/(fg)$ el morfismo de anillos dado por

$$\varphi_{f,g}(a + (f), b + (g)) = ag + bf + (fg).$$

Por el teorema chino del resto, $\varphi_{f,g}$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales ssi f, g son coprimos. Luego defínase

$$R_{f,g} := \det(\varphi_{f,g})$$

de modo que $R_{f,g} = 0$ ssi f, g no son coprimos.
Finalmente definimos el discriminante de un polinomio f por $D_f := R_{f,f'}$. Nótese que el discriminante siempre es un polinomio de los coeficientes de f por nuestra construcción.

En primer lugar notemos que $(a_1, \dots, a_n) \mapsto z^n + \sum_{k=1}^n a_k z^{k-1}$ es una biyección entre los polinomios mónicos de grado n y $\mathbb{C}^n$.

Lema 7.23: Si $V \subseteq \mathbb{C}^n$ es el conjunto de raíces de un polinomio $p(\boldsymbol{v}) = p(z_1, \dots, z_n)$, entonces $\mathbb{C}^n \setminus V$ es arco-conexo, por ende, conexo.

DEMOSTRACIÓN: Si $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \setminus V$, entonces $S := \{z\boldsymbol{u} + (1-z)\boldsymbol{v} : z \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C}^n$. Notemos que $p(z\boldsymbol{u} + (1-z)\boldsymbol{v})$ es un polinomio complejo que depende de la variable z, luego posee sólo finitas raíces, por ende $S \cap V$ es finito. Finalmente $S \setminus V$ es homeomorfo a $\mathbb{C}$ con finitos puntos eliminados, por ende es arco-conexo. □

Lema 7.24: Sea $\mathcal{F}$ una familia de polinomios mónicos de grado n tal que sus coeficientes están acotados. Entonces la familia de raíces de polinomios en $\mathcal{F}$ también está acotada, por ende contenida en una bola compacta.

Demostración: Se deriva de que

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = 1$$

para todo $f \in \mathcal{F}$. □

Teorema 7.25 – *Teorema fundamental del álgebra*: Todo polinomio no-constante complejo posee raíz.

Demostración: Definamos X como el subespacio de polinomios de discriminante no nulo en $\mathbb{C}^n$. X es un subespacio abierto de $\mathbb{C}^n$ pues es la preimagen continua de un abierto $(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Se define R como el subespacio de X formado por los polinomios con raíz. R es no vacío pues contiene a $z^n - 1$.

i) <u>R es abierto:</u> sea $f \in R$, por definición existe $s \in \mathbb{C}$ tal que $f(s) = 0$. Sea $\Psi : \mathbb{C} \times X \to \mathbb{C}$ el mapa de evaluación que está definido en un abierto de $\mathbb{C}^{n+1}$ de modo que $\Psi(z, g) = g(z)$; como $\Psi(s, f) = 0$ y Ψ es diferenciable con $\Psi'(z, g) = g'(z)$ que en s cumple que $\Psi'(s, f) \neq 0$ (pues f no comparte divisores con su derivada), por lo que por el teorema de la función implícita se cumple que existe un entorno de (s, f) tal que el mapa vale cero, luego tal entorno es subconjunto de R.

ii) <u>R es cerrado:</u> Sea $f \in X$ tal que todo entorno de f corta a R. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en R convergiendo a f, y sea s_n una sucesión de puntos en $\mathbb{C}$ que son raíces de los f_n respectivamente. Por el lema anterior, s_n está acotada, de modo que por una generalización del teorema de Bolzano-Weierstrass admite una subsucesión convergente; de ahora en adelante s_n denota dicha subsucesión y lo mismo aplica para sus respectivos f_n. Probaremos que $s := \lim_n s_n$ es raíz de f (que cumple $f = \lim_n f_n$). Como f es el límite puntual de una sucesión de funciones definida en un compacto, entonces es el límite uniforme de dichas funciones, de modo que existe n_1 tal que para todo $n \geq n_1$ y todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple que $|f(z) - f_n(z)| < \epsilon/2$ (límite uniforme) y por continuidad de f existe n_2 tal que para todo $n \geq n_2$ se cumple que $|f(s) - f(s_n)| < \epsilon/2$. Considerando $N := \max\{n_1, n_2\}$ se cumple para todo $n \geq N$ que

$$|f(s)| = |f(s) - f_n(s_n)| \leq |f(s) - f(s_n)| + |f(s_n) - f_n(s_n)| < \epsilon. \qquad \square$$

§7.1.3 Expansión de Taylor. En ésta sección nos enfocaremos en funciones cuyo codominio es $\mathbb{R}^1$, notemos que al lector le debe dar igual pues una función de codominio $\mathbb{R}^m$ es realmente m funciones hacia $\mathbb{R}$, todas de la misma clase de diferenciabilidad.

Definición 7.26: Si $f \in C^1(A \subseteq \mathbb{R}^n)$, entonces para $\boldsymbol{x} \in A$ se define:

$$\vec{\nabla} f(\boldsymbol{x}) := \begin{bmatrix} D_1 f(\boldsymbol{x}) \\ \dots \\ D_n f(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$$

que se conoce como el *gradiente* de f. Notemos que el gradiente no es más que el Jacobiano de f.

Proposición 7.27: f es diferenciable en $\boldsymbol{a} \in A$ syss existe un entorno U de $\boldsymbol{a}$ tal que para todo $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h} \in U$ se cumple que

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{h} \cdot \vec{\nabla} f(\boldsymbol{a}) + R_f(\boldsymbol{h})$$

donde $\lim_{\boldsymbol{h} \to \vec{0}} R(\boldsymbol{h})/\|\boldsymbol{h}\| = 0$.

Definición 7.28: Se le llama *multi-índice* α (o n-índice) a una n-tupla de naturales tal que

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

y admitimos las siguientes notaciones para los multi-índices:

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad \alpha! := \prod_{i=1}^{n} \alpha_i!, \quad \binom{k}{\alpha} := \frac{k!}{\alpha!}$$
$$\boldsymbol{x}^\alpha := \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}, \quad \partial^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

donde $k = |\alpha|$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ y $f \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$.

Antes de explorar propiamente como tal el teorema de Taylor, veamos otra aplicación:

Teorema 7.29 (Teorema multinomial): Sea $\Bbbk$ un cuerpo cualquiera y $\boldsymbol{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \Bbbk^n$, entonces considerando que α es un n-índice se cumple que

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} \boldsymbol{x}^\alpha.$$

Demostración: Lo probaremos por inducción sobre n, donde el caso base ($n = 1$) es trivial.

Si se asume el caso inductivo probaremos que se aplica para una $(n+1)$-tupla, mediante el teorema del binomio y definiendo $\boldsymbol{y} := (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \Bbbk$:

$$\begin{aligned}(x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1})^k &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x_1 + \cdots + x_n)^i x_{n+1}^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x_{n+1}^{k-i} \sum_{|\alpha|=i} \binom{i}{\alpha} \boldsymbol{x}^\alpha.\end{aligned}$$

dado un n-índice α de longitud i podemos definir un $(n+1)$-índice $\beta := (\alpha_1, \dots, \alpha_n, k-i)$ que tiene longitud k y que cumple que $\boldsymbol{y}^\beta = \boldsymbol{x}^\alpha x_{n+1}^{k-i}$ y que

$$\binom{k}{i}\binom{i}{\alpha} = \frac{k!}{(k-i)!\cancel{i!}} \frac{\cancel{i!}}{\alpha!} = \frac{k!}{\beta!} = \binom{k}{\beta}$$

por lo que se comprueba el enunciado. $\square$

Definición 7.30: Sea $f \in C^k(A \subseteq \mathbb{R}^n)$, donde A es abierto y $\boldsymbol{a} \in A$, denotamos:

$$T_{\boldsymbol{a}}^k f(\boldsymbol{x}) := \sum_{|\alpha| \le k} \frac{\partial^\alpha f(\boldsymbol{a})}{\alpha!} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^\alpha.$$

Lo natural es traducir exactamente el mismo teorema de Taylor a varias variables:

Teorema 7.31 – *Teorema de Taylor*: Sea $f \in C^k(A \subseteq \mathbb{R}^n)$, donde

A es abierto y $\boldsymbol{a} \in A$, entonces para todo $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{h} \in A$ se cumple que

$$f(\boldsymbol{x}) = T^k_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) + R_{\boldsymbol{a},k} f(\boldsymbol{x})$$

donde existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$R_{\boldsymbol{a},k} f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f(\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{h})}{\alpha!} \boldsymbol{h}^\alpha.$$

Demostración: Fijemos $\boldsymbol{x} \in A$ para definir

$$g(t) := f(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}))$$

que $g \in C^k(I; \mathbb{R})$ donde I es un intervalo abierto que contiene al 0 y al 1. Luego por teorema de Taylor real se cumple que

$$g(t) = \sum_{r=0}^{k} \frac{g^{(r)}(0)}{r!} t^r$$

por lo que basta deducir qué es $g^{(r)}(0)$: Es claro que $g(0) = f(\boldsymbol{a})$ y por regla de la cadena:

$$g'(t) := \boldsymbol{h} \cdot \vec{\nabla} f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \frac{\partial f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h})}{\partial x_i},$$

iterando varias veces vemos que

$$g''(t) := \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \sum_{j=1}^{n} h_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h})}{\partial x_i},$$

y así sucesivamente. La única cuestión es que las sumatorias anodadas no consideran el teorema de Schwarz que indica que $D_{ij} f = D_{ji} f$ por ejemplo, entonces cada derivada de un multi-índice α viene multiplicada por un natural n_α que indica cuantas veces aparece en la fórmula, que de hecho cuenta las distintas formas de ordenar los ∂x_i en el denominador. Pero éste corresponde de hecho a los índices del teorema multinomial, de modo que

$$\frac{n_\alpha}{r!} = \frac{1}{r!} \binom{r}{\alpha} = \frac{1}{\alpha!},$$

lo que completa la demostración. □

7.2 Introducción a las curvas

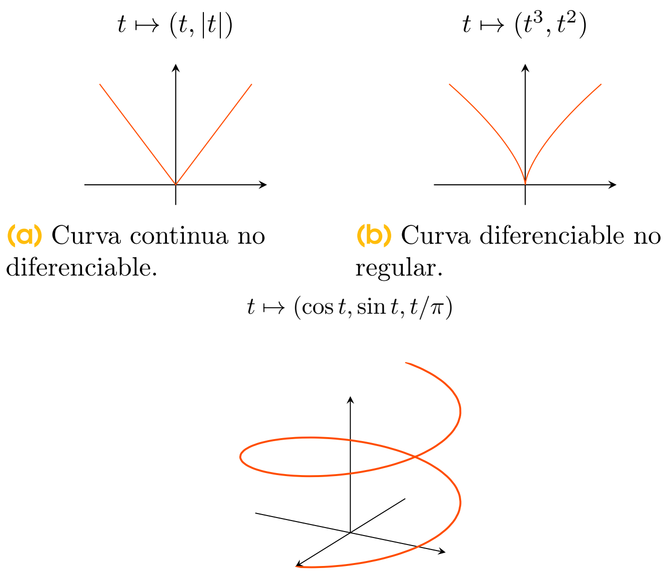
Definición 7.32: Sea $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, donde I es cualquier conexo (intervalo) en $\mathbb{R}$. Se dice que γ es una:

Curva continua Si γ es continua.

Curva diferenciable Si γ es de clase C^∞.

Curva regular Si γ es diferenciable y además $\gamma'(t) \neq \vec{0}$ para todo $t \in I$.

En todo caso se le llama t al *parámetro* de la curva.



(a) Curva continua no diferenciable.

(b) Curva diferenciable no regular.

(c) Curva regular.

Figura 7.2. Ejemplos de curvas.

Definición 7.33: Dada una curva diferenciable $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ inyectiva, definimos su *longitud* por la integral

$$\int_I \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Ejemplo. La longitud de la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dada por $t \mapsto (t^3, t^2)$, es

$$L = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \|(2t, 3t^2)\| \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 9t^4} \, \mathrm{d}t.$$

Primero saquemos un $4t^2$ fuera de la raíz y sustituyamos $x = \frac{3}{2}t$ para obtener

$$L = \int_0^1 2t\sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}t\right)^2} \, \mathrm{d}t = \frac{8}{9} \int_0^{3/2} x\sqrt{1 + x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Luego aplicando la sustitución $u = 1 + x^2$ con $\mathrm{d}u = 2x \, \mathrm{d}x$ se obtiene que

$$L = \frac{4}{9} \int_{x=0}^{x=3/2} u^{1/2} \, \mathrm{d}u = \frac{4}{9} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_{u=0}^{u=13/4} = \frac{8}{27} \left(\frac{13}{4} \right)^{3/2}.$$

Lo que da $L \approx 1{,}43971$.

Definición 7.34: Dada una curva diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$. Se dice que $\beta : J \to \mathbb{R}^n$ es una *reparametrización* de α si existe una función $f : J \to I$ que sea un difeomorfismo creciente tal que $\beta = f \circ \alpha$. En general se denota por s al parámetro de β, para hacer énfasis en que es una reparametrización.

Proposición 7.35: La longitud de una curva diferenciable es invariante por reparametrizaciones.

Demostración: En primer lugar, nótese que por regla de la cadena

$$\beta'(s) = \alpha'(f(s)) \cdot \underbrace{f'(s)}_{\in \mathbb{R}},$$

y en segundo lugar, el hecho de que f sea creciente se traduce en que $f'(s) > 0$. Así pues

$$L_\beta = \int_J \|\beta'(s)\| \, \mathrm{d}s = \int_J \|\alpha'(f(s))\| \cdot f'(s) \, \mathrm{d}s,$$

pero ahora, literalmente basta aplicar cambio de variable pues $s \mapsto \|\alpha'(f(s))\|$ es una función real y continua. Y así se concluye el enunciado. $\square$

El lector habrá observado que si eliminamos la condición de *creciente* en la reparametrización, entonces la proposición sigue teniendo validez; ésto es cierto, pero dicha condición será útil más tarde.

De momento una aplicación interesante es la siguiente:

Proposición 7.36: Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular. Entonces posee una reparametrización $\beta : J \to \mathbb{R}^n$ tal que $\|\beta(s)\| = 1$ para todo $s \in I$.

Demostración: Sea $t_0 \in I$ cualquiera. Entonces definamos $g : I \to \mathbb{R}$

$$g(s) := \int_{t_0}^{s} \|\alpha'(t)\| \,\mathrm{d}t,$$

claramente g es función suave. Más aún, por teorema fundamental del cálculo y por ser regular demuestra ser un difeomorfismo (restringiendo el codominio) creciente. Así pues sea $f := g^{-1} : J \to I$ que también es un difeomorfismo creciente, y sea $\beta := f \circ \alpha$. Finalmente, por regla de la cadena y el teorema de la función inversa se tiene que

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(f(s))\| \cdot f(s) = \|\alpha'(f(s))\| \cdot \frac{1}{\|\alpha'(f(s))\|} = 1,$$

para todo $s \in J$. □

Definición 7.37: Una curva regular $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ tal que $\|\gamma'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$ se dice que está *parametrizada por longitud de arco*.

La proposición anterior dice que toda curva regular se puede reparametrizar por longitud de arco.

En ésta sección queremos llegar a una clasificación de curvas, de modo que reducir un parámetro como la «velocidad» de la curva es algo útil. Primero restringiremos aún más nuestros objetos de estudio y definiremos una serie de conceptos vitales:

Definición 7.38: Se dice que $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ es una *curva de Frenet* si es regular, está parametrizada por longitud de arco y $\gamma''(s)$ nunca se anula.

En una curva de Frenet se definen:

$$\boldsymbol{T}(s) := \gamma'(s), \quad \kappa(s) := \|\gamma''(s)\|, \quad \boldsymbol{N}(s) := \frac{\gamma''(s)}{\kappa(s)},$$

donde a $\boldsymbol{T}(s)$, $\kappa(s)$ y $\boldsymbol{N}(s)$ se les dice *tangente*, *curvatura* y *vector normal* a la curva en s resp.

Ojo que las curvas de Frenet ahora ya no están en $\mathbb{R}^n$ sino en $\mathbb{R}^3$. Éste cambio nos permite trabajar con herramientas especiales del álgebra lineal, en particular con el producto cruz de vectores.

Lema 7.39: Sea $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva de Frenet. Entonces, para todo $s \in I$ se cumple que $\langle \boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s) \rangle = 0$, es decir, la tangente y la normal son perpendiculares.

Demostración: Basta notar que como γ es de Frenet, entonces está parametrizado por longitud de arco y $\|\boldsymbol{T}(s)\| = \langle \boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{T}(s) \rangle = 1$. Luego derivando por s a ambos lados se obtiene que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \langle \boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{T}(s) \rangle = \left\langle \boldsymbol{T}(s), \gamma''(s) \right\rangle + \left\langle \gamma''(s), \boldsymbol{T}(s) \right\rangle = 0,$$

pero $\gamma''(s) = \boldsymbol{N}(s)\kappa(s)$ y $\kappa(s)$ es nunca nula por ser de Frenet. Así se concluye el enunciado. □

Definición 7.40: En vista del lema anterior, para una curva de Frenet $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ se define

$$\boldsymbol{B}(s) := \boldsymbol{T}(s) \times \boldsymbol{N}(s)$$

al que se le llama *vector binormal* de la curva en s.

Nótese que $\{\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s)\}$ forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ para todo punto.

Lema 7.41: Sea $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva de Frenet. Entonces, para todo $s \in I$ se cumple que $\boldsymbol{B}'(s) \parallel \boldsymbol{N}(s)$.

Demostración: Nótese que

$$\boldsymbol{B}'(s) = \cancelto{0}{\boldsymbol{T}'(s) \times \boldsymbol{N}(s)} + \boldsymbol{T}(s) \times \boldsymbol{N}'(s).$$

Así pues $\boldsymbol{B}'(s)$ es perpendicular a $\boldsymbol{T}(s)$ y $\boldsymbol{N}'(s)$. Basta probar que $\boldsymbol{N}(s) \perp \boldsymbol{N}'(s)$. Para ello comencemos por notar que $\|\boldsymbol{N}(s)\| = \langle \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{N}(s) \rangle = 1$, luego derivando a ambos lados se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \langle \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{N}(s) \rangle = 2 \left\langle \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{N}'(s) \right\rangle = 0.$$ □

Definición 7.42: En vista del lema anterior, para una curva de Frenet $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ se define $\tau(s)$, la *torsión* en s, como el único real tal que $\boldsymbol{B}'(s) = \tau(s)\boldsymbol{N}(s)$.

He aquí la sorpresa: las funciones κ y τ determinan completamente a una curva de Frenet.

Lema 7.43: Sea $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un *movimiento rígido.*[1] Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es de Frenet, entonces $\beta := \alpha \circ M : I \to \mathbb{R}^3$ también es de Frenet y comparten curvatura y torsión.

[1]Es decir, una isometría que preserva la orientación. En particular $M(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}A + \boldsymbol{v}$, donde $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ cualquiera y $A \in \mathrm{SO}(3)$.

8

Integración y Teoría de la Medida

La medida pretende ser un método para cálcular una generalización de la longitud, el área y el volúmen; en principio es fácil construir medidas sobre conjuntos simples como segmentos, rectángulos y paralelepípedos, pero también nos gustaría medir cosas que no estén formadas a partir de finitas cajas, como esferas o conos por ejemplo.

La medida es una definición general de un objeto, sin embargo, hay unas medidas en particular que nos gustaría construir que corresponden a la medida de Jordan y la medida de Lebesgue, para lo cual, definiremos objetos más sencillos (como las medidas finitamente aditivas, y luego la medida externa) para poder extenderlos progresivamente.

8.1 Teoría de la Medida

Definición 8.1 – *Espacio de medida*: Sea Ω un conjunto que, al igual que en topología llamaremos *espacio*, se dice que $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una *álgebra* de conjuntos si:

A1. $\varnothing \in \Sigma$.

A2. Si $A, B \in \Sigma$, entonces $A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \Sigma$.

$\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-*álgebra* si:

σ-A1. $\varnothing \in \Sigma$.

σ-A2. $A \in \Sigma \implies A^c \in \Sigma$.

σ-A3. $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma \implies \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \Sigma$.

Una función $\mu\colon \Sigma \to [0, +\infty]$ se dice una *medida finitamente aditiva* si:

MF1. $\mu(\varnothing) = 0$.

MF2. Si $A_1, \cdots, A_n \in \Sigma$ son disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Si además, cumple:

M3. Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma$ son disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i).$$

entonces μ se dice una *medida* (a secas).

Una terna (Ω, B, μ) donde σ es un álgebra sobre Ω y μ finitamente aditiva, se dice un *espacio de medida booleana*. Una terna (Ω, Σ, μ) donde Σ es una σ-álgebra en Ω y μ una medida sobre Σ se dice un *espacio de medida*. Un elemento de Σ se dice un *conjunto medible*.

Ejemplos. Se cumple:

- Toda σ-álgebra es un álgebra.
- $\{\varnothing, \Omega\}$ y $\mathcal{P}(\Omega)$ son σ-álgebras, usualmente llamadas *impropias*.
- Si $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$, entonces

$$\mu(A) := \begin{cases} |A|, & A \text{ finito} \\ +\infty, & A \text{ infinito} \end{cases}$$

  es una medida, llamada la *medida de contabilidad*.

- Si $x \in \Omega$ arbitrario y $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$, entonces:

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$$

es una medida, llamada la *medida de Dirac*.

Proposición 8.2: Se cumple que:

1. La intersección de álgebras (resp. σ-álgebras) sobre un mismo conjunto Ω da otra álgebra (resp. σ-álgebra) sobre Ω.
2. Dada una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω, existe una mínima álgebra (resp. σ-álgebra) tal que $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$, en ese caso se le dice a Σ la álgebra (resp. σ-álgebra) inducida por $\mathcal{F}$.

Definición 8.3: Llamamos σ-álgebra de Borel a aquella inducida por la topología de un espacio topológico; vale decir, ésta σ-álgebra es la mínima tal que los conjuntos abiertos son medibles. Los conjuntos de la σ-álgebra de Borel se dicen *conjuntos de Borel*. Es fácil notar que los cerrados, F_σ y G_δ son ejemplos de conjuntos de Borel.

Proposición 8.4: Si Ω es un espacio de medida booleana, entonces, para todo A, B medibles:

1. Si A, B son disjuntos, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
2. Si $A \subseteq B$ y $\mu(A) < +\infty$; entonces $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
3. Si $A \subseteq B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.
4. $\mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
5. Si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es medibles y su unión también, entonces
$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i).$$
6. Si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es medibles, su unión también y $A_i \subseteq A_{i+1}$, entonces
$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sup_n \mu(A_n).$$
7. Si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es medibles, su unión también, $A_i \supseteq A_{i+1}$ y $\mu(A_0) < +\infty$, entonces
$$\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \inf_n \mu(A_n).$$

Definición 8.5: Un subconjunto de un espacio de medida se dice *nulo* si posee medida nula. Un espacio de medida es *completo* si todo subconjunto de un conjunto nulo es medible (y por lo tanto, es nulo también).

Proposición 8.6: Si (Ω, Σ, μ) es de medida, entonces posee una extensión mínima tal que

$$\bar{\Sigma} := \{M \cup S : M \in \Sigma \wedge S \subseteq N \wedge \mu(N) = 0\}$$

es un σ-álgebra que extiende a Σ y $\bar{\mu}$ es una medida sobre $\bar{\Sigma}$ tal que

$$\bar{\mu}(M \cup S) = \mu(M)$$

si S es subconjunto de un nulo y M es μ-medible. A $\bar{\mu}$ le decimos la *compleción* de μ.

Definición 8.7: Una función $\varphi : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ se dice una *medida externa* si:

1. $\varphi(\varnothing) = 0$.
2. $\varphi\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(A_i)$.

Un subconjunto $M \subseteq \Omega$ se dice φ-medible si para todo $A \subseteq \Omega$ se cumple

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap M) + \varphi(A \cap M^c).$$

Claramente toda medida finitamente aditiva sobre $\mathcal{P}(A)$ es externa, sin embargo, no toda medida finitamente aditiva está definida en $\mathcal{P}(A)$, pero veremos cómo hacerlo luego. En lo sucesivo φ siempre representará una medida externa.

Proposición 8.8: Se cumple:

1. Si $A \subseteq B$, entonces $\varphi(A) \leq \varphi(B)$.
2. Si N es tal que $\varphi(N) = 0$, entonces N es φ-medible. En particular, $\varnothing$ es φ-medible.
3. Si M es φ-medible, M^c también lo es.
4. Si M, N son φ-medibles, $M \cup N$ también lo es.

Demostración: Probaremos la última, si A es un conjunto cualquiera, como M es φ-medible entonces

$$\varphi(A \cap N^c) = \varphi(A \cap N^c \cap M) + \varphi(A \cap N^c \cap M^c).$$

Definamos $U := M \cup N$, nótese que $U^c = M^c \cap N^c$ y que $A \cap U = (A \cap N) \cup (A \cap N^c \cap M)$, luego

$$\varphi(A \cap U) \leq \varphi(A \cap N) + \varphi(A \cap M \cap N^c).$$

Observe el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned} \varphi(A \cap U) + \varphi(A \cap U^c) &\leq \varphi(A \cap N) + \varphi(A \cap M \cap N^c) + \varphi(A \cap U^c) \\ &= \varphi(A \cap N) + \varphi(A \cap N^c) = \varphi(A), \end{aligned}$$

como se quería probar. □

Lema 8.9: Si $M_1, \dots, M_n$ son una secuencia finita de conjunto φ-medibles dos a dos y A es arbitrario, entonces

$$\varphi\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} M_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(A \cap M_i).$$

Pista: Usar inducción. □

Teorema 8.10 – *Teorema de extensión de Carathéodory*: Si φ es una medida externa, entonces si Σ_φ es la familia de subconjuntos φ-medibles se cumple que $\mu := \varphi \upharpoonright \Sigma_\varphi$ es una medida completa y Σ_φ un σ-álgebra.

Demostración:

i) Los φ-medibles forman un σ-álgebra: De la proposición anterior se deduce la completitud y que el conjunto de medibles es un álgebra booleana, de lo cuál simplemente desprenderemos que la resta de medibles es medible; ahora veremos que los medibles también son cerrados bajo uniones numerables. Sean $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de φ-medibles, sea

$$E_k := \bigcup_{i=0}^{k} M_i, \quad M := \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i.$$

Por definición $E_k \subseteq M$, ergo, $E_k^c \supseteq M^c$; es claro que los E_k son φ-medibles, luego, para A arbitrario:

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E_k) + \varphi(A \cap E_k^c) \geq \varphi(A \cap E_k) + \varphi(A \cap M^c).$$

Aquí nos permitiremos definir $F_0 := M_0$ y $F_{n+1} := M_{n+1} \setminus E_n$, de modo que $E_k = \bigcup_{i=0}^k F_i$ y los F_i son disjuntos dos a dos, luego por el lema anterior

$$\varphi(A) \geq \sum_{i=0}^{k} \varphi(A \cap F_i) + \varphi(A \cap M^c),$$

con lo que se concluye que

$$\varphi(A) \geq \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(A \cap F_i) + \varphi(A \cap M^c) \geq \varphi(A \cap M) + \varphi(A \cap M^c).$$

ii) φ es medida: Se sabe que $\varphi(\varnothing) = 0$ y de que sólo toma valores positivos. En primer lugar veamos un dato sencillo, que si A, B son φ-medibles disjuntos entonces:

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B),$$

esto se deduce porque A es φ-medible, luego con $U := A \cap B$ se concluye que

$$\varphi(U) = \varphi(U \cap A) + \varphi(U \cap A^c).$$

Sea $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de φ-medibles disjuntos dos a dos, sea $E_k := \bigcup_{i=0}^k M_i$ y $M := \bigcup_{i=0}^\infty M_i$. Por definición de medida externa tenemos una desigualdad, probaremos la contraria, para ello usaremos el dato anterior y el que $E_k \subseteq M$ para notar que

$$\sum_{i=0}^{k} \varphi(M_i) = \varphi(E_k) \leq \varphi(M),$$

luego como es cota superior se cumple que $\sum_{i=0}^\infty \varphi(M_i) \leq \varphi(M)$, que es lo que se quería probar. □

Definición 8.11 (Pre-medida): Si $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \to [0, +\infty]$ es una medida finitamente aditiva que cumple que: Si $E_{i i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}_0$ son disjuntos dos a dos, tales que $E := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \mathcal{B}_0$, entonces

$$\mu_0\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_0(E_i).$$

Entonces se dice que μ_0 es una *pre-medida*.

Teorema 8.12 – *Teorema de extensión de Hahn-Kolmogorov*: Toda pre-medida está contenida en una medida completa.

Demostración: Sea μ_0 una pre-medida sobre $\mathcal{B}_0$, definimos $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ como

$$\mu_e(S) := \inf \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_0(A_i) : S \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \land \forall i \in \mathbb{N}\ (A_i \in \mathcal{B}_0) \right\}.$$

Es fácil notar que μ_e es un medida externa, pero basta probar dos cosas más:

I) <u>Todo μ_0-medible es μ_e-medible:</u> Sea $M \in \mathcal{B}_0$ y A arbitrario, hemos de probar que

$$\mu_e(A) \geq \mu_e(A \cap M) + \mu_e(A \cap M^c).$$

Si $\mu_e(A) = +\infty$ entonces es trivial, así que supondremos lo contrario. Sea $\epsilon > 0$, por definición de μ_e se cumple que existe una sucesión $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}_0$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i$ y que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_0(M_i) \leq \mu_e(A) + \epsilon,$$

luego la sucesión $\{M_i \cap M\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}_0$ cubre a $A \cap M$ y análogamente se cumple que

$$\mu_e(A \cap M) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_0(M_i \cap M), \quad \mu_e(A \cap M^c) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_0(M_i \cap M^c).$$

Como μ_0 es una pre-medida, entonces $\mu_0(M_i \cap M) + \mu_0(M_i \cap M^c) = \mu_0(M_i)$, por lo que

$$\mu_e(A \cap M) + \mu_e(A \cap M^c) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_0(M_i) \leq \mu_e(A) + \epsilon,$$

y como se cumple para cualquier $\epsilon > 0$, en particular, se da lo que se quería probar.

II) <u>μ_e concuerda con μ_0:</u> Es inmediato que si $M \in \mathcal{B}_0$, entonces $\mu_e(M) \leq \mu_0(M)$. Sea $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}_0$ tal que cubre a M, entonces definimos

$$F_k := E_k \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} E_i$$

que es una sucesión de μ_0-medibles disjuntos dos a dos que cubren a M, luego $G_k := F_k \cap M$ es también una sucesión de μ_0-medibles disjuntos dos a dos, pero que cumplen que su unión (que es M) pertenece a $\mathcal{B}_0$, luego, por definición de pre-medida, la suma de sus medidas ha de ser $\mu_0(M)$ probando así que $\mu_0(M) \leq \mu_e(M)$. □

La extensión construida en la demostración le llamaremos la extensión de Hahn-Kolmogorov, y análogamente con la extensión de Carathéodory.

Las dos siguientes subsecciones presentan ejemplos clásicos de como aplicar las construcciones que hemos realizado:

§8.1.1 Medida de Jordan y de Lebesgue. La medida de Jordan es un ejemplo de una (casi) medida intuitiva, su estudio es opcional, sin embargo otorga la intuición de cómo conseguir construir la medida de Lebesgue.

Definición 8.13: Llamamos una *celda* a un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que resuta el producto de intervalos acotados. Denotamos por $\mathcal{C}^n$ al conjunto de las celdas de $\mathbb{R}^n$. Otro subconjunto es *elemental* si es la unión de finitas celdas. Denotamos por $\mathcal{E}^n$ al conjunto de las figuras elementales de $\mathbb{R}^n$.

Se define $m_c : \mathcal{C}^n \to [0, +\infty)$ como prosigue, si $(I_i)_{i=1}^n$ es una sucesión de intervalos tales que $a_k := \inf I_k$ y $b_k := \sup I_k$, entonces

$$m_c\left(\prod_{i=1}^n I_i\right) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

De momento, m_c no resulta ser ni siquiera una medida finitamente aditiva, pero pretendemos extenderla a una.

Proposición 8.14: Si $A, B \in \mathcal{E}^n$, entonces:

1. $A \cup B \in \mathcal{E}^n$.
2. $A \cap B \in \mathcal{E}^n$.
3. $A \setminus B \in \mathcal{E}^n$.
4. $\boldsymbol{v} + A \in \mathcal{E}^n$, donde $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.

Demostración: Supongamos que $A = \bigcup_{k=1}^p C_k$ y $B = \bigcup_{k=1}^q D_k$ con $C_k, D_k \in \mathcal{C}^n$.

1. Trivial.

2. Basta notar que
$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^{p} \bigcup_{j=1}^{q} (C_i \cap D_j),$$
y queda al lector ver que la intersección de celdas es una celda.

3. Basta probar que si B está contenido en una celda C, entonces $C \setminus B \in \mathcal{E}^n$ (pues en cuyo caso $A \setminus B = A \cap (C \setminus B)$ con $A \cup B \subseteq C$).

4. Ejercicio para el lector. □

Lema 8.15: Si $E \in \mathcal{E}^n$, entonces:

1. E es la unión de cajas disjuntas dos a dos.

2. Si $A_1, \dots, A_p$ y $B_1, \dots, B_q$ son sucesiones finitas de cajas disjuntas dos a dos tales que $\bigcup_{i=1}^p A_i = \bigcup_{i=1}^q B_i$, entonces $\sum_{i=1}^p m_c(A_i) = \sum_{i=1}^q m_c(B_i)$.

Demostración:

1. Supongamos que $n = 1$, en cuyo caso $E = I_1 \cup \cdots \cup I_k$, luego hay a lo más $2k$ puntos que representan los extremos de los intervalos, luego bastaría una simple inducción para notar que para k intervalos se pueden reemplazar por una familia finita disjunta de ellos. Si $n > 1$, sale por inducción con lo que basta probar el caso de dos celdas, que queda para el lector.

2. Para ello veremos que si I es un intervalo, entonces
$$m_c(I) = \lim_n \frac{1}{n} \left| I \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z} \right|,$$
en efecto supongamos que $I = [a, b]$, entonces
$$\left| [a, b] \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z} \right| = |\{m \in \mathbb{Z} : na \le m \le nb\}|$$
notemos que $\{\lfloor na \rfloor + 1, \dots, \lfloor nb \rfloor\} \subseteq \{m \in \mathbb{Z} : na \le m \le nb\} \subseteq \{\lfloor na \rfloor, \dots, \lfloor nb \rfloor + 1\}$. Luego se cumple que el conjunto tiene un cardinal entre $\lfloor nb \rfloor - \lfloor na \rfloor$ y $\lfloor nb \rfloor - \lfloor na \rfloor + 2$, y se sabe que
$$\lim_n \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$$

(¿por qué?), por ende se cumple lo deseado.

Luego, si $C := \prod_{i=1}^d I_i \in \mathcal{C}^d$, entonces

$$m_c(C) = \lim_n \frac{1}{n^d}\left| C \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^d \right|;$$

con lo cual es fácil probar que si $E := \bigcup_{i=1}^p A_i$ donde A_i son cajas disjuntas dos a dos, entonces

$$\sum_{i=1}^p m_c(A_i) = \lim_n \frac{1}{n^d}\left| E \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^d \right|$$

donde la expresión de la derecha no depende de la partición elegida. □

La medida finitamente aditiva definida en el último inciso la llamaremos *medida elemental*.

Teorema 8.16: Existe una única medida finitamente aditiva $m : \mathcal{E}^n \to [0, +\infty)$ tal que:

1. $m([0,1]^n) = 1$.
2. $m(\boldsymbol{v} + E) = m(E)$ para todo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ y $E \in \mathcal{E}^n$.

Demostración: La idea sería probar que la medida restringida a las cajas es necesariamente m_c, de lo que se aplica el lema anterior para concluir que m debe ser la descrita anteriormente; en general nos restringiremos a $\mathbb{R}^2$, pero las pruebas funcionan generalmente. Para ello primero se prueba que si tenemos el producto de $[0,1]$ y $\{0\}$ en alguna coordenada, entonces su medida ha de ser nula, por lo cual llamemos $\ell := m([0,1] \times \{0\})$, luego $m\left(\cup_{k=1}^n [0,1] \times \{k/n\}\right) = n\ell$ y $\cup_{k=1}^n [0,1] \times \{k/n\} \subseteq [0,1]^2$, por lo que $\ell = 0$, con esto se concluye que no importa si el intervalo posee o no los bordes. Como $[0,1] \times [0,n) = \bigcup_{k=1}^n [0,1] \times [k-1,k)$ se concluye que tiene medida n. Así mismo como $[0,1] \times [0,1/n]$ copiado n veces da $[0,1]^2$, entonces tiene medida $1/n$. Por lo que m concluye con m_c en caso de celdas de coordenadas racionales. Para concluir el caso real, basta aproximar por coordenadas racionales, ya que la medida conserva el orden de la contención de los conjuntos. □

Definición 8.17 – *Medida de Jordan*: Dado $A \subseteq \mathbb{R}^d$, denotamos

$$J_*(A) := \sup\{m_e(E) : A \supseteq E \in \mathcal{E}^d\}, \; J^*(A) := \inf\{m_e(E) : A \subseteq E \in \mathcal{E}^d\};$$

donde m_e es la medida elemental.

Diremos que un conjunto A es Jordan-medible si $J_*(A) = J^*(A) =: m_J(A)$ donde m_J denota la *medida de Jordan* (conste que aún no hemos comprobado que sea una medida). La clase de los conjuntos Jordan-medibles de $\mathbb{R}^d$ se denota $\mathcal{J}^d$.

Proposición 8.18: Un conjunto acotado $A \subseteq \mathbb{R}^d$ es Jordan-medible syss para todo $\epsilon > 0$ existen E_1, E_2 elementales tales que $E_1 \subseteq A \subseteq E_2$ y que $m_e(E_2 \setminus E_1) < \epsilon$.

Demostración: $\Longrightarrow$. Si A es Jordan-medible, entonces por definición de supremo e ínfimo para todo $\epsilon > 0$ existen E_1, E_2 elementales tales que $E_1 \subseteq A \subseteq E_2$ y que $m_e(E_2) - m_J(A) < \epsilon/2$ y $m_J(A) - m_e(E_2) < \epsilon/2$, luego

$$m_e(E_2 \setminus E_1) = m_e(E_2) - m_e(E_1) < \epsilon.$$

$\Longleftarrow$. Por definición se cumple que

$$0 \le J^*(A) - J_*(A) \le m_e(E_2) - m_e(E_1) = m_e(E_2 \setminus E_1) < \epsilon,$$

para todo $\epsilon > 0$, luego $J_*(A) = J^*(A)$, es decir, A es Jordan-medible. □

Teorema 8.19: $\mathcal{J}^d$ es un álgebra que contiene a $\mathcal{E}^d$ y la medida de Jordan es una medida finitamente aditiva que extiende a la medida elemental.

Demostración: Es claro que las figuras elementales son Jordan-medibles y que conservan su medida.

Sea $\epsilon > 0$ y sean A, B son Jordan-medibles, entonces la propiedad anterior comprueba que existen A_1, A_2, B_1, B_2 elementales tales que $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$, $m_e(A_2 \setminus A_1) < \epsilon/2$ y análogamente para B.

i) Unión de finitos Jordan-medibles es Jordan-medible: Sea $C_1 := A_1 \cup B_1 \subseteq A \cup B \subseteq C_2 := A_2 \cup B_2$ y vemos que se cumple que

$$m_e(C_2 \setminus C_1) = m_e\big((A_2 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus B_1)\big) \le m_e(A_2 \setminus A_1) + m_e(B_2 \setminus B_1) < \epsilon.$$

Queda al lector probar que la propiedad aditiva se da.

ii) Resta de Jordan-medibles es Jordan-medible: Sea $D_1 := A_1 \setminus B_2 \subseteq A \setminus B \subseteq D_2 := B_2 \setminus A_1$, entonces

$$m_e(D_2 \setminus D_1) = m_e\big((A_2 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus B_1)\big) < \epsilon. \qquad \square$$

Proposición 8.20: Si $A \in \mathcal{J}^d$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existen K compacto y U abierto tales que $K \subseteq A \subseteq U$ y $m_e(U \setminus K) < \epsilon$.

Demostración: La prueba es algo así, comenzaremos por el caso en que A es una celda y veremos inductivamente sobre la dimensión del espacio que existen $K \subseteq A$ tal que $m_J(A \setminus K) < \epsilon$ y $m_J(U \setminus A) < \epsilon$. Así dado que los conjuntos Jordan-medibles pueden ser aproximados por elementales, y los elementales son unión finita de celdas, podemos aproximar esos elementales por debajo por compactos, y los elementales por arriba por abiertos.

Sea $\epsilon > 0$. Sea A de extremos $a < b$, luego sea $r := \min(b - a, \epsilon)/2$ de modo que $K := [a + r/2, b - r/2] \subseteq A$ y $m_J(A \setminus K) = r < \epsilon$. Así mismo $U := (a - \epsilon/3, b + \epsilon/3)$ cumple que $m_J(U \setminus A) < \epsilon$.
Si $A \in \mathcal{C}^d$ de medida α e I es un intervalo de extremos $a < b$ de medida β, entonces $A \times I \in \mathcal{C}^d$ y claramente $m_J(A \times I) = \alpha\beta$. Sea $r := \min\left(1, \frac{\epsilon}{\alpha+\beta+1}\right)$, luego existen K_1, K_2 compactos tales que $m_J(A \setminus K_1), m_J(I \setminus K_2) < r$, luego $m_J(K_1 \times K_2) > (\alpha - r)(\beta - r) = \alpha\beta - r(\alpha + \beta - r) \geq \alpha\beta - \epsilon$, con lo que $m_J(A \times I \setminus K_1 \times K_2) < \epsilon$. Es similar para lo del abierto.

Es fácil extender la prueba para admitir aproximaciones a conjuntos elementales, basta dividir el epsilon según la cantidad de celdas en las que se descompone. □

Teorema (AEN) 8.21: La medida de Jordan es una pre-medida, i.e., si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{J}^d$ son tales que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{J}^d$, entonces

$$m_J\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} m_J(A_i).$$

Demostración: Sea $A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\sum_{i=0}^{n} m_J(A_i) = m_J\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right) \leq m_J(A),$$

luego $\sum_{i=0}^{\infty} m_J(A_i) \leq m_J(A)$.

Sea $\epsilon > 0$, para la otra implicancia utilizaremos la proposición anterior para conseguir un K elemental y compacto tal que $K \subseteq A$ y para el cuál $m_J(A \setminus K) < \epsilon/2$. Por otro lado, para todo A_i existe un elemental y abierto U_i tal que $A_i \subseteq U_i$ y $m_J(U_i \setminus A_i) < \epsilon/2^{i+2}$. Como $K \subseteq A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ y K es compacto, entonces existe $U_{k_1}, \dots, U_{k_n}$ que cubren a K, luego

$$\begin{aligned} m_J(A) = m_J(A \setminus K) + m_J(K) &\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} m_J(U_{k_i}) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} m_J(A_{k_i}) + \sum_{i=1}^{n} m_J(U_{k_i} \setminus A_{k_i}) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i\in\mathbb{N}} m_J(A_i) + \sum_{i\in\mathbb{N}} m_J(U_i \setminus A_i) \\ &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} m_J(A_i) + \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$, luego se sostiene la igualdad. □

Definición 8.22: Se le llama *medida de Lebesgue* a la extensión de Hahn-Kolmogorov de la medida de Jordan. Los clase de los conjuntos Lebesgue-medibles se denota por $\mathcal{M}^d$. En lo sucesivo denotaremos μ a la medida de Lebesgue de no haber ambigüedad, y a los conjuntos Lebesgue-medibles les llamaremos medibles a secas.

Corolario 8.23: Todo conjunto Lebesgue-medible es la unión entre un conjunto de Borel y un subconjunto de un conjunto nulo.

Ejemplo 8.24 (conjunto de Cantor)**:** Sea C el conjunto de Cantor construido en el teorema 1.45, ya vimos en la demostración que no es numerable y otra notación es que en cada paso el conjunto de Cantor está contenido en un conjunto de medida de Lebesgue $1/3^n$, así que se comprueba que es nulo. ⌟

Corolario 8.25: Hay $2^{\mathfrak{c}}$ conjuntos Lebesgue-medibles.

Nótese que hay $2^{\mathfrak{c}}$ subconjuntos de $\mathbb{R}$ en general así que habría posibilidad de que todos ellos fueran medibles, por lo tanto, queda preguntarse si existen conjuntos no Lebesgue-medibles, y según las formas del axioma de elección se pueden construir varios de ellos que se presentan en la sección § A.1, cabe destacar que en todos los casos se construyen $2^{\mathfrak{c}}$ conjuntos no medibles. Curiosamente, Solovay probó que hay un modelo de ZF consistente, donde se cumple DE, AE falla y no hay conjuntos no Lebesgue-medibles.

Teorema 8.26 – *Primer principio de Littlewood*: Si F es medible y finito, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe una figura elemental E tal que $\mu(F \Delta E) < \epsilon$.

DEMOSTRACIÓN: Por definición si F es medible existe $\bigcup_{i=0}^{\infty} C_i$ donde C_i son celdas tales que

$$F \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \mu(C_i) \leq \mu(E) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Como la serie de la derecha converge, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(C_i) < \epsilon/2$, luego si $E := \bigcup_{i=0}^{n} C_i$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\mu(F \Delta E) &= \mu(F \setminus E) + \mu(E \setminus F) \\
&\leq \mu\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} C_i\right) + \mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} C_i \setminus F\right) \\
&\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(C_i) + \sum_{i=0}^{\infty} \mu(C_i) - \mu(F) \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

□

8.2 Funciones medibles

Definición 8.27: Si $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ son espacios dotados de σ-álgebras, entonces una función $f : X \to Y$ se dice $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-*medible* si le preimagen de todo $\mathcal{B}$-medible es $\mathcal{A}$-medible. Si Y es un espacio topológico y no se indica su σ-álgebra, entonces se asume que es la de Borel. Si $X = \mathbb{R}^d$, entonces se dice que la función es *Lebesgue* (resp. *Borel*)-*medible* si $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra de Lebesgue (resp. Borel).

Una aclaración es que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es Lebesgue-medible cuando la preimagen de todo conjunto de Borel en $\mathbb{R}^m$ es Lebesgue-medible; no es necesario exigir que todo Lebesgue-medible en $\mathbb{R}^m$ tenga preimagen Lebesgue-medible, ya que dicha condición es bastante más fuerte.

Proposición 8.28: Si $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B}), (Z, \mathcal{C})$ son de medida, entonces:

1. $\mathrm{Id}_X : X \to X$ es $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$-medible.

2. Si f es $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-medible y g es $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$-medible, entonces $f \circ g$ es $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$-medible. En consecuencia, los espacios de medida (como objetos) y las funciones medibles entre ellos (como flechas) conforman una categoría denotada Meas.

3. Las funciones continuas son Borel-medibles.

4. La composición de Borel-medibles es Borel-medible.

5. Si $f \colon \mathbb{R}^d \to X$ es Borel-medible, entonces es Lebesgue-medible.

6. Si $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es Lebesgue-medible y $g \colon R^m \to X$ es Borel-medible, entonces $f \circ g \colon \mathbb{R}^n \to X$ es Lebesgue-medible.

7. $f \colon X \to \mathbb{R}^d$ es $\mathcal{A}$-medible syss $f \circ \pi_i$ lo es.

Proposición 8.29: Sean Ω un espacio de medida, Y un espacio métrico y $(f_n \colon \Omega \to Y)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tales que convergen puntualmente a f. Entonces f es medible.

Demostración: Sea U un abierto no vacío de Y. Sea $x \in f^{-1}[U]$, entonces como $f(x) \in U$ existe un m tal que para todo $k \geq m$ se cumple que $f_k(x) \in U$, por lo que

$$f^{-1}[U] \subseteq \bigcup_{k=m}^{\infty} f_k^{-1}[U],$$

como ésto aplica para todo m, entonces se satisface que

$$f^{-1}[U] \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} f_k^{-1}[U].$$

Sea C un cerrado no vacío de Y, si

$$x \in \bigcup_{k=m} f_k^{-1}[C]$$

es porque $f_k(x) \in C$ para algún $k \geq m$. Si ésto aplica para todo m, es porque existe una subsucesión de $f_k(x)$ completamente contenida en C, luego se sigue que

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} f_k^{-1}[C] \subseteq f^{-1}[C].$$

Fijemos un abierto no vacío V de Y. Luego V^c es cerrado y ya hemos visto que $y \in V^c$ syss $d(y, V^c) = 0$. Por ende, definamos

$$U_n := \left\{ y \in Y : d(y, V^c) > \frac{1}{n} \right\}, \qquad C_n := \left\{ y \in Y : d(y, V^c) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Entonces $V^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n^c$, o equivalentemente

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Finalmente, veamos que la preimagen de V es medible pues:

$$\begin{aligned} f^{-1}[V] &\supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}[C_n] \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} f_k^{-1}[C_n] \\ &\supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} f_k^{-1}[U_n] \end{aligned}$$

y que

$$f^{-1}[V] = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}[U_n] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} f_k^{-1}[U_n]$$

□

Definición 8.30: Si Ω es de medida μ, se dice que una propiedad se cumple[a] *μ-casi dondequiera* (abreviado μ-c.d.) si se cumple en el complemento de un conjunto nulo. Si no hay ambigüedad sobre los signos se puede obviar el "μ-".

[a] En inglés, *almost everywhere* (a.e.). En español no hay consenso, otros autores usan *por casi todas partes* (p.c.t.p.) y *casi todo punto* (c.t.p.).

Proposición 8.31: Si $f, g \colon X \to Y$ con f medible, X de medida completa μ y si se cumple que $f = g$ en μ-c.d., entonces g es medible.

Teorema 8.32: Si Ω es de medida y $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, entonces son equivalentes:

1. f es medible.
2. Para todo $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se cumple que $\{x \in \Omega : f(x) < a\}$ es medible.
3. Para todo $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se cumple que $\{x \in \Omega : f(x) \leq a\}$ es medible.

4. Para todo $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se cumple que $\{x \in \Omega : f(x) > a\}$ es medible.

5. Para todo $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se cumple que $\{x \in \Omega : f(x) \geq a\}$ es medible.

Proposición 8.33: Si $f : X \to Y$ es una función medible y $g : Y \to Z$ es Borel-medible, entonces $f \circ g$ es medible. En particular, $f \circ g$ es medible si g es continua.

Proposición 8.34: Sea X es un espacio de medida, sean Y, Z espacios topológicos y sea $f : X \to Y \times Z$. Si $f = g\Delta h$, entonces f es una función medible syss g, h lo son.

Proposición 8.35: Si $f, g : X \to \mathbb{R}^d$ es medible, entonces $f + g$, $\langle f, g\rangle$ (producto interno) y $f \cdot g$ (producto complejo) lo son.

Demostración: La prueba se reduce en aplicar la proposición anterior, pues la suma y el producto interno en espacios euclídeos es continua; el producto complejo es una función lineal, vista como operación sobre $\mathbb{R}^2$, luego también es continua. Sólo basta probar que $F(x) := (f(x), g(x))$ (es decir, la diagonal) sea medible. □

Teorema 8.36: Sean $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ una sucesión de funciones medibles, entonces

$$
\begin{aligned}
g_1(x) &:= \sup\{f_i(x) : i \in \mathbb{N}\}, \qquad & g_2(x) &:= \inf\{f_i(x) : i \in \mathbb{N}\} \\
h_1(x) &:= \limsup_i f_i(x), & h_2(x) &:= \liminf_i f_i(x)
\end{aligned}
$$

son también medibles.

Demostración: Probaremos sólo que g_1 lo es, ya que el resto es análogo. Para todo $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se cumple que

$$\{x \in X : g_1(x) > a\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_i(x) > a\}$$

que corresponde a la unión de numerables conjuntos medibles, por ende, da un conjunto medible. □

Corolario 8.37: Si $f_i : X \to \mathbb{R}^d$ son medibles, con X de medida completa, y se cumple c.d. que $g(x) = \lim_i f_i(x)$, entonces g es medible.

Corolario 8.38: Si $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ son medibles, entonces $\max(f, g)$ y $\min(f, g)$ también lo son.

En la integración de Riemann admitimos que una función es integrable cuando se aproxima por las llamadas «funciones escalón», en la teoría de Lebesgue hay un concepto análogo, pero que generaliza las funciones escalón:

Definición 8.39 – *Función simple*: Sea Ω un espacio de medida, se dice que una función $s\colon \Omega \to Y$ es una *función simple* si $s[\Omega]$ es finito (vale decir s solo toma finitos valores), cada $s^{-1}[\{c\}]$ es un conjunto medible de Ω, y s es no nulo en un conjunto finito de Ω.

Claramente toda función simple es medible, independiente de la σ-álgebra sobre el codominio, ésto es bastante útil para nuestra teoría, pero primero habría que ver que toda función se puede aproximar por funciones simples.

Teorema 8.40: Sea Ω un espacio de medida.

1. $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ es medible syss es el límite puntual de funciones simples.
2. $f\colon \Omega \to [0, \infty)$ es medible syss es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples.

Demostración:

1. Probaramos el caso $d = 1$: Para cada $n > 0$ se denotan por $J_1, \dots, J_N$ a los intervalos de la forma $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ con $-n^2 \leq k < n^2$. Así, definimos $E_k := f^{-1}[J_k]$, los cuales son conjuntos medibles disjuntos dos a dos, y así construimos $s_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$ con $s_n[E_k] = \{\inf(J_k)\}$ y cero en el resto de puntos. Finalmente, para todo $x \in \Omega$, se cumple que $f(x) > -n_0$ para algún n_0. Luego, para todo $n \geq n_0$, se cumple que $s_n(x)$ está a distancia menor que $1/n$ de $f(x)$, de modo que se concluye que $\lim_n s_n(x) = f(x)$.

   Queda al lector generalizarlo a $\mathbb{R}^d$.
2. La misma demostración anterior nos otorga dicha sucesión. □

El siguiente es también conocido como el tercer principio de Littlewood:

Teorema 8.41 – *Teorema de Egoroff*: Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles sobre E finito que convergen puntualmente c.d. a f; entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $A_\epsilon \subseteq E$ medible tal que $\mu(E \setminus A_\epsilon) \le \epsilon$ y que f_n converge uniformemente a f en A_ϵ.

Demostración: Redefiniremos E' como el conjunto de E donde f_n converge puntualmente a f. Sea $\epsilon > 0$, entonces para todo $n, k \in \mathbb{N}$ sea

$$A_k^n := \bigcap_{m=k}^{\infty} \left\{ x \in E' : |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \right\},$$

y es claro que si $i < j$ entonces $A_i^n \subseteq A_j^n$ y que $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k^n = E'$ por la convergencia puntual. Luego, ha de existir un k_n (podemos elegir el mínimo de ellos) tal que

$$\mu(E \setminus A_{k_n}^n) < \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Finalmente se define $A_\epsilon := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^n$, y notemos que

$$\mu(E \setminus A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus A_{k_n}^n) \right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \setminus A_{k_n}^n) = \epsilon,$$

además, para todo $m \ge k_n$ se cumple que

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$$

para todo $x \in A_{k_n}^n \supseteq A_\epsilon$, luego funciona para todo $x \in A_\epsilon$ lo que prueba el enunciado. □

El siguiente es también conocido como el segundo principio de Littlewood:

Teorema 8.42 – *Teorema de Lusin*: Sea X un espacio topológico y μ una medida finita de Borel sobre X. Sea $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible, que es finita μ-c.d. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe F_ϵ cerrado tal que $\mu(X \setminus F_\epsilon) < \epsilon$ y $f \restriction F_\epsilon$ es continua.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$. Para todo $i \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ particione $\mathbb{R}$ en los intervalos semi-abiertos $S_{i,j}$ de largo $1/i$ para $j = 1, 2, \dots$ Luego sea $A_{i,j} := f^{-1}[S_{i,j}]$, como $\mu(A_{i,j}) \le \mu(X) < \infty$ y μ es de Borel, existe $F_{i,j} \subseteq A_{i,j}$ cerrado tal que $\mu(A_{i,j} \setminus F_{i,j}) < \frac{\epsilon}{2^{i+j}}$. Sea

$$E_{i,k} := X \setminus \bigcup_{j=1}^{k} F_{i,j}$$

entonces, como $E_{i,1} \supseteq E_{i,2} \supseteq \cdots$ sea $E_{i,\infty} := \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{i,k}$, luego

$$\mu(E_{i,\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{i,j} \setminus F_{i,j}) < \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Por ende, existe K_i tal que $\mu(E_{K_i}) < \epsilon/2^i$. Para todo i, j sea $m_{i,j}$ el punto medio de $S_{i,j}$ y sea $B_i := \bigcup_{j=1}^{K_i} F_{i,j}$, entonces sea g_i la función continua sobre B_i tal que $g_i(x) = m_{i,j}$ si $x \in F_{i,j}$ (pues son disjuntos dos a dos). Luego para todo $i \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ se cumple que $|f(x) - g_i(x)| < 1/i$ para todo $x \in B_i$, por lo que, si $F_\epsilon := \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$, entonces se cumple que

$$\mu(X \setminus F_\epsilon) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(X \setminus B_i) < \epsilon,$$

y las $g_i \restriction F_\epsilon$ son una sucesión de continuas sobre F_ϵ que convergen uniformemente a f, luego f es continua en F_ϵ. □

8.3 Integración de Lebesgue

Pero del mismo modo podemos intercambiar los intervalos por cualquier conjunto (Lebesgue) medible y obtener una integral que es mucho mejor:

Definición 8.43: Sea Ω un espacio de medida μ. Dada una función $s\colon \Omega \to [0, +\infty)$ simple positiva

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{E_i}(x)$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, +\infty)$ y $E_1, \dots, E_n$ medibles disjuntos dos a dos. Se le llama la *integral* de s a

$$\int_\Omega s_n \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu(E_i),$$

con el convenio de que $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$. Se define también la integral de una función simple s en un conjunto medible E como

$$\int_E s\,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega s\chi_E\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i\mu(E_i \cap E).$$

En este sentido la función de Dirichlet no es más que una función simple según la medida de Lebesgue, luego su integral debería ser 0.

Proposición 8.44: Si s, t son funciones simples positivas sobre un espacio de medida Ω, entonces:

1. $\nu(E) := \int_E s\,\mathrm{d}\mu$ es una medida sobre Ω.
2. Se cumple que
$$\int_\Omega (s+t)\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega t\,\mathrm{d}\mu.$$
3. Si $\lambda \geq 0$, entonces
$$\int_\Omega (\lambda s)\,\mathrm{d}\mu = \lambda\int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu.$$
4. Si $s \leq t$ en todo el dominio, entonces
$$\int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega t\,\mathrm{d}\mu.$$

Definición 8.45: Si $f\colon \Omega \to [0, +\infty)$ es una función medible, entonces se define su *integral* como

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{\int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu : s \text{ simple positiva} \wedge s \leq f\right\}.$$

Si E es un conjunto medible, entonces se define

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega f\chi_E\,\mathrm{d}\mu.$$

Proposición 8.46: Si E es un conjunto medible, se cumple:

1. Si $0 \leq f \leq g$ medibles, entonces $\int_E f\,\mathrm{d}\mu \leq \int_E g\,\mathrm{d}\mu$.

2. Si $0 \leq f$ es función medible y $A \subseteq B$ son conjuntos medible, entonces $\int_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_B f \, \mathrm{d}\mu$.
3. Si $0 \leq f$ es función medible y $f|_E = 0$, entonces $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$.
4. Si $0 \leq f$ es función medible y E es nulo, entonces $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

Teorema 8.47 (de la convergencia monótona de Lebesgue): Si $f_i \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ son medibles tales que $0 \leq f_0 \leq f_1 \leq \cdots$, entonces

$$\int_X (\lim_i f_i) \, \mathrm{d}\mu = \lim_i \int_X f_i \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración: Sea $f := \lim_n f_n$ que es medible y sea $k := \lim_i \int_\Omega f_i \, \mathrm{d}\mu$, es claro que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $f_n \leq f$, luego $\int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$, por lo que

$$k \leq \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu.$$

Por otro lado, sea $0 \leq s \leq f$ simple y $c \in (0,1)$, denotaremos

$$E_n := \{x \in \Omega : cs(x) \leq f_n(x)\}$$

es claro que E_n es una sucesión creciente de conjuntos medibles que cumple que $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ (¿por qué?). Cómo $\nu(E) := \int_E s \, \mathrm{d}\mu$ es una medida, entonces se cumple que

$$k = \lim_n \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \lim_n c \int_{E_n} s \, \mathrm{d}\mu = c \int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu.$$

Dado que ocurre para todo $c \in (0,1)$, entonces se concluye que para toda $s \leq f$ simple se cumple que $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu \leq k$, ergo, $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \leq k$. □

Ejemplo. Sean $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas como

$$f_n(x) := n\chi_{(0,1/n]},$$

de modo que su límite puntual es la función nula.

Como las f_n's son todas funciones simples, son integrables y de hecho todas sus integrales son 1, sin embargo, su límite puntual tiene integral 0.

Corolario 8.48: Si $f_i \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ es una sucesión de funciones positivas medibles, entonces

$$\int_\Omega \sum_{i=0}^{\infty} f_i \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \int_\Omega f_i \, \mathrm{d}\mu.$$

Nótese que como toda función medible es un límite puntual de funciones simples (teo. 8.40), el teorema anterior nos dice que podemos calcular la integral mediante un límite de funciones simples que la aproximan. Ésto nos permite dar una mejor definición de integral:

Definición 8.49: Sea Ω un espacio de medida y X un espacio de Banach. Dada una función simple $s\colon \Omega \to X$:

$$s = \sum_{i=1}^{n} v_i \chi_{E_i},$$

entonces se define su integral como

$$\int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} v_i \mu(E_i).$$

Y si $A \subseteq \Omega$ es medible, se define:

$$\int_A s \,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega s \cdot \chi_A \,\mathrm{d}\mu.$$

Se denota por $\mathrm{St}(\Omega; X)$ al conjunto de funciones simples.

Proposición 8.50: Sea Ω un espacio de medida, $A \subseteq \Omega$ un conjunto medible y X un espacio de Banach sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces:

1. $\mathrm{St}(\Omega; X)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.
2. La siguiente aplicación:
$$\begin{aligned} \mathrm{St}(\Omega; X) &\longrightarrow X \\ s &\longmapsto \int_A s \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$
es lineal.
3. Sea $s \in \mathrm{St}(\Omega; X)$, entonces:
$$\left\| \int_A s \,\mathrm{d}\mu \right\| \le \int_A \|s\| \,\mathrm{d}\mu \le \|s\|_\infty \mu(A).$$
Nótese que A podría no ser finito, pero $\|s\|_\infty$ siempre es finito por la definición de simple.

4. Sea $s \in \mathrm{St}(\Omega; X)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\int_A \|\alpha s\| \, \mathrm{d}\mu = |\alpha| \int_A \|s\| \, \mathrm{d}\mu.$$

5. Sean $s, t \in \mathrm{St}(\Omega; X)$, entonces

$$\int_A \|s + t\| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_A \|s\| \, \mathrm{d}\mu + \int_A \|t\| \, \mathrm{d}\mu.$$

6. La aplicación:

$$\begin{aligned} \| \, \|_1 \colon \mathrm{St}(\Omega; X) &\longrightarrow X \\ s &\longmapsto \int_\Omega \|s\| \, \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

determina una seminorma, denominada la *seminorma* L^1.

De momento podríamos tener tres posibles topologías sobre St (y otros espacios de funciones): la dada por la convergencia puntual, la convergencia uniforme y la convergencia en seminorma L^1, por ello trataremos de ser lo más claros con respecto a cual en los subsiguientes resultados.

Lema 8.51: Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de Cauchy en $\mathrm{St}(\Omega; X)$ tales que su límite puntual (que no es necesariamente simple) es el mismo μ-c.d. Entonces

$$\lim_n \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_n \int_\Omega g_n \, \mathrm{d}\mu,$$

donde ambos límites existen.

Demostración: Definamos $h_n := f_n - s_n$, nótese que probar que los dos límites son iguales equivale a ver que

$$\lim_n \int_\Omega \|h_n\| \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Por definición de sucesión de Cauchy se tiene que para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que para todo $n, m \geq N$ se satisface que

$$\|h_n - h_m\|_1 < \frac{\epsilon}{4}.$$

Sea A un conjunto finito tal que f es nulo afuera de A, entonces para todo $n \geq N$ se cumple que

$$\int_{A^c} \|h_n\| \, \mathrm{d}\mu = \int_{A^c} \|h_n - h_N\| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_{\Omega} \|h_n - h_N\| \, \mathrm{d}\mu = \|h_n - h_N\|_1 < \frac{\epsilon}{4}.$$

Por el teorema de Egoroff, podemos elegir un conjunto medible B tal que

$$\mu(B) < \frac{\epsilon}{1 + \|f_N\|_\infty},$$

y que f_n converge uniformemente a 0 en $A \setminus B$. Por ende, existe un N' tal que para todo $n \geq N'$ se satisface que

$$\int_{A \setminus B} \|f_n\| \, \mathrm{d}\mu < \frac{\epsilon}{4}.$$

Luego para $n \geq N$ se satisface que

$$\begin{aligned} \int_B \|f_n\| \, \mathrm{d}\mu &\leq \int_B \|f_n - f_N\| \, \mathrm{d}\mu + \int_B \|f_N\| \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \|f_n - f_N\|_1 + \mu(B)\|f_N\|_1 < \frac{2\epsilon}{4}. \end{aligned}$$

Finalmente para todo $n \geq \max\{N, N'\}$ se tiene que:

$$\int_{\Omega} \|f_n\| \, \mathrm{d}\mu = \int_{A^c} \|f_n\| \, \mathrm{d}\mu + \int_{A \setminus B} \|f_n\| \, \mathrm{d}\mu + \int_B \|f_n\| \, \mathrm{d}\mu < \epsilon. \qquad \square$$

Definición 8.52: Se define $\mathscr{L}^1(\Omega; X)$ como las funciones medibles que sean el límite de una sucesión de Cauchy (bajo seminorma L^1) de funciones simples. A los elementos de $\mathscr{L}^1(\Omega; X)$ se les dicen *funciones integrables*.

Desde ahora en adelante

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x := \int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\mu(x)$$

donde $\mu(x)$ representa la medida de Lebesgue considerando a f con el parámetro x. Esta definición es útil pues extiende la integral de Riemann y concuerda con ella en los puntos definidos (¿por qué?).

Lema 8.53: Sea $f \in \mathscr{L}^1(\Omega; X)$ el límite (bajo seminorma L^1) de la sucesión de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{St}(\Omega; X)$. Entonces:

$$\int_X \|f\| \, \mathrm{d}\mu = \lim_n \int_X \|f_n\| \, \mathrm{d}\mu = \lim_n \|f_n\|_1.$$

Demostración: En primer lugar, notemos que $\|f_n\|$ es una sucesión de Cauchy de funciones simples: Para ello, nótese que

$$\big\| \|f_n\| - \|f_m\| \big\| \leq \|f_n - f_m\|.$$

y para concluir el lema vemos que

$$\begin{aligned} \big\| \|f_n\| - \|f_m\| \big\|_1 &= \int_\Omega \big\| \|f_n\| - \|f_m\| \big\| \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_\Omega \|f_n - f_m\| \, \mathrm{d}\mu = \|f_n - f_m\|_1. \end{aligned}$$ □

Teorema 8.54: Sea Ω un espacio de medida y X un espacio de Banach. Entonces $\mathscr{L}^1(\Omega; X)$ es un espacio seminormado completo.

Demostración: Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathscr{L}^1(\Omega; X)$, luego para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que para todo $n, m \geq N$ se cumple que

$$\|f_n - f_m\|_1 < \frac{\epsilon}{3}.$$

Sea $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathrm{St}(\Omega; X)$ tal que $\|g_n - f_n\|_1 < 1/n$. Eligiendo $N' \geq N$ tal que $1/N' < \epsilon/3$, entonces para todo $n, m \geq N'$ se cumple que:

$$\|g_n - g_m\|_1 \leq \|g_n - f_n\|_1 + \|f_n - f_m\|_1 + \|f_m - g_m\|_1 < \epsilon.$$

Luego g_n es una sucesión de Cauchy de funciones simples, por ende converge a una función integrable f que es también el límite de f_n. □

Teorema 8.55: Sean Ω un espacio de medida, X, Y dos espacios de Banach y $T \colon X \to Y$ una aplicación lineal continua. Entonces la aplicación:

$$\begin{aligned} h^T \colon \mathscr{L}^1(\Omega; X) &\longrightarrow \mathscr{L}^1(\Omega; Y) \\ f &\longmapsto f \circ T \end{aligned}$$

es lineal y continua. Más aún, para todo $f \in \mathscr{L}^1(\Omega; X)$ se satisface que

$$\int_\Omega (f \circ T) \, \mathrm{d}\mu = T\left(\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \right),$$

es decir, el siguiente diagrama conmuta (en TVS):

$$\begin{tikzcd} \mathscr{L}^1(\Omega;X) \arrow[r, "h^T"] \arrow[d, "\int_\Omega \mathrm{d}\mu"'] & \mathscr{L}^1(\Omega;Y) \arrow[d, "\int_\Omega \mathrm{d}\mu"] \\ X \arrow[r, "T"'] & Y \end{tikzcd}$$

Demostración: La linealidad de h^T es un hecho general de espacios de funciones sobre $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. La continuidad se reduce a ver que

$$\|h^T\| := \sup\{\|f\circ T\|_1 : \|f\|_1 = 1\} \le \|T\|.$$

Y el intercambio entre integral y aplicar T se reduce a una comprobación trivial sobre las funciones simples. □

Teorema 8.56: Sean Ω un espacio de medida y X, Y dos espacios de Banach. Entonces el siguiente es un isomorfismo topológico:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^1(\Omega; X\times Y) &\longrightarrow \mathscr{L}^1(\Omega;X)\times\mathscr{L}^1(\Omega;Y) \\ f &\longmapsto (f_1, f_2) \end{aligned}$$

que además hace conmutar el siguiente diagrama (en TVS):

$$\begin{tikzcd} \mathscr{L}^1(\Omega;X\times Y) \arrow[r, "(\pi_1,\pi_2)"] \arrow[d, "\int_\Omega \mathrm{d}\mu"'] & \mathscr{L}^1(\Omega;X)\times\mathscr{L}^1(\Omega;Y) \arrow[d, "\left(\int_\Omega \mathrm{d}\mu, \int_\Omega \mathrm{d}\mu\right)"] \\ X\times Y \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & X\times Y \end{tikzcd}$$

En particular, una función compleja es integrable syss su parte real y compleja lo son.

Teorema 8.57: Sea Ω un espacio de medida y X un espacio de Banach. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega;X)$ una sucesión de Cauchy que converge (bajo la seminorma L^1) a $f \in \mathscr{L}^1(\Omega;X)$. Entonces existe $f\in\mathscr{L}^1(\Omega;X)$ tal que:

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (bajo la seminorma L^1) a f.

Y existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que:

2. $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f en μ-c.d.
3. Para todo $\epsilon > 0$ existe $A_\epsilon \subseteq \Omega$ medible, con $\mu(\Omega\setminus A_\epsilon) \le \epsilon$, tal que $f_{n_k}|_{A_\epsilon} \xrightarrow{\text{unif.}} f|_{A_\epsilon}$.

Demostración: Sustituyendo f_n por $f_n - f$ el enunciado se reduce a probar el caso en que $f = 0$. Podemos elegir una subsucesión de $(f_n)_n$ tal que

$$\|f_{n_k}\|_1 < \frac{1}{2^{2k}}.$$

Sea $B_k := \{x \in \Omega : \|f_{n_k}(x)\| > 2^{-k}\}$, entonces

$$\frac{\mu(B_k)}{2^k} \le \int_{B_k} \|f_{n_k}\| \, \mathrm{d}\mu \le \int_\Omega \|f_{n_k}\| \, \mathrm{d}\mu = \|f_{n_k}\|_1 < \frac{1}{2^{2k}}.$$

Por lo tanto, $\mu(B_k) < 2^{-k}$. Definiendo

$$C_k := \bigcup_{m=k}^\infty B_m,$$

se concluye que $\mu(C_k) < 2^{-(k-1)}$. Nótese que para k fijo, para todo $m \ge k$ y todo $x \notin C_k$ se satisface que $\|f_k(x)\| < 2^{-k}$. Más aún, como $C_k \supseteq C_{k+1} \supseteq \cdots$ se concluye que $(f_{n_k})_k$ converge uniformemente a la función nula en $\Omega \setminus C_k$. Finalmente, definiendo

$$N := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k, \qquad \mu(N) = 0$$

y que (f_{n_k}) converge puntualmente a la función nula en $\Omega \setminus N$. □

Corolario 8.58: Sea Ω un espacio de medida y X un espacio de Banach. Si $f \in \mathscr{L}^1(\Omega; X)$ es tal que $\int_\Omega \|f\| \, \mathrm{d}\mu = 0$, entonces f es nula en μ-c.d.

En consecuencia, dos funciones en el espacio $\mathscr{L}^1(\Omega; X)$ son indistinguibles (como puntos en un espacio topológico) syss son iguales μ-c.d. Ésto explica una serie de otros teoremas en donde sólo se requiere exigir que ciertas condiciones se satisfagan μ-c.d.

Corolario 8.59: Sea Ω un espacio de medida y X un espacio de Banach. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega; X)$ una sucesión de Cauchy (bajo la seminorma L^1) que converge puntualmente a f, entonces $f \in \mathscr{L}^1(\Omega; X)$ y es el límite (bajo la seminorma L^1) de $(f_n)_n$.

Lema 8.60 (Fatou): Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}^1(\Omega; [0, +\infty])$, entonces

$$\int_\Omega \liminf_n f_n \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_n \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración: Definamos $g_k := \operatorname{ínf}_{n\geq k} f_n$, claramente $g_k \leq f_n$ si $n \geq k$, por lo que

$$\int_\Omega g_k \, \mathrm{d}\mu \leq \operatorname*{ínf}_{n\geq k} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu;$$

luego $g_k \to \operatorname{lím\,inf}_n f_n$ cuando $k \to \infty$ y la sucesión es creciente, luego el límite es el supremo y

$$\begin{aligned}\int_\Omega \operatorname*{lím\,inf}_n f_n \, \mathrm{d}\mu &= \operatorname*{lím}_k \int_\Omega g_k \, \mathrm{d}\mu = \sup_k \int_\Omega g_k \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \sup_k \operatorname*{ínf}_{n\geq k} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \operatorname*{lím\,inf}_n \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu. \qquad \square\end{aligned}$$

Teorema 8.61 – Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue: Sea Ω un espacio de medida y X un espacio de Banach. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega; X)$ que converge puntualmente a f y sea $g \in \mathscr{L}^1(\Omega; \mathbb{R})$ tal que $\|f_n\| \leq g$. Entonces $f \in \mathscr{L}^1(\Omega; X)$ y

$$\int_\Omega \operatorname*{lím}_n f_n \, \mathrm{d}\mu = \operatorname*{lím}_n \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración: Para todo $k \in \mathbb{N}$ definamos

$$g_k(x) := \sup\{\|f_n(x) - f_m(x)\| : n, m \geq k\}.$$

Nótese que $(g_k)_k$ es una sucesión decreciente de funciones reales positivas. Además como $\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq 2g(x)$ para todo n, m y todo $x \in \Omega$, entonces g_k es una sucesión de funciones integrables lo que por convergencia monótona de Lebesgue converge a 0. En consecuencia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathscr{L}^1(\Omega; X)$ (con la norma L^1), luego basta aplicar el corolario 8.59. $\square$

Corolario 8.62: Sean Ω un espacio de medida y X, Y, Z son espacios de Banach sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

1. Sea $f \in \mathscr{L}^1(\Omega; X)$ y $g\colon \Omega \to \mathbb{K}$ es medible y acotada, entonces $f \cdot g \in \mathscr{L}^1(\Omega; X)$.

2. Sean $f \in \mathscr{L}^1(\Omega; X)$, $h\colon \Omega \to Y$ medible y acotada, y $\langle -, - \rangle\colon X \times Y \to Z$ es una forma $\mathbb{K}$-bilineal; entonces $\langle f, h\rangle \in \mathscr{L}^1(\Omega; X)$.

Corolario 8.63: Sea Ω un espacio de medida y X un espacio de Banach. Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega; X)$ tales que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \|f_n\| \,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Entonces la siguiente serie:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

converge absolutamente en μ-c.d. Y más aún,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Proposición 8.64: Sea Ω un espacio de medida y X un espacio de Banach sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Si $f, g\colon \Omega \to X$ son medibles, entonces:

1. f es integrable syss $\|f\|$ lo es, en cuyo caso
$$\left\| \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \right\| \le \int_\Omega \|f\| \,\mathrm{d}\mu = \|f\|_1.$$
2. Si $X = \overline{\mathbb{R}}$, $f \le g$ y ambas son Lebesgue-integrables, entonces $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu$.
3. Si $\|f\| \le \|g\|$ y g es integrable, entonces f también lo es.
4. Si f, g son integrables y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, entonces
$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu + \beta \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu.$$
5. Si E es medible y $f|_E = 0$ o bien si E es nulo, entonces $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$.
6. Si E, F son medibles disjuntos y si $f \in \mathscr{L}^1(E \cup F; X)$, entonces $f \in \mathscr{L}^1(E; X) \cap \mathscr{L}^1(F; X)$ y
$$\int_{E\cup F} f \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \,\mathrm{d}\mu + \int_F f \,\mathrm{d}\mu.$$
7. Si μ es completo, g es integrable y $f = g$ en μ-c.d., entonces f también lo es y comparte integral.

8. Si $f \in \mathscr{L}^1(\Omega; \overline{\mathbb{R}})$, entonces toma valores finitos c.d.

Teorema 8.65: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, K un espacio métrico compacto dotado de una medida de Borel finita μ. Sea $f\colon A \times K \to \mathbb{R}$ continua y $g : K \to \mathbb{R}$ medible y acotada. Definamos $F\colon A \to \mathbb{R}$ como

$$F(\boldsymbol{x}) := \int_K f(\boldsymbol{x}, y) \cdot g(y) \, \mathrm{d}\mu(y),$$

entonces F es continua. Y si existe

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} : A \times K \to \mathbb{R}$$

continua, entonces se cumple que

$$D_i F(\boldsymbol{x}) = \int_K D_i f(\boldsymbol{x}, y) \cdot g(y) \, \mathrm{d}\mu(y)$$

y es continua.

DEMOSTRACIÓN:

I) <u>F es continua:</u> Sea $\boldsymbol{a} \in A$ y sea B una bola cerrada centrada en $\boldsymbol{a}$ contenida en A. Por definición sea M cota de $|g|$. Como $B \times K$ es compacto, entonces f es uniformemente continua lo que significa que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta$, entonces $|f(\boldsymbol{x}, y) - f(\boldsymbol{a}, y)| < \frac{\epsilon}{M \cdot \mu(K)}$ para todo $y \in K$. Luego

$$|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{a})| \leq \int_K |f(\boldsymbol{x}, y) - f(\boldsymbol{a}, y)| \cdot |g(y)| \, \mathrm{d}\mu(y) < \epsilon.$$

II) <u>Existencia de derivadas parciales continuas:</u> Supongamos que existe la derivada parcial continua con respecto a x_i. Por el mismo argumento, $\partial f / \partial x_i$ es uniformemente continua en $B \times K$ lo que significa que existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$, entonces para todo $y \in K$ se cumple que

$$|D_i f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{e}_i, y) - D_i f(\boldsymbol{a}, y)| < \frac{\epsilon}{M \cdot \mu(K)}$$

Fijemos un $y \in K$ y un $|h| < \delta$, el teorema del valor medio nos otorga $|\lambda| < |h|$ tal que

$$f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{e}_i, y) - f(\boldsymbol{a}, y) = h \cdot D_i f(\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{e}_i, y)$$

Luego

$$\left| \frac{f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{e}_i, y)g(y) - f(\boldsymbol{a}, y)g(y)}{h} - D_i f(\boldsymbol{a}, y)g(y) \right|$$
$$= |D_i f(\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{e}_i, y) - D_i f(\boldsymbol{a}, y)| \, |g(y)| < \frac{\epsilon}{\mu(K)},$$

por lo que, integrando con respecto a y se obtiene que

$$\left| \frac{F(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{e}_i) - F(\boldsymbol{a})}{h} - \int_K D_i f(\boldsymbol{a}, y) g(y) \, \mathrm{d}\mu(y) \right| < \epsilon$$

que es literalmente la definición de derivada parcial con respecto a x_i. La continuidad sigue de la propiedad anterior. $\square$

Definición 8.66 (Función factorial): Se define $\Pi : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función factorial definida por

$$\Pi(x) := \int_0^\infty t^x e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Ésta función fue descubierta por Euler, ésta es la notación de Gauss y también es popular la función $\Gamma(x) := \Pi(x-1)$ conocida como la *función Gamma* por notación de Legendre.

Veamos que está bien definida: Para ello vamos a probar dos cosas

I) La integral existe entre $[0, 1]$: Si $x \geq 0$, entonces $t^x e^{-t}$ es continua y por ende integrable. Si $-1 < x < 0$, entonces $0 \leq t^x e^{-t} \leq t^x$ que vimos que es integrable en un ejemplo de la misma sección.

II) La integral existe entre $[1, \infty)$: Notemos que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t^x e^{-t}}{1/t^2} = \lim_{t \to \infty} \frac{t^{x+2}}{e^t} = 0$$

lo que implica que existe un $M > 1$ tal que para todo $t \geq M$ se cumple que $t^{x+2} e^{-t} \leq 1$, o equivalentemente que $t^x e^{-t} \leq 1/t^2$. Como $t^x e^{-t}$ es continua en $[1, M]$, entonces es integrable y

$$\int_M^\infty t^x e^{-t} \, \mathrm{d}t \leq \int_M^\infty \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t = \lim_{y \to \infty} \left[\frac{1}{t} \right]_M^y = \frac{1}{M}.$$

Teorema 8.67: La función factorial es continua y para todo $x \in (-1, \infty)$ se cumple que

$$\Pi(x+1) = (x+1)\Pi(x).$$

En consecuencia y considerando que $\Pi(0) = 1$ se concluye que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\Pi(n) = n!$

Demostración: Para ver la continuidad veremos que es continua en un intervalo de la forma $I := (-1+\epsilon, M)$ para todo $\epsilon > 0$ y $M > 0$, así que fijaremos ambos valores y el intervalo de antemano. Luego definimos $\Pi_n(x) := \int_{-1+1/n}^{n} t^x e^{-t} \, \mathrm{d}t$ y definimos $h(t) := t^{-1+\epsilon}e^{-t} + t^M e^{-t}$. En I se cumple que el integrando de Π está acotado por $h(t)$ que tiene integral $\Pi(-1+\epsilon) + \Pi(M)$ y como el integrando de Π_n es diferenciable como función de x sobre un compacto, entonces Π_n es continua y notemos que

$$|\Pi(x) - \Pi_n(x)| \leq \int_0^{1/n} h(t) \, \mathrm{d}t + \int_n^\infty h(t) \, \mathrm{d}t$$

por lo que la sucesión de Π_n converge uniformemente a Π en I, ergo Π es continua en I.

Ahora veamos las igualdades básicas:

$$\Pi(0) = \int_0^\infty e^{-t} \, \mathrm{d}t = [-e^{-t}]_0^\infty = 1,$$

la otra igualdad sale de aplicar integración por partes con $g'(t) = e^{-t}$, $g(t) = -e^{-t}$ y $f(t) = t^{x+1}$, $f'(t) = (x+1)t^x$:

$$\int_0^\infty t^{x+1}e^{-t} \, \mathrm{d}t = \left[-t^{x+1}e^{-t}\right]_0^\infty + (x+1)\int_0^\infty t^x e^{-t} \, \mathrm{d}t = (x+1)\Pi(x). \qquad \square$$

Definición 8.68: Sea Ω un espacio de medida y X un espacio de Banach. Sea $A \subseteq \Omega$ de medida finita no nula, se denota

$$\fint_A f \, \mathrm{d}\mu := \frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Teorema 8.69: Sea Ω un espacio de medida y X un espacio de Banach. Sea $f \in \mathscr{L}^1(\Omega; X)$ y $S \subseteq X$ un cerrado tal que para todo $A \subseteq \Omega$ de medida finita no nula se satisfaga que

$$\fint_A f \, \mathrm{d}\mu \in S.$$

Si $\vec{0} \in S$, u Ω es σ-finito, entonces $f(x) \in S$ para casi todo x.

Demostración: Nótese que basta probar el teorema para el caso Ω de medida finita. Sea $\boldsymbol{v} \in X \setminus S$, luego existe $r > 0$ tal que $B_r(\boldsymbol{v})$ es disjunto de S, luego sea $A := f^{-1}[B_r(\boldsymbol{v})]$, si $\mu(A) > 0$, entonces se tendría que

$$\left| \fint_A f \,\mathrm{d}\mu - \boldsymbol{v} \right| = \left| \fint_A (f - \boldsymbol{v}) \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \fint_A |f - \boldsymbol{v}| \,\mathrm{d}\mu < r,$$

pero entonces $\fint_A f \,\mathrm{d}\mu \notin S$, lo que es absurdo. El resto de casos se deducen de éste. $\square$

Corolario 8.70: Sea Ω un espacio de medida y X un espacio de Banach. Sea $f \in \mathscr{L}^1(\Omega; X)$ tal que para todo $A \subseteq \Omega$ de medida finita se cumpla que

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Entonces f es nula en μ-c.d.

Haciendo la sustitución explícita de $\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \cdot \chi_A \,\mathrm{d}\mu$ se obtiene:

Corolario 8.71: Sea Ω un espacio de medida y X un espacio de Banach. Sea $f \in \mathscr{L}^1(\Omega; X)$ tal que para toda $g \in \mathrm{St}(\Omega)$ se cumpla que

$$\int_\Omega f \cdot g \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Entonces f es nula en μ-c.d.

Corolario 8.72: Sea Ω un espacio de medida y X un espacio de Banach. Sea $f \in \mathscr{L}^1(\Omega; X)$ tal que para todo $A \subseteq \Omega$ de medida finita se cumpla que

$$\left\| \int_A f \,\mathrm{d}\mu \right\| \leq C\mu(A).$$

Entonces $\|f(x)\| \leq C$ en μ-c.d.

Corolario 8.73: Sea Ω un espacio de medida y H un espacio de Hilbert sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $f \in \mathscr{L}^1(\Omega; H)$ tal que para toda $g \in \mathrm{St}(\Omega; \mathbb{K})$ se cumpla que

$$\int_\Omega \langle f, g \rangle \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Entonces f es nula en μ-c.d.

8.4 Producto de medidas

Definición 8.74 – *Producto de medidas*: Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ son espacios de medida con $E \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{B}$, entonces se dice que $E \times F$ es un rectángulo medible en $X \times Y$ y se denota por $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ a la σ-álgebra inducida por rectángulos medibles.

Sean E medible en $X \times Y$, $x \in X$ e $y \in Y$. Se denota

$$E_x := \{y \in Y : (x, y) \in E\}, \quad E^y := \{x \in X : (x, y) \in E\},$$

y si $f : X \times Y \to Z$ se denota

$$f_x(y) := f(x, y), \quad f^y(x) := f(x, y).$$

Proposición 8.75: Si E es medible en $X \times Y$, entonces para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$ se cumple que E_x es medible en Y y que E^y es medible en X. Así mismo, si $f : X \times Y \to Z$ es medible, entonces para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$ se cumple que f_x y f^y también.

Demostración: Definamos $\mathcal{C}$ como la subfamilia de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ tal que si E es medible entonces E_x también (es análogo para E^y). Claramente $\varnothing, X \times Y \in \mathcal{C}$, y todo rectángulo medible está en $\mathcal{C}$. Probaremos que $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra, por lo que se concluiría que $\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Si $E \in \mathcal{C}$, entonces para todo $x \in X$ se cumple que

$$(X \times Y \setminus E)_x = \{y \in Y : (x, y) \notin E\} = Y \setminus E_x$$

por lo que $E^c \in \mathcal{C}$.

Si $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}$, entonces para todo $x \in X$ se cumple que

$$\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \right)_x = \{y \in Y : \exists i \in \mathbb{N}\ (x, y) \in E_i\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (E_i)_x$$

luego $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{C}$.

Si E es medible en Z, entonces $f^{-1}[E]$ es medible en $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ por lo que

$$f_x^{-1}[E] = \{y \in Y : f(x, y) \in E\} = (f^{-1}[E])_x$$

luego f_x es medible y es análogo para f^y. □

Teorema 8.76: Si X, Y son espacios de medidas σ-finitas μ y ν resp. Sea E medible en $X \times Y$, entonces las aplicaciones $x \mapsto \nu(E_x)$ e $y \mapsto \mu(E^y)$ son medibles y

$$\int_X \nu(E_x)\,\mathrm{d}\mu = \int_Y \mu(E^y)\,\mathrm{d}\nu.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{C}$ la subfamilia de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ tales que sus elementos cumplen el enunciado, probaremos que $\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, por lo que probaremos muchos pasos intermedios:

I) <u>C contiene a los rectángulos medibles:</u> Es claro que si A, B son medibles en X, Y, entonces llamando $F := A \times B$ se cumple

$$F_x = \begin{cases} B, & x \in A \\ \varnothing, & x \notin A \end{cases},$$

luego

$$\int_X \nu(F_x)\,\mathrm{d}\mu = \int_X \nu(B)\chi_A\,\mathrm{d}\mu = \mu(A)\nu(B) = \int_Y \mu(F^y)\,\mathrm{d}\nu.$$

II) <u>Si $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ es creciente, entonces $Q := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i \in \mathcal{C}$:</u> Denotaremos

$$F_i(x) := \nu((Q_i)_x), \quad F_i'(y) := \mu((Q_i)^y).$$

Luego

$$\lim_n F_n = \nu(Q_x), \quad \lim_n F_n' = \mu(Q^y)$$

y se cumple la igualdad de integrales por criterio de convergencia monótona de Lebesgue.

Como consecuencia si $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$ son disjuntos dos a dos, entonces $Q := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i \in \mathcal{C}$.

III) Si $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ es decreciente y $Q_0 \subseteq U \times V$ con $\mu(U)\nu(V) < \infty$, entonces $Q := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i \in \mathcal{C}$: Similar a la anterior, pero terminamos por aplicar criterio de convergencia dominada de Lebesgue.

Como las medidas son σ-finitas existe $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ medibles finitos tales que cubren a X e Y y son disjuntos dos a dos. Si E es medible en $X \times Y$ denotamos $E_{ij} := E \cap (X_i \times X_j)$, y llamamos $\mathcal{D}$ a la familia de los E_{ij} en $\mathcal{C}$. □

Definición 8.77: Dados $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medidas σ-finitas. Entonces se denota $\mu \times \nu$ a la medida sobre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ tal que

$$(\mu \times \nu)(E) := \int_X \nu(E_x)\, \mathrm{d}\mu = \int_Y \mu(E^y)\, \mathrm{d}\nu.$$

Proposición 8.78: Si X, Y son espacios topológicos 2AN y sus medidas son de Borel. Entonces la medida en el producto es también de Borel.

Corolario 8.79: La medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^{n+m}$ es la compleción del producto de la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^m$.

Teorema 8.80: Si X es de medida λ y $f \in L^1\big(X; [0, \infty)\big)$. Sea $A := \{(x, y) \in X \times [0, \infty) : y \in [0, f(x)]\}$, entonces

$$\int_X f\, \mathrm{d}\lambda = (\lambda \times \mu)(A).$$

Demostración: Sea $g : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y) := (f(x), y)$, luego se cumple que es medible pues si U, V son abiertos en $\mathbb{R}$, entonces

$$g^{-1}[U \times V] = f^{-1}[U] \times V,$$

luego

$$A = g^{-1}\big[\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v \in [0, u]\}\big]$$

donde el conjunto en el paréntesis es cerrado, por lo que A es medible. Notemos que para todo $x \in X$ se cumple que $A_x = [0, f(x)]$, luego

$$(\lambda \times \mu)(A) = \int_X \mu(A_x)\, \mathrm{d}\lambda = \int_X f(x)\, \mathrm{d}\lambda,$$

como se quería probar. □

Teorema (AEN) 8.81 – *Teorema de Fubini*: Sean X, Y espacios de medida σ-finitas μ y ν resp. Y sea $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ medible.

1. Si $f \geq 0$, entonces las funciones

$$x \mapsto \int_Y f_x\, \mathrm{d}\nu, \quad y \mapsto \int_X f^y\, \mathrm{d}\mu$$

son medibles y

$$\int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \int_X \left(\int_Y f_x \,\mathrm{d}\nu\right) \mathrm{d}\mu = \int_Y \left(\int_X f^y \,\mathrm{d}\mu\right) \mathrm{d}\nu$$

(teorema de Tonelli).

2. Si $\int_X \left(\int_Y |f_x| \,\mathrm{d}\nu\right) \mathrm{d}\mu < +\infty$, entonces $f \in L^1(X\times Y)$.

3. Si $f \in L^1(X\times Y)$, entonces μ-c.d. $f_x \in L^1(Y)$ y ν-c.d. $f^y \in L^1(X)$ (teorema de Fubini).

Demostración:

1. La demostración consistirá en probar primero el enunciado para funciones simples y luego generalizarlo. Es claro que si E es medible en $X\times Y$

$$\int_Y (\chi_E)_x \,\mathrm{d}\nu = \int_Y \chi_{E_x} \,\mathrm{d}\nu = \nu(E_x)$$

luego la aplicación en función de x es medible y vemos que la integral satisface lo pedido por la definición.
Por ende, es fácil notar que el enunciado vale para funciones simples.
Sea $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones simples que converge a f, como claramente $\lim_n (s_n)_x = f_x$, entonces por convergencia monótona de Lebesgue se cumple que

$$\lim_n \int_Y (s_n)_x \,\mathrm{d}\nu = \int_Y f_x \,\mathrm{d}\nu,$$

como las funciones $x\mapsto \int_Y (s_n)_x \,\mathrm{d}\nu$ son medibles para todo n, entonces la función arriba es medible por ser el límite puntual de medibles, además

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} \left(\lim_n s_n\right) \mathrm{d}(\mu\times\nu) &= \lim_n \int_{X\times Y} s_n \,\mathrm{d}(\mu\times\nu)\\ &= \int_X \lim_n \left(\int_Y s_n \,\mathrm{d}\nu\right) \mathrm{d}\mu = \int_X \left(\int_Y f_x \,\mathrm{d}\nu\right) \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Y es análogo para la otra igualdad.

2. Es corolario de la 1.

3. Queda de ejercicio para el lector. □

§8.4.1 Aplicación: Teorema fundamental del álgebra II. En esta subsección demostraremos el teorema fundamental del álgebra mediante el teorema de Fubini contenida en [**0**].

> **Teorema 8.82 – *Teorema fundamental del álgebra***: Todo polinomio complejo tiene raíces complejas.

Demostración: Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polinomio complejo de la forma

$$f(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$$

tal que $c_n = 1$, y para cada i se cumpla que $c_i = \lambda_i e^{\mathrm{i}\alpha_i}$ (con el convenio de que $\alpha_i = 0$ si $c_i = 0$). Luego se cumple que

$$\begin{aligned} P(r,\theta) &:= \operatorname{Re} f(re^{\mathrm{i}\theta}) = r^n \cos(n\theta) + \cdots + r\lambda_1 \cos(\alpha_1 + \theta) + \lambda_0 \cos\alpha_0 \\ Q(r,\theta) &:= \operatorname{Im} f(re^{\mathrm{i}\theta}) = r^n \sin(n\theta) + \cdots + r\lambda_1 \sin(\alpha_1 + \theta) + \lambda_0 \sin\alpha_0. \end{aligned}$$

Supongamos que f es no nula en todo punto, entonces podemos definir

$$U(r,\theta) := \arg(P(r,\theta) + \mathrm{i}Q(r,\theta)),$$

Notemos que si $r = 0$, entonces el polinomio se reduce a $f(0)$, por lo que U es constante y

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{r=0} = 0.$$

Como se menciona U es diferenciable c.d., excepto en la franja $(-\infty, 0) \times \{0\}$, para el cual admitimos que la notación representa un límite lateral. Luego se concluye que en todo punto

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{1}{(1 + Q/P)^2} \frac{PQ_\theta - P_\theta Q}{P^2} = \frac{PQ_\theta - P_\theta Q}{P^2 + Q^2},$$

donde $P_\theta := \frac{\partial P}{\partial \theta}$, análogamente para Q y para r también:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{PQ_r - P_r Q}{P^2 + Q^2}.$$

Con nuestro convenio de las derivadas parciales también satisfacen la condición de Schwarz (intercambiar derivadas). Esto, sumado al teorema de Fubini nos permite calcular

$$I(R) := \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r$$

Por un lado

$$\begin{aligned}\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial U}{\partial \theta} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial U}{\partial r} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r \\ &= \int_0^R \left[\frac{\partial U}{\partial r}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r \\ &= \int_0^R 0 \, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r = 0.\end{aligned}$$

donde el término en rojo es nulo porque la función es periódica con periodo 2π.
Por otro lado

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial U}{\partial \theta} \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial U}{\partial \theta}\right]_{r=0}^{r=R} \mathrm{d}\theta \\ &= 0,\end{aligned}$$

para todo $R > 0$, de manera que se concluye que

$$\left[\frac{\partial U}{\partial \theta}\right]_{r=0}^{r=R} = 0.$$

Además ya vimos que el valor de la derivada en $r = 0$ era nulo, de modo que nos queda que

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{r=R} = 0.$$

Nótese que

$$P_\theta|_{r=R} = -nR^n \sin(n\theta) + \cdots , \quad Q_\theta|_{r=R} = nR^n \cos(n\theta) + \cdots$$

por lo que

$$PQ_\theta - P_\theta Q = nR^{2n} \cos^2(n\theta) + \cdots + nR^{2n} \sin^2(n\theta) + \cdots = nR^{2n} + \cdots$$

El denominador de $\partial U/\partial\theta$ es el cuadrado del módulo del polinomio, el cual para $|z| \to \infty$ es asíntota de $|z|^{2n}$, de modo que

$$\lim_{R\to\infty} \left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{r=R} = \lim_{R\to\infty} \frac{\dfrac{PQ_\theta - P_\theta Q}{R^{2n}}}{\dfrac{P^2 + Q^2}{R^{2n}}} = n,$$

de modo que

$$\lim_{R\to\infty} I(R) = 2\pi n = 0$$

con lo que $n = 0$, i.e., f es constante. □

9

Dualidad y representación

En éste capítulo aplicaremos varios conceptos del capítulo 4, ésto iluminará la curiosa teoría que hemos construido a lo largo del libro. Éste capítulo es una profundización natural de la teoría de la medida introducida en el capítulo anterior.

9.1 Medidas signadas y diferenciación

En ésta sección construiremos dos versiones de diferenciación de medidas, que corresponden al método de Radon-Nikodým por un lado y al método de Lebesgue por el otro. Ambas versiones concuerdan y son lo que permitiran demostrar el teorema de cambio de variable que se puede interpretar como concordar las derivadas de integración con las derivadas usuales.

§9.1.1 Derivada de Radon-Nikodým.

Definición 9.1 – *Medida signada*: Sea Σ uns σ-álgebra sobre Ω, se dice que $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}$ es una ***medida signada (finita)*** si:

1. $\mu(\varnothing) = 0$.

2. Si $E_0, E_1, \dots$ son disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(E_i).$$

Notemos que de hecho, no solo la serie es convergente, sino que es absolutamente convergente por el teorema de reordenamiento de Riemann.

Si μ es una medida signada, entonces llamaremos la ***variación total*** de μ a la función

$$|\mu|(E) := \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_n)| : E_i \text{ partición por medibles de } E\right\}$$

Lema (DE) 9.2: La variación total de una medida signada es una medida positiva finita.

Demostración: Veamos que $|\mu|$ es medida: Es claro que $|\mu|(\varnothing) = 0$. Y sean $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ μ-medibles disjuntos dos a dos de unión E, probaremos la igualdad por antisimetría:

i) $\underline{\sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu|(A_i) \le |\mu|(E)}$: Para cada $i \in \mathbb{N}$ sea $r_i < |\mu|(A_i)$, luego existe una partición por medibles $\{B_{i,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de A_i tal que

$$r_i \le \sum_{j\in\mathbb{N}} |\mu(B_{i,j})| \le |\mu|(A_i) \le |\mu|(E)$$

Como los $B_{i,j}$ forman una partición de E, entonces

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} r_i \le \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} |\mu(B_{i,j})| \le |\mu|(E)$$

Como aplica para toda elección de r_i podemos hacerla arbitrariamente cercana a $|\mu|(A_i)$ lo que nos concluye la desigualdad.

ii) $\underline{|\mu|(E) \le \sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu|(A_i)}$: Sea $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una partición cualquiera de E, luego $\{C_i \cap A_j\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una partición de A_j y notemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu(C_i)| &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \left|\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(C_i \cap A_j)\right| \le \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} |\mu(C_i \cap A_j)| \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu(C_i \cap A_j)| \le \sum_{j\in\mathbb{N}} |\mu|(A_j)\end{aligned}$$

Como toda suma está acotada por $\sum_{j\in\mathbb{N}}|\mu|(A_j)$ y $|\mu|(E)$ es la mínima de las cotas superiores, entonces se cumple la desigualdad.

III) $|\mu|$ es finita: Sea E un conjunto $|\mu|$-infinito. Por definición $|\mu(E)|$ es finito y sea $M := 2(1 + |\mu(E)|)$. Luego, existe una partición $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de E, tal que

$$M < \sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu(E_i)|$$

por lo que podemos dividir los términos entre P la suma de aquellos tal que $\mu(E_i) \geq 0$ (positivos) y N la suma del resto (negativos), es decir, $M < P + N$; si P fuera el mayor entonces $M < 2P$. Sea A la unión de los elementos de E_i en P o N según cuál fuera el mayor, luego $M < 2|\mu(A)| \iff |\mu(A)| > M/2 > 1$. Además si $B := E \setminus A$, entonces

$$|\mu(B)| = |\mu(E) - \mu(A)| \geq |\mu(A)| - |\mu(E)| > \frac{M}{2} - \mu(E) > 1$$

Como $|\mu(A)| > 1$ y $|\mu(B)| > 1$, y como son partición de E al menos alguno es $|\mu|$-infinito. Supongamos sin perdida de generalidad que $|\mu(A_1)| > 1$ y que $|\mu|(B_1) = \infty$, luego repitiendo el proceso $B_1 = A_2 \cup B_2$ que es partición y tal que $|\mu(A_2)| > 1$ y que $|\mu|(B_2) = \infty$, y así sucesivamente hasta construir $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que son disjuntos dos a dos y que $|\mu(A_i)| > 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$, luego

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$$

pero la sumatoria no converge pues la sucesión no converge a 0, lo que es absurdo. □

Definición 9.3: Sea μ una medida signada, entonces denotamos

$$\mu^+ := \frac{|\mu| + \mu}{2}, \quad \mu^- := \frac{|\mu| - \mu}{2}.$$

De éste modo, μ^+, μ^- demuestran ser medidas positivas finitas, luego, una función f se dice μ-integrable syss es μ^+ y μ^--integrable, en cuyo caso definimos

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu := \int_E f\,\mathrm{d}\mu^+ - \int_E f\,\mathrm{d}\mu^-$$

Dada una medida positiva μ y una medida signada λ se dice que es ***absolutamente continua*** con respecto a μ, denotado $\lambda \ll \mu$, si todo conjunto

μ-nulo es λ-nulo. Se dice que λ está concentrada en A si para todo medible E se cumple que $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$.

Se dice que dos medidas arbitrarias sobre una misma σ-álgebra λ_1, λ_2 son ***mutuamente singulares***, denotado $\lambda_1 \perp \lambda_2$, si λ_1 está concentrado en A y λ_2 en B donde $A \cap B = \varnothing$.

Teorema (DE) 9.4 (Descomposición de Hahn-Jordan): Sea μ una medida signada sobre Ω. Entonces existe una partición $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ tales que μ^+ está concentrada en Ω^+ y μ^- en Ω^-. En consecuencia, $\mu^+ \perp \mu^-$.

Demostración: Se dice que un conjunto A es ***totalmente positivo*** (resp. ***negativo***) si para todo E se cumple que $\mu(A \cap P) \geq 0$ (resp. ≤ 0). Sea

$$m^+ := \sup\{\mu(P) : P \text{ totalmente positivo}\}$$

Nótese que $m^+ \leq \mu^+(\Omega) < \infty$. Luego podemos elegir P_n totalmente positivo tal que $\mu(P_n) \geq m^+ + 1/n$ y definir $\Omega^+ := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$, pues Ω^+ es totalmente positivo y debe tener medida m^+.

Sea $\Omega^- := \Omega \setminus \Omega^+$, veamos que es totalmente negativo: Si no lo fuera poseería $E_1 \subseteq \Omega^-$ tal que $\mu(E_1) > 0$. Si E_1 fuera totalmente positivo, entonces $\Omega^+ \cup E_1$ contradice la maximalidad de Ω^+, ergo no es totalmente positivo y posee un subconjunto de medida negativa, lo que implica que existe $E_2 \subseteq E_1$ tal que $\mu(E_2) \geq \mu(E_1) + 1/n_1$ donde n_1 es el menor natural no nulo tal que E_2 existe, y así reiteramos para $\mu(E_{m+1}) \geq \mu(E_m) + 1/n_m$. Luego $E := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} E_m$ cumple que

$$\mu(E) \geq \mu(E_1) + \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n_m},$$

de modo que $n_m \to \infty$. Y E es totalmente positivo pues si no lo fuera poseería un subconjunto $\mu(\bar{E}) \geq \mu(E) + 1/\bar{n}$ para algún $\bar{n}$ lo que contradice la elección de los n_ms, y lo que constituye la contradicción.

La última parte consiste en ver que todo subconjunto de Ω^+ es μ^--nulo y viceversa. Para ello sigamos la definición de $|\mu|$ y notemos que toda partición de Ω^+ u Ω^- tienen el mismo signo, así que $|\mu|(\Omega^\pm) = \pm\mu(\Omega^\pm)$, ergo se comprueba que $\mu^\mp(\Omega^\pm) = 0$ lo que completa la demostración. □

Proposición (DE) 9.5: Sean μ un medida positiva sobre Ω, y λ, ν medidas signadas tales que comparten la misma σ-álgebra; entonces:

1. $\lambda \ll |\lambda|$ y si λ está concentrada en un conjunto E, entonces $|\lambda|$ también.

2. Si $\lambda \perp \nu$ entonces $|\lambda| \perp |\nu|$.
3. Si $\lambda \perp \mu$ y $\nu \perp \mu$ entonces $\lambda + \nu \perp \mu$.
4. Si $\lambda \ll \mu$ y $\nu \ll \mu$ entonces $\lambda + \nu \ll \mu$.
5. Si $\lambda \ll \mu$ entonces $|\lambda| \ll \mu$.
6. Si $\lambda \ll \mu$ y $\nu \perp \mu$ entonces $\lambda \perp \nu$.
7. Si $\lambda \ll \mu$ y $\lambda \perp \mu$ entonces $\lambda = 0$.

DEMOSTRACIÓN:

1. Basta probar que λ^+ y λ^- están concentradas en E, para ello aplicamos descomposición de Hahn-Jordan y notamos que
$$\lambda^+(A) = \lambda(A \cap \Omega^+) = \lambda(A \cap \Omega^+ \cap E) = \lambda^+(A \cap E).$$
2. Consecuencia de la 1.
3. Consecuencia de la 1.
4. Trivial de la definición.
5. Sea E un μ-nulo, como $E \cap \Omega^- \subseteq E$ es μ-nulo y como $\lambda^-(E) = -\lambda(E \cap \Omega^-) = 0$ pues $\lambda \ll \mu$, es decir, hemos probado que $\lambda^- \ll \mu$. Por la 4. se tiene que $\lambda + 2\lambda^- = |\lambda| \ll \mu$.
6. Sean A, B disjuntos tales que μ está concentrado en A y ν en B, por $\lambda \ll \mu$ se tiene que λ está también concentrado en A lo que prueba que $\lambda \perp \nu$.
7. Por la anterior, $\lambda \perp \lambda$ lo que significa que está concentrado en $\varnothing$ y que es nulo. □

Teorema (DE) 9.6 – *Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodým*: Sea μ una medida positiva σ-finita y sea λ una medida arbitraria, ambas sobre Ω con la misma σ-álgebra. Entonces:

1. Existe un único par de medidas λ_f, λ_s tales que
$$\lambda = \lambda_f + \lambda_s, \quad \lambda_f \ll \mu \wedge \lambda_s \perp \mu.$$
(Teorema de Lebesgue.)

2. Existe $f \in L^1(\Omega; \mu)$ tal que para todo E medible se cumple

$$\lambda_f(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

y g también cumple la propiedad syss $f = g$ en μ-c.d. (Teorema de Radon-Nikodým.)

Demostración: En primer lugar consideremos que $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, luego, si probamos el teorema para una medida λ positiva finita, entonces se aplica para λ signada en general; así que asumiremos que λ es positiva. También asumiremos que μ es finita, ya que para el caso general basta descomponer el espacio en numerables μ-finitos.

Para cualquier g medible y positivo denotemos $\lambda_g := \int_E g \, \mathrm{d}\mu$ que claramente $\lambda_g \ll \mu$. Y definamos

$$M := \sup\{\lambda_g(\Omega) : \forall E \; \lambda_g(E) \leq \lambda(E)\}$$

como $\lambda(\Omega) < \infty$ entonces M es finito. Luego sea f_n tal que satisface las condiciones y $\lambda_{f_n}(\Omega) \geq M - 1/n$, entonces considerando $f := \sup_n f_n$ se tiene que $\lambda_f(\Omega) = M$.

Sea $\lambda_s := \lambda - \lambda_f$, <u>veamos que $\lambda_s \perp \mu$</u>. Ello equivale a ver que $(\lambda_s - \epsilon\mu)^+ \perp \mu$ para todo ϵ. Supongamos que ello fuera falso para algún $\epsilon > 0$, es decir, existe E con $\mu(E) > 0$ y con $(\lambda_s - \epsilon\mu)^+(E) > 0$, lo que por Hahn-Jordan, significa que existe E con $\mu(E) > 0$ tal que $\lambda_s(A \cap E) \geq \epsilon\mu(A \cap E)$; de éste modo si consideramos $f' := f + \epsilon\chi_E$ obtenemos que cumple las propiedades y contradice la maximalidad de f.

Finalmente basta ver la unicidad en ambos casos: Si $\lambda = \lambda_f + \lambda_s = \lambda'_f + \lambda'_s$, entonces $\lambda_f - \lambda'_f = \lambda'_s - \lambda_s \ll \mu$ y $\lambda'_s - \lambda_s \perp \mu$ luego $\lambda'_s - \lambda_s = 0$. Y para ver la casi-unicidad de f, consideremos que g también genera a λ_f, entonces $\lambda_f - \lambda_g$ es una medida nula, lo que implica que $\|f - g\| = 0$ lo que implica que $f = g$ en μ-c.d. □

Nótese que de la demostración anterior la unicidad es independiente de toda elección, mientras que la existencia es lo que depende del DE y lo que se puede resolver.

Definición 9.7: Si μ es una medida σ-finita y $\lambda \ll \mu$ signada, entonces si f satisface las condiciones del teorema anterior decimos que es <u>una</u> ***derivada de Radon-Nikodým***, lo que denotamos por $\mathrm{d}\lambda = f \, \mathrm{d}\mu$.

Tenemos dos consecuencias inmediatas del teorema de Lebesgue-Radon-Nikodým:

Corolario 9.8: Sea μ una medida σ-finita y sea $\lambda \ll \mu$ signada. Entonces:

1. Si f es una derivada de Radon-Nikodým, entonces $\mathrm{d}|\lambda| = |f| \, \mathrm{d}\mu$.
2. Si $g \in L^1_\lambda(\Omega)$, entonces $gf \in L^1_\mu(\Omega)$ y
$$\int_E g \, \mathrm{d}\lambda = \int_E gf \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración:

1. Basta definir $\mathrm{d}\lambda^+ = f^+ \, \mathrm{d}\mu$ y $\mathrm{d}\lambda^- = f^- \, \mathrm{d}\mu$, y notar que hacen cumplir que $f = f^+ - f^-$ y que $|f| = f^+ + f^-$.
2. Si $g = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i \chi_{E_i}$ es simple, entonces
$$\int_E g \, \mathrm{d}\lambda = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i \lambda(E_i \cap E) = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i \int_E \chi_{E_i} f \, \mathrm{d}\mu = \int_E gf \, \mathrm{d}\mu.$$
Si g no es simple, basta ver que aplica si es positivo. En cuyo caso, sea s_n una sucesión de simples que converja puntualmente g. Luego basta notar por convergencia monótona de Lebesgue que
$$\begin{aligned}\int_E \lim_n s_n \, \mathrm{d}\lambda = \lim_n \int_E s_n \, \mathrm{d}\lambda = \lim_n \int_E s_n f \, \mathrm{d}\mu \\ = \int_E \lim_n s_n f \, \mathrm{d}\mu = \int_E gf \, \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$ □

Corolario 9.9: Sea μ una medida σ-finita, $\nu \ll \mu$ positiva. Sea $h \in \mathscr{L}^1(\nu; H)$ y considere el siguiente funcional lineal:
$$\begin{aligned}\lambda \colon \mathscr{L}^1(\nu; H) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ g &\longmapsto \int_\Omega \langle g, h \rangle \, \mathrm{d}\nu\end{aligned}$$

Luego, existe un único $f \in \mathscr{L}^1(\mu; H)$ (salvo igual en c.d.) tal que para todo $g \in \mathscr{L}^1(\mu; H)$ se cumple que
$$\lambda(g) = \int_\Omega \langle g, f \rangle \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración: Denotemos:

$$1/\|h\|(x) := \begin{cases} \frac{1}{\|h(x)\|}, & \|h(x)\| \neq 0 \\ 0, & \|h(x) = 0\| \end{cases}$$

Nótese que $1/\|h\|$ es ν-medible desde Ω hasta $\mathbb{R}$, luego $1/\|h\|\,\mathrm{d}\nu$ es una medida positiva absolutamente continua respecto a μ, de modo que por el teorema de Radon-Nikodým existe k tal que $1/\|h\|\,\mathrm{d}\nu = k\,\mathrm{d}\mu$. Luego definamos

$$f := h \cdot \frac{k}{\|h\|},$$

finalmente se tiene que

$$\int_\Omega \langle g, f\rangle\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \langle g, h\rangle \cdot \frac{k}{\|h\|}\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \langle g, h\rangle\,\mathrm{d}\nu = \lambda(g). \qquad \square$$

§9.1.2 Puntos de Lebesgue.

Definición 9.10: Sea μ la medida de Lebesgue y λ una medida arbitraria de Borel, entonces definimos

$$C_r\lambda(x) := \frac{\lambda(B_r(x))}{\mu(B_r(x))},$$

luego definimos la función maximal de Hardy-Littlewood

$$M\lambda(x) := \sup_{0<r<\infty} C_r|\lambda|(x).$$

Proposición 9.11: $M\lambda(x)$ es Borel-medible.

Demostración: Probaremos que la preimagen del intervalo $(t, \infty]$ es abierta. Sea $E := (M\lambda)^{-1}\big[(t,\infty]\big]$ y sea $x \in E$, luego $M\lambda(x) > t$, es decir, sea $r > 0$ y $\epsilon > 0$ tales que

$$s = C_r|\lambda|(x) \geq M\lambda(x) - \epsilon > t,$$

osea, $|\lambda|(B_r(x)) = s\mu(B_r(x))$, con $s/t > 1$. Luego sea $\delta > 0$ tal que $(r+\delta)^n < r^n s/t$, entonces si $y \in B_\delta(x)$, se cumple que para todo $z \in B_r(x)$ se da que $d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) < r + \delta$, es decir, $B_r(x) \subseteq B_{r+\delta}(y)$ y luego

$$\begin{aligned} |\lambda|\big(B_{r+\delta}(y)\big) &\geq |\lambda|(B_r(x)) \geq s\mu\big(B_r(x)\big) \\ &= s\left(\frac{r}{r+\delta}\right)^n \mu(B_{r+\delta}(y)) > t\mu(B_{r+\delta}(y)) \end{aligned}$$

con lo que se comprueba de $M|\lambda|(y) \geq C_r|\lambda|(y) > t$ y que $B_\delta(x) \subseteq E$. $\square$

Lema 9.12: Sea $\big(B_i\big)_{i=1}^m$ una sucesión finita de bolas en $\mathbb{R}^n$, entonces existe una subsucesión de bolas disjuntas dos a dos tales que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^m B_i\right) \leq 3^n \sum_{j=1}^k \mu(B_{i_j}).$$

Demostración: En primer lugar reordenemos las bolas por radio de mayor a menor y construyamos la subsucesión por recursión así: $i_1 := 1$ e i_{j+1} es el primer índice tal que es disjunto de $B_{i_1} \cup \cdots \cup B_{i_j}$. Notemos lo siguiente: sea $B_i := B_{r_i}(x_i)$ con i índice cualquiera y sea i_j el primer índice tal que existe $z \in B_{i_j} \cap B_i$. Veamos que $B_{r_i}(x_i) \subseteq B_{3r_{i_j}}(x_{i_j})$: Sea $y \in B_i$, luego

$$d(y, x_{i_j}) \leq d(y, x_i) + d(x_i, z) + d(z, x_{i_j}) < r_i + r_i + r_{i_j} \leq 3r_{i_j}.$$

Así que la unión de la sucesión está contenida en la unión de la subsucesión con triple de radio, pero $\mu(B_{3r_i}) = 3^n \mu(B_{r_i})$ que es lo que describe la fórmula del enunciado. □

Proposición 9.13: Si λ es una medida signada de Borel en $\mathbb{R}^n$ y $t > 0$, entonces se cumple que

$$\mu\big(\{x \in \mathbb{R}^n : M\lambda(x) > t\}\big) \leq \frac{3^n}{t} |\lambda|(\mathbb{R}^n).$$

En consecuencia, $M\lambda$ es finita en μ-c.d.

Demostración: Llamemos

$$E_t := \{x \in \mathbb{R}^n : M\lambda(x) > t\},$$

y fijemos un subconjunto K compacto de él. Podemos formar un cubrimiento de K mediante bolas abiertas contenidas en E_t (pues ya hemos visto que es abierto) y que cumplen que $M\lambda(x) \geq C_r|\lambda|(B_i) > t$ lo que es equivalente a que $|\lambda|(B_i) > t\mu(B_i)$, de modo que, por definición de compacidad, posee un subcubrimiento finito y por el lema se cumple que existe

$$\mu(K) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) \leq 3^n \sum_{i=1}^m \mu(B_i) \leq \frac{3^n}{t} \sum_{i=1}^m |\lambda|(B_i) \leq \frac{3^n}{t} |\lambda|(\mathbb{R}^n),$$

la última desigualdad se da pues las bolas son disjuntas y la medida $|\lambda|$ es positiva. Como μ es una medida regular y la desigualdad anterior aplica para todo compacto contenido en E_t entonces en el supremo de las medidas sobre compactos sigue valiendo y por ende vale para E_t mismo. □

Definición 9.14: En vista de la proposición anterior se define

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}(x) := \lim_{r\to 0} C_r\lambda(x),$$

que existe para μ-c.d., y en el resto de puntos podemos forzarla a valer 0 por ejemplo. A ésta función le llamamos la derivada de Lebesgue.

Se denota que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, léase f es localmente integrable, si $f\chi_B$ es integrable para toda bola B. Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, entonces podemos denotar Mf y $\mathrm{d}\lambda_f/\mathrm{d}\mu$ con λ_f. Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y E es un conjunto μ-finito y no nulo, entonces

$$⨍_E f\,\mathrm{d}\mu := \frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,\mathrm{d}\mu.$$

Se dice que x es un punto de Lebesgue de f si

$$\lim_{r\to 0} ⨍_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\,\mathrm{d}y = 0.$$

Como implicancia notemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_r(x)} |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y &\geq \left|\frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_r(x)} f(y)-f(x)\,\mathrm{d}y\right|\\ &= \frac{1}{\mu(B_r(x))}\left|\int_{B_r(x)} f(y)\,\mathrm{d}y - f(x)\right|,\end{aligned}$$

luego todo punto de Lebesgue satisface que $\frac{\mathrm{d}\lambda_f}{\mathrm{d}\mu}(x) = f(x)$.

Teorema 9.15 – *Teorema de diferenciación de Lebesgue*: Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ entonces casi todo punto es de Lebesgue.

Demostración: Sea

$$T_r(f)(x) := ⨍_{B_r(x)} |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y, \qquad T(f)(x) := \limsup_{r\to 0} T_r(f)(x).$$

El objetivo es probar que $T(f) = 0$ en μ-c.d. Para ello comprobaremos que las excepciones caen en un conjunto de medida nula que vendrá inicialmente determinado por un número real $z > 0$ y un natural no nulo k; queremos probar que $E_z := \{x \in \mathbb{R}^n : T(f)(x) > 2z\}$ es nulo para todo z. Ya hemos visto que las continuas de soporte compacto son densos en L^1, así que sea $g_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - g_k\| - 1 < 1/k$. Sea $h_k := f - g_k$, nótese que por desigualdad triangular se tiene que $T_r(f) \le T_r(g_k) + T_r(h_k)$ así que también cumplen en el límite, pero como g_k es continua se tiene que $T(g_k) = 0$ y además

$$T_r(h_k)(x) = |h_k(x)| + \fint_{B_r(x)} |h_k| \, \mathrm{d}\mu$$

de modo que $T(f) \le T(h_k) \le |h_k| + Mh_k$.

Si x es tal que $T(f)(x) > 2z$, entonces $|h_k| > z$ o $Mh_k(x) > z$, luego

$$E_z \subseteq \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n : |h_k|(x) > z\}}_{=:A} \cup \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n : Mh_k(x) > z\}}_{=:B} =: C(z,k)$$

Por la proposición vemos que $\mu(A) \le \frac{3^n}{z}\|h\|_1 = 3^n/(zk)$. Mientras que para el otro conjunto notamos que

$$k\mu(B) \le \int_B |h| \, \mathrm{d}\mu \le \int_{\mathbb{R}^n} |h| \, \mathrm{d}\mu = \|h\|_1 < \frac{1}{k}.$$

En definitiva $\mu(C(z,k)) = \frac{3^n+1}{zk}$.

Nótese que los conjuntos $C(z,k)$ siempre existen independiente de k, por lo que aplican para todo ello y luego $\mu(E_z) = 0$ como se quería probar. □

Corolario 9.16: Sea $\lambda \ll \mu$ una medida signada de Borel, entonces, abreviadamente se cumple en c.d.

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu} \, \mathrm{d}\mu = \mathrm{d}\lambda,$$

es decir que para todo conjunto de Borel E se cumple que

$$\lambda(E) = \int_E \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu} \, \mathrm{d}\mu$$

§9.1.3 El teorema del cambio de variable. Inmediatamente procedemos a enunciar el teorema de ésta sección: Sea $f : V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable, donde V es abierto, y sea $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to V$ un C^1-difeomorfismo, entonces

$$\int_V f \, \mathrm{d}\mu = \int_U (g \circ f)|\det Jg| \, \mathrm{d}\mu.$$

La gran cuestión del cambio de variables es ¿qué hace el término "$|\det Jg|$"? Para comprenderlo comenzaremos considerando el caso en que g sea una biyección lineal para luego generalizarlo.

Teorema 9.17: Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal dada por $g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot B$ y E un conjunto medible, entonces

$$\mu(g[E]) = |\det B| \cdot \mu(E).$$

Demostración: Para ello comenzaremos viendo que aplica para los conjuntos Jordan-medibles. ... □

En general si elegimos $B := \alpha I$, diremos que se trata de una homotecia de medibles, la cual afecta $\mu(\alpha E) = |\alpha|^n \mu(E)$.

Lema 9.18: Sea $g\colon U \to V$ un C^1-difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^n$, entonces definiendo $\nu_g(E) := \mu(g[E])$ que es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue se da que

$$\frac{\mathrm{d}\nu_g}{\mathrm{d}\mu} = |\det Jg|.$$

(Ésto es admisible pues $g[E]$ es μ-medible dado que g es Borel-medible por ser un homeomorfismo.)

Demostración: Sea $\boldsymbol{x} \in U$ y $g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$, podemos reajustar mediante traslaciones el sistema para que $\boldsymbol{x} = \vec{0}$ y $g(\vec{0}) = \vec{0}$, de éste modo, el teorema de Taylor nos dice que localmente podemos aproximar por el diferencial (transformación lineal) de $\boldsymbol{x}$, que denotaremos por D; es decir, $\phi(\boldsymbol{z}) := \boldsymbol{z} \cdot D$ es el diferencial de g en $\boldsymbol{x}$. Definamos también $h := g \circ \phi^{-1}$ que localmente asemejaría a la identidad.

Luego, dada una bola $B := B_r(\vec{0})$, el teorema anterior dice que

$$\mu(h[B]) = |\det D|^{-1} \mu(g[B]),$$

de modo que basta probar que

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu(h[B])}{\mu(B)} = 1.$$

h es diferenciable y su Jacobiano es la identidad en el origen, por definición significa que

$$\lim_{\boldsymbol{u} \to \vec{0}} \frac{h(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} = \vec{0},$$

por definición de límite se traduce en que para todo $0 < \epsilon < 1$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall \|\boldsymbol{u}\| < \delta \quad \|h(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\| < \epsilon \cdot \|\boldsymbol{u}\|.$$

Por desigualdad triangular, si $0 < r < \delta$ se cumple que

$$\|h(\boldsymbol{u})\| \leq \|h(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{u}\| < r(1+\epsilon), \quad B_{r(1-\epsilon)} \subseteq h[B_r] \subseteq B_{r(1+\epsilon)}.$$

por definición, $B_{r(1\pm\epsilon)}$ es una homotecia de factor $(1 \pm \epsilon)$ de B_r, así que

$$(1-\epsilon)^n \leq \frac{\mu(h[B_r])}{\mu(B_r)} \leq (1+\epsilon)^n$$

Por teorema del sandwich ésto induce el límite deseado. □

Teorema 9.19 – *Teorema del cambio de variable*: Sea $f\colon V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable, donde V es abierto, y sea $g\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to V$ un C^1-difeomorfismo, entonces

$$\int_V f \, \mathrm{d}\mu = \int_U (g \circ f) |\det Jg| \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración: Por el lema anterior se cumple que

$$\mu(g[E]) = \int_E \frac{\mathrm{d}\nu_g}{\mathrm{d}\mu} \, \mathrm{d}\mu = \int_E |\det Jg| \, \mathrm{d}\mu.$$

Luego

$$\mu(g[E \cap U]) = \int_U \chi_E |\det Jg| \, \mathrm{d}\mu,$$

y si $A \subseteq V$, entonces considerando $E := g^{-1}[A]$ y que $\chi_E = (g \circ \chi_A)$, entonces tenemos que

$$\int_V \chi_A \, \mathrm{d}\mu = \mu(A) = \mu(g[E]) = \int_U (g \circ \chi_A) |\det Jg| \, \mathrm{d}\mu$$

es decir, el teorema aplica para toda función simple, luego aplica para toda función integrable. □

Ejemplo 9.20 (integral de Gauss)**:** Queremos calcular $I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$, luego veamos que, por teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-y^2} \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \cdot I \, \mathrm{d}y = I \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \, \mathrm{d}y = I^2. \end{aligned}$$

Ahora, aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$g(r,\phi) := (r\cos\phi, r\sin\phi), \quad Jg(r,\phi) := \begin{bmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{bmatrix}, \quad \det Jg = r.$$

Ahora notemos que $U := (0,+\infty)\times(0,2\pi)$ es un abierto tal que g es inyectiva en U y tiene determinante jacobiano no nulo, luego es un C^1-difeomorfismo con $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \in (0,\infty)\}$ (que es $\mathbb{R}^2$ salvo un conjunto de medida nula).

Luego

$$I^2 = \iint_U \exp(-r^2)\cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi = \int_0^\infty \left(\int_0^{2\pi} re^{-r^2}\,\mathrm{d}\phi\right)\mathrm{d}r,$$

notemos que la integral interior es constante así que se multiplica por 2π y la exterior sale con el cambio de variable $t := r^2$ tal que $\mathrm{d}t = 2r\mathrm{d}r$ por lo que

$$I^2 = \pi\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \pi[e^{-t}]_\infty^0 = \pi.$$

Por lo que $I = \sqrt{\pi}$.

Nótese que

$$\Pi(-1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \qquad u = \sqrt{t}$$

por lo que se concluye que $\Pi(-1/2) = \sqrt{\pi}$ por la integral de Gauss. ⌟

9.2 El espacio $\mathscr{L}^p$

Ya vimos que una función f está en $\mathscr{L}^1$ syss $\|f\|$ es integrable (sobre $\mathbb{R}$), inspirados por ésta definición se construye la siguiente:

Definición 9.21: Sea Ω un espacio de medida, X un espacio de Banach y $1 < p < \infty$. Dada una función $f\colon \Omega \to X$ se escribe que $f \in \mathscr{L}^p(\Omega; X)$ si es el límite puntual de funciones simples y si $\|f\|^p \in \mathscr{L}^1(\Omega; X)$. Para el caso $p = \infty$, se escribe que $f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega; X)$ si f es integrable y está acotado μ-c.d.

En todo caso, para $1 < p < \infty$ se define:

$$\|f\|_p := \sqrt[p]{\int_\Omega \|f\|^p\,\mathrm{d}\mu},$$

y para $p = \infty$ se define $\|f\|_\infty$ como el ínfimo M real tal que existe un conjunto N medible nulo tal que $\|f(x)\| \le M$ para todo $x \notin N$.

Estaríamos tentados a tener la misma conclusión que para $\mathscr{L}^1$: vale decir, que los espacios $\mathscr{L}^p$ son de Banach seminormados, pero la desigualdad triangular no es tan fácil de probar. No obstante, hay un caso sencillo:

Proposición (AEN) 9.22: Sea Ω un espacio de medida y X un espacio de Banach sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces:

1. Si $f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega; X)$, entonces $\|f\|_\infty$ es una cota de f c.d.
2. $\mathscr{L}^\infty(\Omega; X)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial seminormado.

Demostración: Probaremos la 1, de la que se sigue trivialmente la 2: Como es un ínfimo de valores reales existen sucesiones $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}, (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\mu(Z_n) = 0$ y M_n cota superior de f en $\Omega \setminus Z_n$ tales que $\lim_n M_n = \|f\|_\infty$. Luego sea $Z := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$, nótese que $\mu(Z) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(Z_n) = 0$ y $\|f\|_\infty$ es cota superior de f en $\Omega \setminus Z$. □

Para los casos restantes tendremos que recurrir a las desigualdades probadas en §6.5.

Teorema 9.23 (Desigualdad de Jensen): Sea Ω un espacio de medida con $\mu(\Omega) = 1$ y $\varphi\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ con $-\infty \le a < b \le \infty$ una función convexa. Entonces para toda $f \in \mathscr{L}^1(\Omega; (a, b))$ se cumple que

$$\varphi\left(\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu\right) \le \int_\Omega (f \circ \varphi) \,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración: Sea $c := \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ que claramente $c \in (a, b)$ (¿por qué?) y sea $\ell \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ una función lineal tal que $\ell(c) = \varphi(c)$ pero que $\ell \le \varphi$ en (a, b), luego $\ell(c) = \int_\Omega (f \circ \ell) \,\mathrm{d}\mu$ y se cumple

$$\varphi(c) = \ell(c) = \int_\Omega (f \circ \ell) \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega (f \circ \varphi) \,\mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

Corolario 9.24: Sea Ω un espacio de medida y X un espacio de Banach. Si $1 \le p < q \le \infty$ y $\mu(\Omega) < \infty$, entonces $\mathscr{L}^p(\Omega; X) \supseteq \mathscr{L}^q(\Omega; X)$.

Demostración: Veremos el caso $X = \mathbb{R}$ puesto que el resto deriva de mirar a $\|f\|\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Si $q = \infty$ y $\mu(\Omega) < \infty$ entonces $\|f\|_p \le \|f\|_\infty \cdot (\mu(\Omega))^{1/p}$ (aquí empleamos que $|f| \le \|f\|_\infty$ c.d.).

Si $q \neq \infty$, entonces $1 < q/p < \infty$ y $\varphi(x) := |x|^{q/p}$ es convexa, luego por Jensen,

$$\left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{q/p} \leq \int_\Omega |f|^q \, \mathrm{d}\mu.$$

Por ende $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ y se prueba el enunciado. □

Ejemplo. Sea $\Omega := [0,1]$. Consideremos $\mathscr{L}^p(\Omega)$ y las funciones x^{-r} con $0 < r \leq 1$. Si $r < 1$, por teorema fundamental del cálculo y por convergencia monótona de Lebesgue se obtiene que

$$\int_{[0,1]} x^{-r} \, \mathrm{d}\mu = \lim_{y \to 0^+} \left[\frac{x^{-r+1}}{-r+1} \right]_y^1 = \frac{1}{1-r}.$$

En cambio si $r = 1$, por el mismo argumento

$$\int_{[0,1]} x^{-1} \, \mathrm{d}\mu = \lim_{y \to 0^+} [\ln x]_y^1 = \infty.$$

Luego $x^{-1} \notin \mathscr{L}^1(\Omega)$. Y en general si $p < q < \infty$, entonces $x^{-1/q}$ es una función $\mathscr{L}^p$ pero no $\mathscr{L}^q$, lo que demuestra que $\mathscr{L}^p(\Omega) \supset \mathscr{L}^q(\Omega)$ (este argumento se puede extender a $q = \infty$, explique cómo).

Ojo que el mismo ejemplo puede utilizarse al revés considerando $\Omega' := [1, \infty)$, notando que $1/x \in \mathscr{L}^2(\Omega')$, pero $x^{-1} \notin \mathscr{L}^1(\Omega')$, y de hecho, $x^{-1} \in \mathscr{L}^p(\Omega')$ para todo $p \in (1, \infty]$.

Teorema 9.25 – *Desigualdad de Minkowski*: Sea Ω un espacio de medida, X un espacio de Banach sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $1 < p < \infty$. Sean $f, g \in \mathscr{L}^p(\Omega; X)$, entonces:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

vale decir, $\| \, \|_p$ es una seminorma sobre $\mathscr{L}^p(\Omega; X)$, denominada la ***seminorma*** L^p.

Demostración: Si $\|f\|_p = 0$, entonces es trivial. Así que asumiremos que $\|f\|_p, \|g\|_p$ no son ni nulos ni infinitos. Sea $\lambda \in (0,1)$, luego como $|x|^p$ es convexa y por la desigualdad de Jensen sobre $\mathbb{R}^1$

$$\|(1-\lambda)f + \lambda g\|_p^p = \int_\Omega |(1-\lambda)f + \lambda g|^p \, \mathrm{d}\mu$$

$$\leq \int_\Omega (1-\lambda)\,|f|^p \,\mathrm{d}\mu + \lambda\,|g|^p \,\mathrm{d}\mu = (1-\lambda)\,\|f\|_p^p + \lambda\|g\|_p^p.$$

Luego si $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$, entonces

$$\|(1-\lambda)f + \lambda g\|_p \leq 1.$$

Si no son ambas 1, entonces sean $\hat{f} := f/\|f\|_p$, $\hat{g} := g/\|g\|_p$ y $\lambda := \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p}$ entonces

$$\frac{\|f+g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} = \|(1-\lambda)\hat{f} + \lambda\hat{g}\|_p \leq 1. \qquad \square$$

Teorema 9.26: Sea Ω un espacio de medida, X un espacio de Banach y $p \in [1,\infty]$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}^p(\Omega;X)$ una sucesión de Cauchy (bajo la seminorma L^p), entonces existe $f \in \mathscr{L}^p(\Omega;X)$ tal que:

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (bajo la seminorma L^p) a f. En consecuencia, $\mathscr{L}^p(\Omega;X)$ es un espacio de Banach (seminormado).

Más aún existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que:

2. Converge puntualmente a f en μ-c.d.
3. Para todo $\epsilon > 0$ existe $A_\epsilon \subseteq \Omega$ medible, con $\mu(\Omega \setminus A_\epsilon) \leq \epsilon$, tal que $f_{n_k}|_{A_\epsilon} \xrightarrow{\text{unif.}} f|_{A_\epsilon}$.

Pista: Para $p \neq \infty$, siga la demostración del teorema 8.57. Para $p = \infty$ nótese que la convergencia en seminorma L^∞ es una convergencia uniforme c.d. $\square$

Corolario 9.27: Sea Ω un espacio de medida y X un espacio de Banach. Si $f \in \mathscr{L}^2(\Omega;X)$ y $\|f\|_2 = 0$, entonces f es nula μ-c.d.

Corolario 9.28: Sea Ω un espacio de medida, X un espacio de Banach y $p \in [1,\infty]$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}^p(\Omega;X)$ una sucesión de Cauchy (bajo la seminorma L^p) que converge puntualmente a f, entonces $f \in \mathscr{L}^1(\Omega;X)$ y es el límite (bajo la seminorma L^p) de $(f_n)_n$.

Teorema 9.29 (de la convergencia dominada): Sea Ω un espacio de medida, X un espacio de Banach y $p \in [1,\infty]$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}^p(\Omega;X)$ que converge puntualmente a f y sea $g \in \mathscr{L}^p(\Omega;\mathbb{R})$ tal que $\|f_n\| \leq g$. Entonces $f \in \mathscr{L}^p(\Omega;X)$ y

$$\int_\Omega \lim_n f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

§9.2.1 Integración de codominio un espacio de Hilbert. Hay un caso particular que atrae más interés que el anterior:

> **Definición 9.30:** Sea Ω un espacio de medida y H un espacio *de Hilbert*. Dada una función $f\colon \Omega \to H$ se escribe que $f \in \mathscr{L}^2(\Omega; H)$ si es el límite puntual de funciones simples y si $\langle f, f\rangle = \|f\|^2 \in \mathscr{L}^1(\Omega; X)$. Nótese que ésta definición coincide con la anterior.

Proposición 9.31: Sea Ω un espacio de medida y H un espacio de Hilbert sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces $\mathscr{L}^2(\Omega; H)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y la aplicación

$$\begin{aligned}\langle -, -\rangle_\mu\colon \mathscr{L}^2(\Omega; H) \times \mathscr{L}^2(\Omega; H) &\longrightarrow \mathbb{K}\\ (f, g) &\longmapsto \int_\Omega \langle f, g\rangle \, \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

es una forma hermitiana positiva.

Demostración: Sean $f, g \in \mathscr{L}^2(\Omega; H)$, luego, para todo $x \in \Omega$ se satisface que

$$\begin{aligned}0 \le \|f(x) - g(x)\|^2 &= \|f(x)\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\langle f(x), g(x)\rangle) + \|g(x)\|^2\\ &\le \|f(x)\|^2 - 2|\langle f(x), g(x)\rangle| + \|g(x)\|^2,\end{aligned}$$

lo que equivale a que

$$|\langle f(x), g(x)\rangle| \le \frac{\|f(x)\|^2 + \|g(x)\|^2}{2};$$

donde la función de la derecha es integrable, por lo que la de la izquierda también.

El resto es una comprobación usual que dejamos al lector. □

Una consecuencia es que podríamos decir que $\mathscr{L}^2(\Omega; H)$ es algo así como un espacio *cuasi* Hilbert ya que satisface todos los axiomas exceptuando el (FH4), puesto que podría suceder que $\langle f, f\rangle_\mu = 0$ con $f \neq 0$. En particular, se define la seminorma L^2 así:

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle_\mu} = \sqrt{\int_\Omega \|f\|^2 \, \mathrm{d}\mu}.$$

Si ahora consideramos la relación de equivalencia de que $f \sim g$ syss $\|f - g\|_2 = 0$ y consideramos el espacio cociente $\mathscr{L}^2(\Omega; H)/\sim$ entonces efectivamente es un espacio de Hilbert.

Teorema 9.32 – *Desigualdad de Hölder*: Sea Ω un espacio de medida y H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K}$. Si $f \in L^p(\Omega; H)$ y $g \in L^q(\Omega; H)$ con $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, entonces

$$|\langle f, g\rangle_\mu| \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

DEMOSTRACIÓN: Si $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$, entonces aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad de Young se obtiene

$$\begin{aligned}|\langle f, g\rangle_\mu| &\le \int_\Omega |\langle f, g\rangle| \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega \|f\|\,\|g\| \,\mathrm{d}\mu \\ &\le \int_\Omega \left(\frac{\|f\|^p}{p} + \frac{\|g\|^q}{q}\right) \mathrm{d}\mu = \frac{\|f\|_p^p}{p} + \frac{\|g\|_q^q}{q} = 1.\end{aligned}$$

Si $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_q$, entonces $\hat{f} := f/\|f\|_p$ y $\hat{g} := g/\|g\|_q$ cumplen que

$$|\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_\mu| = \frac{|\langle f, g\rangle_\mu|}{\|f\|_p \,\|g\|_q} \le 1. \qquad \square$$

La idea de dualidad debería hacerse latente en lo siguiente. Primero un caso base, consideremos la forma hermitiana $\langle z, w\rangle = z \cdot \overline{w}$ en $\mathbb{C}$, entonces definamos:

$$\begin{aligned}[-,-]_\mu \colon \mathscr{L}^2(\Omega; \mathbb{C})^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\longmapsto \int_\Omega f \cdot \overline{g} \,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Luego podemos definir los siguientes operadores lineales:

$$\begin{aligned}\lambda_f \colon \mathscr{L}^\infty(\Omega; \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto [f, g]_\mu\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\lambda_g \colon \mathscr{L}^1(\Omega; \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto [f, g]_\mu\end{aligned}$$

Teorema (AEN) 9.33: Sea Ω de medida σ-finita. La siguiente aplicación es $\mathbb{C}$-bilineal:

$$\begin{aligned}[-,-]_\mu \colon \mathscr{L}^1(\Omega; \mathbb{C}) \times \mathscr{L}^\infty(\Omega; \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\longmapsto \int_\Omega f \cdot \overline{g} \,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

además satisface la desigualdad de Hölder:

$$|[f, g]_\mu| \le \|f\overline{g}\|_1 \le \|f\|_1 \,\|g\|_\infty.$$

$(\mathscr{L}^1(\Omega;\mathbb{C}), \mathscr{L}^\infty(\Omega;\mathbb{C}), [-,-]_\mu)$ es un par dual y las aplicaciones lineales continuas $f \mapsto \lambda_f$ y $g \mapsto \lambda_g$ preservan la norma. Más aún, $g \mapsto \lambda_g$ es de hecho un isomorfismo.

Demostración: La desigualdad de Hölder viene del hecho de que si $C := \|g\|_\infty$, entonces

$$\|f \cdot \overline{g}\|_1 = \int_\Omega |f \cdot \overline{g}| \, \mathrm{d}\mu \le \int_\Omega |f| \cdot |g| \, \mathrm{d}\mu \le \|f\|_1 \, \|g\|_\infty;$$

ésto es vital para decir que la función está bien definida en primer lugar. Nótese que por la desigualdad de Hölder concluimos inmediatamente que $\|\lambda_f\| \le \|f\|_1$ y $\|\lambda_g\| \le \|g\|_\infty$, hay que probar la desigualdad conversa: para g, llamemos $C := \|\lambda_g\|$, entonces se tiene que

$$\left\| \int_\Omega \chi_A \cdot \overline{g} \, \mathrm{d}\mu \right\| \le C \cdot \mu(A),$$

lo que por el corolario 8.72 implica que $\|g(x)\| \le C$ en μ-c.d. Luego $\|g\|_\infty \le C$ como se quería probar.

Para f: Primero definamos $h\colon \Omega \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ dada por:

$$h(x) := \begin{cases} \frac{1}{\|f(x)\|}, & \|f(x)\| \ne 0 \\ 0, & \|f(x)\| = 0 \end{cases}$$

la cual es medible (¿por qué?), de modo que $g := h \cdot f$ es medible y acotada por 1; en particular, $\|g\|_\infty \in \{0, 1\}$, por lo que

$$\|f\|_1 = \int_\Omega \|f\| \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \cdot \overline{g} \, \mathrm{d}\mu = \lambda_g(f) \le \|\lambda_f\|.$$

Aún queda mirar que los λ_g's son todos los funcionales continuos de $\mathscr{L}^1(\Omega;\mathbb{C})$. Para ello, primero supongamos que Ω es de medida finita, y sea $\lambda\colon \mathscr{L}^1(\Omega;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ un funcional, luego sea $\|\lambda\| = C$ y luego, podemos considerar a f como un elemento de $\mathscr{L}^2$ (dado que el espacio es de medida finita) de modo que, por Cauchy-Schwarz se concluye que:

$$\|\lambda(f)\| \le C\|f\|_1 = C \int_\Omega \|f\| \cdot \chi_\Omega \, \mathrm{d}\mu = C \int_\Omega \|f \cdot \overline{\chi}_\Omega\| \, \mathrm{d}\mu \le C\|f\|_2 \|\chi_\Omega\|$$

de modo que λ es un funcional continuo de $\mathscr{L}^2$. Luego, como $\mathscr{L}^2$ es un espacio de Hilbert, por el teorema de Riesz-Fréchet se concluye que existe $g \in \mathscr{L}^2(\Omega;\mathbb{C})$ tal que

$$\lambda(f) = [f, g]_\mu = \lambda_g(f).$$

Para pasar al caso general podemos suponer que $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con X_n de medida finita y definir

$$\lambda_n(f) := \lambda(f \cdot \chi_{X_n})$$

así se obtiene que $\lambda_n(f) = [f, g_n]_\mu$, donde $g_n \in \mathscr{L}^2(\Omega; \mathbb{C})$. Luego

$$\lambda(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}} [f, g_n]_\mu = \left[f, \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n\right]_\mu,$$

luego definiendo $g := \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ (¿por qué está en $\mathscr{L}^\infty$?) es claro que $\lambda(f) = [f, g]$ como se quería probar. □

En particular, el teorema se puede generalizar a espacios de Hilbert:

Teorema (AEN) 9.34: Sea Ω de medida σ-finita, y H un espacio de Hilbert sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. La siguiente aplicación es una forma hermitiana (no necesariamente positiva):

$$\begin{aligned} \langle -, - \rangle_\mu \colon \mathscr{L}^1(\Omega; H) \times \mathscr{L}^\infty(\Omega; H) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (f, g) &\longmapsto \int_\Omega \langle f, g \rangle \, \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Se satisface que $(\mathscr{L}^1(\Omega; H), \mathscr{L}^\infty(\Omega; H), \langle -, - \rangle_\mu)$ es un par dual y las aplicaciones lineales continuas $f \mapsto \lambda_f$ y $g \mapsto \lambda_g$ preservan la norma. Más aún, $g \mapsto \lambda_g$ es de hecho un isomorfismo.

Existe un teorema similar para el resto de exponentes duales (cf. teorema 9.49), pero se necesita un poco de teoría sobre medidas vectoriales.

§9.2.2 Medidas vectoriales. Del mismo modo que podemos generalizar la noción de medida a la signada sobre los reales, podemos hacer la generalización a los espacios de Banach mismos. La razón para hacerlo es que tal como las medidas vectoriales otorgan otro apice de flexibilidad que ya vimos dado por las medidas signadas en el teorema de Radon-Nikodým.

Definición 9.35: Sea (Ω, Σ) un espacio con una σ-álgebra y X un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$. Una aplicación $\lambda \colon \Sigma \to X$ se dice ***numerablemente aditiva*** si $\lambda(\varnothing) = \vec{0}$ y es numerablemente aditiva, vale decir, para todo $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ medibles se cumple que

$$\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n).$$

Si λ es una medida vectorial, se denota por $|\lambda|\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ a la aplicación:

$$|\lambda|(E) := \sup\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda(A_n)| : \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ es partición medible de } E\right\}.$$

La misma observación de las medidas signadas aplica: necesariamente la sumatoria debe ser absolutamente convergente por el teorema de reordenamiento de Riemann.

Proposición 9.36: Sea (Ω, Σ) un espacio con una σ-álgebra, X un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ y $\lambda\colon \Sigma \to X$ una aplicación numerablemente aditiva. Entonces:

1. Sea $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ una cadena ascendente de conjuntos medibles, tales que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Entonces:
$$\lim_n \lambda(A_n) = A.$$
2. Sea $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ una cadena descendente de conjuntos medibles, tales que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Entonces:
$$\lim_n \lambda(A_n) = A.$$
3. $|\lambda|$ es una medida (positiva) sobre Ω.

Teorema (DE) 9.37: Sea (Ω, Σ) un espacio con una σ-álgebra, X un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ y $\lambda\colon \Sigma \to X$ una aplicación numerablemente aditiva. Si X es de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$, entonces $|\lambda|$ es una medida positiva finita.

Pista: Hay que demostrar que el problema se reduce a la comprobación sobre $\mathbb{R}$ hecha en el lema 9.2. □

Definición 9.38 – *Medida vectorial*: Sea (Ω, Σ) un espacio con una σ-álgebra y X un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$. Entonces $\lambda\colon \Sigma \to X$ se dice una ***medida valuada en*** X si es una aplicación numerablemente aditiva, tal que su variación total $|\lambda|$ es una medida positiva finita. A las medidas vectoriales podemos asignarle una norma:

$$\|\lambda\| := |\lambda|(\Omega).$$

Se denota por $M^1(\Omega; X)$ al conjunto de medidas vectoriales sobre Ω valuadas en X.

Proposición 9.39: Sea (Ω, Σ) un espacio con una σ-álgebra y X un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$. Entonces $M^1(\Omega; X)$ es un espacio de Banach con la norma definida anteriormente.

Ahora queremos extender la noción de ser «absolutamente continuo»:

Lema 9.40: Sea (Ω, μ) un espacio de medida, X un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ y λ una medida valuada en X sobre Ω. Son equivalentes:

1. Si $\mu(A) = 0$, entonces $\lambda(A) = \vec{0}$.
2. Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\mu(A) < \delta$, entonces $|\lambda(A)| < \epsilon$.

Demostración: $2 \implies 1$. Trivial.

$1 \implies 2$. Procedemos por contrarrecíproca. Sea $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe A_n medible tal que $\mu(A_n) < 2^{-n}$ y $|\lambda(A_n)| > \epsilon$, y por lo tanto, $|\lambda|(A_n) > \epsilon$. Definamos

$$B_m := \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n,$$

y definamos $C := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} B_m$. Luego $\mu(C) = 0$, pero $|\lambda|(C) \geq \epsilon$. Por ende, existe $N \subseteq C$ tal que $\lambda(N) \neq \vec{0}$ y $\mu(N) = 0$. □

Definición 9.41: Sea (Ω, μ) un espacio de medida, X un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ y λ una medida valuada en X sobre Ω. Se dice que λ es ***absolutamente continua*** respecto a μ, denotado $\lambda \ll \mu$, si satisface alguna de las condiciones del lema anterior.

Proposición 9.42: Sea (Ω, μ) un espacio de medida y X un espacio de Banach. Entonces:

1. Dado $f \in \mathscr{L}^1(\Omega; X)$ se cumple que
$$\mu_f(A) := \int_A f \, \mathrm{d}\mu$$
es una medida vectorial y $\mu_f \ll \mu$.
2. Si $\lambda \in M^1(\Omega; X)$, entonces $\lambda \ll \mu$ syss $|\lambda| \ll \mu$.

Teorema 9.43: Sea (Ω, μ) un espacio de medida σ-finita y X un espacio de Banach. La aplicación:

$$\begin{aligned} \mu_{-}\colon \mathscr{L}^1(\Omega; X) &\longrightarrow M^1(\Omega; X) \\ f &\longmapsto \mu_f \end{aligned}$$

es un encaje lineal que preserva la norma, i.e., $\|\mu_f\| = \|f\|_1$.

Demostración: La linealidad de la aplicación es trivial. Y además es claro que $\|\mu_f\| \leq \|f\|_1$ (¿por qué?), así que basta probar la desigualdad restante. Dado $\epsilon > 0$, existe F de medida finita, tal que

$$\int_\Omega \|f\| \, \mathrm{d}\mu - \epsilon \leq \int_F \|f\| \, \mathrm{d}\mu.$$

Como $\|f\|$ es integrable y $\mu_{\|f\|} \ll \mu$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$\mu(A) < \delta \implies \mu_{\|f\|}(A) = \int_A \|f\| \, \mathrm{d}\mu < \epsilon.$$

Como f es el límite de una sucesión de Cauchy de funciones simples, entonces, por el teorema de Egoroff, existe $B_\delta \subseteq F$ con $\mu(F \setminus B_\delta) < \delta$ y $s \in \mathrm{St}(\Omega; X)$ tal que

$$\forall x \in B_\delta \implies \|f(x) - s(x)\| < \frac{\epsilon}{\mu(F)},$$

(por convergencia uniforme). Podemos exigir que s se anule fuera de B_δ, en cuyo caso

$$s = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \chi_{E_n}$$

donde $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una partición de B_δ. Finalmente

$$\begin{aligned} \int_F \|f\| \, \mathrm{d}\mu - \epsilon \leq \int_{B_\delta} \|f\| \, \mathrm{d}\mu &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{E_n} \|s\| + \frac{\epsilon}{\mu(F)} \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left\| \int_{E_n} s \, \mathrm{d}\mu \right\| + \epsilon \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left\| \int_{E_n} f \, \mathrm{d}\mu \right\| + 2\epsilon \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mu_f|(E_n) + 2\epsilon \leq |\mu_f|(\Omega) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

□

Si aplica para Ω, aplica para todo subconjunto medible y, en particular, se tiene que:

Corolario 9.44: Sea (Ω, μ) un espacio de medida σ-finita y X un espacio de Banach. Para todo $s \in \mathrm{St}(\Omega; X)$, se cumple que

$$\int_\Omega s \, \mathrm{d}|\mu_f| = \int_\Omega s \cdot \|f\| \, \mathrm{d}\mu.$$

Queremos entender las medidas vectoriales del mismo modo que el teorema de Radon-Nikodým conecta las medidas reales. Para ello, necesitamos una nueva definición de integral:

Definición 9.45: Sea H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ y sea λ una medida H-valuada sobre Ω de variación total $\mu := |\lambda|$. Para las funciones simples se define:

$$\int_\Omega \sum_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{v}_n \chi_{E_n} \, \mathrm{d}\lambda := \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle \boldsymbol{v}_i, \lambda(E_n) \rangle \in \mathbb{K},$$

donde $\boldsymbol{v}_i \in H$ para que el producto interno tenga sentido.

Así pues, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 9.46: Sea H un espacio de Hilbert y sea λ una medida H-valuada sobre Ω de variación total $\mu := |\lambda|$. Existe un único $h \in \mathscr{L}^1(\mu; H)$ (salvo igualdad μ-c.d.) con $\|h(x)\| = 1$ para todo $x \in \Omega$, tal que para toda función simple $s \in \mathrm{St}(\mu; H)$ se satisface que

$$\int_\Omega s \, \mathrm{d}\lambda = \int_\Omega \langle s, h \rangle \, \mathrm{d}\mu.$$

DEMOSTRACIÓN: Comencemos por notar que la aplicación

$$\begin{aligned} \mathrm{St}(\mu; H) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ s &\longmapsto \int_\Omega s \, \mathrm{d}\lambda \end{aligned}$$

es un funcional lineal. Luego, por el teorema de Riesz-Fréchet, existe un único $h \in \mathscr{L}^1(\mu; H)$ (salvo igualdad μ-c.d.) tal que

$$\int_\Omega s \, \mathrm{d}\lambda = \int_\Omega \langle s, h \rangle \, \mathrm{d}\mu.$$

Finalmente hay que comprobar que $\|h(x)\| = 1$, al menos en μ-c.d. Como h es integrable, entonces ha de ser medible y luego el conjunto

$$S_\alpha := \{x \in \Omega : \|h(x)\| \leq \alpha\}$$

es medible. Luego sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una partición de S_α, entonces

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\lambda(A_n)\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\| \int_\Omega \langle \chi_{A_n}, h\rangle \, \mathrm{d}\mu \right\| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha \, |\lambda|(A_n) = \alpha \, |\lambda|(S_\alpha),$$

vale decir, $\mu(S_\alpha) \le \alpha \, \mu(S_\alpha)$. Si elegimos $\alpha < 1$, entonces $\mu(S_\alpha) = 0$. Luego podemos cambiar h en un conjunto μ-nulo para que $\|h(x)\| \ge 1$ para todo $x \in \Omega$. Para la desigualdad conversa, sea A medible, luego

$$\left| \int_\Omega \langle \chi_A, h\rangle \, \mathrm{d}\mu \right| = \left| \int_\Omega \chi_A \, \mathrm{d}\lambda \right| = \|\lambda(A)\| \le \mu(A),$$

luego por el teorema 8.69 se satisface que $\|h(x)\| \le 1$ para μ-casi todo $x \in \Omega$, y nuevamente basta variar a h en un conjunto de medida μ-nula para obtener el resultado deseado. □

Corolario (DE) 9.47 (Radon-Nikodým): Sea (Ω, μ) un espacio de medida σ-finita, H un espacio de Hilbert y $\lambda \ll \mu$ una medida H-valuada. Entonces existe un único $f \in \mathscr{L}^1(\mu; H)$ (salvo igualdad μ-c.d.) tal que $\lambda = f \, \mathrm{d}\mu$.

Corolario (DE) 9.48: Sea (Ω, μ) un espacio de medida finita y H un espacio de Hilbert.

1. Todo funcional continuo sobre $\mathrm{St}(\Omega; H)$ admite una única extensión a un funcional continuo sobre $\mathscr{L}^\infty(\Omega; H)$.

2. Un funcional λ sobre $\mathscr{L}^\infty(\Omega; H)$ es de la forma $\langle f, -\rangle_\mu$ con $f \in \mathscr{L}^1(\Omega; H)$ syss es continuo.

Demostración: Sea λ un funcional continuo sobre $\mathrm{St}(\Omega; H)$. Veamos que si admite extensión, entonces es única: Sea $\bar\lambda$ una extensión y sea $g \in \mathscr{L}^\infty(\mu; H)$. g es, por definición, el límite de una sucesión de Cauchy de funciones simples; pero por el teorema de Egoroff se cumple que para todo $\epsilon > 0$ existe A con $\mu(\Omega \setminus A) < \epsilon$ tal que la convergencia es uniforme en A, luego se concluye por la continuidad del funcional.

Veamos que λ sí posee una extensión: Para todo A medible definamos:

$$\begin{aligned} \varphi_A \colon H &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \boldsymbol{v} &\longmapsto \lambda(\boldsymbol{v}\chi_A) \end{aligned}$$

el cual es un funcional continuo, de modo que, por Riesz-Fréchet sobre H se cumple que existe $\nu(A) \in H$ tal que $\varphi_A(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{v}, \nu(A) \rangle$. Luego nótese que

$$|\langle \boldsymbol{v}, \nu(A) \rangle| = |\lambda(\boldsymbol{v}\chi_A)| \leq \|\boldsymbol{v}\|\, c_A,$$

donde c_A es una constante que acota las funciones. Sustituyendo $\boldsymbol{v}$ por $\nu(A)$, se obtiene que $\|\nu(A)\| \leq c_A$.

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una partición por medibles de A y sea

$$B_m := \bigcup_{i=0}^{m} A_i,$$

luego, como es partición, se satisface que $\nu(B_m) = \sum_{i=0}^{n} \nu(A_i)$. Como

$$\|\nu(A) - \nu(B_m)\| = \|\nu(A \setminus B_m)\| \leq c_{A\setminus B_m},$$

y $c_S \to 0$ si $\mu(S) \to 0$, entonces se concluye, por el teorema del sandwich, que ν es una aplicación numerablemente aditiva.

Queremos concluir que ν es de hecho una medida vectorial. Para ello, sea $(\boldsymbol{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores unitarios en dirección de $\nu(A_n)$ y sea

$$h := \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{u}_k \chi_{A_k},$$

si definimos $C_{nm} := C_n \cup C_{n+1} \cup \cdots \cup C_m$ se obtiene que

$$\left| \lambda \left(\sum_{k=n}^{m} \boldsymbol{u}_k \chi_{A_k} \right) \right| \leq c_{A_{nm}}$$

por lo que las siguientes series convergen y

$$\lambda(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \boldsymbol{u}_k \chi_{A_k}, \nu(A_k) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} |\nu(A_k)| = |\lambda(h)|.$$

Finalmente como $|\lambda(h)| \leq c_A$ y tomando $A = \Omega$ se concluye que ν tiene variación total finita, por lo que efectivamente es una medida vectorial y claramente para todo $s \in \mathrm{St}(\Omega; H)$ se satisface que

$$\lambda(s) = \int_{\Omega} s \,\mathrm{d}\nu,$$

notando que $\nu \ll \mu$ se concluye que $\mathrm{d}\nu = f\,\mathrm{d}\mu$ por Radon-Nikodým y ésta expresión extiende a λ como funcional. $\square$

En general, el segundo inciso suele resumirse como que λ admite una «representación».

Teorema (DE) 9.49: Sea (Ω, μ) de medida σ-finita, H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K}$, y sean $p, q \in (1, \infty)$ exponentes duales. La siguiente aplicación es $\mathbb{K}$-bilineal:

$$\begin{aligned} \langle -, - \rangle_\mu \colon \mathscr{L}^p(\Omega; H) \times \mathscr{L}^q(\Omega; H) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (f, g) &\longmapsto \int_\Omega \langle f, g \rangle \, \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

$(\mathscr{L}^p(\Omega; H), \mathscr{L}^q(\Omega; H), \langle -, - \rangle_\mu)$ es un par dual y las aplicaciones lineales continuas $f \mapsto \lambda_f$ y $g \mapsto \lambda_g$ son isomorfismos que preservan la norma.

Demostración: Nótese que $g \mapsto \lambda_g$ es una aplicación lineal e inyectiva. Además, por la desigualdad de Hölder, se concluye que

$$\left| \int_\Omega \lambda_g(f) \, \mathrm{d}\mu \right| = |\langle f, g \rangle_\mu| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q,$$

por lo que $\|\lambda_g\| \leq \|g\|_q$.

Veamos que la aplicación es suprayectiva: Sea λ un funcional continuo sobre $\mathscr{L}^p(\Omega; H)$, de norma $C := \|\lambda\|$. Como $\mathscr{L}^\infty(\Omega; H) \subseteq \mathscr{L}^p(\Omega; H)$ (puesto que μ es finito) y como, dado $h \in \mathscr{L}^\infty(\Omega; H)$ se cumple que

$$|\lambda(h)| \leq C\|h\|_p = C \left(\int_\Omega \|h\|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \leq C\|h\|_\infty \mu(\Omega)^{1/p},$$

entonces λ es un funcional continuo sobre $\mathscr{L}^\infty(\Omega; H)$, luego es de la forma $\langle f, - \rangle_\mu$ con $f \in \mathscr{L}^1(\Omega; H)$. Hay que probar que $f \in \mathscr{L}^q$. $\square$

Completar demostración, [**0,** pág. 212].

9.3 La integral de Riemann-Steltjes

Antes de definir la integral de Riemann-Steltjes nos preguntamos ¿por qué la requerimos siendo que la integral de Lebesgue es tan poderosa? La razón está en que –contra todo pronóstico– con unas cuantas modificaciones a la definición de Riemann se obtiene una integral aún más potente, y que de hecho será útil en el tema de integrales curvilíneas y curvas rectificables.

Aquí daremos dos definiciones. La primera es para el caso real y la segunda es una generalización a espacios de medida.

Definición 9.50: Se le llama la ***malla*** de una partición del intervalo $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in \Pi(a, b)$ a:

$$|P| := \max_i\{|x_i - x_{i-1}|\},$$

y se dice que $C := (p_1, \dots, p_n)$ es un ***conjunto de representantes*** de P si satisface que $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para todo i.

Sea $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función arbitraria, $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in \Pi(a, b)$ una partición y $C := (p_1, \dots, p_n)$ un conjunto de representantes de P. Se define:

$$S_\alpha(f, P; C) := \sum_{i=1}^{n} f(p_i)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})).$$

Se define la ***integral de Riemann-Stieltjes***

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\alpha = I$$

si $\lim_{|P|\to 0} S_\alpha(f, P; C) = I$, i.e., si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda partición $P \in \Pi(a, b)$ con malla $|P| < \delta$ y todo conjunto de representantes C de P se cumple que $|S_\alpha(f, P; C) - I| < \epsilon$.

La función creciente $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice de ***variación acotada*** si existe el siguiente límite:

$$\operatorname{Var}(\alpha) := \limsup_{|P|\to 0} S_\alpha(c_1, P; C),$$

donde c_1 es la función constante que vale 1.

Y sus propiedades típicas son las siguientes:

Teorema 9.51: Sea $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente y sean $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones tales que los límites $\int_a^b f \, \mathrm{d}\alpha$ y $\int_a^b g \, \mathrm{d}\alpha$ existen. Entonces:

1. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$\int_a^b (\lambda f + g) \, \mathrm{d}\alpha = \lambda \int_a^b f \, \mathrm{d}\alpha + \int_a^b g \, \mathrm{d}\alpha.$$

2. Si $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\alpha \le \int_a^b g \, \mathrm{d}\alpha.$$

3. Si f es acotada y α es de variación acotada, entonces
$$\left| \int_0^1 f \, \mathrm{d}\alpha \right| \leq \|f\|_\infty \operatorname{Var} \alpha.$$
4. Si α es diferenciable, entonces
$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x) \, \mathrm{d}x.$$

Ahora vamos con las generalizaciones: En primer lugar, podemos cambiar claramente el codominio de f por cualquier $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológico, y será conveniente exigir que sean de Banach. Pero parece, a simple vista, que la definición depende demasiado en el hecho de que el dominio sea un intervalo; para ello empleamos las herramientas de la teoría de la medida y notamos que una «partición del intervalo» como elegir finitos puntos de él es lo mismo que elegir particionarlo por intervalos de la forma $[x_{i-1}, x_i)$. Los representantes tienen la misma interpretación. Finalmente el α es una medida sobre los intervalos. Con ello llegamos a la siguiente definición:

Definición 9.52: Sea Ω un espacio con un álgebra $\mathfrak{A}$. Una partición de Ω subordinada a $\mathfrak{A}$ es una partición (en sentido conjuntista) en finitos conjuntos pertenecientes al álgebra. Dadas dos particiones $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ subordinadas a $\mathfrak{A}$, se dice que $\mathcal{Q}$ es un refinamiento de $\mathcal{P}$ si para todo $Q \in \mathcal{Q}$ existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $Q \subseteq P$.

Sea $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función arbitraria, y sea $\alpha\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ una medida finitamente aditiva. Sea $\mathcal{P}$ una partición de Ω subordinada a $\mathfrak{A}$, y sea $C := \{x_P\}_{P \in \mathcal{P}}$ un conjunto de representantes, entonces:
$$S_\alpha(f; \mathcal{P}, C) := \sum_{P \in \mathcal{P}} f(x_P)\alpha(P).$$

Apéndice

A

Ejemplos y contraejemplos

A.1 Desastres con elección

En el libro hemos mencionado bastante el AE y sus distintas formas, principalmente mediante sus consecuencias positivas, sin embargo, no todo es color de rosa y aquí se describen un par de las “catástrofes” de trabajar en un sistema con elección.

§A.1.1 Funciones “feas”.

Definición A.1: Se llama *ecuación de Cauchy* al problema de las funciónes reales $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$

Proposición A.2: Una solución de la ecuación de Cauchy es una función lineal considerando a $\mathbb{R}$ como un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

Demostración: En primer lugar

$$f(0) + f(0) = f(0) \implies f(0) = 0.$$

Por inducción se prueba que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$ se cumple $f(nx) = nf(x)$, y es fácil generalizarlo para admitir números enteros también. Finalmente si $y = \frac{a}{b}x$, entonces $ax = by$, de modo que $af(x) = bf(y)$ y que

$f(y) = \frac{a}{b} f(x)$, lo que comprueba la linealidad de las soluciones a la ecuación de Cauchy. $\square$

Éste es un problema clásico de cualquier curso de cálculo, y es fácil concluir que:

Teorema A.3: Las soluciones continuas a la ecuación de Cauchy son de la forma $f(x) = rx$ con $r \in \mathbb{R}$ fijo. En consecuencia hay $\mathfrak{c}$ soluciones continuas a la ecuación de Cauchy.

Definición A.4: Se le dice *fea* a una solución discontinua de la ecuación de Cauchy.

Teorema A.5: Si f es fea, entonces su gráfico es denso en $\mathbb{R}^2$.

Demostración: Sean $a \neq 0 \neq b$ reales distintos tales que $\frac{f(a)}{a} \neq \frac{f(b)}{b}$, de manera que se define $\boldsymbol{u} := (a, f(a))$ y $\boldsymbol{v} := (b, f(b))$. Por definición, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ son linealmente independientes, luego son base de $\mathbb{R}^2$ y para todo $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^2$ existen $p, q \in \mathbb{R}$ tal que $p\boldsymbol{u} + q\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}$. Probaremos que para todo $\epsilon > 0$ fijo existe una combinación racional que está a menos de ϵ de $\boldsymbol{r}$.
En primer lugar, vemos que podemos escalar racionalmente $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ de modo que ambos tengan norma $\|\boldsymbol{u}\|, \|\boldsymbol{v}\| < 1$ (para ello dividimos por $\lfloor \text{máx}\{\|\boldsymbol{u}\|, \|\boldsymbol{v}\|\}\rfloor + 1$). Luego, por densidad de $\mathbb{Q}$, existe $\bar{p} \in \mathbb{Q}$ tal que $|p - \bar{p}| < \epsilon/2$ y lo mismo para $\bar{q} \in \mathbb{Q}$ de modo que

$$\|\boldsymbol{r} - \bar{p}\boldsymbol{u} - \bar{q}\boldsymbol{v}\| \leq |p - \bar{p}| \, \|\boldsymbol{u}\| + |q - \bar{q}| \, \|\boldsymbol{v}\| < \epsilon. \qquad \square$$

Teorema A.6: Las funciones feas (si existen) son no medibles.

Demostración: Sean $a \neq 0 \neq b$ reales distintos tales que $\frac{f(a)}{a} \neq \frac{f(b)}{b}$. Luego se define $g(x) := k(bf(x) - f(b)x)$ donde $k^{-1} := bf(a) - af(b)$ es una constante. Claramente g es medible syss f lo es, pero g satisface que $g(a) = 1$ y $g(b) = 0$.
Para todo $n \in \mathbb{Z}$ sea $A_n := g^{-1}\big[[n, n+1)\big]$ y sea $q_n \in \mathbb{Q}$ tal que $|an - q_n b| < \frac{1}{2}$ (observe que no hay uso de AE ni derivados en éste paso). Sea $B_0 := A_0 \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ y sea $B_n := B_0 + na - q_n b$ para todo $n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$. Si $x \in A_n \cap [0, 1]$, entonces $y := x - (na - q_n b) \in A_0 \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] = B_0$, luego $x = y + (na - q_n b) \in B_n$ y se cumple que

$$A_n \cap [0, 1] \subseteq B_n \subseteq [-1, 2],$$

finalmente es claro que si B_0 fuera medible, entonces $\mu(B_0) = \mu(B_n)$, pero los B_ns no son medibles pues

$$[0,1] = [0,1] \cap \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (A_n \cap [0,1]) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} B_n \subseteq [-1,2]. \qquad \square$$

Cómo las soluciones a la ecuación de Cauchy no son más que funciones $\mathbb{Q}$-lineales, entonces podemos usar que toda función lineal se simplifica a su base, y para ello basta una base de $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial, dicho una base de Hamel.

Teorema (AE) A.7: Existen las funciones feas, y de hecho hay $2^{\mathfrak{c}}$ de ellas.

Demostración: Si H es una base de Hamel basta considerar que una solución a la ecuación de Cauchy viene determinada completamente por una única función $f : H \to \mathbb{R}$. Claramente $|H| = \mathfrak{c}$, luego hay $|\mathbb{R}|^{|H|} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$ soluciones a la ecuación de Cauchy. Finalmente cómo las continuas son sólo $\mathfrak{c}$, las discontinuas son $2^{\mathfrak{c}}$. $\square$

Para mayor desgracia, no sólo hay soluciones feas, sino que superan a las "bonitas". Además, es fácil notar que hay $2^{\mathfrak{c}}$ funciones reales en total, es decir, hay tantas funciones feas como funciones en general.

Corolario A.8: Si existen funciones feas, entonces existen conjuntos no Lebesgue-medibles.

§A.1.2 Conjuntos no-Lebesgue medibles. Ya vimos cómo la existencia de funciones feas conlleva a la existencia de conjuntos no-Lebesgue medibles (también referidos cómo "monstruos"), pero hay más de una manera de concluir la existencia de monstruos.

Esto induce a preguntarse si tal vez podemos reiterar el proceso desde cero y construir una medida no-trivial que pueda medir todos los conjuntos de $\mathbb{R}$. A lo cual, Ulam ofrece una respuesta:

Teorema A.9 (Ulam): Sea $X := [0, \aleph_1)$ y sea μ una medida definida sobre todo subconjunto de X tal que $\mu(X) < +\infty$ y $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in X$, entonces μ es la medida nula.

Demostración: Por definición, para todo $x \in X$ se cumple que $A_x := \{y \in X : y < x\}$ es a lo más numerable, luego existe una inyección a $\mathbb{N}$, en

particular sea
$$f(*,x) : A_x \to \mathbb{N}$$
dicha inyección.

Se define
$$B(x,n) := \{y \in X : x < y \wedge f(x,y) = n\},$$
luego para un $n \in \mathbb{N}$ fijo se cumple que $B(x_1, n)$ y $B(x_2, n)$ son disjuntos si $x_1 \neq x_2$. Como $\mu(X) < +\infty$, debe darse que $\mu(B(x,n)) > 0$ en a lo más numerables x, luego ha de existir un $z \in X$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mu(B(z,n)) = 0$. Definamos $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(z,n)$, luego $\mu(B) = 0$ y para todo $y > z$ se cumple que $y \in B(z, f(z,y)) \subseteq B$, por ende, $X = B \cup A_z$, luego $\mu(X) \leq \mu(B) + \mu(A_z) = 0$, por lo que μ es la medida nula. □

Si se asume la hipótesis del continuo, el teorema de Ulam indica que no hay tal cosa como una medida absolutamente completa sobre $\mathbb{R}$. Mediante AE, hay una serie de desarrollo en teoría de conjuntos que también te permite deducir que el resultado anterior se aplica en $\mathbb{R}$, y de hecho, se descubre que el primer cardinal que posea una medida así debe ser fuertemente inaccesible (es decir, mucho más grande que $\mathfrak{c}$ o $2^{\mathfrak{c}}$).

Corolario A.10: Si $\mathfrak{c} = \aleph_1$, entonces existen conjuntos no Lebesgue-medibles.

A continuación veremos varios ejemplos de conjuntos no Lebesgue-medibles a partir de distintas dependencias del AE.

Monstruos de Vitali. Requiere la existencia de una función de elección sobre $\mathbb{R}$.

Consideremos a $\mathbb{Q}$ como subcuerpo de $\mathbb{R}$, luego $\mathbb{R}/\mathbb{Q} := \{S \subseteq \mathbb{R} : x, y \in S \iff x - y \in \mathbb{Q}\}$. Mediante nuestra función de elección para toda clase de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ elegimos un elemento en el intervalo $[0,1]$ y con ella conformamos a V. Probaremos que V es no Lebesgue-medible: En primer lugar, notemos que para todo $x \in [0,1]$ existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x + q \in V$ y es fácil probar que $-1 \leq q \leq q$, por ende
$$[0,1] \subseteq \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (V + q).$$
Y también, es fácil notar que para todo $y \in V \subseteq [0,1]$ se cumple que $y + q \in [-1,2]$, ergo
$$\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (V + q) \subseteq [-1,2].$$

Notemos finalmente que los $V + q$'s son disjuntos dos a dos. Ahora supongamos que V fuese Lebesgue-medible, entonces por definición de medida se cumple que

$$\mu\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(V+q)\right) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}\mu(V+q).$$

Como μ es invariante a traslaciones se cumple que $\mu(V+q) = \mu(V)$, luego sucede que

$$\mu([0,1]) = 1 \leq \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}\mu(V) \leq 3 = \mu([-1,2]),$$

pero esto es imposible, luego V no puede ser Lebesgue-medible.

Para concluir que hay $2^{\mathfrak{c}}$ monstruos de Vitali, basta notar que hay $\mathfrak{c}$ clases de equivalencia de $\aleph_0$ elementos en $[0,1]$ cada uno, luego hay $(\aleph_0)^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$ monstruos de Vitali.

Monstruos de Bernstein. Requiere la existencia de una función de elección sobre $\mathbb{R}$.

Fijemos un conjunto medible no nulo, como $M := [0,1]$. Luego definamos $\mathfrak{A}$ como el conjunto de todos lo subconjuntos cerrados no-numerables de M. Como en $\mathbb{R}$ hay $\mathfrak{c}$ abiertos, la cantidad de cerrados es también $\mathfrak{c}$ y de ahí es fácil comprobar que $|\mathfrak{A}| = \mathfrak{c}$. Como existe una función de elección f sobre $\mathbb{R}$, entonces $\mathbb{R}$ está bien ordenado y es equipotente a un ordinal κ. Luego podemos escribir $\mathfrak{A} = \{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Y así podemos construir una sucesión $(x_\alpha, y_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ por recursión transfinita en $[0,1]^2$ como prosigue:

Si $(x_\beta, y_\beta)_{\beta<\alpha}$, luego definamos $F := \{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \kappa\}$ que tiene cardinalidad $< \kappa$, de modo que $A_\alpha \setminus F$ no es vacío y tiene cardinal κ y definamos

$$x_\alpha := f[A_\alpha \setminus F], \quad y_\alpha := f[A_\alpha \setminus (F \cup \{x_\alpha\})].$$

Luego sean $B := \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y $C := [0,1]\setminus B$, que forman una partición de $[0,1]$. Cada elemento de $\mathfrak{A}$ corta a B y a C, de modo que ninguno está contenido ni en B ni en C. Por ende todo subconjunto cerrado de B y de C es numerable, de modo que por el teorema de Lusin se comprueba que si B, C fueran medibles entonces serían nulos, pero como son partición se tiene que $\mu([0,1]) = 1 \neq 0 = \mu(B) + \mu(C)$.

Nótese que los monstruos de Bernstein también son $2^{\mathfrak{c}}$ pues hay $2^{\mathfrak{c}}$ conjuntos medibles de Lebesgue de medida no nula y finita. (Rellene los detalles de ésta afirmación.)

Monstruos de Sierpiński I. Requiere la hipótesis del continuo ($\mathfrak{c} = \aleph_1$). La construcción proviene de [**0**].

Como vimos, todo conjunto Lebesgue-medible es la unión entre un conjunto de Borel y un subconjunto de un nulo, hay $\mathfrak{c}$ conjuntos de Borel y $2^{\mathfrak{c}}$ subconjuntos de un solo nulo, así que construyamos $(A_\alpha)_{\alpha<\aleph_1}$ una biyección de los conjuntos de Borel de medida nula. Cabe destacar que como la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones, la unión de los A_α es todo $\mathbb{R}$.

Elijamos por recursión

$$x_\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left(\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta \right)$$

luego sea $S := \{x_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$.

Sea B un conjunto nulo de Borel, entonces $B = A_\gamma$ con $\gamma < \aleph_1$, luego $x_\alpha \notin B$ con $\alpha > \gamma$, es decir, $B \cap S \subseteq \{x_\alpha : \alpha \leq \gamma\}$ y $B \cap S$ es a-lo-más numerable.

Sea M un subconjunto no-numerable de S, luego si M fuera medible tendría medida no nula...

Completar demostración (ver [**0**, pp. 8–9]).

Monstruos de Sierpiński II. Existe un ultrafiltro U libre en $\mathbb{N}$, es decir una familia de subconjuntos de $\mathbb{N}$ tal que:

1. Para todo $A \subseteq \mathbb{N}$ se cumple que o $A \in U$ o $A^c \in U$ (ultrafiltro).
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\{n\} \notin U$ (no es principal). Es decir, si F finito, entonces $F^c \in U$, luego, si $A \in U$, entonces $A \setminus F \in U$ y $A \Delta F \in U$.

Sea $X := \operatorname{Func}(\mathbb{N}; [0,1])$, si $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ denotamos $\boldsymbol{x}^* := (1 - x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Si $Y := \{\chi_B : B \in U\}$, entonces las dos propiedades se traducen en que:

1. $Y^c = Y^* = \{\boldsymbol{x}^* : \boldsymbol{x} \in Y\}$.
2. Si $\boldsymbol{a} \in Y$ y $\boldsymbol{b} \in X$ tales que $\{i \in \mathbb{N} : a_i \neq b_i\}$ es finito, entonces $\boldsymbol{b} \in Y$.

...

Completar demostración (ver [**0**, p. 121]). Demostrar la ley cero-uno de Kolmogorov.

§A.1.3 La paradoja de Banach-Tarski. Ésta sección emplea la noción de grupo libre y las matrices de rotación. La demostración es original de [**0**].

Definición A.11: Dado un grupo G que actúa sobre un conjunto X, se dice que dos subconjuntos $A, B \subseteq X$ son G-equidecomposibles si se pueden particionar en finitas piezas A_i, B_i resp., tal que $A_i = \{g_i b : b \in B_i\}$.

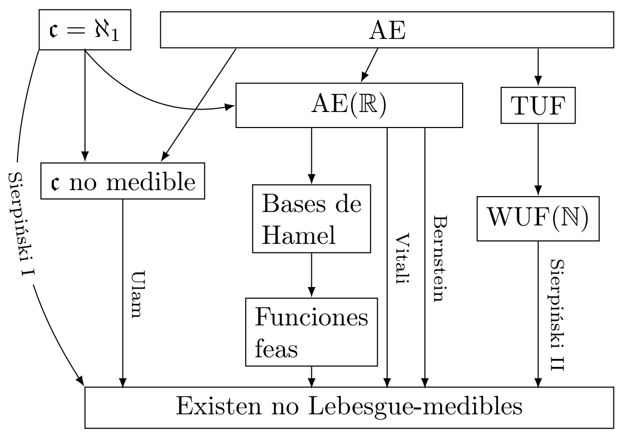


Figura A.1. Desastres con AE.

La paradoja de Banach-Tarski se reduce entonces a probar que una esfera es G-equidecomposible a dos con G siendo un subgrupo de isometrías de $\mathbb{R}^3$.

Teorema A.12 (Banach-Schröder-Bernstein): Sea G un grupo que actúa sobre X. Si $A, B \subseteq X$ son tales que A es G-equidecomposible en un subconjunto de B y viceversa, entonces A, B son G-equidecomposibles.

Demostración: Sean $\alpha : A \to \alpha[A] \subseteq B$ y $\beta : B \to \beta[B] \subseteq A$ G-decoposiciones. Nótese que $(\alpha \circ \beta)[A] \subseteq A$ y definimos:

$$A_1 := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\alpha \circ \beta)^i [A \backslash \beta[B]], \quad B_1 := \alpha[A_1] \subseteq B, \quad A_2 := A \backslash A_1, \quad B_2 := B \backslash B_1.$$

Además $A_1 = (A \setminus \beta[B]) \cup (\alpha \circ \beta)[A_1]$, de modo que

$$A_2 = \beta[B] \cap (A \setminus (\alpha \circ \beta)[A_1]) = \beta[B] \setminus (\alpha \circ \beta)[A_1] = \beta[B \setminus \alpha[A_1]] = \beta[B_2]$$

luego construimos una G-decomposición de A a B tal que corresponde a α sobre A_1 y β^{-1} en A_2. $\square$

Teorema A.13: Sea $F := \langle s, t \rangle$ un grupo libre y $\{1, -1\}$ el grupo multiplicativo. Definamos $G := F \times \{\pm 1\}$, entonces $F \times \{+1\}$ y G son G-equidecomposibles.

Demostración: Aplicaremos el teorema anterior, notando que la inclusión es una G-decomposición desde $F \times \{1\}$ hasta un subconjunto de G.

Denotemos $W(x)$ como las palabras [irreductibles] en F que comienzan con x. Luego podemos particionar G en los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} G_1 &:= W(s) \times \{1\} & G_3 &:= W(t) \times \{-1\} \\ G_2 &:= (F \setminus W(s)) \times \{1\} & G_4 &:= (F \setminus W(t)) \times \{-1\} \end{aligned}$$

luego si consideramos las siguientes transformaciones

$$\begin{aligned} &G_1 \mapsto (1,1)G_1 & &G_3 \mapsto (1,-1)G_3 = W(t) \times \{1\} \\ &G_2 \mapsto (s^{-1},1)G_2 = W(s^{-1}) \times \{1\} & &G_4 \mapsto (t^{-1},-1)G_4 = W(t^{-1}) \times \{1\} \end{aligned}$$

obtenemos una G-decomposición desde G hasta un subconjunto de $F \times \{1\}$.
□

Ahora queremos construir un grupo libre de isometrías, hay varios, pero uno de ellos es

$$\phi^{\pm 1} := \begin{bmatrix} 3/5 & \mp 4/5 & 0 \\ \pm 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho^{\pm 1} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & \mp 4/5 \\ 0 & \pm 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

Proposición A.14: $F := \langle \phi, \rho \rangle$ es un grupo libre.

Demostración: Para ello debemos probar que toda palabra irreductible es distinta del neutro Id. Si una palabra $w = \mathrm{Id}$, entonces $w' = \phi w \phi^{-1}$ también es una palabra distinta del neutro, así que podemos asumir que nos basta probar que toda palabra comenzada en $\phi^{\pm 1}$ es distinta de la identidad. Lo que probaremos es que por inducción sobre la longitud de w se cumple que $(0,1,0) \cdot w = (a,b,c)/5^k$ con $a,b,c \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ y $5 \nmid b$.

Para el caso $n = 1$, la palabra es de la forma $w = \phi^{\pm 1}$ y $(0,1,0) \cdot \phi^{\pm 1} = (\pm 4, 3, 0)/5$.

Para el caso inductivo es fácil notar que toda palabra tiene coordenadas enteras multiplicados por alguna potencia de la forma 5^k. Basta ver que $5 \nmid b$ para ello veamos que $w = w''\alpha\beta$ así que probamos por casos de α, β. Para ello consideremos que $(0,1,0)w'' = 1/5^k(a'',b'',c'')$, que $(0,1,0)w''\alpha = 1/5^{k+1}(a',b',c')$ y que $(0,1,0)w = 1/5^{k+2}(a,b,c)$:

a) $\underline{\alpha = \rho^{\pm 1}, \beta = \phi^{\pm 1}}$: Entonces $b = \pm 4a' + 3b'$ y $a' = 5a''$, luego $b \equiv 3b' \not\equiv 0 \pmod 5$.

b) $\underline{\alpha = \phi^{\pm 1}, \beta = \rho^{\pm 1}}$: Entonces $b = 3b' \pm 4c'$ y $c' = 5c''$, luego sigue el mismo argumento.

c) $\underline{\alpha = \phi^{\pm 1}, \beta = \phi^{\pm 1} \text{ o } \alpha = \rho^{\pm 1}, \beta = \rho^{\pm 1}}$: Entonces en el primer caso

$$b = \mp 4a' + 3b' = \mp 4(3a'' \pm 4b'') + 3(\mp 4a'' + 3b'') = \mp 24a'' - 7b'' = 6b' - 25b''$$

y un razonamiento similar deduce que en el segundo caso se da la misma fórmula, como $25 \equiv 0 \pmod 5$ y $6b' \not\equiv 0 \pmod 5$ se comprueba que $5 \nmid b$.

Nótese que la comprobación que hicimos para $n = 1$ no permite deducir que aplica para $n = 2$, sino que ésto se deduce de notar que trivialmente $5 \nmid b$ para $n = 0$, es decir, para la matriz identidad. □

De ahora en adelante denotaremos:

$$B^3 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}, \quad S^2 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}.$$

Lema A.15: B^3 es equidecomposible con $B^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

Demostración: Consideremos un círculo pequeño contenido en B^3, específicamente probaremos que un círculo es equidecomposible a un cículo sin un punto. Sea $S := \{e^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C} : \theta \in \mathbb{R}\}$. Sea $f(z) := e^{\mathrm{i}2\pi r}z$, ésta es una rotación, y si exigimos que r sea un irracional cualquiera, tendremos que $f^n(1) = e^{\mathrm{i}2\pi rn} \neq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular así vemos que $\{f^n(1) : n \in \mathbb{N}\}$ es equidecomposible a $\{f^{n+1}(1) : n \in \mathbb{N}\}$ (basta aplicar f, que es una rotación) y dejamos fijos el resto de puntos en el círculo, de éste modo, comprobamos el enunciado. □

Lema A.16: Sea

$$D := \{\boldsymbol{x} \in S^2 : \exists w \in F_{\neq \mathrm{Id}} : \boldsymbol{x} \cdot w = \boldsymbol{x}\},$$

entonces S^2 es equidecomposible con $S^2 \setminus D$.

Demostración: Pensemos en lo siguiente ¿cuántos puntos puede fijar una rotación distinta de la identidad? La respuesta es una recta, así que para cada palabra en F distinta de Id tenemos a lo más dos puntos fijos. Como F es el conjunto de todas las palabras es numerable y por ende D también. Por aquella misma razón, podemos encontrar alguna rotación σ que no fije ningún elemento en D, luego, al igual que en el ejercicio anterior, si definimos el subconjunto

$$A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \sigma^i[D]$$

de S^2 y aplicamos σ a A, y fijamos el resto de elementos de S^2, entonces obtenemos una G-equidecomposición con $S^2 \setminus D$. $\square$

Lema (AE) A.17: $S^2 \setminus D$ es equidecomposible a dos copias de $S^2 \setminus D$.

Demostración: Por definición, en $S^2 \setminus D$ los elementos son mapeados (bajo isometrías de $F_{\neq \mathrm{Id}}$) a otros. Luego podemos definir $\mathrm{Orb}(x) := \{f(x) : f \in F\}$ que notemos crean clases de equivalencia sobre $S^2 \setminus D$, luego particionan al conjunto. Por AE construyamos M que posee un elemento de cada órbita, es decir, que para todo $x \in S^2 \setminus D$ existe $m \in M$ y $f \in F$ tal que $f(m) = x$. Luego si $f \in F$, entonces los fMs forman una partición de $S^2 \setminus D$.

Ya vimos que F es particionable en F_1, F_2 que son ambas F-equidecomposibles a F mismo, es decir, $\phi_i : F_i \to F$ una F-equidecomposición, entonces $\bar{\phi}_i(fm) = \phi_i(f)m$ para todo $f \in F_i$, en síntesis, F_1M y F_2M son F-equidecomposibles a FM. $\square$

Teorema (AE) A.18 – *Paradoja de Banach-Tarski*: B^3 es equidecomposible a dos copias de B^3.

La mejor descomposición de la paradoja de Banach-Tarski fue descubierta por Robinson que lo logra en cinco piezas y demuestra que de hecho es el mínimo de piezas necesarias.

Dos consecuencias negativas de la paradoja de Banach-Tarski es que: 1. La descomposición de la esfera se hace (en su mayoría) en piezas no-medibles de Lebesgue y 2. En $\mathbb{R}^3$ no existe ninguna medida que mida todos los conjuntos y que extienda a la de Lebesgue respetando isometrías.

A.2 Funciones continuas y no diferenciables en ninguna parte

Ésta es una selección de ejemplos compilados en la tesis [**0**].

Funciones de tipo Katsuura.

Definición A.19: Dado $n > 2$ sea $\sigma : \{1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n\} \to (0, 1)$ distinta de la identidad y que extendemos para que $\sigma(0) = 0$ y $\sigma(1) = 1$. Luego definimos $(K_\sigma)_1$ como la función que es lineal a trozos y pasa por todos los puntos $(i/n, \sigma(i/n))$. Si hemos definido $(K_\sigma)_m$, entonces definimos

$$\delta_{i,m} := (K_\sigma)_m\left(\frac{i+1}{n^m}\right) - (K_\sigma)_m\left(\frac{i}{n^m}\right), \quad \rho_{i,m} := n^m \delta_{i,m},$$

los δ representan cambios de altura, mientras que ρ son las pendientes. En cuyo caso definimos por recursión:

$$(K_\sigma)_{m+1}(x) := (K_\sigma)_m\left(\frac{i}{n^m}\right) + \delta_{i,m}(K_\sigma)_1(n^m x - i), \quad x \in \left[\frac{i}{n^m}, \frac{i+1}{n^m}\right]$$

Si existe definimos K_σ como el límite puntual de $(K_\sigma)_m$, a ésta función le llamamos σ-Katsuura.

La función original de Katsuura ocupa $\sigma(1/3) = 2/3$ y $\sigma(2/3) = 1/3$, pero curiosamente la función de Cantor-Lebesgue también es un caso particular de las funciones de Katsuura con $\sigma(1/3) = \sigma(2/3) = 1/2$; ésto es lo que motiva a encontrar un criterio que pueda decir en qué puntos las funciones σ-Katsuura son diferenciables.

En primer lugar queremos ver la continuidad de las σ-Katsuura, para ello se requieren dos propiedades:

Lema A.20: Para todo $m \in \mathbb{N}$ se cumplen las siguientes dos propiedades:

1. $(K_\sigma)_m$ es continua.
2. Definamos $\Delta := \max_{0\le i<n}\{|\delta_{i,1}|\}$ que es < 1 (por ello se exige que $\sigma(i/n) \notin \{0,1\}$ cuando $i \notin \{0,n\}$). Para todo $x \in [0,1]$ se cumple que $|(K_\sigma)_m(x) - (K_\sigma)_{m+1}(x)| \le \Delta^m$.

Teorema A.21: Para todo σ se cumple que K_σ existe y de hecho es el límite uniforme de las $(K_\sigma)_m$, por tanto es continua.

Ahora basta encontrar el criterio para lo cuál es imprescindible ver varias propiedades:

Lema A.22: Se cumplen:

1. Para todo $0 \le i < n^m$ y $0 \le j < n^k$ naturales se satisface que

$$\delta_{i,m} \cdot \delta_{j,k} = \delta_{n^k i+j,m+k}.$$

2. Para todo $0 \leq i < n^m$ y $0 \leq j < n^k$ naturales se satisface que

$$\rho_{i,m} \cdot \rho_{j,k} = \rho_{n^k i+j,m+k}.$$

3. Para todo $m, k \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \left[\frac{i}{n^m}, \frac{i+1}{n^m}\right]$ se cumple que

$$(K_\sigma)_{m+k}(x) = (K_\sigma)_m\left(\frac{i}{n^m}\right) + \delta_{i,m}(K_\sigma)_k\left(n^m x - i\right)$$

4. En consecuencia, para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \left[\frac{i}{n^m}, \frac{i+1}{n^m}\right]$ se cumple que

$$K_\sigma(x) = K_\sigma\left(\frac{i}{n^m}\right) + \delta_{i,m}K_\sigma\left(n^m x - i\right)$$

Demostración: Todos derivan del primero, así que sólo probaremos ello por inducción sobre k. Caso $k = 1$:

$$\begin{aligned}(K_\sigma)_{m+1}\left(\frac{ni+j+1}{n^{m+1}}\right) &= (K_\sigma)_m\left(\frac{i}{n^m}\right) + \delta_{i,m}(K_\sigma)_1\left(\frac{j+1}{n}\right)\\ &= (K_\sigma)_m\left(\frac{i}{n^m}\right) + \delta_{i,m}\left((K_\sigma)_1\left(\frac{j}{n}\right) + \delta_{j,1}\right)\\ &= (K_\sigma)_m\left(\frac{i}{n^m}\right) + \delta_{i,m}(K_\sigma)_1\left(\frac{j}{n}\right) + \delta_{i,m}\delta_{j,1}\\ &= (K_\sigma)_{m+1}\left(\frac{ni+j}{n^{m+1}}\right) + \delta_{i,m}\delta_{j,1}.\end{aligned}$$

Caso $k+1$: Sea $j = np + q$ con $0 \leq q < n$ por algoritmo de la división, luego

$$\begin{aligned}\delta_{i,m}\delta_{np+q,k+1} = \delta_{i,m}\delta_{p,k}\delta_{q,1} &= \delta_{n^k i+p,m+k}\delta_{q,1} = \delta_{n(n^k i+p)+q,m+k+1}\\ &= \delta_{n^{k+1}i+(np+q),m+k+1} = \delta_{n^{k+1}i+j,m+k+1}.\end{aligned}$$

□

Lema A.23: f es diferenciable en z con derivada $f'(z)$ syss para todo par de sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que convergen a z y que $x_n \neq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\lim_n \bar{f}(x_n, y_n) = f'(z)$

Demostración: $\Longleftarrow$. Si fijamos $x_n = z$, entonces se tiene que $f'(z)$ existe si toda sucesión $\bar{f}(z, y_n) \to f'(z)$. Lo que corresponde a la caracterización del límite de funciones por límite de sucesiones.

$\Longrightarrow$. Basta notar que

$$\bar{f}(x_n, y_n) = \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = \frac{x_n - z}{x_n - y_n}\frac{f(x_n) - f(z)}{x_n - z} + \frac{z - y_n}{x_n - y_n}\frac{f(z) - f(y_n)}{z - y_n}$$

$$= \lambda_n \bar{f}(x_n, z) + (1 - \lambda_n)\bar{f}(z, y_n)$$

Ahora, tanto $\bar{f}(x_n, z), \bar{f}(z, y_n) \to f'(z)$, así que de ser necesario se resta el valor para notar que como λ_n está acotado, el límite se sigue respetando. □

Teorema A.24: Sea $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{n^i}$ donde $0 \le d_i < n$ es natural para todo $i \in \mathbb{N}$, tal que x no es n-ádico. Sea

$$L := \prod_{i=1}^{\infty} \rho_{d_i,1} = \rho_{d_1,1} \cdot \rho_{d_2,1} \cdots$$

entonces T_σ es diferenciable en x y tiene derivada nula syss L existe y es igual a 0.

Demostración: $\Longrightarrow$. Lo haremos por contrarrecíproca. Aquí tenemos dos posibles casos:

a) L no existe: Sea $y_m := \sum_{i=1}^{m} \frac{d_i}{n^i}$ y sea $z_m := y_m + \frac{1}{n^m}$. Claramente $\lim_m y_m = \lim_m z_m = x$. Luego

$$\bar{T}_\sigma(y_m, z_m) = \prod_{i=1}^{m} \rho_{d_i,1},$$

por ende, aplicando el lema, se tiene que como el límite no existe, entonces no es diferenciable.

b) L existe, pero no vale 0: Por un argumento parecido al anterior si tomamos y_m y z_m de la misma forma, se obtiene que

$$\lim_m \bar{T}_\sigma(y_m, z_m) = L$$

Por ende, nos reduciremos a encontrar otra sucesión $w_m \to x$ para la que el límite es distinto.

La gran observación es que si un producto infinito existe y no es nulo, es por que los factores convergen a 1, como en este caso los factores son discretos significa que hay un punto en adelante en el cual las pendientes son siempre 1.

Ahora, consideramos el primer k tal que $(\bar{T}_\sigma)_1(k/n, 0) \neq 1$, de éste modo si $w_m := y_m + \frac{k}{n^{m+1}}$, entonces considerando que desde $m \ge N$ en adelante $\rho_{d_m,1} = 1$, entonces se tiene que

$$\lim_m \bar{T}_\sigma(y_m, w_m) = \lim_m L\bar{T}_\sigma(k/n, 0) \neq L.$$

$\Longleftarrow$. ... □

Completar demostración.

§A.2.1 La recta de Sorgenfrey.

Definición A.25: La ***recta de Sorgenfrey***, denotada $\mathbb{R}_\ell$, es el conjunto $\mathbb{R}$ con la topología que tiene por subbase a los conjuntos de la forma $[a, b)$ con $a < b$.

Proposición A.26: La topología de Sorgenfrey es más fina que la topología usual sobre $\mathbb{R}$. En particular, los intervalos abiertos (a, b) son abiertos en la recta de Sorgenfrey. En consecuente, la recta de Sorgenfrey es Hausdorff.

Proposición A.27: La recta de Sorgenfrey es 2AN y, en consecuente, es de Lindelöf.

Proposición A.28: La recta de Sorgenfrey es hereditariamente disconexa y cerodimensional, por tanto, es fuertemente cerodimensional.

El propósito de dedicarle toda una subsección a la recta de Sorgenfrey es que, siendo un espacio muy peculiar, resulta sorprendemente universal. Lo siguiente es una reproducción de resultados bastante recientes relacionados a la llamada teoría descriptiva de conjuntos.

Definición A.29: Sea $s \in A^{<\omega}$ una tupla finita en A, digamos $s = (s_1, \dots, s_m)$. Dado un elemento $a \in A$, denotamos por $s \wedge a := (s_1, \dots, s_m, a)$. Dado $n \leq m$, denotamos por $s|m := (s_1, \dots, s_n)$.

Un ***boceto***[1] ***de Lusin*** sobre un conjunto X es una familia $(V_S)_{S \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ tal que:

luSch $V_s \supseteq V_{s \wedge n}$ para todo $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

luSch $V_{s \wedge i} \cap V_{s \wedge j} = \varnothing$ para todos $i \neq j$.

Se le llama un ***boceto estricto de Lusin*** sobre X a una familia $(V_s)_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ tal que:

1. $V_\varnothing = X$.
2. $V_s = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_{s \wedge n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_{s|n}$ es un conjunto de un único elemento para todo $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$.

[1] eng. *scheme*. Para evitar conflictos con la noción de «esquema» de Grothendieck, optamos por el inusual «boceto».

Una π***-base de Lusin*** sobre un espacio topológico X es un boceto estricto de Lusin $(V_s)_s$ tal que:

4. Cada V_s es abierto en X.
5. Para cada punto $x \in X$ y cada entorno suyo U, existe $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in V_s$ y $\bigcup_{n \geq n_0} V_{s \wedge n} \subseteq U$.

Lema A.30: Sea $(V_s)_s$ un boceto estricto de Lusin sobre X y sea τ la topología inducida por la subbase $\{V_s : s \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$. Entonces el espacio topológico (X, τ) es homeomorfo al espacio de Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y cada V_s es un abierto-cerrado en X.

Así pues, tener por subbase a un boceto estricto de Lusin es, valga la redundancia, una condición muy estricta; pero tener una π-base de Lusin es menos restrictiva:

Lema A.31: La recta de Sorgenfrey posee una π-base de Lusin.

Teorema A.32 (Patrakeev-Smolin): Un espacio de Hausdorff compacto es metrizable syss es la imagen continua de la recta de Sorgenfrey.

La implicancia «$\Longleftarrow$» fue probada por Patrakeev **[0]**, mientras que la implicancia « $\Longrightarrow$ » fue probada por Smolin **[0]**.

Índice de resultados y contraejemplos

Índice alfabético

Bibliografía

Las fechas empleadas son aquellas de la primera publicación o del primer registro de Copyright.

Topología general o conjuntista

0. BOURBAKI, N. *Topologie Générale* (Hermann, 1971).
0. CASTILLO, C. I. *Topología* `https://www.uv.es/ivorra/Libros/T.pdf` (2020).
0. ENGELKING, R. *General Topology* (Heldermann Verlag, 1989).
0. HERRLICH, H. *Axiom of Choice* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006).
0. STEEN, L. A. y SEEBACH, J. A. *Counterexamples in Topology* (Springer-Verlag New York, 1970).

Análisis real

0. CASTILLO, C. I. *Análisis matemático* `https://www.uv.es/ivorra/Libros/An.pdf` (2020).
0. SIMON, B. *Real Analysis* (American Mathematical Society, 2015).
0. THIM, J. *Continuous Nowhere Differentiable Functions* Master (Lulea University of Technology, 2003). `http://epubl.luth.se/1402-1617/2003/320/LTU-EX-03320-SE.pdf`.
0. ZIEMER, W. P. *Modern Real Analysis* (Springer, 2017).

Teoría de la medida

0. DIESTEL, J. y SPALSBURY, A. *The Joys of Haar Measure* (American Mathematical Society, 2014).
0. KHARAZISHVILI, A. B. *Nonmeasurable Sets and Functions* (Elsevier, 2004).
0. STEIN, E. y SHAKARCHI, R. *Real Analysis. Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces* (Princeton University Press, 2005).
0. TAO, T. *An Epsilon of Room. Pages from year three of a mathematical blog* 2 vols. `https://terrytao.wordpress.com/books/an-epsilon-of-room-pages-from-year-three-of-a-mathematical-blog/` (American Mathematical Society, 2011).
0. TAO, T. *An Introduction to Measure Theory* `https://terrytao.wordpress.com/books/an-introduction-to-measure-theory/` (American Mathematical Society, 2011).

Artículos

0. BELK, J. *Convexity, Inequalities, and Norms* `https://faculty.bard.edu/belk/math461/Inequalities.pdf`.
0. BRANDSMA, H. Arhangel'skiĭ's Theorem: A Proof. *Topology Explained.* `http://at.yorku.ca/p/a/c/a/14.htm` (2003).
0. BRANDSMA, H. Compactness in function spaces: Arzelà-Ascoli type theorems. *Topology Explained.* `http://at.yorku.ca/p/a/c/a/23.htm` (2003).
0. CONRAD, K. *The Fundamental Theorem of Algebra via Multivariable Calculus* `https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/fundthmalg/fundthmalgcalculus.pdf`.
0. FURSTENBERG, H. On the Infinitude of Primes. *The American Mathematical Monthly.* doi:`10.2307/2307043` (1955).
0. HIRST, K. E. A Property of Riemann-Integrable Functions. *Amer. Math. Monthly.* doi:`10.2307/2315894` (1968).
0. KASEORG, A. *The Banach-Tarski Paradox* `http://web.mit.edu/andersk/Public/banach-tarski.pdf`.
0. LITT, D. *Yet Another Proof of the Fundamental Theorem* `https://www.daniellitt.com/s/FTAviaIFT.pdf`.
0. NIVEN, I. A simple proof that π is irrational. *Bull. Amer. Math. Soc.* **53.** doi:`10.1090/S0002-9904-1947-08821-2` (1947).

0. Patrakeev, M. *Metrizable images of the Sorgenfrey line* 2016. arXiv: 1401.2289 [math.GN].
0. Sierpiński, W. Sur l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$). *Fundamenta Mathematicae.* http://pldml.icm.edu.pl/pldml/element/bwmeta1.element.bwnjournal-article-fmv5i1p23bwm (1924).
0. Smolin, V. A Hausdorff compact space is metrizable if and only if it is a continuous open image of the Sorgenfrey line. *Topology Appl.* **336.** doi:10.1016/j.topol.2023.108616 (2023).

Libros de autoría propia

0. Cuevas, J. *Álgebra* https://github.com/JoseCuevasBtos/apuntes-tex/raw/master/algebra/algebra.pdf (2022).
0. Cuevas, J. *Teoría de Conjuntos* https://github.com/JoseCuevasBtos/apuntes-tex/raw/master/conjuntos/conjuntos.pdf (2022).