Mordell es tan fácil como ABC

José Cuevas Barrientos

Resumen. El objetivo de este artículo es explicar las propiedades básicas de alturas en geometría diofántica para finalmente explicar cómo deducir la conjetura de Mordell efectiva asumiendo la conjetura *abc* empleando el teorema de Belyĭ.

1. Alturas

1.1. Sobre divisores. Recuerde que un divisor *de Weil* D en una variedad algebraica X es una suma formal

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_j[Z_j],$$

donde $Z_j \subseteq X$ es una subvariedad cerrada de codimensión 1, cuyo divisor asociado $[Z_j]$ se dice un ciclo irreducible. Denotamos $D \geq 0$ si cada $a_j \geq 0$.

Proposición 1.1: Si X es regular (o, más generalmente, si todos sus anillos locales $\mathscr{O}_{X,x}$ son DFUs), entonces todo divisor de Cartier es de hecho un divisor de Weil.

Demostración: Cfr. Hartshorne [**3**, pág. 141], Prop. II.6.11. □

Dado un K-morfismo dominante $f\colon X \to \mathbb{P}^1_K$, le asociamos su divisor

$$\operatorname{div} f := \sum_{f(Q)=0} a_j[Q] - \sum_{f(R)=\infty} b_j[R],$$

donde las sumatorias recorren puntos de codimensión 1 y donde $a_j = \operatorname{long}(\Omega^1)$ es el índice de ramificación (en el caso de superficies de Riemann, piense en el orden de anulamiento). Dos divisores $D_1, D_2 \in \operatorname{Div} X$ son *linealmente equivalentes*, dentado $D_1 \sim D_2$, si existe $f \in \operatorname{Hom}(X, \mathbb{P}^1_K)$ tal que $D_1 - D_2 = \operatorname{div} f$. Denotamos por $\operatorname{CaCl} X$ al grupo de divisores de Cartier salvo equivalencia lineal.

Proposición 1.2: Sea X un esquema noetheriano íntegro (e.g., una variedad algebraica sobre un cuerpo). Entonces para todo haz inversible $\mathscr{L}$ en X existe un divisor (de Cartier) $D \in \operatorname{Div} X$ tal que $\mathscr{L} \cong \mathscr{O}_X(D)$, y D

Fecha: 4 de abril de 2025.

es único salvo equivalencia lineal. Más aún, la biyección $D \mapsto \mathscr{O}_X(D)$ determina un isomorfismo de grupos $\operatorname{CaCl} X \to \operatorname{Pic} X$ (i.e., $\mathscr{O}_X(D_1 - D_2) \cong \mathscr{O}_X(D_1) \otimes \mathscr{O}_X(D_2)^\vee$).

DEMOSTRACIÓN: Cfr. [**3,** pág. 145], Prop. II.6.15. □

Definición 1.3: Sea $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo sobre un esquema X. Se dice que $\mathscr{M}$ está ***globalmente generado*** por secciones $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(X, \mathscr{M})$ si para todo punto $x \in X$, las secciones $s_j|_x$ generan el $\mathscr{O}_{X,x}$-módulo local $\mathscr{M}_x$.

Lema 1.4: Sea X un esquema algebraico sobre un cuerpo K.

1. Dado un K-morfismo $f \colon X \to \mathbb{P}^n_K = \operatorname{Proj} K[t_0, \dots, t_n]$, entonces el pullback $f^*\mathscr{O}(1)$ es un haz inversible globalmente generado por $s_j := f^*(t_j)$.
2. Si $\mathscr{L}$ es un haz inversible globalmente generado por $s_0, \dots, s_n$, entonces existe un único K-morfismo $f \colon X \to \mathbb{P}^n_K$ tal que $f^*\mathscr{O}(1) \cong \mathscr{L}$ y $s_j = f^*(t_j)$.

DEMOSTRACIÓN: Cfr. [**3,** pág. 150], Thm. II.7.1. □

Así, a todo divisor globalmente generado le podemos asociar (varios) K-morfismos hacia espacios proyectivos.

Definición 1.5: Un haz inversible $\mathscr{L}$ en un variedad X sobre un cuerpo K se dice ***amplio*** si para todo haz coherente $\mathscr{F}$ se cumple que $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ para $n \gg 0$ es globalmente generada.

Esta es la *definición* de amplio en [**3**]. En [**Stacks**], la definición es otra (cfr. `Tag 01PS`), pero son equivalentes mediante `Tag 01Q3`.

Definición 1.6: Sea X una variedad cuasiproyectiva sobre un cuerpo K. Se dice que un haz inversible $\mathscr{L}$ es ***muy amplio*** si existe un encaje $i \colon X \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$ tal que $i^*\mathscr{O}(1) \cong \mathscr{L}$.

Teorema 1.7 (Serre): Sea $\mathscr{L}$ un haz muy amplio en una variedad cuasiproyectiva X sobre un cuerpo. Entonces para todo haz coherente $\mathscr{F}$ existe $n \gg 0$ tal que $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ es globalmente generado.

DEMOSTRACIÓN: Cfr. [**3,** pág. 121], Th. II.5.17. □

Corolario 1.7.1: Si X es una variedad cuasiproyectiva sobre un cuerpo y $D \in \operatorname{Div} X$ es un divisor cualquiera, entonces existen $D_1, D_2 \in \operatorname{Div} X$ tales que $\mathscr{O}_X(D_j)$ son globalmente generados y $D \sim D_1 - D_2$.

Demostración: Sea $\mathscr{A}$ un haz muy amplio en X. Entonces $\mathscr{A}^{\otimes n} \otimes \mathscr{O}_X(D)$ es globalmente generado para $n \gg 0$ y ahora definimos D_1, D_2 tales que

$$\mathscr{O}_X(D_1) = \mathscr{A}^{\otimes n} \otimes \mathscr{O}_X(D), \qquad \mathscr{O}_X(D_2) = \mathscr{A}^{\otimes n}. \qquad \square$$

1.2. La máquina de alturas. Ahora vamos a comparar esta perspectiva con la definición de altura de Weil clásica.

Definición 1.8: Sea X una variedad sobre un cuerpo global K. Dado un K-morfismo $\phi\colon X \to \mathbb{P}^n_L$ se define la ***altura de Weil*** (o *absoluta*) asociada a ϕ como

$$\forall P \in X(k^{\mathrm{alg}}) \qquad h_\phi(P) := h(\phi(P)),$$

donde h denota la altura sobre $\mathbb{P}^n_K$ construida en la sección anterior.

El objetivo de esta sección es poder asignarle a cada divisor de X una altura. Para ello emplearemos el corolario 1.7.1:

Definición 1.9: Sea X una variedad cuasiproyectiva sobre un cuerpo global K. Una *presentación* de un divisor $D \in \operatorname{Div} X$ es una quádrupla $\mathcal{D} = (\mathscr{L}, \boldsymbol{s}; \mathscr{M}, \boldsymbol{t})$, donde $\mathscr{O}_X(D) \cong \mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^\vee$, y $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{M}$) está globalmente generado por $\boldsymbol{s}$ (resp. $\boldsymbol{t}$). Si ϕ (resp. ψ) denota el morfismo de X a algún espacio proyectivo inducido por $\boldsymbol{s}$ (resp. $\boldsymbol{t}$), entonces la altura asociada a la presentación es

$$h_{X,\mathcal{D}}(P) := h_\phi(P) - h_\psi(P).$$

Lema 1.10: Dadas dos presentaciones $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ de un mismo divisor D, entonces

$$h_{X,\mathcal{D}}(P) = h_{X,\mathcal{D}'}(P) + O(1).$$

Donde el símbolo «$O(1)$» significa que existe $c > 0$ tal que $h_{X,\mathcal{D}}(P) - h_{X,\mathcal{D}'}(P) \le c \cdot 1$.

Demostración: En términos de «alturas locales», esto es [**1,** pág. 38], Th. 2.2.11. $\square$

Para el siguiente resultado haremos dos identificaciones. La primera es ver a $\operatorname{Func}(S; \mathbb{R})$ como un grupo con la suma coordenada a coordenada, y la segunda es denotar por $O(1) \subseteq \operatorname{Func}(S; \mathbb{R})$ al subgrupo de funciones acotadas.

Teorema 1.11 (máquina de alturas de Weil): Sea X una variedad proyectiva sobre un cuerpo global K. Entonces tenemos el siguiente homomorfismo

$$h_{X,-}\colon \operatorname{Pic}(X) \to \operatorname{Func}(X(K^{\mathrm{alg}}); \mathbb{R})/O(1), \qquad D \mapsto h_D$$

que a la clase de equivalencia lineal de D le asigna alguna altura global $h_{\mathcal{D}}$ determinada por una presentación $\mathcal{D}$. Además, este es el único homomorfismo que satisface lo siguiente:

Equivalencia lineal: Si $D_1 \sim D_2$ son dos divisores linealmente equivalentes sobre X, entonces $h_{X,D_1}(P) = h_{X,D_2}(P) + O(1)$.

Aditividad: Si $D_1, D_2 \in \operatorname{Div} X$ son dos divisores sobre X, entonces

$$h_{X,D_1+D_2}(P) = h_{X,D_1}(P) + h_{X,D_2}(P) + O(1).$$

Positividad: Si D es un divisor de Cartier efectivo, entonces $h_{X,D}(P) \geq 0$.

Normalización: Dado un hiperplano $[H] \in \operatorname{Pic}(\mathbb{P}^n_K)$, entonces $h_{\mathbb{P}^n,H}(P) = h(P) + O(1)$, donde P es la altura usual en $\mathbb{P}^n$.

Funtorialidad: Si $\phi\colon Y \to X$ es un K-morfismo desde otra variedad proyectiva, entonces

$$\forall D \in \operatorname{Pic} Y \qquad h_{Y,\phi^*D}(Q) = h_{X,D}(\phi(Q)).$$

Demostración: Cfr. [**1**], Th. 2.3.8. □

Teorema 1.12 (Northcott): Sea X una variedad cuasiproyectiva sobre un cuerpo global K, y sea $D \in \operatorname{Pic} X$ la clase de un haz amplio. Entonces para $B > 0$ y $d > 0$, el conjunto

$$\{P \in X(K^{\mathrm{alg}}) : h_{X,D}(P) \leq B,\ \deg P \leq d\}$$

es finito.

Demostración: Cfr. [**1,** pág. 44], Th. 2.4.9. □

Definición 1.13: Dos divisores $D_1, D_2 \in \operatorname{Pic} X$ en una variedad regular sobre un cuerpo K se dicen ***numéricamente equivalentes***, denotado $D_1 \equiv D_2$, si para toda curva $Z \subseteq X$ se cumple que $D_1.Z = D_2.Z$.

Lema 1.14: Sea X una variedad regular sobre un cuerpo K.

1. Si dos divisores en X son algebraicamente equivalentes entonces son numéricamente equivalentes.
2. Si X es una curva y K es algebraicamente cerrado, entonces ser numéricamente equivalentes es lo mismo que ser algebraicamente equivalentes.

Lema 1.15: Sea X una variedad proyectiva sobre un cuerpo global. Si $A \in \operatorname{Pic} X$ es la clase de un divisor amplio y $D \in \operatorname{Pic} X$ es cualesquiera, entonces

$$|h_{X,D}(P)| \ll h_{X,A}(P) + 1.$$

Demostración: En efecto, queremos probar que $nh_{X,A}(P) - h_{X,D}(P) \ll 1$. Dicho de otro modo, queremos que $h_{X,D-nA}(P) \gg 1$; para esto basta notar que, por definición, existe $n \gg 0$ tal que $nA - D$ es globalmente generado y, por tanto, posee asociado un K-morfismo $\phi\colon X \to \mathbb{P}^n_K$, de modo que $h_{X,nA-D} = h_\phi + O(1) \gg 1$. Lo mismo aplica para $nA + D$, lo que prueba el enunciado. $\square$

Proposición 1.16: Sea X una variedad proyectiva y suave sobre un cuerpo global. Si D_1, D_2 son divisores algebraicamente equivalentes y $E \in \operatorname{Pic} X$ es la clase de un divisor amplio, entonces

$$h_{X,D_1}(P) = h_{X,D_2}(P) + O\Big(\sqrt{h_{X,E}(P)} + 1\Big).$$

DEMOSTRACIÓN: Vamos a explicar el caso de curvas, que es el único que emplearemos. El caso general es similar, usando la variedad de Albanese en lugar del jacobiano; para más detalles vid. [**1,** pág. 293], Cor. 9.3.10 o [**6,** pág. 45].

Supongamos que existe $o \in C(K)$ racional y sea $j_o\colon C \to \operatorname{Jac}(C) =: J$ el encaje de Abel-Jacobi asociado a él (podemos agrandar K de ser necesario, el cambio de base no afecta a las alturas). Nótese que para todo $D \in \operatorname{Pic}^0(C)$ existe, por propiedad universal, un divisor $D_J \in \operatorname{Pic}^0 J = J^\vee = \operatorname{Pic}^0(C)$ tal que $j^* D_J = D$. En particular, $h_{X,D_1-D_2}(P) = h_{J,\Delta}(j(P)) + O(1)$.

Sea $A \in \operatorname{Pic} J$ un divisor amplio simétrico y sea $A_C := f^* A \in \operatorname{Pic} C$. Entonces

$$\hat{h}_{J,\Delta}(Q) \ll \sqrt{\hat{h}_{J,A}(Q)} + 1,$$

(cfr. Cor. 9.3.8 de [**1**]**;** este corolario se prueba mediante una descripción de la altura de Néron-Tate por un producto bilineal y empleando que las clases amplias simétricas del grupo de Picard determinan isogenias de una variedad abeliana, vid. MUMFORD [**5,** pág. 77], Th. II.1).

Finalmente, como tanto A_C como E son clases amplias, tenemos la comparación

$$\forall P \notin \operatorname{Supp} E \cup \operatorname{Supp} A_C$$
$$|\hat{h}_{J,A}(j(P))| = |h_{C,A_C}(P)| + O(1) = O(h_{C,E}(P) + 1). \qquad \square$$

1.3. Descomposición de Weil en alturas locales. Ahora seguimos a LANG [**4**]**,** Ch. 10.

Definición 1.17: Sea K un cuerpo global cuyo conjunto de lugares es M_K. Una M_K***-constante*** es una función

$$\boldsymbol{\gamma}\colon M_K \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $\gamma(v) = 0$ para todos salvo finitos $v \in M_K$. Denotaremos por M el conjunto de lugares en K^{alg} que extienden a lugares en v.

Teorema 1.18 (descomposición de Weil): Sea X una variedad proyectiva y suave sobre un cuerpo global K. Para cada divisor primo $Z \in \operatorname{Div} X$

y cada lugar $v \in M$ existe una función $\lambda_Z(P, v)$ llamada la ***altura local***, con la propiedad de que para todo $f \in K(X)$ con

$$\operatorname{div} f = \sum_j a_j Z_j,$$

se cumple que

$$\forall P \notin \operatorname{Supp} f \qquad \log|f(P)|_v = \sum_j a_j \lambda_{Z_j}(P, v) + \gamma(v),$$

donde $\boldsymbol{\gamma}$ es una M_K-constante.

DEMOSTRACIÓN: Cfr. [**4,** pág. 263], Th. 10.3.7. □

Las alturas (globales) se descomponen ahora en sumas de alturas locales:

Proposición 1.19: Sea X una variedad proyectiva y suave sobre un cuerpo global K. Dado un divisor

$$D = \sum_j a_j Z_j \in \operatorname{Div} X$$

y un punto $P \in X(L)$ definido sobre una extensión finita L/K, se cumple que

$$h_{X,D}(P) = \frac{1}{[L:K]} \sum_v [L_v : K_v] a_j \lambda_{Z_j}(P, v) + O(1).$$

Finalmente, la siguiente propiedad será útil:

Proposición 1.20: Sea X una variedad proyectiva y suave sobre un cuerpo global K. Dado un divisor *efectivo* $D \in \operatorname{Div} X$, entonces $\lambda_D(P, v) \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN: Cfr. [**1,** pág. 42], Prop. 2.3.9. □

Más propiedades sobre alturas locales están en [**6**]**,** §6.2.

2. LA CONJETURA *abc*

Definición 2.1: El ***radical*** de un entero no nulo N es el producto de sus factores primos:

$$\operatorname{Rad}(N) := \prod_{p \mid N} p.$$

Equivalentemente, $\operatorname{Rad}(N)$ es el mayor entero libre de cuadrados tal que $\operatorname{Rad}(N) \mid N$.

Conjetura *abc* **de Masser-Oesterlé, 1985 2.2:** Para todo $\epsilon > 0$ existe una constante $\kappa_\epsilon > 0$ con la siguiente propiedad: dados enteros positivos coprimos a, b, c tales que $a + b = c$ se cumple que

$$c \leq \kappa_\epsilon \operatorname{Rad}(abc)^{1+\epsilon}.$$

El enunciado es equivalente a que la cota $c < \operatorname{Rad}(abc)^{1+\epsilon}$ se satisface para todas salvo finitas ternas (a, b, c). Nótese que el ejemplo anterior verifica que el ϵ es necesario.

También hay ocasiones en que el siguiente enunciado es útil:

Conjetura *abc* **débil para** $M > 1$ **2.3:** Para todos salvo finitas ternas de naturales coprimos a, b, c tales que $a + b = c$ se cumple que

$$c < \operatorname{Rad}(abc)^M.$$

Para la siguiente proposición, definimos $N_0([u : v]) = \operatorname{Rad} u$ para $u, v \in \mathbb{Z}$ coprimos. También $N_a(P) := N_0(P - a)$, con el convenio de que $[u : v] - \infty = [v : u]$.

Proposición 2.4: Sea X una curva íntegra, proyectiva y suave sobre un cuerpo numérico K, y sea $f \in K(X) \smallsetminus K$ una función racional de grado d. Para todo $P \in X(K) \smallsetminus f^{-1}[\{0\}]$, se cumple que

$$\log N_0(f(P)) < \left(1 - \frac{b_f(0)}{d}\right) h(f(P)) + O\big(\sqrt{h(f(P))} + 1\big).$$

Demostración: Vamos a dividir por casos. Si $X \cong \mathbb{P}^1_K$, i.e., si tiene género 0 y un punto racional, entonces darse una función racional f de grado d es lo mismo que darse un divisor $D := \operatorname{div} f$ de grado 0 cuyo divisor de ceros D_0 tiene grado d. Como $\operatorname{Pic} \mathbb{P}^1 = \mathbb{Z}$ y está generado por un hiperplano $[H] \in \operatorname{Pic} \mathbb{P}^1$, vemos que $D_0 \sim dH$, por lo que

$$h(f(P)) = h_f(P) = h_{\mathbb{P}^1, (\operatorname{div} f)_0}(P) = d h_{\mathbb{P}^1, H}(P) + O(1) = d h(P) + O(1). \quad (1)$$

Además, si $f(X, Y) = F(X, Y)/G(X, Y)$, donde F, G son homogéneos coprimos de grado d y

$$F(X, Y) = u \prod_j F_j(X, Y)^{a_j},$$

donde $u \in K^\times$ y los F_j's son polinomios irreducibles no asociados dos a dos de grados $d_j := \deg F_j$, entonces $d = \sum_j a_j d_j$. Ahora bien, escribiendo $P = [u : v]$ con $u, v \in \mathbb{Z}$ coprimos, vemos que $p \mid N_0(f(P))$ syss $p \mid F(u, v)$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} \log N_0(f(P)) &= \log N_0(F(u, v)) + O(1) \\ &\leq \sum_j h(F_j(u, v)) + O(1) = \sum_j d_j h(P) + O(1). \end{aligned} \quad (2)$$

Finalmente, nótese que

$$b_f(0) = \sum_{f(Q)=0} (e_{Q/f} - 1) = d - \sum_{f(Q)=0} 1 = d - \sum_j d_j,$$

por lo que, el enunciado se deduce de aplicar (1) en (2).

En general, sea X de género arbitrario. Definamos $D := (\operatorname{div} f)_0$ el divisor de ceros de f y sea

$$D = \sum_{j=1}^n a_j D_j,$$

donde cada $a_j \neq 0$ y $D_j \in \operatorname{Div} X$ son divisores primos distintos de grado d_j resp. Sea $D' := \sum_{j=1}^n D_j = \sum_{f(Q)=0}[Q]$, entonces, como antes

$$d = \deg D = \deg f = \sum_{j=1}^n a_j d_j, \qquad b_f(0) = d - \sum_{j=1}^n d_j = d - \deg D'.$$

Así, por funtorialidad

$$h(f(P)) = h_f(P) = h_{X,D}(P) + O(1) = \sum_{j=1}^n a_j h_{X,D_j}(P) + O(1).$$

Pero, $p \mid N_0(f(P))$ syss $\lambda_D(P,p) = \log |f(P)|_p > 0$, no obstante

$$\lambda_D(P,p) = \sum_{j=1}^n a_j \lambda_{D_j}(P,p) > 0,$$

donde $\lambda_{D_j}(P,p) \geq 0$ para todos salvo finitos primos p's, por lo que

$$\begin{aligned}\log N_0(f(P)) = \sum_{p \mid N_0(f(P))} \log p &< \sum_p \sum_{j=1}^n a_j \lambda_{D_j}(P,p) + O(1) \\ &= \sum_{j=1}^n h_{X,D_j}(P) + O(1) = h_{X,D'}(P) + O(1).\end{aligned}$$

Finalmente, sea $\Delta := (\deg D)D' - (\deg D')D \in \operatorname{Div} X$, el cual es un divisor de grado 0, entonces por aditividad

$$h_{X,D'}(P) = \frac{\deg D'}{\deg D} h_{X,D}(P) + \frac{1}{d} h_{X,\Delta}(P) + O(1),$$

pero por la proposición 1.16, $h_{X,\Delta}(P) \ll \sqrt{h_{X,D}(P)} + 1$, lo que prueba el enunciado. □

Teorema 2.5: Si la conjetura *abc* es válida, entonces la conjetura de Mordell también.

Demostración: Sea X una curva íntegra, proyectiva y suave sobre un cuerpo numérico K de género $g \geq 2$. Por el teorema de Belyĭ ([**1,** pág. 413], Th. 12.3.11) existe un morfismo $f\colon X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}}$ cuyo lugar de ramas son los puntos 0, 1 e ∞. Sea

$$m := b_f(0) + b_f(1) + b_f(\infty),$$

entonces la fórmula de Riemann-Hurwitz dice que

$$2g - 2 = m - 2d \iff 3 - \frac{m}{d} = 1 - \frac{2g-2}{d},$$

donde $(2g-2)/d > 0$.

Por otro lado, dado un punto $P = [a : c] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ con $a + b = c$ coprimos, vemos que

$$c^{1-\epsilon} = H(P)^{1-\epsilon} \ll_\epsilon \mathrm{Rad}(abc) = N_0(P)N_1(P)N_\infty(P),$$

de modo que, aplicando la proposición anterior (componiendo f con $z-1$ y $1/z$), se obtiene

$$\begin{aligned}&(1-\epsilon)h(f(P)) \\ &\qquad \le \left(3 - \frac{b_f(0) + b_f(1) + b_f(\infty)}{d}\right) h(f(P)) + \delta h(f(P)) + C(\delta, \epsilon).\end{aligned}$$

Así pues, eligiendo $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < (2g-2)/d - \delta$ y $0 < \delta < (2g-2)/d$, obtenemos que las imágenes de f de grado acotado son finitas por el teorema de Northcott. $\square$

Referencias

1. Bombieri, E. y Gubler, W. *Heights in Diophantine Geometry* (Cambridge University Press, 2006).

Stacks. De Jong, A. J. *et al. Stacks project* `https://stacks.math.columbia.edu/`.

2. Elkies, N. D. *ABC* implies Mordell. *Internat. Math. Res. Notices,* 99-109. doi:`10.1155/S1073792891000144` (1991).
3. Hartshorne, R. *Algebraic Geometry Graduate Texts in Mathematics* **52** (Springer-Verlag New York, 1977).
4. Lang, S. *Fundamentals of Diophantine Geometry* (Springer-Verlag, 1983).
5. Mumford, D. *Abelian Varieties* (Oxford University Press, 1970).
6. Serre, J.-P. *Lectures on the Mordell-Weil theorem* (Friedrick Vieweg & Son, 1997).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`

Departamento de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile. Facultad de Matemáticas, 4860 Av. Vicuña Mackenna, Macul, RM, Chile

URL: `josecuevas.xyz`