Geometría algebraica

José Cuevas Barrientos

18 de junio de 2024

Índice general

Parte I.

Geometría Algebraica Clásica

1

Variedades algebraicas

> *Los geómetras se imaginan las matemáticas, los analistas las hacen y los algebristas las entienden.*
>
> —Carlos Ivorra Castillo [**0**]

No suelo abrir con citas textuales, no obstante amerita hacerlo en éste capítulo, pues se abre la puerta a una de las transiciones más curiosas de las matemáticas. «Los geómetras se imaginan las matemáticas» es una frase que es tan acertada que hasta asusta; en última instancia casi la totalidad de las matemáticas se reduce a geometría, pero decir «geometría» no quiere significar que se regresen a las construcciones por regla y compás de Euclides, sino que, introduciendo toda la maquinaria de la topología, para contestar a problemas algebraicos se necesita primero transformarlos en problemas geométricos, o más precisamente, en problemas de espacios topológicos especiales.

En éste libro se asumen conocimientos de álgebra conmutativa, por lo cual siempre citaré resultados de mis apuntes personales [**39**].

1.1 Conjuntos algebraicos afines

§1.1.1 Conjuntos algebraicos.

Definición 1.1: Denotaremos por $\mathbb{A}^n(k) := k^n$ (simplemente $\mathbb{A}^n$ de no haber ambigüedad) al ***espacio afín*** de dimensión n sobre k

La expresión *afín* remite a la *geometría afín* en la cual los subespacios son similares a los espacios lineales, pero sin la restricción de pasar por el $\vec{0}$. La notación de $\mathbb{A}^n$ en lugar de k^n es porque lo que buscamos es constituir una categoría en la que la estructura de espacio vectorial no tiene ningún rol, o en donde no existan puntos distinguidos.

Definición 1.2 – *Conjunto algebraico*: Sea $\mathbb{A}^n$ un espacio afín, entonces dado un conjunto de polinomios $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ se define

$$\mathbf{V}(S) := \{P \in \mathbb{A}^n : \forall f \in S \; f(P) = 0\}.$$

Si $S = \{f_1, \dots, f_m\}$ nos permitimos denotar $\mathbf{V}(f_1, \dots, f_m)$. Los conjuntos de ésta forma son llamados ***conjuntos algebraicos (afínes)***.

En ésta sección $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ siempre representa una tupla de indeterminadas, mientras que P representa un punto específico.

Lema 1.3: Sea $\mathbb{A}^n$ un espacio afín y sea $S \subseteq k[\boldsymbol{x}]$. Entonces:

1. Si $S_1 \subseteq S_2 \subseteq k[\boldsymbol{x}]$, entonces $\mathbf{V}(S_1) \supseteq \mathbf{V}(S_2)$.
2. Si $\mathfrak{a} := (S)$ es el ideal generado por S, entonces $\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}(\mathfrak{a})$.
3. El conjunto vacío $\varnothing$ y el espacio $\mathbb{A}^n$ son conjuntos algebraicos.
4. Si $\{\mathfrak{a}_i\}_{i\in I}$ es una familia de ideales, entonces
$$\bigcap_{i\in I} \mathbf{V}(\mathfrak{a}_i) = \mathbf{V}\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right) = \mathbf{V}\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right).$$
5. Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \trianglelefteq k[\boldsymbol{x}]$ son ideales, entonces
$$\mathbf{V}(\mathfrak{a}) \cup \mathbf{V}(\mathfrak{b}) = \mathbf{V}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}).$$

Demostración:

1. Un punto P está en $\mathbf{V}(S_2)$ syss $f(P) = 0$ para todo $f \in S_2$, como todos los polinomios $g \in S_1$ están también en S_2, vemos que $g(P) = 0$ para todo $g \in S_1$, es decir, $P \in \mathbf{V}(S_1)$.

2. Como $S \subseteq \mathfrak{a}$, por el inciso anterior se cumple que $\mathbf{V}(S) \supseteq \mathbf{V}(\mathfrak{a})$, así que queda probar la contención restante: Sea $P \in \mathbf{V}(S)$, por definición, $f(P) = 0$ para todo $f \in S$. Sea $h \in \mathfrak{a}$, luego, por definición de ideal generado, existen $f_i(\boldsymbol{x}) \in S$ y $g_i(\boldsymbol{x}) \in k[\boldsymbol{x}]$ tales que
$$h(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x})g_1(\boldsymbol{x}) + \cdots + f_n(\boldsymbol{x})g_n(\boldsymbol{x}),$$
como P se anula en todos los f_i's, es claro que también se anula en $h(\boldsymbol{x})$, luego $P \in \mathbf{V}(\mathfrak{a})$.

3. $\mathbf{V}(1) = \varnothing$ y $\mathbf{V}(0) = \mathbb{A}^n$.

4. Llamemos $\mathfrak{b} := \sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i$, vemos que $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}_i$ para todo $i \in I$, luego $\mathbf{V}(\mathfrak{b}) \subseteq \mathbf{V}(\mathfrak{a}_i)$ y, por definición de $\bigcap$, se cumple que
$$\mathbf{V}(\mathfrak{b}) \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathbf{V}(\mathfrak{a}_\mathrm{i}).$$
Hay que probar el recíproco:
$$\begin{aligned} P \in \bigcap_{i\in I} \mathbf{V}(\mathfrak{a}_i) &\iff \forall i \in I \; P \in \mathbf{V}(\mathfrak{a}_i) \\ &\iff \forall i \in I \forall f \in \mathfrak{a}_i \; f(P) = 0 \\ &\iff \forall f \in \bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i \; f(P) = 0 \\ &\iff P \in \mathbf{V}\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right). \end{aligned}$$
Y por definición el ideal generado por $\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i$ es $\mathfrak{b}$.

5. Un punto $P \in \mathbf{V}(\mathfrak{a}) \cup \mathbf{V}(\mathfrak{b})$ si $P \in \mathbf{V}(\mathfrak{a})$ o $P \in \mathbf{V}(\mathfrak{b})$, es decir, si se anula o bien en todos los polinomios de $\mathfrak{a}$ o bien en los de $\mathfrak{b}$. Ahora recuerde que
$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \left\{ \sum_{i=1}^n f_i(\boldsymbol{x})g_i(\boldsymbol{x}) : \forall i \; f_i(\boldsymbol{x}) \in \mathfrak{a}, g_i(\boldsymbol{x}) \in \mathfrak{b} \right\},$$
de modo que, como P se anula o en $\mathfrak{a}$ o en $\mathfrak{b}$ es claro que está en $\mathbf{V}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$. El recíproco queda al lector. □

Definición 1.4: Dado el espacio afín $\mathbb{A}^n$ se le llama ***topología de Zariski*** a la topología que tiene como cerrados a los conjuntos algebraicos afínes.

A pesar de que de ésta manera obtenemos de manera bastante directa una topología, ésta no es para nada conveniente.

Ejercicio 1.5: Demuestre que la topología de Zariski sobre $\mathbb{A}^1$ es la topología cofinita, i.e., que sus cerrados son $\mathbb{A}^1$ y los conjuntos finitos.

En cierto modo, un Zariski-cerrado no es más que un conjunto que venga dado por ecuaciones polinómicas, veamos algunos ejemplos:

Ejemplo.
- El conjunto $S = \{(t, t^2, t^3) : t \in k\} \subseteq \mathbb{A}^3$ es algebraico, pues, $S = \mathbf{V}(y - x^2, z - x^3)$.
- Sea $f(\boldsymbol{x}) \in k[\boldsymbol{x}]$ un polinomio, entonces su gráfico

$$\mathrm{Grf}(f) := \{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) : \boldsymbol{x} \in k^n\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$$

es un conjunto algebraico afín. En efecto, corresponde a

$$\mathrm{Grf}(f) = \mathbf{V}(x_{n+1} - f(x_1, \dots, x_n)).$$

Proposición 1.6: Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ conjuntos algebraicos afínes, entonces el producto $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ también es un conjunto algebraico afín.

Demostración: Digamos que $X = \mathbf{V}(\mathfrak{a})$ donde los elementos $f(\boldsymbol{x}) \in \mathfrak{a}$ tienen indeterminadas $\boldsymbol{x}$, y que $Y = \mathbf{V}(\mathfrak{b})$ es tal que los elementos $g(\boldsymbol{y}) \in \mathfrak{b}$ tienen indeterminadas $\boldsymbol{y}$ (disjuntas de $\boldsymbol{x}$). En $A := k[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ (el álgebra polinomial con ambos conjuntos de indeterminadas), también tenemos los ideales $\mathfrak{a}A$ y $\mathfrak{b}A$ que determinan los conjuntos algebraicos $\mathbf{V}(\mathfrak{a}A) = X \times \mathbb{A}^m$ y $\mathbf{V}(\mathfrak{b}A) = \mathbb{A}^n \times Y$, luego $X \times \mathbb{A}^m \cap \mathbb{A}^n \times Y = X \times Y$ es algebraico. $\square$

Definición 1.7: Se dice que un conjunto algebraico $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es una ***hipersuperficie*** si está generado por un sólo polinomio, i.e., si existe $f(\boldsymbol{x}) \in k[\boldsymbol{x}]$ tal que $X = \mathbf{V}(f)$.

Ahora recordemos un resultado de álgebra conmutativa:

Teorema 1.8 (de las bases de Hilbert): Si A es un dominio noetheriano (e.g., si A es un cuerpo), entonces $A[x_1, \dots, x_n]$ también es noetheriano. (Cf. [**39,** Teo. 2.77])

Y ésto se traduce en el siguiente resultado geométrico:

Teorema 1.9: Todo conjunto algebraico es una intersección de finitas hipersuperficies.

Demostración: Si X es algebraico, entonces $X = \mathbf{V}(\mathfrak{a})$ para algún ideal $\mathfrak{a}$ por definición. Como $k[\boldsymbol{x}]$ es noetheriano, por el teorema de bases de Hilbert, entonces $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$ para algunos polinomios, luego

$$X = \mathbf{V}(\mathfrak{a}) = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_r) = \mathbf{V}(f_1) \cap \cdots \cap \mathbf{V}(f_r). \qquad \square$$

De momento tenemos una función que transforma ideales en Zariski-cerrados de $\mathbb{A}^n$, veamos la inversa:

Definición 1.10: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$, se define:

$$\mathbf{I}(X) := \{f(\boldsymbol{x}) \in k[\boldsymbol{x}] : \forall \boldsymbol{a} \in X \ f(\boldsymbol{a}) = 0\}.$$

Lema 1.11: Para todo $X \subseteq \mathbb{A}^n$ se cumple que $\mathbf{I}(X)$ es un ideal radical.

Demostración: Queremos ver que $\mathbf{I}(X)$ es un ideal. Veamos que es cerrado por sumas:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{I}(X) &\iff \forall P \in X,\ f(P) = g(P) = 0 \\ &\implies \forall P \in X,\ f(P) + g(P) = 0. \end{aligned}$$

Y que es cerrado por productos en $k[\boldsymbol{x}]$.

Para ver que el ideal es radical sea $f(\boldsymbol{x})^n \in \mathbf{I}(X)$, entonces $f(P)^n = 0$ para todo $P \in X$. Luego, como k es un cuerpo y, por ende, un dominio íntegro se cumple que $f(P) = 0$ para todo $P \in X$ y luego $f(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{I}(X)$. $\square$

En particular, recuerde que los ideales primos son radicales.

Proposición 1.12: Se cumple:

1. Si $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{A}^n$, entonces $\mathbf{I}(X) \supseteq \mathbf{I}(Y)$.
2. $\mathbf{I}(\varnothing) = k[\boldsymbol{x}]$ y $\mathbf{I}(\mathbb{A}^n) = (0)$.
3. Para todo $S \subseteq k[\boldsymbol{x}]$ se cumple $S \subseteq \mathbf{I}(\mathbf{V}(S))$.
4. Para todo $X \subseteq \mathbb{A}^n$ se cumple $X \subseteq \mathbf{V}(\mathbf{I}(X))$.

Ejemplo. Dado un cierto polinomio irreducible, éste generará un ideal primo, luego un ideal radical. Considere $f(x) := x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$, el cual es irreducible por el criterio de Eisenstein. $\mathbf{V}(f)$ corresponde a los puntos que se anulan en f los cuales serían $\pm\sqrt{2}$, pero no están en $\mathbb{Q}$, luego $\mathbf{V}(f) = \varnothing$ y, por la proposición anterior, $\mathbf{I}(\mathbf{V}(f)) = (1) \neq (x^2 + 1)$.

Éste es un caso degenerado que queremos evitar, lo cual se resuelve exigiendo que el cuerpo base sea algebraicamente cerrado. Ésto es uno de los resultados principales de la geometría algebraica:

Teorema 1.13 (débil de ceros de Hilbert): Sea k algebraicamente cerrado. Entonces un ideal $\mathfrak{m} \lhd k[x_1, \dots, x_n]$ es maximal syss $\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ para algunos $a_i \in k$ (cf. [**39,** Teo. 10.17]).

Teorema 1.14 – *Teorema fuerte de ceros de Hilbert*: Sea k algebraicamente cerrado. Entonces:

1. Si $\mathfrak{a} \trianglelefteq k[\boldsymbol{x}]$ es un ideal, entonces $\mathbf{V}(\mathfrak{a}) = \varnothing$ syss $\mathfrak{a} = (1)$.
2. Dado un ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq k[\boldsymbol{x}]$ se cumple que $\mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathfrak{a})) = \operatorname{Rad}(\mathfrak{a})$.

Demostración:

1. Ya vimos que $\mathbf{V}(1) = \varnothing$. Recíprocamente y por contradicción sea $\mathfrak{a} \neq A$ tal que $\mathbf{V}(\mathfrak{a}) = \varnothing$, por el teorema de Krull está contenido en un ideal maximal $\mathfrak{m}$ que por el teorema débil de ceros de Hilbert es de la forma $(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$. Pero claramente $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{V}(\mathfrak{m}) \subseteq \mathbf{V}(\mathfrak{a})$, así que $\mathbf{V}(\mathfrak{a}) \neq \varnothing$.

2. En ésta demostración, las letras mayúsculas denotaran polinomios para no confundirse con las variables. Es claro que $\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathfrak{a}))$ y por la proposición anterior se tiene que $\operatorname{Rad}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathfrak{a}))$.

   Sea $F \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathfrak{a}))$, es decir, $F(P) = 0$ para todo $P \in \mathbf{V}(\mathfrak{a})$, la cual satisface que $H(P)$ para todo $H \in \mathfrak{a}$. Lo que queremos ver es que para algún r se cumpla que $F^r \in \mathfrak{a}$.

   Primero, por teorema de las bases de Hilbert sea $\mathfrak{a} = (G_1, \dots, G_m)$. Para probar lo que queremos emplearemos un truco atribuido a Rabinowitsch: Añadamos una variable extra z a $k[x_1, \dots, x_n; z]$ y definamos $\mathfrak{b} := (G_1, \dots, G_m; 1 - Fz)$.

Veamos que $\underline{\mathbf{V}(\mathfrak{b}) = \varnothing}$: Por contradicción, si no lo fuese tendría algún punto $(p_1, \dots, p_n; q) \in \mathbb{A}^{n+1}$. Luego para todo i se cumple que $G_i(p_1, \dots, p_n) = 0$ y además $1 - F(p_1, \dots, p_n) \cdot q = 0$; pero claramente $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbf{V}(\mathfrak{a})$ así que $F(p_1, \dots, p_n) = 0$ por construcción lo que es contradictorio.

En consecuencia, por el inciso anterior se tiene que $\mathfrak{b} = (1)$, es decir, existen $H_i, L \in K[x_1, \dots, x_n, z]$ tales que

$$\sum_{i=1}^{m} H_i \cdot G_i + L \cdot (1 - Fz) = 1.$$

Luego nos permitimos pasar ésta igualdad al *cuerpo* de polinomios, ya que es una extensión de anillos, así pues si $z = 1/F$ se obtiene que

$$H_i(x_1, \dots, x_n, 1/F) = \frac{H_i'(x_1, \dots, x_n)}{F(x_1, \dots, x_n)^r}$$

donde r es el grado máximo entre los H_i's. De modo que se obtiene que

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{H_i'}{F^r} G_i = 1 \iff F^r = H_1' G_1 + \cdots + H_m' G_m$$

Ésto es una proposición en el cuerpo de funciones racionales, luego es también cierta en el anillo de polinomios. Finalmente, como los G_i's están en $\mathfrak{a}$, se cumple que $F^r \in \mathfrak{a}$ tal como se quería probar. □

Acotación: Desde ahora en adelante, el cuerpo base k siempre se presupone algebraicamente cerrado a menos de especificarse lo contrario.

Corolario 1.14.1: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$, entonces $\mathbf{V}(\mathbf{I}(X)) = \overline{X}$, es decir, es la clausura de X en la topología de Zariski.

Demostración: Claramente $\mathbf{V}(\mathbf{I}(X))$ es un conjunto cerrado así que $\overline{X} \subseteq \mathbf{V}(\mathbf{I}(X))$. Además sea $F \supseteq X$ cerrado, entonces $\mathbf{I}(F) \subseteq \mathbf{I}(X)$. Como F es cerrado, entonces $F = \mathbf{V}(\mathfrak{a})$ para algún ideal $\mathfrak{a}$; es decir, $\mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathfrak{a})) \subseteq \mathbf{I}(X)$, pero por el inciso 1 se tiene que $\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{I}(X)$, luego $F = \mathbf{V}(\mathfrak{a}) \supseteq \mathbf{V}(\mathbf{I}(X))$. En consecuencia, $\mathbf{V}(\mathbf{I}(X))$ es el mínimo cerrado que contiene a X, osea, $\mathbf{V}(\mathbf{I}(X)) = \overline{X}$. □

Corolario 1.14.2: Se cumple que

$$\{X \subseteq \mathbb{A}^n : X \text{ algebraico}\} \underset{\mathbf{V}}{\overset{\mathbf{I}}{\rightleftarrows}} \{\mathfrak{a} \subseteq A : \mathfrak{a} \text{ ideal radical}\}$$

son biyecciones y son la inversa la una de la otra.

Ésto nos habla de la importancia de los ideales radicales, así que será útil el siguiente criterio:

Proposición 1.15: Sea $\mathfrak{a} \trianglelefteq k[\boldsymbol{x}]$ un ideal. Un polinomio $h \in \operatorname{Rad}(\mathfrak{a})$ syss $1 \in (\mathfrak{a}, 1 - yh) \trianglelefteq k[\boldsymbol{x}, y]$.

Demostración: $\Longrightarrow$. Si $h \in \operatorname{Rad}(\mathfrak{a})$ entonces $h^n \in \mathfrak{a}$ para algún n, entonces

$$1 = y^n h^n + (1 - y^n h^n) = y^n h^n + (1 - yh)(1 + yh + \cdots + y^{n-1} h^{n-1}) \in (\mathfrak{a}, 1 - yh).$$

$\Longleftarrow$. Lo vimos en la demostración del teorema de ceros. □

§1.1.2 Espacios topológicos irreducibles.

Definición 1.16: Un espacio topológico X se dice ***reducible*** si existen $F_1, F_2 \subset X$ cerrados tales que $F_1 \cup F_2 = X$, de lo contrario se dice ***irreducible***. Un subconjunto $Y \subseteq X$ no vacío es irreducible si lo es como subespacio.

Teorema 1.17: En un espacio topológico X son equivalentes:

1. X es irreducible.
2. Si U_1, U_2 son abiertos no vacíos, entonces $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$.
3. Todo abierto no vacío es denso en X.

Demostración: Para el último inciso basta notar que si U es abierto, entonces $\overline{U} \cup U^c = X$, donde $\overline{U}, U^c$ son cerrados. □

Lema 1.18: Sea $Y \subseteq X$ es no vacío, entonces Y es irreducible syss su clausura $\overline{Y}$ lo es.

Demostración: Si Y es irreducible, queremos ver que $\overline{Y}$ también lo es. Dados dos abiertos no vacíos $U_1 \cap \overline{Y}, U_2 \cap \overline{Y}$ en $\overline{Y}$ se cumple que

$$\varnothing \neq U_1 \cap U_2 \cap Y \subseteq U_1 \cap U_2 \cap \overline{Y},$$

lo que demuestra que $\overline{Y}$ es también irreducible. □

Definición 1.19: Una ***componente irreducible*** es un subconjunto irreducible $\subseteq$-maximal.

Teorema 1.20: Se cumplen:

1. Las componentes irreducibles son cerradas.
2. Todo conjunto irreducible está contenido en una componente irreducible.
3. Todo espacio topológico es la unión de sus componenetes irreducibles.
4. La imagen continua de un espacio irreducible es también irreducible.

Definición 1.21: Se dice que un espacio topológico X es ***noetheriano*** si para toda sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de cerrados tal que

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$$

se cumple que existe un n tal que para todo $m > n$ se da que $F_m = F_n$.

Proposición 1.22: En un espacio noetheriano todo cerrado se escribe de forma única como unión de finitos irreducibles.

DEMOSTRACIÓN: Ésto implica demostrar dos cosas:

I) Todo cerrado se escribe como unión de finitos irreducibles: Sea $\mathcal{F}$ la familia de cerrados que no admiten dicha escritura. Como X es noetheriano, entonces si $\mathcal{F}$ fuese no vacío contendría un cerrado F que sea $\subseteq$-minimal. Luego F no puede ser irreducible, por ende $F = F_1 \cup F_2$, donde F_1, F_2 son subconjuntos propios cerrados. Como $F_1, F_2 \notin \mathcal{F}$ (por minimalidad de F), entonces F_1, F_2 se escriben como finitos irreducibles y en consecuencia F también.

II) Dicha escritura es única: Supongamos que $F = F_1 \cup \cdots \cup F_n$, donde los F_i's son irreducibles distintos. Si $F = F_1' \cup \cdots \cup F_m'$, entonces $F_j' \subseteq F_1 \cup \cdots \cup F_n$ y luego

$$F_j' = \bigcup_{i=1}^{n} (F_i \cap F_j'),$$

pero cada $F_i \cap F_j'$ es cerrado, así que o es vacío o es el espacio; y no pueden ser todos vacíos, así que $F_i \cap F_j' = F_j'$ para algún i, y por irreductibilidad, $F_i = F_j'$. Así se procede por inducción. □

Teorema 1.23: Todo espacio noetheriano es compacto.[1]

Demostración: Sea $X = \bigcup_{\alpha<\gamma} U_\alpha$ un cubrimiento abierto con números ordinales por índices, luego, empleando complementos obtenemos que $\varnothing = X^c = \bigcap_{\alpha<\gamma} U_\alpha^c$, donde los U_α^c son cerrados. Luego podemos definir $F_\beta := \bigcap_{\alpha\le\beta} U_\alpha^c$, y notar que éstos forman una cadena $\subseteq$-decreciente. Borrando repeticiones, tenemos una cadena

$$F_{\beta_1} \supset F_{\beta_2} \supset F_{\beta_3} \supset \cdots$$

que es decreciente, infinita y con todos los elementos distintos, lo cual es absurdo pues el espacio es noetheriano. Luego se estabiliza en algún β_n finito y por ende $X = U_{\beta_1} \cup U_{\beta_2} \cup \cdots \cup U_{\beta_n}$. □

Definición 1.24 – *Variedad afín*: Se dice que $V \subseteq \mathbb{A}^n$ es una ***variedad afín*** si es un conjunto algebraico afín irreducible en la topología de Zariski. Un subespacio abierto de una variedad afín se dice una ***variedad cuasiafín***.

Corolario 1.24.1: Un espacio afín con la topología de Zariski es un espacio noetheriano. Por ende, todo conjunto algebraico se escribe de forma única como unión finita de variedades afínes.

Demostración: Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión $\subseteq$-descendiente de cerrados en $\mathbb{A}^n$. Luego $F_i = \mathbf{V}(\mathfrak{a}_i)$ para un único ideal radical $\mathfrak{a}_i$. Si $F_i \supseteq F_{i+1}$, entonces $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{a}_{i+1}$, es decir, a la cadena de cerrados le corresponde una cadena ascendente de ideales en A que es un anillo noetheriano por el teorema de bases de Hilbert. □

Teorema 1.25: Para todo cerrado $F \subseteq \mathbb{A}^n$ se cumple que:

1. F es variedad afín syss $\mathbf{I}(F)$ es un ideal primo.
2. F es un punto syss $\mathbf{I}(F)$ es un ideal maximal.

Proposición 1.26: Si k es infinito, entonces $\mathbb{A}^n$ es una variedad afín. En particular, $\mathbb{A}^n$ es un espacio topológico que es T_1, pero no es de Hausdorff.

[1] Hartshorne [**8**] emplea *cuasicompacto* siguiendo la terminología de Bourbaki, puesto que reserva *compacto* para espacios de Hausdorff.

Ejemplo. Sea $k = \mathbb{C}$, entonces nótese que $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(y^2 - x(x^2-1))$ es una variedad afín, puesto que el polinomio $y^2 - x(x^2-1)$ es irreductible en $\mathbb{C}[x,y]$ (por el criterio de Eisenstein sobre el primo x). Lo interesante es que su gráfico (fig. 1.1) parece sugerir que la figura se forme a partir de dos conjuntos algebraicos más pequeños cuando no es el caso. Por ello, pese a que se llama «*geometría* algebraica» no se recomienda confiar en los diagramas.

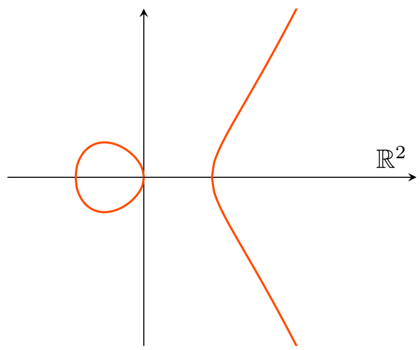

Figura 1.1

En definitiva, el teorema fuerte de ceros de Hilbert, permite el siguiente diccionario entre geometría y álgebra.

Geometría (afín)	**Álgebra**
Conjuntos algebraicos	Ideales radicales
Variedades	Ideales primos
Puntos	Ideales maximales

Figura 1.2

§1.1.3 Funciones polinómicas y regulares.

Definición 1.27: Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ conjuntos algebraicos afínes. Una aplicación $\phi\colon X \to Y$ es ***polinómica*** (definida sobre k) si existen polinomios $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n] =: k[\boldsymbol{x}]$ tales que

$$\phi(P) = (f_1(P), f_2(P), \dots, f_m(P)).$$

Denotamos por $\mathscr{F}_k(X,Y)$ al conjunto de aplicaciones polinómicas definidas sobre k entre X, Y. Un ***isomorfismo*** entre conjuntos algebraicos afines es una aplicación polinómica biyectiva, cuya inversa es también polinómica.

Proposición 1.28: Toda aplicación polinómica es continua.

Demostración: Sea $\phi\colon X \to Y \subseteq \mathbb{A}^m$ una aplicación polinómica con $\phi(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \dots, f_m(\boldsymbol{x}))$. Sea $F \subseteq Y$ un conjunto cerrado, luego $F = \mathbf{V}(\mathfrak{a})$ para algún $\mathfrak{a} \subseteq k[y_1, \dots, y_m] =: k[\boldsymbol{y}]$. La preimagen $G := \phi^{-1}[F]$ corresponde al conjunto

$$P \in G \iff \phi(P) \in F = \mathbf{V}(\mathfrak{a}) \iff \forall g(\boldsymbol{y}) \in \mathfrak{a}\ g(\phi(P)) = 0,$$

es decir, $P \in G$ syss $g(f_1(P), \dots, f_m(P)) = 0$ para todo $g(\boldsymbol{y}) \in \mathfrak{a}$, luego es claramente G es un conjunto algebraico afín. □

Corolario 1.28.1: Sea $\phi\colon X \to Y$ una aplicación polinómica suprayectiva, donde X es una variedad afín. Entonces Y también es una variedad afín.

Ejemplo.

- Si $X \subseteq \mathbb{A}^n, Y \subseteq \mathbb{A}^m$ son conjuntos algebraicos afínes, entonces las proyecciones

$$\pi_1\colon X \times Y \longrightarrow X, \qquad \pi_2\colon X \times Y \longrightarrow Y$$

son polinomiales.

- Sea $f(\boldsymbol{x}) \in k[\boldsymbol{x}]$, entonces el gráfico $\operatorname{Grf}(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ es isomorfo a $\mathbb{A}^n$. Las aplicaciones son las siguientes: $\phi\colon \operatorname{Grf}(f) \to \mathbb{A}^n$ es la proyección que olvida la última coordenada, y $\psi\colon \mathbb{A}^n \to \operatorname{Grf}(f)$ es

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)).$$

En consecuente, el gráfico de toda función es una variedad afín.

Definición 1.29: El ***anillo de coordenadas afínes*** de un conjunto algebraico afín $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es la k-álgebra

$$k[X] := \frac{k[x_1, \dots, x_n]}{\mathbf{I}(X)}.$$

Nótese que, así descrito, $k[X]$ es una k-álgebra reducida (pues $\mathbf{I}(X)$ es un ideal radical). Si X es una variedad afín, entonces $k[X]$ es además un dominio íntegro (pues $\mathbf{I}(X)$ es primo).

Proposición 1.30: Identificando $\mathbb{A}^1 = k$, vemos que $\mathscr{F}(X, \mathbb{A}^1) \subseteq \operatorname{Func}(X; k)$ es una k-álgebra.

Como k es algebraicamente cerrado (en particular, infinito) se nota lo siguiente:

Proposición 1.31: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un conjunto algebraico afín, entonces $\mathscr{F}(X, \mathbb{A}^1) \cong k[X]$ (en Alg_k).

Demostración: Nótese que dada una aplicación polinómica $\phi\colon X \to k$, ésta corresponde realmente a un solo polinomio de n variables evaluado en X, de modo que se comprueba que la aplicación:

$$\begin{aligned} \theta\colon C(\mathbb{A}^n) &\longrightarrow C(X) \\ \phi &\longmapsto \phi|_X \end{aligned}$$

es un k-homomorfismo suprayectivo. Claramente $C(\mathbb{A}^n) \cong k[x_1, \dots, x_n]$, luego podemos ver que $\ker\theta$ son los polinomios que se anulan en todos los puntos de X, vale decir, $\ker\theta = \mathbf{I}(X)$ y concluimos por el primer teorema de isomorfismos. □

Proposición 1.32: Sea $\phi\colon X \to Y$ polinómica, entonces la precomposición induce un k-homomorfismo:

$$\begin{aligned} h_\phi\colon k[Y] &\longrightarrow k[X] \\ f &\longmapsto f \circ \phi \end{aligned}
\qquad
\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\phi"'] & k[X] \\ Y & k[Y] \arrow[u, "h_\phi"'] \end{tikzcd}$$

Que satisface lo siguiente:

1. $h_{\mathrm{Id}_X} = \mathrm{Id}_{k[X]}$.
2. Si $\phi\colon X \to Y$ y $\psi\colon Y \to Z$ son aplicaciones polinómicas, entonces $h_{\phi\circ\psi} = h_\psi \circ h_\phi$.

El lector atento reconocerá que h_- se comporta como un funtor contravariante, no obstante, aún no hemos definido unas categorías apropiadas sobre las cuales actúe. Ésta observación está para adelantar una relación que más adelante formalizaremos.

Definición 1.33: Si $V \subseteq \mathbb{A}^n$ es una variedad afín, entonces $k[V]$ es un dominio íntegro, luego, definimos el ***cuerpo de funciones racionales*** de

V como $k(V) := \operatorname{Frac}(k[V])$. Es decir, una función racional es una fracción *formal* de polinomios que no se anulan en todo V.

Decimos que una función racional $\alpha \in k(V)$ es ***regular*** en un punto $P \in V$ si puede expresarse como $\alpha = f/g$, donde $g(P) \neq 0$, en cuyo caso, definimos $\alpha(P) := f(P)/g(P)$. Si α no admite dicha representación, entonces decimos que α es ***singular*** en P, o que P es una ***singularidad*** de α.

Para todo $P \in V$ definimos el ***anillo local*** $\mathcal{O}_P(V)$ como el conjunto de funciones racionales en V regulares en P.

Proposición 1.34: Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad afín y sea $P \in V$. Entonces $\mathcal{O}_P(V)$ es una k-álgebra (con las operaciones heredadas de $k(V)$), es un anillo local con ideal maximal:

$$\mathfrak{m}_P = \{\alpha \in \mathcal{O}_P(V) : \alpha(P) = 0\},$$

es noetheriano y además satisface que $k[V] \subseteq \mathcal{O}_P(V) \subseteq k(V)$.

Demostración: Las contenciones del final son triviales. Para ver que es un anillo, vale decir, que es cerrado bajo suma y multiplicación basta considerar que si $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_P(V)$, entonces existen f, g, h, j polinomios tales que $\alpha = f/g, \beta = h/j$ con $g(P) \neq 0 \neq j(P)$ y luego

$$\alpha + \beta = \frac{fj + hg}{gj}, \qquad \alpha \cdot \beta = \frac{fh}{gj},$$

donde $(g \cdot j)(P) \neq 0$, luego son ambos elementos de $\mathcal{O}_P(V)$. Para ver que $\mathfrak{m}_P$ es su ideal maximal, basta notar que trivialmente es un ideal y que coincide exactamente con los elementos no invertibles de $\mathcal{O}_P(V)$.

Finalmente, hay que probar que $\mathcal{O}_P(V)$ sea noetheriano: sea $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathcal{O}_P(V)$ un ideal, luego $\mathfrak{a} \cap k[V]$ es un ideal de $k[V]$, el cual es noetheriano por ser el cociente de un anillo noetheriano, y luego es finitamente generado por algunos polinomios digamos $f_1, \dots, f_r$. Probaremos que $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$ también. Es clara la contención $\supseteq$, para probar la recíproca sea $\alpha \in \mathfrak{a}$, luego existe $b \in k[V]$ con $b(P) \neq 0$ tal que $\alpha \cdot b \in k[V]$, y por lo tanto, $\alpha \cdot b = \sum_{i=1}^r a_i f_i$ con $a_i \in k[V]$ y por lo tanto

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \frac{a_i}{b} f_i \in (f_1, \dots, f_r)$$

como se quería probar. □

Teorema 1.35: Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad afín.

1. Dada una función racional $\alpha \in k(V)$, el conjunto de sus singularidades es algebraico.
2. Se cumple que
$$k[V] = \bigcap_{P \in V} \mathcal{O}_P(V),$$
es decir, las funciones polinómicas son exactamente las funciones racionales sin singularidades.
3. Si $\alpha \in k(V)$ se anula en un abierto no vacío de V, entonces es nula.

Demostración:

1. Definamos el conjunto
$$\mathfrak{a} := \{f(\boldsymbol{x}) \in k[\boldsymbol{x}] : f \cdot \alpha \in k[V]\} \trianglelefteq k[\boldsymbol{x}],$$
el cual es claramente un ideal. Un punto $P \in V$ es una singularidad de α syss para toda representación $\alpha = f/g$ se cumple que $g(P) = 0$, i.e., si para todo $g \in k[\boldsymbol{x}]$ tal que $f = g \cdot \alpha \in k[V]$ se cumple que $g(P) = 0$, así se comprueba que las singularidades de α corresponden al conjunto $\mathbf{V}(\mathfrak{a}) \cap V$.
2. La inclusión $\subseteq$ es clara pues todos los anillos locales contienen a las funciones polinómicas. La contención recíproca $\supseteq$ sale de que, del inciso 1, hemos visto que las singularidades de una función racional α conforma un conjunto algebraico, así que si dicho conjunto es $\varnothing$, debe darse que $\mathfrak{a} = (1)$, por lo que $1 \cdot \alpha \in k[V]$ como se quería probar.
3. Digamos que α se anula en el abierto $U \subseteq V$ no vacío. Si α no fuese nula, entonces $1/\alpha \in k(V)$ tiene singularidades en U, luego como el conjunto de singularidades es algebraico, o equivalentemente, Zariski-cerrado, se cumple que tiene singularidades en todo $\overline{U} = V$, luego α es nula en todo V. □

1.2 Variedades proyectivas

Lema 1.36: En $k^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$, la relación:
$$\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v} \iff \exists \lambda \in k \; \boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{v}$$
es de equivalencia. Dos puntos equivalentes bajo $\sim$ se dicen ***proyectivamente equivalentes***.

Definición 1.37: Se define el ***espacio proyectivo*** $\mathbb{P}^n(k)$ al conjunto cociente dado por el lema anterior (simplemente $\mathbb{P}^n$ de no haber ambigüedad). Sus elementos se denotan por

$$[a_0 : a_1 : \cdots : a_n] := [(a_0, a_1, \ldots, a_n)]_{\sim}.$$

(Ésta notación debe entenderse como que la tupla es una «proporción», de ahí los «:».)

De éste modo $[1 : 1] = [2 : 2]$ en $\mathbb{P}^1$, por ejemplo, pero $[0 : 0 : \cdots : 0] \notin \mathbb{P}^n$.
A uno le gustaría poder tener, al igual que con el espacio afín, una noción de «lugar de ceros» para el espacio proyectivo, sin embargo, como sus elementos son clases de equivalencia y no simplemente puntos, la cuestión es más difícil, para lo cual hay que introducir el siguiente concepto:

Definición 1.38: Un polinomio $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ se dice *homogéneo* si todos sus monomios son de igual grado.

Recordemos un par de hechos de álgebra:

- Las k-álgebras polinomiales $k[\boldsymbol{x}]$ son graduadas (cf. [**39,** Def. 10.18]), donde la graduación es:

$$k[\boldsymbol{x}] = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} A_d,$$

  donde A_d es el conjunto de polinomios homogéneos de grado d.

- Luego podemos hablar de ideales homogéneos y recordemos que un ideal es homogéneo syss tiene un conjunto generador de elementos homogéneos (cf. [**39,** Teo. 10.20]).

- Entre los ideales homogéneos, tiene un rol especial el ***ideal irrelevante***:

$$S^+ := (x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Proposición 1.39: Si $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ es homogéneo, entonces para todo $P \in k^{n+1}$ y todo $\lambda \in k$ se cumple que

$$f(\lambda P) = \lambda^d f(P),$$

donde $d = \deg f$.

En consecuente, la expresión «$f(\boldsymbol{u}) = 0$» para $\boldsymbol{u} \in \mathbb{P}^n$ está bien definida para polinomios homogéneos.

Definición 1.40: Sean $T \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ un conjunto de polinomios homogéneos, entonces se define

$$\mathbf{V}(T) := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{P}^n : \forall f \in T\ f(\boldsymbol{a}) = 0\}.$$

Los conjuntos de ésta forma son llamados ***algebraicos proyectivos***. Así mismo, dado $Z \subseteq \mathbb{P}^n$ se define

$$\mathbf{I}(Z) := \big(\{f \in k[x_0, \dots, x_n] \text{ homogéneo} : \forall P \in Z\ f(P) = 0\}\big).$$

Y ahora varios de los resultados de los conjuntos algebraicos afínes aplican también con demostraciones análogas:

Lema 1.41: Sea $T \subseteq k[x_0, x_1, \dots, x_n] =: k[\boldsymbol{x}]$ un conjunto de polinomios homogéneos. Entonces:

1. Si $T_1 \subseteq T_2 \subseteq k[\boldsymbol{x}]$, entonces $\mathbf{V}(T_1) \supseteq \mathbf{V}(T_2)$.
2. Si $\mathfrak{a} := (T)$ es el ideal homogéneo generado por T, entonces $\mathbf{V}(T) = \mathbf{V}(\mathfrak{a})$.
3. El conjunto vacío $\varnothing$ y el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ son conjuntos algebraicos proyectivos.
4. Si $\{\mathfrak{a}_i\}_{i\in I}$ es una familia de ideales homogéneos, entonces
$$\bigcap_{i\in I} \mathbf{V}(\mathfrak{a}_i) = \mathbf{V}\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right) = \mathbf{V}\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right).$$
5. Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \trianglelefteq k[\boldsymbol{x}]$ son ideales homogéneos, entonces
$$\mathbf{V}(\mathfrak{a}) \cup \mathbf{V}(\mathfrak{b}) = \mathbf{V}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}).$$

Definición 1.42: Los conjuntos algebraicos proyectivos de $\mathbb{P}^n$ conforman los cerrados de una topología llamada la *topología de Zariski* sobre $\mathbb{P}^n$.

Además, los conjuntos algebraicos proyectivos y los ideales homogéneos forman *casi* la misma correspondencia que en el espacio afín, con una excepción:

Ejemplo 1.43: Sea $S^+ := (x_0, x_1, \dots, x_n) \trianglelefteq k[x_0, \dots, x_n]$ el ideal irrelevante. Nótese que $\mathbf{V}(S^+) = \varnothing$, puesto que para que un punto se anule en S^+ debe darse que $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, y así hasta $x_n = 0$; no obstante, $[0 : \cdots : 0] \notin \mathbb{P}^n$. Nótese que el ideal irrelevante es de hecho un ideal primo, así que $\mathbf{I}(\mathbf{V}(S^+)) = (1) \neq S^+ = \operatorname{Rad}(S^+)$. ⌟

Y otro caso del teorema de ceros de Hilbert para el espacio proyectivo:

Teorema 1.44: Sea $\mathfrak{a} \trianglelefteq k[x_0, \dots, x_n]$ un ideal homogéneo no irrelevante. Entonces $\mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathfrak{a})) = \operatorname{Rad}(\mathfrak{a})$.

Y como corolarios:

Corolario 1.44.1: Se cumple que:

1. Si $T \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ está formado por homogéneos, entonces $T \subseteq \mathbf{I}(\mathbf{V}(T))$. Así mismo, si $X \subseteq \mathbb{P}^n$, entonces $X \subseteq \mathbf{V}(\mathbf{I}(X))$.
2. Si $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{P}^n$, entonces $\mathbf{I}(X) \supseteq \mathbf{I}(Y)$.
3. Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$, entonces $\mathbf{V}(\mathbf{I}(X)) = \overline{X}$.
4. Las aplicaciones $\mathbf{I}, \mathbf{V}$ forman biyecciones entre los conjuntos algebraicos proyectivos de $\mathbb{P}^n$ y los ideales radicales homogéneos no irrelevantes de $k[x_0, \dots, x_n]$.

Teorema 1.45: El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ es un espacio noetheriano.

Definición 1.46: Se dice que $V \subseteq \mathbb{P}^n$ es una ***variedad proyectiva*** si es un conjunto algebraico proyectivo irreducible. Si $U \subseteq V$ es un abierto no vacío de una variedad proyectiva, entonces a U se le dice una ***variedad cuasiproyectiva***.

Teorema 1.47: Un cerrado $F \subseteq \mathbb{P}^n$ es una variedad proyectiva syss $\mathbf{I}(F)$ es un ideal primo homogéneo no irrelevante. En particular, $\mathbb{P}^n$ mismo es una variedad proyectiva.

Lo interesante de los espacios proyectivos es que, en cierto sentido, generalizan a los espacios afínes.

Definición 1.48: Para $0 \leq j \leq n$ se denota:

$$U_j := \{[a_0 : a_1 : \cdots : a_n] \in \mathbb{P}^n : a_j \neq 0\}.$$

A éstos conjuntos les llamaremos ***cartas afínes*** de $\mathbb{P}^n$.

Todo punto en la carta afín $U_j \subseteq \mathbb{P}^n$ puede entenderse de manera única como un punto en un espacio afín $\mathbb{A}^n$ (de ahí el nombre), debido a la biyección:

$$\begin{aligned} \varphi_j \colon U_j &\longrightarrow \mathbb{A}^n \\ [a_0 : a_1 : \cdots : a_n] &\longmapsto \left(\frac{a_0}{a_j}, \dots, \frac{a_{j-1}}{a_j}, \frac{a_{j+1}}{a_j}, \dots, \frac{a_n}{a_j} \right). \end{aligned}$$

(¿Por qué es una función, bien definida, y una biyección?).

Proposición 1.49: Las cartas afínes forman un cubrimiento abierto de $\mathbb{P}^n$.

Demostración: Las cartas afínes son Zariski-abiertos puesto que $U_i = \mathbb{P}^n \setminus \mathbf{V}(x_i)$. Forman un cubrimiento, pues todo punto del espacio proyectivo tiene alguna coordenada no nula (pues $[0 : \cdots : 0] \notin \mathbb{P}^n$). □

Definición 1.50: Admitimos las siguientes funciones, con $\boldsymbol{x} := (x_1, \dots, x_n)$:

$$\begin{aligned} \alpha \colon k[x_0, \boldsymbol{x}] &\longrightarrow k[\boldsymbol{x}] & \beta \colon k[\boldsymbol{x}] &\longrightarrow k[x_0, \boldsymbol{x}] \\ f(x_0, \boldsymbol{x}) &\longmapsto f(1, \boldsymbol{x}) & g(\boldsymbol{x}) &\longmapsto x_0^{\deg g} g\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \end{aligned}$$

Dado un polinomio $g(\boldsymbol{x}) \in k[\boldsymbol{x}]$, decimos que $\beta\big(g(\boldsymbol{x})\big)$ es su ***homogeneización***. A veces, al α también le decimos la ***deshomogeneización***.

Proposición 1.51: Para todo $g(\boldsymbol{x}) \in k[\boldsymbol{x}]$ se cumple:

1. $\beta(g) \in k[x_0, \boldsymbol{x}]$ es un polinomio homogéneo del mismo grado de g.
2. $\alpha(\beta(g)) = g$.
3. Si $f \in k[x_0, \boldsymbol{x}]$ es homogéneo, entonces $f = x_0^r \beta(\alpha(p))$ para algún $r \geq 0$.

Ejemplo. Si consideramos la ecuación $x_1^2 + x_2^2 = 1$, su homogeneización es $x_1^2 + x_2^2 = x_0^2$. Para el inciso 3 nótese que

$$(\alpha \circ \beta)(x_0 x_1 + x_0^2) = \beta(x_1 + 1) = x_1 + x_0.$$

Recuerde que $\varphi_0 \colon U_0 \to \mathbb{A}^n$ es la biyección canónica entre la carta afín y el espacio afín. Veremos que, empleando la (des)homogeneización de polinomios podemos entender a los espacios afínes como «contenidos en el proyectivo».

Lema 1.52: Sea $Z := \mathbf{V}_{\mathbb{P}^n}(T)$, donde T son polinomios homogéneos. Entonces $\varphi_0[Z \cap U_0] = \mathbf{V}_{\mathbb{A}^n}\big(\alpha[T]\big)$.

Demostración: Sea $[1 : x_1 : \cdots : x_n] \in Z \cap U_0$. Por definición, para todo $f \in T$ se cumple que $\alpha(f)(x_1, \dots, x_n) = f(1, x_1, \dots, x_n) = 0$. Por lo que $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{V}_{\mathbb{A}^n}\big(\alpha[T]\big)$. La otra inclusión es análoga. □

Definición 1.53: Definamos $\pi \colon \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{P}^n$ la proyección canónica (puesto que es un conjunto cociente). Además si Z es un conjunto algebraico proyectivo, definimos su ***cono afín*** como:

$$\mathrm{C_{af}}(Z) := \pi^{-1}[Z] \cup \{\vec{0}\}.$$

Lema 1.54: Si $T \subseteq k[x_0, \boldsymbol{x}]$ está formado por homogéneos, entonces $\mathrm{C_{af}}\big(\mathbf{V}_{\mathbb{P}^n}(T)\big) = \mathbf{V}_{\mathbb{A}^{n+1}}(T)$.

Definición 1.55: Sea $Z \subseteq \mathbb{A}^n$ un conjunto algebraico afín, entonces

$$\overline{Z}_{\mathrm{proy}} := \overline{\varphi_0^{-1}[Z]} \subseteq \mathbb{P}^n.$$

(Nótese que Z ya es $\mathbb{A}^n$-cerrado, por lo que la notación no debería confundir.)

Teorema 1.56: Sea $Z \subseteq \mathbb{A}^n$ algebraico afín y sea $\mathfrak{a} := \mathbf{I}_{\mathbb{A}^n}(Z)$. Entonces

$$\overline{Z}_{\mathrm{proy}} = \mathbf{V}_{\mathbb{P}^n}\big(\beta[\mathfrak{a}]\big), \qquad \overline{Z}_{\mathrm{proy}} \cap U_0 = \varphi_0^{-1}[Z].$$

Demostración: Sea $Z' := \mathbf{V}_{\mathbb{P}^n}\big(\beta[\mathfrak{a}]\big)$, probaremos el enunciado por doble contención. Como $\overline{Z}_{\mathrm{proy}}$ es el menor cerrado que contiene a $\phi[Z]$ y Z' es cerrado, basta notar que para todo $[1 : a_1 : \cdots : a_n] \in \phi[Z]$ se cumple que para todo $f \in \mathfrak{a}$ se satisface

$$\beta(f)(1, a_1, \dots, a_n) = 1^r f\left(\frac{a_1}{1}, \dots, \frac{a_n}{1}\right) = f(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

De modo que $\overline{Z}_{\mathrm{proy}} \subseteq Z'$.

Notese que probar que $\overline{Z}_{\mathrm{proy}} \supseteq Z'$ equivale a ver que $\mathbf{I}_{\mathbb{P}^n}(\overline{Z}_{\mathrm{proy}}) \subseteq \mathbf{I}_{\mathbb{P}^n}(Z')$. Ésto es un caso particular de ver que si $\phi[Z] \subseteq W$ cerrado, entonces $\mathbf{I}_{\mathbb{P}^n}(W) \subseteq \mathbf{I}_{\mathbb{P}^n}(Z')$. Si $f \in \mathbf{I}_{\mathbb{P}^n}(W)$ es homogéneo, entonces f se anula en W, luego $\alpha(f)$ se anula en $W \cap U_0 \supseteq \phi[Z]$. Por ende $\alpha(f) \in \mathbf{I}_{\mathbb{A}^n}(Z) = \mathfrak{a}$ y $\beta(\alpha(f)) \in \beta[\mathfrak{a}]$. Es decir,

$$(\alpha \circ \beta)(f) \in \mathbf{I}_{\mathbb{P}^n}\Big(\mathbf{V}_{\mathbb{P}^n}(\beta[\mathfrak{a}])\Big) = \mathbf{I}_{\mathbb{P}^n}(Z').$$

Pero como $f = x_0^r(\alpha \circ \beta)(f)$ para algún r, se ha de cumplir que $f \in \mathbf{I}_{\mathbb{P}^n}(Z')$ como se quería probar.

Para la segunda afirmación claramente $\phi[Z] \subseteq \overline{Z}_{\text{proy}} \cap U_0$. Y si $P := [1 : p_1 : \cdots : p_n] \in \overline{Z}_{\text{proy}} \cap U_0$, entonces $f(P) = 0$ para todo $\beta(f) \in \beta[\mathfrak{a}]$, luego

$$0 = \beta(f)(1, p_1, \dots, p_n) = [(\beta \circ \alpha)(f)](p_1, \dots, p_n) = f(p_1, \dots, p_n)$$

es decir, $(p_1, \dots, p_n) \in Z$ como se quería probar. $\square$

Ejemplo. Considere la curva afín $W := \mathbf{V}_{\mathbb{A}^2}(xy - 1)$, queremos buscar su clausura proyectiva y, en particular, nos preguntamos cuántos y cuales puntos se añadieron al tomar clausura proyectiva. Primero homogeneizamos la ecuación a $xy - z^2$ y notamos que $\overline{W}_{\text{proy}} \cap U_0 = W$, así que los puntos nuevos son $\overline{W}_{\text{proy}} \cap U_0^c$, vale decir, los puntos con $z = 0$. Forzando $z = 0$ nos queda $xy = 0$ por lo que $x = 0$ o $y = 0$, lo cual nos da los puntos proyectivos:

$$\overline{W}_{\text{proy}} \setminus W = \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0]\}.$$

Ejercicio 1.57: Sea $f(x, y) \in k[x, y]$ un polinomio de grado n y considere el conjunto algebraico afín $W := \mathbf{V}_{\mathbb{A}^2}(f)$. Demuestre que $\overline{W}_{\text{proy}} \setminus W$ tiene al menos un punto y a lo más n puntos.

Corolario 1.57.1: $\varphi_0 \colon U_0 \to \mathbb{A}^n$ es un homeomorfismo.

Bajo ésta definición, $\mathbb{A}^n$ se identifica con una variedad cuasiproyectiva.

Teorema 1.58: Identificando $\mathbb{A}^n$ con U_0 por medio de ϕ se cumplen:

1. Si $V \subseteq \mathbb{P}^n$ es una variedad proyectiva que se corta con U_0, entonces $V \cap U_0$ es una variedad afín.

2. Si $W \subseteq \mathbb{A}^n$ es una variedad afín, entonces $\overline{W}_{\text{proy}} \subseteq \mathbb{P}^n$ es una variedad proyectiva.

Demostración:

1. $V \cap U_0$ es un abierto en V, luego es denso e irreducible como subespacio, pero ϕ es homeomorfismo.

2. Basta ver que $\mathfrak{a} := \mathbf{I}_{\mathbb{P}^n}\left(\overline{W}_{\text{proy}}\right)$ es primo y no irrelevante. Como $\varnothing \neq W \subseteq \overline{W}_{\text{proy}}$, entonces su ideal no es irrelevante. Así pues, falta ver que es primo: Sean $f, g \in k[x_0, \dots, x_n]$ homogéneos con $f \cdot g \in \mathfrak{a}$. Luego

$$\alpha(f)\alpha(g) = \alpha(fg) \in \alpha[\mathfrak{a}] = \mathbf{I}_{\mathbb{A}^n}(W)$$

pero $\mathbf{I}_{\mathbb{A}^n}(W)$ es primo, luego, sin perdida de generalidad, supongamos que $\alpha(f) \in \mathbf{I}_{\mathbb{A}^n}(W)$. Luego $\beta(\alpha(f)) \in \mathfrak{a}$ y $f = x_0^r \cdot \beta(\alpha(f)) \in \mathfrak{a}$. Por ende, $\mathfrak{a}$ es primo y $\overline{W}_{\text{proy}}$ es variedad proyectiva. □

Mediante éste último teorema, nos permitimos identificar a las variedades cuasiafínes como variedades cuasiproyectivas.

1.3 Funciones regulares y morfismos

Estaríamos tentados de proseguir el paralelismo entre variedades proyectivas y afínes, y definir una noción de *función polinómica* sobre las variedades proyectivas, pero un primer problema está en ¿cómo evaluar una función polinómica, sabiendo que los elementos del espacio proyectivo son clases de equivalencia? Es entonces que empleamos la definición alternativa de anillo de coordenadas:

Definición 1.59: Dado un conjunto algebraico proyectivo $X \subseteq \mathbb{P}^n$ definimos su ***anillo de coordenadas homogéneas*** como la k-álgebra:

$$k[X] := \frac{k[x_0, \boldsymbol{x}]}{\mathbf{I}(X)}.$$

Nótese que $k[X]$ es, al igual que antes, una k-álgebra reducida para todo conjunto algebraico proyectivo; es un dominio íntegro si X es una variedad proyectiva, y es un cuerpo (y, por definición de algebraicamente cerrado es k) si X es un punto (i.e., si $\mathbf{I}(X)$ es maximal). Más adelante veremos el por qué elegir esta definición en lugar de la definición por funciones polinómicas.

Definición 1.60: Sea X una variedad cuasiafín. Una aplicación $\phi \colon X \to k$ se dice ***regular*** en $P \in X$ si existe un entorno abierto U de P, y existen $f, g \in k[U]$ tales que g no se anula en U y $\phi|_U = f/g$.

Sea X una variedad cuasiproyectiva. Una aplicación $\phi\colon X \to k$ se dice ***regular*** en $P \in X$ si existe un entorno abierto U de P, y existen $f, g \in k[U]$ homogéneos del mismo grado tales que g no se anula en U y $\phi|_U = f/g$.

En ambos casos se dice que una función es ***regular*** (a secas) si lo es en todos los puntos de su dominio. Se denota por $\mathcal{O}(X)$ al conjunto de funciones regulares desde X a k.

Podría resumirse la definición en que una función regular es una función «localmente racional». Es claro que si X es una variedad afín, entonces se tiene que $k[X] \subseteq \mathcal{O}(X)$.

Proposición 1.61: $\mathcal{O}(X)$ es una k-álgebra y un dominio íntegro.

Querremos ver que $\mathcal{O}(X)$ coincide con $k[X]$ para variedades afínes, primero necesitaremos desarrollar bien algunas definiciones más.

Proposición 1.62: Sea X una variedad, y sean $U, V \subseteq X$ abiertos no vacíos. Si $\phi \in \mathcal{O}(U), \psi \in \mathcal{O}(V)$ son tales que $\phi|_{U\cap V} = \psi|_{U\cap V}$, entonces existe $\theta \in \mathcal{O}(U \cup V)$ tal que $\theta|_U = \phi$ y $\theta|_V = \psi$.

Ahora bien, si X es una variedad, entonces todo par de abiertos no vacíos se cortan por irreducibilidad, luego, en cierto sentido, toda función racional definida sobre un abierto admite extensiones únicas. Ésto se asemeja al principio de prolongación de funciones analíticas en variable compleja.

Lema 1.63: Sea X una variedad. Definamos $C := \bigcup_U \{U\} \times \mathcal{O}(U)$, donde U recorre todos los abiertos en X. Entonces la relación $\sim$ sobre C dada por:

$$(U, \phi) \sim (V, \psi) \iff \phi|_{U\cap V} = \psi|_{U\cap V},$$

es una relación de equivalencia. Además, si $(U, \phi) \sim (V, \psi)$ y $(W, \theta) \in C$, entonces:

1. $(U \cap W, \phi + \theta) \sim (V \cap W, \psi + \theta)$.
2. $(U \cap W, \phi \cdot \theta) \sim (V \cap W, \psi \cdot \theta)$.
3. $(U, a\phi) \sim (V, a\psi)$ para todo $a \in k$.

Definición 1.64: Sea X una variedad, llamamos su ***cuerpo de funciones racionales***, denotado $k(X)$, al conjunto cociente dado por el lema anterior. Denotamos $\langle U, \phi\rangle = [(U, \phi)]_\sim$.

Como todos los abiertos se cortan en una variedad se verifica:

Corolario 1.64.1: Si X es una variedad y $U \subseteq X$ es un abierto no vacío, entonces $k(U) = k(X)$.

Proposición 1.65: Sea X una variedad, y sea ϕ una función regular en algún abierto U no vacío de X. Existe otra función regular $\psi \in \mathcal{O}(V)$ tal que $\langle U, \phi \rangle = \langle V, \psi \rangle$, donde V es un abierto $\subseteq$-máximo.

Demostración: Basta emplear la proposición 1.62 y unir todas las funciones regulares que coinciden con ϕ. □

Definición 1.66: Una función racional $\langle U, \phi \rangle \in k(X)$ se dice que es ***regular*** en un punto $P \in X$ si ϕ posee una extensión a algún entorno de P, de lo contrario se dice que P es una ***singularidad*** de ϕ.

Si una función racional α es regular en P, entonces podemos evaluarlo en P. Al igual que en el caso afín uno tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.67: El conjunto de singularidades de una función racional es cerrado.

Proposición 1.68: Sea $\mathcal{O}_{P,X} \subseteq k(X)$ el subanillo de funciones racionales que son regulares en P. Éste anillo es local, y su único ideal maximal es:

$$\mathfrak{m}_{P,X} = \{\alpha \in \mathcal{O}_{P,X} : \alpha(P) = 0\}.$$

Teorema 1.69: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad afín, entonces:

1. Para todo punto $P \in X$ se cumple que $P \mapsto \mathfrak{m}_P$ determina una biyección entre los puntos de X y los ideales maximales de $k[X]$.
2. $\mathcal{O}(X) \cong k[X]$.

Demostración: Para ésto, nótese que existe una correspondencia entre ideales maximales de $k[X]$ y puntos en X (ésto debido a que los ideales de la forma $(x_1 - P_1, \dots, x_n - P_n)$ son los maximales en $k[\mathbb{A}^n]$ por el teorema débil de ceros de Hilbert y $k[X]$ es un cociente). Luego, es claro que $P \mapsto \mathfrak{m}_P$ establece una biyección con los ideales maximales de $k[X]$.

Ahora bien, como $\mathcal{O}_{P,X}$ es una localización de $\mathcal{O}(X)$, el cual es una extensión de $k[X]$, entonces es claro que se induce un homomorfismo de anillos $k[X]_{\mathfrak{m}_P} \to \mathcal{O}_{P,X}$. Éste homomorfismo es inyectivo pues $k[X] \subseteq \mathcal{O}_{P,X}$ y es suprayectivo puesto que toda función α regular en P es de la forma $\alpha|_U = f/g$ con $f, g \in k[\boldsymbol{x}]$ para algún entorno U de P con $g(P) \neq 0$ y claramente $f/g \in k[X]_{\mathfrak{m}_P}$.

Luego podemos ver que $k(X)$ coincide con nuestra vieja definición de $k[X]$ y concluimos pues

$$\mathcal{O}(X) = \bigcap_{P \in X} \mathcal{O}_{P,X} = \bigcap_{P \in X} k[X]_{\mathfrak{m}_P} = k[X]. \qquad \square$$

Antes de ver el caso de variedades proyectivas, necesitaremos de una definición de morfismo entre variedades:

Proposición 1.70: Para todo $\phi \in \mathcal{O}(X)$, viéndolo como aplicación $\phi\colon X \to \mathbb{A}^1$, se cumple que ϕ es continua.

DEMOSTRACIÓN: Asumamos que $X \subseteq \mathbb{A}^n$. Veremos que la preimagen de cerrados es cerrada. Nótese que los cerrados de $\mathbb{A}^1$ son conjuntos finitos, así que basta ver que para todo $a \in \mathbb{A}^1$ se cumpla que $\phi^{-1}[\{a\}]$ sea cerrado. Más aún, como X es variedad, entonces es un espacio noetheriano y compacto (teorema 1.23) y se puede cubrir por finitos abiertos U tales que $\phi|_U = f/g$ con $f, g \in k[\mathbb{A}^n]$ de modo que $\phi^{-1}[\{a\}] \cap U = \mathbf{V}(f - ag)$ que es cerrado. En consecuencia, $\phi^{-1}[\{a\}]$ es la unión de finitos cerrados.

El caso $X \subseteq \mathbb{P}^n$ es análogo, empleando f, g homogéneos. $\square$

Definición 1.71: Sean X, Y variedades y sea $f\colon X \to Y$. Entonces f es un ***morfismo*** si:

1. f es continua.
2. Para todo $U \subseteq Y$ abierto no vacío y todo $\phi \in \mathcal{O}(U)$ se cumple que $f \circ \phi\colon f^{-1}[U] \to k$ es regular.

Proposición 1.72: Sean X, Y variedades, y sea $f\colon X \to Y$ continua. Entonces f es un morfismo syss para todo $P \in Y$, existe un entorno abierto $U \subseteq Y$ de P tal que para todo $\psi \in \mathcal{O}(U)$ se cumple que $f \circ \psi \in \mathcal{O}\big(f^{-1}[U]\big)$.

DEMOSTRACIÓN: $\Longrightarrow$. Trivial.

$\Longleftarrow$. Denotemos por U_p a un entorno como en el enunciado. Sea $V \subseteq Y$ un abierto no vacío y sea $\psi \in \mathcal{O}(V)$, queremos probar que $f \circ \psi \in \mathcal{O}\big(f^{-1}[V]\big)$.

Sea $q \in f^{-1}[V]$, por el enunciado, $q \in f^{-1}[V] \cap f^{-1}[U_q]$; luego, se cumple que existe $V_q \subseteq f^{-1}[V] \cap f^{-1}[U_q]$ tal que $f \circ \psi \upharpoonright V_q = g/h$ con $g, h \in k[\mathbb{A}^n]$; es decir, $f \circ \psi$ es regular como se quería probar. $\square$

Corolario 1.72.1: Una función $f\colon X \to \mathbb{A}^1$ es un morfismo syss es regular.

De modo que $\mathcal{O}(X)$ es un invariante de las variedades algebraicas.

Proposición 1.73: Sea X una variedad. Entonces:

1. $\mathrm{Id}_X\colon X \to X$ es un morfismo.
2. La composición de morfismos es un morfismo.

En consecuencia, las variedades (como objetos) y los morfismos (como flechas) constituyen una categoría, denotada Var_k.

Proposición 1.74: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de variedades, entonces la pre-composición:

$$\begin{aligned} h_f\colon \mathcal{O}(Y) &\longrightarrow \mathcal{O}(X) \\ \phi &\longmapsto f \circ \phi \end{aligned} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[dd, "f"'] & \mathcal{O}(X) \\ {} \arrow[r, Rightarrow, "\mathcal{O}(-)"] & {} \\ Y & \mathcal{O}(Y) \arrow[uu, "h_f"'] \end{tikzcd}$$

es un morfismo de k-álgebras. Además se puede verificar que h_- corresponde a un funtor contravariante desde Var_k a Alg_k. En consecuencia, si X e Y son variedades isomorfas, entonces sus anillos de coordenadas regulares son isomorfos.

Proposición 1.75: Se tiene el siguiente funtor contravariante:

$$\begin{aligned} h_f\colon k(Y) &\longrightarrow k(X) \\ \langle U, \phi\rangle &\longmapsto \langle f^{-1}[U], f \circ \phi\rangle \end{aligned} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[dd, "f"'] & k(X) \\ {} \arrow[r, Rightarrow, "k(-)"] & {} \\ Y & k(Y) \arrow[uu, "h_f"'] \end{tikzcd}$$

En particular, si f es un isomorfismo, entonces $k(X)$ y $k(Y)$ son cuerpos isomorfos.

Proposición 1.76: Se tiene el siguiente funtor contravariante:

$$\begin{aligned} h_f \colon \mathcal{O}_{Q,Y} &\longrightarrow \mathcal{O}_{P,X} \\ \langle U, \phi \rangle &\longmapsto \langle f^{-1}[U], f \circ \phi \rangle \end{aligned} \qquad \begin{tikzcd} (X,P) \arrow[d, "f"'] \arrow[r, phantom, "\xRightarrow{\mathcal{O}_{-,-}}"] & \mathcal{O}_{P,X} \\ (Y,Q) & \mathcal{O}_{Q,Y} \arrow[u, "h_f"'] \end{tikzcd}$$

En particular, si f es un isomorfismo, entonces $\mathcal{O}_{P,X}$ y $\mathcal{O}_{Q,Y}$ son anillos isomorfos.

Éstas últimas tres proposiciones y construcciones funtoriales se resumen en que los invariantes algebraicos de una variedad X son $\mathcal{O}(X), \mathcal{O}_{P,X}$ y $k(X)$. A priori, $k[X]$ *no* es un invariante.

Ahora caracterizaremos a las funciones racionales y a los anillos de coordenadas locales como límites categoriales. De momento éstas caracterizaciones no son obligatorias, pero facilitan el entendimiento más adelante en contexto de esquemas.

Definición 1.77: Sea X un espacio topológico y $S \subseteq X$. Denotamos por $\mathsf{Op}_S(X)$ a la categoría cuyos objetos son abiertos de X que contienen a S y cuyas flechas son las inclusiones. Denotamos por $\mathsf{Op}(X) := \mathsf{Op}_\varnothing(X)$ y si $x \in X$ denotamos $\mathsf{Op}_x(X) := \mathsf{Op}_{\{x\}}(X)$.

Proposición 1.78: Sea X una variedad. Las restricciones de funciones regulares determinan un funtor contravariante $\mathcal{O}\colon \mathsf{Op}(X) \to \mathsf{Alg}_k$:

$$\begin{aligned} \rho_U^V \colon \mathcal{O}(V) &\longrightarrow \mathcal{O}(U) \\ \phi &\longmapsto \phi|_U \end{aligned} \qquad \begin{tikzcd} U \arrow[d, "\subseteq"'] \arrow[r, phantom, "\xRightarrow{\mathcal{O}}"] & \mathcal{O}(U) \\ V & \mathcal{O}(V) \arrow[u, "\rho_U^V"'] \end{tikzcd}$$

Se satisface que $k(X) = \varinjlim_{U \in \mathsf{Op}(X)} \mathcal{O}(U)$.

Demostración: Sea A un co-cono del diagrama, vale decir, que viene dotado de flechas $\varphi_U \colon \mathcal{O}(U) \to A$ para cada $U \in \operatorname{Obj} \mathsf{Op}(X)$. Luego la flecha deseada es la siguiente

$$\phi \colon k(X) \longrightarrow A$$

$$\langle U, f\rangle \longmapsto \varphi_U(f),$$

la cual está bien definida y es única por la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(U) \arrow[dr, "{\langle U,-\rangle}"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_U"] & & \\
& k(X) \arrow[r, dashed, "\exists!\phi"] & A \\
\mathcal{O}(V) \arrow[uu, "\rho_U^V"] \arrow[ur, "{\langle V,-\rangle}"'] \arrow[urr, bend right, "\varphi_V"'] & &
\end{tikzcd}$$

Y queda al lector comprobar que ϕ es un k-morfismo. $\square$

Proposición 1.79: Sea X una variedad y $P \in X$. Entonces $\mathcal{O}_{P,X} = \varinjlim_{U \in \mathsf{Op}_P(X)} \mathcal{O}(U)$.

Corolario 1.79.1: Sea X una variedad, $P \in X$, y U un entorno abierto de P. Entonces $\mathcal{O}_{P,X} = \mathcal{O}_{P,U}$.

Ahora podemos mejorar la relación con las cartas afínes:

Proposición 1.80: $\varphi_j : U_j \to \mathbb{A}^n$ es un isomorfismo de variedades.

Teorema 1.81: Sea $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva, entonces:

1. Para todo punto $P \in Y$ podemos asociar un único ideal $\mathfrak{m}_P$ de los polinomios homogéneos f tales que $f(P) = 0$ y se satisface que $\mathcal{O}_{P,Y} = k[Y]_{(\mathfrak{m}_P)}$.

2. $k(Y)$ se identifica con el cuerpo de las fracciones f/g, donde $f, g \in k[X]$ son homogéneos del mismo grado.

3. $\mathcal{O}(Y) = k$.

Demostración:

1. Sean U_i las cartas afínes de $\mathbb{P}^n$ y sea $Y_i := Y \cap U_i$ el cual estudiaremos como variedad afín. Luego existe un k-isomorfismo natural $\bar{\phi}_i : k[Y_i] \to k[Y][x_i^{-1}]$ que desciende del k-isomorfismo:

$$\begin{array}{ccccc} k[\boldsymbol{x}] & \xrightarrow{\alpha} & k[x_0, \boldsymbol{x}] & \longrightarrow & k[x_0, \boldsymbol{x}][x_i^{-1}] \\ f(\boldsymbol{x}) & \longmapsto & g(x_0, \boldsymbol{x}) & \longmapsto & g\left(\dfrac{x_0}{x_i}, \dots, \dfrac{x_n}{x_i}\right) \end{array}$$

donde α corresponde a la homogeneización.

Para $P \in Y$, elegimos un índice i tal que $P \in Y_i$, luego

$$\mathcal{O}_{P,Y} = \mathcal{O}_{P,Y_i} = k[Y_i]_{\mathfrak{m}'_P},$$

donde $\mathfrak{m}'_P$ es el ideal primo asociado a P dentro de la variedad afín Y_i. Se puede verificar que $\bar{\phi}_i[\mathfrak{m}'_P] = \mathfrak{m}_P \cdot k[Y][x_i^{-1}]$. Ahora bien, como $x_i \notin \mathfrak{m}_P$ se concluye que $k[Y_i]_{\mathfrak{m}'_P} \cong k[Y]_{(\mathfrak{m}_P)}$.

2. Nótese que $k(Y) = k(Y_i) = \mathrm{Frac}(k[Y_i])$ puesto que Y_i es una variedad afín, pero sabemos que $k[Y][x_i^{-1}] \cong k[Y_i]$ de lo que concluimos.

3. Sea $f \in \mathcal{O}(Y)$, luego sabemos que $f \in \mathcal{O}(Y_i)$, por lo que $f \in k[Y_i] \cong k[Y][x_i^{-1}]$, por lo que $f = g_i/x_i^{N_i}$ donde $g_i \in k[Y]$ es homogénea de grado N_i. Considerando a $k(Y) = \mathrm{Frac}(k[Y])$ y pensando en $k[Y]$ como una k-álgebra graduada, de modo que $k[Y]_d$ denota los polinomios homogéneos de grado d, se tiene que $x_i^{N_i} f \in k[Y]_{N_i}$ para todo i. Luego eligiendo $N \geq \sum_{i=0}^{n} N_i$ tenemos que $k[Y]_N$ es un k-espacio vectorial generado por monomios a partir de los $x_0, \dots, x_n$ y es claro que para todo monomio debe existir un j tal que $x_j^{N_j}$ aparezca; por lo que se comprueba que $f \cdot k[Y]_N \subseteq k[Y]_N$ e, iterando ésta relación, se comprueba que para todo q se cumple que $f^q \cdot k[Y]_N \subseteq k[Y]_N$; en particular $x_0^N f^q \in k[Y]_N$ para todo q.

   De ésto se concluye que $k[Y][f] \subseteq x_0^{-N} k[Y]$, el cual es un $k[Y]$-módulo finitamente generado, por lo que f es entero sobre $k[Y]$ (cf. [**39,** Def. 10.61]) de modo que existen $a_0, \dots, a_{m-1} \in k[Y]$ tales que

$$f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \cdots + a_1 f + a_0 = 0.$$

   Como f tiene grado 0 (i.e., es una fracción racional de polinomios de igual grado) podemos reemplazar los a_i's por sus componentes homogéneas de grado 0 (que son constantes) y obtener una ecuación válida que comprueba que f es entero sobre k, luego es k-algebraico y como k es algebraicamente cerrado se concluye que $f \in k$. □

Corolario 1.81.1: Para todo $n \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ se comprueba que $\mathbb{A}^n \ncong \mathbb{P}^n$. Más generalmente, ninguna variedad afín es isomorfa a una variedad proyectiva, exceptuando por los puntos.

Demostración: Recordemos que $\mathcal{O}(X)$ es un invariante, y que para $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n) = k[x_1, \dots, x_n]$ mientras que $\mathcal{O}(\mathbb{P}^n) = k$ por el teorema anterior. La generalización es obvia. □

Lema 1.82: Sea X una variedad arbitraria e $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad afín. Una aplicación $\phi\colon X \to Y$ es un morfismo syss $\phi \circ \pi_i\colon X \to k$ es regular para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración: $\Longrightarrow$. Trivial.

$\Longleftarrow$. Como $\phi \circ \pi_i$ es regular para todo i, entonces dado $f(x_1, \dots, x_n) \in k[Y]$ una función polinómica, también ha de cumplirse que $\phi \circ f$ es regular. Como las funciones regulares son continuas, y los cerrados de Y son conjuntos algebraicos, entonces ϕ ha de ser continua. Finalmente, sabemos que las funciones regulares son cocientes de polinomios en abiertos, de lo que es fácil concluir que ϕ es un morfismo. □

Uno estaría tentado en la demostración anterior, emplear el hecho de que, dada una aplicación $f\colon X \to Y \times Z$, donde $Y \times Z$ es un producto de espacios topológicos, f es continua syss lo son las composiciones con proyecciones. ¿Por qué éste argumento no es válido?

Teorema 1.83: Sea X una variedad arbitraria e $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad afín. Entonces, existe una biyección natural de conjuntos:

$$\alpha\colon \operatorname{Hom}_{\mathsf{Var}_k}(X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathsf{Alg}_k}(k[Y], \mathcal{O}(X)).$$

Demostración: Ya sabemos que $\mathcal{O}(Y) \cong k[Y]$ y, empleando el funtor contravariante h_- de la proposición 1.74, podemos definir $\alpha(f) := h_f$.

Recíprocamente sea $g\colon k[Y] \to \mathcal{O}(X)$ un k-homomorfismo. Sea $\mathbf{I}(Y) \subseteq k[\boldsymbol{x}]$, de modo que $k[Y] = k[\boldsymbol{x}]/\mathbf{I}(Y)$, y denotemos por $[x_i] \in k[Y]$ la clase de equivalencia de la indeterminada x_i. Se satisface que $g([x_i]) =: \phi_i$ es una función regular en todo X, luego definimos:

$$\begin{aligned} \phi\colon X &\longrightarrow Y \\ P &\longmapsto (\phi_1(P), \dots, \phi_n(P)). \end{aligned}$$

En primer lugar, veamos que ϕ está bien definida, i.e., que efectivamente $\phi(P) \in Y$ para todo punto $P \in X$. Como $Y = \mathbf{V}(\mathbf{I}(Y))$, entonces basta ver que para todo $f \in \mathbf{I}(Y)$ se cumple que $f(\phi(P)) = 0$, pero como g es un k-homomorfismo y f es un polinomio tenemos que

$$f(\phi(P)) = f(\phi_1(P), \dots, \phi_n(P)) = g\big(f([x_1], \dots, [x_n])\big)(P) = 0.$$

Finalmente, ϕ resulta ser un morfismo por el lema anterior. □

Corolario 1.83.1: Dos variedades afínes X, Y son isomorfas syss sus anillos de coordenadas afínes $k[X], k[Y]$ son k-álgebras isomorfas.

Similar al teorema 1.82 que nos da un criterio para verificar que una aplicación es un morfismo hacia variedades afínes, tenemos el siguiente criterio para variedades proyectivas:

Teorema 1.84: Se cumple:

1. Si Y es una variedad contenida en Z variedad, entonces la inclusión $\iota\colon Y \to Z$ es un morfismo.
2. Si X, Y son variedades e $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ entonces toda aplicación $f\colon X \to Y$ es morfismo syss $f\colon X \to \mathbb{P}^n$ es morfismo.

Demostración:

1. Trivial.
2. $\implies$. Es consecuencia del inciso anterior.

   $\impliedby$. Si $f\colon X \to \mathbb{P}^n$ es morfismo, entonces es continua y es claro que $f\colon X \to Y$ también es continua. Sea $P \in Y$, luego para todo $\alpha \in \mathcal{O}_P(Y)$ regular en P, se cumple que α es un cociente de polinomios en algún entorno de P. Dicho cociente determina una función racional $\beta \in \mathcal{O}_P(\mathbb{P}^n)$ definida en un abierto V que coincide con α en un abierto U, luego como $f\colon X \to \mathbb{P}^n$ es morfismo, se satisface que $f \circ \beta \in \mathcal{O}(f^{-1}[V])$ es regular, pero $f \circ \beta = f \circ \alpha$ en $\phi^{-1}[U]$, luego $f \circ \alpha \in \mathcal{O}(f^{-1}[U \cap Y])$. □

2

Tópicos sobre variedades

En el primer capítulo nos dedicamos principalmente a definir la categoría Var_k de variedades cuasiproyectivas (dado que vimos que toda variedad afín es cuasiproyectiva), y vimos esbozos de la necesidad de construir un diccionario entre las nociones «geométricas» de las variedades y construcciones del álgebra conmutativa (como los ideales primos de $k[\boldsymbol{x}]$, o las k-álgebras de coordenadas regulares). En éste segundo capítulo nos dedicamos a explorar mejor ésta categoría.

2.1 Construcciones clásicas

§2.1.1 Variedades lineales. La geometría algebraica presenta una generalidad mucho mayor que la geometría afín al admitir polinomios abstractos en lugar de solo ecuaciones lineales, pero aún así revisémoslos en detalle:

Definición 2.1: Una ***variedad lineal afín*** es un conjunto no vacío de la forma $W + P \subseteq \mathbb{A}^n$, donde $P \in \mathbb{A}^n$ es un punto y W es un subespacio vectorial (visto como contenido en k^n). Decimos que la dimensión de una variedad lineal afín es la dimensión de W como k-espacio vectorial. Las variedades lineales afínes de dimensión 1, 2 y $n-1$ se dicen ***rectas***, ***planos*** e ***hiperplanos***.

Teorema 2.2: Las variedades lineales afínes coinciden con los conjuntos algebraicos afínes no vacíos determinados por polinomios lineales.

Demostración: Veamos que todo conjunto determinado por polinomios lineales es una variedad lineal afín. En primer lugar, podemos escribir $V = \mathbf{V}(f_1(x), \dots, f_r(x))$ donde cada

$$f_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i$$

luego podemos definimos $A := [a_{ij}]_{ij} \in \operatorname{Mat}_{r\times n}(k)$ y $\boldsymbol{b} := [b_i]_{i1} \in \operatorname{Mat}_{r\times 1}(k)$, por lo que $\boldsymbol{q} \in V$ syss $A \cdot \boldsymbol{q} = \boldsymbol{b}$. Dado $P \in V$ vemos que $AP = \boldsymbol{b}$, luego $\boldsymbol{q} \in V$ syss $A(\boldsymbol{q} - P) = \vec{0}$ y definiendo

$$W := \{\boldsymbol{q} \in k^n : A\boldsymbol{q} = \vec{0}\},$$

el cual es un subespacio vectorial, vemos que $V = W + P$.

Para la recíproca, por el mismo truco, basta ver que los subespacios vectoriales son variedades líneales afínes. Para ello, dado W subespacio vectorial recordamos que $W = (W^\perp)^\perp$ con el producto interno canónico, de modo que dada una base $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r\}$ de $W^\perp$, notamos que $\boldsymbol{q} \in W$ syss

$$0 = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{v}_i = (q_1, \dots, q_n) \cdot (v_{i1}, \dots, v_{in}) = \sum_{j=1}^{n} q_j v_{ij},$$

de modo que definiendo $f_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_j$ tenemos que $W = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_r)$. □

Corolario 2.2.1: Toda variedad lineal afín $V \subseteq \mathbb{A}^n$ de dimensión d es la intersección de $n - d$ hiperplanos.

Corolario 2.2.2: Toda variedad lineal afín V de dimensión d es una variedad afín isomorfa a $\mathbb{A}^d$.

Demostración: Escribamos $V = P + W$ y sea $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r\}$ una base de W. Luego es fácil notar que la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^d &\longrightarrow V \\ (a_1, \dots, a_d) &\longmapsto P + \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i \end{aligned}$$

es un isomorfismo de variedades. □

§2.1.2 Encaje de Veronese. En ésta sección introducimos un homomorfismo folclórico de la geometría algebraica y veremos cómo emplearlo para conectarlo con teoremas clásicos de la *geometría enumerativa*.

Definición 2.3: Un conjunto algebraico afín (resp. proyectivo) C contenido en $\mathbb{A}^2$ (resp. $\mathbb{P}^2$) generado por un polinomio cuadrático f se dice una ***cónica afín*** (resp. proyectiva).

Si f no es irreducible, entonces decimos que C es una ***cónica degenerada***.

Hay dos tipos de cónicas degeneradas: se puede dar que f sea el producto de dos factores lineales distintos, en cuyo caso la cónica se ve geométricamente como dos rectas, pero también puede tener un factor lineal doble y corresponde a una «recta doble». En el primer caso, la cónica no es una variedad, pero en el segundo caso sí.

Definición 2.4: Un ***encaje***[1] en una categoría $\mathscr{C}$ es una flecha $X \xrightarrow{f} Y$ tal si Z es la imagen de f, entonces $X \xrightarrow{\bar{f}} Z$ es un isomorfismo.

Dado que en el álgebra abstracta principalmente se trabaja con categorías abelianas (e.g., los grupos abelianos, los módulos) en general no es tan necesaria ésta distinción, puesto que los monomorfismos les sustituyen, pero éste no es el caso entre variedades. Por ejemplo, la «biyección canónica» que habíamos encontrado entre $\mathbb{A}^n$ y cualquier carta afín de $\mathbb{P}^n$ es verdaderamente un encaje de variedades.

Definición 2.5: El ***encaje d-ésimo de Veronese*** es la aplicación:

$$\begin{aligned} v_d \colon \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^N \\ [a_0 : \cdots : a_n] &\longmapsto \underbrace{[a_0^d : a_0^{d-1}a_1 : \cdots : a_n^d]}_{\text{todos los monomios de grado } d} \end{aligned}$$

donde $N := \binom{n+d}{d} - 1$ (puesto que hay $\binom{n+d}{d}$ monomios de grado d).

Proposición 2.6: El encaje d-ésimo de Veronese es efectivamente un encaje de variedades.

[1] eng. *embedding*. CASTILLO [**1**] emplea el término *inmersión*.

Demostración: En primer lugar, como el encaje d-ésimo de Veronese está dado por polinomios es claro que determina una función continua, y además es claro que la imagen es un conjunto algebraico proyectivo, luego la imagen es una variedad proyectiva que denotaremos $V_{n,d}$. Debemos probar que el encaje d-ésimo de Veronese es un isomorfismo de variedades, para lo cual construiremos su inversa: no seremos tan rigurosos, pero el truco está en notar que $V_{n,d}$ contiene coordenadas que son de la forma $a_i^{d-1}a_j$ donde fijamos algún i, y movemos $j = 0, 1, \dots, n$; luego en cartas afínes definimos la inversa como aquella que manda un punto en $V_{n,d}$ a $[a_i^{d-1}a_0 : a_i^{d-1}a_1 : \cdots : a_i^{d-1}a_n]$ en una carta afín. Como el a_i no será cero, es claro que será la inversa, y es un morfismo puesto que en las cartas afínes (que son un cubrimiento abierto de $V_{n,d}$) se ve como una mera proyección que olvida ciertas coordenadas. $\square$

Ejemplo. El encaje 2-ésimo de Veronese de $\mathbb{P}^1$ se ve así:

$$\begin{aligned} v_1 : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^2 \\ [a : b] &\longmapsto [a^2 : ab : b^2], \end{aligned}$$

la imagen de v_1 es la variedad proyectiva $V_{1,2} := \mathbf{V}(xz - y^2)$, de modo que v_1 establece un isomorfismo entre $\mathbb{P}^1$ y una cónica proyectiva no degenerada.

Una recta en $\mathbb{P}^2$ es un conjunto algebraico proyectivo dado por un polinomio homogéneo lineal. Es claro que todas las rectas son variedades proyectivas.

Teorema 2.7: Cinco puntos en $\mathbb{P}^2$ están contenidos en una cónica. Ésta cónica es única a menos que cuatro de ellos sean colineales, y en éste caso, ésta cónica es no-degenerada a menos que tres de ellos sean colineales.

Demostración: Toda cónica en $\mathbb{P}^2$ es de la forma:

$$\mathbf{V}(ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz) \subseteq \mathbb{P}^2,$$

donde $a, b, c, d, e, f \in k$ no son todos nulos. Nótese que si multiplicamos todos los coeficientes por $\lambda \in k_{\neq 0}$, entonces obtenemos la misma cónica, de modo que es fácil comprobar que existe una biyección entre cónicas en $\mathbb{P}^2$ y puntos en $\mathbb{P}^5$. Sea $P := [\alpha : \beta : \gamma] \in \mathbb{P}^2$ un punto, el espacio de cónicas (visto como puntos en $\mathbb{P}^5$) que pasan por P es el conjunto algebraico:

$$H_P := \mathbf{V}(x_0\alpha^2 + x_1\beta^2 + x_2\gamma^2 + x_3\alpha\beta + x_4\alpha\gamma + x_5\beta\gamma) \subseteq \mathbb{P}^5,$$

los cuales determinan hiperplanos H_P en $\mathbb{P}^5$. Luego, las cónicas que pasan por los puntos $P_1, \dots, P_5$ son los puntos en $\mathbb{P}^5$ que yacen en la intersección de hiperplanos $H_{P_1} \cap \cdots \cap H_{P_5} \subseteq \mathbb{P}^5$.

Intersectando en cartas afínes, notamos que los hiperplanos determinan subespacios afínes, de modo que bajan la dimensión una a la vez a menos que dos hiperplanos estén determinados por la misma ecuación. $\square$

Completar demostración.

Ejercicio 2.8: Probar que por nueve puntos en $\mathbb{P}^2$ pasa una cúbica.

§2.1.3 Productos de variedades. Comencemos por recordar la definición categorial de producto:

Definición 2.9: Sean X, Y objetos de una categoría $\mathscr{C}$. Se dice que $X \times Y$ es su ***producto*** si:

1. Existen flechas $X \times Y \xrightarrow{\pi_1} X$ y $X \times Y \xrightarrow{\pi_2} Y$ en la categoría.

2. Para todo objeto Z, con flechas $Z \xrightarrow{\psi_1} X$ y $Z \xrightarrow{\psi_2} Y$ existe una única flecha $Z \xrightarrow{\phi} X \times Y$ tal que $\phi \circ \pi_1 = \psi_1$ y $\phi \circ \pi_2 = \psi_2$. Equivalentemente, se exige que el siguiente diagrama conmute:

$$
\begin{tikzcd}
 & & X \\
Z \arrow[r, dashed, "\exists!\phi"] \arrow[urr, bend left, "\psi_1"] \arrow[drr, bend right, "\psi_2"'] & X \times Y \arrow[ur, two heads, "\pi_1"] \arrow[dr, two heads, "\pi_2"'] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}
\tag{2.1}
$$

En general, en las condiciones del diagrama (2.1) denotaremos $\phi = \psi_1 \Delta \psi_2$ puesto que se trata de una «diagonal».

En el primer capítulo vimos que el producto de conjuntos algebraicos afínes es también un conjunto algebraico afín, pero si buscamos encontrar una definición de «producto» necesitamos comprobar la propiedad universal y además verificar que éste «candidato a producto» sea tal que el producto de variedades sea también una variedad.

Teorema 2.10: Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n, Y \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades afínes. Entonces:

1. $X \times Y$ es una variedad afín.

2. Las proyecciones canónicas $\pi_1 \colon X \times Y \to X$ y $\pi_2 \colon X \times Y \to Y$ son morfismos.

3. Dada otra variedad arbitraria Z con morfismos $\psi_1 \colon Z \to X$ y $\psi_2 \colon Z \to Y$, siempre existe un morfismo $\phi \colon Z \to X \times Y$ tal que el diagrama (2.1) conmuta.

Demostración:

1. Digamos que $X \times Y = F_1 \cup F_2$ cerrados y definamos

$$X_i := \{P \in X : \{P\} \times Y \subseteq F_i\}.$$

Veamos que $X_1 \cup X_2 = X$: para ésto, nótese que si $P \in X$ fuese tal que $\{P\} \times Y$ no está contenido en ningún F_i, entonces

$$\{P\} \times Y = (\{P\} \times Y \cap F_1) \cup (\{P\} \times Y \cap F_2),$$

lo que contradice la irreducibilidad de Y.

Cada X_i es cerrado: Ésto equivale a ver que los X_i^c son abiertos. Para ello sea $R \in X \setminus X_i$, vale decir, existe un $Q \in Y$ y una ecuación $f \in \mathbf{I}(F_i)$, de modo que $f(R, Q) \neq 0$, así que definiendo $g(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}, Q)$, vemos que

$$R \in \{P \in X : g(P) \neq 0\} \subseteq X_i^c.$$

Finalmente, por irreducibilidad algún X_i es todo X, luego dicho F_i es todo $X \times Y$.

2. Ejercicio para el lector.

3. Por el lema 1.82 sabemos que dado $\psi_1 \colon Z \to X \subseteq \mathbb{A}^n$ podemos separar por coordenadas, y notar que es una función regular en cada una de ellas y viceversa. Así pues, podemos definir $\phi(P) := (\psi_1(P), \psi_2(P))$ y notar que determina el morfismo deseado (¿por qué?). Recíprocamente, dado otro morfismo ϕ basta proyectarlo a X o a Y, y luego volver a ver coordenadas para concluir unicidad. □

Una observación importante es que si bien $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \cong \mathbb{A}^{n+m}$ en Var_k, notamos que $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \ncong \mathbb{A}^{n+m}$ en Top, es decir, la topología de Zariski sobre $\mathbb{A}^{n+m}$ no es la topología producto. Ésto es evidente del hecho de que la topología en $\mathbb{A}^1$ es la cofinita, luego la topología producto en $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ es también la cofinita, pero en $\mathbb{A}^2$ la diagonal $\mathbf{V}(x - y)$ es un cerrado infinito. Otra manera de decirlo es que el funtor olvidadizo $U \colon \mathsf{Var}_k \to \mathsf{Top}$ no preserva productos (y en general, no preserva límites inversos).

Proposición 2.11: El funtor contravariante $\mathcal{O}\colon \mathsf{Var}_k \to \mathsf{Alg}_k$ transforma límites inversos en límites directos. En particular, si X, Y son variedades afínes, entonces

$$k[X \times Y] \cong k[X] \otimes_k k[Y].$$

DEMOSTRACIÓN: Basta recordar que $\mathcal{O}(X) = \operatorname{Hom}_{\mathsf{Var}_k}(X, \mathbb{A}^1)$ y que $\mathcal{O}(f) = h_f$ es el funtor contravariante de representación, los cuales siempre transforma límites inversos en límites directos (cf. [**41,** Teo. 7.85]). Finalmente, la parte de «en particular» se reduce a recordar que el producto tensorial es el coproducto en Alg_k (cf. [**39,** Teo. 10.25]). □

Ahora toca el turno a las variedades (cuasi)proyectivas, pero éste caso es más delicado. Por ejemplo, una aplicación $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{n+m}$ que concatenara coordenadas no bastaría, ya que en $\mathbb{P}^{n+m}$ hay un punto

$$[\underbrace{0 : \cdots : 0}_{n} : \underbrace{1 : \cdots : 1}_{m}]$$

el cual se proyectaría a $[0 : \cdots : 0] \in \mathbb{P}^n$ lo que es absurdo.

Definición 2.12: Sean n, m naturales > 0, definamos $N := (n+1)(m+1) - 1$ y considere $\mathbb{P}^N$ el espacio proyectivo con indeterminadas

$$k[\{x_{ij} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}],$$

las cuales se «organizan en una matriz $(n+1) \times (m+1)$». Entonces la ***variedad de Segre*** $S_{n,m} \subseteq \mathbb{P}^N$ es el conjunto algebraico proyectivo dado por las ecuaciones

$$x_{ik}x_{jl} = x_{il}x_{jk}.$$

Las ecuaciones deben interpretarse de la siguiente manera: los elementos de $S_{n,m}$ son matrices de $(n+1) \times (m+1)$ no nulas con la propiedad de que sus columnas son tuplas en $\mathbb{P}^n$ que son proyectivamente equivalentes (reordenando tendríamos que $x_{ik}/x_{il} = x_{jk}/x_{jl}$), y cuyas filas son tuplas en $\mathbb{P}^m$ que también son proyectivamente equivalentes.

Ésto fuerza, entre otras cosas, al hecho de que no pueden haber ni columnas ni filas nulas, de modo que podemos «devolvernos» sin problema.

Proposición 2.13: 1. El ***encaje de Segre***:

$$\sigma\colon \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

$$([a_0 : \cdots : a_n], [b_0 : \cdots : b_m]) \longmapsto [a_i b_j]_{i,j}$$

es una biyección de conjuntos entre $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ y $S_{n,m}$.

2. Las variedades de Segre $S_{n,m}$ son variedades proyectivas.

Demostración:

1. Ejercicio para el lector.

2. Consideremos el k-homomorfismo

$$\psi \colon k[\{z_{ij}\}_{ij}] \longrightarrow k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$$

dado por $\psi(z_{ij}) = x_i y_j$. Definamos $\mathfrak{a} := \ker \psi$, y nótese que $\mathbf{I}(S_{n,m}) = \mathfrak{a}$, de modo que $S_{n,m}$ es variedad si $\mathfrak{a}$ es primo. Pero ψ induce un k-monomorfismo $\bar{\psi} \colon k[\{z_{ij}\}_{ij}]/\mathfrak{a} \to k[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$, de modo que se comprueba que $k[\{z_{ij}\}_{ij}]/\mathfrak{a}$ es un dominio íntegro, por lo que $\mathfrak{a}$ es primo. □

Intuitivamente, la variedad de Segre $S_{n,m}$ *es* el producto de $\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^m$, pero ¿cómo funciona en la práctica?

Definición 2.14: Sean $\boldsymbol{x} = (x_0, \dots, x_n)$ e $\boldsymbol{y} := (y_0, \dots, y_m)$ tuplas de indeterminadas disjuntas. Una polinomio $f \in k[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ se dice ***bihomogéneo*** de bigrado (d, e) si cada monomio suyo tiene grado d entre las variables $\boldsymbol{x}$ y grado e en las variables $\boldsymbol{y}$.

Por ejemplo, con $\boldsymbol{x} := (x_0, x_1)$ e $\boldsymbol{y} := (y_0, y_1, y_2)$, vemos que $x_0^2 y_1 y_2^2 + x_0 x_1 y_1^3$ es un polinomio bihomogéneo de bigrado $(2, 3)$.

Mirándolo bajo está luz, es claro que uno puede entender a $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$ como, formalmente una variedad de Segre, pero más bien como un espacio *multiproyectivo* cuyos cerrados son conjuntos algebraicos dados por polinomios *multihomogéneos*.

Siguiendo paso a paso el teorema 2.10 podemos ver el caso para las variedades proyectivas:

Teorema 2.15: Sean $X \subseteq \mathbb{P}^n, Y \subseteq \mathbb{P}^m$ variedades proyectivas. Entonces:

1. $X \times Y \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m = S_{n,m}$ es una variedad proyectiva.

2. Las proyecciones canónicas $\pi_1 \colon X \times Y \to X$ y $\pi_2 \colon X \times Y \to Y$ son morfismos.

3. Dada otra variedad arbitraria Z con morfismos $\psi_1 \colon Z \to X$ y $\psi_2 \colon Z \to Y$, siempre existe un morfismo $\phi \colon Z \to X \times Y$ tal que el diagrama (2.1) conmuta.

DEMOSTRACIÓN: Hay un pequeño ejercicio del lector en el que debe probar que $X \times \{Q\}$ es isomorfo a X. □

§2.1.4 Birracionalidad y variedades afínes abstractas.

Lema 2.16: Sean X, Y variedades y $\varphi, \psi \colon X \to Y$ morfismos. Supongamos que existe $U \subseteq X$ abierto no vacío tal que $\varphi|_U = \psi|_U$, entonces $\varphi = \psi$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $Y \subseteq \mathbb{P}^n$. Por el teorema 1.84, podemos considerar los morfismos $\varphi, \psi \colon X \to \mathbb{P}^n$. Ahora bien, considere la variedad de Segre $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ la cual es un producto, luego determina un único morfismo $\theta := \varphi \Delta \psi \colon X \to \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$. Ahora, considere $\Delta := \{(P, P) : P \in \mathbb{P}^n\} \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ la diagonal, el cual es un cerrado (¿por qué?), y nótese que $\theta^{-1}[\Delta] \supseteq U$, donde U es denso en X de modo que, por continuidad, $\theta^{-1}[\Delta] = X$ como se quería probar. □

Definición 2.17: Una ***función racional*** entre X, Y variedades es una clase de equivalencia $\langle U, f_U \rangle$, donde $U \subseteq X$ es un abierto no vacío y $f_U \colon U \to Y$ es un morfismo.

Las variedades (como objetos) y las funciones racionales (como flechas) conforman una categoría cuyos isomorfismos se dicen ***funciones birracionales***: una función racional $\langle U, f_U \rangle \colon X \to Y$ es birracional si existe $\langle V, g_V \rangle \colon Y \to X$ tal que $f_U \circ g_V$ es equivalente a Id_X y $g_V \circ f_U$ es equivalente a Id_Y. De existir una función birracional entre X, Y éstos se dicen ***birracionales***.

Las funciones racionales son mucho más débiles que los morfismos, puesto que pueden tener singularidades. Veamos un ejemplo:

Ejemplo. Considere $X := \mathbb{A}^1$ la recta afín y $U := \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$. Nótese que $U = \mathbf{V}(x)^c$ y que $1/x$ es una función regular en U (puesto que sólo posee una singularidad en 0), de modo que $\mathcal{O}(U) \supseteq k[x, 1/x]$ mientras que $\mathcal{O}(X) = k[\mathbb{A}^1] = k[x]$, luego, como sus anillos de funciones regulares no son k-álgebras isomorfas se concluye que U, X no son variedades isomorfas. No obstante, $\langle U, 1/x \rangle \colon X \to U$ es una función racional cuya inversa $\langle U, 1/x \rangle \colon U \to X$ es también racional; ergo, U y X son birracionalmente equivalentes.

Más generalmente:

Corolario 2.17.1: Toda variedad es birracional a un abierto no vacío suyo.

Definición 2.18: Una variedad (cuasiproyectiva) se dice una ***variedad afín*** (abstracta) si es isomorfa a una variedad afín (en el sentido usual).

También trabajaremos harto con lo siguiente:

Definición 2.19: Sea X una variedad y $\alpha \in k[X]$ no nula. Se le llama el ***abierto principal*** inducido por α al conjunto $D(\alpha) := X \setminus \mathbf{V}(\alpha)$.

Teorema 2.20: Sea X una variedad afín y $\alpha \in k[X]$ no nula. Se cumplen:

1. $k[D(\alpha)] = k[X][1/\alpha] = \{\beta/\alpha^n : \beta \in k[X], n \in \mathbb{N}\}$.
2. $D(\alpha)$ es una variedad afín.

Demostración: Sin perdida de generalidad supongamos que $X \subseteq \mathbb{A}^n$. Como X es afín, entonces las funciones regulares son polinómicas, así que existe $f \in k[\boldsymbol{x}]$ tal que $\alpha = f|_X$ en X y luego $D(\alpha) = X \setminus \mathbf{V}(f)$.

1. Es claro que $k[D(\alpha)] \subseteq k(D(\alpha)) = k(X)$. Sea $\gamma \in k[D(\alpha)]$, luego γ es una función racional en X y sus singularidades conforman el cerrado $\mathbf{V}(\mathfrak{a}_\gamma)$, donde
$$\mathfrak{a}_\gamma = \{g(\boldsymbol{x}) \in k[\boldsymbol{x}] : [g]\gamma \in k[X]\}.$$
Como γ no posee singularidades en $D(\alpha)$, entonces $\mathbf{V}(\mathfrak{a}_\gamma) \subseteq \mathbf{V}(f)$, o equivalentemente, $\operatorname{Rad}\mathfrak{a}_\gamma \supseteq \mathbf{I}(\mathbf{V}(f))$, de modo que $f^m \in \mathfrak{a}_\gamma$ para algún m y, por lo tanto, $\alpha^m\gamma = \beta \in k[X]$ con lo que $k[D(\alpha)] \subseteq k[X][1/\alpha]$. La otra inclusión es trivial.

2. Considere $\mathfrak{b} \trianglelefteq k[\boldsymbol{x}, x_{n+1}]$ el ideal generado por $\mathbf{I}(X)$ y el polinomio $x_{n+1}f - 1$. Sea $\psi\colon k[\boldsymbol{x}, x_{n+1}] \to k[D(\alpha)]$ dado porque $\psi(x_i) = [x_i]$ con $i \neq n+1$ y $\psi(x_{n+1}) = 1/\alpha$. ψ es un k-epimorfismo por el inciso anterior y claramente se anula en $\mathfrak{b}$, luego induce un k-homomorfismo $\bar{\psi}\colon k[\boldsymbol{x}, x_{n+1}]/\mathfrak{b} \to k[D(\alpha)]$. $\bar{\psi}$ es de hecho inyectiva: si $\bar{\psi}([g]) = 0$, entonces $g \in \mathbf{I}(D(\alpha))$ y, por ende, $gf \in \mathbf{I}(X)$, pero $f \notin \mathbf{I}(X)$ e $\mathbf{I}(X)$

es primo, luego $g \in \mathbf{I}(X) \subseteq \mathfrak{b}$ por lo que $[g] = 0$, de modo que $\bar{\psi}$ es un k-isomorfismo.

Llamando A al subanillo $k[\boldsymbol{x}]/\mathfrak{b}$ de las clases de los $[x_i]$, vemos que $\bar{\psi}$ se restringe a un isomorfismo $A \cong k[\boldsymbol{x}]/\mathbf{I}(X) \to k[X]$. Además, nótese que $\bar{\psi}([x_{n+1}]) = 1/\alpha$ de modo que $\bar{\psi}$ es un k-isomorfismo. En síntesis $k[\boldsymbol{x}, x_{n+1}]/\mathfrak{b} \cong k[D(\alpha)]$ el cual es un dominio íntegro, luego $\mathfrak{b}$ es un ideal primo. Llamamos $Y := \mathbf{V}(\mathfrak{b}) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ la cual es una variedad afín, y tenemos que $k[Y] \cong k[D(\alpha)]$.

Sea $\theta\colon Y \to D(\alpha)$ la aplicación que proyecta las primeras n coordenadas (y olvida la última), notemos que θ es biyección pues su inversa viene dada por $\theta^{-1}(P) = (P, 1/f(P))$ y nótese que es regular pues viene dado por cocientes de polinomios sin singularidades. □

Corolario 2.20.1: En cualquier variedad, los abiertos afínes conforman una base de la topología.

Demostración: Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad cualquiera. Luego considere las cartas afínes U_j, y recuerde que $U_j \cap X$ puede verse como una variedad cuasiafín. Pero toda variedad cuasiafín es afín por el teorema anterior, luego nótese que los complementos de los cerrados en $U_j \cap X$ también son abiertos afínes de X. □

Nótese que de hecho vimos que los abiertos afínes principales conforman una base.

Definición 2.21: Una función racional $\langle U, f_U \rangle\colon X \to Y$ se dice ***dominante*** si $f_U[U]$ es denso en Y.

Proposición 2.22: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo entre variedades.

1. Si f es dominante, entonces $h_f\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ es inyectivo.
2. Si Y es una variedad afín y $h_f\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ es inyectivo, entonces f es dominante.

Demostración: Basta notar que una función regular $g\colon Y \to k$ es tal que $f \circ g = 0$ syss g se anula en $f[U]$ el cual es denso, lo que equivale a que g se anule en todo Y. □

Las funciones racionales permiten extender el resultado anterior:

Teorema 2.23: Sean X, Y variedades sobre k.

1. Si $f\colon X \to Y$ es una aplicación racional dominante, entonces $h_f\colon k(Y) \to k(X)$ es un k-monomorfismo de cuerpos.
2. Dado un k-monomorfismo $g\colon k(Y) \to k(X)$, entonces existe una aplicación racional dominante $f\colon X \to Y$ tal que $g = h_f$.

Más aún, ésta construcción determina un isomorfismo contravariante entre la categoría de variedades sobre k con aplicaciones racionales dominantes y la categoría de extensiones de cuerpo de k de tipo finito.

Demostración: En primer lugar, nótese que podemos elegir un abierto afín $Y' \subseteq Y$ y podemos elegir otro abierto afín $X' \subseteq f^{-1}[Y'] \subseteq X$ de modo que $k(X') = k(X)$ y $k(Y') = k(Y)$ y $h_{f|_{X'}} = h_f$. Por lo que, sin perdida de generalidad supondremos que X, Y son variedades afínes.

1. Trabajando en abiertos, podemos reducirnos a un abierto afín de X que no contenga singularidades de f de modo que $f\colon X \to Y$ sea un morfismo y aplicar la proposición anterior para probar que h_f sea un k-monomorfismo.
2. Sea $g\colon k(Y) \to k(X)$ un k-monomorfismo, por lo que podemos considerar que $k(Y) \subseteq k(X)$. Sea $k[Y] = k[y_1, \dots, y_n] \subseteq k(X)$ donde cada $y_j = \alpha_j/\beta_j$ con $\alpha_j, \beta_j \in k[X]$. Luego definiendo $\beta := \beta_1 \cdots \beta_n$ se tiene que $g\big[k[Y]\big] \subseteq k[X][1/\beta] = k[X_\beta]$ y tenemos que $g\colon k[Y] \to k[X_\beta]$ es un k-monomorfismo que, por la equivalencia del teorema 1.83, y la proposición anterior, nos dan que $g = h_f$ con $f\colon X_\beta \to Y$ morfismo dominante, luego $\langle X_\beta, f\rangle\colon X \to Y$ es racional dominante. □

Corolario 2.23.1: Para un par de variedades X, Y son equivalentes:

1. X, Y son birracionales.
2. Existen abiertos no vacíos $U \subseteq X, V \subseteq Y$ tales que U, V son variedades isomorfas.
3. $k(X), k(Y)$ son k-álgebras isomorfas.

2.2 Aplicaciones finitas y variedades normales

En la sección anterior vimos que las aplicaciones dominantes inducen k-monomorfismos entre dominios íntegros, vale decir, inducen extensiones de anillos.

Ésto da lugar a la siguiente definición:

Definición 2.24: Un morfismo $f\colon X \to Y$ entre variedades afínes se dice una aplicación:

Cuasifinita Si todo $P \in Y$ tiene finitas preimágenes.

Finita Si f es dominante y la extensión de anillos $k[X]/k[Y]$ es entera (i.e., es finitamente generada como módulo).

Proposición 2.25: La composición de aplicaciones cuasifinitas (resp. finitas) es cuasifinita (resp. finita). La identidad es cuasifinita y finita.

Proposición 2.26: Toda aplicación finita entre variedades afínes es suprayectiva y cuasifinita.

Demostración: Sea $\phi\colon X \to Y$ una función finita. Veamos que es cuasifinita: Sea $k[X] = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ y sea $P \in Y$, basta ver que cada α_i toma finitos valores sobre $\phi^{-1}[\{P\}]$. Por definición de entero, se cumple que

$$\alpha_i^k + c_{k-1}\alpha_i^{k-1} + \cdots + c_0 = 0,$$

para algunos $c_j \in k[Y]$. Luego evaluamos en algún $Q \in \phi^{-1}[\{P\}]$ y notamos que aquí $c_j(Q) := c_j(\phi(Q)) = c_j(P)$, luego:

$$\alpha_i^k(Q) + c_{k-1}(P)\alpha_i^{k-1}(Q) + \cdots + c_0(P) = 0.$$

Así que los $\alpha_i(Q)$ son raíces de un polinomio que sólo depende de P, así que tiene sólo finitas posibilidades.

Veamos que es suprayectiva: Sea $\mathfrak{m}_P$ el ideal de funciones que se anulan en $P \in Y$. Como ϕ es morfismo entre variedades afínes, entonces es polinómica y sean $f_1, \dots, f_m \in k[X]$ tales que $\phi(P) = (f_1(P), \dots, f_m(P))$. Si, en coordenadas, $P = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ entonces $\phi^{-1}[\{P\}]$ coincide con los puntos dados por las ecuaciones $f_i(\boldsymbol{x}) - \beta_i = 0$. Si, por contradicción, $\phi^{-1}[\{P\}] = \varnothing$, entonces tendríamos que

$$k[\boldsymbol{x}] = (f_1(\boldsymbol{x}) - \beta_1, \dots, f_m(\boldsymbol{x}) - \beta_m).$$

Cocientando a ambos lados por $\mathbf{I}(X)$ tenemos que

$$k[X] = (\bar{\phi}(\alpha_1) - \beta_1, \dots, \bar{\phi}(\alpha_m) - \beta_m),$$

si consideramos a α_i como $\bar{\phi}(\alpha_i)$, dado que trabajamos bajo un k-monomorfismo, entonces la igualdad anterior se escribe como que $\mathfrak{m}_P \cdot k[X] = k[X]$, lo cuál es imposible por el lema de Nakayama (cf. [**39,** Teo. 6.44]). $\square$

Corolario 2.26.1: Toda aplicación finita entre variedades afines es una función cerrada.[2]

Demostración: Basta verificarlo sobre cerrados irreducibles. Sea $\phi\colon X \to Y$ una aplicación finita y sea $Z \subseteq X$ un cerrado irreducible no vacío. Sea $W := \overline{f[Z]}$ el cual es irreducible (¿por qué?), de modo que $\phi|_Z\colon Z \to W$ es una aplicación dominante. Sabemos que $k[X]/k[Y]$ sea una extensión entera de anillos y como $h_\phi\colon k[Y] \to k[X]$ manda elementos de $\mathbf{I}(W)$ en elementos de $\mathbf{I}(X)$, entonces notamos que $k[Z]/k[W]$ también es una extensión entera de anillos y, por lo tanto, $\phi|_Z$ es una aplicación finita y finalmente es suprayectiva por la proposición anterior. □

Teorema 2.27 (de normalización de Noether): Sea A una k-álgebra conmutativa de tipo finito. Entonces existen $x_1, \dots, x_n \in A$ elementos k-algebraicamente independientes tales que $A/k[\boldsymbol{x}]$ es una extensión entera (cf. [**39,** Teo. 10.98]).

Teorema 2.28: Sea X un conjunto algebraico afín. Existe una aplicación finita $\phi\colon X \to \mathbb{A}^n$ para algún n.

Demostración: Como $k[X]/k$ es una k-álgebra conmutativa de tipo finito, existen $x_1, \dots, x_n \in k[X]$ en las condiciones anteriores. Ahora bien, cada x_i es un polinomio, de modo que podemos definir

$$\begin{aligned} \phi\colon X &\longrightarrow \mathbb{A}^n \\ P &\longmapsto (x_1(P_1), \dots, x_n(P_n)), \end{aligned}$$

luego $h_\phi\colon k[\mathbb{A}^n] = k[t_1, \dots, t_n] \to k[X]$ es el k-homomorfismo dado por $t_i \mapsto x_i$, por lo que ϕ comprueba ser una aplicación finita. □

Lema 2.29: Sea B/A una extensión de dominios íntegros y suponga que existen $f_1, \dots, f_n \in A$ tales que:

(i) El ideal $(f_1, \dots, f_n) = A$.

(ii) Cada localización B_{f_i} es una A_{f_i}-álgebra de tipo finito (resp. álgebra entera).

Entonces B es una A-álgebra de tipo finito (resp. álgebra entera).

[2] Que la imagen de todo cerrado es cerrada (cf. [**42,** Def. 2.53]).

Demostración: Elijamos un m suficientemente grande de modo que cada $B_{f_i} = A_{f_i}[\omega_{i1}, \dots, \omega_{im}]$. Limpiando un denominador f_i en cada ω_{ij} podemos suponer que cada $\omega_{ij} \in B$. Así pues, sea $C := A[\{\omega_{ij}\}_{ij}]$ el cual es una subálgebra de tipo finito de B; veremos que $B = C$.

Sea $\beta \in B$. Como $\beta \in B_{f_i}$, existen $g_i(x_1, \dots, x_m) \in A_{f_i}[\boldsymbol{x}]$ tales que $\beta = g_i(\omega_{i1}, \dots, \omega_{im})$. Tras limpiar denominadores, sea N suficientemente grande tal que $f_i^N g_i \in A[\boldsymbol{x}]$ para cada i. Luego $f_i^N \beta \in C$ para cada i.

Ahora bien, $\operatorname{Rad}(f_1^N, \dots, f_n^N) = (f_1, \dots, f_n) = (1)$, luego $(f_1^N, \dots, f_n^N) = (1)$ (cf. [**39,** Prop. 6.32]), por lo que existen $h_i \in A[\boldsymbol{x}]$ tales que $\sum_{i=1}^n f_i^N h_i = 1$ y finalmente:

$$\beta = \left(\sum_{i=1}^n f_i^N h_i \right) \beta = \sum_{i=1}^n (f_i^N \beta) h_i \in C.$$

Para ver que B/A es entera si cada B_{f_i}/A_{f_i} lo es, basta cambiar los polinomios por formas lineales apropiadamente. □

Proposición 2.30: Sea $\phi\colon X \to Y$ un morfismo entre variedades afínes. Si todo punto $P \in Y$ tiene un entorno afín U tal que $U' := \phi^{-1}[U]$ es afín y $\phi|_{U'}\colon U' \to U$ es finita, entonces ϕ es finita.

Demostración: Sea $P \in Y$. Como los abiertos principales forman una base, existe $\alpha \in k[Y]$ tal que $D(\alpha) =: Y_\alpha \subseteq U$, donde U satisface el enunciado. Sea $X_\alpha := \phi^{-1}[Y_\alpha] \subseteq U'$ la cual es una subvariedad afín de X y tal que la restricción $\phi \restriction X_\alpha \to Y_\alpha$ es finita. Definiendo $\alpha' := \alpha|_U$ se cumple que:

$$k[Y_\alpha] = k[U_{\alpha'}] = k[U][1/\alpha'], \qquad k[X_\alpha] = k[U'_{h_\phi(\alpha')}] = k[U'][1/\alpha']$$

De modo que vemos que $k[X_\alpha]/k[Y_\alpha]$ es una extensión entera de anillos. Más aún, eligiendo α's para cada punto, tenemos un cubrimiento $Y = \bigcup_\alpha D_Y(\alpha)$, luego por compacidad admite un subcubrimiento finito $Y = \bigcup_{i=1}^n D_Y(\alpha_i)$, de modo que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = k[Y]$. Finalmente concluimos aplicando el lema. □

Definición 2.31: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo entre variedades. Se dice que es una aplicación:

Afín Si todo $P \in Y$ posee un entorno afín $P \in U \subseteq Y$ tal que $f^{-1}[U]$ es un abierto afín de X.

Finita Si todo $P \in Y$ posee un entorno afín $P \in U \subseteq Y$ tal que $U' := f^{-1}[U]$ es un abierto afín de X y la restricción $f|_{U'}\colon U' \to U$ es una aplicación finita entre variedades afínes.

Con la proposición anterior, vimos que ésta definición extiende a la definición anterior. Nótese que, al contrario de antes, ahora *no* exigimos que un morfismo sea dominante, aunque si el dominio y codominio son afínes lo será.

Teorema 2.32: Sea $\phi\colon X \to Y$ un morfismo entre variedades.

1. Si ϕ es afín y $U \subseteq Y$ es un abierto afín, entonces $\phi^{-1}[U] \subseteq X$ también es un abierto afín.
2. Si ϕ es finita y $U \subseteq Y$ es un abierto afín, entonces definiendo $U' := \phi^{-1}[U]$ se cumple que la restricción $\phi|_{U'}\colon U' \to U$ es una aplicación finita.

Demostración: Sea $Z := \overline{\phi[X]}$, la clausura de Zariski. Nótese que si $U \subseteq Y$ es afín, entonces $Z \cap U$ también. Además, la inclusión $Z \cap U \to U$ es una aplicación finita, por lo que no perdemos generalidad si suponemos que ϕ es dominante.

1. Si ϕ es afín y dominante, entonces definiendo $U' := \phi^{-1}[U]$ claramente se cumple que $\phi|_{U'}\colon U' \to U$ es afín entre variedades cuasiproyectivas. Sea $P \in U$, luego posee un entorno afín $P \in W \subseteq U$ tal que $\phi^{-1}[W]$ es afín. Como los abiertos principales forman una base, existe $\alpha \in k[U]$ tal que $P \in D_U(\alpha) \subseteq W$ y claramente $D_W(\alpha) = D_U(\alpha)$ con lo que $\phi^{-1}[U_\alpha] = \phi^{-1}[W_\alpha] = \phi^{-1}[W]_{h_\phi(\alpha)}$, el cual es afín.

   Como U es una variedad, entonces es compacta por lo que $U = \bigcup_{i=1}^n D_U(\alpha_i)$, donde cada $V_i := \phi^{-1}[U_{\alpha_i}]$ afín. Tenemos que $U' = \bigcup_{i=1}^n V_i$.

   Sea $A := k[U]$ y $B := k[U']$, vemos que $h_\phi\colon A \to B$ es un k-monomorfismo (porque $\phi|_{U'}\colon U' \to U$ es dominante). Definiendo $B_i := k[V_i]$ tenemos que h_ϕ induce unos k-monomorfismos $h_\phi\colon A_{\alpha_i} \to B_i$ de modo que B_i/A_{α_i} es una extensión entera.

Completar demostración [**2,** pág. 130].

□

Teorema 2.33: Sea $\phi\colon X \to Y$ una aplicación finita entre variedades. Entonces ϕ es una aplicación cerrada y además si es dominante, entonces es suprayectiva.

Pista: Se reduce a tomar un cubrimiento finito por abiertos afínes de Y y aplicar el teorema anterior. □

Definición 2.34: Sea X una variedad cuasiproyectiva. Un punto $P \in X$ se dice ***normal*** si $\mathcal{O}_{P,X}$ es un dominio íntegramente cerrado (cf. [**39,** Def. 10.71]). Una variedad se dice ***normal*** si todos sus puntos son normales.

Proposición 2.35: Sea X una variedad cuasiproyectiva normal. Entonces $\mathcal{O}(X)$ es íntegramente cerrado en $k(X)$.

DEMOSTRACIÓN: Si $f \in k(X)$ es entero sobre $\mathcal{O}(X)$, entonces es entero sobre todo $\mathcal{O}_{P,X}$ (pues $\mathcal{O}(X) \subseteq \mathcal{O}_{P,X}$). Luego, como $\mathcal{O}_{P,X}$ es íntegramente cerrado, vemos que

$$f \in \bigcap_{P \in X} \mathcal{O}_{P,X} = \mathcal{O}(X). \qquad \square$$

Teorema 2.36: Sea X una variedad cuasiproyectiva y $\phi\colon k(X) \to L$ un k-monomorfismo de cuerpos, de modo que $L/k(X)$ es una extensión finita. Entonces existe una única variedad cuasiproyectiva Y que es normal con $k(Y) = L$ y existe una aplicación finita dominante $\pi\colon Y \to X$ tal que $h_\pi = \phi$. Más aún, si X es una variedad afín (resp. proyectiva), entonces Y también.

DEMOSTRACIÓN:

(I) Unicidad: Sean $\pi_1\colon Y_1 \to X$ y $\pi_2\colon Y_2 \to X$ dos variedades como en el enunciado. Sea $P \in X$, luego posee un entorno afín $P \in U \subseteq X$ tal que $V_i := \pi_i^{-1}[U]$ es afín. Así, π_i induce un k-monomorfismo $h_{\pi_i}\colon k[U] \to k[V_i]$ tal que la extensión $k[V_i]/k[U]$ es entera y $k[V_i]$ es íntegramente cerrado en L, ergo, $k[V_i]$ es la clausura íntegra de $k[U]$ en L con lo que $k[V_1] = k[V_2]$. Eligiendo un cubrimiento finito por abiertos afínes de X se obtiene que $Y_1 \cong Y_2$.

(II) Existencia: Sea X una variedad afín, y sea R la clausura íntegra de $k[X]$ en L. Como $L/k(X)$ es una extensión finita, entonces $R/k[X]$ es una extensión entera y R es un dominio íntegro, luego $R = k[Y]$ para alguna variedad afín Y.

$\square$

Definición 2.37: Dada una extensión finita $L/k(X)$, a la variedad Y dada por el teorema anterior se le dice la ***normalización*** de X en L. Si $L = k(X)$, entonces Y se dice la ***normalización*** de X (a secas).

2.3 Dimensión

Definición 2.38: Dado un espacio topológico X no vacío, se define su ***dimensión de Noether***[3] $d := \dim X \geq 0$ como el natural máximo tal que existe una cadena

$$\varnothing \neq X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_d$$

de cerrados irreducibles en X.

Ejemplo. Se cumple que $\dim\{P\} = 0$ y $\dim \mathbb{A}^1 = 1$. En efecto, ya que sabemos que todo cerrado irreducible de $\mathbb{A}^1$ es una variedad, y las variedades sólo son los puntos y $\mathbb{A}^1$ mismo.

En primer lugar, notemos que podemos reducir el cálculo de la dimensión exclusivamente para variedades:

Proposición 2.39: Sea X un espacio noetheriano de componentes irreducibles $\{V_i\}_{i\in I}$, entonces

$$\dim X = \sup\{\dim(V_i) : i \in I\}.$$

En particular, podemos ahora entender que un espacio es noetheriano syss cada componente irreducible tiene dimensión de Noether finita, pero aún así puede tener infinitas componentes irreducibles de dimensiones arbitrariamente grandes.

Ejercicio 2.40: Esboce un ejemplo de un espacio topológico noetheriano con dimensión de Noether infinita.

Así definida, es casi imposible calcular la dimensiónd de cualquier variedad exceptuando los casos triviales. Por ejemplo, es fácil acotar que $\dim \mathbb{A}^2 \geq 2$, pero no es tan sencillo establecer igualdad.

Proposición 2.41: Si $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es un conjunto algebraico afín, entonces

$$\dim(X) = k.\dim(k[X]).$$

Demostración: Nótese que toda cadena de cerrados irreducibles $Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_n \subseteq X$ se transforma, mediante $\mathbf{I}$, en una cadena de ideales

[3] Matsumura **[27]** emplea el término *dimensión combinatórica*.

primos

$$\mathbf{I}(Z_0) \supset \mathbf{I}(Z_1) \supset \cdots \supset \mathbf{I}(Z_n),$$

de modo que la mayor longitud de cadenas de ideales primos coincide con la mayor longitud de cadenas de cerrados. □

Ahora podemos emplear herramientas de álgebra conmutativa para calcular la dimensión:

Teorema 2.42: Sea A un dominio íntegro que es una k-álgebra de tipo finito. Entonces:

1. $k.\dim A = \operatorname{trdeg}_k\big(\operatorname{Frac}(A)\big)$ (cf. [**39,** Teo. 10.94]).
2. Toda cadena estricta maximal de ideales primos en A tiene la misma longitud, $k.\dim A$.
3. Para todo ideal primo $\mathfrak{p} \lhd A$ se cumple que

$$k.\dim A = \operatorname{alt}\mathfrak{p} + k.\dim(A/\mathfrak{p})$$

(cf. [**39,** Teo. 10.95]).

Corolario 2.42.1: $\dim(\mathbb{A}^n) = n$.

Demostración: Basta notar que $k[\mathbb{A}^n] = k[x_1, \dots, x_n]$ el cuál tiene grado de trascendencia n sobre k. □

Definición 2.43: Sea X un espacio noetheriano e $Y \subseteq X$ un cerrado irreducible. Se define la ***codimensión*** de Y en X, denotada $\operatorname{codim}_X Y \geq 0$, como el natural máximo m tal que existe una cadena

$$Y \subseteq Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_m$$

de cerrados irreducibles en X.

Corolario 2.43.1: Toda cadena maximal estricta de cerrados irreducibles en una variedad cuasiafín tienen la misma longitud. En consecuencia, dadas $Y \subseteq X$ variedades afínes, se cumple

$$\dim Y + \operatorname{codim}_X Y = \dim X.$$

Siguiendo la demostración de la proposición 2.41 vemos que:

Proposición 2.44: Dada una subvariedad $Y \subseteq X$ se cumple que

$$\operatorname{codim}_X(Y) = \operatorname{alt} \mathbf{I}(Y).$$

Dos teoremas útiles del álgebra conmutativa (cf. [**39,** Teo. 13.74-13.75]):

Teorema 2.45 (de los ideales principales de Krull): Sea A un dominio noetheriano y sea $a \in A$ tal que no es ni divisor de cero, ni inversible. Entonces todo ideal primo minimal $\mathfrak{p}$ que contiene a a tiene $\operatorname{alt} \mathfrak{p} = 1$.

Teorema 2.46: Sea A un dominio íntegro noetheriano. Entonces, A es un DFU syss todo ideal primo de altura 1 es principal.

Veamos su traducción geométrica:

Teorema 2.47: Sea X una variedad afín.

1. Dado $f \in k[X]$ irreducible, se cumple que $\mathbf{V}(f)$ tiene codimensión 1.
2. Recíprocamente, si $Z \subseteq \mathbb{A}^n$ tiene codimensión 1, entonces existe $f \in k[\mathbb{A}^n]$ irreducible tal que $Z = \mathbf{V}(f)$.

Teorema 2.48: Toda variedad proyectiva X es birracional a una hipersuperficie $\mathbf{V}(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$, donde $n = \dim(X)$.

Demostración: Como k es algebraicamente cerrado, entonces es perfecto (cf. [**39,** Def. 4.31]) y toda extensión es separable (cf. [**39,** Teo. 13.23]). $k(X)/k$ es una extensión de tipo finito y separable, luego es separablemente generada (cf. [**39,** Teo. 13.22]) y, por lo tanto, existe $x_1, \dots, x_n \in k(X)$ base de trascendencia, de modo que $k(X)$ es una extensión algebraica separable de $L := k(x_1, \dots, x_n)$. Por el teorema del elemento primitivo (cf. [**39,** Teo. 4.45]), $k(X)/L$ es una extensión simple, de modo que $k(X) = L[t]/(f(t))$, donde $f(t) \in L[t]$ es irreducible. Limpiando denominadores, se obtiene un $g := a \cdot f(t)k[x_1, \dots, x_n, t]$ primitivo irreducible. Luego $k(X)$ es isomorfo a $k[\boldsymbol{x}, t]/(g) = k(\mathbf{V}(g))$. Nótese que $n = \operatorname{trdeg}_k k(X) = k.\dim k[X]$. $\square$

2.4 Suavidad y tangencia

Ahora queremos formalizar la idea de *tangencia* entre variedades.

Sea $X \subseteq \mathbb{A}^m$ una variedad cuasiafín con $\mathbf{I}(X) = (F_1, \dots, F_n)$. Consideremos un punto $P \in X$ y una recta $L := \{P + t \cdot \boldsymbol{a} : t \in k\}$ donde $\boldsymbol{a} \in k^N_{\neq \vec{0}}$. Luego, el espacio

$$X \cap L = \{P + t\boldsymbol{a} : t \in k, F_1(P + t\boldsymbol{a}) = \cdots = F_n(P + t\boldsymbol{a}) = 0\}.$$

Podemos considerar el isomorfismo $\phi(P + t\boldsymbol{a}) := t$ y definir $f_i(t) := F_i(P + t\boldsymbol{a}) \in k[t]$ para notar que $X \cap L = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_n)$. Si k es algebraicamente cerrado, entonces cada $f_i(t) = c_i \prod_{j=1}^{M} (t - \alpha_j)^{n_{i,j}}$ donde elejimos M suficientemente grande, $c_i \in k_{\neq 0}$, los α_j's distintos y $n_{i,j} \in \mathbb{N}$. Ahora, podemos definir

$$f(t) := \operatorname{mcd}(f_1, \dots, f_n) = \prod_{j=1}^{M} (t - \alpha_j)^{\min_i n_{i,j}} \in k[t].$$

Así, nótese que un punto (visto salvo la identificación) $t \in \phi[X \cap L]$ syss $f(t) = 0$ y claramente $0 \in \phi[X \cap L]$.

Definición 2.49: La ***multiplicidad de intersección***, denotado $(X.L)_P$, entre la variedad X y la recta L en el punto P es la multiplicidad del 0 como raíz de $f(t)$. Claramente $(X.L)_P \geq 1$. Se dice que la recta L es ***tangente*** a X en P si $(X.L)_P \geq 2$.

Nótese que, independientemente de si $P \in X$ o no, el polinomio $f(t)$ está bien definido y luego $(X.L)_P$ también. Bajo ésta definición $P \in X \cap L$ syss $(X.L)_P \geq 1$.

¿Qué condiciones determinan que una recta sea tangente a una variedad en un punto? Bueno, si queremos que $(X.L)_P \geq 2$ entonces exigimos que $t^2 \mid f(t)$, es decir, $t^2 \mid f_i(t)$ para cada i. Nótese que $F_i(P + t\boldsymbol{a}) = L_i(t\boldsymbol{a}) + G_i(t\boldsymbol{a})$, donde L_i es la parte homogénea de grado 1 y G_i es tal que cada monomio tiene grado ≥ 2; luego queremos que $L_i(\boldsymbol{a}) = 0$. Aquí entran en juego las derivadas, puesto que $L_i(\boldsymbol{e}_j)$, donde $\boldsymbol{e}_j$ es el vector de la base canónica, corresponde a $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(P)$, luego

$$L_i(\boldsymbol{a}) = \sum_{j=1}^{m} a_j L_i(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{j=1}^{m} a_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(P) = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(P)\right]_{1,j} \cdot \boldsymbol{a},$$

donde la última expresión es el producto punto de $\boldsymbol{a}$ y una matriz. Recorriendo todos los índices i, podemos ver que la condición deseada es

$$M := \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(P)\right]_{ij} \in \operatorname{Mat}_{n \times m}(k), \qquad M \cdot \boldsymbol{a} = \vec{0}.$$

Como M es una matriz, podemos recordar que los ceros de ella son el complemento ortogonal del espacio generado por la matriz. La dimensión del espacio generado por M es $r := \operatorname{rang} M$, luego la dimensión de los ceros es $m - r$.

Definición 2.50: Sean $F_1, \dots, F_n \in k[x_1, \dots, x_m]$ polinomios. Su ***jacobiano*** es la matriz:

$$J(F_1, \dots, F_n) := \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]_{ij} \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(k)[\boldsymbol{x}].$$

Sea $X \subseteq \mathbb{A}^m$ una variedad afín dado por $\mathbf{I}(X) = (F_1, \dots, F_n)$. Se le llama el ***espacio tangente*** a X por el punto P, denotado $T_P X$, al conjunto de todos los $\boldsymbol{a}$, donde $\boldsymbol{a}$ es tal que la recta $L = P + k \cdot \boldsymbol{a}$ es tangente a X por P.

Decimos que el punto $P \in X$ es ***suave*** en la variedad X si $\dim T_P X = \dim X$, de lo contrario, decimos que el punto es ***singular***. Se dice que la variedad es ***suave*** (a secas) si todos sus puntos son suaves.

Por la discusión anterior, vemos que el espacio tangente $T_P X$ viene dado por los ceros de $J(F_1, \dots, F_n)(P)$, de modo que:

Proposición 2.51: Un punto $P \in X$ en una variedad afín $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es suave syss $\operatorname{rang} J(F_1, \dots, F_n)(P) = n - \dim X$.

Ejemplo 2.52: Considere la variedad $V := \mathbf{V}(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}^2$ conocida como la ***cúspide***. El jacobiano de V es, en todo punto:

$$Jf(x, y) = \begin{bmatrix} -3x^2 \\ 2y \end{bmatrix},$$

el cual es siempre nulo en el punto $(0, 0)$, que sí está en V; de modo que la cúspide nunca es suave. De hecho, para cualquier k (independiente de su característica) uno puede ver que el único punto singular de la cúspide es el $(0, 0)$ (¡demuéstrelo!). ⌟

El lector puede sentirse muy a gusto con ésta definición que, en sí, no es más que un simple cálculo, pero ésta definición carecería de propósito si no resultase ser un invariante: vale decir, si no pudiéramos verificar que es independiente de los generadores elegidos para mi variedad, o que es independiente de dónde yo encaje mi variedad.

Para ello, necesitamos caracterizar ésta propiedad aparentemente geométrica, en términos de una propiedad algebraica. Recordamos resultados de la sección [**39,** §13.5]:

Proposición 2.53: Sea $(A, \mathfrak{m}, k)$ un dominio local noetheriano de dimensión d, entonces $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \geq d$ (cf. [**39,** Cor. 13.72]).

Definición 2.54: Sea $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$, entonces definimos:

$$\operatorname{gr}_{\mathfrak{a}}(A) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1},$$

el cual es una A-álgebra graduada.

Lema 2.55: Sea $(A, \mathfrak{m}, k)$ un dominio local noetheriano de dimensión d. Son equivalentes:

1. $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}}(A) \cong k[t_1, \dots, t_d]$, la k-álgebra polinomial.
2. $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = d$.
3. $\mathfrak{m}$ puede generarse por d elementos.

(Cf. [**39,** Teo. 13.79]).

Definición 2.56: Un dominio local noetheriano se dice un ***anillo regular*** si satisface cualquiera de las condiciones del lema anterior.

Éstas definiciones son importantes por lo siguiente:

Teorema 2.57: Una variedad cuasiafín $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es suave en un punto $P \in X$ syss $\mathcal{O}_{P,X}$ es un anillo regular.

Demostración: Sea $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ y considere $\mathfrak{a} := \mathfrak{m}_{P,\mathbb{A}^n} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$. Luego considere la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \theta \colon k[\mathbb{A}^n] &\longrightarrow k^n \\ f &\longmapsto \nabla f(P) \end{aligned}$$

Es claro que como vectores $\boldsymbol{e}_i = \theta(x_i - a_i)$ y θ se anula en $\mathfrak{a}^2$, de modo que induce un isomorfismo $\bar{\theta} \colon \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \to k^n$.

Sea $\mathfrak{b} := \mathbf{I}(X) \lhd k[\mathbb{A}^n]$, sean $f_1, \dots, f_r$ generadores de $\mathfrak{b}$ y sea $J := J(f_1, \dots, f_r)(P)$ el jacobiano. Luego nótese que el rango de J es la dimensión del subespacio vectorial generado por los $\theta(f_i)$'s. Mediante el isomorfismo $\bar{\theta}$

vemos que coincide con la dimensión de $(\mathfrak{b}+\mathfrak{a}^2)/\mathfrak{a}^2$. Por otro lado, sabemos que $\mathcal{O}_{P,X} = k[X]_\mathfrak{a} = (k[\mathbb{A}^n]/\mathfrak{b})_\mathfrak{a}$. Luego si $\mathfrak{m} := \mathfrak{a}\cdot\mathcal{O}_{P,X}$, entonces vemos que

$$\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \cong \frac{\mathfrak{a}\mathcal{O}_{P,X}}{\mathfrak{a}^2\mathcal{O}_{P,X}} \cong \frac{\mathfrak{a}k[\mathbb{A}^n]/\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}^2k[\mathbb{A}^n]/\mathfrak{b}} \cong \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}}.$$

Luego, por fórmulas de dimensión, vemos que

$$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) + \operatorname{rang} J = \dim_k(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) = n.$$

Finalmente como $\dim X = k.\dim \mathcal{O}_{P,X} = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ concluimos la equivalencia. □

En la práctica sigue siendo infinitamente más viable verificar la condición del jacobiano, pero ahora sabemos que la suavidad es un invariante.

Ejemplo. Considere la cúspide $X = \mathbf{V}(y^2 - x^3)$ y la recta afín $Y = \mathbb{A}^1$. Nótese que la recta afín es una variedad suave, mientras que la cúspide tiene una singularidad, por lo que no pueden ser isomorfas.

Definición 2.58: Dada una variedad cuasiproyectiva $X \subseteq \mathbb{P}^n$, decimos que un punto $P \in X$ es ***suave*** si $\mathcal{O}_{P,X}$ es un anillo regular, de lo contrario decimos que es ***singular***. Para una variedad X denotamos por $\operatorname{Sing} X$ el conjunto de puntos singulares.

Nuevamente, el método de cálculo será mirar un punto $P \in X$ en una carta afín y aplicar el criterio del jacobiano.

Proposición 2.59: Para toda variedad X el subespacio $\operatorname{Sing} X$ es cerrado y propio.

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar cubrimos a X con cartas afínes (podemos emplear finitas) y notamos que en cada carta afín el criterio del jacobiano corresponde a exigir que el rango sea $< d$ lo que equivale a que todas las submatrices de tamaño $d \times d$ tengan determinante nulo, y el determinante es polinomial respecto a sus coordenadas; luego $\operatorname{Sing} X \cap U_j$ (donde U_j es carta afín) viene dado por ecuaciones. □

2.5 Extensiones de constantes

En el primer capítulo, luego del teorema de ceros de Hilbert comenzamos a trabajar la geometría algebraica sobre cuerpos algebraicamente cerrados.

Aún así, nada nos impide definir conjuntos algebraicos sobre $\mathbb{Q}$, por ejemplo, pero el diccionario entre álgebra y geometría se verá distorsionado.

Ejemplo. Considere $\mathbb{Q}$ y el conjunto algebraico $X := \mathbf{V}(x^2+y^2)$. Nótese que el polinomio $f(x,y) := x^2+y^2 \in \mathbb{Q}[x,y]$ es primo (¿por qué?), pero éste conjunto es extraño, puesto que $X(\mathbb{Q}) = \{(0,0)\}$ por lo cuál es irreducible, pero $\mathbf{I}(X(\mathbb{Q})) = (x,y)$. Más aún, nótese que $X\big(\mathbb{Q}(\mathrm{i})\big) = \mathbf{V}(x+\mathrm{i}y) \cup \mathbf{V}(x-\mathrm{i}y)$, en donde no es irreducible.

Teorema 2.60: Sean $K'/K/k$ extensiones de cuerpo con K, K' algebraicamente cerrados. Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un conjunto algebraico definido sobre k. Entonces, la clausura $\overline{X}$ de X en $\mathbb{A}^n(K')$ respecto a la topología de Zariski sobre k, coincide con la clausura respecto a la topología de Zariski sobre K o sobre K'. Más aún, las aplicaciones

$$\begin{aligned} X &\longmapsto \overline{X} \\ Y \cap \mathbb{A}^n(K) &\longleftarrow\!\shortmid\; Y \end{aligned}$$

son biyecciones, la una la inversa de la otra, entre los conjuntos algebraicos de $\mathbb{A}^n(K)$ y $\mathbb{A}^n(K')$ definidos sobre k.

Demostración: Sea $S \subseteq k[\boldsymbol{x}]$ tal que $X(K) = \mathbf{V}_K(S)$ y definamos $X(K') := \mathbf{V}_{K'}(S) \subseteq \mathbb{A}^n(K')$ el cual es, por definición, un conjunto algebraico (y cerrado). Queremos probar que $X(K') = \overline{X(K)}$: Para ello, sea $Y \subseteq \mathbb{A}^n(K')$ cerrado tal que $X(K) \subseteq Y$, veamos que $\mathbf{I}_{K'}(X(K')) \supseteq \mathbf{I}_{K'}(Y)$.

Sea $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ una K-base de K'. Luego, todo polinomio $f \in K'[\boldsymbol{x}]$ se expresa como $f = \sum_{i\in I} \alpha_i f_i$ donde $f_i \in K[\boldsymbol{x}]$ es nulo para todos salvo finitos i's. Si $f \in \mathbf{I}_{K'}(Y)$, entonces $f(P) = 0$ para todo $P \in Y$ y, en particular, $f(P) = 0$ para todo $P \in X(K)$. Luego tenemos que $f(P) = \sum_{i\in I} \alpha_i f_i(P) = 0$ y, como los α_i's son linealmente independientes, tenemos que $f_i(P) = 0$ para todo $P \in X(K)$, por lo que cada $f_i \in \mathbf{I}_K(X) = \operatorname{Rad}\mathfrak{a}$ donde $\mathfrak{a} := (S) \subseteq K[\boldsymbol{x}]$. Luego $f_i^m \in S$ para algún m y, por tanto, vemos que $f_i(P) = 0$ para todo $P \in X(K')$.

Finalmente, es trivial que dado $X(K') \subseteq A^n(K')$ se cumpla que $X(K) := X(K') \cap \mathbb{A}^n(K)$ sea un conjunto algebraico. $\square$

Por ello, enfatizamos ahora la notación $X(K)$ en donde adquiere otra dimensión, ya que es el mismo conjunto algebraico respecto a las ecuaciones, pero donde sus puntos yacen en otro cuerpo.

Definición 2.61: Sea X un espacio topológico. Un punto $\xi \in X$ se dice un ***punto genérico*** si $\overline{\{\xi\}} = X$.

Como los puntos son trivialmente irreducibles, vemos que un espacio con un punto genérico es irreducible.

Proposición 2.62: Sea K/k una extensión algebraicamente cerrada de cuerpos. Un punto ξ de un conjunto algebraico $X(K) \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ definido sobre k es genérico syss

$$\mathbf{I}_k(X) = \{f \in k[\boldsymbol{x}] : f(\xi) = 0\} = \mathbf{I}_k(\{\xi\}).$$

Demostración: Basta recordar que $\mathbf{V}_K(\mathbf{I}_K(Y)) = \overline{Y} \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ y aplicar el teorema anterior para justificar el restringir $\mathbf{I}_K$ a $\mathbf{I}_k$. $\square$

Ésto es importante por lo siguiente: Si $X(K) \in \mathbb{A}^n(K)$ tiene un punto genérico $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in X(K)$, entonces la aplicación $\phi\colon k[\boldsymbol{x}] \to k(\xi)$ que asigna $x_i \mapsto \xi_i$ tiene núcleo $\mathbf{I}_k(X)$, por la proposición anterior, y luego induce un k-monomorfismo $k[X] = \frac{k[\boldsymbol{x}]}{\mathbf{I}_k(X)} \to k(\xi)$ el cual a su vez se extiende a un k-isomorfismo $k(X) \to k(\xi)$.

Teorema 2.63: Sean $\Omega/K/k$ extensiones de cuerpo, donde Ω, K son algebraicamente cerrados y Ω tiene grado de trascendencia infinito sobre K. Entonces, toda variedad algebraica $X(\Omega) \subseteq \mathbb{A}^n(\Omega)$ definida sobre k tiene un punto genérico $\xi \in X(\Omega)$. Más aún, si K/k es una extensión regular (cf. [**39,** Def. 13.36]), entonces podemos elegir a ξ de modo que $k(\xi)$ y K son linealmente disjuntos sobre k.

Demostración: Sabemos que $k(X) = k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y salvo reordenamiento podemos suponer que $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ es una base de trascendencia. Supongamos que K/k es regular, de lo contrario escogemos $K := k$. Elijamos un subconjunto $T := \{t_1, \dots, t_d\} \subseteq \Omega$ de elementos K-algebraicamente independientes. Luego K y $k(T)$ son linealmente disjuntos sobre k, y como K/k es regular, entonces $K(T)/k(T)$ es regular (cf. [**39,** Teo. 13.37]), por lo que $K(T)$ y $k(T)^{\text{alg}}$ son linealmente disjuntos sobre $k(T)$ y tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & \Omega \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & K(T) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & k(T)^{\text{alg}} \arrow[dl, dash] \\
K \arrow[dr, dash] & & k(T) \arrow[dl, dash] & \\
 & k & &
\end{tikzcd}$$

por lo que $K, k(T)^{\text{alg}}$ son linealmente disjuntos sobre k.

Existe un único k-isomorfismo $k(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \cong k(t_1, \dots, t_d)$ tal que $\alpha_i \mapsto t_i$. Como $k(V)/k(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ es una extensión algebraica, entonces existe un k-monomorfismo $\phi \colon k(X) \to k(T)^{\text{alg}}$. Sea $\xi_i := \phi(\alpha_i)$ y sea $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{A}^n(\Omega)$. Así, ϕ se restringe a un k-isomorfismo $k(V) \cong k(\xi)$ y como $k(\xi) \subseteq k(T)^{\text{alg}}$, tenemos que es linealmente disjunto de K sobre k.

Finalmente, para todo $f \in k[\boldsymbol{x}]$ se tiene que $f(\xi) = 0$ syss $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ syss $[f(\boldsymbol{x})] = 0$ en $k[X]$ syss $f \in \mathbf{I}_k(X)$, con lo que se ve que $\xi \in X$ es un punto genérico. $\square$

Corolario 2.63.1: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ una variedad afín y K/k una extensión regular. Entonces K y $k(X)$ son linealmente disjuntos sobre k.

Parte II.

El lenguage de Esquemas

En esta parte introducimos el lenguaje de esquemas y las herramientas fundamentales para su estudio.

La definición de *esquema* es necesaria por varias razones: en primer lugar, permite hacer geometría algebraica sobre cuerpos no algebraicamente cerrados (pues a diferenia de la geometría algebraica clásica, no se construye sobre el teorema de ceros de Hilbert), pero mejor aún permite incluso definir objetos sobre anillos y, en particular, da una definición suficientemente flexible como para tener aplicaciones aritméticas. En segundo lugar, la definición permite que la categoría de esquemas contenga a la categoría de anillos (unitarios conmutativos), de modo que tiene interés para el álgebra conmutativa y, de hecho, permite un diálogo entre ambas disciplinas (a diferencia del «monólogo» que las teorías predecesoras tenían). En tercer lugar, los esquemas están llenos de puntos genéricos, lo que permite que topológicamente haya una correspondencia entre puntos y subvariedades cerradas; esta es una ventaja que Grothendieck observó de la teoría de Weil. En cuarto lugar, los esquemas representan un objeto unificado que, como ejemplos, incluyen a las variedades afines, proyectivas y algebraicas; más aún, su definición es altamente funtorial, de modo que es fácil definir ciertos espacios de moduli, o construcciones como las explosiones, sin tener que pasar primero por cálculos concretos. En último lugar, los esquemas permiten apropiadamente una noción de extensión y restricción de escalares, y existen teorías adecuadas para medir qué cosas se preservan en ascenso y descenso.

La desventaja es que el reino esquemático es tan vasto que resulta como una jungla amazónica para el lector, y este está obligado a pasar por cientos de páginas para ubicarse apropiadamente y reencontrar los objetos que le son familiares. Peor aún, es quizá digno de mención el que resulta difícil probar que, de hecho, el mundo esquemático funciona de manera compatible a los casos base para los geómetras de siglo XIX, es decir, que coinciden con la geometría analítica compleja. Así, esta sección resulta extensa, pero finalmente otorga todas las herramientas fundamentales para el resto del libro.

Destacamos ciertos resultados importantes:

1. Los esquemas extienden a la categoría de anillos conmutativos (cfr., teorema 3.63).

De hecho podemos ser un poco menos ambiguos. Uno construirá primero la noción de *esquema afín* asociado a un anillo A, llamado su *espectro*, el cual posee toda la información original, y luego uno define un esquema como un objeto que puede cubrirse de manera adecuada por esquemas afines. Para el lector familiarizado con topología diferencial: los esquemas afines son a los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$ lo que los esquemas son a las variedades diferenciales.

En particular, en la primera parte vimos que una variedad algebraica afín viene completamente determinada por su anillo de coordenadas A, así que tomando $\operatorname{Spec} A$ como su sustituto uno obtiene que:

2. Los esquemas extienden a las variedades clásicas (cfr., teorema 3.72).

No obstante, las extienden estrictamente, incluso si hablamos de esquemas algebraicos sobre un cuerpo fijo. Uno de los fenómenos introducidos por éste lenguaje es el de la (no) reducción.

Dado un esquema X definido sobre un cuerpo k y dada una extensión L/k, podemos asociarle un esquema X_L (llamado «cambio de base») definido sobre L. Están bien estudiadas las propiedades que X_L preserva de X, o que propiedades de X_L son reflejadas en X.

3. Un esquema separado X es tal que los morfismos $X \dashrightarrow Y$ admiten extensiones únicas.

4. Un morfismo proyectivo es propio.

5. La categoría de $\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}$-módulos cuasicoherentes sobre un esquema afín $\operatorname{Spec} A$ es equivalente a la categoría de A-módulos.

6. Un esquema normal X es regular en codimensión 1 y, por tanto, toda aplicación racional $f: X \dashrightarrow Y$ puede extenderse de modo que $X \setminus \operatorname{Dom} f$ tenga codimensión 2.

7. La regularidad se puede verificar mediante el rango de una matriz llamada el jacobiano.

3

Esquemas

3.1 El espectro de un anillo

Definición 3.1: Sea A un anillo.[a] Llamamos su ***espectro primo*** (resp. ***espectro maximal***), denotado $\operatorname{Spec} A$ (resp. $\operatorname{mSpec} A$), al conjunto de sus ideales primos (resp. ideales maximales).

[a] En éste libro todos los anillos se suponen conmutativos y unitarios.

En la geometría algebraica moderna se piensa en el espectro no sólo como una colección de ideales, sino también como *puntos* de un *espacio* a los cuales podemos someter a ecuaciones. De ese modo, dado un ideal primo $\mathfrak{p} \lhd A$, denotaremos por $x_\mathfrak{p}$ al mismo ideal pero pensado como un punto, o viceversa, dado un punto $x \in \operatorname{Spec} A$ denotaremos por $\mathfrak{p}_x$ al mismo punto pensado como un ideal.

Bajo ésta perspectiva, un elemento $f \in A$ es una función sobre $\operatorname{Spec} A$, donde a todo punto $x \in \operatorname{Spec} A$ le asocia $f(x) := f \bmod \mathfrak{p}_x \in A/\mathfrak{p}_x$. Entonces, podemos preguntarnos ¿cuándo $f(x)$ se anula? Y, por definición, ello equivale a preguntarse si $f \in \mathfrak{p}_x$. Se verifica lo siguiente:

1. La función $0 \in A$ se anula en todo punto $x \in \operatorname{Spec} A$.
2. Si dos funciones se anulan en x, entonces su suma también.
3. Si una función se anula en x, entonces sus múltiplos también.

4. Si un producto de funciones se anula en x, entonces alguna debe anularse en x.

Definición 3.2: Dado un conjunto de funciones $S \subseteq A$ se define su *lugar de ceros* como todos los puntos en donde se anula:

$$\mathbf{V}(S) := \{x \in \operatorname{Spec} A : \forall f \in S \quad f(x) = 0\} = \{x \in \operatorname{Spec} A : S \subseteq \mathfrak{p}_x\}.$$

Ejemplo. Fijemos $A = \mathbb{Z}$. Ahora, podemos pensar el 6 como función y notamos que el 6 sólo se anula en x_2 y x_3. Luego:

$$\mathbf{V}(6) = \{x_2, x_3\}.$$

Lema 3.3: Dado un anillo A se cumple:

1. Si $S_1 \subseteq S_2 \subseteq A$, entonces $\mathbf{V}(S_1) \supseteq \mathbf{V}(S_2)$.
2. Si $\mathfrak{a} = (S)$ es el ideal generado por S, entonces $\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}(\mathfrak{a})$.
3. $\mathbf{V}(1) = \varnothing$ y $\mathbf{V}(0) = \operatorname{Spec} A$.
4. Si $\{\mathfrak{a}_i\}_{i\in I}$ es una familia de ideales de A, entonces:

$$\bigcap_{i\in I} \mathbf{V}(\mathfrak{a}_i) = \mathbf{V}\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right) = \mathbf{V}\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right).$$

5. Dados $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \trianglelefteq A$, entonces

$$\mathbf{V}(\mathfrak{a}) \cup \mathbf{V}(\mathfrak{b}) = \mathbf{V}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathbf{V}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}).$$

Definición 3.4: Los conjuntos de la forma $\mathbf{V}(\mathfrak{a})$ son exactamente los cerrados de una única topología sobre $\operatorname{Spec} A$, llamada la ***topología de Zariski***.

Ejemplo.
- Por un teorema de Krull, todo anillo no nulo posee un ideal maximal, en particular, un ideal primo. Luego $\operatorname{Spec} A = \varnothing$ syss $A = 0$.
- Si $A = k$ es un cuerpo, entonces sus ideales son solo $\{(0), A\}$, por lo que, $\operatorname{Spec} k = \{(0)\}$ y necesariamente adquiere la topología discreta.

- Sea $A := k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$, donde ε es una indeterminada. Trivialmente existe una proyección $k[\varepsilon] \twoheadrightarrow A$ que prueba que el único ideal primo de A es (ε); nótese que ni siquiera (0) es primo, pues $\varepsilon \cdot \varepsilon = 0$. Así $\operatorname{Spec} A$ es un punto, incluso cuando A no es un cuerpo.

Para todo $f \in A$ denotamos

$$\mathbf{D}(f) := \operatorname{Spec} A \setminus \mathbf{V}(f) = \{x \in \operatorname{Spec} A : f \notin \mathfrak{p}_x\}.$$

Compare los dos últimos resultados con el primer capítulo.

Proposición 3.5: Los abiertos de la forma $\mathbf{D}(f)$ con $f \in A$ forman una base de $\operatorname{Spec}(A)$.

Ejercicio 3.6: Describir $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ como espacio topológico.

Definición 3.7: Dado $X \subseteq \operatorname{Spec} A$ podemos definir:

$$\mathbf{I}(X) := \{f \in A : \forall x \in X \ f(x) = 0\} = \{f \in A : \forall x \in X \ f \in \mathfrak{p}_x\} = \bigcap_{x \in X} \mathfrak{p}_x.$$

Proposición 3.8: Dado un anillo A y $X \subseteq Y \subseteq \operatorname{Spec} A$ se cumple:

1. $\mathbf{I}(X)$ es un ideal radical.
2. Si $X \subseteq Y \subseteq \operatorname{Spec} A$, entonces $\mathbf{I}(X) \supseteq \mathbf{I}(Y)$.
3. $\mathbf{I}(\operatorname{Spec} A) = \mathfrak{N}$ e $\mathbf{I}(\varnothing) = A$.
4. Para todo $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ se cumple que $\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathfrak{a}))$.
5. Para todo $X \subseteq \operatorname{Spec} A$ se cumple que $X \subseteq \mathbf{V}(\mathbf{I}(X))$.

También hay resultados análogos al teorema de ceros de Hilbert, aunque aquí éstos resultan radicalmente más simples de probar:

Teorema 3.9: Sea A un anillo, se cumplen:

1. Sea $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$, entonces $\mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathfrak{a})) = \operatorname{Rad} \mathfrak{a}$ (cf. **[39],** Teo. 6.26).
2. Sea $X \subseteq \operatorname{Spec} A$, entonces $\mathbf{V}(\mathbf{I}(X)) = \overline{X}$ su clausura de Zariski.

Los paralelos con la geometría algebraica clásica son evidentes. El anillo A se comporta como el álgebra polinomial $k[\boldsymbol{x}]$ mientras que el $\operatorname{Spec} A$ se comporta como el espacio afín $\mathbb{A}^n(k)$. Veamos algunas propiedades de la topología del $\operatorname{Spec} A$:

Corolario 3.9.1: Sea A un anillo y $X := \operatorname{Spec} A$. Entonces:

1. Para todo $x \in X$ se cumple que $\overline{\{x\}} = \mathbf{V}(\mathfrak{p}_x)$. Así pues, $y \in \overline{\{x\}}$ syss $\mathfrak{p}_y \supseteq \mathfrak{p}_x$.
2. Un punto $x \in X$ es cerrado syss $\mathfrak{p}_x$ es maximal.

Ejemplo. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Estudiemos $\operatorname{Spec}(k[x])$: como $k[x]$ es un DIP, entonces sus ideales primos son generados por polinomios irreducibles, o bien son el ideal nulo. Como k es algebraicamente cerrado, entonces sus polinomios irreducibles son de la forma $x - \alpha$ para cada $\alpha \in k$. Los puntos $\mathfrak{p}_\alpha := (x - \alpha)$ son cerrados, pues son ideales maximales, pero el punto $\xi := (0)$ es tal que $\overline{\{\xi\}} = \operatorname{Spec}(k[x])$.

Ejemplo. En el $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ sucede algo parecido. Los ideales de la forma $(p) =: x_p$ son maximales, luego los x_p's son puntos cerrados, no obstante, el punto $\xi := (0)$ es denso.

Rehacer figura de $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

Ejemplo. Sea A un dominio de valuación discreta, es decir, un anillo local que es DIP. Como es DIP, sus primos son o bien $(0) =: \xi$, o bien los maximales, pero como es local, sólo tiene un maximal $\mathfrak{m} =: s$. Así $\operatorname{Spec} A = \{\xi, s\}$, donde ξ es abierto (y denso), y s es un punto cerrado. Topológicamente, $\operatorname{Spec} A$ es homeomorfo al espacio de Sierpiński (cfr. **[42],** ej. 4).

Definición 3.10: Sean $x, y \in X$ un par de puntos en un espacio topológico. Se dice que y es una ***especialización*** de x, o que x es una generización de y, denotado $x \rightsquigarrow y$, si $y \in \overline{\{x\}}$. Se dice que x es un ***punto genérico*** si $z \rightsquigarrow x$ implica $z = x$.

Del ejemplo vemos que si A es un dominio íntegro, entonces siempre el punto $\xi := (0)$ es genérico. Más generalmente, en un espacio T_0, un punto denso es genérico.

Proposición 3.11: Sea $F \subseteq \operatorname{Spec} A$. Se cumplen:

1. Un cerrado $F \subseteq \operatorname{Spec} A$ es irreducible syss $\mathbf{I}(F)$ es un ideal primo.

2. Un cerrado $F \subseteq \operatorname{Spec} A$ es una componente irreducible syss $\mathbf{I}(F)$ es un primo minimal.

3. El espacio $\operatorname{Spec} A$ es irreducible syss posee un único primo minimal. En particular, el $\operatorname{Spec} A$ siempre es irreducible si A es un dominio íntegro.

Corolario 3.11.1: Sea A un anillo arbitrario. Todo cerrado irreducible de $\operatorname{Spec} A$ admite exactamente un punto denso. En consecuente, existe una biyección entre cerrados irreducibles y puntos genéricos.

DEMOSTRACIÓN: Sea F un cerrado irreducible, entonces $\mathfrak{p} := \mathbf{I}(F)$ es un ideal primo por la proposición anterior. Luego claramente, $x_\mathfrak{p} \in \overline{\{x_\mathfrak{p}\}} = \mathbf{V}(\mathfrak{p}) = \mathbf{V}(\mathbf{I}(F)) = F$. Para todo $y \in F$ se cumple que $\mathfrak{q}_y \supseteq \mathfrak{p}$, así que si $y = x_\mathfrak{p}$ se cumple que $\mathfrak{q}_y \supset \mathfrak{p}$, y finalmente, $y \rightsquigarrow z$ syss $\mathfrak{q}_y \subseteq \mathfrak{q}_z$, por lo que, $y \not\rightsquigarrow x_\mathfrak{p}$. □

Los puntos genéricos serán de utilidad más adelante.

Teorema 3.12: $\operatorname{Spec} A$ es compacto.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de $\operatorname{Spec} A$ y elijamos suficientes $f_j \in A$ tales que $\mathbf{D}(f_j) \subseteq U_i$ para algún $i \in I$ y tal que $\mathbf{D}(f_j)_{j \in J}$ es un cubrimiento abierto de $\operatorname{Spec} A$ (lo cual es válido pues los $\mathbf{D}(f_j)$'s son una base). El hecho de que $\operatorname{Spec} A = \bigcup_{j \in J} \mathbf{D}(f_j)$ equivale a decir que el ideal generado por $\{f_j\}_{j \in J}$ es A, luego existen $f_{j_1}, \dots, f_{j_n}$ y $a_{j_1}, \dots, a_{j_n} \in A$ tales que

$$a_{j_1} f_{j_1} + \cdots + a_{j_n} f_{j_n} = 1,$$

de modo que $A = (f_{j_1}, \dots, f_{j_n})$ y $\operatorname{Spec} A = \bigcup_{\ell=1}^{n} \mathbf{D}(f_{j_\ell})$. □

Teorema 3.13: Si A es un anillo noetheriano, entonces $\operatorname{Spec} A$ es noetheriano.

El recíproco puede fallar.

Corolario 3.13.1: En un anillo noetheriano A, todo ideal radical $\mathfrak{r} \triangleleft A$ es una intersección de finitos ideales primos.

Proposición 3.14: Dado un homomorfismo de anillos $\varphi\colon A \to B$, éste induce una aplicación (la contracción de ideales, cfr. [**39**] §6.1.3):

$$\begin{aligned}\varphi^a\colon \operatorname{Spec} B &\longrightarrow \operatorname{Spec} A\\ x &\longmapsto x^c = f^{-1}[\mathfrak{p}_x]\end{aligned} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[d, "\varphi"'] & \operatorname{Spec} A \\ B \arrow[r, phantom, "\overset{\text{Spec}}{\Longrightarrow}"] & \operatorname{Spec} B \arrow[u, "\varphi^a"'] \end{tikzcd}$$

1. φ^a es continua. Más aún, $(-)^a\colon \mathsf{CRing} \to \mathsf{Top}$ es un funtor contravariante.

2. Si φ es suprayectiva, entonces φ^a induce un homeomorfismo entre $\operatorname{Spec} B$ y el cerrado $\mathbf{V}(\ker\varphi)$, luego φ^a es un encaje (topológico) cerrado.

3. Dado un ideal $\mathfrak{a} \lhd A$, entonces la proyección canónica $\pi\colon A \to A/\mathfrak{a}$ da lugar al encaje $\pi^a\colon \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}) \to \operatorname{Spec}(A)$ que prueba que $\mathbf{V}(\mathfrak{a})$ es homeomorfo a $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$.

4. Si S es un sistema multiplicativo de A que no contiene divisores de cero, entonces la inclusión $\lambda\colon A \to S^{-1}A$ induce un homeomorfismo entre $\operatorname{Spec}(S^{-1}A)$ y $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{p} \cap S = \varnothing\}$.

5. En particular, dado $f \in A$, el abierto $\mathbf{D}(f)$ con la topología subespacio de $\operatorname{Spec} A$ es homeomorfo al espacio $\operatorname{Spec}(A[1/f])$.

Demostración: Probaremos la 2. Para ello, nótese que por el primer teorema de isomorfismos (cfr. **[39],** Teo. 2.23) se cumple que $\overline{\varphi}\colon A/\ker\varphi \to B$ es un isomorfismo, y los ideales primos de $A/\ker\varphi$ están en correspondencia con $\mathbf{V}(\ker\varphi) \subseteq \operatorname{Spec} A$. □

Es sabido que la extensión de ideales no determina una función entre los espectros (dé un ejemplo). El inciso 3 da el siguiente corolario:

Corolario 3.14.1: Dado un anillo A se cumple que $\operatorname{Spec} A$ y $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{N})$ son espacios topológicos homeomorfos.

Corolario 3.14.2: Sea $\varphi\colon A \to B$ un homomorfismo de anillos. La función continua $\varphi^a\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ es dominante (i.e., su imagen es densa) syss $\ker\varphi$ es nilpotente. En particular, si A es reducido, φ^a es dominante syss φ es monomorfismo.

Demostración: Sabemos que la clausura de la imagen de φ^a es $\mathbf{V}(\ker\varphi) \subseteq \operatorname{Spec} A$. Así que, exigir que φ^a sea dominante equivale a que $\mathbf{V}(\ker\varphi) = \operatorname{Spec} A$, lo que equivale, por la proposición 3.8, a que $\ker\varphi \subseteq \mathfrak{N}$. □

§3.1.1 Espectro homogéneo.

Definición 3.15: Sea A un anillo ($\mathbb{N}$-)graduado $A = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} A_d$ y recordemos que el ideal irrelevante es $A_+ := \bigoplus_{d>0} A_d$. Llamamos su ***espectro homogéneo***, denotado $\operatorname{Proj} A$, al conjunto de los ideal primos $\mathfrak{p} \lhd A$ homogéneos tales que $\mathfrak{p} \not\supseteq A_+$, llamados *primos relevantes.*

Dado un conjunto $S \subseteq A$, definimos su lugar de ceros homogéneo:

$$\mathbf{V}_+(S) := \{x \in \operatorname{Proj} A : \forall f \in S \quad f(x) = 0\} = \{x \in \operatorname{Proj} A : \mathfrak{p}_x \supseteq S\}.$$

Lema 3.16.A: Dado un anillo graduado A se cumple:

1. Si $S_1 \subseteq S_2 \subseteq A$, entonces $\mathbf{V}_+(S_1) \supseteq \mathbf{V}_+(S_2)$.
2. Si $\mathfrak{a} = (S)^h$ es el ideal homogéneo generado por S, entonces $\mathbf{V}_+(S) = \mathbf{V}_+(\mathfrak{a})$.
3. $\mathbf{V}_+(1) = \mathbf{V}_+(A_+) = \varnothing$ y $\mathbf{V}_+(0) = \operatorname{Proj} A$.
4. Si $\{\mathfrak{a}_i\}_{i\in I}$ es una familia de ideales homogéneos de A, entonces:
$$\bigcap_{i\in I} \mathbf{V}_+(\mathfrak{a}_i) = \mathbf{V}_+\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right) = \mathbf{V}_+\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right).$$
5. Dados $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \trianglelefteq A$ homogéneos, entonces
$$\mathbf{V}_+(\mathfrak{a}) \cup \mathbf{V}_+(\mathfrak{b}) = \mathbf{V}_+(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathbf{V}_+(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}).$$

Definición 3.16: Sea A un anillo graduado y $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ un ideal. Se define su ***parte homogénea*** como

$$\mathfrak{a}^h := \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} (\mathfrak{a} \cap A_d)$$

Es claro que a es homogéneo syss $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^h$.

Lema 3.17: Sea A un anillo graduado y $\mathfrak{p} \lhd A$ un primo. Entonces $\mathfrak{p}^h$ también es primo.

DEMOSTRACIÓN: Sean $a, b \in A$ con descomposición homogénea:

$$a = \sum_{d=0}^{n} a_d, \qquad b = \sum_{d=0}^{m} b_d,$$

tales que $ab \in \mathfrak{p}^h$, queremos probar que alguno está en $\mathfrak{p}^h$.

La prueba será por inducción fuerte sobre $n+m$. Si $n+m=0$, entonces $a = a_0$, $b = b_0$ son homogéneos y trivialmente alguno está en $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}^h$. Si no, su producto se escribe como

$$a \cdot b = a_n b_m + \sum_{d=0}^{n+m-1} \sum_{i+j=d} a_i b_j .$$

donde $a_i b_j$ es homogéneo de grado $< n+m$. Luego $a_n b_m \in \mathfrak{p} \cap A_{n+m}$, por lo que $a_n \in \mathfrak{p}$ o $b_m \in \mathfrak{p}$, sin perdida de generalidad supongamos el primer caso. Así $(a - a_n)b \in \mathfrak{p}^h$ y su descomposición homogénea llega hasta elementos de grado $< n+m$, luego o bien $a - a_n \in \mathfrak{p}^h$ o $b \in \mathfrak{p}^h$ por hipótesis inductiva. □

Proposición 3.18: Sea A un anillo graduado.

1. Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \trianglelefteq A$ son homogéneos, entonces $\mathbf{V}_+(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbf{V}_+(\mathfrak{b})$ syss $\mathfrak{b} \cap A_+ \subseteq \operatorname{Rad} \mathfrak{a}$.
2. $\operatorname{Proj} A = \varnothing$ syss A_+ es nilpotente.

Demostración:

1. $\Longleftarrow$. Sea $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}_+(\mathfrak{a})$, entonces $\mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Rad} \mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b} \cap A_+ \supseteq \mathfrak{b}$, por lo que $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}_+(\mathfrak{b})$.

   $\Longrightarrow$. Sea $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(\mathfrak{a})$, entonces $\mathfrak{p}^h \supseteq \mathfrak{a}^h = \mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{p}^h \not\supseteq A_+$, entonces $\mathfrak{p}^h \in \mathbf{V}_+(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbf{V}_+(\mathfrak{b})$, luego $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}^h \supseteq \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{b} \cap A_+$ y, por ende,

   $$\mathfrak{b} \cap A_+ \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} = \operatorname{Rad} \mathfrak{a}.$$

2. Si $\operatorname{Proj} A = \mathbf{V}_+(0) \subseteq \mathbf{V}_+(A_+) = \varnothing$, entonces $A_+ \subseteq \operatorname{Rad}(0) = \mathfrak{N}$. □

Definición 3.19: Sea A un anillo graduado y $f \in A$ homogéneo. Definimos $\mathbf{D}_+(f) := \operatorname{Proj} A \setminus \mathbf{V}_+(f)$.

Recuérdese que:

Definición 3.20: Sean A, B un par de anillos graduados. Un ***homomorfismo de anillos graduados*** de grado $r \geq 1$ es un homomorfismo de anillos $\varphi \colon A \to B$ tal que $\varphi[A_d] \subseteq B_{rd}$ para todo $d \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.21: Sea A un anillo graduado, $f \in A$ homogéneo de grado $r > 0$, sea $g \in A$ tal que $\mathbf{D}_+(g) \subseteq \mathbf{D}_+(f)$ y sea $\alpha := g^r f^{-\deg g} \in A_{(f)}$. Entonces:

1. Existe un homeomorfismo $\theta \colon \mathbf{D}_+(f) \to \operatorname{Spec}(A_{(f)})$.
2. $\theta[\mathbf{D}_+(g)] = \mathbf{D}(\alpha)$.
3. Existe un homomorfismo canónico $A_{(f)} \to A_{(g)}$ e induce un isomorfismo $(A_{(f)})[1/\alpha] \cong A_{(g)}$.
4. Si a es homogéneo en A, entonces $\theta[\mathbf{V}_+(a) \cap \mathbf{D}_+(f)] = \mathbf{V}(\mathfrak{a}_{(f)})$, donde $\mathfrak{a}_{(f)} := \mathfrak{a}A[1/f] \cap A_{(f)}$.

Demostración:

1. y 2. Nótese que $\operatorname{Proj} A \subseteq \operatorname{Spec} A$ hereda la topología subespacio. La inclusión $\iota \colon A_{(f)} \to A[1/f]$ induce la aplicación continua $\operatorname{Spec}(A[1/f]) \approx \mathbf{D}(f) \to \operatorname{Spec}(A_{(f)})$ y definimos $\theta \colon \mathbf{D}_+(f) := \mathbf{D}(f) \cap \operatorname{Proj} A \to \operatorname{Spec}(A_{(f)})$ como su restricción.

   Veamos que θ es suprayectiva: Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A_{(f)})$, entonces es fácil ver que $\mathfrak{q} := \operatorname{Rad}(\mathfrak{p}A[1/f])$ es primo en $A[1/f]$. Nótese que $A[1/f]$ es una $A_{(f)}$-álgebra graduada en sentido canónico, donde los elementos homogéneos de grado n son de la forma bf^{-N} donde $b \in A$ es homogéneo de grado $\deg b = Nr + n$. Así $\mathfrak{q}$ es un primo homogéneo de $A[1/f]$. Considere $\lambda \colon A \to A[1/f]$ el homomorfismo canónico, entonces es un homomorfismo de anillos graduados, y así $\mathfrak{r} := \lambda^{-1}[\mathfrak{q}]$ es un primo homogéneo de A y $\mathfrak{r} \in \mathbf{D}_+(f)$. Finalmente, queda al lector probar que $\theta(\mathfrak{r}) = \mathfrak{p}$.

   Veamos que θ es inyectiva: Sean $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \mathbf{D}_+(f)$ tales que $(\mathfrak{p}A[1/f]) \cap A_{(f)} = (\mathfrak{p}'A[1/f]) \cap A_{(f)}$, entonces para todo $b \in \mathfrak{p}$ homogéneo se cumple que $b^r f^{-\deg b} \in (\mathfrak{p}A[1/f]) \cap A_{(f)} \subseteq \mathfrak{p}'A[1/f]$ de modo que $b \in \mathfrak{p}'$ y $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ y, por simetría, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$.

   Veamos que θ es abierta: Basta notar que $\theta[\mathbf{D}_+(g)] = \mathbf{D}(\alpha)$ (¿por qué?) y emplear que los abiertos principales son una base. Finalmente, toda biyección abierta y continua es un homeomorfismo.

1. Como $\mathbf{D}_+(g) \subseteq \mathbf{D}_+(f)$, el lema anterior nos da que $\operatorname{Rad}(g) \cap A_+ \supseteq (f)$, luego para todo $a \in A$ se cumple que $g^n = fa$ para algún $n \in \mathbb{N}$. En particular, fijemos a homogéneo y así determinamos el homomorfismo $bf^{-N} \mapsto (ba^N)g^{-nN}$. Queda de ejercicio para el lector verificar que el

homomorfismo está bien definido y que determina un homeomorfismo entre los espectros. □

Proposición 3.22: Dado un homomorfismo de anillos graduados $\varphi\colon A \to B$ con $M := (A_+)^e = \varphi[A_+]B$, éste induce una aplicación:

$$\begin{aligned} \varphi^a\colon \mathbf{D}_+(M) &\longrightarrow \operatorname{Proj} A \\ x &\longmapsto x^c = \varphi^{-1}[\mathfrak{p}_x] \end{aligned}$$

1. φ^a es continua.
2. Si φ es suprayectiva, entonces φ^a induce un homeomorfismo entre $\mathbf{D}_+(M)$ y el cerrado $\mathbf{V}(\ker\varphi)$, luego φ^a es un encaje cerrado.
3. Sea $\mathfrak{a} \lhd A$ un ideal homogéneo, entonces la proyección canónica $\pi\colon A \to A/\mathfrak{a}$ da lugar al encaje $\pi^a\colon \operatorname{Proj}(A/\mathfrak{a}) \to \operatorname{Proj}(A)$ que prueba que $\mathbf{V}_+(\mathfrak{a})$ es homeomorfo a $\operatorname{Proj}(A/\mathfrak{a})$.
4. Si S es un sistema multiplicativo de A que no contiene divisores de cero, entonces la inclusión $\lambda\colon A \to A_{(S)}$ induce un homeomorfismo entre $\operatorname{Spec}(A_{(S)})$ y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} A : \mathfrak{p} \cap S = \varnothing$.
5. En particular, dado $f \in A$ homogéneo, el abierto $\mathbf{D}_+(f)$ con la topología subespacio de $\operatorname{Proj} A$ es homeomorfo al espacio $\operatorname{Spec}(A_{(f)})$.

Ojo que para el inciso 2 hay que verificar que $\pi[A_+] = (A/\mathfrak{a})_+$.

3.2 Haces

Comenzamos con las nociones de haces y espacios anillados. En esencia, un haz determina una familia de funciones que tienen ciertas «propiedades locales» con respecto a un espacio topológico.

Definición 3.23: Dado un espacio topológico X, un ***prehaz*** es un funtor contravariante $\mathscr{F}\colon \mathsf{Op}(X) \to \mathscr{C}$, donde $\mathscr{C}$ es una categoría. Un prehaz de conjuntos, de grupos, de anillos, etc., es un prehaz donde $\mathscr{C}$ es la categoría de conjuntos, de grupos, de anillos, etc. Si $\mathscr{C}$ es una categoría concreta,[a] diremos que $\mathscr{F}$ es un prehaz concreto y, entonces $\mathscr{F}(U)$ es un conjunto (con estructura) y sus elementos se denominan ***secciones*** sobre U; también denotamos $\Gamma(U, F)$ al conjunto de secciones sobre U. Las secciones sobre X se dice ***secciones globales***.

En general, dados $U \subseteq V$ abiertos de X, denotamos por $\rho^V_U : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$ la imagen de la flecha de inclusión, a los que llamamos ***restricciones***. Dada una sección $s \in \mathscr{F}(V)$ solemos denotar $s|_U := \rho^V_U(s)$.

[a] Una categoría cuyos objetos son «conjuntos con estructura». Formalmente, una categoría $\mathscr{C}$ con un funtor fiel canónico $\mathscr{C} \to \mathsf{Set}$ llamado funtor olvidadizo (cfr. [**40**], def. 1.15).

Definición 3.24: Sea X un espacio topológico y $\mathscr{F}$ un prehaz concreto sobre X. Se dice que una familia $(s_i \in \mathscr{F}(U_i))_{i\in I}$ de secciones es ***compatible*** si para todo $i, j \in I$ se cumple que $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$.

Decimos que un prehaz concreto $\mathscr{F}$ sobre X es un haz[1] si para toda familia $(x_i \in \mathscr{F}(U_i))_{i\in I}$ compatible existe un único elemento $x \in \mathfrak{F}\big(\bigcup_{i\in I} U_i\big)$ tal que $x|_{U_i} = x_i$ para todo $i \in I$ («axioma de pegado»).

HARTSHORNE [**8**] trabaja exclusivamente con prehaces de grupos en donde la condición de unicidad la expresa diciendo que si un elemento se restringe al 0 en todos los U_i es porque dicho elemento es el 0.

Hay una manera de escribir la condición de ser haz mediante flechas: Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos tal que $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, entonces considere las siguientes flechas:

$$\mathscr{F}(U) \xrightarrow{\ \alpha\ } \prod_{i\in I} \mathscr{F}(U_i) \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} \mathscr{F}(U_i \cap U_j) \tag{3.1}$$

donde

$$\alpha(s) = \big(\rho^U_{U_i}(s)\big)_{i\in I}, \qquad \beta\big((s_i)_{i\in I}\big) = (\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(s_i))_{i,j}$$
$$\gamma\big((s_i)_{i\in I}\big) = (\rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(s_i))_{i,j}.$$

Y exigimos que el ecualizador de β, γ sea α. Efectivamente, que $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma$ es la condición que una familia de secciones sea compatible. Ésta condición puede sonar un tanto complicada, pero nos permite definir la categoría de haces sobre una categoría cualquiera.

Podemos extraer el siguiente caso:

Proposición 3.25: Sea X un espacio topológico y $\mathscr{F}$ un prehaz de A-módulos sobre X. Entonces $\mathscr{F}$ es un haz syss para cada U abierto y cada cubrimiento $\bigcup_{i\in I} U_i = U$ la sucesión

[1] fr. *faisceau*, eng. *sheaf*.

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\ \alpha\ } \prod_{i\in I}\mathscr{F}(U_i) \xrightarrow{\ \delta\ } \prod_{i,j\in I}\mathscr{F}(U_i\cap U_j)$$

es exacta, donde:

$$\alpha(s) = \big(\rho^U_{U_i}(s)\big)_{i\in I}, \qquad \delta\big((s_i)_{i\in I}\big) = (s_i|_{U_i\cap U_j} - s_j|_{U_i\cap U_j})_{i,j}.$$

Proposición 3.26: Sea X un espacio topológico. Todo haz $\mathscr{F}\in\mathsf{Sh}(X;\mathscr{C})$ satisface que $\mathscr{F}(\varnothing)$ es un objeto final.

Proposición 3.27: Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $F\colon\mathscr{C}\to\mathsf{Set}$ un funtor tales que:

1. F es fiel.
2. $\mathscr{C}$ es completa y F preserva límites inversos.
3. F refleja isomorfismos.

Entonces, para todo espacio topológico X y todo prehaz $\mathscr{O}$ con codominio $\mathscr{C}$ se cumple que $\mathscr{O}$ es un haz en $\mathscr{C}$ syss $\mathscr{O}\circ\mathscr{F}$ es un haz de conjuntos.

Demostración: $\Longrightarrow$. Claramente $\mathscr{O}\circ\mathscr{F}$ es un prehaz de conjuntos y como los ecualizadores son límites inversos, entonces también es un haz.

$\Longleftarrow$. Si $\mathscr{O}\circ\mathscr{F}$ es un haz de conjuntos, entonces para un cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de un abierto U, sea E el ecualizador de las flechas β,γ de (3.1).

Por definición de prehaz, existe una única flecha $\mathscr{O}(U)\to E$. Aplicando el funtor F, obtenemos $F(\mathscr{O}(U))\to F(E)$ y como F preserva límites, entonces $F(E)$ también es un ecualizador, por lo que la flecha es un isomorfismo y como F refleja isomorfismos, entonces $\mathscr{O}(U)\to E$ es un isomorfismo. □

En particular, las categorías $\mathsf{Grp}, \mathsf{Ab}, \mathsf{Mod}_A, \mathsf{Vect}_k, \mathsf{Ring}, \mathsf{CAlg}_A$ con el funtor olvidadizo satisfacen las hipótesis anteriores, así que tenemos un buen criterio para verificar que un prehaz es un haz.

Definición 3.28: Sea X un espacio topológico y $\mathfrak{F}$ un prehaz concreto sobre X. Dado un punto $P\in X$ llamamos la ***fibra***[2] sobre P, al límite directo (si existe) $\mathscr{F}_P := \varinjlim_{U\in\mathsf{Op}(X)}\mathscr{F}(U)$. Los elementos de $\mathscr{F}_P$ se dicen ***gérmenes locales***[3] en P.

[2] fr. *fibre*, eng. *stalk*.

[3] fr. *germe*. La terminología, acuñada por el mismo Grothendieck, refiere a una analogía con la agronomía: los haces son literalmente atados de tallos de heno, los cuales a su vez germitan de semillas.

Trivialmente para cada entorno U de un punto P existe una única flecha $\rho_P^U \in \operatorname{Hom}\big(\mathscr{F}(U), \mathscr{F}_P\big)$ que conmuta con todas las restricciones. Dada una sección $s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ se denota $s|_P := \rho_P^U(s)$.

Si la categoría de codominio fuese, por ejemplo, cocompleta (i.e., admite límites directos de diagramas), entonces siempre podríamos asegurar la existencia de fibras sobre los puntos; pero en general no requerimos tanto, sino que podemos aprovecharnos de que $\mathsf{Op}_P(X)$ es una categoría filtrada. Veamos una construcción:

Proposición 3.29: Si X es un espacio topológico, $\mathscr{F}$ es un prehaz de conjuntos sobre X y $x \in X$, entonces podemos considerar el conjunto $C := \bigcup_{x \in U} \{U\} \times \mathscr{F}(U)$ y la relación:

$$(U, f) \sim (V, g) \iff \exists x \in W \subseteq U \cap V \quad f|_W = g|_W$$

la cual es de equivalencia. Luego el conjunto cociente $C/\sim$ es la fibra $\mathscr{F}_x$ sobre x.

Ésta misma construcción podemos aplicarla sobre un prehaz de grupos, de anillos, de A-módulos verificando también que la relación de equivalencia conmuta con las operaciones requeridas; ésto se asemeja al lema 1.68.

Ejemplo.

- Dado un par de espacios topológicos X, Y, el funtor contravariante $\operatorname{Hom}\mathsf{Top}(-, Y) \colon \mathsf{Op}(X) \to \mathsf{Set}$ es un haz de conjuntos, llamado el *haz de funciones continuas*, donde la restricción es la restricción usual de conjuntos.

  Más aún, si Y es un grupo topológico (resp. anillo topológico, A-módulo topológico) entonces $\operatorname{Hom}(-, Y)$ es un haz de grupos (resp. anillos, A-módulos).

  Nótese que aquí, el axioma de pegado está satisfecho por el hecho de que pegar funciones continuas compatibles sigue siendo continua; por tanto, hasta cierto punto se debe entender que un haz es un funtor contravariante dado por una familia de funciones definidas por una propiedad «local».

- Dado un par de variedades diferenciales X, Y, el funtor contravariante $\operatorname{Hom}_{\mathsf{Man}^\infty}(-, Y) \colon \mathsf{Op}(X) \to \mathsf{Set}$ es un haz de conjuntos, llamado el *haz de funciones diferenciables*, donde la restricción es la restricción usual de conjuntos.

Más aún, si Y es un grupo topológico (resp. anillo topológico, A-módulo topológico) entonces $\mathrm{Hom}(-,Y)$ es un haz de grupos (resp. anillos, A-módulos).

Acá las fibras juegan un rol particular y se llaman *gérmenes de funciones diferenciales* en un punto.

- Sea X un espacio topológico arbitrario, A un grupo abeliano arbitrario y $P \in X$ un punto fijo. El *haz rascacielos* centrado en P es el haz

  $$A_X^P(U) := \begin{cases} A, & P \in U \\ 0, & P \notin U \end{cases}$$

  donde dados $U \subseteq V$ la restricción ρ_U^V es la identidad si $P \in U$ o el homomorfismo nulo si $P \notin U$.

  Las fibras del haz rascacielos son

  $$A_{X,Q}^P(U) := \begin{cases} A, & P \rightsquigarrow Q \\ 0, & P \not\rightsquigarrow Q \end{cases}$$

- Sea X un espacio topológico y A un conjunto arbitrario. Se le llama el ***prehaz constante*** A_X^- al prehaz de conjuntos que corresponde a un funtor constante.

  Éste prehaz no es (en general) un haz: en primer lugar, uno puede argumentar que para que sea un haz se debe dar que $A_X^-(\varnothing)$ sea el objeto final de la categoría, y podemos admitir sin problemas dicha condición, pero aún así sigue fallando en general. Si A tuviese, por ejemplo, más de un elemento, entonces bastaría encontrar dos secciones distintas definidas sobre abiertos disjuntos de X para notar que no es un haz. Aquí todas las fibras son A.

- Sea X un espacio topológico y A un conjunto arbitrario. Se le llama el ***haz constante*** (¡no confundir con el prehaz constante!) A_X^+ al haz de conjuntos que corresponde al funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X,A)$, donde A está visto como un espacio topológico discreto.

Como los (pre)haces son funtores contravariantes tenemos lo siguiente:

Definición 3.30: Sea X un espacio topológico y $\mathscr{F},\mathscr{G}$ prehaces sobre X con codominio $\mathscr{C}$. Un ***morfismo de prehaces*** $\alpha\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es una transformación natural entre los funtores contravariantes, i.e., es una familia de flechas $\alpha(U) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(U), \mathscr{G}(U))$ tal que el siguiente diagrama siempre conmuta:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, hook, "\subseteq"'] & \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\alpha(U)"] & \mathscr{G}(U) \\ V & \mathscr{F}(V) \arrow[u, "\rho"] \arrow[r, "\alpha(V)"] & \mathscr{G}(V) \arrow[u, "\rho"'] \end{tikzcd}$$

Con ésto tenemos que:

Proposición 3.31: Los prehaces (resp. haces) sobre un espacio topológico fijo X con codominio fijo $\mathscr{C}$ (como objetos) y los homomorfismos entre ellos (como flechas) conforman una categoría denotada $\mathsf{PSh}(X; \mathscr{C})$ (resp. $\mathsf{Sh}(X; \mathscr{C})$). Se obvia la categoría de codominio cuando $\mathscr{C} = \mathsf{Ab}$.

Es notorio que $\mathsf{PSh}(X; \mathscr{C})$ es la misma categoría que $\mathsf{Fun}(\mathsf{Op}(X), \mathscr{C}^{\mathrm{op}})$, y la categoría de $\mathsf{Sh}(X; \mathscr{C})$ es una subcategoría plena de $\mathsf{PSh}(X; \mathscr{C})$.

Proposición 3.32: Sea X un espacio topológico y $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \mathsf{PSh}(X; \mathscr{C})$ con $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{PSh}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$. Luego, las fibras en el punto $P \in X$ corresponden a un funtor covariante $(-)_P \colon \mathsf{PSh}(X; \mathscr{C}) \to \mathscr{C}$:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[d, "\varphi"'] & \mathscr{F}_P \arrow[d, "\varphi_P"] \\ \mathscr{G} \arrow[r, phantom, "\overset{(-)_P}{\Longrightarrow}"] & \mathscr{G}_P \end{tikzcd}$$

Lo mismo vale para haces.

Proposición 3.33: Sea X un espacio topológico y $\mathscr{F}$ un prehaz sobre X con valores en una categoría bicompleta $\mathscr{C}$. Para cada abierto $U \subseteq X$ y cada punto $x \in X$ se determinan dos únicas flechas

$$\mathscr{F}(U) \xrightarrow{\alpha} \prod_{y \in U} \mathscr{F}_y \qquad \coprod_{x \in V} \mathscr{F}(V) \xrightarrow{\beta} \mathscr{F}_x,$$

tales que $\alpha \circ \pi_x = \rho_x^U$ para cada punto $x \in U$ y tales que $\iota_V \circ \beta = \rho_y^V$ para cada V entorno de y. Más aún, si $\mathscr{F}$ es un haz, entonces α es un monomorfismo y β es un epimorfismo.

DEMOSTRACIÓN: La existencia (y unicidad) de las flechas se desprende de la definición de (co)producto. El que α sea un monomorfismo lo verificaremos en el caso concreto: Aquí $\alpha(s) := (s|_x)_{x\in U}$, luego dos secciones $s, t \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ satisfacen que $\alpha(s) = \alpha(t)$ syss $s|_y = t|_y$ para cada $y \in U$. Esto significa que existe un entorno $V_y \subseteq U$ y una sección $u_y \in \Gamma(V_y, \mathscr{F})$ tal que $s|_{V_y} = u_y = t|_{V_y}$. Así, vemos que s, t coinciden en abiertos V_x que cubren todo U, luego por el axioma de pegado son iguales.

El que β sea un epimorfismo también se puede verificar en el caso concreto, en donde corresponde a decir que todo gérmen local en y viene de alguna sección sobre un entorno de y. $\square$

Proposición 3.34: Dado un espacio topológico X y un morfismo $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ de haces de conjuntos sobre X. Entonces:

1. φ es un monomorfismo syss φ_x lo es para todo $x \in X$.
2. φ es un isomorfismo syss φ_x lo es para todo $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN:

1. $\Longleftarrow$. Basta construir el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, hook] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, hook] \\ \prod_{x\in U} \mathscr{F}_x \arrow[r, "\prod_{x\in U}\varphi_x"] & \prod_{x\in U} \mathscr{G}_x \end{tikzcd}$$

   Y notar que como la composición $\varphi_U \circ \alpha$ es un monomorfismo, entonces φ_U también.

   $\Longrightarrow$. Sean $s, t \in \mathscr{F}(U)$ un par de secciones tales que

$$\varphi(s)|_x = \varphi_x(s|_x) = \varphi_x(t|_x) = \varphi(t)|_x,$$

   para algún $x \in U$. Entonces existe un subentorno $x \in V \subseteq U$ tal que $\varphi_V(s|_V) = \varphi_U(s)|_V = \varphi_U(t)|_V = \varphi_V(t|_V)$. Luego, puesto que φ_V es un monomorfismo, se cumple que $s|_V = t|_V$ y así vemos que $s|_x = t|_x$, lo que completa la inyectividad de α.

2. $\Longrightarrow$. Basta recordar que localizar $(-)_x$ es funtorial.

   $\Longleftarrow$. Por el inciso anterior ya sabemos que φ es un monomorfismo, basta ver que es un epimorfismo.

Sea $t \in \Gamma(U, \mathscr{G})$ una sección. Luego para todo $y \in U$ se tiene que $t|_y = \varphi_y(s_y)$ para algún germén local. Así que existe un subenterno $y \in V_y \subseteq U$ tal que $u|_{V_y} = t|_{V_y}$, donde $u \in \Gamma(V_y, \mathscr{G})$ es tal que $u|_y = \varphi_y(s^y)$. Ahora bien, s^y viene de alguna sección $\tilde{s}^y \in \Gamma(\tilde{V}_y, \mathscr{F})$ y luego $\varphi_{\tilde{V}_y}(\tilde{s}^y)|_y = u|_y$, por lo que coinciden en un subentorno $y \in W_y \subseteq U$ y finalmente definimos $v^y := \tilde{s}^y|W_y$. Así, tenemos una colección de v^y's tales que $\varphi_{W_y}(v^y) = t|_{W_y}$ y como φ es inyectivo, entonces se verifica que los v^y's son compatibles y se pegan en v. □

Ejemplo 3.35: Sea X un espacio topológico, $\mathscr{C}$ una categoría completa y sea $(A_x)_{x\in X}$ una familia de objetos en $\mathscr{C}$. Definiendo

$$\Gamma(U, \Pi) := \prod_{y\in U} A_y.$$

con las restricciones naturales (dadas, en el caso concreto, por eliminar coordenadas), entonces se comprueba que Π es un prehaz.

Supongamos que $\mathscr{C}$ es concreta. Entonces una sección $(s_y)_y \in \Gamma(U, \Pi)$ es una función de elección $s_y \in A_y$. Luego dos secciones $(s_u)_{u\in U}|_{U\cap V} = (t_v)_{v\in V}|_{U\cap V}$ coinciden syss $s_x = t_x$ para cada $x \in U \cap V$, por lo que podemos pegarlas de manera única en una sección $(s_y)_{y\in U\cup V}$. Así, Π es de hecho un haz.

Ahora bien, es fácil notar que las fibras

$$\Pi_x = \prod_{x\rightsquigarrow y} A_y,$$

donde y recorre los puntos que están en todos los entornos de x. Así existe un monomorfismo $A_x \to \Pi_x$ y también un epimorfismo $\Pi_x \to A_x$ cuya composición es $1_{A_x} \colon A_x \to A_x$, pero no necesariamente son iguales. Nótese que la igualdad se alcanza syss x es un punto cerrado. ⌟

Al lector, argumente que el prehaz anterior es un haz cuando $\mathscr{C}$ no es necesariamente concreta.

Proposición 3.36: Dado un prehaz $\mathscr{F} \in \mathsf{PSh}(X; \mathscr{C})$, entonces podemos considerar el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathsf{PSh}}(\mathscr{F}, -) \colon \mathsf{Sh}(X; \mathscr{C}) \to \mathsf{Set}$:

$$\begin{aligned} h^\varphi \colon \operatorname{Hom}_{\mathsf{PSh}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathsf{PSh}}(\mathscr{F}, \mathscr{H}) \\ \psi &\longmapsto \varphi \circ \psi \end{aligned} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{G} \arrow[d, "\varphi"'] \\ \mathscr{H} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathsf{PSh}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \arrow[d, "h^\varphi"] \\ \operatorname{Hom}_{\mathsf{PSh}}(\mathscr{F}, \mathscr{H}) \end{tikzcd}$$

Éste funtor es representable por un único objeto y flecha $\iota\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$, el cual es un haz y se dice la ***hazificación*** de $\mathscr{F}$.

Más aún, para cada punto $x \in X$ se satisface que $\mathscr{F}_x = \mathscr{F}_x^+$, es decir, las fibras de un prehaz y su hazificación coinciden.

Demostración: Definamos $\mathscr{F}^+$ como procede: para cada abierto $U \subseteq X$ una sección $(s_y)_y \in \Gamma(U, \mathscr{F}^+)$, corresponde a una tupla $(s_y)_y \in \prod_{y\in U} \mathscr{F}_y$ tal que cada punto $x \in U$ posee un subentorno $x \in V \subseteq U$ y una sección $\sigma \in \mathscr{F}(V)$ tal que $s_v = \gamma|_v$ para todo $v \in V$.

Claramente si $U \subseteq V$ son abiertos, entonces hay una proyección natural

$$\prod_{u\in U} \mathscr{F}_u \longrightarrow \prod_{v\in V} \mathscr{F}_v,$$

que luego determina una restricción entre secciones. Así $\mathscr{F}^+$ es un prehaz.

Además, si $U \subseteq X$ es abierto, entonces la flecha $\mathscr{F}(U) \to \prod_{u\in U} \mathscr{F}_u$ producto de localizaciones tiene valores en $\mathscr{F}^+(U)$, de modo que determina un morfismo de prehaces $\mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$, y claramente $\mathscr{F}^+$ es un subprehaz de Π del ejemplo anterior, luego hereda unicidad de pegado. Finalmente es fácil notar que en $\mathscr{F}^+$ también se pueden pegar secciones, por lo que, es un haz.

Por el mismo ejemplo, hay una inyección $\mathscr{F}_x \to \mathscr{F}_x^+$, por lo que basta probar que es suprayectiva. Sea $s \in \mathscr{F}_x^+$, luego existe un entorno $x \in U$ tal que $s = (s_u)_{u\in U}|_x$. Por definición existe un subentorno $x \in V \subseteq U$ y una sección $\sigma \in \mathscr{F}(V)$ tal que $s_v = \sigma|_v$ para todo $v \in V$. Trivialmente, la imagen de σ es s. Así $\mathscr{F}_x \to \mathscr{F}_x^+$ es un isomorfismo. Finalmente, es fácil notar que la hazificación determina un funtor $(-)^+\colon \mathsf{PSh} \to \mathsf{Sh}$. Así que si $\psi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un morfismo de prehaces, determina un morfismo $\psi^+\colon \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}^+$ de haces. Además tenemos el morfismo de prehaces $\iota_{\mathscr{G}}\colon \mathscr{G} \to \mathscr{G}^+$ que es un isomorfismo en las fibras, luego es un isomorfismo de haces por la proposición 3.42, de modo que ψ se factoriza por $\mathscr{F} \to \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$. $\square$

Ejemplo. La hazificación del prehaz constante A_X^- es el haz constante A_X^+, de ahí la simbología.

Corolario 3.36.1: La hazificación determina un funtor $(-)^+\colon \mathsf{PSh}(X;\mathscr{C}) \to \mathsf{Sh}(X;\mathscr{C})$ que es la adjunta izquierda del funtor semiolvidadizo $U\colon \mathsf{Sh}(X;\mathscr{C}) \to \mathsf{PSh}(X;\mathscr{C})$. En símbolos:

$$(-)+ \dashv U, \qquad \operatorname{Hom}_{\mathsf{Sh}}(\mathscr{F}^+, \mathscr{G}) \approx \operatorname{Hom}_{\mathsf{PSh}}(\mathscr{F}, U\mathscr{G}).$$

Hay dos consecuencias que entender del corolario anterior. La primera es que como U tiene adjunta izquierda, entonces preserva límites inversos, y los límites en la categoría de prehaces se calculan puntualmente pues es esencialmente una categoría de funtores. La segunda es que, en general, *no* preserva límites directos, así que no es tan fácil calcularlos entre haces y, la solución tecnica es calcular puntualmente un límite directo y hazificar.

§3.2.1 Funtores con haces.

Proposición 3.37: Sea $\mathscr{C}$ una categoría cocompleta y sea $f\colon X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos.

1. Dado un prehaz $\mathscr{F} \in \mathsf{PSh}(X;\mathscr{C})$. Entonces definiendo para todo $V \subseteq Y$ abierto:
$$\Gamma(V, f_*\mathscr{F}) := \Gamma(f^{-1}[V], \mathscr{F}),$$
se cumple que $f_*\mathscr{F} \in \mathsf{PSh}(Y;\mathscr{C})$, llamado el prehaz preimagen. Esto determina un funtor $f_*(-)\colon \mathsf{PSh}(X;\mathscr{C}) \to \mathsf{PSh}(Y;\mathscr{C})$.

2. Dado un prehaz $\mathscr{G} \in \mathsf{PSh}(Y;\mathscr{C})$. Entonces definiendo para todo $U \subseteq X$ abierto:
$$\Gamma(U, f_p\mathscr{G}) := \varinjlim_{V \supseteq f[U]} \Gamma(V, \mathscr{G}),$$
se cumple que $f_p\mathscr{G} \in \mathsf{PSh}(X;\mathscr{C})$, llamado el prehaz imagen directa. Esto determina un funtor $f_p(-)\colon \mathsf{PSh}(Y;\mathscr{C}) \to \mathsf{PSh}(X;\mathscr{C})$.

Más aún, existe un isomorfismo canónico en las fibras: para todo $y \in Y$ se cumple $(f_p\mathscr{G})_y = \mathscr{G}_{f(y)}$.

DEMOSTRACIÓN: Las afirmaciones son todas triviales, exceptuando la de las fibras. Sea $x \in X$, entonces
$$(f_p\mathscr{G})_x = \varinjlim_{x \in U} f_p\mathscr{G}(U) = \varinjlim_{x \in U} \varinjlim_{V \supseteq f[U]} \mathscr{G}(V) = \mathscr{G}_{f(x)}. \qquad \square$$

Proposición 3.38: Sea $\mathscr{C}$ una categoría cocompleta y sea $f\colon X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos. Dados $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ prehaces sobre X, Y resp. con valores en $\mathscr{C}$, entonces el funtor $f_p(-)$ es la adjunta izquierda de $f_*(-)$. En símbolos:
$$f_p(-) \dashv f_*(-), \qquad \operatorname{Hom}_{\mathsf{PSh}(X)}(f_p\mathscr{G}, \mathscr{F}) \approx \operatorname{Hom} \mathsf{PSh}(Y)(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}).$$

Demostración: Para todo $U \subseteq Y$ abierto se cumple que $f\big[f^{-1}[U]\big] \subseteq U$, de modo que existe una flecha canónica $\mathscr{G}(U) \to f_p\mathscr{G}(f^{-1}[U])$. Esto determina un morfismo de prehaces $\varepsilon_{\mathscr{G}} \colon \mathscr{G} \to f_*f_p\mathscr{G}$.

Por otro lado, para todo $U \subseteq X$ abierto se cumple que $f^{-1}\big[f[U]\big] \supseteq U$, entonces para todo $V \supseteq f[U]$ abierto de Y se cumple que $f^{-1}[V] \supseteq U$ de modo que tenemos la flecha de la restricción $\mathscr{F}(f^{-1}[V]) \to F(U)$, y luego existe una única flecha canónica $f_pf_*\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U)$ que determina un morfismo de prehaces $\eta_{\mathscr{F}} \colon f_pf_*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$.

Finalmente, dado un par de morfismos de prehaces $\alpha \colon \mathscr{G} \to f_*\mathscr{F}$ y $\beta \colon f_*\mathscr{G} \to \mathscr{F}$, entonces se inducen los siguientes morfismos:

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{G} \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[r, phantom, "\Longrightarrow"] & f_p\mathscr{G} \arrow[d, "f_p\alpha"] & & \mathscr{G} \arrow[d, "\varepsilon_{\mathscr{G}}"] \\
f_*\mathscr{F} & f_pf_*\mathscr{F} \arrow[d, "\eta_{\mathscr{F}}"] & f_p\mathscr{G} \arrow[d, "\beta"'] \arrow[r, phantom, "\Longrightarrow"] & f_*f_p\mathscr{G} \arrow[d, "f_*\beta"] \\
& \mathscr{F} & \mathscr{F} & f_*\mathscr{F}
\end{tikzcd}
$$

Queda al lector verificar que éstas construcciones son una la inversa de la otra. □

Proposición 3.39: Sean $f \colon X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos, $\mathscr{C}$ una categoría cocompleta y $\mathscr{F} \in \mathsf{Sh}(X; \mathscr{C})$ un haz. Entonces $f_*\mathscr{F} \in \mathsf{Sh}(Y; \mathscr{C})$ también es un haz.

La misma condición no necesariamente se da con f_p.

Definición 3.40: Sea $f \colon X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos y $\mathscr{C}$ una categoría cocompleta. Dado un haz $\mathscr{G} \in \mathsf{Sh}(Y; \mathscr{C})$, se define el ***haz imagen directa*** como la hacificación

$$f^{-1}\mathscr{G} := (f_p\mathscr{G})^+ \in \mathsf{Sh}(X; \mathscr{C}).$$

Corolario 3.40.1: Sea $f \colon X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos y $\mathscr{C}$ una categoría cocompleta. El funtor $f^{-1}(-) \colon \mathsf{Sh}(Y; \mathscr{C}) \to \mathsf{Sh}(X; \mathscr{C})$ es la adjunta izquierda del funtor $f_*(-) \colon \mathsf{Sh}(X; \mathscr{C}) \to \mathsf{Sh}(Y; \mathscr{C})$. En símbolos:

$$f^{-1}(-) \dashv f_*(-), \qquad \operatorname{Hom}_{\mathsf{Sh}(X)}(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}) \approx \operatorname{Hom} \mathsf{Sh}(Y)(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}).$$

Más aún, para cada $x \in X$ se cumple que $(f^{-1}\mathscr{G})_x = \mathscr{G}_{f(x)}$.

3.3 Esquemas

§3.3.1 Espacios anillados y esquemas afínes.

Definición 3.41: Un par $(X, \mathscr{O}_X)$ se dice un espacio anillado si X es un espacio topológico y $\mathscr{O}_X$ es un haz de anillos sobre X, al que llamamos ***haz estructural*** de X. Obviaremos el haz estructural de no haber ambigüedad en los signos. A las secciones de $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ les llamamos ***funciones regulares*** sobre U.

Un ***morfismo de espacios anillados*** es un par $(f, f^\sharp) \colon (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ donde $f \colon X \to Y$ es una función continua y $f^\sharp \colon \mathscr{O}_Y \to f^*\mathscr{O}_X$ es un morfismo de haces sobre Y.

Por el corolario anterior, elegir $f^\sharp \colon f^{-1}\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_X$ determinaría la misma información.

Proposición 3.42: Los espacios anillados (como objetos) y los morfismos entre ellos (como flechas) conforman una categoría.

Ejemplo. Los conjuntos algebraicos (sobre k) presentadas en la primera parte, junto con las funciones regulares, forman espacios anillados.

Fijemos un anillo A, podemos construir un haz sobre $\operatorname{Spec} A$ de la siguiente manera:

Definición 3.43: Dado un anillo A, definamos $\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A} \in \mathsf{PSh}(\operatorname{Spec} A; \mathsf{Set})$ donde, para todo abierto $U \subseteq \operatorname{Spec} A$ definimos $\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}(U)$ como el conjunto de aplicaciones $s \colon U \to \prod_{x \in U} A_{\mathfrak{p}_x}$ tales que:

HE1. Para cada $x \in U$ se cumple que $s(x) \in A_{\mathfrak{p}_x}$.

HE2. Las aplicaciones s son localmente fracciones sobre A. Vale decir, para cada $x \in U$ existe un entorno $x \in V \subseteq U$ y unos elementos $a, f \in A$ tales que

$$y \in V \setminus \mathbf{V}(f) = V \cap \mathbf{D}(f) \implies s(y) = a/f.$$

Si $U \subseteq V$, entonces $\rho^V_U \colon \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}(U) \to \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}(V)$ es la restricción natural. Definiendo la suma y producto coordenada a coordenada, se prueba que $\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}$ determina un prehaz de anillos.

Proposición 3.44: $(\operatorname{Spec} A, \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A})$ es un espacio anillado.

Nótese que lo que hay que demostrar es que esencialmente $\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}$ es un haz. Ahora, tenemos derecho de llamar a $\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}$ como el haz estructural (canónico) sobre $\operatorname{Spec} A$.

Teorema 3.45: Sea A un anillo y sea $X := \operatorname{Spec} A$. Entonces:

1. Para todo $x \in \operatorname{Spec} A$ se cumple que $\mathscr{O}_{X,x} \cong A_{\mathfrak{p}_x}$.
2. Para todo $f \in A$ se cumple que $\Gamma(\mathbf{D}(f), \mathscr{O}_X) \cong A[1/f]$.
3. En particular, $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \cong A$.

Demostración:

1. Definamos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \varphi := \operatorname{ev}_x \colon \mathscr{O}_{X,x} &\longrightarrow A_{\mathfrak{p}_x} \\ s &\longmapsto s(x) \end{aligned}$$

   la cual claramente está bien definida; es un A-homomorfismo de álgebras y es suprayectiva pues, dado $a/f \in A_{\mathfrak{p}_x}$, donde $f \notin \mathfrak{p}_x$, basta elegir la aplicación constante $s = a/f \in \Gamma(\mathbf{D}(f), \mathscr{O}_X)$ y localizar en el haz.

   Veamos que φ es un monomorfismo: para ello, sean $s \in \mathscr{O}_X(U_1), t \in \mathscr{O}_X(U_2)$ tales que $s(x) = t(x)$, veamos que coinciden en un abierto. Por la propiedad HE2, se cumple que $s = a/f$ en $U_1 \cap \mathbf{D}(f)$ y $t = b/g$ en $U2 \cap \mathbf{D}(g)$ para algunos $f, g \notin \mathfrak{p}_x$. Luego $a/f = s(x) = t(x) = b/g$ y así, coinciden en $U_1 \cap U_2 \cap \mathbf{D}(f) \cap \mathbf{D}(g)$ que es un entorno de x.

2. Definamos $\psi \colon A[1/f] \to \Gamma(D(f), \mathscr{O}_X)$ que a cada elemento a/f^n le asigna la función s tal que $s(x) = a/f^n \in A_{\mathfrak{p}_x}$. Claramente s es un homomorfismo de A-álgebras.

   ψ es monomorfismo: Si $\psi(a/f^n) = \psi(b/f^m)$, entonces $a/f^n = b/f^m$ en todo $A_{\mathfrak{p}}$, donde $f \notin \mathfrak{p}$. Así, existe $h \notin \mathfrak{p}$ tal que $h(f^m a - f^n b) = 0 \in A$. Sea $\mathfrak{a} := \operatorname{Ann}(f^m a - f^n b)$, luego $h \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}_x$ y así $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{Z}_x$ para todo $x \in \mathbf{D}(f)$; ergo, $\mathbf{V}(a) \cap \mathbf{D}(f) = \varnothing$. En conclusión $\mathbf{V}(f) \subseteq \mathbf{V}(\mathfrak{a})$ y, por el teorema de ceros de Hilbert, $f \in \operatorname{Rad} \mathfrak{a}$, es decir, $f^\ell \in \mathfrak{a}$ y $f^\ell(f^m a - f^n b) = 0$, por lo que, $a/f^n = b/f^m$ en $A[1/f]$.

ψ es epimorfismo: Sea $s \in \Gamma(\mathbf{D}(f), \mathscr{O}_X)$, por HE2, $\mathbf{D}(f) \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$ donde en cada V_i se cumple que s es constante y vale, digamos, a_i/g_i con $V_i \subseteq \mathbf{D}(g_i)$. Como los abiertos principales forman una base, podemos suponer que $V_i = \mathbf{D}(h_i)$ para algún h_i y luego, por el teorema de ceros de Hilbert, $h_i^{m_i} \in g_i A$ para algún m_i. Luego $h_i^{m_i} = c_i g_i$ para algún $ci \in A$ y, en consecuente, $a_i/g_i = ca_i/h_i^{m_i}$; así, sustituyendo a_i por $c_i a_i$ y h_i por $h_i^{m_i}$, podemos suponer que $\mathbf{D}(f)$ está cubierto por abiertos $\mathbf{D}(h_i)$ en donde s vale a_i/h_i.

Podemos extraer un subcubrimiento finito de $\mathbf{D}(f)$ pues

$$\mathbf{D}(f) \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathbf{D}(h_i) = \mathbf{D}\left(\sum_{i\in I} h_i A\right)$$

lo que, por el teorema de ceros de Hilbert, equivale a que $f^n \in \sum_{i\in I} h_i A$, pero f^n claramente está en una suma de algunos finitos h_i's, luego reescribiendo tenemos que $\mathbf{D}(f) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathbf{D}(h_i)$.

Ahora bien, dados h_i, h_j con $i = j$, se tiene que $\mathbf{D}(h_i) \cap \mathbf{D}(h_j) = \mathbf{D}(h_i h_j) = \varnothing$ y s es constante y vale $a_i/h_i = a_j/h_j \in A[1/h_i h_j]$ en $\mathbf{D}(h_i h_j)$, luego

$$(h_i h_j)^n (a_i h_j - a_j h_i) = 0,$$

donde como hay finitos índices i's podemos elegir un n suficientemente grande. La fórmula se reescribe como $h_j^{n+1}(h_i^n a_i) - h_i^{n+1}(h_j^n a_j) = 0$, así que, reemplazando a_i por $a_i h_i^n$ y h_j por $hn + 1_j$, obtenemos que $h_j a_i = h_i a_j$ para todo i, j. Ahora, como $\mathbf{D}(f) \subseteq \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^n h_i\right)$, tenemos que $f^m = \sum_{i=1}^n b_i h_i$ para algunos $b_i \in A$. Definiendo $a := \sum_{i=1}^n b_i a_i$ se tiene que

$$h_j a = \sum_{i=1}^n b_i a_i h_j = \sum_{i=1}^n b_i h_i a_j = f^m a_j.$$

Luego s toma, en cada $\mathbf{D}(h_i)$, el valor $a/f^m \in A[1/f]$ como se quería probar.

3. Considere el inciso anterior con $f = 1$. □

Definición 3.46: Sean $(A, \mathfrak{m}), (B, \mathfrak{n})$ dos anillos locales. Una aplicación $\varphi\colon A \to B$ se dice un ***homomorfismo de anillos locales*** si es un homomorfismo de anillos tal que $\varphi^{-1}[\mathfrak{n}] = \mathfrak{m}$.

Proposición 3.47: Si $\varphi\colon (A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{n})$ es un homomorfismo de anillos locales, entonces determina un único monomorfismo $\bar{\varphi}\colon A/\mathfrak{m} \hookrightarrow B/\mathfrak{n}$ de cuerpos.

Demostración: Basta aplicar el primer teorema de isomorfismos, notar que $\bar{\varphi}$ no es nula, y recordar que todo homomorfismo cuyo dominio es un cuerpo es necesariamente un monomorfismo. □

Veamos ahora el caso local:

Definición 3.48: Un ***espacio localmente anillado*** $(X, \mathscr{O}_X)$ es un espacio anillado en donde cada fibra $\mathscr{O}_X, x$ es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}_{X,x}$ y con ***cuerpo de restos*** $\Bbbk(x) := \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}$.

Sean $(X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y)$ un par de espacios localmente anillados. Un par $(f, f^\sharp)\colon (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ se dice un ***morfismo de espacios localmente anillados*** si es un morfismo de espacios anillados, y en cada fibra $f_y^\sharp\colon \mathscr{O}_{Y,y} \to (f_*\mathscr{O}_X)_y$ es un homomorfismo de anillos locales.

Como la información $f^\sharp\colon \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ coincide con una flecha $f^\sharp\colon f^{-1}\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_X$, entonces podemos ver que es lo mismo exigir que para $x \in X$ se induce un homomorfismo de anillos locales

$$f_x^\sharp\colon (f^{-1}\mathscr{O}_Y)_x = \mathscr{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathscr{O}_{X,x}.$$

Esto corresponderá mejor con la situación dada entre espectros de anillos.

Sumado a la proposición anterior, nos da que:

Proposición 3.49: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de espacios localmente anillados. Entonces, para cada punto $x \in X$ se determina un monomorfismo entre los cuerpos de restos $\bar{f}_x\colon \Bbbk\left(f(x)\right) \hookrightarrow \Bbbk(x)$.

Corolario 3.49.1: Los espacios de la forma $\operatorname{Spec} A$ con el haz estructural son espacios localmente anillados.

Definición 3.50: Los espacios localmente anillados de la forma $\operatorname{Spec} A$ con el haz estructural se dicen esquemas afínes.

Definición 3.51: Sea A un anillo. El ***espacio afín*** de dimensión n sobre A, denotado $\mathbb{A}_A^n$, es el esquema afín $\mathbb{A}_A^n := \operatorname{Spec}(A[t_1, \dots, t_n])$.

Ejemplo. Si k es un cuerpo, entonces dado un punto $P := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in k^n$ se satisface que el ideal $x_P := (t_1 - \alpha_1, \dots, t_n - \alpha_n)$ es maximal, luego es un punto cerrado de $\mathbb{A}^n_k$. Más aún, si k es algebraicamente cerrado, entonces por el teorema débil de ceros de Hilbert, todos los puntos cerrados de $\mathbb{A}^n_k$ son de la forma x_P.

Proposición 3.52: Sean A, B anillos. Todo homomorfismo de anillos $\varphi\colon A \to B$ induce un morfismo de espacios localmente anillados

$$(\varphi^a, \varphi^\sharp)\colon \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A.$$

Más aún cada morfismo de espacios localmente anillados viene de un homomorfismo de anillos.

Demostración: Por brevedad, denotaremos $f := \varphi^a$ el que se define como $f(x) := \varphi^{-1}[\mathfrak{p}_x]$. Para cada punto $y \in \operatorname{Spec} B$ se determina un homomorfismo de anillos locales $\varphi_y\colon A_{f(y)} \to B_y$. Así, para cada abierto $U \subseteq \operatorname{Spec} A$ y cada sección $s \in \Gamma(U, \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A})$, definimos:

$$\begin{aligned} \varphi^\sharp\colon f^{-1}[U] &\longrightarrow \coprod_{y \in f^{-1}[U]} B_{\mathfrak{p}_y} \\ y &\longmapsto \varphi_y\big(s(f(y))\big). \end{aligned}$$

Queda al lector verificar que efectivamente $\varphi^\sharp(s)$ determina una sección de $\Gamma(f^{-1}[U], \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} B})$.

Sea $(f, f^\sharp)\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ un morfismo de espacios localmente anillados, entonces consideramos las secciones globales $f^\sharp\colon \Gamma(\operatorname{Spec} A, \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}) \to \Gamma(\operatorname{Spec} B, \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} B})$ y recordamos que, por la proposición anterior,

$$\Gamma(\operatorname{Spec} R, \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} R}) \cong R$$

para todo anillo R, luego determina un homomorfismo de anillos $\varphi\colon A \to B$. Para cada $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$, mirando las fibras tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\ A_{f(\mathfrak{p})} \arrow[r, "f^\sharp_{\mathfrak{p}}"] & B_{\mathfrak{p}} \end{tikzcd}$$

con lo que, empleando que $f^\sharp_{\mathfrak{p}}$ es un homomorfismo de anillos locales, concluimos que $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}[\mathfrak{p}]$ y $f^\sharp_{\mathfrak{p}} = \varphi_{\mathfrak{p}}$. $\square$

Ejemplo. Sea $A := \mathbb{C}$ y considere $\sigma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ el isomorfismo de cuerpos dado por la conjugación compleja. Entonces induce un isomorfismo de esquemas $\sigma^a\colon \operatorname{Spec}\mathbb{C} \to \operatorname{Spec}\mathbb{C}$. Ahora bien, el único punto de $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ es $\xi := (0)$, luego necesariamente σ^a (como función continua) es la función que fija a ξ. Así, $\sigma^a = \mathrm{Id}^a$ (como función continua), pero $\sigma^\sharp \neq \mathrm{Id}^\sharp$.

Éste ejemplo sencillo ilustra que las funciones entre esquemas no están únicamente determinadas por la función entre espacios subyacentes.

Ejemplo 3.53: Sea A un dominio de valuación discreta, por ende, un dominio íntegro con sólo dos ideales primos $X := \operatorname{Spec} A = \{(0), \mathfrak{m}\}$. Nótese que $A_\mathfrak{m} = A$ y que $A_{(0)} = \operatorname{Frac} A =: K$. La inclusión $\lambda\colon A \to K$ da lugar al morfismo de espacios localmente anillados $(f, f^\sharp)\colon \operatorname{Spec} K \to X$, donde, como $\operatorname{Spec} K = \{(0)\}$, vemos que $f(y_0) = x_0$.

No obstante, podemos definir otro morfismo de espacios anillados $(g, g^\sharp)\colon \operatorname{Spec} K \to X$ tal que $g(y_0) = x_m$. Nótese que X posee tres abiertos: $X, \{x_0\}, \varnothing$. Así podemos verificar que $g_*\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} K}$ es el haz sobre X:

$$\Gamma(U, g_*\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} K}) = \begin{cases} K, & U = X \\ 0, & U \neq X \end{cases}$$

y construir $g^\sharp(\{x_0\}) := \mathrm{Id}_K\colon K \to K$ y $g^\sharp(X)\colon A \to 0$ el morfismo nulo.

Finalmente, nótese que $g^\sharp_{x_\mathfrak{m}}\colon A \to 0$ no es un homomorfismo de anillos locales, por lo que, $(g, g^\sharp)$ no es un morfismo de espacios localmente anillados. ⌟

Para finalizar ésta subsección, introduciremos una noción que jugará un rol fundamental más adelante:

Definición 3.54: Un ***encaje abierto*** (resp. ***cerrado***) de espacios anillados es un morfismo $(f, f^\sharp)\colon (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ tal que $f\colon X \to Y$ es un encaje topológico abierto (resp. cerrado)[4] y cada $f^\sharp_x$ es un isomorfismo (resp. un epimorfismo) para todo $x \in X$.

Se denota por « $\overset{\circ}{\hookrightarrow}$ » a los encajes abiertos, y por « $\not\hookrightarrow$ » a los encajes cerrados.

Los encajes abiertos tienen una interpretación sencilla:

Proposición 3.55: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado.

[4] Es decir, si $f\colon X \to f[X]$ es un homeomorfismo, y si $f[X] \subseteq Y$ es abierto (resp. cerrado).

1. Para todo abierto $U \subseteq X$, se cumple que la inclusión

$$(i, i^\sharp) \colon (U, \mathscr{O}_X|_U) \hookrightarrow (X, \mathscr{O}_X)$$

es un encaje abierto de espacios anillados.

2. Más aún, todo encaje abierto $f \colon (Y, \mathscr{O}_Y) \hookrightarrow (X, \mathscr{O}_X)$, con $U := f[Y]$, se factoriza por:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, hook, "f"] \arrow[dr, "\bar{f}"', "\sim"] & & X \\ & U \arrow[ur, hook, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Los encajes cerrados son más complicados, pero podemos dar un ejemplo canónico:

Proposición 3.56: Sea A un anillo, $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ un ideal y sea $\pi \colon A \to A/\mathfrak{a}$ la proyección canónica. Entonces induce un encaje cerrado $\pi^a \colon \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}) \to \operatorname{Spec} A$, de modo que $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}) \approx \mathbf{V}(\mathfrak{a})$ (en Top).

DEMOSTRACIÓN: Las propiedades de π^a ya las probamos, y es fácil notar que sobre un abierto principal $\mathbf{D}(f)$ se cumple que $\pi^\sharp \colon A[1/f] \to (A/\mathfrak{a})[1/f]$ es la proyección canónica. □

Ejemplo. Sea k un cuerpo y considere $A := k[\varepsilon]$, donde ε es una indeterminada. Considere los ideales $\mathfrak{a} := (\varepsilon)$ y $\mathfrak{b} := (\varepsilon^2) = \mathfrak{a}_2$, así tenemos los siguientes encajes cerrados:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} k \arrow[rr, hook, "\alpha"] \arrow[dr, hook, "\gamma"'] & & \operatorname{Spec}(k[\varepsilon]) \\ & \operatorname{Spec}\left(\dfrac{k[\varepsilon]}{(\varepsilon^2)}\right) \arrow[ur, hook, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Lo interesante es que tanto α como β tienen por imagen el mismo cerrado $\mathbf{V}(\mathfrak{a})$, pese a que, los esquemas afínes $\operatorname{Spec} k = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$ y $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{b})$ no son isomorfos (¿por qué?). Otra curiosidad es que γ es un encaje cerrado y suprayectivo que no es un isomorfismo de espacios localmente anillados.

Y demostraremos una linda correspondencia, con lo siguiente:

Definición 3.57: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado. Un haz $\mathscr{I}$ sobre X se dice un ***haz de ideales*** si cada $\mathscr{I}(U)$ es un ideal de $\mathscr{O}_X(U)$ y si la restricción $\mathscr{I}(U) \to \mathscr{I}(V)$ es un homomorfismo de $\mathscr{O}_X(U)$-módulos. Dado un haz de ideales $\mathscr{I}$ definimos:

$$\mathbf{V}(\mathscr{I}) := \{x \in X : \mathscr{I}_x = \mathscr{O}_{X,x}\} \subseteq X.$$

Esta noción sigue estando dentro de nuestros limites, puesto que los ideales son grupos abelianos.

Lema 3.58.A: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado e $\mathscr{I}$ un haz de ideales de $\mathscr{O}_X$. Entonces $Z := \mathbf{V}(\mathscr{I})$ es un cerrado de X y denotando $j\colon Z \to X$ la inclusión se verifica que $(Z, j^{-1}(\mathscr{O}_X/I))$ es un espacio anillado y existe un encaje cerrado $(j, j^\sharp)\colon Z \to X$ tal que $j^\sharp$ es el epimorfismo:

$$\mathscr{O}_X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathscr{O}_X/\mathscr{I} = j_*^{-1}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}). \tag{3.2}$$

Demostración: Si $x \notin \mathbf{V}(\mathscr{I})$, entonces $\mathscr{I}_x = \mathscr{O}_{X,x}$ y existe un entorno $x \in U$ y una sección $f \in \Gamma(U, \mathscr{I})$, de modo que su germen $f|_x = 1$, luego existe un subentorno $x \in V \subseteq U$ de modo que $f|_V = 1$ y así $V \subseteq X \setminus \mathbf{V}(\mathscr{I})$. Finalmente para cada $x \in \mathbf{V}(\mathscr{I})$ se cumple que las fibras

$$\big(j^{-1}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I})\big)_x = (\mathscr{O}_X/\mathscr{I})_x = \mathscr{O}_{X,x}/\mathscr{I}_x$$

son anillos locales. Finalmente es claro verificar lo demás. □

Proposición 3.58: Sea $(f, f^\sharp)\colon (Y, \mathscr{O}_Y) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (X, \mathscr{O}_X)$ un encaje cerrado de espacios anillados. Sea Z el subespacio anillado con espacio topológico $\mathbf{V}(\mathscr{I})$ donde $\mathscr{I} := \ker(f^\sharp) \subseteq \mathscr{O}_X$. Entonces f se factoriza por un isomorfismo $g\colon Y \to Z$ y la inclusión $j\colon Z \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow X$.

Demostración: Como $f[Y]$ es cerrado en X, se puede comprobar que

$$(f_*\mathscr{O}_Y)_x = \begin{cases} 0, & x \notin f[Y] \\ \mathscr{O}_{Y,y}, & x \in f[Y] \end{cases}$$

Por hipótesis se tiene la sucesión exacta $0 \to \mathscr{I} \to \mathscr{O}_X \to f_*\mathscr{O}_Y \to 0$ de haces (sobre X) y, por tanto, se verifica que $\mathscr{I}_x = \mathscr{O}_{X,x}$ syss $x \notin f[Y]$, por lo que, $Z := \mathbf{V}(\mathscr{I}) = f[Y]$. Sea $g\colon Y \to Z$ el homeomorfismo inducido por f, y sea $j\colon Z \hookrightarrow X$ la inclusión canónica, claramente $f = g \circ j$ y por la funtorialidad de $(-)_*$ tenemos que $f_*\mathscr{O}_Y = j_*g_*\mathscr{O}_Y$. Finalmente, empleando que j es un encaje es fácil ver que se cumple

$$\mathscr{O}_Z = j^{-1}j_*\mathscr{O}_Z \cong j^{-1}j_*g_*\mathscr{O}_Y = g_*\mathscr{O}_Y,$$

(¿por qué?), de modo que g es un isomorfismo de espacios anillados como se quería ver. □

Ésta proposición aparecerá más adelante al clasificar subesquemas cerrados.

§3.3.2 Esquemas.

Definición 3.59: Un ***esquema*** es un espacio localmente anillado $(X, \mathscr{O}_X)$ tal que todo punto $x \in X$ posee un entorno $x \in U$ tal que $(U, \mathscr{O}_X|_U)$ es isomorfo (como espacio localmente anillado) a un esquema afín. Un ***morfismo de esquemas*** $(f, f^\sharp)\colon (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ es un morfismo de espacios localmente anillados.

Proposición 3.60: Los esquemas (como objetos) y los morfismos de esquemas (como flechas) conforman una categoría, denotada Sch.

Proposición 3.61: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un esquema y $U \subseteq X$ un abierto. Entonces $(U, \mathscr{O}_X|_U)$ también es un esquema.

Demostración: Claramente $(U, \mathscr{O}_X|_U)$ es un espacio localmente anillado, veamos que cada punto posee un entorno que es un esquema afín. Sea $x \in U$ un punto, luego posee un entorno $x \in V \subseteq X$ tal que $(V, \mathscr{O}_X|_V)$ es isomorfo a un esquema afín $\operatorname{Spec} A$. Luego $V \cap U$ es un entorno de x en V y admite un subentorno de la forma $\mathbf{D}(f) =: W$ para algún $f \in A$. El par $(W, \mathscr{O}_X|_W)$ es un esquema afín, pues $W \cong \operatorname{Spec}(A[1/f])$ y $W \subseteq U$ es abierto. □

Proposición 3.62: Sean X, Y esquemas, sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X. Dada una familia de morfismos de esquemas $f_i\colon U_i \to Y$ donde los f_i's son compatibles (es decir, $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$ para cada $i, j \in I$), entonces existe un único morfismo de esquemas $f\colon X \to Y$.

Corolario 3.62.1: Si $U \subseteq X$ es un abierto (no vacío) de un esquema, entonces la inclusión $\iota\colon U \hookrightarrow X$ es un encaje abierto de esquemas.

Teorema 3.63: Sean X, Y esquemas donde $Y = \operatorname{Spec} A$. Entonces existe una biyección natural entre

$$\operatorname{Hom}_{\mathsf{Sch}}(X, \operatorname{Spec} A) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathsf{Ring}}(A, \Gamma(X, \mathscr{O}_X)).$$

DEMOSTRACIÓN: Claramente, dado un morfismo de esquemas $(f, f^\sharp)\colon X \to \operatorname{Spec} A$, entonces da un morfismo de haces sobre $\operatorname{Spec} A$ dado por $f^\sharp\colon \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A} \to f_*\mathscr{O}_X$, mirando secciones globales obtenemos un homomorfismo de anillos.

Ahora bien, sea $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ donde cada U_i es un abierto afín, entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathsf{Sch}}(X, Y) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, hook, "\alpha"'] & \operatorname{Hom}_{\mathsf{Ring}}(A, \Gamma(X, \mathscr{O}_X)) \arrow[d, "\beta"] \\
\prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_{\mathsf{Sch}}(U_i, Y) \arrow[r, "\gamma", "\sim"'] & \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_{\mathsf{Ring}}(A, \Gamma(U_i, \mathscr{O}_X))
\end{tikzcd}$$

Aquí γ es una biyección por tratarse de morfismos entre esquemas afínes, y α es inyectivo por el axioma de pegado de esquemas, luego ρ también es inyectivo. Sea $\varphi\colon A \to \mathscr{O}_X(X)$ un homomorfismo de anillos, entonces componiendo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[rr, bend left, "\varphi_i"] & \mathscr{O}_X(X) \arrow[r, "\rho^X_{U_i}"'] & \mathscr{O}_X(U_i)
\end{tikzcd}$$

Obtenemos una familia de homomorfismos $\varphi_i\colon A \to \mathscr{O}_X(U_i)$ que son compatibles, luego inducen una familia de morfismos de esquemas $\varphi_i^a\colon U_i \to Y$ compatibles que pegamos en un morfismo f por la proposición anterior, y satisface que $\rho(f) = \varphi$. □

Corolario 3.63.1: Para todo esquema $(X, \mathscr{O}_X)$ existe un único morfismo de esquemas $(f, f^\sharp)\colon X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. En resumen, $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ es el objeto final de Sch.

Proposición 3.64: Sean $(X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y)$ un par esquemas, y $U \subseteq X, V \subseteq Y$ abiertos. Dado un isomorfismo de esquemas

$$\varphi\colon (U, \mathscr{O}_X|_U) \longrightarrow (V, \mathscr{O}_Y|_V)$$

entonces admite un coproducto fibrado $X \amalg_\varphi Y =: Z$ que también es un esquema. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo (en Sch):

$$\begin{tikzcd}
U \cong V \arrow[r, hook, "U"] \arrow[d, hook, "V"'] & X \arrow[d, dashed] \\
Y \arrow[r, dashed] & X \amalg_\varphi Y \arrow[ul, phantom, "\lrcorner", very near start]
\end{tikzcd}$$

Demostración: Explicitaremos la construcción. El espacio topológico de Z es el espacio topológico dado por el cociente de la suma de espacios $X \amalg Y$ bajo la relación $x \sim \varphi(x)$ para $x \in U$. Esto determina dos aplicaciones $i \colon X \to Z, j \colon Y \to Z$ con la condición de que $W \subseteq Z$ es abierto syss $i^{-1}[W] \subseteq X$ y $j^{-1}[W] \subseteq Y$ son abiertos. Para un abierto $W \subseteq Z$, denotemos $U' := i^{-1}[W], V' := j^{-1}[W]$, entonces sus secciones son:

$$\Gamma(W, \mathscr{O}_Z) := \{(s_1, s_2) \in \mathscr{O}_X(U') \times \mathscr{O}_Y(V') : \varphi(s_1|_{U\cap U'}) = s_2|_{V\cap V'}\}.$$

Finalmente, es fácil verificar que $(Z, \mathscr{O}_Z)$ es un espacio localmente anillado, y cada punto de Z está contenido en una copia de X o de Y, de modo que posee un entorno que es un esquema afín. $\square$

Nótese que la prueba también funciona para diagramas posiblemente infinitos. Si dejamos que $U = V = \varnothing$, entonces obtenemos un coproducto en el sentido usual.

Ejemplo. Sea A un anillo arbitrario, entonces $X := \coprod_{\mathbb{N}} \operatorname{Spec} A$ es un esquema, cuyo espacio topológico es una suma infinita de espacios no vacíos, luego no es compacto. Como todo esquema afín es compacto, entonces X no es afín.

Si $A = k$ es un cuerpo, podemos describir más en detalle al esquema X. Como $\operatorname{Spec} k = \{x_0\}$, entonces fácil verificar que para un abierto $U \subseteq X$ (que solo es un conjunto de puntos), se cumple que $\Gamma(U, \mathscr{O}_X) = \prod_{x\in U} k$, y la restricción entre abiertos equivale a borrar coordenadas.

El ejemplo 3.82 da otro esquema que no es afín.

Con esto podemos convertir al espectro homogéneo $\operatorname{Proj} A$ en un esquema:

Proposición 3.65: Sea A un anillo graduado. Existe un haz $\mathscr{O}_{\operatorname{Proj} A}$ sobre $\operatorname{Proj} A$ de modo que para todo $f \in A$ homogéneo se cumpla que

$$\Gamma(\mathbf{D}_+(f), \mathscr{O}_{\operatorname{Proj} A}) \cong A_{(f)}.$$

Demostración: Como indica el enunciado, para $f \in A$ homogéneo definamos $\Gamma(\mathbf{D}_+(f), \mathscr{O}_{\operatorname{Proj} A}) := A_{(f)}$. Si $g \in A$ es homogéneo tal que $\mathbf{D}_+(f) \supseteq \mathbf{D}_+(g)$ entonces, la proposición 3.29 nos da la restricción $\mathscr{O}_{\operatorname{Proj} A}(\mathbb{D}_+(f)) = A_{(f)} \to A_{(g)} = \mathscr{O}_{\operatorname{Proj} A}(\mathbf{D}_+(g))$. Esto determina un prehaz sobre la base $\mathcal{B}$ de abiertos principales, lo que, por la misma proposición, determina un haz; y se extiende de manera única a un haz sobre $\operatorname{Proj} A$. □

Definición 3.66: Sea A un anillo. El espacio proyectivo de dimensión n sobre A, denotado $\mathbb{P}^n_A$, es el esquema $\operatorname{Proj}(A[t_0, \dots, t_n])$.

Ejemplo 3.67: Como $\{\mathbf{D}_+(t_i)\}_{i=0}^n$ es un cubrimiento finito por abiertos de $\operatorname{Proj}(A[t_0, \dots, t_n]) = \mathbb{P}^n_A$, y como $A[t_0, \dots, t_n]_{(t_i)} \cong A[t_0/t_i, \dots, t_n/t_i]$, por ello es común ver la descripción de que $\mathbb{P}^n_A$ es el esquema que resulta de pegar $\operatorname{Spec}(A[t_0/t_i, \dots, t_n/t_i])$. ⌟

Ahora, la función continua dada por la proposición 3.30 se traduce en los siguientes enunciados:

Proposición 3.68: Sean A, B un par de anillos graduados, y sea $\varphi\colon A \to B$ un homomorfismo de anillos graduados. Sea $M := (A_+)^e = \varphi[A_+]B$, entonces induce un morfismo de esquemas $\varphi^a\colon \mathbf{D}_+(M) \to \operatorname{Proj} A$ tal que para todo $g \in A$ homogéneo se cumple que $(\varphi^a)^{-1}[\mathbf{D}_+(g)] = \mathbf{D}_+(\varphi(g))$ y que $\varphi^a|_{\mathbf{D}_+(g)}$ coincide con el morfismo inducido por $A_{(g)} \to B_{(\varphi(g))}$.

Proposición 3.69: Sea A un anillo y $\mathfrak{a} \trianglelefteq A[t_0, \dots, t_n]$ un ideal homogéneo, de modo que $B := A[t_0, \dots, t_n]/\mathfrak{a}$ es una A-álgebra graduada. Entonces $\operatorname{Proj} B$ es isomorfo a un subesquema cerrado de $\mathbb{P}^n_A$ con espacio topológico $\mathbf{V}_+(\mathfrak{a})$.

Definición 3.70: Sea A un anillo. Un ***esquema proyectivo*** sobre A es un A-esquema isomorfo a un subesquema cerrado de $\mathbb{P}^n_A$.

Acabamos de ver que toda A-álgebra graduada de tipo finito B es tal que su espectro homogéneo es un A-esquema proyectivo.

Definición 3.71: Sea S un esquema fijo. Decimos que X es un esquema sobre S o ***S-esquema*** si es morfismo de esquemas $\pi\colon X \to S$, a éste morfismo le llamaremos morfismo estructural. Si A es un anillo, decimos que X es un esquema sobre A si es un esquema sobre $\operatorname{Spec} A$. Un morfismo entre un par X, Y de esquemas sobre S es un diagrama conmutativo (en Sch):

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & S \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \| \\ Y & \longrightarrow & S \end{array}$$

Los esquemas sobre S forman una categoría (de corte), denotada Sch/S.

Corolario 3.71.1: Sea A un anillo. Los A-esquemas son esquemas dotados de un haz de A-álgebras.

Ésta definición debería hacer eco de la definición de una A-álgebra. Trivialmente todo esquema es un esquema sobre $\mathbb{Z}$.

Teorema 3.72: Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Existe un funtor canónico plenamente fiel $t\colon \mathsf{Var}_k \to \mathsf{Sch}/k$. Más aún, una variedad V es homeomorfa a los puntos cerrados de $F(V)$ y su anillo de funciones regulares es homeomorfo al dado por la restricción del haz estructural al subespacio de los puntos cerrados.

Demostración: Sea X un espacio topológico cualquiera, entonces $t(X)$ es el conjunto de los cerrados no vacíos irreducibles de X. En ésta demostración emplearemos, sin citar, las propiedades de los conjuntos irreducibles vistas en §1.1.2. Se puede verificar que si $(F_i)_{i\in I}$ son subconjuntos cerrados de X, entonces:

1. Si $F_1 \subseteq F_2$, entonces $t(F_1) \subseteq t(F_2)$. En particular, $t(F) \subseteq t(X)$.
2. $t(F_1 \cup F_2) = t(F_1) \cup t(F_2)$.
3. $t\left(\bigcup_{i\in I} F_i\right) = \bigcap_{i\in I} t(F_i)$.

En consecuencia, los conjuntos de la forma $t(F)$ forman los cerrados de una topología sobre $t(X)$.

Dada una función continua $f\colon X \to Y$, definimos

$$\begin{aligned} t(f)\colon t(X) &\longrightarrow t(Y) \\ t(F) &\longmapsto \left\{\overline{f[G]} : G \in t(F)\right\}. \end{aligned}$$

Para un espacio topológico X podemos definir $\alpha\colon X \to t(X)$ dado por $\alpha(P) := \overline{\{P\}}$. Y $\alpha^{-1}[-]$ determina una biyección entre abiertos de $t(X)$ y abiertos de X, pues:

$$t(X) \setminus t(F) \longmapsto \alpha^{-1}\big[t(X) \setminus t(F)\big] = X \setminus F.$$

En consecuente, α es continua. Sea V una variedad sobre k y sea $\mathscr{O}_V$ su haz de funciones regulares, entonces construimos el k-espacio localmente anillado $\big(t(V), \alpha_*\mathscr{O}_V\big)$.

Sea V una variedad afín sobre k, y sea $k[V] := A$ su anillo de coordenadas afínes, entonces definimos

$$\begin{aligned} \beta\colon V &\longrightarrow \operatorname{Spec}(k[V]) \\ P &\longmapsto \mathfrak{m}_{V,P}, \end{aligned}$$

ésta aplicación determina una biyección entre V y $\operatorname{mSpec}(k[V])$, y más aún, determina un homeomorfismo entre ambos, luego es continua. Denotemos $X := \operatorname{Spec}(k[V])$. Sea $\mathfrak{a} \trianglelefteq k[V]$ un ideal de funciones regulares, luego $\beta^{-1}[\mathbf{D}_X(\mathfrak{a})] = \mathbf{D}_V(\mathfrak{a})$, es decir, es el conjunto de puntos que no se anulan en elementos de $\mathfrak{a}$. Luego podemos construir el morfismo $\beta^\sharp\colon \mathscr{O}_X \to \beta_*\mathcal{O}_V$ bajo la regla de que para $\mathfrak{a} \trianglelefteq k[V]$:

$$\beta^\sharp\colon \Gamma(X \setminus \mathbf{V}(\mathfrak{a}), \mathscr{O}_X) \longrightarrow \Gamma(V \setminus \mathbf{V}(\mathfrak{a}), \mathcal{O}_V),$$

dado por la evaluación. Finalmente, es fácil comprobar que $(\beta, \beta^\sharp)$ determina un isomorfismo de espacios localmente anillados, así que $\big(t(V), \alpha_*\mathcal{O}_V\big)$ es un esquema afín.

Como toda variedad admite una base por abiertos afínes, entonces $\big(t(V), \alpha_*\mathcal{O}_V\big)$ siempre resulta ser un esquema. Dadas dos variedades V, W sobre k y un morfismo de variedades $f\colon V \to W$ entre ellos, entonces podemos construir un morfismo de esquemas $(t(f), t(f)^\sharp)\colon t(V) \to t(W)$ entre ellos con construcciones similares a las anteriores (donde $t(f)^\sharp$ mandará secciones sobre W a secciones sobre V, mediante precomposición por f). Se puede verificar que ésta construcción da lugar a una biyección:

$$\operatorname{Hom}_{\mathsf{Var}_k}(V, W) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathsf{Sch}/k}(t(V), t(W))$$

que es de hecho natural, luego $t(-)$ es plenamente fiel (cfr. **[40],** prop. 1.11).

Finalmente, $t(V)$ es un esquema sobre k, donde el morfismo de esquemas viene inducido por el homomorfismo de anillos $k \to \Gamma\big(t(V), \alpha_*\mathcal{O}_V\big) = \mathcal{O}_V(V)$ que a cada $\lambda \in k$ lo manda a la función regular constante sobre V. $\square$

Éste teorema nos dice que la teoría de esquemas extiende a la teoría de variedades algebraicas. Como ejercicio para el lector, ¿dónde empleamos que k sea algebraicamente cerrado? ¿Qué sucede con el funtor si k no fuera algebraicamente cerrado?

Definición 3.73: Sea k un cuerpo. Un k-esquema X se dice un:

Esquema algebraico afín Si es el espectro de una k-álgebra de tipo finito.

Esquema algebraico Si cada punto posee un entorno que es un conjunto algebraico afín.

Esquema algebraico proyectivo Si es un k-esquema proyectivo.

§3.3.3 Propiedades de esquemas. Comencemos por dar un par de definiciones:

Definición 3.74: Un espacio topológico X se dice ***cuasiseparado*** si la intersección de todo par de abiertos compactos es compacto.

Un esquema X se dice ***compacto*** (resp. ***cuasiseparado***, ***conexo***, ***irreducible***) si su espacio topológico es compacto (resp. cuasiseparado, conexo, irreducible).

Por ejemplificar, los espacios topológicos noetherianos son compactos y cuasiseparados.

Proposición 3.75: Sea X un esquema y $f \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ una sección global. Denótese

$$X_f := \{x \in X : f|_x \notin \mathfrak{m}_{X,x} \subseteq \mathscr{O}_{X,x}\} = \{x \in X : \mathscr{O}_{X,x} = f|_x \mathscr{O}_{X,x}\}.$$

Entonces:

1. Si $\operatorname{Spec} B \cong U \subseteq X$ es un subesquema abierto afín y $\overline{f} := f|_U \in B \cong \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$, entonces $U \cap X_f = \mathbf{D}_B(\overline{f})$. En consecuencia, X_f es abierto en X.

2. Si X es compacto, entonces para todo $a \in A := \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ se cumple que $a|_{X_f} = 0$ syss $f^n a = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

3. Si X es cuasiseparado, entonces para todo $b \in \Gamma(X_f, \mathscr{O}_X)$ existe $a \in A$ tal que $a|_{X_f} = f^n b$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Más aún, $\Gamma(X_f, \mathscr{O}_X) \cong A[1/f]$.

Definición 3.76: Un esquema $(X, \mathscr{O}_X)$ se dice ***reducido*** si para cada abierto $U \subseteq X$, el anillo $\mathscr{O}_X(U)$ es reducido (i.e., no posee nilpotentes). Un esquema se dice ***íntegro*** si para cada abierto no vacío $U \subseteq X$, el anillo $\mathscr{O}_X(U)$ es un dominio íntegro (no nulo).

Proposición 3.77: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un esquema.

1. Un punto ξ de X es genérico syss $\overline{\{\xi\}}$ es una componente irreducible de X. En consecuencia, hay una biyección entre puntos genéricos y componentes irreducibles de X.

2. Para todo punto $x \in X$, las componentes irreducibles de $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{X,x})$ están en biyección con las componentes irreducibles de X que contienen a x.

Demostración:

1. Sea F una componente irreducible de X y sea $U \subseteq F$ un abierto afín no vacío. Nótese que U es denso por el teorema 1.17 y es irreducible, luego posee un único punto genérico $\xi \in U$ por la proposición 3.11 tal que $\overline{\{\xi\}} = U = F$. Si F tuviese otro punto denso η, entonces éste cortaría a todo abierto de F, en particular, $\eta \in U$ sería denso, luego $\eta = \xi$ y se comprueba que ξ es punto genérico de F y de X.

2. Sea x arbitrario y sea U un entorno afín de x, de modo que $\mathscr{O}_{X,x} = (\mathscr{O}_X|_U)_x$, lo que nos reduce al caso afín. Luego podemos considerar a x como un primo y luego los puntos genéricos son los primos minimales que están contenidos en $\mathfrak{p}_x$ por la proposición 3.11. $\square$

Corolario 3.77.1: Un esquema irreducible posee un único punto genérico que, además, resulta ser denso.

Proposición 3.78: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un esquema, entonces:

1. X es reducido syss cada anillo local $\mathscr{O}_{X,x}$ es reducido.

2. Sea $\mathscr{O}_{X_{\text{red}}}$ la hazificación del prehaz $U \mapsto \Gamma(U, \mathscr{O}_X)_{\text{red}}$. Entonces $(X, \mathscr{O}_{X_{\text{red}}})$ es un esquema reducido, que denotaremos X_{red}. Más aún, existe un morfismo de esquemas canónico $(f, f^\sharp)\colon X_{\text{red}} \to X$ tal que f es un homeomorfismo.

3. Sea $g\colon X \to Y$ un morfismo de esquemas. Entonces existe un único morfismo $g_{\text{red}}\colon X_{\text{red}} \to Y_{\text{red}}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X_{\text{red}} \arrow[r, dashed, "\exists! g_{\text{red}}"] \arrow[d] & Y_{\text{red}} \arrow[d] \\ X \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

En consecuencia, $(-)_{\text{red}} \colon \mathsf{Sch} \to \mathsf{Sch}$ es un funtor covariante. Denotando por $\mathscr{R}$ la subcategoría plena de esquemas reducidos y denotando $\iota \colon \mathscr{R} \to \mathsf{Sch}$ el funtor inclusión, tenemos que $(-)_{\text{red}} \dashv \iota$.

4. Sea Z un cerrado de X. Existe un único haz de anillos sobre Z tal que Z es un subesquema cerrado reducido de X.

Demostración:

1. $\Longrightarrow$. Sea $x \in X$ un punto y $s \in \mathscr{O}_{X,x}$ un gérmen local no nulo. Luego, $s^n = 0$ syss existe una sección $t \in \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ sobre un entorno U de x, tal que $t|_x = s$ y $t^n = 0$, pero dicha sección no existe por que X es reducido.

   $\Longleftarrow$. Sea $s \in \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ una sección no nula tal que $s^n = 0$. Entonces como $s = 0$, existe $x \in U$ tal que el gérmen $s|_x = 0$ y $s^n|_x = 0$, lo que es absurdo pues los anillos locales son reducidos.

2. Para todo anillo, tenemos el homomorfismo de anillos $\pi \colon A \to A/\mathfrak{N} = A_{\text{red}}$ que induce $\pi^a \colon \operatorname{Spec}(A_{\text{red}}) = (\operatorname{Spec} A)_{\text{red}} \to \operatorname{Spec} A$. Pegando estos morfismos de esquemas, pues son compatibles, obtenemos el morfismo $X_{\text{red}} \to X$.

3. Ejercicio para el lector.

4. Sea U un abierto afín sobre X, luego $Z \cap U$ es un cerrado en U, por ende, $\mathscr{O}_Z(Z \cap U) = \mathscr{O}_X(U)/\mathfrak{a}$ para algún $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathscr{O}_X(U)$, donde $Z \cap U = \mathbf{V}_U(\mathfrak{a})$. Si Z es reducido, entonces $\mathfrak{a}$ debe ser radical. Si $\mathscr{O}_Z(Z \cap U)$ tuviese otra estructura sería de la forma $Z \cap U = \mathbf{V}(\mathfrak{b})$, donde $\mathfrak{b} = \operatorname{Rad} \mathfrak{b} = \operatorname{Rad} \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ por el teorema 3.9. Para probar la existencia, basta elegir U_i un cubrimiento de X por abiertos afínes y dado $Z \cap U_i = \mathbf{V}_U(\mathfrak{a}_i)$, podemos definir $\mathscr{O}_Z(Z \cap U_i) := \mathscr{O}_X(U_i)/\operatorname{Rad} \mathfrak{a}_i$. □

El funtor de reducción $(-)_{\text{red}}$ será importante más adelante y su mención no es puramente estética.

Proposición 3.79: Un esquema es íntegro syss es reducido e irreducible.

Demostración: $\Longrightarrow$. Claramente un esquema íntegro es reducido. Si X no fuera irreducible, entonces existirían dos abiertos U_1, U_2 no vacíos disjuntos, luego nótese que $\mathscr{O}_X(U_1 \cup U_2) \cong \mathscr{O}_X(U_1) \times \mathscr{O}_X(U_2)$ por proposición 3.64, el cual no es un dominio íntegro.

$\Longleftarrow$. Sea U un abierto de X y sean $f, g \in \mathscr{O}_X(U)$ tales que $fg = 0$. Entonces sean $Y := \{x \in U : f|_x \in {}_{X,x}\}$ y $Z := \{x \in U : g|_x \in \mathfrak{m}_{X,x}\}$ subconjuntos cerrados, por la proposición 3.75, de U e $Y \cup Z = U$. Como X es irreducible, entonces U también, por lo que alguno de los dos conjuntos Y, Z es U. Digamos que $Y = U$, entonces $f|_x \in \mathfrak{m}_{X,x}$ para todo $x \in U$, luego eligiendo un abierto afín $V = \operatorname{Spec} A$, entonces vemos que $\varnothing = V \cap U_f = \mathbf{D}_A(f)$, luego es fácil notar que $f|_V$ debe ser nilpotente, pues f está contenido en todos los primos de A y $\mathfrak{N}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p}$ por el teorema A.20. Pero como $f|_V$ es nilpotente y A es reducido, entonces $f|_V = 0$ para todos los abiertos afínes, luego $f = 0$ como se quería probar. $\square$

Por la proposición 3.77, entonces todo esquema íntegro posee un único punto genérico.

Corolario 3.79.1: Un esquema es íntegro syss es conexo y cada anillo local $\mathscr{O}_{X,x}$ es un dominio íntegro.

Demostración: $\Longrightarrow$. Trivial.

$\Longleftarrow$. Sea $U = \operatorname{Spec} A$ un abierto afín no vacío. Sea ξ un punto genérico de U, entonces A_ξ es un anillo local artiniano y es un dominio íntegro, luego es un cuerpo (teorema A.27), por lo que, $\xi = (0)$ es primo y A es un dominio íntegro. Ahora veamos que $\mathscr{O}_X(X)$ es íntegro; si $fg \in \mathscr{O}_X(X)$ son tales que $fg = 0$, entonces sin perdida de generalidad supongamos que $f|_U = 0$ en el abierto afín U. Sea V otro abierto afín no vacío, si $V \cap U = \varnothing$, entonces $\mathscr{O}_X(V \cup U) = \mathscr{O}_X(V) \times \mathscr{O}_X(U)$, de modo que $V \cup U$ es un abierto afín de espectro no íntegro, lo cual es absurdo. Así que V se corta con U y como $\mathbf{V}_V(f) \supseteq U \cap V$ es denso, entonces $\mathbf{V}_V(f) = V$. Así que $f|_V = 0$ para todo abierto afín, y luego $f = 0$. $\square$

Lema 3.80: Sea A un dominio íntegro, $K := \operatorname{Frac} A$ y sea $\xi := (0) \in \operatorname{Spec} A =: X$. Entonces $\mathscr{O}_{X,\xi} = K$ y para todo abierto no vacío $U \subseteq X$ se cumple que $\xi \in U$, de modo que el homomorfismo canónico $\mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_{X,\xi}$ es inyectivo. Si $U \supseteq V \neq \varnothing$ es abierto, entonces la restricción $\rho^U_V \colon \mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_X(V)$ también es inyectiva.

Demostración: Nótese que $\mathscr{O}_{X,\xi} = A(0) = K$, luego para todo $U = \mathbf{D}(f)$ identificamos $\mathscr{O}_X(\mathbf{D}(f)) \cong A[1/f] \subseteq K$ lo que corresponde al homomorfismo canónico. Más generalmente, si $s \in \mathscr{O}_X(U)$ con $U = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{D}(f_i)$ es tal que $s|_{\mathbf{D}(f_i)} = 0$, entonces $s = 0$, lo que da que el homomorfismo canónico $\mathscr{O}_X(U) \to K$ sea inyectivo. Finalmente como la composición

$\mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_X(V) \to K$ es inyectiva, entonces ρ^U_V lo es. □

Proposición 3.81: Sea X un esquema íntegro con punto genérico ξ. Entonces:

1. Sea V un abierto afín, entonces el homomorfismo canónico $\mathscr{O}_X(V) \to \mathscr{O}_{X,\xi}$ induce un isomorfismo $\operatorname{Frac}(\mathscr{O}_X(V)) \cong \mathscr{O}_{X,\xi}$.
2. Para todo abierto $U \subseteq X$ y todo punto $x \in X$, los homomorfismos $\mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_{X,x}$ y $\mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{O}_{X,\xi}$ son inyectivos.
3. Identificando $\mathscr{O}_X(U)$ y $\mathscr{O}_{X,x}$ como subanillos de $\mathscr{O}_{X,\xi}$ se tiene que:

$$\mathscr{O}_X(U) = \bigcap_{x \in U} \mathscr{O}_{X,x}.$$

Demostración:

1. Basta notar que $\xi \in V$ también es punto genérico de $V = \operatorname{Spec} A$ como esquema. Luego $\mathscr{O}_X(V) \cong A \to \mathscr{O}_{V,\xi} = \mathscr{O}_{X,\xi} = \operatorname{Frac} A$ por el lema anterior.
2. Sea $f \in \mathscr{O}_X(U)$ tal que $f|_x = 0$, luego $f|_W = 0$ para algún entorno afín de x. Sea $V \subseteq U$ un entorno afín arbitrario de x, luego como X es irreducible, $W \cap V = \varnothing$ y como $f|_{W \cap V} = 0$ entonces $f|_V = 0$, pues $\mathscr{O}_X(V) \hookrightarrow \mathscr{O}_X(V \cap W)$ es inyectiva por el lema anterior. Así, por axioma de pegado, $f = 0$.

   El hecho de que $\mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{O}_{X,\xi}$ sea inyectivo puede corroborarse pasando a un entorno afín de x, donde se reduce a notar que $A_\mathfrak{p} \hookrightarrow A_{(0)}$ es inyectivo para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.
3. Podemos reducirnos al caso afín, el cual es fácilmente verificable. □

Ejemplo 3.82 (plano afín sin orígen)**:** Sea k un cuerpo y considere el plano afín $X := \mathbb{A}^2_k$. Ahora, considere el abierto $U := X \setminus \{(x, y)\}$ el cual es un esquema; vamos a probar que U no es un esquema afín.

Nótese que $U = \mathbf{D}(x) \cup \mathbf{D}(y)$, esto es pues $\mathfrak{p} \in \mathbf{D}(x)$ syss $\mathfrak{p} \supseteq (x)$, y lo mismo con y, luego $\mathfrak{p} \notin U$ syss $\mathfrak{p} \subseteq (x)$ y $\mathfrak{p} \supseteq (y)$, por lo que $\mathfrak{p} \subseteq (x, y)$ y el punto (x, y) es maximal.

Luego considere la restricción $\rho^X_U : k[x, y] \to \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$. Una sección $s \in \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ es tal que es el pegado de una sección

$$f(x, y) := s|_{\mathbf{D}(x)} \in \Gamma(\mathbf{D}(x), \mathscr{O}_X) \cong k[x, y][1/x]$$

y una sección $g(x,y) := s|_{\mathbf{D}(y)} \in \Gamma(\mathbf{D}(y), \mathscr{O}_X)$ tales que $f|_{\mathbf{D}(x)\cap\mathbf{D}(y)} = g|_{\mathbf{D}(x)\cap\mathbf{D}(y)}$. Como $k[x,y]$ es un dominio íntegro, entonces la restricción a abiertos es siempre inyectiva, entonces tenemos que la sección $s \in k(X) = k(x,y)$ solo tiene como posibles denominadores múltiplos de x (dados en f) o múltiplos de y (dados en g), y como f no tiene denominador con y, entonces s tampoco. Así, $s \in k[x,y]$ y se ve que ρ_U^X es un isomorfismo.

Finalmente, si U fuera afín, entonces $\rho_U^X : \mathscr{O}_X(X) \to \mathscr{O}_U(U)$ determina de forma única el morfismo de esquemas $\iota : U \to X$ que es necesariamente la inclusión, y como entre esquemas afínes el funtor $\operatorname{Spec}(-)$ es una equivalencia de categorías tendríamos que ι es un isomorfismo de esquemas, pero claramente no es suprayectivo. ⌟

En espíritu del mismo ejemplo, haga el siguiente ejercicio:

Ejercicio 3.83: Sea k un cuerpo y sea $\mathbb{P}_k^n =: X$ un espacio proyectivo. Demuestre que las secciones globales son $\Gamma(\mathbb{P}_k^n, \mathscr{O}_X) = k$ y concluya que $\mathbb{P}_k^n$ no es un esquema afín.

Teorema 3.84: Sean X, Y esquemas íntegros con puntos genéricos ξ, η resp. Para un morfismo $f : X \to Y$ son equivalentes:

1. f es dominante.
2. $f^\sharp : \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ es inyectiva.
3. $f(\xi) = \eta$.
4. $\eta \in f[X]$.

Demostración: $1 \implies 2$. Supongamos, por contradicción, que existe un abierto $V \subseteq Y$ tal que $f^\sharp : \mathscr{O}_Y(V) \to \mathscr{O}_X(f^{-1}[V])$ no es inyectiva. Es decir, existe $h \in \mathscr{O}_Y(V)$ no nula, tal que $f_V^\sharp(h) = 0$. Como Y es íntegro, las restricciones son inyectivas, luego podemos suponer que V es afín, y podemos reducirnos al abierto $\mathbf{D}(h)$, de modo que h sea invertible en $\mathscr{O}_Y(V)$.

Ahora bien, como f es dominante, existe $x \in X$ tal que $f(x) \in U$. Luego $f_x^\sharp(h|_{f(x)}) = 0$, pero $h|_{f(x)}$ es invertible en $\mathscr{O}_{Y,f(x)}$, así que $(f_x^\sharp)^{-1}[\mathfrak{x},\mathfrak{x}] = \mathscr{O}_{Y,f(x)} \supset \mathfrak{m}_{Y,f(x)}$, lo cual es absurdo.

$2 \implies 1$. Si $f[X]$ no fuera denso, entonces existe un abierto $V \neq \varnothing$ de Y tal que $f^{-1}[V] = \varnothing$, pero el homomorfismo $f_V^\sharp : \mathscr{O}_Y(V) \to 0$ no es inyectivo.

$1 \implies 3$. Sea $V \neq \varnothing$ un abierto de Y, entonces $f^{-1}[V]$ es abierto y no vacío en X, luego es denso (pues X es irreducible) y, por lo tanto, $\xi \in f^{-1}[V]$, o equivalentemente, $f(\xi) \in V$. Así, vemos que $f(\xi)$ es denso en Y y luego debe ser η.

Las implicancias $3 \implies 4 \implies 1$ son triviales. □

Definición 3.85: Sea X un esquema íntegro con único punto genérico ξ. Su ***cuerpo de funciones racionales*** es $K(X) := \mathscr{O}_{X,\xi}$. Una función racional $f \in K(X)$ se dice ***regular*** en un punto $x \in X$ si $f \in \mathscr{O}_{X,x}$, o se dice ***regular*** en un abierto $U \neq \varnothing$ si $f \in \mathscr{O}_X(U)$.

El inciso 3 de la proposición anterior, ahora se escribe como que una función es regular en un abierto syss es regular en todos sus puntos.

El opuesto a los puntos genéricos son los puntos cerrados. Si localmente un punto genérico «ve todas las funciones racionales», entonces localmente un punto cerrado ve muy pocas:

Proposición 3.86: Sea k un cuerpo y X un k-esquema algebraico. Un punto $x \in X$ es cerrado syss $\Bbbk(x)$ es una extensión finita de k. En particular, si k es algebraicamente cerrado, entonces $x \in X$ es cerrado syss $\Bbbk(x) = k$.

DEMOSTRACIÓN: Basta notar que en una carta afín un punto es cerrado syss corresponde a un ideal maximal (corolario 3.9.1), luego su cociente es una extensión de cuerpos de k. Como en un conjunto algebraico, las cartas afínes son k-álgebras de tipo finito, entonces los puntos cerrados tienen cuerpos de restos $\Bbbk(x)$ que son extensiones de cuerpo de k de tipo finito, por lo que, por el lema de Zariski, deben ser extensiones finitas de cuerpo. □

Definición 3.87: Sea k un cuerpo y X un k-esquema algebraico. Denotamos por X^0 a los puntos cerrados de X.

Corolario 3.87.1: Sea k un cuerpo y X un k-esquema algebraico. Se cumplen:

1. $X^0 \neq \varnothing$.
2. Para todo $U \subseteq X$ abierto se cumple que $U^0 = U \cap X^0$.
3. X^0 es un subconjunto denso de X.

DEMOSTRACIÓN: Basta notar que cada carta afín admite un punto cerrado, y la proposición anterior nos da un criterio global para detectar puntos cerrados. Más aún, como cada abierto afín siempre posee puntos cerrados, entonces X^0 corta a cada abierto no vacío. □

Este corolario será fuertemente mejorado en la versión esquemática del lema de Zariski (vid. teo. 5.37).

Proposición 3.88: Sea X un esquema compacto. Entonces, todo punto $x \in X$ se especializa $x \rightsquigarrow s$ en un punto cerrado.

Demostración: Como todo cerrado es un esquema compacto, basta probar que X posee un punto cerrado. Como X es compacto, entonces se cubre por finitos abiertos afines $U_i = \operatorname{Spec}(A_i)$. Podemos elegir ésta expresión de modo que sea irredundante, vale decir, tal que $U_i \not\subseteq U_j$ con $i \neq j$, para ello, si tenemos una inclusión $U_i \subseteq U_j$ eliminamos a U_i. Elijamos un punto $s \in U_1 \setminus \left(\bigcup_{j=2}^n U_j\right)$ y que sea cerrado en U_1 (es decir, maximal), como $s \in \left(\bigcup_{j=2}^n U_j\right)^c$, el cual es cerrado en X, entonces $\overline{\{s\}} \cap \left(\bigcup_{j=2}^n U_j\right)^c$ también es cerrado en X. Finalmente, es fácil verificar que si un punto $y \in \overline{\{s\}}$, entonces debe estar en U_1, luego $y = s$ y así, vemos que s es cerrado como se quería probar. □

El paso clave en la demostración, el uso de «compacidad» está en el encontrar el cubrimiento irreducible. Si el esquema no es compacto, podríamos tener un cubrimiento por abiertos afines creciente e infinito; así la unión de todos ellos seguiría siendo un abierto, pero podría no ser afin. En el ejemplo B.39 damos una construcción de un esquema sin puntos cerrados y precisamente esto es lo que falla.

Debido a su naturaleza, los puntos, mientras más especializados, más pequeños resultan sus cuerpos de restos, de modo que son más «sencillos» y así tenemos todo un espectro recorriendo desde los puntos genéricos a los cerrados.

Proposición 3.89: Sea k un cuerpo, sean X, Y un par de k-esquemas algebraicos y $f\colon X \to Y$ un morfismo de k-esquemas. Entonces $f[X^0] \subseteq Y^0$.

Demostración: Basta aplicar la proposición 3.49. □

Proposición 3.90: Sea X un esquema, y sean $U, V \subseteq X$ dos abiertos afines en X. Todo punto $x \in U \cap V$ posee un entorno $W \subseteq U \cap V$ tal que W es un abierto principal tanto en U como en V.

DEMOSTRACIÓN: Como los abiertos principales son una base, existe $f \in \Gamma(V, \mathscr{O}_X)$ tal que $x \in \mathbf{D}_V(f) \subseteq U \cap V$. Nótese que $V' := \mathbf{D}_V(f) \cong \operatorname{Spec}(V[1/f])$ y todo abierto principal $\mathbf{D}_{V'}(g/f^n)$ de V' corresponde a un abierto principal $\mathbf{D}_V(fg)$ de V, de modo que sustituyendo V por V' podemos suponer que $V \subseteq U$.

Como los abiertos principales son base, existe $h \in \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ tal que $x \in \mathbf{D}_U(h) \subseteq V$. Consideremos la restricción $\rho^U_V \colon \Gamma(U, \mathscr{O}_X) \to \Gamma(V, \mathscr{O}_X)$, así vemos que $\mathbf{D}_U(h) = \mathbf{D}_V(h|_V)$ (¿por qué?), así que éste abierto cumple lo exigido. □

Definición 3.91: Sea X un esquema. Se dice que una propiedad $\mathcal{P}$ de subesquemas abiertos afines es ***local para afines*** si:

LAf1. Si $\operatorname{Spec} A \subseteq X$ satisface $\mathcal{P}$, entonces todo abierto principal $\operatorname{Spec}(A[1/f]) \subseteq X$ también satisface $\mathcal{P}$.

LAf2. Supongamos que $\operatorname{Spec} A = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{D}_A(f_i)$, o equivalentemente $A = (f_1, \dots, f_n)$, donde cada $\mathbf{D}_A(f_i)$ satisface $\mathcal{P}$. Entonces $\operatorname{Spec} A$ satisface $\mathcal{P}$.

Lema 3.92 (comunicación afín): Sea X un esquema. Sea $\mathcal{P}$ una propiedad local para afines en X. Si $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, donde cada U_i es un abierto afín que satisface $\mathcal{P}$, entonces cada abierto afín de X satisface $\mathcal{P}$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $V \subseteq X$ un abierto afín. Luego $V = \bigcup_{i \in I}(U_i \cap V)$, pero mejor aún, cada intersección $U_i \cap V$ puede cubrirse por abiertos U_{ij} que son principales tanto en U_i como en V por la proposición anterior. Así, $V = \bigcup_{ij} U_{ij}$ y, como los esquemas afines son compactos, podemos suponer que la unión es finita. Por LAf1, sabemos que cada U_{ij} satisface $\mathcal{P}$ y, por LAf2, concluimos que V también satisface $\mathcal{P}$ como se quería probar. □

Éste es un metalema muy conocido que nos permitirá demostrar que varias propiedades para abiertos afines de un esquema pueden verificarse en cubrimientos. Éste resultado es bastante sencillo, al punto de que rara vez se menciona en un libro de geometría algebraica y se le utiliza en demasía; la denominación «lema de comunicación afín» es de VAKIL **[11]**.

Definición 3.93: Un esquema X se dice ***localmente noetheriano*** si todo punto $x \in X$ posee un entorno afín $x \in U$ tal que $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ es un anillo noetheriano. Un esquema se dice ***noetheriano*** si es localmente noetheriano y compacto, o equivalentemente, si posee un cubrimiento finito de esquemas afínes noetherianos.

Claramente, todo esquema noetheriano posee un espacio topológico noetheriano, pero el recíproco es falso: para verlo puede notar que todo espacio topológico finito es trivialmente noetheriano y hay varios anillos no noetherianos con espectro finito.

Proposición 3.94: Un esquema X es localmente noetheriano syss para todo abierto afín $U = \operatorname{Spec} A$ se cumple que A es noetheriano. En particular, un esquema afín $\operatorname{Spec} A$ es localmente noetheriano syss A es noetheriano.

Demostración: $\Longleftarrow$. Es trivial, puesto que los abiertos afínes son una base de cualquier esquema.

$\Longrightarrow$. Para ello basta verificar que la propiedad $\mathcal{P}$ de que el abierto afín U sea tal que su anillo $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ es noetheriano es local para afines. La propiedad LAf1 es trivial, puesto que si A es noetheriano, entonces $A[1/f]$ también.

Probaremos LAf2: sea $\operatorname{Spec} A \subseteq X$ y sea $\operatorname{Spec} A = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{D}(f_i)$, donde cada $A[1/f_i]$ es noetheriano. Afirmamos que para todo ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ se cumple

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} \varphi_i^{-1}\big[\varphi_i[\mathfrak{a}] \cdot A[1/f_i]\big],$$

donde $\varphi_i \colon A \to A[1/f_i]$ es el homomorfismo canónico.

Si fijamos un φ_i, entonces vemos que la expresión $\varphi_i^{-1}\big[\varphi_i[\mathfrak{a}] \cdot A[1/f_i]\big] = \mathfrak{a}^{ec}$, en notación de extensión y contracción de ideales, y siempre se cumple que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^{ec}$ (cfr. **[39]**, prop. 6.38). Veamos la inclusión «$\supseteq$»: Sea $b \in \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{a}^{ec}$, es decir, para cada i se cumple que $\varphi_i(b) = a_i/f_i^n$ para algún $a_i \in \mathfrak{a}$ y algún $n \in N$ suficientemente grande. Esto equivale a que $f_i^m(f_i^n b - a_i) = 0$ para algún m suficientemente grande, y como los f_i's generan el 1, también los f_i^N's con $N = n + m$, luego

$$b = \sum_{i=1}^{r} f_i^N g_i b = \sum_{i=1}^{r} a_i g_i f_i^m \in \mathfrak{a}.$$

Ahora, dada una cadena de ideales $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots$, podemos extenderla mediante un homomorfismo $\varphi_i \colon A \to A[1/f_i]$:

$$\mathfrak{a}_1^e \subseteq \mathfrak{a}_2^e \subseteq \mathfrak{a}_3^e \subseteq \cdots,$$

y como $A[1/f_i]$ es noetheriano, entonces ésta cadena se estabiliza, dijamos en n_i. Eligiendo el máximo $n := \max\{n_1, \dots, n_r\}$ vemos que la cadena en A se estabiliza en dicho índice.

Finalmente, concluimos por el lema de comunicación afín. $\square$

4

Morfismos de esquemas

4.1 Cambio de base

Teorema 4.1: Sean X, Y, S un trio de esquemas con morfismos $f\colon X \to S$ y $g\colon Y \to S$. Entonces admite un producto fibrado $X \times_S Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta (en Sch):

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "\exists!"] \arrow[drr, bend left, "q_1"] \arrow[ddr, bend right, "q_2"'] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"'] & S
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Demostración: La demostración será por pasos, comenzando con un caso completamente afín:

1. Sean $X = \operatorname{Spec} A, Y = \operatorname{Spec} B$ y $S = \operatorname{Spec} R$, entonces un diagrama de morfismos de esquemas se corresponde a un diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& A \\
B & R \arrow[l, "g^\sharp"] \arrow[u, "f^\sharp"']
\end{tikzcd}$$

de modo que A, B son R-álgebras conmutativas, y su coproducto es $A \otimes_R B$ y, por el teorema 3.75, vemos que $X \times_S Y = \operatorname{Spec}(A \otimes_R B)$ es efectivamente el producto fibrado.

2. Si $X \times_S Y$ es un producto fibrado y $U \subseteq X$ es abierto, entonces $p_1^{-1}[U] = U \times_S X$. Sea $\iota\colon U \hookrightarrow X$ la inclusión, y sean $q_1\colon Z \to U$ y $q2\colon Z \to Y$ dos morfismos de esquemas tales que $q_1 \circ \iota \circ f = q2 \circ g$, entonces como $X \times_S Y$ es producto fibrado existe un único morfismo $\theta\colon Z \to X \times_S Y$ tal que $q_1 \circ \iota = \theta \circ p_1$ y $q_2 = \theta \circ p_2$, luego $p_1[\theta[Z]] \subseteq U$ y $\theta[Z] \subseteq p_1^{-1}[U]$, es decir, podemos considerar a $\theta\colon Z \to p_1[U]$.

3. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de X y suponga que el producto fibrado existe $X_i \times_S Y$ para cada i. Sea $X_{ij} := X_i \cap X_j$ y definamos $U_{ij} := p_1^{-1}[X_{ij}]$ donde $p_1\colon X_i \cap Y \to X_i$. Por el paso, anterior, se cumple que $U_{ij} = X_{ij} \times_S Y$ y luego existe un único isomorfismo $\varphi_{ij}\colon U_{ij} \to U_{ji}$ de modo que podemos pegar los esquemas $X_i \times_S Y$ por la proposición 3.77 para obtener un esquema $X \times_S Y$ con flechas hacia X, Y. Sea Z un esquema en la situación de (4.1), definiendo $Z_i := q_1^{-1}[X_i]$ obtenemos $q_1\colon Z_i \to X_i$, por lo que determina $\theta_i\colon Z_i \to X_i \times_S Y \to X \times_S Y$ los cuales son compatibles entre sí, por lo que por el corolario 3.73 obtenemos un morfismo $\theta\colon Z \to X \times_S Y$ que ha de ser único.

4. Si Y, S son esquemas afínes, entonces existe el producto fibrado $X \times_S Y$. Así, si $\{Y_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento por abiertos afínes de Y, vemos que $X \times_S Y_i$ existe y luego $X \times_S Y$ existe en general, sólo salvo la condición de que S sea afín. 5. Sea $\{S_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos afínes de S y sean $X_i := f^{-1}[S_i], Y_i := g^{-1}[S_i]$. Luego $X_i \times_{S_i} Y_i$ existe por el inciso anterior, y de hecho $X_i \times_{S_i} Y_i \cong X_i \times_S Y$. Esto debido a que $Y_i = S_i \times_S Y$ (¿por qué?) y por el lema de los productos fibrados (cfr. [13, prop. 1.74]). Así, por el inciso 3, construimos $X \times_S Y$. □

Corolario 4.1.1: La categoría de esquemas es finitamente completa.

Demostración: Esto debido a que tiene un objeto final ($\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$) y posee productos fibrados, y a que toda categoría con objeto final y productos fibrados es finitamente completa (cfr. **[40]**, teo. 2.12). □

Otra manera de entender el teorema anterior es que Sch/S tiene productos. Ya en la demostración vimos como directamente el producto fibrado de esquemas se relaciona con el producto tensorial de álgebras, por lo que es razonable esperar resultados del tipo del cambio de base (vid., [**39**], prop. 5.64). Un cálculo que se deduce de la demostración:

Corolario 4.1.2: Sea A un anillo, entonces $\mathbb{A}^n_A \times_A \mathbb{A}^m_A = \mathbb{A}^{n+m}_A$.

Proposición 4.2: Sea A un anillo, y sean B una A-álgebra graduada y C una A-álgebra. Entonces:

$$\operatorname{Proj} B \times_A \operatorname{Spec} C \cong \operatorname{Proj}(B \otimes_A C).$$

En particular, $\mathbb{P}^n_A \times_A \mathbb{A}^m_A = \mathbb{P}^{n+m}_A$.

Pista: Puede describir $\operatorname{Proj} B$ como pegar cartas afínes e ir aplicando el caso afín en ellas. □

Corolario 4.2.1: Sea A un anillo y B una A-álgebra, entonces:

$$\mathbb{A}^n_A \times_A \operatorname{Spec} B \cong \mathbb{A}^n_B, \qquad \mathbb{P}^n_A \times_A \operatorname{Spec} B \cong \mathbb{P}^n_B.$$

Proposición 4.3: Sean $f: X \twoheadrightarrow S, g: Y \to S$ dos morfismos de esquemas con f suprayectivo. Entonces la proyección $\pi_2: X \times_S Y \to Y$ es suprayectiva.

Demostración: Sea $y \in Y$ un punto arbitrario, entonces $g(y) = f(x)$ para algún $x \in X$ puesto que f es suprayectivo. Luego, por la proposición 3.59, tenemos el siguiente retículo de extensiones de cuerpo:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\Bbbk(x) \arrow[dr, dash] & & \Bbbk(y) \arrow[dl, dash] \\
& \Bbbk(g(y)) &
\end{tikzcd}$$

Sea $\Omega/\Bbbk(g(y))$ una extensión de cuerpos tal que contiene a $\Bbbk(x), \Bbbk(y)$, luego aplicando el funtor $\operatorname{Spec}(-)$ y componiendo por los morfismos $\operatorname{Spec} \Bbbk(x) \to X$ y $\operatorname{Spec} \Bbbk(y) \to Y$ obtenemos un par de morfismos $\alpha: \operatorname{Spec} \Omega \to X$ y $\beta: \operatorname{Spec} \Omega \to Y$ tales que $\alpha \circ f = \beta \circ g$ y, por propiedad universal del producto fibrado, tenemos un morfismo $\gamma: \operatorname{Spec} \Omega \to X \times_S Y$. Finalmente evaluando en $\xi := (0) \in \operatorname{Spec} \Omega$ tenemos $\pi_2(\gamma(\xi)) = y$. □

Proposición 4.4: Sea S un esquema y X, Y, Z un trio de S-esquemas. Entonces:

1. $X \times_S S \cong X$ y $X \times_S \varnothing \cong \varnothing$.

2. $X \times_S Y \cong Y \times_S X$.

3. $(X \times_S Y) \times_S Z \cong X \times_S (Y \times_S Z)$.

4. Si Z es un Y-esquema, entonces considerándolo un S-esquema mediante $Z \to Y \to S$ se cumple que $(X \times_S Y) \times_Y Z \cong X \times_S Z$.

5. Dados $f\colon X \to X', g\colon Y \to Y'$ morfismos de S-esquemas, entonces existe un único morfismo $f \times_S g\colon X \times_S Y \to X' \times_S Y'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[rr, "f"] & & X' \\ X \times_S Y \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] \arrow[rr, dashed, "\exists! f \times_S g"] & & X' \times_S Y' \arrow[ur, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] & \\ & Y \arrow[rr, "g"'] & & Y' \end{tikzcd}$$

6. Sean $U \subseteq X, V \subseteq Y$ subesquemas abiertos, entonces $U \times_S V = p_1^{-1}[U] \cap p_2^{-1}[V] \subseteq X \times_S Y$.

7. Mediante la proyección $p_Y\colon X \times_S Y \to Y$ podemos ver a $X \times_S Y$ como un Y-esquema. Entonces:

$$\operatorname{Hom}_{\mathsf{Sch}/Y}(Y, X \times_S Y) \cong \operatorname{Hom}_{\mathsf{Sch}/S}(Y, X).$$

Definición 4.5: Sea S un esquema y X, Y un par de S-esquemas. Entonces denotamos $X_Y := X \times_S Y$, al que llamamos ***cambio de base*** por $Y \to S$.

Sea X un esquema y $x \in X$ un punto. Sea $U = \operatorname{Spec} A$ un entorno afín de x, luego la restricción induce un homomorfismo canónico $\mathscr{O}_X(U) \cong A \to \mathscr{O}_{X,x}$, luego la funtorialidad de $\operatorname{Spec}(-)$ induce un morfismo de esquemas $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{X,x}) \to \operatorname{Spec} A = U$. Sea $\Bbbk(x)$ el cuerpo de restos en x, entonces el epimorfismo canónico $\mathscr{O}_{X,x} \twoheadrightarrow \Bbbk(x)$ induce un morfismo de esquemas $\operatorname{Spec} \Bbbk(x) \to \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{X,x})$ que lo componemos para obtener un morfismo canónico

$$\operatorname{Spec} \Bbbk(x) \longrightarrow X$$

que, como función entre conjuntos, asigna el punto $(0) \in \operatorname{Spec} \Bbbk(x)$ a $x \in X$.

Definición 4.6: Dado un morfismo de esquemas $f\colon X \to Y$ y un punto $y \in Y$, llamamos la ***fibra*** de f en y al producto fibrado $X_y := X \times_Y \operatorname{Spec} \Bbbk(y)$. Si Y es irreducible y ξ es su único punto genérico, entonces decimos que X_ξ es la ***fibra genérica***.

Definición 4.7: Se dice que una propiedad $\mathcal{P}$ sobre morfismos de esquemas es ***estable salvo cambio de base*** si para todo morfismo $f\colon X \to S$ con $\mathcal{P}$ y todo S-esquema $\pi\colon Y \to S$ se cumple que $f \times_S \pi\colon X \times_S Y \to Y$ satisface $\mathcal{P}$.

Por ejemplo, la proposición 4.3 dice que la suprayectividad es estable salvo cambio de base. En cambio, la inyectividad no lo es:

Ejemplo. Considere el encaje canónico $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ cuyo morfismo inducido $\operatorname{Spec} \mathbb{C} \to \operatorname{Spec} \mathbb{R}$ es inyectivo. El cambio de base por $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$ nos da el morfismo $\operatorname{Spec} \mathbb{C} \times_{\mathbb{R}} \operatorname{Spec} \mathbb{C} = \operatorname{Spec}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \to \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ que no es inyectivo, pues

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{R}[z]}{(z^2+1)} \cong \frac{\mathbb{C}[z]}{(z^2+1)} \cong \frac{\mathbb{C}[x]}{(x-\mathrm{i})} \times \frac{\mathbb{C}[y]}{(y+\mathrm{i})} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C},$$

es un anillo con dos (ideales) primos.

Este mismo ejemplo también prueba que la propiedad de ser un homeomorfismo tampoco es estable salvo cambio de base.

Proposición 4.8: Los encajes abiertos y cerrados son estables salvo cambio de base.

Demostración: Sea $\iota\colon X \hookrightarrow S$ un encaje abierto y sea $g\colon Y \to S$ un S-esquema. Luego, podemos considerar a X como un abierto de S, de modo que el morfismo $q\colon X \times_S Y \to Y$ satisface que $X \times_S Y = g^{-1}[X]$. Así que $X \times_S Y$ se identifica con un subconjunto abierto de Y y la proyección $q\colon X \times_S Y \hookrightarrow Y$ es un encaje abierto.

Basta verificarlo sobre abiertos afines de Y, así que supongamos que $S = \operatorname{Spec} A$ e $Y = \operatorname{Spec} B$. Como $f\colon X \hookrightarrow Y$, entonces $X = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$ para algún $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ y así que $X \times_S Y = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a} \otimes_A B) = \operatorname{Spec}(B/\mathfrak{a}B)$, con lo que claramente $X \times_S Y \hookrightarrow Y$. $\square$

4.2 Morfismos de tipo finito

Para la siguiente definición, recuérdese que un esquema es compacto syss es la unión de finitos esquemas afínes.

Definición 4.9: Un morfismo de esquemas $f\colon X \to Y$ se dice ***compacto*** si la preimagen de todo abierto compacto es compacta.

Usualmente los libros enuncian la definición anterior como que la preimagen de abiertos afínes es compacta, nótese que es equivalente.

Proposición 4.10: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de esquemas. Entonces f es compacto syss existe un cubrimiento por abiertos afines $\{V_i\}_{i\in I}$ de Y tal que cada $f^{-1}[V_i]$ es compacto.

Demostración: $\Longrightarrow$. Trivial.

$\Longleftarrow$. Como V es afín, posee una base por abiertos principales así que elijamos $V_{ij} \subseteq V \cap V_i$ tal que $V \cap V_i = \bigcup_j V_{ij}$ y V_{ij} es principal en V y en V_i. Como V es compacto, podemos suponer que hay finitos V_{ij}'s. Y así vemos que $f^{-1}[V] = \bigcup_{i,j} f^{-1}[V_{ij}]$. Para ello, sea $\{U_{ik}\}_k$ un cubrimiento por abiertos afínes de $f^{-1}[V_i]$, que podemos suponer finitos por compacidad, luego cada $U_{ijk} := U_{ik} \cap f^{-1}[V_{ij}]$ es principal en U_{ik}, puesto que es la preimagen de un abierto principal en el morfismo $f|_{U_{ik}}\colon U_{ik} \to V_i$ entre esquemas afines, y, como U_{ik} es compacto, podemos extraer un subcubrimiento finito y así $\bigcup_{i,j,k} U_{ijk} = f^{-1}[V]$ donde el lado izquierdo corresponde a la unión finita de compactos. $\square$

Proposición 4.11: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de esquemas. Se cumplen:

1. Si X es noetheriano, entonces f es compacto.
2. Si f es un encaje abierto e Y es localmente noetheriano, entonces es compacto.

Demostración:

1. Basta aplicar el teorema 1.25
2. Sea $U \subseteq Y$ un subesquema abierto afín y sea $f[X] =: V$, luego $V \cap U$ es un abierto de U y, como U es un esquema noetheriano, entonces $V \cap U$ es compacto y $f^{-1}[U \cap V]$ también. $\square$

Proposición 4.12: Se cumplen:

1. Los encajes cerrados son compactos.

2. La composición de morfismos compacto es compacta.

3. Los morfismos compactos son estables salvo cambio de base.

Definición 4.13: Un morfismo de esquemas $f\colon X \to Y$ se dice ***localmente de tipo finito*** si para todo subesquema abierto afín $\operatorname{Spec} A = V \subseteq Y$ y todo abierto afín $\operatorname{Spec} B = U \subseteq f^{-1}[V]$ se cumple que el morfismo $f|_U\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ determina que B sea una A-álgebra de tipo finito.

Proposición 4.14: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de esquemas. Entonces f es localmente de tipo finito syss existe un cubrimiento por abiertos $\operatorname{Spec}(A_i) = V_i \subseteq Y$ tal que cada $f^{-1}[V_i]$ admite un cubrimiento por abiertos $\operatorname{Spec}(B_{ij}) = U_{ij} \subseteq X$ de modo que cada B_{ij} es una A_i-álgebra de tipo finito.

DEMOSTRACIÓN: $\Longrightarrow$. Trivial.

$\Longleftarrow$. Sea $V = \operatorname{Spec} A \subseteq Y$ un abierto afín arbitrario. Como los abiertos principales son bases, entonces $V \cap Vi = \bigcup_k V_{ik}$, donde cada $V_{ik} = \operatorname{Spec}(A_{ik})$ es principal en V y en V_i. Sea $U_{ijk} := U_{ij} \cap f^{-1}[V_{ik}] = \operatorname{Spec}(B_{ijk})$ el cual es principal en U_{ij} y tal que cada $\mathscr{O}_X(U_{ijk})$ es una $\mathscr{O}_Y(V_{ik})$-álgebra de tipo finito.

Sea $U \subseteq f^{-1}[V]$ un abierto afín. Como $U = \bigcup_{ijk}(U_{ijk} \cap U)$ y U es compacto, entonces posee un subcubrimiento finito $U = \bigcup_{\alpha=0}^{n}(U_\alpha \cap U)$. Cada $U_\alpha = \bigcup_\beta U_{\alpha\beta}$, donde $U_{\alpha\beta}$ es un abierto principal de U_α y U, luego podemos suponer que hay finitos $U_{\alpha\beta}$ por compacidad de U. Así $\mathscr{O}_X(U_{\alpha\beta})$ es de tipo finito sobre $\mathscr{O}_X(U_\alpha)$, el cual es de tipo finito sobre $\mathscr{O}_Y(V)$; finalmente es fácil verificar ahora que $\mathscr{O}_X(U)$ es de tipo finito sobre $\mathscr{O}_Y(V)$. □

Definición 4.15: Un morfismo de esquemas se dice ***de tipo finito*** si es localmente de tipo finito y es compacto. Un S-esquema se dice *(localmente) de tipo finito* si lo es su morfismo estructural.

Ejemplo. Sea k un cuerpo. Los k-esquemas de tipo finito corresponden a los esquemas algebraicos sobre k.

Proposición 4.16: Sean $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ un par de morfismos de esquemas.

1. Los encajes cerrados son de tipo finito.

2. Si f, g son de tipo finito, entonces $f \circ g$ es de tipo finito.

3. Las funciones de tipo finito son estables salvo cambio de base.

4. Si $X \to Z$ e $Y \to Z$ son de tipo finito, entonces $X \times_Z Y \to Z$ es de tipo finito.

5. Si f es compacto y $f \circ g$ es de tipo finito, entonces f es de tipo finito.

Demostración:

1. Los encajes cerrados son compactos y es fácil verificar que son localmente de tipo finito.

2. Se reduce a ver que la composición de morfismos compactos también lo es y la composición de morfismos localmente de tipo finito también lo es.

3. Basta verificarlo sobre abiertos afines.

4. Basta verificarlo sobre abiertos afines.

5. Sin perdida de generalidad supongamos que Z es afín. Sea $V \subseteq Y$ un abierto afín, luego $f^{-1}[V] = \bigcup_i U_i$, donde cada U_i es abierto afín y la unión es finita por compacidad. Así $\mathscr{O}_X(U_i)$ es de tipo finito sobre $\mathscr{O}_Z(Z)$, luego también lo es sobre $\mathscr{O}_Y(V)$, lo que completa la demostración. □

§4.2.1 Condiciones de finitud.

Definición 4.17: Un esquema X se dice ***artiniano*** si $X = \operatorname{Spec} A$ es afín y A es artiniano.

Proposición 4.18: Para un esquema X, son equivalentes:

1. X es artiniano.

2. X es noetheriano y su espacio topológico subyacente es discreto.

3. X es noetheriano y todos los puntos son cerrados.

En cuyo caso, el espacio topológico es finito.

Demostración: 1 $\implies$ 2. Un anillo artiniano tiene finitos ideales maximales (proposición A.25) y un anillo artiniano es un anillo noetheriano donde ser maximal es lo mismo que ser primo (teorema de Akizuki), así que X tiene espacio topológico finito con puntos cerrados, luego es discreto.

Claramente 2 $\implies$ 3.

3 $\implies$ 1. La condición de ser noetheriano implica que el espacio es finito, pues uno construye los conjuntos cerrados

$$\{x_1\} \subset \{x_1, x_2\} \subset \{x_1, x_2, x_3\} \subset \cdots$$

Así que X es la unión disjunta de puntos cerrados, los cuales son tales que $\mathscr{O}_{X,x} =: A_x$ sea un anillo local artiniano, luego X es isomorfo al esquema dado por el producto de los A_x's, el cual es artiniano. □

Proposición 4.19: Sea X un esquema algebraico sobre un cuerpo k. Son equivalentes:

1. X es un esquema artiniano.
2. X tiene un espacio topológico discreto.
3. X posee solo finitos puntos cerrados.
4. X es finito.
5. Todos los puntos de X son cerrados.
6. El esquema es afín $X = \operatorname{Spec} A$, y A es una k-álgebra de dimensión finita.

Demostración: Como X es un k-esquema de tipo finito, entonces es noetheriano y por la proposición 3.115 vemos que 1 $\iff$ 2 $\iff$ 5, y por la misma proposición, vemos que 1 $\implies$ 4 $\implies$ 3. Finalmente, sabemos que 6 $\implies$ 1.

3 $\implies$ 6. Podemos reducirnos a un abierto afín de X, y suponer así que X es afín. Ahora bien, $A := \mathscr{O}_X(X)$ es una k-álgebra de tipo finito, por ende, es un anillo de Jacobson (teorema A.19), y consta de finitos ideales maximales. Como la intersección de finitos primos, solo da primo cuando alguno lo era originalmente (por evitamiento de primos, proposición A.4), entonces necesariamento todos los primos son maximales y luego A es artiniano por el teorema de Akizuki. Finalmente, toda k-álgebra artiniana tiene dimensión finita. □

§4.2.2 Cambio de base en la clausura algebraica.

Lema 4.20: Sea k un cuerpo, K/k una extensión algebraica y sea X un esquema algebraico sobre k. Para toda subvariedad cerrada reducida W de X_K, existe una subextensión $k \subseteq L \subseteq K$ finita (sobre k) y existe una única (en función de L) subvariedad cerrada reducida Z de X_L tal que $W = Z_K$.

Demostración: Supongamos que X es una variedad afín, es decir, $X = \operatorname{Spec} A$. Luego $X_K = \operatorname{Spec}(A \otimes_k K)$ y $W \subseteq X_K$ es de la forma $\mathbf{V}(\mathfrak{a})$, donde $\mathfrak{a} \trianglelefteq A \otimes_k K$ es un ideal radical. Como $A \otimes_k K$ es una K-álgebra de tipo finito, entonces es noetheriano por el teorema de las bases de Hilbert y $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$. Fijemos L una extensión finita tal que cada $f_i \in A \otimes_k L$ y sea $\mathfrak{b} := (f_1, \dots, f_r) \trianglelefteq A \otimes_k L$. Luego, sea $Z := \operatorname{Spec}(A \otimes_k L/\mathfrak{b})$. Como $\mathfrak{b} \otimes_L K = \mathfrak{a}$ se comprueba que $Z_K = W$. Se cumple que Z es reducido puesto que $\mathscr{O}_Z(Z) \hookrightarrow \mathscr{O}_Z(Z) \otimes_L K = \mathscr{O}_W(W)$. La unicidad se sigue de la proposición 3.78.

El caso general sale de cubrir una variedad por subvariedades afines, dado que admite un cubrimiento finito por definición. □

Teorema 4.21: Sea k un cuerpo, K/k una extensión algebraica y X un esquema algebraico sobre k.

1. Si X es reducido y K/k es separable, entonces X_K también es reducido.
2. Si K/k es puramente inseparable, entonces la proyección $X_K \to X$ determina un homeomorfismo.

Demostración: Nos reduciremos al caso afín $X = \operatorname{Spec} A$.

1. Como A es reducido y es noetheriano, entonces posee finitos primos minimales $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ y son tales que el homomorfismo canónico $A \to \prod_{i=1}^n A/\mathfrak{p}_i$ es inyectivo por la proposición A.28. Aplicando cambio de base, ésto induce el monomorfismo $A_K \to \prod_{i=1}^n (A/\mathfrak{p}_i)_K$, de modo que podemos suponer que A es un dominio íntegro.

   Ahora A es un dominio íntegro y $F := \operatorname{Frac} A$ es una extensión de cuerpos de tipo finito, luego como K es separable, entonces es una k-álgebra separable por el teorema A.48, luego $F \otimes_k K$ es reducido como se quería ver.

2. Supongamos que K/k es una extensión simple (i.e., generada por un solo elemento), entonces $K \cong k[t]/(t^q - \alpha)$ para algún $\alpha \in k$ y donde

q es una potencia de $\operatorname{car} k$. Sea $\mathfrak{p} \lhd A$ primo y sea $\mathfrak{q} \lhd A_K$ primo tal que $A \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Así $\mathfrak{p}A_K \subseteq \mathfrak{q}A_K = \mathfrak{q}$ y para todo $\beta \in \mathfrak{q}$ se comprueba que $\beta^q \in A \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, así que $\mathfrak{q} \subseteq \operatorname{Rad}(\mathfrak{p}A_K)$. Así que $\mathfrak{q} = \operatorname{Rad}(\mathfrak{p}A_K)$. Ésto prueba que π es inyectivo.

Sea $\mathfrak{a} \trianglelefteq A_K$ un ideal y sea $\mathfrak{b} := \mathfrak{a} \cap A$, entonces es fácil notar que $\mathfrak{b}^q \supseteq \mathfrak{a}$ lo que compruba que $\pi[V(\mathfrak{a})] = V(\mathfrak{b})$, luego π es cerrada. Finalmente, basta recordar que los morfismos suprayectivos son estables salvo cambio de base.

Así, π resulta ser un homeomorfismo y empleando repetidas veces el caso finito, obtenemos el caso general. □

Definición 4.22: Sea X un esquema algebraico sobre un cuerpo k. Se dice que X es ***geométricamente reducido*** (resp. ***íntegro***, ***conexo***, ***irreducible***) si $X_{k^{\mathrm{alg}}}$ es reducido (resp. íntegro, conexo, irreducible).

Proposición 4.23: Sea X un esquema sobre un cuerpo k. Son equivalentes:

1. X es geométricamente reducido.
2. Para todo k-esquema reducido Y el producto $X \times_k Y$.
3. X es reducido y para todo punto genérico $\xi \in X$ el cuerpo de restos $\Bbbk(\xi)$ es una extensión separable de k.
4. Existe una extensión de cuerpos Ω/k que es perfecta tal que X_Ω es reducido.
5. Para toda extensión finita L/k puramente inseparable, se cumple que X_L es reducido.

DEMOSTRACIÓN: Como ser reducido se verifica sobre abiertos afines, podemos suponer que $X = \operatorname{Spec} A$. Es claro que cada condición implica que X sea reducido, por lo que podemos suponer que A es reducido.

$1 \iff 3 \iff 4 \iff 5$. Sean $\{\xi_i\}_i$ los puntos genéricos de X, como A es reducido, el homomorfismo canónico $A \hookrightarrow \prod_{i\in I} \Bbbk(\xi_i)$ es inyectivo y cada $\Bbbk(\xi_i)$ es una localización de A. Si $A \otimes_k k^{\mathrm{alg}}$ es reducido, claramente su localización $\Bbbk(\xi_i) \otimes_k k^{\mathrm{alg}}$ también será reducida y, recíprocamente, el monomorfismo:

$$A \otimes_k k^{\mathrm{alg}} \hookrightarrow \left(\prod_{i\in I} \Bbbk(\xi_i) \right) \otimes_k k^{\mathrm{alg}} \hookrightarrow \prod_{i\in I} \left(\Bbbk(\xi_i) \otimes_k k^{\mathrm{alg}} \right).$$

$2 \implies 1$. Basta tomar $Y = \operatorname{Spec}(k^{\mathrm{alg}})$.

$3 \implies 2$. Podemos suponer que $Y = \operatorname{Spec} B$ es afín. Sean $\{L_j\}_j$ la familia de cuerpos de restos de los puntos genéricos de Y, se induce un monomorfismo

$$A \otimes_k \left(\prod_j L_j \right) \hookrightarrow \left(\prod_i \Bbbk(\xi_i) \right) \otimes_k \left(\prod_j L_j \right) \hookrightarrow \prod_{i,j} (\Bbbk(\xi_i) \otimes_k L_j),$$

y el lado derecho es un producto de anillos reducidos, puesto que $\Bbbk(\xi_i)$ es separable. □

Proposición 4.24: Sea X un esquema algebraico íntegro sobre un cuerpo k con cuerpo de funciones regulares $K(X)$. Entonces, X es geométricamente reducido (resp. geométricamente íntegro) syss $K(X) \otimes_k k^{\mathrm{alg}}$ es reducido (resp. íntegro).

Demostración: Basta recordar que $\mathscr{O}_X(U) \subseteq k(X)$ para todo U abierto en X y que, recíprocamente, $K(X)$ es el límite directo de los $\mathscr{O}_X(U)$'s, así que si alguno no fuese reducido (resp. íntegro), entonces $K(X)$ tampoco. □

Corolario 4.24.1: Todo esquema algebraico reducido sobre un cuerpo perfecto es geométricamente reducido.

Del teorema 4.21 deducimos:

Corolario 4.24.2: Sea k un cuerpo y X un esquema algebraico íntegro sobre k.

1. Si $\operatorname{car} k =: p > 0$, sea $L := k^{p^{-\infty}}$ la clausura perfecta de k. Entonces X es geométricamente reducido syss X_L es reducido.
2. Sea k^{sep} la clausura separable de k. Entonces X es geométricamente conexo (resp. irreducible) syss $X_{k^{\mathrm{sep}}}$ es conexo (resp. irreducible).
3. X es geométricamente íntegro syss $K(X)$ y k^{alg} son k-linealmente disjuntos. En cuyo caso, $K(X_{k^{\mathrm{alg}}}) = K(X) \otimes_k k^{\mathrm{alg}}$.
4. X es geométricamente irreducible (y luego, geométricamente íntegro) syss $K(X) \cap k^{\mathrm{sep}} = k$.

Demostración:

1. y 2. Como L es perfecto, entonces k^{alg}/L es una extensión separable y L/k es una extensión puramente inseparable, a lo que empleamos el teorema 4.21.

3. $\implies$. Si $K(X), k^{\mathrm{alg}}$ son linealmente disjuntos, entonces $K(X) \otimes_k k^{\mathrm{alg}}$ es un dominio íntegro (cfr. [12, lema 13.24]). Luego para todo abierto afín $U \subseteq X$ vemos que

$$\mathscr{O}_{X_{k^{\mathrm{alg}}}}(U_{k^{\mathrm{alg}}}) = \mathscr{O}_X(U) \otimes_k k^{\mathrm{alg}} \subseteq K(X) \otimes_k k^{\mathrm{alg}}.$$

$\impliedby$. Sea $U = \operatorname{Spec} A \subseteq X$ un abierto afín, entonces $K(X) = \operatorname{Frac}(A)$ por la proposición 3.96 y así $K(X) \otimes_k k^{\mathrm{alg}} = \operatorname{Frac}(A) \otimes_k k^{\mathrm{alg}}$ el cual es una localización de $A \otimes_k k^{\mathrm{alg}} = \mathscr{O}_{X_{k^{\mathrm{alg}}}}(U_{k^{\mathrm{alg}}})$, el cual es íntegro por hipótesis. Así pues $K(X) \otimes_k k^{\mathrm{alg}}$ es un dominio íntegro, lo cual a su vez implica que $K(X), k^{\mathrm{alg}}$ son linealmente disjuntos (cfr. [12, lema 13.24]). Finalmente, en éste caso

$$K(X_{k^{\mathrm{alg}}}) = \operatorname{Frac}(A \otimes_k k^{\mathrm{alg}}) = \operatorname{Frac} A \otimes_k k^{\mathrm{alg}} = K(X) \otimes_k k^{\mathrm{alg}}.$$

4. $\implies$. Sea $L := k(X) \cap k^{\mathrm{sep}}$. Sabemos que $X_{k^{\mathrm{sep}}}$ es irreducible por hipótesis, y también es reducido porque X es reducido y la extensión k^{sep}/k es algebraica separable (teorema 3.78), en consecuencia, $X_{k^{\mathrm{sep}}}$ es íntegro por la proposición 3.93. Pasando a un abierto afín, es fácil concluir la fórmula $K(X_{k^{\mathrm{sep}}}) = K(X) \otimes_k k^{\mathrm{sep}}$. Como $K(X) \otimes_k k^{\mathrm{sep}} \supseteq L \otimes_k L$, entonces vemos que necesariamente $L = k$ pues $K(X_{k^{\mathrm{sep}}})$ es íntegro.

$\impliedby$. Basta probar que $K(X) \otimes_k F$ es íntegro para toda extensión F/k separable finita. Luego por el teorema del elemento primitivo $F = k[t]/f(t)$ para algún $f(t) \in k[t]$ separable irreducible. Sea $g(t) \in k(X)[t]$ tal que $g(t) \mid f(t)$. Entonces como $f(t)$ se escinde en k^{sep}, se cumple que $g(t) \in k^{\mathrm{sep}}[t]$, luego $g(t) \in (K(X) \cap k^{\mathrm{sep}})[t] = k[t]$ y, como $f(t)$ es irreducible en $k[t]$, vemos que $g(t) = 1$. Así pues, $f(t)$ es irreducible en $K(X)[t]$ y $k(X) \otimes_k F$ es íntegro como se quería ver. □

Corolario 4.24.3: Sea X un esquema algebraico íntegro sobre un cuerpo k. Entonces X es geométricamente reducido syss la extensión $K(X)/k$ está separablemente generada.

Demostración: Basta notar que $K(X)/k$ es una extensión de cuerpos de tipo finito y aplicar el criterio de Mac Lane. □

§4.2.3 Extensión de constantes.

Definición 4.25: Sea S un esquema y X un S-esquema. Para todo S-esquema T, denotamos por $X(T)$ al conjunto de todos los morfismos de S-esquemas $T \to X$. Los elementos de $X(T)$ se dicen ***puntos T-valuados***.

A veces cuando $T = S$ se les llama ***puntos S-racionales*** para enfatizar esto último.

Ejemplo 4.26: Sea S un esquema. ¿A qué corresponden los puntos S-valuados de la recta afín $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}$?

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}(S) := \operatorname{Hom}_{\mathsf{Sch}}(S, \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}) \approx \operatorname{Hom}_{\mathsf{Ring}}(\mathbb{Z}[x], \mathscr{O}_S(S)) \cong \Gamma(S, \mathscr{O}_S),$$

donde $\approx$ denota biyección (¡canónica!) de conjuntos.

Análogamente, $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}(S) \approx \Gamma(S, \mathscr{O}_S)^n$. ⌟

Nuestro contexto particular será $A = k$ un cuerpo, X un k-conjunto algebraico y $B = K$ una extensión de cuerpos de k.

Una buena razón para interesarse en puntos valuados es lo siguiente:

Proposición 4.27: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de esquemas (arbitrarios). Entonces f es suprayectivo syss para todo cuerpo K y todo punto K-valuado $y \in Y(K)$ existe una extensión de cuerpos L/K Y un punto $x \in X(L)$ tal que $f(L)(x) = y_L$.

Demostración: $\Longleftarrow$. Sea $y_0 \in Y$ y sea $y\colon \operatorname{Spec}\big(\Bbbk(y_0)\big) \to Y$ el morfismo canónico. Por hipótesis, sea $x\colon \operatorname{Spec} L \to X$ tal que $f(L)(x) = y_L$, entonces evaluando $x_0 := x(\xi)$, donde $\{\xi\} = \operatorname{Spec} L$, se verifica que $f(x_0) = y_0$.

$\Longrightarrow$. Sea $y \in Y(K)$ un punto K-valuado con $y_0 := y(\eta)$. Como f es suprayectivo, sea $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = y_0$, lo que induce una extensión de cuerpos $\Bbbk(y_0) \hookrightarrow \Bbbk(x_0)$. Sea L una extensión común de K y $\Bbbk(x_0)$, por ejemplo, $L = \Bbbk(x_0) \otimes_{\Bbbk(y_0)} K/\mathfrak{m}$, donde $\mathfrak{m}$ es maximal basta. Entonces la composición $x\colon \operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec}(\Bbbk(x_0)) \to X$ satisface que $f(L)(x) = y_L$. □

Proposición 4.28: Sea X un esquema algebraico sobre un cuerpo k. Para toda extensión de cuerpos K/k se cumplen:

1. Existe una biyección canónica $X(K) \to X_K(K)$.
2. Un punto K-valuado $s \in X(K)$ viene completamente determinado por un punto $x \in X$ y un homomorfismo de k-álgebras $\Bbbk(x) \to K$. En particular, un punto k-valuado $s \in X(K)$ corresponde a un punto $x \in X$ tal que $\Bbbk(x) = k$.

3. Para toda extensión L/K existe una inclusión natural $X(L) \subseteq X(K)$.

4. Si X es la subvariedad cerrada $\mathbf{V}(\mathfrak{a})$ de $\mathbb{A}_k^n$, entonces podemos identificar $X(K)$ con el conjunto

$$\{P = (a_1, \dots, a_n) \in K^n : \forall f(\boldsymbol{x}) \in \mathfrak{a} \quad f(P) = 0\}.$$

Demostración:

1. Basta emplear la propiedad universal del producto fibrado.

2. Dado $s \in X(K)$, entonces basta evaluar $s(\xi) =: x$, donde $\xi := (0) \in \operatorname{Spec} K$, y el homomorfismo de k-álgebras viene determinado por la localización $s_\xi^\sharp \colon \Bbbk(x) = \mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{O}_{K,\xi} = K$.

   Recíprocamente, dado un homomorfismo de k-álgebras $\varphi \colon \Bbbk(x) \to K$, entonces induce un morfismo de esquemas $\varphi^a \colon \operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} \Bbbk(x)$ que componemos con el morfismo canónico $\operatorname{Spec} \Bbbk(x) \to X$.

3. Basta notar que una extensión L/K induce $\operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} K$, el cual es una biyección (como función).

4. y 5. Basta aplicar el inciso 1 y ver que $\mathbf{V}_{k[t_1,\dots,t_n]}(\mathfrak{a})_K = \mathbf{V}_{K[t_1,\dots,t_n]}(\mathfrak{a})$, el cual queda de ejercicio para el lector. □

Definición 4.29: Sea X un esquema algebraico sobre un cuerpo k y K/k una extensión de Galois. Para todo k-automorfismo (de cuerpos) $\sigma \in \operatorname{Gal}(K/k)$ definimos el morfismo $\sigma_X \colon X \to X$ dado por el siguiente diagrama conmutativo (en Sch/k):

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Spec} K \arrow[rr, "\sigma^a"] & & \operatorname{Spec} K \\
X_K \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, "\sigma_X"] & & X_K \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& X \arrow[rr, equal] & & X
\end{tikzcd}$$

Corolario 4.29.1: Sea X un esquema algebraico sobre un cuerpo k y K/k una extensión de Galois con $G := \operatorname{Gal}(K/k)$. Como $G \curvearrowright X(K)$ se cumple que $G/X(K)$ admite una inyección canónica en X y $\operatorname{Fix}_G X(K)$ se indentifica con $X(k)$.

Demostración: Basta aplicar la proposición anterior, notando que el inciso 2 determina una función de conjuntos $\rho\colon X(K) \to X$ cuyas fibras $\rho^{-1}[\{x\}]$ corresponden a órbitas de $X(K)$. □

Teorema 4.30: Sea X un esquema algebraico sobre un cuerpo k. Si X es geométricamente reducido, entonces $X(k^{\text{sep}}) \neq \varnothing$.

Demostración: Sustituyendo X por $X_{k^{\text{sep}}}$ y k por k^{sep}, podemos suponer que k es separablemente cerrado y que X es reducido para probar que $X(k) \neq \varnothing$. Mirando abiertos afínes irreducibles, podemos suponer que X es afín e íntegro. Luego, por el corolario 4.28, entonces $K(X) = k(t_1, \dots, t_d)(\gamma)$, donde $\{t_1, \dots, t_d\}$ es una base de trascendencia de $K(X)$ y γ es separable sobre $\Bbbk(t)$. □

Teorema 4.31: Sea X un esquema algebraico sobre un cuerpo k y sea $\pi\colon X_{k^{\text{alg}}} \to X$ la proyección canónica. Entonces:

1. π es suprayectiva y es una aplicación abierta y cerrada.
2. Para todo $x, y \in X_{k^{\text{alg}}}$ se cumple que $\pi(x) = \pi(y)$ syss $x = \sigma_X(y)$ para algún $\sigma \in \operatorname{Gal}(k^{\text{alg}}/k)$. Es decir, para todo $x \in X$ se cumple que la fibra $f^{-1}[\{x\}]$ corresponde a una órbita de $\operatorname{Gal}(k^{\text{alg}}/k)$, en particular, es un conjunto finito.

Demostración:

1. Que π sea suprayectiva se sigue de la proposición 4.6. Supongamos, sin perdida de generalidad, que $X = \operatorname{Spec} A$ es afín. Luego un cerrado $\mathbf{V}(\mathfrak{b})$ de $X_{k^{\text{alg}}}$ viene de un ideal $\mathfrak{b} \trianglelefteq A \otimes_k k^{\text{alg}}$, y podemos definir $\mathfrak{a} := \mathfrak{b} \cap A$. Ahora bien, como k^{alg}/k es una extensión algebraica, luego entera, vemos que $A \otimes_k k^{\text{alg}}$ es una extensión entera de A, luego para cada primo $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}$ de $A \otimes_k k^{\text{alg}}$ obtenemos un primo $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{a}$ de A por el teorema del ascenso. Lo que demuestra que $\pi[\mathbf{V}(\mathfrak{b})] = \mathbf{V}(\mathfrak{a})$.
2. Esto equivale a probar que para dos primos $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \triangleleft A \otimes_k k^{\text{alg}}$ se cumple que
$$\mathfrak{p}_1 \cap A = \mathfrak{p}_2 \cap A \iff \exists \sigma \in \operatorname{Gal}(k^{\text{alg}}/k) \quad \mathfrak{p}_2 = (1_A \otimes_k \sigma)[\mathfrak{p}_1].$$
$\Longleftarrow$. Trivial.
$\Longrightarrow$. Sea $\mathfrak{q} := \mathfrak{p}_1 \cap A = \mathfrak{p}_2 \cap A$. Sea $K := A/\mathfrak{q}$, entonces considere el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_k k^{\mathrm{alg}} \arrow[r, "j"] & K \otimes_k k^{\mathrm{alg}} \\
A \arrow[u] \arrow[r, two heads] & K \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Ahora bien,

$$K \otimes_k k^{\mathrm{alg}} = \frac{A \otimes_k k^{\mathrm{alg}}}{\mathfrak{q}(A \otimes_k k^{\mathrm{alg}})}[S^{-1}],$$

donde $S := A \setminus \mathfrak{q}$ es un sistema multiplicativo.

Ahora bien, como $\mathfrak{p}_i \supseteq \mathfrak{q}(A \otimes_k k^{\mathrm{alg}})$ y cada $\mathfrak{p}_i$ es disjunto de S, entonces $\mathfrak{p}_i^e := j[\mathfrak{p}_i] \cdot (K \otimes_k k^{\mathrm{alg}})$ es primo. Luego ambos $(K \otimes_k k^{\mathrm{alg}})/\mathfrak{p}_i^e$ son dominios íntegros que contienen a K, por ende están contenidos en una extensión Ω/K de cuerpos. Por ello, basta probar que $\mathfrak{p}_2^e = (1_A \otimes_k \sigma)[\mathfrak{p}_1^e]$ para algún $\sigma \in \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{alg}}/k)$. Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo (en Alg_k):

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega & \\
(K \otimes_k k^{\mathrm{alg}})/\mathfrak{p}_1^e \arrow[ur] & & (K \otimes_k k^{\mathrm{alg}})/\mathfrak{p}_2^e \arrow[ul] \\
 & K \arrow[ul] \arrow[ur] & k^{\mathrm{alg}} \arrow[ull, "\alpha_1"'] \arrow[u, "\alpha_2"'] \\
 & k \arrow[u] \arrow[ur, dashed, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

donde todas las flechas son monomorfismos.

Luego vemos que $\alpha_1[k^{\mathrm{alg}}], \alpha_2[k^{\mathrm{alg}}]$ son clausuras algebraicas de k en Ω, por lo que, existe $\sigma \in \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{alg}}/k)$ tal que $\alpha_2 = \sigma \circ \alpha_1$ (como el diagrama). Ahora bien, para $x_i \in K$ e $y_i \in k^{\mathrm{alg}}$ vemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m xj \otimes yj \in \mathfrak{p}_2^e &\iff \sum_{j=1}^m x_j \cdot \alpha_2(y_j) = 0 \in \Omega \\
&\iff \sum_{j=1}^m x_j \cdot \alpha_1(\sigma(y_j)) = 0 \in \Omega \\
&\iff \sum_{j=1}^m x_j \otimes \sigma(y_j) \in \mathfrak{p}_1^e,
\end{aligned}$$

lo que comprueba que $\mathfrak{p}_2^e = (1_K \otimes_k \sigma)[\mathfrak{p}_1^e]$ como se quería probar. □

Corolario 4.31.1: Sea k un cuerpo y X un k-conjunto algebraico. La topología sobre X es la topología cociente de $X_{k^{\mathrm{alg}}}$ por la acción de $\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{alg}}/k)$.

§4.2.4 Endomorfismos de Frobenius.

Definición 4.32: Sea $k = \mathbb{F}_q$ el cuerpo con q elementos. Sea A una k-álgebra, entonces el ***endomorfismo de Frobenius*** es

$$\begin{aligned} \sigma\colon A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto a^q. \end{aligned}$$

Luego, el ***endomorfismo de Frobenius absoluto*** sobre $X := \operatorname{Spec} A$ es el k-endomorfismo $\mathrm{Frob}_{A/k} := \sigma^a\colon X \to X$. Más generalmente si X es un k-esquema cualquiera (no necesariamente de tipo finito), entonces $\mathrm{Frob}_{X/k}\colon X \to X$ es el k-endomorfismo que sobre abiertos afines se ve de la forma σ^a.

Lema 4.33: Sea $k := \mathbb{F}_q$ y sean X, Y un par de k-esquemas. Entonces:

1. Para todo $f\colon X \to Y$ se cumple que $f \circ \mathrm{Frob}_Y = \mathrm{Frob}_X \circ f$.
2. Para todo punto $x \in X$ se cumple que $\mathrm{Frob}_X(x) = x$.

Pista: Ambas se deducen de verlo sobre abiertos afines, traduciéndolo al endomorfismo. □

Definición 4.34: Sea S un k-esquema y $f\colon X \to S$ un S-esquema. Entonces sea $S^{(q)}$ el S-esquema $\mathrm{Frob}_{S/k}\colon S^{(q)} \to S$ y así, sea $X^{(q)} := X \times_S S^{(q)}$. El ***endomorfismo de Frobenius relativo*** sobre X/S es el producto fibrado $\mathrm{Frob}_{X/S} := (\mathrm{Frob}_X, \pi)\colon X \to X^{(q)}$, es decir, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& & X \arrow[dr, "f"] & \\
X \arrow[r, "\mathrm{Frob}_{X/S}"] \arrow[urr, bend left, "\mathrm{Frob}_X"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & X^{(q)} \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & & S \\
& & S^{(q)} = S \arrow[ur, "\mathrm{Frob}_S"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.2}$$

Como conjunto $X, X^{(q)}$ contienen los mismos puntos, pero a nivel de esquemas pueden ser distintos.

Proposición 4.35: Sea $k := \mathbb{F}_q$, S un k-esquema y X un S-esquema. Denotando $\pi_1 \colon X^{(p)} \to X$ la proyección, tenemos que $\operatorname{Frob}_{X/S}, \pi_1$ son homeomorfismos.

Demostración: Probaremos que $\varphi := \pi_1 \circ \operatorname{Frob}_{X/S} = \operatorname{Frob}_{X^{(q)}}$. En notación del diagrama (4.2), nótese que

$$\varphi \circ \pi_2 = \pi_1 \circ f = \pi_2 \circ \operatorname{Frob}_S = \operatorname{Frob}_{X^{(q)}} \circ \pi_2,$$

y también $\varphi \circ \pi_1 = \pi_1 \circ \operatorname{Frob}_X = \operatorname{Frob}_{X^{(q)}} \circ \pi_1$. Así, por definición de producto fibrado, necesariamente $\varphi = \operatorname{Frob}_{X^{(q)}}$. □

4.3 Morfismos separados

Definición 4.36: Sea $f \colon X \to S$ un morfismo, de modo que consideramos a X como S-esquema. El producto fibrado $X \times_S X$ admite dos proyecciones $\pi_1, \pi_2 \colon X \times_S X \to X$, luego el morfismo diagonal $\Delta_{X/S} \colon X \to X \times_S X$ es aquel tal que $\Delta_{X/S} \circ \pi_1 = \Delta_{X/S} \circ \pi_2 = \operatorname{Id}_X$. El morfismo f se dice ***separado*** (resp. ***cuasiseparado***) si $\Delta_{X/S}$ es un encaje cerrado (resp. un morfismo compacto).

Proposición 4.37: Todo morfismo cuasiseparado es separado.

Proposición 4.38: Todo morfismo entre esquemas afínes es separado.

Demostración: Sea $\varphi^a \colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ inducido por $\varphi \colon A \to B$. Entonces, el A-homomorfismo $\rho \colon B \otimes_A B \to B$ dado por $\rho(b \otimes b') := bb'$ es suprayectivo, luego $\rho^a = \Delta_{B/A}$ es un encaje cerrado (¿por qué?). □

Un ejercicio sencillo:

Proposición 4.39: Un esquema X es cuasiseparado syss el morfismo canónico $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ es cuasiseparado.

Corolario 4.39.1: Sea $f \colon X \to Y$ un morfismo de esquemas. Se cumple que $\Delta_{X/S}$ es un encaje cerrado syss $\Delta_{X/S}[X] \subseteq X \times_Y X$ es cerrado.

Considere que $U, V \subseteq X$ son abiertos afínes de un esquema. Entonces podemos considerar el siguiente homomorfismo:

$$\mathscr{O}_X(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{O}_X(V) \longrightarrow \mathscr{O}_X(U \cap V)$$

$$f \otimes g \longmapsto f|_{U \cap V} \cdot g|_{U \cap V}.$$

Proposición 4.40: Sea X un esquema. Son equivalentes:

1. X es separado.
2. Para todo par de abiertos afínes $U, V \subseteq X$ se cumple que $U \cap V$ es afín y el homomorfismo $\mathscr{O}_X(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{O}_X(V) \to \mathscr{O}_X(U \cap V)$ es suprayectivo.
3. Existe un cubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$ por abiertos afínes tales que cada $U_i \cap U_j$ es afín y tal que el homomorfismo $\mathscr{O}_X(U_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{O}_X(U_j) \to \mathscr{O}_X(U_i \cap U_j)$ es suprayectivo.

Demostración: Sea $\Delta := \Delta_{X/\mathbb{Z}}$. Entonces $U \cap V = \Delta^{-1}[U \times_{\mathbb{Z}} V]$. Así, el homomorfismo descrito arriba corresponde al asociaado al morfismo $\Delta \colon U \cap V \to U \times_{\mathbb{Z}} V$. Ahora bien, como $U \times_{\mathbb{Z}} V$ es afín, entonces se sigue que $1 \implies 2$.

Recíprocamente, como $U \times_{\mathbb{Z}} V$ es afín, entonces $\Delta \colon U \cap V \to U \times_{\mathbb{Z}} V$ resulta ser un encaje cerrado, luego pegándolo sobre todas las cartas afínes, vemos que $\Delta \colon X \to X \times_{\mathbb{Z}} X$ es un encaje cerrado. Es claro que solo necesitas cubrir a X con cartas de éste estilo de modo que vemos $2 \implies 3 \implies 1$. □

Proposición 4.41: Sean X, Y, S un trío de esquemas. Entonces:

1. Los encajes abiertos y cerrados son separados.
2. La composición de morfismos (cuasi)separados es (cuasi)separada.
3. Los morfismos (cuasi)separados son estables salvo cambio de base.
4. El producto fibrado de S-esquemas (cuasi)separados es (cuasi)separado.
5. Sean $f \colon X \to Y, g \colon Y \to S$ morfismos de esquemas tales que $f \circ g$ es (cuasi)separado. Entonces f es (cuasi)separado.
6. Sea Y separado (resp. cuasiseparado) sobre S. Si X_1, X_2 son un par de Y-esquemas, entonces el morfismo canónico $X_1 \times_Y X_2 \to X_1 \times_S X_2$ es un encaje cerrado (resp. morfismo compacto).

Demostración:

1. Como los encajes abiertos y cerrados son estables bajo cambio de base, entonces vemos que el morfismo estructural $p \colon X \times_S X \hookrightarrow X$ lo es.

Luego como $\Delta_{X/S} \circ p = \mathrm{Id}_X$, vemos que p es necesariamente supra-yectivo, luego es un homeomorfismo y, en consecuente, determina un isomorfismo de esquemas (¿por qué?).

2. Sean $X \to Y, Y \to S$ morfismos de esquemas. Luego considere $\Delta_{X/Y} \colon X \to X \times_Y X = X \times_Y Y \times_Y X$ y

$$\Delta_{X/S} \colon X \to X \times_S X = X \times_Y (Y \times_S Y) \times_Y X,$$

de modo que $\Delta_{X/S} = \Delta_{X/Y} \circ (1_X \times_Y \Delta_{Y/S} \times_Y 1_Y)$. Así, el resultado se sigue de que los encajes cerrados son estables salvo cambio de base.

3. Basta notar que

$$\Delta_{X \times_S Y/Y} \colon X \times_S Y \to (X \times_S Y) \times_Y (X \times_S Y) = (X \times_S X) \times_S Y,$$

de modo que $\Delta_{X \times_S Y/Y} = \Delta_{X/S} \times_S 1_Y$ y los encajes cerrados son estables salvo cambio de base.

4. Si $X \to S, Y \to S$ son separados, entonces $X \times_S Y \to S$ se factoriza por $X \times_S Y \to Y$ (que es separado, por ser cambio de base de $X \to S$) y por $Y \to S$ que son ambos morfismos separados.

5. Sea $h \colon X \times_Y X \to X \times_S X$ el morfismo canónico, entonces $\Delta_{X/Y}[X] \subseteq h^{-1}\big[\Delta_{X/S}[X]\big]$. Basta probar que se da la inclusión $\supseteq$, pues entonces $\Delta_{X/Y}[X]$ será cerrado. Sea $s \in h^{-1}\big[\Delta_{X/S}[X]\big]$, luego existe $x \in X$ tal que $\Delta_{X/S}(x) = h(s)$ y además sea $t := \Delta_{X/Y}(x) \in \Delta_{X/Y}[X]$. Sean U, V, W entornos afines de $x, f(x), g(f(x))$ resp., tales que $U \subseteq f^{-1}[V]$ y $V \subseteq g^{-1}[W]$. Luego $s, t \in U \times_V U$ y la restricción $h|_{U \times_V U} \colon U \times_V U \to U \times_W U$ es un encaje cerrado, con lo que $s = t \in \Delta_{X/Y}[X]$ por inyectividad (local) de h.

6. Basta notar que el homomorfismo canónico $X_1 \times_Y X_2 \to X_1 \times_S X_2$ es

$$1_{X_1} \times_S \Delta_{Y/S} \times_S 1_{X_2} \colon X_1 \times_Y Y \times_Y X_2 \longrightarrow X_1 \times_Y (Y \times_S Y) \times_Y X_2,$$

y luego concluir mediante que los encajes cerrados (resp., morfismos compactos) son estables salvo cambio de base. □

Definición 4.42: Sea S un esquema. Se denota $\mathbb{A}^n_S := \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} S$ y $\mathbb{P}^n_S := \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} S$. Se dice que un morfismo $X \to S$ es ***proyectivo*** si se factoriza por un encaje cerrado $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_S$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{P}^n_S \to S$.

Corolario 4.42.1: Los morfismos proyectivos son de tipo finito y separados.

Demostración: Basta notar que el morfismo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ es de tipo finito y separado (¿por qué?) para ver que $\mathbb{P}^n_S \to S$ lo es por ser cambio de base. Así, como $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_S$ es un encaje cerrado (luego, es de tipo finito y separado), entonces $X \to S$ es de tipo finito y separado por composición. □

Teorema 4.43: Sean X un S-esquema reducido e Y un S-esquema separado. Para todo par de S-morfismos $f, g\colon X \to Y$ tales que $f|_U = g|_U$ sobre algún $U \subseteq X$ abierto denso se cumple que $f = g$.

Demostración: Sea $h := (f, g)\colon X \to Y \times_S Y$ y denotemos $\Delta := \Delta_{Y/S}\colon Y \to Y \times_S Y$. Se cumple que $f \circ \Delta = (f, f)\colon X \to Y \times_S Y$ (¿por qué?) y la hipótesis se traduce en que $(f \circ \Delta)|_U = h|_U$, por ende, $U \subseteq h^{-1}\big[\Delta[Y]\big]$. Como $\Delta[Y]$ es cerrado por hipótesis, tenemos que $X = h^{-1}\big[\Delta[Y]\big]$, por lo que, $f = g$ (como funciones continuas).

Podemos verificar que $f = g$ como morfismos de esquemas sobre abiertos afines. Sea $X = \operatorname{Spec} B, Y = \operatorname{Spec} A$ y sean φ, ψ tales que $\varphi^a = f, \psi^a = g$. Dado $a \in A$, definamos $b := \varphi(a) - \psi(a) \in B$, de modo que $b|_U = 0$, o equivalentemente, $U \subseteq \mathbf{V}(b)$. Pero como U es denso, entonces $\mathbf{V}(b) = X$, luego b es nilpotente por la proposición 3.8 y como B es reducido, entonces $b = 0$. Aplicándolo para todo a se comprueba que $f = g$. □

4.4 Morfismos propios

Ya vimos que ser suprayectivo es estable por cambio de base, mientras que ser inyectivo no lo es. Otro ejemplo curioso es que ser un encaje cerrado es estable por cambio de base, pero ser un morfismo cerrado (como función entre espacios topológicos) no lo es:

Ejemplo. Sea k un cuerpo (o un anillo artiniano). Considere el morfismo $\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec}(k[x]) \to \operatorname{Spec} k = \mathbb{A}^0_k$, el cual es cerrado pues $\mathbb{A}^0_k$ es discreto. El cambio de base por $\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec}(k[y])$ nos da un morfismo $\operatorname{Spec}(k[x, y]) \to \operatorname{Spec}(k[y])$ dado por «proyectar en la segunda coordenada». Este morfismo no es cerrado, puesto que el cerrado $\mathbf{V}(xy - 1) \subseteq \mathbb{A}^2_k$ se manda en el abierto $\mathbf{D}(y) = \mathbb{A}^1_k \setminus \{\mathfrak{m}_0\}$ (ver fig. 4.1).

Por ello, es necesaria la siguiente definición:

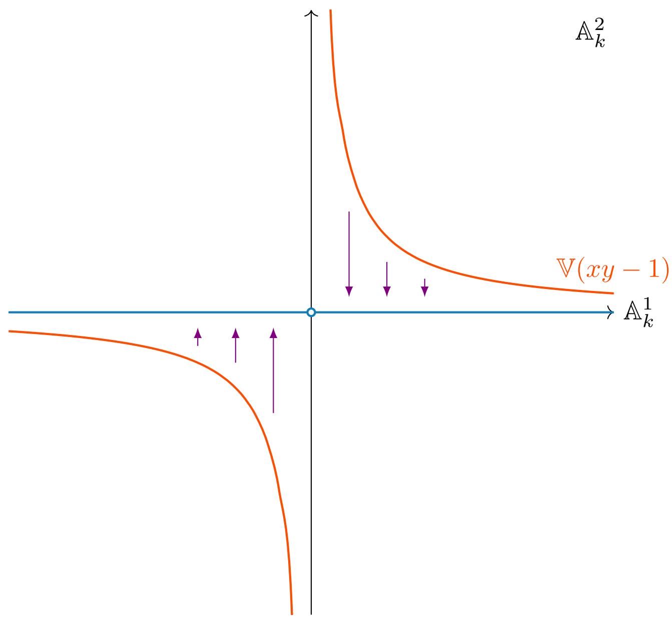

Figura 4.1

Definición 4.44: Un morfismo $f\colon X \to Y$ se dice ***universalmente cerrado*** si es un morfismo cerrado bajo cualquier cambio de base. Un morfismo se dice ***propio*** si es de tipo finito, separado y universalmente cerrado. Un S-esquema se dice propio si su morfismo estructural es propio.

Así, vemos que $\mathbb{A}^1_k$ no es propio sobre $\operatorname{Spec} k$. (Y un argumento similar, da que ningún $\mathbb{A}^n_k$ es propio.)

Lema 4.45: Sea $\mathcal{P}$ una propiedad de morfismos de esquemas tal que satisface lo siguiente:

(a) Los encajes cerrados verifican $\mathcal{P}$.

(b) $\mathcal{P}$ es estable salvo composición.

(c) $\mathcal{P}$ es estable salvo cambio de base.

Entonces:

1. $\mathcal{P}$ es estable salvo productos fibrados.
2. Sean $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ morfismos tales que $f \circ g$ verifica $\mathcal{P}$ y g es separado. Entonces f verifica $\mathcal{P}$.

Demostración:

1. Sean $X \to S, Y \to S$ dos morfismos que verifican $\mathcal{P}$, luego $X \times_S Y \to Y$ se factoriza como $X \times_S Y \to Y$ (que es cambio de base de $X \to S$) y $Y \to S$, que ambos verifican $\mathcal{P}$.

2. Sea $q := (f \times_Z g)\colon X \times_Z Y \to Y$ el cual podemos ver como el cambio de base de $f \circ g$, luego verifica $\mathcal{P}$. Ahora bien el morfismo canónico $p \times_Y q\colon X = X \times_Y Y \to X \times_Z Y$ es un encaje cerrado puesto que g es separado, por lo que verifica $\mathcal{P}$ y así la composición

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p\times_Y q"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & X \times_Z Y \arrow[r, "f\times_Z g"'] & Y \end{tikzcd}$$

verifica $\mathcal{P}$. □

Proposición 4.46: Se cumplen:

1. Los encajes cerrados son propios.
2. La composición de morfismos propios es propia.
3. Los morfismos propios son estables salvo cambio de base.
4. El producto fibrado de morfismos propios es propio.
5. Si $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ son morfismos de esquemas tales que $f \circ g$ es propio y g es separado, entonces f es propio.
6. Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo suprayectivo de S-esquemas. Supongamos que X es propio sobre S e Y es separado y de tipo finito sobre S. Entonces Y es propio sobre S.

Demostración: Las propiedades 1-3 son triviales de los resultados anteriores y las propiedades 4-5 son una aplicación del lema anterior. Probaremos 6: sea $T \to S$ un morfismo de esquemas, entonces $f_T\colon X_T \to Y_T$ es suprayectivo pues dicha propiedad es estable salvo cambio de base, luego para todo $F \subseteq Y_T$ cerrado, entonces $F = f_T[f_T^{-1}[F]]$ y la imagen de $f_T^{-1}[F]$ por el morfismo $X_T \to T$ es cerrada, pues el morfismo $X \to S$ es universalmente cerrado, luego el morfismo $Y_T \to T$ es cerrado. Así pues, $Y \to S$ es universalmente cerrado y, por tanto, es propio. □

Proposición 4.47: Sea S un esquema, sea Y un esquema separado de tipo finito sobre S y sea $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ un morfismo suprayectivo de S-esquemas. Si X es propio sobre S, entonces Y también es propio sobre S.

Demostración: Basta probar que Y es universalmente cerrado sobre S. Para ello, sea T un S-esquema, entonces la composición $X_T \twoheadrightarrow Y_T \to T$ es un morfismo cerrado, pues X es propio, y $X_T \twoheadrightarrow Y_T$ es suprayectivo, por lo que $Y_T \to T$ es cerrado. □

Lema 4.48: Sea A un anillo. Si $Y = \operatorname{Spec} B$ es un esquema afín propio sobre $X = \operatorname{Spec} A$, entonces B es un A-módulo finitamente generado.

Demostración: Como $\operatorname{Spec} B$ es de tipo finito sobre $\operatorname{Spec} A$, entonces B es una A-álgebra de tipo finito. Reduzcámonos al caso de que B está generado por un elemento sobre A, es decir, existe $\varphi\colon A[t] \twoheadrightarrow B$ suprayectivo. Vemos a $\operatorname{Spec}(A[t])$ como subesquema abierto de $\operatorname{Proj}(A[T_1, T_2])$ identificado con el abierto $\mathbf{D}_+(T_2)$ (y con $t = T_1/T_2$). Así pues, tenemos la composición:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "\varphi^a"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & \operatorname{Spec} A[t] \arrow[r, hook] & \operatorname{Proj} A[T_1, T_2] = \mathbb{P}^2_A \end{tikzcd}$$

y vemos que f resulta ser propio, puesto que el morfismo $\mathbb{P}^2_A \to \operatorname{Spec} A$ es proyectivo, luego es separado, la composición con f da el morfismo $Y \to X$ que es propio y concluimos por la proposición anterior, inciso 5. Así pues, existe $\mathfrak{a} \lhd A[T_1, T_2]$ homogéneo, tal que $f[Y] = \mathbf{V}_+(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbf{D}_+(T_2)$. Así que $\mathbf{V}_+(\mathfrak{a}) \cap \mathbf{V}_+(T_2) = \varnothing$, luego $(T_1, T_2) \subseteq \operatorname{Rad}(\mathfrak{a} + (T_2))$. De esto se concluye que existe un polinomio $g(T_1, T_2) = T_1^n + T_2 \cdot h(T_1, T_2) \in \mathfrak{a}$ homogéneo para algún $n \geq 1$. Por ello, $\varphi^a[Y] = \mathbf{V}_+(\mathfrak{a}) \cap \mathbf{V}_+(T_2) = \mathbf{V}(\mathfrak{a}_{(T_2)})$, luego el elemento $\varphi(T_2^{-n} g)$ es nilpotente en B y además se satisface la siguiente ecuación

$$\varphi(T_2^{-n} \cdot g) = \varphi(t)^n + h\big(\varphi(t), 1\big),$$

donde $\deg_s h(s, 1) \leq n-1$. Elevando dicha ecuación a m de modo que $\varphi(T_2^{-n} \cdot g)^m = 0$, obtenemos un polinomio mónico con coeficientes en A tal que anula a $\varphi(t)$, por lo que B/A es entero.

El caso general sale por inducción de éste caso. □

Teorema 4.49: Sea A un anillo y X un A-esquema propio. Entonces $\mathscr{O}_X(X)$ es una A-álgebra entera.

Demostración: Sustituyendo X_{red} por X, podemos suponer que X es reducido por la proposición 3.78. Sea $h \in \mathscr{O}_X(X)$, entonces el homomorfismo $\mathrm{ev}_h \colon A[t] \to \mathscr{O}_X(X)$ induce el morfismo de esquemas $f \colon X \to \operatorname{Spec} A[t]$, el cual es propio (¿por qué?). Por tanto, existe $\mathfrak{a} \trianglelefteq A[t]$ tal que $f[X] = \mathbf{V}(\mathfrak{a}) \cong \operatorname{Spec} B$, donde $B = A/\mathfrak{a}$. Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[dr, dashed, "\exists! g"'] & \operatorname{Spec} B \arrow[r, hook] & \mathbb{A}^1_A \arrow[r] & A \\ & \operatorname{Spec} B_{\mathrm{red}} \arrow[u, hook, "\sim"'] & & \end{tikzcd}$$

De modo que g debe ser suprayectivo. Finalmente, $\operatorname{Spec} B$ es un A-esquema propio puesto que X es un A-esquema propio y el morfismo $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ es separado, por la proposición 4.37, y de tipo finito, así que B/A es entera. Más aún, el morfismo $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ es separado y la composición $X \to \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ es propia, luego $X \to \operatorname{Spec} B$ es propio, por lo que $\mathscr{O}_X(X)/B$ es entera y así $\mathscr{O}_X(X)/A$ también. $\square$

Definición 4.50: Sea k un cuerpo. Se dice que un k-esquema es una ***variedad*** sobre k si es un esquema íntegro y el morfismo estructural es separado y de tipo finito. Un k-esquema es una ***variedad afín*** (resp. ***proyectiva***) si el esquema es afín (resp. si el morfismo estructural es proyectivo).

Un esquema algebraico sobre k se dice ***completo*** si el morfismo estructural es propio.

Corolario 4.50.1: Sea X un esquema algebraico reducido y completo sobre un cuerpo k. Entonces $\mathscr{O}_X(X)$ es un k-espacio vectorial de dimensión finita.

Corolario 4.50.2: Sea X un esquema algebraico reducido, conexo y completo sobre un cuerpo k. Entonces $K := \mathscr{O}_X(X)$ es una extensión finita de cuerpos de k. Más aún, si X es geométricamente conexo, entonces K/k es puramente inseparable y si X es además geométricamente reducido, entonces $K = k$.

Demostración: Por el corolario anterior, $\mathscr{O}_X(X)$ es una k-álgebra entera (luego, es un anillo artiniano) y es reducida, luego es un producto de cuerpos por el corolario A.29. Como X es conexo, entonces necesariamente K es un cuerpo, y por el corolario anterior, es una extensión finita de k. Si X es geométricamente conexo, entonces $X_{k^{\mathrm{sep}}}$ es conexo y reducido, luego $K \otimes_k$

k^{sep} es un cuerpo y contiene a $(K \cap k^{\text{sep}}) \otimes_k (K \cap k^{\text{sep}})$, por lo que, $K \cap k^{\text{sep}} = k$ y K ha de ser puramente inseparable. Si X es geométricamente reducido, entonces $K(X) = K$ es separablemente generado por el corolario 4.28, y, por ende, $K = k$. $\square$

Teorema 4.51: Sea X un esquema algebraico reducido, conexo y completo sobre un cuerpo k, y sea Y un esquema algebraico afín sobre k. Entonces todo morfismo de esquemas $f: X \to Y$ es constante.

Demostración: Sea $\pi: X \to \operatorname{Spec} k$, entonces hacemos cambio de base por Y y obtenemos $\pi_Y: X_Y \to Y$ el cual es un morfismo cerrado. Es fácil ver que $X_Y = X$ y $\pi_Y = f$ (¿por qué?), así que podemos considerar que $f[X]$ es un subesquema cerrado reducido de Y. Más aún, $f[X]$ es un esquema propio por la proposición 4.46, conexo y, por ser un subesquema cerrado de Y, es un esquema algebraico afín sobre k, así que el corolario anterior nos dice que $f[X]$ es un punto. $\square$

Ahora, recuérdese la siguiente definición:

Definición 4.52: Un anillo A se dice ***de valuación*** si es un dominio íntegro y para todo $a \in \operatorname{Frac}(A)\times$ se cumple que $a \in A$ o $a^{-1} \in A$. También se dice que si $K := \operatorname{Frac} A$, entonces A es de valuación en K.

Sean $A \subseteq B$ dos anillos locales, entonces se dice que B ***domina*** a A si la inclusión $A \hookrightarrow B$ es un homomorfismo de anillos locales.

Lema 4.53: Sea A un anillo de valuación en K y sea $A \subseteq B \subseteq K$ un subanillo local que domina a A. Entonces $B = A$.

Demostración: Cfr. **[39]**, teo. 12.6, inciso 4. $\square$

Teorema 4.54: Sea A un anillo de valuación en K y sea X un A-esquema propio. La función canónica $X(A) \to X_K(K)$ es biyectiva.

Demostración: La función canónica es aquella dada por el cambio de base. Sean $s, t \in X(A)$, entonces $s_K = t_K$ implican que $s|_{\operatorname{Spec} K} = t|_{\operatorname{Spec} K}$ donde $\operatorname{Spec} K \subseteq \operatorname{Spec} A$ es un abierto denso, donde X es un A-esquema propio, luego en particular es reducido, así que $s = t$ por el teorema 4.43.

Sea $\pi: \operatorname{Spec} K \to X_K$ un $\operatorname{Spec} K$-morfismo. Denotemos η, s al punto genérico y al punto cerrado de A resp., y sea $x := \pi(\eta) \in X_K \subseteq X$. Sea $Z := \overline{\{x\}} \subseteq X$ el subesquema cerrado irreducible y dotémoslo de una estructura reducida (prop. 3.78), de modo que Z es un esquema íntegro. Como $Z \hookrightarrow X$, entonces es propio sobre X y, por lo tanto, sobre A. Además x es cerrado en X_K, por la proposición 3.105, y es denso en Z_K, así que $Z_K = \{x\}$. La imagen de $Z \to \operatorname{Spec} A$ es cerrada y contiene a η, luego es todo $\operatorname{Spec} A$. Sea $t \in Z_s$, luego $\mathscr{O}_{Z,t}$ es un anillo local que domina a A y con cuerpo de fracciones $\mathscr{O}_{Z,x} = K$, luego por el lema anterior $\mathscr{O}_{Z,t} = A$, de lo que $\pi\colon \operatorname{Spec} K \to X$ se extiende a $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{Z,t}) \to Z \to X$. □

Corolario 4.54.1: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo propio de esquemas. Para todo Y-esquema $\operatorname{Spec} A$, donde A es un anillo de valuación en K, se cumple que la función canónica $X(A) \to X(K)$ es una biyección.

Teorema 4.55: Los morfismos proyectivos son propios.

Demostración: Sea $X \to S$ proyectivo. Como se factoriza por $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_S$, entonces basta ver que el morfismo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ es universalmente cerrado, lo que equivale a ver que el morfismo $\pi\colon \mathbb{P}^n_Y \to Y$ es cerrado para todo esquema Y, y para ello podemos suponer $Y = \operatorname{Spec} A$ afín.

Sea $B := A[t_0, t_1, \dots, t_n]$, sea $\mathfrak{b} \lhd B$ homogéneo de modo que $\mathbf{V}_+(\mathfrak{b}) \subseteq \mathbb{P}^n_A$ es cerrado. Queremos probar que $U := Y \setminus \pi[\mathbf{V}_+(\mathfrak{b})]$ es abierto, así que sea $y \in Y$, luego

$$\mathbf{V}_+(b) \cap \pi^{-1}[\{y\}] = \mathbf{V}_+\left(\mathfrak{b} \otimes_A \Bbbk(y)\right),$$

por la proposición 4.4. Luego $y \in Y \setminus \pi^{-1}[\{y\}]$ syss $B_+ \otimes_A \Bbbk(y) \subseteq \operatorname{Rad}(b \otimes_A \Bbbk(y))$. Ésta inclusión equivale a que $B_m \otimes_A \Bbbk(y) \subseteq b \otimes_A \Bbbk(y)$, lo que equivale a que $(B/\mathfrak{b})_m \otimes_A \Bbbk(y) = 0$.

Sea $y \in Y$ tal que $(B/\mathfrak{b})_m \otimes_A \Bbbk(y) = 0$. Como B_m es un A-módulo finitamente generado, entonces $(B/\mathfrak{b})_m$ también y, por el lema de Nakayama, se cumple que $(B/\mathfrak{b})_m \otimes_A \mathscr{O}_{Y,y} = 0$. Por ello, existe $f \in A$ tal que $y \in \mathbf{D}(f)$ y $f \cdot (B/\mathfrak{b})_m = 0$, o equivalentemente, $(B/\mathfrak{b})_m \otimes_A A[1/f] = 0$. Finalmente $y \in \mathbf{D}(f) \subseteq Y \setminus \pi[\mathbf{V}_+(\mathfrak{b})]$, por lo cual es abierto. □

Lema 4.56: Para todo esquema S existe un encaje cerrado

$$\mathbb{P}^n_S \times_S \mathbb{P}^m_S \longhookrightarrow \mathbb{P}^N_S,$$

donde $N := (n+1)(m+1) - 1$. Este morfismo se dice el ***encaje de Segre***.

Demostración: Basta probarlo para $S = \operatorname{Spec} A$ afín. Denotemos $\mathbb{P}^n_S = \operatorname{Proj}(A[\{x_i : 0 \leq i \leq n\}])$, $\mathbb{P}^m_S = \operatorname{Proj}(A[\{y_j : 0 \leq j \leq m\}])$ y

$$\mathbb{P}^N_S = \operatorname{Proj}(A[\{z_{ij} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}]).$$

Y para todo par (i, j) definamos el morfismo

$$f_{ij} \colon \mathbf{D}_+(x_i) \times_S \mathbf{D}_+(y_j) \longrightarrow \mathbf{D}_+(z_{ij})$$

inducido por el homomorfismo de A-álgebras graduadas dado por

$$z_{uv} z_{ij}^{-1} \longmapsto (x_u x_i^{-1}) \otimes_A (y_v y_j^{-1}).$$

Así, es fácil notar que los f_{ij}'s son encajes cerrados compatibles que luego podemos pegar en el encaje de Segre. □

Corolario 4.56.1: Se cumplen:

1. Los encajes cerrados son proyectivos.
2. La composición de morfismos proyectivos es proyectivo.
3. Los morfismos proyectivos son estables salvo cambio de base.
4. El producto fibrado de morfismos proyectivos es proyectivo.
5. Si $f \colon X \to Y, g \colon Y \to Z$ son morfismos de esquemas tales que $f \circ g$ es proyectivo y g es separado, entonces f es proyectivo.

Demostración: La 1 y 3 son triviales. Para la 2 y la 4 hay que emplear el encaje de Segre. La 5 es una aplicación del lema 4.45. □

§4.4.1 Encajes y monomorfismos.

Definición 4.57: Sea $f \colon X \to Y$ un morfismo de esquemas. Se dice que f es un ***monomorfismo*** si es un monomorfismo en Sch, vale decir, si para todo par de morfismos $g, h \colon Z \to X$ tales que $g \circ f = h \circ f$ se cumple que $g = h$.

Proposición 4.58: Se cumplen:

1. $f \colon X \to Y$ es un monomorfismo syss la diagonal $\Delta_{X/Y} \colon X \to X \times_Y X$ es un isomorfismo.

2. Los monomorfismos son separados.

3. La composición de monomorfismos es un monomorfismo.

4. Los monomorfismos son estables salvo cambio de base.

Demostración: La 2 es consecuencia de 1 y todas son resultados categóricos. □

Ejemplo.
- El morfismo canónico $\operatorname{Spec} \mathbb{Q} \hookrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ es un monomorfismo. En efecto, basta notar que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

- Más generalmente, si X es un esquema y $x \in X$ un punto, entonces el morfismo canónico $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{X,x}) \hookrightarrow X$ es un monomorfismo (Pista: Basta ver el caso afín).

Definición 4.59: Un morfismo de esquemas $f : X \to Y$ se dice un ***encaje*** (a secas) si se factoriza como $f = i \circ j$, donde $i : X \overset{\circ}{\hookrightarrow} Z$ es un encaje abierto y $j : Z \overset{/}{\hookrightarrow} Y$ es un encaje cerrado.

Un morfismo de esquemas $X \to Y$ es ***cuasiproyectivo*** si se factoriza por un encaje $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_Y$ y el morfismo canónico $\mathbb{P}^n_Y \to Y$.

Más adelante veremos que un subesquema cerrado de un esquema proyectivo es proyectivo, de modo que ser cuasiproyectivo equivale a ser el abierto de un esquema proyectivo.

Corolario 4.59.1: Todo encaje es un monomorfismo.

Demostración: Basta notar que los encajes abiertos y cerrados son monomorfismos. □

Teorema 4.60: Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas.

1. Si f es un encaje, entonces también se puede factorizar como:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "/"] \arrow[rr, bend left, "f"] & U \arrow[r, hook, "\circ"] & Y. \end{tikzcd}$$

2. Si f es compacto (e.g., si Y es localmente noetheriano) y se factoriza como $X \overset{/}{\hookrightarrow} U \overset{\circ}{\hookrightarrow} Y$, entonces es un encaje.

3. Si f es un encaje y $g\colon Y \to Z$ es un encaje compacto, entonces $f \circ g$ es un encaje.
4. Si f es un encaje e Y es localmente noetheriano, entonces X es localmente noetheriano y f es compacto.

Demostración:

1. Digamos que f se factoriza en $X \overset{i}{\hookrightarrow} Z \overset{j}{\hookrightarrow} Y$. Así, $f[X]$ es un abierto en $j[Z]$, el cual es un cerrado en Y. Sea $U \subseteq Y$ abierto tal que $f[X] = j[Z] \cap U$, luego $j' := f\colon X \to U$ es un encaje cerrado que, al componer con $i'\colon U \hookrightarrow Y$ nos da f.
2. Podemos suponer, sin perdida de generalidad, que $X \subseteq U \subseteq Y$, con U abierto. Entonces sea $Z := \overline{X}$ y sea $\overline{f}\colon X \to Z$ el morfismo inducido, donde claramente la inclusión canónica $j\colon Z \hookrightarrow Z$ es un encaje cerrado. Como X es cerrado en U, entonces $X = X \cap U = Z \cap U$. ...
3. Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, hook, "f"] \arrow[dr, hook] & & Y \arrow[rr, hook, "g"] \arrow[dr] & & Z \\
& Z \arrow[ur, hook, "j"] \arrow[rr, hook] & & V \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Entonces $h := j \circ g$ es un morfismo compacto, pues j es compacto por ser encaje cerrado, y la composición de morfismos compactos es compacto. Además h se factoriza como un encaje cerrado con un encaje abierto, así que es un encaje por el inciso anterior. Así, h se escribe como un encaje abierto seguido de un cerrado y $f \circ g$ también.

4. Sea $f = i \circ j$ con $i\colon X \hookrightarrow Z$ encaje abierto y $j\colon Z \hookrightarrow Y$ encaje cerrado. Entonces Z es un subesquema cerrado de Y, luego es localmente noetheriano; y como X es un subesquema abierto de Z, entonces también es localmente noetheriano. Sabemos que un encaje abierto entre esquemas localmente noetherianos es compacto (proposición 4.14), así que i lo es y trivialmente j también, luego f es compacto. $\square$

§4.4.2 Conjuntos constructibles I.

Definición 4.61: Sea X un espacio topológico. Denotemos por $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}X$ a la mínima familia de subconjuntos de X que:

C1. Contiene a todos los abiertos de X.

C2. Si $S \in \mathcal{C}$, entonces $X \setminus S \in \mathcal{C}$.

C3. Si $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{C}$, entonces $S_1 \cup \cdots \cup S_n \in \mathcal{C}$.

A los elementos de $\mathcal{C}$ les llamamos ***conjuntos constructibles***.

Proposición 4.62: Sea X un espacio topológico. Entonces un subconjunto de X es constructible syss es la unión finita de conjuntos localmente cerrados (i.e. conjuntos que son intersecciones de cerrados con abiertos).

Corolario 4.62.1: Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos. La preimagen de todo conjunto constructible es constructible.

Proposición 4.63: Sea X un esquema noetheriano y sea $C \subseteq X$ un subconjunto. Entonces:

1. C es cerrado syss C es constructible y es estable bajo especialización, vale decir, si $x \in \overline{\{z\}}$ y $z \in C$, entonces $x \in C$.
2. C es abierto syss C es constructible y es estable bajo generización, vale decir, si $x \in \overline{\{z\}}$ y $x \in C$, entonces $z \in C$.

Demostración:

1. $\Longrightarrow$. Trivial.

   $\Longleftarrow$. Como C es constructible, se puede escribir como $C = \bigcup_{i=1}^n U_i \cap F_i$, donde cada U_i es abierto y cada F_i es cerrado. Reemplazando los F_i's por $F_i \cap U_j^c$ donde $i \neq j$, vemos que podemos elegir los abiertos y los cerrados de modo que la unión sea disjunta. Como X es un espacio topológico noetheriano, entonces posee finitas componentes irreducibles $Z_1, \dots, Z_r$; y cada $F_i = \bigcup_{j=1} F_i \cap Z_j$, así que podemos elegir los cerrados de modo que sean irreducibles y también los abiertos de modo que cada $U_i \cap F_i \neq \varnothing$.

   Finalmente, cada cerrado irreducible F_i posee un punto genérico ξ_i, y como $U_i \cap F_i$ es denso en F_i, entonces $\xi_i \in U_i \cap F_i$. Como C es estable bajo especialización, vemos que necesariamente $\overline{U_i \cap F_i} = \overline{\{\xi_i\}} = F_i$ es cerrado.

2. Basta tomar complementos. □

Lema 4.64.A: Sea A un dominio íntegro y $A \hookrightarrow B$ un monomorfismo de anillos de tipo finito. Entonces existe $s \in A_{\neq 0}$ y un homomorfismo de anillos $A[1/s][t_1, \dots, t_n] \to B[1/s]$ tal que $B[1/s]$ es un módulo finitamente generado.

Demostración: Sea $S := A \setminus \{0\}$, entonces $K := \operatorname{Frac} A = S^{-1}A$ y $S^{-1}B$ es una K-álgebra de tipo finito. Por el teorema de normalización de Noether, existen $\beta_1, \dots, \beta_n \in S^{-1}B$ tales que son K-algebraicamente independientes y que $S^{-1}B$ es una extensión entera de $K[\beta_1, \dots, \beta_n]$. Mirando los denominadores, podemos notar que existe $g \in A$ tal que cada $\beta_i \in B[1/g]$. Elíjase, ahora, un conjunto de m finitos generadores de B como A-álgebra; éstos son raíces de polinomios mónicos en $K[t_1, \dots, t_n]$, luego elegimos otro s tal que los polinomios caigan todos en $A[1/s][t_1, \dots, t_n]$ por lo que $B[1/s]$ es un $A[1/s][t_1, \dots, t_n]$-módulo finitamente generado. □

Teorema 4.64: Sean X, Y esquemas noetherianos y sea $f\colon X \to Y$ un morfismo dominante de tipo finito. Entonces $f[X]$ contiene a un abierto denso de Y.

Ojo que ser dominante significa que $f[X]$ ya es denso, lo interesante aquí es que contenga a un abierto.

Demostración: Sin perdida de generalidad, supongamos que Y es irreducible (podemos restringirnos a una componente irreducible), y supongamos que X, Y son también reducidos. Como la propiedad es local, podemos reducirnos al caso de $X = \operatorname{Spec} B, Y = \operatorname{Spec} A$ afínes. Entonces f viene inducido por un monomorfismo $\varphi\colon A \hookrightarrow B$, donde A es íntegro. El lema anterior, nos da que existe $s \in A_{\neq 0}$ tal que φ_s se factoriza en

$$A[1/s] \longrightarrow A[1/s][t_1, \dots, t_n] \longrightarrow B[1/s].$$

Así pues, φ_s induce un morsismo suprayectivo $\mathbf{D}(\varphi(s)) \to \mathbf{D}(s)$ y así $\mathbf{D}(s) \subseteq f[X]$. □

Lema 4.65: Sea X un esquema noetheriano y $C \subseteq X$ un conjunto constructible. Entonces existe un esquema X' afín y un morfismo $f\colon X' \to X$ de tipo finito tal que $f[X'] = C$.

Demostración: Como todo conjunto constructible es la unión de finitos conjuntos localmente cerrados, sin perdida de generalidad podemos suponer que $C = U \cap F$ con U abierto y F cerrado. Luego, podemos cubrir a U mediante finitos abiertos afines (porque X es noetheriano) y variando F, suponer que U es afín. Así, $U \cap F$ se ve como un subesquema cerrado de U y, así, $U \cap F \to X$ se ve como una composición de un encaje cerrado con un encaje abierto, y como X es noetheriano, esto es un encaje y luego es de tipo finito. □

Proposición 4.66: Sea X un espacio topológico noetheriano. Un subconjunto $C \subseteq X$ es constructible syss para todo cerrado irreducible $F \neq \varnothing$ se cumple que o bien $F \cap C$ contiene un abierto denso de F, o bien $\operatorname{Int}(\overline{C}) \cap F = \varnothing$.

Demostración: $\Longrightarrow$. Claramente $C \cap F$ es constructible en F, así que es la unión de conjuntos localmente cerrados, si alguno de ellos es denso (y por consiguiente si $C \cap F$ es denso), entonces debe ser abierto; y si ninguno es denso, entonces su unión no es densa, y luego debe ser que $\operatorname{Int}(\overline{C}) \cap F = \varnothing$ por ser cerrado irreducible.

$\Longleftarrow$. Sea C un conjunto que cumple susodicha propiedad y sea $\mathcal{F}$ la familia de cerrados F tales que $C \cap F$ es constructible; ésta familia es tal que si contiene a $F \in \mathcal{F}$ y $G \subseteq F$ es cerrado, entonces $G \in \mathcal{F}$, y trivialmente contiene a un cerrado irreducible minimal, así que podemos, sin perdida de generalidad, asumir que X es tal que todo cerrado propio $F \subset X$ está en F y se reduce a probar que $X \in \mathcal{F}$ (nótese que ésta reducción se debe al hecho de que X sea noetheriano). Si X no es irreducible, sean Xi sus componentes irreducibles (que son finitas), entonces cada $C \cap X_i$ es constructible, y luego su unión C también lo es. Si X es irreducible, entonces o bien $\operatorname{Int}(\overline{C}) = \varnothing$, en cuyo caso $C \subseteq \overline{C} \subset X$ y luego $C \cap \overline{C} = C$ es constructible por hipótesis; o bien C contiene un abierto denso U de X y como $C \setminus U = C \cap U^c$ es constructible, entonces $U \cup (C \setminus U) = C$ es constructible. □

Definición 4.67: Sea X un espacio topológico sobrio (i.e. todo cerrado irreducible posee un único punto genérico), por ejemplo el espacio subyacente de cualquier esquema. Decimos que un subconjunto $E \subseteq X$ es ***semiconstructible*** si para todo cerrado irreducible no vacío $F \subseteq X$ son equivalentes:

1. E contiene el punto genérico de F.
2. E contiene un abierto no vacío de F.

Con este lenguaje, la proposición anterior dice que un conjunto E es constructible syss E y $X \setminus E$ son semiconstructibles.

Teorema 4.68 (de Chevalley): Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de tipo finito entre esquemas noetherianos. Entonces la imagen de todo conjunto constructible bajo f es constructible.

DEMOSTRACIÓN: En la demostración del lema 4.65 podemos reemplazar $X = C$ por un conjunto constructible, y por la proposición anterior basta ver que para todo $Z \subseteq Y$ cerrado irreducible con punto genérico ξ_Z tal que $\xi_Z \in f[X]$ se cumple que $f[X] \cap Z$ contiene a un abierto de Z. Esto se concluye finalmente del teorema 4.64. □

Corolario 4.68.1: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de tipo finito entre esquemas noetherianos. Son equivalentes:

1. El morfismo f es abierto.
2. Para todo $x \in X$ se cumple que $f[\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{X,x})] = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{Y,f(x)})$.
3. Para todo $x \in X$ y todo $y' \in Y$ tal que $f(x) =: y \in \overline{\{y'\}}$, existe $x' \in X$ tal que $x \in \overline{\{x'\}}$ y $f(x') = y'$.

DEMOSTRACIÓN: Es claro que $2 \iff 3$.

$3 \implies 1$. Podemos precomponer f con la inclusión desde un abierto $U \subseteq X$ y así notar que $f|_U\colon U \to Y$ es un morfismo de tipo finito sobre esquemas noetherianos, de modo que el teorema de Chevalley nos dice que $f[U]$ es un constructible de Y y es abierto por la proposición 4.65.

$1 \implies 3$. Podemos restringir el morfismo de modo que $X = \operatorname{Spec} B, Y = \operatorname{Spec} A$ sean afínes. El conjunto

$$Z := \{y : x \in \overline{\{y\}}\} = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{X,x}) = \bigcap_{s \notin \mathfrak{p}_x} \mathbf{D}(s).$$

Como $\mathbf{D}(s)$ es abierto, entonces $f[\mathbf{D}(s)]$ también y contiene a $f(x) = y$, luego también contiene a y'. Denotemos $f_s := f|_{\mathbf{D}(s)}$, así la fibra $f_s^{-1}[\{y'\}]$ nunca es vacía para $s \notin \mathfrak{p}_x$.

Si, por contradicción, $y' \notin f[Z]$ y g es la composición $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{X,x}) \to X \to Y$. Así vemos que la fibra $g^{-1}[\{y'\}] \cong \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{X,x} \otimes_A \Bbbk(y')) = \varnothing$ y, por tanto,

$$\mathscr{O}_{X,x} \otimes_A \Bbbk(y') = \varinjlim_{s \notin \mathfrak{p}_x} (B[1/s] \otimes_A \Bbbk(y')) = 0,$$

así que algún $B[1/s] \otimes_A \Bbbk(y) = 0$, pero entonces

$$f_s^{-1}[\{y'\}] \cong X_{y'} \cong \operatorname{Spec}(B[1/s] \otimes_A \Bbbk(y)) = \varnothing,$$

lo cual es absurdo. □

§4.4.3 Criterios valuativos. Los *criterios valuativos* ofrecen una manera sencilla de chequear que un morfismo posea cierta propiedad. Son resultados folclóricos de la teoría, pero no son estrictamente obligatorios para nuestros propósitos, por lo que les incluimos como parte opcional del texto.

Definición 4.69: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de esquemas. Se dice que f ***refleja especializaciones*** si para todo $x \in X$, y toda especialización $f(x) = y \rightsquigarrow y'$ existe $x' \in X$ tal que $x \rightsquigarrow x'$ y $f(x') = y'$.

Si A es un dominio íntegro local, denotamos por ξ su punto genérico y por s su punto cerrado. Sea $K := \operatorname{Frac} A = \Bbbk(\xi)$, recuérdese que $\operatorname{Spec} K$ consta de un único punto.

Toda la restricción a anillos de valuación está contenida en el siguiente lema:

Lema 4.70: Sea Y un esquema y sean $y \rightsquigarrow y'$ puntos de Y. Entonces:

1. Existe un anillo de valuación A y un morfismo $h\colon \operatorname{Spec} A \to Y$ tal que $h(\xi) = y$ y $h(s) = y'$.
2. Dada una extensión de cuerpos $K/\Bbbk(y)$ podemos elegir A de modo que $\operatorname{Frac} A = K$.
3. Más aún, si Y es localmente noetheriano, podemos elegir a A de modo que sea un dominio de valuación discreta.

Demostración: Nótese que $y \in \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{Y,y'})$, de modo que podemos construir los homomorfismos de anillos $\mathscr{O}_{Y,y'} \to \Bbbk(y) \to K$. Así, sea C la clausura íntegra de $\mathscr{O}_{Y,y'}$ en K, entonces C es la intersección de los anillos de valuación de K que contienen a $\mathscr{O}_{Y,y'}$; en particular, existe A de valuación en K que contiene a $\Bbbk(y')$. Éste anillo cumple las propiedades. □

Proposición 4.71: Sea $\varphi\colon A \to B$ un homomorfismo de anillos y sea $f := (\varphi)^a\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ el morfismo inducido. Son equivalentes:

1. El álgebra B/A posee la propiedad de ascenso de ideales.
2. f refleja especializaciones.
3. f es cerrado.

Demostración: La equivalencia 1 $\iff$ 2 es trivial y claramente 3 $\implies$ 2.

2 $\implies$ 3. Veremos primero que $T := \operatorname{Img} f \subseteq \operatorname{Spec} A$ es cerrado. Sea $\mathfrak{p} \in \overline{T}$, es decir, todo entorno de $\mathfrak{p}$ corta a T, es decir,

$$\forall g \in A \quad g \notin \mathfrak{p} \implies \mathbf{D}(g) \cap T \neq \varnothing,$$

y nótese que $\mathbf{D}(g) \cap T = f\big[\mathbf{D}(\varphi(g))\big] = f[\operatorname{Spec}(B[1/\varphi(g)])]$, así que $B[1/\varphi(g)] \neq 0$. Ahora bien, nótese que

$$B_{\mathfrak{p}} := (A \setminus \mathfrak{p})^{-1} B = \varinjlim_{g \in A \setminus \mathfrak{p}} B[1/\varphi(g)] \neq 0,$$

luego tenemos $\operatorname{Spec}(B_{\mathfrak{p}}) \to \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ y así algún $\mathfrak{q} \in f[\operatorname{Spec}(B_{\mathfrak{p}})]$ es algún $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, y, por tanto, $\mathfrak{p} \in T$.

Ahora en general, sea $\mathbf{V}(\mathfrak{b}) \subseteq \operatorname{Spec} B$ un cerrado, luego $\mathbf{V}(\mathfrak{b}) \simeq \operatorname{Spec}(B/\mathfrak{b})$ y claramente $B/\mathfrak{b}$ es una B-álgebra que satisface la propiedad de ascenso, por lo que la imagen de que $\mathbf{V}(\mathfrak{b}) \simeq \operatorname{Spec}(B/\mathfrak{b}) \to \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ es cerrada. Así concluimos que f es cerrada. □

Proposición 4.72: Sea $f: X \to Y$ un morfismo de esquemas. Se cumplen:

1. Si f es universalmente cerrado, entonces todo cambio de base refleja especializaciones.
2. Si f es compacto y refleja especializaciones, entonces es cerrado.
3. Si f es compacto y todo cambio de base refleja especializaciones, entonces es universalmente cerrado.

Demostración:

1. Que $y \rightsquigarrow y'$ equivale a que $y' \in \overline{\{y\}}$ y nótese que $y \in f[\overline{\{x\}}]$ el cual es cerrado, entonces $y' \in f[\overline{\{x\}}]$ como se quería probar. Así vimos que todo morfismo cerrado refleja especializaciones, y *universalmente* cerrado significa que es cerrado salvo cambio de base.
2. Si $Y = \operatorname{Spec} A$, entonces $f^{-1}[Y] = X$ es compacto, luego X es la unión de finitos abiertos afines, y, por la proposición anterior, $f|_U : U \to Y$ es cerrado para cada $U \subseteq X$ afín, luego f es cerrado.

   Si Y no es afín, entonces lo cubrimos por afín y vemos que la imagen de un cerrado en X es cerrada en cada uno de los abiertos afínes. Luego es fácil ver que la imagen en Y debe ser cerrada. □

Teorema 4.73: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo compacto de esquemas. Entonces son equivalentes:

1. f es universalmente cerrado.
2. Para todo anillo de valuación A en K y todo par de morfismos $g\colon \operatorname{Spec} K \to X, h\colon \operatorname{Spec} A \to Y$ tales que $g \circ f = (\iota^a) \circ h$ existe un morfismo $j\colon \operatorname{Spec} A \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\iota^a"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} A \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, "j"] & Y \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Demostración: En la demostración, denotaremos η el (único) punto de $\operatorname{Spec} K$. Claramente $(\iota^a)(\eta) = \xi$ y $\Bbbk(\xi) = \Bbbk(\eta) = K$.

$1 \implies 2$. Haciendo cambio de base de X por X_A, entonces podemos suponer que $Y = \operatorname{Spec} A$. Sea $x := g(\eta)$, entonces $\Bbbk(x) \subseteq K = \Bbbk(\eta)$. Así, como f_A es cerrado, entonces refleja especializaciones y existe $x' \in X$ con $x \rightsquigarrow x'$ tal que $f_A(x') = s$. De éste modo tenemos una cadena de homomorfismos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d] & K \\ \mathscr{O}_{X,x'} \arrow[r] & \Bbbk(x) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

donde el homomorfismo $A \to \mathscr{O}_{X,x'}$ es local y la imagen de $\mathscr{O}_{X,x'}$ domina a A dentro de K, de modo que $\mathscr{O}_{X,x'} = A$. Esto induce un homomorfismo $\mathscr{O}_{X,x'} \to A$ que induce la flecha punteada del diagrama (4.3).

$2 \implies 1$. Nótese que la propiedad 2 aplica para todo cambio de base, pues

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & X_S \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} A \arrow[r] \arrow[ur, dashed] \arrow[urr, dashed] & S \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Así, por la por la proposición 4.72 basta ver que refleja especializaciones. Sea $f(x) =: y \rightsquigarrow y'$ en Y, sea $K := \Bbbk(x) \supseteq \Bbbk(y)$. Luego existe A de valuación en K tal que $h(\xi) = y$ y $h(s) = y'$ con $\Bbbk(s) = \Bbbk(y')$ y así tenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} A \arrow[r, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

y por la condición 2, existe j como en (4.3) que prueba que $x = j(\xi) \rightsquigarrow j(s) =: x'$ con $f(x') = y'$. □

Teorema 4.74: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo cuasiseparado. Son equivalentes:

1. f es separado.

2. Para todo anillo de valuación A en K, y todo par de morfismos $g\colon \operatorname{Spec} A \to Y$, $h\colon \operatorname{Spec} K \to X$ tales que $f \circ h = g \circ (\iota^a)$. Dado el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\iota^a"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} A \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, shift left, "j_1"] \arrow[ur, shift right, "j_2"'] & Y \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

   se concluye que $j_1 = j_2$.

5

Haces cuasicoherentes

En los capítulos anteriores introducimos la noción central de *esquema* y vimos que, en cierto sentido, forman una extensión de la categoría de anillos. Éste capítulo responde a la pregunta de cuál es el análogo de módulos para esquemas.

5.1 $\mathscr{O}_X$-módulos

Definición 5.1: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado. Un ***$\mathscr{O}_X$-módulo*** es un haz de grupos abelianos $\mathscr{F}$ sobre X, tal que cada $\mathscr{F}(U)$ tiene estructura de $\mathscr{O}_X(U)$-módulo y dados $U \subseteq V \subseteq X$ abiertos, se cumple que la restricción $\mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$ es un homomorfismo de $\mathscr{O}_X(U)$-módulos.

Un ***morfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos*** es un morfismo $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ de haces tal que para cada abierto $U \subseteq X$ se cumple que $\varphi_U\colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ es un homomorfismo de $\mathscr{O}_X(U)$-módulos. Por comodidad, denotamos por $\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ al conjunto de morfismos de $\mathscr{O}_X$-módulos. La categoría de haces de $\mathscr{O}_X$-módulos se denota $\mathsf{Mod}_{\mathscr{O}_X}$.

Trivialmente tenemos un funtor semiolvidadizo $U\colon \mathsf{Mod}_{\mathscr{O}_X} \to \mathsf{Sh}(X)$.

Proposición 5.2: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado y $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos. Entonces el núcleo, la imagen y el conúcleo de φ (en $\mathsf{Sh}(X; \mathsf{Ab})$) es un haz de $\mathscr{O}_X$-módulos. En otras palabras, el funtor semiolvidadizo $U\colon \mathsf{Mod}_{\mathscr{O}_X} \to \mathsf{Sh}(X)$ refleja toda clase de límites.

Definición 5.3: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado y sean $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ un par de $\mathscr{O}_X$-módulos. Se define su suma directa $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$ al haz dado por

$$\Gamma(U, \mathscr{F} \oplus \mathscr{G}) := \mathscr{F}(U) \oplus \mathscr{G}(U).$$

Se define su producto tensorial $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}$ al haz dado por

$$\Gamma(U, \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}) := \mathscr{F}(U) \otimes_{\mathscr{O}_X(U)} \mathscr{G}(U).$$

Un $\mathscr{O}_X$-módulo se dice ***libre*** si es la *hazificación* de la suma directa de κ copias de $\mathscr{O}_X$, en cuyo caso se dice que su rango es κ. Un haz de ideales $\mathscr{I}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo que es un subhaz de $\mathscr{O}_X$, es decir, para cada abierto $U \subseteq X$ se tiene que $\mathscr{I}(U)$ es un ideal de $\mathscr{O}_X(U)$.

Un pequeño comentario que hacemos es respecto a la *hazificación* destacada en cursivas: recuérdese que al trabajar con la categoría de $\mathscr{O}_X$-módulos uno debería comenzar desde lo más sencillo con prehaces de grupos abelianos, cuyos límites inversos y directos existen, y se calculan puntualmente, y luego ir notando que como la hazificación tiene adjunta izquierda, que debe preservar límites inversos y que los directos hay que hazificarlos. La suma directa es un límite directo, pero en el caso finito puede verse como un producto directo.

Lema 5.4: Sea $(f, f^\sharp)\colon (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ un morfismo de espacios anillados.

1. Si $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo, entonces $f_*\mathscr{F}$ es un $f_*\mathscr{O}_X$-módulo y como $f^\sharp\colon \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$, entonces $f_*\mathscr{F}$ es un $\mathscr{O}_Y$-módulo. Esto determina un funtor $f_*(-)\colon \mathsf{Mod}_{\mathscr{O}_X} \to \mathsf{Mod}_{\mathscr{O}_Y}$.
2. Si $\mathscr{G}$ es un $\mathscr{O}_Y$-módulo, entonces $f^{-1}\mathscr{G}$ es un $f^{-1}\mathscr{O}_Y$-módulo y como $f^\sharp\colon f^{-1}\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_X$, entonces
$$f^*\mathscr{G} := f^{-1}\mathscr{G} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X$$
es un $\mathscr{O}_X$-módulo. Esto determina un funtor $f^*(-)\colon \mathsf{Mod}_{\mathscr{O}_Y} \to \mathsf{Mod}_{\mathscr{O}_X}$.

Proposición 5.5: Sea $(f, f^\sharp)\colon (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ un morfismo de espacios anillados. Entonces el funtor $f^*(-)$ es la adjunta izquierda de $f_*(-)$.

Definición 5.6: Sea A un anillo y M un A-módulo. Construiremos el ***haz asociado*** a M sobre $\operatorname{Spec} A$, denotado $\widetilde{M}$, definido así:

HM1. $s \in \Gamma(U, \widetilde{M})$ es una función $s\colon U \to \coprod_{x\in U} M_{\mathfrak{p}_x}$, tal que $s(x) \in M_{\mathfrak{p}_x}$.

HM2. Para cada $x \in U$ se cumple que $s(x)$ es localmente una fracción m/f. Vale decir, para cada $x \in U$ existen $m \in M, f \in A$ y un entorno $x \in V \subseteq U$ tales que

$$\forall y \in V \cap \mathbf{D}(f) \quad s(y) = m/f \in M_{\mathfrak{p}_y}.$$

Las restricciones son las naturales entre funciones.

Proposición 5.7: Sea A un anillo, M un A-módulo y sea $X := \operatorname{Spec} A$.

1. $\widetilde{M}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo.
2. Para todo $x \in \operatorname{Spec} A$ se cumple que $\widetilde{M}_x \cong M_{\mathfrak{p}_x}$ (en Mod_A).
3. Para todo $f \in A$ se cumple que $\Gamma(\mathbf{D}(f), \widetilde{M}) \cong M[1/f]$.
4. En particular, $\Gamma(\operatorname{Spec} A, \widetilde{M}) = M$.

Pista: La demostración es análoga a la del teorema 3.55. □

Proposición 5.8: Sea A un anillo y $X := \operatorname{Spec} A$. Entonces:

1. El funtor $\widetilde{()}\colon \mathsf{Mod}_A \to \mathsf{Mod}_{\mathscr{O}_X}$ es exacto y plenamente fiel.
2. Sean $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de A-módulos, entonces
$$\widetilde{\bigoplus_{i\in I} M_i} \cong \bigoplus_{i\in I} \widetilde{M_i}.$$
3. Sean M, N un par de A-módulos, entonces
$$\widetilde{M \otimes_A N} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \widetilde{N}.$$

Sea $\varphi\colon A \to B$ un homomorfismo de anillos y $f := \varphi^a\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ su morfismo inducido. Entonces:

4. Sea N_B un B-módulo, entonces $f_*(\widetilde{N}) \cong \widetilde{N_A}$, donde N_A es N visto como A-módulo.

5. Sea M un A-módulo, entonces $f^*(\widetilde{M}) \cong \widetilde{M \otimes AB}$.

DEMOSTRACIÓN: Claramente $\widetilde{()}$ determina un funtor. La exactitud se sigue del hecho de que la exactitud de sucesiones de módulos se puede verificar localizando y también la exactitud de sucesiones de haces se verifica localmente. Para ver que es plenamente fiel, es decir, que ›N

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\widetilde{M}, \widetilde{N})$$

se prueba construyendo una inversa de funtor, el cual es $\Gamma(X, -)$. □

Definición 5.9: Sea X un espacio anillado. Un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ se dice ***cuasicoherente*** si cada punto de X posee un entorno abierto U para el que existe una sucesión exacta de $\mathscr{O}_X$-módulos:

$$\mathscr{O}_X^{\oplus I}|_U \longrightarrow \mathscr{O}_X^{\oplus J}|_U \longrightarrow \mathscr{F}|_U \longrightarrow 0$$

donde $\mathscr{O}_X^{\oplus I} = \bigoplus_{i \in I} \mathscr{O}_X$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo libre.

Proposición 5.10: Sea $X = \operatorname{Spec} A$ un esquema afín y M un A-módulo. Entonces $\widetilde{M}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo cuasicoherente.

DEMOSTRACIÓN: Basta notar que para todo A-módulo M existe una sucesión exacta de A-módulos:

$$K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

donde K, L son A-módulos libres. Luego basta emplear el inciso 2 de la proposición anterior para ver que $\widetilde{K}, \widetilde{L}$ son $\mathscr{O}_X$-módulos libres y, por el inciso 1, que la sucesión se preserva. □

Corolario 5.10.1: Sea X un esquema. Un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ es cuasicoherente syss cada punto posee un entorno afín $U = \operatorname{Spec} A$ tal que $\mathscr{F}|_U$ es de la forma $\widetilde{M}$ para algún A-módulo M.

DEMOSTRACIÓN: $\Longleftarrow$. Trivial.

$\Longrightarrow$. Si encontramos un abierto V en tal que se tenga la sucesión exacta:

$$\mathscr{O}_X^{\oplus I}|_V \xrightarrow{\varphi_V} \mathscr{O}_X^{\oplus J}|_V \longrightarrow F|_V \longrightarrow 0,$$

entonces si nos restringimos a un abierto afín $V \supseteq U = \operatorname{Spec} A$, entonces mirando en φ_U (es decir, evaluando los haces en U) tenemos una sucesión exacta de A-módulos y así $M := \operatorname{coker} \varphi_U$ sirve. □

Proposición 5.11: Sea X un esquema compacto y cuasiseparado, y sea $\mathscr{F}$ un haz cuasicoherente sobre X. Dada una sección global $f \in \mathscr{O}_X(X)$, el homomorfismo canónico

$$\mathscr{F}(X)[1/f] = \mathscr{F}(X) \otimes_{\mathscr{O}_X(X)} \mathscr{O}_X(X)[1/f] \longrightarrow \mathscr{F}(X_f)$$

es un isomorfismo.

Demostración: Por el corolario anterior, podemos cubrir a X por abiertos afines $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ tales que $\mathscr{F}|_{U_i} \cong \widetilde{\mathscr{F}(U_i)}$ y como X es compacto, podemos escogerlos de modo que los U_i's son finitos. Definiendo $V_i := U_i \cap X_f = \mathbf{D}(f|_{U_i})$, tenemos que $\mathscr{F}(U_i)[1/f] = \mathscr{F}(V_i)$. Ahora, por proposición 3.33 podemos construir la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{F}(X)[1/f] \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \bigoplus_i \mathscr{F}(U_i)[1/f] \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bigoplus_{i,j} \mathscr{F}(U_i \cap U_j)[1/f] \arrow[d, "\beta"] \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F}(X_f) \arrow[r] & \bigoplus_i \mathscr{F}(V_i) \arrow[r] & \bigoplus_{i,j} \mathscr{F}(V_i \cap V_j)
\end{tikzcd}$$

así pues α es un monomorfismo y, empleando el mismo razonamiento para $U_i \cap U_j$, vemos que β es monomorfismo. Finalmente, por el lema de los cuatro, α es isomorfismo. □

Teorema 5.12: Sea $X = \operatorname{Spec} A$ un esquema afín. Entonces para todo A-módulo y todo $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ existe una biyección natural:

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\widetilde{M}, \mathscr{F}) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M, \Gamma(\mathscr{F}, X)) \\ \varphi &\longmapsto \varphi_X. \end{aligned}$$

Teorema 5.13: Sea X un esquema y $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. Entonces $\mathscr{F}$ es cuasicoherente syss para cada abierto afín $U \subseteq X$ se cumple que $\mathscr{F}|_U \simeq \widetilde{\mathscr{F}(U)}$

Demostración: Podemos reducirnos al caso $X = \operatorname{Spec} A$ afín. Sea $M := \Gamma(X, \mathscr{F})$, entonces por el teorema anterior existe un morfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos

$\alpha\colon \widetilde{M} \to \mathscr{F}$. Ahora bien, como $\mathscr{F}$ es cuasicoherente, entonces X puede cubrirse por abiertos principales $\mathbf{D}(g_i)$ tales que $\mathscr{F}|_{\mathbf{D}(g_i)} = \widetilde{M_i}$ para algún $A[1/g_i]$-módulo M_i. Ahora bien, por la proposición 5.11, vemos que $M_i = M[1/g_i]$ y se ve que α restringido a $\mathbf{D}(g_i)$ es un isomorfismo. Como los abiertos principales cubren a X, entonces α ha de ser un isomorfismo. □

Corolario 5.13.1: Sea $X = \operatorname{Spec} A$ un esquema afín. Entonces el funtor $M \mapsto \widetilde{M}$ establece una equivalencia entre la categoría de A-módulos y la de $\mathscr{O}_X$-módulos cuasicoherentes, cuya inversa es $\mathscr{F} \mapsto \Gamma(X, \mathscr{F})$.

Ejemplo. Sea $(A, \mathfrak{m}, k)$ un dominio de valuación discreta con primos $(0) = \xi$ y $\mathfrak{m} = s$ en $X := \operatorname{Spec} A$. Sea $\mathscr{F}$ el $\mathscr{O}_X$-módulo dado por

$$\mathscr{F}(U) := \begin{cases} 0, & U = X \\ k, & U = \{\xi\} \end{cases}$$

con los únicos homomorfismos de restricción admisibles. Entonces $\mathscr{F}$ no es cuasicoherente puesto que $\mathscr{F} \neq \widetilde{0}$.

Otros ejemplos de haces que no son cuasicoherentes son los haces rascacielos en general.

Proposición 5.14: Sea X un esquema afín y sea $0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H} \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de $\mathscr{O}_X$-módulos con $\mathscr{F}$ cuasicoherente. Entonces la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\psi_X} \Gamma(X, \mathscr{H}) \longrightarrow 0$$

es exacta (en Mod_A).

DEMOSTRACIÓN: Basta ver que ψ_X es un epimorfismo. Sea $u \in \mathscr{H}(X)$ una sección global, luego existe un cubrimiento por abiertos U_i tales que $u|_{U_i} = \psi_{U_i}(t_i)$ para algún $t_i \in \Gamma(U_i, \mathscr{G})$. Así pues, definiendo $U_{ij} := U_i \cap U_j$ se tiene que $\psi_{U_{ij}}(t_i|_{U_{ij}} - t_j|_{U_{ij}}) = 0$, luego:

$$f_{ij} := t_i|_{U_{ij}} - t_j|_{Uij} \in \mathscr{F}(U_{ij}),$$

Revisar demostración [8, pág. 113].

donde vemos a $\mathscr{F}$ como un subhaz de $\mathscr{G}$. ... □

Definición 5.15: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado y sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. Se dice que $\mathscr{F}$ es ***finitamente generado*** si todo punto $x \in X$ posee un entorno U tal que existe un epimorfismo $\mathscr{O}_X^n|_U \stackrel{\alpha}{\twoheadrightarrow} \mathscr{F}|_U$. Se dice que $\mathscr{F}$ es ***finitamente presentado*** si, en la situación anterior, $\ker \alpha$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo finitamente generado.

Se dice que $\mathscr{F}$ es un ***haz coherente*** si es un $\mathscr{O}_X$-módulo cuasicoherente finitamente presentado.

Ejemplo.

- $\mathscr{O}_X$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo coherente.
- Si M es un A-módulo finitamente presentado, entonces $\widetilde{M}$ es un haz coherente sobre $X = \operatorname{Spec} A$.

Proposición 5.16: Sea X un esquema y $\mathscr{F}$ un haz cuasicoherente. Entonces cada una implica la siguiente:

1. $\mathscr{F}$ es coherente.
2. $\mathscr{F}$ es finitamente generado.
3. Para cada abierto afín $U \subseteq X$, se cumple que $\mathscr{F}(U)$ es un $\mathscr{O}_X(U)$-módulo finitamente generado.

Además, si X es localmente noetheriano, entonces las anteriores son equivalentes.

Demostración: Claramente $1 \implies 2$.

Veamos $2 \implies 3$. Sea U un abierto afín, entonces por definición de finitamente generado, U se cubre por finitos abiertos afines U_i, de modo $\mathscr{O}_X^n|_{U_i} \twoheadrightarrow \mathscr{F}|_{U_i}$. Luego, empleando que $\widetilde{()}$ es un funtor exacto, entonces $\mathscr{O}_X(U_i)^n \twoheadrightarrow \mathscr{F}(U_i)$ y, en particular, $\mathscr{F}(U_i)$ es un $\mathscr{O}_X(U_i)$-módulo finitamente generado. Como $\mathscr{F}(U_i) = \mathscr{F}(U) \otimes_{\mathscr{O}_X(U)} \mathscr{O}_X(U_i)$, entonces existe un $\mathscr{O}_X(U)$-submódulo M finitamente generado tal que $M \otimes_{\mathscr{O}_X(U)} \mathscr{O}_X(U_i) = \mathscr{F}(U_i)$. Agrandando M suficiente (dado que los U_i's son finitos), entonces esta igualdad aplica para todo i. Luego la sucesión $\widetilde{M} \to F|_U \to 0$ es exacta en cada U_i, así que lo es en general.

Supongamos que X es localmente noetheriano, entonces veremos $3 \implies 1$. Sea U un abierto y sea $\alpha\colon \mathscr{O}_X^n|_U \twoheadrightarrow \mathscr{F}|_U$ un morfismo, probaremos que $\ker \alpha$ es finitamente generado. Ahora bien, ser finitamente generado es una propiedad local, así que podemos pasar a un abierto afín, de modo que $\mathscr{F}|_V =$

$\widetilde{N}$, por que $\mathscr{F}$ es cuasicoherente, y N es un $\mathscr{O}_X(V)$-módulo finitamente generado por hipótesis. Luego, como $\widetilde{()}$ es un funtor exacto, tenemos que

$$\ker \alpha = \widetilde{\ker(\alpha_V)},$$

y $\ker \alpha_V$ es un $\mathscr{O}_X(V)$-módulo finitamente generado, pues $\mathscr{O}_X(V)$ es noetheriano. □

Corolario 5.16.1: Sea $X = \operatorname{Spec} A$ un esquema afín, donde A es un anillo noetheriano. Entonces $M \mapsto \widetilde{M}$ establece una equivalencia entre la categoría de A-módulos finitamente generados y los $\mathscr{O}_X$-módulos coherentes.

Proposición 5.17: Sea X un esquema, entonces:

1. La suma directa de haces cuasicoherentes (finitamente generados) es también un haz cuasicoherente (finitamente generado).
2. Si $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ son haces cuasicoherentes (finitamente generados), entonces también lo es $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}$.
3. Si $\varphi \colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un morfismo de haces cuasicoherentes, entonces $\ker \varphi, \operatorname{Img} \varphi$ y $\operatorname{coker} \varphi$ son cuasicoherentes.
4. Sea $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$ una sucesión exacta de $\mathscr{O}_X$-módulos. Si dos de ellos son cuasicoherentes, entonces el tercero también lo es.
5. Sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo cuasicoherente y sean $\{\mathscr{G}_i \subseteq \mathscr{F}\}_{i \in I}$ una familia de submódulos cuasicoherentes. Entonces $\sum_{i \in I} \mathscr{G}_i$ es cuasicoherente. Si I es finito, entonces su intersección $\bigcap_{i \in I} \mathscr{G}_i$ también es cuasicoherente.
6. Si X es localmente noetheriano, entonces la 3 y 4 aplican para haces coherentes.

Proposición 5.18: Sea $f \colon X \to Y$ un morfismo de esquemas. Entonces:

1. Dado un $\mathscr{O}_Y$-módulo $\mathscr{G}$, entonces para todo $x \in X$ se cumple
$$(f^*\mathscr{G})_x \cong \mathscr{G}_{f(x)} \otimes_{\mathscr{O}_{Y,f(x)}} \mathscr{O}_{X,x}.$$
2. Si f es un morfismo afín y $\mathscr{G}$ es cuasicoherente (finitamente generado), y que $U \subseteq X$ es un abierto afín tal que $f[U]$ está contenido en otro abierto afín $V \subseteq Y$. Entonces:
$$f^*\mathscr{G}|_U \cong \mathscr{G}(V) \otimes_{\mathscr{O}_Y(V)} \mathscr{O}_X(U).$$
En particular, $f^*\mathscr{G}$ es cuasicoherente (finitamente generado).

3. Sea $\mathscr{F}$ un haz cuasicoherente (finitamente generado) sobre X. Si X es noetheriano o f es un morfismo separado y compacto, entonces $f_*\mathscr{F}$ es un haz cuasicoherente (finitamente generado) sobre Y.

Demostración:

1. Ejercicio para el lector.

2. Sea $g := f|_U\colon U \to V$, entonces se tiene que $(f^*\mathscr{G})|_U = g^*(\mathscr{F}|_V)$. Por ello, supondremos que $X = U = \operatorname{Spec} B$ y $Y = V = \operatorname{Spec} A$. Si $\mathscr{G} = \mathscr{O}_Y^{\oplus I}$, entonces $f^*\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_X$ y como $f^*(-)$ preserva sumas directas[1] vemos que la proposición aplica en éste caso.

   Para el caso general, se tiene una sucesión exacta (en Mod_A):
$$K \xrightarrow{\alpha} L \longrightarrow \mathscr{G}(Y) \longrightarrow 0,$$
   donde K, L son libres, lo cual induce las sucesiones exactas:
$$\widetilde{K} \longrightarrow \widetilde{L} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow 0, \qquad \text{y} \qquad f^*\widetilde{K} \xrightarrow{\beta} f^*\widetilde{L} \longrightarrow f^*\mathscr{G} \longrightarrow 0,$$
   donde β está asociado a $\alpha \otimes_B B =: \alpha_B\colon K \otimes_A B \to L \otimes_A B$. Luego se tiene
$$f^*\mathscr{G} = \operatorname{coker}\beta = \widetilde{\operatorname{coker}(\alpha_B)} = \widetilde{\operatorname{coker}\alpha \otimes_A B} = \widetilde{\mathscr{G}(Y) \otimes_A B},$$
   que es lo que queríamos probar.

3. Podemos restringirnos de modo que Y sea afín y notamos que X (que también está restringido) es, en cualquier caso, compacto. Sea $g \in \mathscr{O}_Y(Y)$ y sea $g' := f_Y^\sharp(g) \in \mathscr{O}_X(X)$, y se tiene que
$$\begin{aligned} f_*\mathscr{F}(\mathbf{D}(g)) &= \mathscr{F}(f^{-1}[\mathbf{D}(g)]) = \mathscr{F}[\mathbf{D}(g')] \\ &\cong \mathscr{F}(X)[1/g'] = \mathscr{F}(X) \otimes_{\mathscr{O}_Y(Y)} \mathscr{O}_Y(\mathbf{D}(g)), \end{aligned}$$
   donde empleamos la proposición 6.12. Como podemos cubrir a Y por finitos abiertos principales se verifica que $f_*\mathscr{F} \cong \widetilde{\mathscr{F}(X)}$. □

[1] Basta notar que $f^*(-)$ tiene adjunta derecha para ver que $f^*(-)$ respeta límites directos (cfr. **[40]**, prop. 2.49). Si no, demuéstrelo como ejercicio.

§5.1.1 Subesquemas cerrados, morfismos afines y finitos.

Definición 5.19: Sea X un esquema e $\iota\colon Z \hookrightarrow X$ un subesquema cerrado. Definimos el haz de ideales de Z sobre X como $\mathscr{I}_Z := \ker \iota^\sharp$, donde $\iota^\sharp\colon \mathscr{O}_X \to \iota_*\mathscr{O}_Z$.

Proposición 5.20: Sea X un esquema e $\iota\colon Z \hookrightarrow X$ un subesquema cerrado. Entonces $\mathscr{I}_Z$ es un haz cuasicoherente de ideales sobre X y, de hecho, la aplicación

$$\{Z : Z \text{ subesquema cerrado de } X\} \longrightarrow \{\mathscr{I} : \mathscr{I} \text{ haz cuasicoherente de ideales}\}$$

es una biyección.

Demostración: Por la proposición 3.58, sabemos que hay una biyección entre subespacios anillados cerrados Z de $(X, \mathscr{O}_X)$ y haces de ideales de $\mathscr{O}_X$. Por otro lado, si Z es un subesquema cerrado de X, entonces $\ker(\iota^\sharp)$ es cuasicoherente; falta ver el recíproco.

Supongamos que $\mathscr{I} := \ker(\iota^\sharp)$ es cuasicoherente, luego se corresponde con el encaje cerrado $j\colon \mathbf{V}(\mathscr{I}) \to X$ de espacios anillados y hay que ver que $(\mathbf{V}(\mathscr{I}), j^{-1}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}))$ es un esquema. Supongamos que $X = \operatorname{Spec} A$ es afín (puesto que ser cuasicoherente es una propiedad local), entonces $\mathscr{I} = \widetilde{I}$ para algún $I \trianglelefteq A$, entonces $\widetilde{I} = \mathscr{O}_{\operatorname{Spec}(A/I)}$, por lo que $\mathbf{V}(\mathscr{I}) \cong \operatorname{Spec}(A/I)$, el cual sí es un esquema. $\square$

Corolario 5.20.1: Sea $X = \operatorname{Spec} A$ un esquema afín, entonces hay una biyección entre subesquemas cerrados Z de A, y los subesquemas de la forma $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$, donde $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$.

Definición 5.21: Un morfismo de esquemas $f\colon X \to S$ se dice ***afín*** si todo $y \in S$ posee un entorno $y \in U$ afín, tal que $f^{-1}[U]$ es afín. Se dice que un S-esquema X se dice ***afín*** sobre S si el morfismo estructural es afín.

Evidentemente, la noción de ser S-esquema afín es relativa puesto que un esquema no afín siempre es afín sobre sí mismo.

Lema 5.22.A: Todo morfismo afín es compacto y cuasiseparado.

Proposición 5.22: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de esquemas. Entonces f es afín syss para todo abierto afín $V \subseteq Y$ se cumple que $f^{-1}[V] \subseteq X$ es afín.

Demostración: Queremos ver que la propiedad de «ser un abierto afín $V \subseteq Y$ con preimagen $f^{-1}[V]$ afín» es local para afines. Ver que LAf1 se cumple es trivial, puesto que si $f := \varphi^a \colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ es un morfismo de esquemas, entonces $f^{-1}[\mathbf{D}_A(g)] = \mathbf{D}_B(\varphi(g))$.

Veamos LAf2: Sustituyendo Y con V, podemos suponer que $Y = \operatorname{Spec} A$ es afín, y nos reducimos a probar que X es afín. Sea $A = (g_1, \dots, g_n)$ tales que $f^{-1}[\mathbf{D}(g_i)] = \operatorname{Spec} B_i \subseteq X$ y, nótese que $\operatorname{Spec}(B_i) = X_{f^\sharp(g_i)}$. Y sea $B := \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$, entonces el (iso)morfismo $B \to \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ induce un morfismo $\alpha \colon X \to \operatorname{Spec} B$ y tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X = \bigcup_{i=1}^n X_{f^\sharp(g_i)} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & \operatorname{Spec} B \arrow[dl, "(f_Y^\sharp)^a =: \beta"] \\ \operatorname{Spec} A & \end{tikzcd}$$

Sea $\varphi := f_Y^\sharp \colon A \to B$. Ahora bien, $\beta^{-1}[\mathbf{D}_A(g_i)] = \mathbf{D}_B(\varphi(g_i))$, luego $B_i \cong B[1/\varphi(g_i)]$. Así pues, α es un isomorfismo entre los $\operatorname{Spec}(B_i)$'s, luego pegando los morfismos, vemos que α es un isomorfismo. □

Proposición 5.23: Sea S un esquema separado. Para todo morfismo de esquemas $f \colon X \to S$ y todo par de abiertos $U \subseteq X, V \subseteq S$ afines, se cumple que $U \cap f^{-1}[V]$ es afín. En consecuencia, si X es afín, entonces el morfismo $f \colon X \to S$ es afín.

Demostración: Sean $\pi_1 \colon X \times_{\mathbb{Z}} S \to X, \pi_2 \colon X \times_{\mathbb{Z}} S \to S$ las proyecciones canónicas, y sea $G_f := \mathrm{Id}_X \times_{\mathbb{Z}} f \colon X = X \times_S S \to X \times_{\mathbb{Z}} S$ el gráfico de f. Por la proposición 4.40, inciso 6, sabemos que G_f es un encaje cerrado. Es fácil comprobar que $U \cap f^{-1}[V]$ es la imagen bajo π_1 de $\pi_1^{-1}[U] \cap \pi_2^{-1}[V] \cap G_f[X]$, el cual es cerrado en $U \times V = \pi_1^{-1}[U] \cap \pi_2^{-1}[V]$ puesto que $G_f[X]$ es cerrado en $X \times S$. Finalmente, como $U \times V$ es afín y $U \cap f^{-1}[V]$ es cerrado en un afín, entonces $U \cap f^{-1}[V]$ es afín. □

Corolario 5.23.1: Todo morfismo afín es separado.

Demostración: Sea $f \colon X \to S$ dicho morfismo. Si S es afín, entonces $f \colon X \to S$ es separado syss X es un esquema separado por la proposición 4.40. □

Proposición 5.24: Se cumplen:

1. Los encajes cerrados son afines.
2. La composición de morfismos afines es afín.
3. Los morfismos afines son estables salvo cambio de base.
4. El producto fibrado de morfismos afines es afín.
5. Si $f: X \to Y, g: Y \to Z$ son morfismos de esquemas tales que $f \circ g$ es afín y g es separado, entonces f es afín.

Por el último inciso vemos que si X, Y son un par de esquemas afines sobre S, entonces todo S-morfismo $X \to Y$ es afín. Denotamos por Aff/S la subcategoría plena de Sch/S cuyos objetos son los esquemas afines sobre S.

Una última ventaja de los morfismos afines es la siguiente:

Proposición 5.25: Sea $f: X \to Y$ un morfismo afín entre esquemas. Entonces $\mathscr{F} \mapsto f_*\mathscr{F}$ determina una equivalencia entre $\mathscr{O}_X$-módulos cuasicoherentes y $f_*\mathscr{O}_X$-módulos cuasicoherentes.

PISTA: Basta notar que esto es cierto en el caso de que Y sea afín y que es suficiente. □

Definición 5.26: Se dice que un morfismo de esquemas $f: X \to S$ es ***entero*** si cada $y \in S$ posee un entorno afín $U = \operatorname{Spec} A$, tal que $f^{-1}[U] = \operatorname{Spec} B$ es afín, y tal que el homomorfismo inducido de anillos $A \to B$ es entero. Un morfismo de esquemas se dice ***finito*** si es entero y de tipo finito. Se dice que un S-esquema es *entero* (resp. *finito*) si el morfismo estructural lo es.

En la geometría algebraica clásica los morfismos finitos son de gran importancia; no obstante, sobre todo en fines aritméticos los morfismos enteros ocupan un lugar importante. El ejemplo típico es que el morfismo $\operatorname{Spec}(k^{\text{alg}}) \to \operatorname{Spec} k$ siempre es entero, pero casi nunca es de tipo finito siquiera.

Proposición 5.27: Un morfismo $f: X \to S$ es entero syss para cada abierto afín $U \subseteq S$ tal que $f^{-1}[U]$ es afín se tiene que el homomorfismo inducido de anillos $\Gamma(U, \mathscr{O}_S) \to \Gamma(f^{-1}[U], \mathscr{O}_X)$ es entero.

Demostración: Podemos reducirnos al caso en que $X = \operatorname{Spec} B$ y $S = \operatorname{Spec} A$ y probar que si $f = \varphi^a$, entonces $\varphi\colon A \to B$ es entero. Sea $x \in \operatorname{Spec} A$, entonces existen $g_i \in A$ tales que $x \in \mathbf{D}(g_i)$ y $f^{-1}[\mathbf{D}(g_i)] = \mathbf{D}\left(\varphi(g_i)\right)$. Nótese que $\mathbf{D}(g_i) \cong \operatorname{Spec}(A[1/gi])$ y $\mathbf{D}\left(\varphi(g_i)\right) = \operatorname{Spec}(B[1/\varphi(g_i)])$ así que $A[1/g_i]$ es una $B[1/\varphi(g_i)]$-álgebra entera. Como S es afín, es compacto, así que podemos elegir los g_i's finitos. Definamos M como la clausura entera de B/A, queremos ver que $B = M$.

Sea $b \in B$, entonces para cada i podemos expresar $b = m_i/\varphi(g_i)^n$ para algún $m_i \in M$ y algún $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Como $\bigcup_{i=1}^r \mathbf{D}(g_i) = A$, entonces $A = (g_1, \dots, g_r)$, y más generalmente $A = (g_1^n, \dots, g_r^n)$, así que $1 = a_1 g_1^n + \cdots + a_r g_r^n$ para algunos $a_i \in A$. Como $m_i \in M$, entonces

$$b = \left(\sum_{i=1}^r a_i \varphi_i(g_i)^r \right) b = \sum_{i=1}^r a_i m_i \in M. \qquad \square$$

Corolario 5.27.1: Un morfismo $f\colon X \to S$ es finito syss para cada abierto afín $U = \operatorname{Spec} A \subseteq S$ tal que $f^{-1}[U] = \operatorname{Spec} B$ es afín se tiene que B es un A-módulo finitamente generado.

Proposición 5.28: Se cumplen:

1. Los encajes cerrados son finitos (por ende, enteros).
2. La composición de morfismos finitos (resp. enteros) es finito (resp. entero).
3. Los morfismos finitos (resp. enteros) son estables salvo cambio de base.
4. El producto fibrado de morfismos finitos (resp. enteros) es finito (resp. entero).
5. Si $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ son morfismos de esquemas tales que $f \circ g$ es finito (resp. entero) y g es separado, entonces f es finito (resp. entero).

Corolario 5.28.1: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo entero (resp. finito) de esquemas, para todo $U \subseteq Y$ abierto no vacío, $f^{-1}[U]$ es un esquema entero (resp. finito) sobre U.

Corolario 5.28.2: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo finito. Para todo $y \in Y$, la fibra X_y es un $\Bbbk(y)$-esquema algebraico afín y de cardinalidad finita.

DEMOSTRACIÓN: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo finito. La fibra X_y es un $\Bbbk(y)$-esquema finito, y como todo morfismo finito es afín, entonces X_y es un $\Bbbk(y)$-conjunto algebraico afín. Así $X_y = \operatorname{Spec} A$ donde A es un $\Bbbk(y)$-módulo finitamente generado, en particular, $A/\Bbbk(y)$ es entero, por lo que A es artiniano y concluimos por la proposición 4.19. □

Ejemplo. Sea k un cuerpo.

1. El encaje abierto $\mathbb{A}^2_k \setminus \{(0,0)\} \hookrightarrow \mathbb{A}^2_k$ es tal que sus fibras tienen cardinalidad finita, pero no es afín ya que $\mathbb{A}^2_k \setminus \{(0,0)\}$ no es afín (ej. 3.82) y, por lo tanto, no es finito.

2. El encaje abierto $\mathbb{A}^1_k \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{A}^1_k$ también tiene fibras finitas, es un morfismo afín y entero, pero no es finito (¿por qué?).

Corolario 5.28.3: Sean X, Y un par de esquemas íntegros y $f\colon X \to Y$ un morfismo dominante. Si f es entero (resp. finito), entonces $K(X)$ es una extensión algebraica (resp. finita) de cuerpos de $K(Y)$.

Teorema 5.29: Se cumplen:

1. Todo morfismo entero es universalmente cerrado.

2. Todo morfismo finito es propio.

DEMOSTRACIÓN:

1. Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo entero. Como los morfismos enteros son estables salvo cambio de base, basta probar que f es cerrado. Podemos reducirlo a probar que $f[X]$ es cerrado en Y, y como es una propiedad local, podemos suponer que X, Y son reducidos. Sea $T := \overline{f[X]}$, de modo que f se factoriza como $X \xrightarrow{g} T \overset{j}{\hookrightarrow} Y$ y, como j es separado, entonces suponemos que g es entero. Así, reemplazando Y por T podemos suponer que $f[X]$ es denso en Y, es decir, f es dominante. Como la propiedad es local, podemos restringir Y para que sea un esquema afín $Y = \operatorname{Spec} A$, así como $X = \operatorname{Spec} B$ y tenemos que B es una A-álgebra entera y que A es reducido. Así, que f sea dominante equivale a que el morfismo $A \to B$ sea un monomorfismo, por el corolario 3.20, y que $f[X] = Y$ significa que todo primo de A viene de un primo de B, lo cual corresponde al teorema A.37.

2. Ejercicio para el lector. □

Corolario 5.29.1: Un morfismo entre esquemas afines es propio syss es finito.

Demostración: Basta aplicar la proposición 4.47. □

Definición 5.30: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado. Dado un par $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ de $\mathscr{O}_X$-módulos, entonces podemos definir el ***haz Hom***:

$$\Gamma(U, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) := \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X|_U}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U).$$

Queda como ejercicio para el lector el verificar que efectivamente se trata de un haz.

Proposición 5.31: Se cumplen:

1. Sea $X = \operatorname{Spec} A$ un esquema afín y M un A-módulo finitamente presentado. Entonces:
$$\mathscr{H}om(\widetilde{M}, \widetilde{N}) \simeq \widetilde{\operatorname{Hom}_A(M, N)}$$
2. En consecuencia, si X es un esquema y $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ son un par de $\mathscr{O}_X$-módulos cuasicoherentes con $\mathscr{F}$ finitamente presentado, entonces $\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ es cuasicoherente.

Proposición 5.32: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado y $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo finitamente generado.

1. Si en un entorno $U \subseteq X$ de un punto $x \in X$ existen secciones $s_i \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ cuyos gérmenes locales $(s_i)|_x$ generan la fibra $\mathscr{F}_x$. Entonces los $s_i|_V$'s generan $\Gamma(V, \mathscr{F})$ para algún subentorno $x \in V \subseteq U$.
2. Para todo entero $r \geq 0$ el conjunto
$$\begin{aligned} X_r :&= \{x \in X : \mathscr{F}_x \text{ está generado por } r \text{ gérmenes locales}\} \\ &= \{x \in X : \dim_{\Bbbk(x)}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \Bbbk(x)) \leq r\} \end{aligned}$$
es un abierto de X.
3. $\operatorname{Supp}(\mathscr{F})$ es cerrado en X.

Pista: La primera es un ejercicio para el lector. De ahí, los mismos generadores en un punto sirven en un entorno, lo que prueba que X_r es un entorno de todos sus puntos. El último se deduce de que $\operatorname{Supp}(\mathscr{F}) \neq X_0$. □

Definición 5.33: Sea X un esquema y $\mathscr{F}$ un haz cuasicoherente finitamente generado. Como $\mathscr{H}om(\mathscr{F},\mathscr{F})$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo, hay un morfismo de haces canónico $\mathscr{O}_X \xrightarrow{\varphi} \mathscr{H}om(\mathscr{F},\mathscr{F})$ y denotamos por $\operatorname{Ann}\mathscr{F} := \ker\varphi$.

Proposición 5.34: Sea X un esquema y $\mathscr{F}$ un haz cuasicoherente finitamente generado. Entonces:

1. $\operatorname{Ann}\mathscr{F}$ es un haz cuasicoherente de ideales y para todo abierto afín $U \subseteq X$ tenemos que

$$\Gamma(U, \operatorname{Ann}\mathscr{F}) = \operatorname{Ann}\Gamma(U,\mathscr{F}).$$

   Además el espacio topológico de $\mathbf{V}(\operatorname{Ann}\mathscr{F})$ es $\operatorname{Supp}\mathscr{F}$.

2. Sea $\mathscr{I} \subseteq \operatorname{Ann}\mathscr{F}$ un subhaz de ideales cuasicoherente y sea $\mathbf{V}(\mathscr{I}) \xhookrightarrow{\iota} X$ el encaje cerrado. Entonces hay un isomorfismo canónico $\mathscr{F} \to \iota_*(\iota^*\mathscr{F})$.

DEMOSTRACIÓN:

1. Restringiéndonos a un abierto afín podemos suponer que $X = \operatorname{Spec} A$ es afín y $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, donde M es un A-módulo generado por finitos elementos $u_1, \dots, u_n \in M$. Así pues, en este caso, $\operatorname{Ann} M = \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ann}(u_i)$ y es fácil ver que $\operatorname{Ann}\mathscr{F} = \widetilde{\operatorname{Ann} M}$.

   Para ver que $\mathbf{V}(\operatorname{Ann}\mathscr{F}) = \operatorname{Supp}\mathscr{F}$ basta notar que para $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M &\iff M_\mathfrak{p} \neq 0 \iff \exists u_i : \operatorname{Ann}(u_i) \subseteq \mathfrak{p} \\ &\iff \mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ann}(u_i) = \operatorname{Ann}(M) \iff \mathfrak{p} \in \mathbf{V}(\operatorname{Ann} M). \end{aligned}$$

2. Por definición, $\mathscr{I}\mathscr{F} = 0$ por lo que $\mathscr{F} = \mathscr{F}/\mathscr{I}\mathscr{F}$ es un $\mathscr{O}_X/\mathscr{I}$-módulo de forma canónica, vale decir, que el morfismo del enunciado es un isomorfismo. □

§5.1.2 Digresión: esquemas de Jacobson. Una de las revoluciones del lenguaje esquemático es que los esquemas están llenos de «puntos genéricos», mientras que el lenguaje de Weil-Zariski se enfocaba únicamente en los puntos cerrados de las variedades. Apropiadamente, el lema de Zariski nos dirá que esto es admisible en ciertos casos.

Definición 5.35: Un espacio topológico X se dice ***de Jacobson*** si para todo cerrado $Z \subseteq X$, los puntos cerrados (en X) de Z forman un subconjunto denso. Un esquema se dice ***de Jacobson*** si su espacio topológico subyacente es de Jacobson.

Corolario 5.35.1: Un anillo es de Jacobson syss su espectro es de Jacobson.

Así pues, el espectro de un cuerpo $\operatorname{Spec} k$, o $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ son esquemas de Jacobson.

Ejemplo 5.36: Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano. Entonces $S := \operatorname{Spec} A \setminus \{\mathfrak{m}\}$ es un esquema de Jacobson.

En primer lugar, S es un subesquema abierto de A y, por tanto, es fácil ver que se trata de un esquema noetheriano. Si S no fuese Jacobson, esto significaría que existe un cerrado $Z \subseteq S$ y un abierto $U \subseteq X$ tales que $Z \cap U$ es no vacío y no incluye puntos cerrados en S. Como S es compacto, los abiertos compactos forman una base, así que podemos suponer que U es compacto y, luego $Z \cap U$ también lo es; por lo que la proposición 3.88 dice que posee un punto relativamente cerrado $x \in Z \cap U$. Es decir, $\{x\}$ es un conjunto localmente cerrado de S. Esto corresponde a un primo $\mathfrak{p} \lhd A$ tal que existe otro primo $\mathfrak{q} \lhd A$ tales que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$. Además, $\mathfrak{p}$ es abierto en $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{p})$; pero esto es absurdo pues los abiertos de $\operatorname{Spec} A$ (con A noetheriano de $k.\dim A \geq 2$) poseen infinitos puntos. ⌟

Demostrar esto; vid. **[Stacks], `Tag 02IG`**.

Lema 5.37.A: Un espacio topológico X es de Jacobson syss posee un cubrimiento por subespacios abiertos de Jacobson.

Lema 5.37.B: Para un esquema X son equivalentes:

1. X es de Jacobson.
2. X posee un cubrimiento por abiertos afines $\bigcup_{i \in I} U_i = X$, donde cada U_i es de Jacobson.
3. Para todo abierto afín $U \subseteq X$, el anillo $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ es de Jacobson.
4. Existe un cubrimiento $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, donde cada $X_i \subseteq X$ es un subesquema abierto de Jacobson.

Además si X es de Jacobson, cada abierto suyo también.

Demostración: Ejercicio para el lector, cfr. **[Stacks], `Tag 01P4`**. □

Teorema 5.37 (lema de Zariski): Sea S un esquema de Jacobson (e.g. el espectro de un cuerpo). Si X es un S-esquema localmente de tipo finito, entonces X también es de Jacobson.

DEMOSTRACIÓN: Para un punto $x \in X$ sea $x \in U \subseteq X$ un entorno afín, y sea $V \subseteq S$ un abierto afín, tales que $f[U] \subseteq V$. Aplicando el lema de Zariski usual a $f|_U : U \to V$, vemos que U es de Jacobson y concluimos por el lema anterior. □

§5.1.3 Morfismos cuasifinitos. A diferencia de los morfismos finitos, la definición *adecuada* de «cuasifinito» es delicada. Para ello, seguimos a **[Stacks],** Section 01TC.

Definición 5.38: Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas. Se dice que un morfismo f es ***cuasifinito*** si es de tipo finito y cada punto $x \in X$ está aislado en su fibra $X_{f(x)} = f^{-1}[\{f(x)\}]$.

Se dice que f es *cuasifinito* en un punto $x \in X$, si posee un entorno afín $x \in U \subseteq X$ y existe un abierto afín $V \subseteq Y$ tales que $f[U] \subseteq V$ y tales que x está aislado en la fibra de la restricción $U_{f(x)} = U \cap f^{-1}[\{x\}]$. Se dice que f es ***localmente cuasifinito*** si es cuasifinito en cada punto.

Ejemplo. Sea k un cuerpo, entonces $\mathbb{A}^1_k \to \operatorname{Spec} k$ es un morfismo entero no finito; éste morfismo tampoco es cuasifinito.

Ejemplo. Sea A un anillo y sea $f \in A$ un elemento que no es ni divisor de cero, ni inversible. Entonces el encaje abierto $\mathbf{D}(f) \to \operatorname{Spec} A$ es un morfismo cuasifinito (pues es de tipo finito, ya que $A[1/f]$ está generado por $1/f$ como A-álgebra y las fibras o son vacías o constan de un punto) que no es finito (¿por qué?).

Éste ejemplo es el prototipo de un morfismo cuasifinito no finito e ilustra el por qué ser cuasifinito es «casi ser finito». La relación entre los dos conceptos se explora más a fondo en el teorema principal de Zariski.

Los siguientes dos lemas pueden considerarse corolarios del teorema de ceros de Hilbert o del lema de Zariski.

Lema 5.39.A: Sea $f : X \to Y$ un morfismo entre esquemas, sea $x \in X$ y $y := f(x)$. Si la extensión $\Bbbk(x)/\Bbbk(y)$ es algebraica, entonces x es un punto cerrado en su fibra X_y. Si además $y \in Y$ es un punto cerrado, entonces x es cerrado en todo X.

Demostración: Como solo nos interesa la fibra, podemos suponer que $Y = \operatorname{Spec}(\Bbbk(y))$ es el espectro de un cuerpo; como «ser cerrado» se puede verificar en una base, elijamos $U = \operatorname{Spec} A$ un entorno afín de x. Ahora x corresponde a un primo $\mathfrak{p} \triangleleft A$ y el morfismo induce las siguientes contenciones canónicas:

$$\Bbbk(y) \subseteq A/\mathfrak{p} \subseteq \operatorname{Frac}(A/\mathfrak{p}) = \Bbbk(x),$$

pero como $\Bbbk(x)/\Bbbk(y)$ es una extensión algebraica, entonces el anillo intermedio $A/\mathfrak{p}$ debe ser un cuerpo, es decir, $\mathfrak{p}$ es maximal. El «además» es trivial de que preimagen de cerrados es cerrada. □

Lema 5.39.B: Sea $f\colon X \to Y$ localmente de tipo finito, sea $x \in X$ un punto e $y := f(x)$ su imagen. Entonces x es un punto cerrado en su fibra X_y syss $\Bbbk(x)/\Bbbk(y)$ es una extensión finita.

Demostración: $\Longleftarrow$. Se sigue del lema anterior.

$\Longrightarrow$. Sean $U = \operatorname{Spec} B \subseteq X$ y $V = \operatorname{Spec} A \subseteq Y$ abiertos afines tales que $x \in U$ y $f[U] \subseteq V$. Entonces la restricción $f|_U\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ es de tipo finito, e induce un homomorfismo de anillos $\varphi\colon A \to B$. Sean $\mathfrak{p} \triangleleft A$ y $\mathfrak{q} \triangleleft B$ los primos correspondientes a x e y resp. Denotando por $\overline{B} := B \otimes_A \Bbbk(\mathfrak{p}) = B/\mathfrak{p}B$ a la fibra, y por $\overline{\mathfrak{q}}$ a la imagen de $\mathfrak{q}$, entonces la hipótesis se traduce en que $\overline{\mathfrak{q}}$ es maximal en $\overline{B}$. Como $\overline{B}$ es una $\Bbbk(\mathfrak{p})$-álgebra de tipo finito, entonces $\Bbbk(\overline{\mathfrak{q}}) = \Bbbk(\mathfrak{q})$ es una extensión finita de $\Bbbk(\mathfrak{p})$, por el teorema de ceros de Hilbert, como se quería probar. □

Lema 5.39.C: Sea $f\colon X \to S$ un morfismo localmente de tipo finito, sea $g\colon T \to S$ un S-esquema y denótese $f' := f_T\colon X \times_S T \to T$ el cambio de base. Dado $x' \in X_T$ con imagen $x := g_X(x')$ tal que x es cerrado en su fibra $X_{f(x)}$, entonces x' es cerrado en su fibra $T_{f'(x')}$.

$$\begin{tikzcd}
(X \times_S T, x') \arrow[r, "f'"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & (T, f'(x')) \arrow[d, "g"] \\
(X, x) \arrow[r, "f"'] & (S, f(x))
\end{tikzcd}$$

Demostración: Basta notar que $\Bbbk(x')$ es un cociente de $\Bbbk\left(f'(x')\right) \otimes_{\Bbbk(f(x))} \Bbbk(x)$ y, como $\Bbbk(x)/\Bbbk(f(x))$ es una extensión finita, entonces $\Bbbk(x')/\Bbbk\left(f'(x')\right)$ también lo es. □

Lema 5.39.D: Sea k un cuerpo y $\varphi\colon k \to A$ una k-álgebra de tipo finito. Para $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ son equivalentes:

1. $x := x_{\mathfrak{p}}$ está aislado en $\operatorname{Spec} A$ (equivalentemente, que $\varphi^a\colon \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} k$ es cuasifinito en x).
2. $\dim_k(A_{\mathfrak{p}}) = 0$.
3. Existe $g \in A$ tal que $\mathbf{D}(g) = \{\mathfrak{p}\}$.
4. x es cerrado en $\operatorname{Spec} A$ y $k.\dim(A_{\mathfrak{p}}) = 0$.
5. La extensión de cuerpos $\Bbbk(\mathfrak{p})/k$ es finita y $k.\dim(A_{\mathfrak{p}}) = 0$.

Más aún, en este caso, existe una k-álgebra de tipo finito B tal que $A = A_{\mathfrak{p}} \times B$ y el g del inciso 3 satisface que $A_{\mathfrak{p}} = A[1/g]$.

Demostración: La equivalencia 1 $\iff$ 3 es clara de la definición de aislado y de que los abiertos principales forman una base. La equivalencia 4 $\iff$ 5 se sigue del lema 5.39.B. El inciso 2 equivale a decir que $\operatorname{Spec}(A_{\mathfrak{p}}) \to \operatorname{Spec} k$ es finito, en particular, $A_{\mathfrak{p}}$ es artiniano y así 2 $\iff$ 5.

1 $\implies$ 2. Sea $x \in \operatorname{Spec} A$ un punto aislado. Como $\{x\}$ es abierto en un esquema algebraico $\operatorname{Spec} A$ sobre un cuerpo k, entonces sus puntos cerrados de $\operatorname{Spec} A$ forman un conjunto denso (pues $\operatorname{Spec} A$ es de Jacobson), de lo que se sigue que x es cerrado en $\operatorname{Spec} A$. Así pues, $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec}(A_1) \amalg \operatorname{Spec}(A_2)$, donde $\{x\} = \operatorname{Spec}(A_1)$ (visto como subesquema abierto), de lo que se sigue que necesariamente $A_1 = A_{\mathfrak{p}}$ es una k-álgebra artiniana; finalmente, $\dim_k(A_{\mathfrak{p}})$ es finita, como se quería ver.

2 $\implies$ 3. Como $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo artiniano local, entonces $\operatorname{Spec}(A_{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}\}$. Considere la sucesión exacta de A-módulos

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A \longrightarrow A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

Ya que el funtor de localización $(-)_{\mathfrak{p}}$ es exacto, se sigue que $K_{\mathfrak{p}} = Q_{\mathfrak{p}} = 0$. Como $A_{\mathfrak{p}}$ es un k-módulo finitamente generado, entonces Q es un A-módulo finitamente generado y, por tanto, K también. Luego, existe $g \in A \smallsetminus \mathfrak{p}$ tal que $K[1/g] = Q[1/g] = 0$, es decir, $A_{\mathfrak{p}} = A[1/g]$, o equivalentemente, $\mathbf{D}_A(g) = \{\mathfrak{p}\}$. □

Proposición 5.39: Sea $f\colon X \to Y$ localmente de tipo finito, sea $x \in X$ un punto e $y := f(x)$ su imagen. Son equivalentes:

1. El morfismo f es cuasifinito en x.

2. El punto x está aislado en su fibra X_y.

3. El punto x es cerrado y genérico en su fibra X_y (i.e. si $x' \in X_s$ es tal que $x' \rightsquigarrow x$ ó $x \rightsquigarrow x'$, entonces $x' = x$).

4. Para todo par de abiertos afines $U = \operatorname{Spec} B \subseteq X$ y $V = \operatorname{Spec} A \subseteq Y$ tales que $x \in U$ y $f[U] \subseteq V$, la restricción $f|_U : U \to V$ es cuasifinita en x.

Demostración: $1 \implies 2$. Por hipótesis, existe un entorno afín $x \in U \subseteq X$ y un abierto afín $V \subseteq Y$ tales que $f[U] \subseteq V$ y tal que la restricción $f|_U : U \to V$ es cuasifinita en x. Así que x está aislado en la fibra $U_y = U \cap X_y$ de la restricción, es decir, $\{x\}$ es abierto en $U \cap X_y$, el cual a su vez es abierto en X_y.

$2 \implies 3$. El conjunto $\{x\} \subseteq X_y$ es abierto en un esquema algebraico sobre un cuerpo $\Bbbk(y)$, entonces es un esquema de Jacobson y sus puntos cerrados en X_y son densos, por lo que x debe ser también cerrado. Sea $\eta \rightsquigarrow x$ un punto genérico de X_y que generiza a x, entonces todo entorno de x corta a η y, por tanto, $\eta \in \{x\}$.

$3 \implies 1$. Sean $U = \operatorname{Spec} B \subseteq X$ y $V = \operatorname{Spec} A \subseteq Y$ abiertos afines tales que $x \in U$ y $f[U] \subseteq V$. Sean $\mathfrak{p} \trianglelefteq A$, $\mathfrak{q} \triangleleft B$ los primos correspondientes a y y x resp., denótese por $\overline{B} := B \otimes_A \Bbbk(\mathfrak{p})$ a la fibra y por $\overline{\mathfrak{q}}$ a la imagen de $\mathfrak{q}$. Como $\operatorname{Spec}(\overline{A}) \subseteq X_y$ es un entorno afín de x, y x es genérico, entonces $k.\dim(\overline{A}_{\overline{\mathfrak{q}}}) = 0$, por lo que el lema anterior prueba que $f|_U : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ es cuasifinito en x.

Finalmente las implicancias «$2 \implies 4 \implies 1$» son claras. ☐

Una aplicación de la proposición 4.19 da:

Corolario 5.39.1: Sea $f : X \to Y$ localmente de tipo finito, sea $x \in X$ un punto e $y := f(x)$ su imagen. Si la fibra X_y tiene cardinalidad finita, entonces es discreto (como espacio topológico) y f es cuasifinito en cada punto de X_y.

Corolario 5.39.2: Sea $f : X \to Y$ un morfismo localmente de tipo finito. Son equivalentes:

1. f es localmente cuasifinito.

2. Para todo $y \in Y$, la fibra X_y es discreta.

3. Para todo morfismo $\operatorname{Spec} k \to Y$, donde k es un cuerpo, el cambio de base X_k es un esquema discreto.

Demostración: La equivalencia $1 \iff 2$ es clara, y la implicancia $3 \implies 2$ es trivial pues una fibra es un cambio de base por $k = \Bbbk(y)$ para algún $y \in Y$. La implicancia $1 \implies 2$ se sigue del lema 5.39.C. $\square$

Corolario 5.39.3: Para un morfismo de esquemas f, son equivalentes:

1. f es cuasifinito.
2. f es localmente cuasifinito y compacto.
3. f es localmente de tipo finito, compacto y tiene fibras de cardinalidad finita.

5.2 Haces cuasicoherentes en espacios proyectivos

Finalmente introduciremos el haz de torcimientos de Serre $\mathscr{O}(1)$ que completa nuestro panorama.

Proposición 5.40: Sea B un anillo graduado, M un B-módulo graduado y $X := \operatorname{Proj} B$. Entonces existe un único $\mathscr{O}_X$-módulo cuasicoherente $\widetilde{M}$ (¡no confundir con el caso afín!) tal que:

1. Para todo $f \in B_+$ homogéneo y no nilpotente se cumple que $\widetilde{M}|_{\mathbf{D}_+(f)}$ es isomorfo (como haz) al haz cuasicoherente $\widetilde{M_{(f)}}$ sobre $\mathbf{D}_+(f) \cong \operatorname{Spec}(B_{(f)})$.
2. Para todo $x \in \operatorname{Proj} B$, se cumple que la fibra $\widetilde{M}_x = M_{(\mathfrak{p}_x)}$.

Otra forma de construir el haz $\widetilde{M}$ es mediante una condición análoga a la del caso afín, esto es, mediante secciones que son fracciones locales en las localizaciones de M.

Definición 5.41: Sea B un anillo graduado y sea M un B-módulo graduado. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, defina $M(n)_d := M_{n+d}$, el que llamamos ***torcimiento*** de M, el cual sigue siendo un B-módulo graduado. Si $X = \operatorname{Proj} B$, definimos el ***haz de torcimientos de Serre*** $\mathscr{O}_X(n) := \widetilde{B(n)}$.

Sea S un esquema y sea $X = \mathbb{P}^d_S$ un espacio proyectivo sobre S. Para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todo haz cuasicoherente $\mathscr{F}$, definimos su torcimiento

$$\mathscr{F}(n) := \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(n).$$

Definición 5.42: Sea S un esquema arbitrario y sea $f\colon \mathbb{P}^d_S \to \mathbb{P}^d_{\mathbb{Z}}$ el morfismo canónico. Entonces se define $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^d}(n) := f_*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^d}(n)$.

Ejercicio 5.43: Verifique que si $S = \operatorname{Spec} A$, de modo que $\mathbb{P}^d_A = \operatorname{Proj} B$ con $B := A[t_0, \dots, t_d]$, entonces $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^d_A}(n) = \widetilde{B(n)}$ como antes.

Definición 5.44: Un haz cuasicoherente $\mathscr{F}$ se dice ***localmente libre*** si cada punto posee un entorno U de modo que $\mathscr{F}|_U$ sea un $\mathscr{O}_X|_U$-módulo libre. Un $\mathscr{O}_X$-módulo se dice un ***haz invertible*** si es localmente libre de rango constante 1.

Nótese que si X es un espacio topológico conexo y $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo localmente libre, entonces el rango es el mismo en cada abierto (¿por qué?).

Proposición 5.45: Sea B una A-álgebra homogénea de tipo finito (i.e., un cociente de $A[t_0, \dots, t_d]$ por un ideal homogéneo). Sea $X := \operatorname{Proj} B$ y fijemos el encaje canónico $X \hookrightarrow \mathbb{P}^d_A$. Entonces:

1. El haz $\mathscr{O}_X(n)$ es invertible sobre X.

2. Para todo B-módulo graduado M se cumple que

$$\widetilde{M(n)} = \widetilde{M}(n) := \widetilde{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(n).$$

   En particular, $\mathscr{O}_X(n) \otimes \mathscr{O}_X(m) = \mathscr{O}_X(n+m)$.

3. Sea C una C_0-álgebra homogénea de tipo finito, $Y := \operatorname{Proj} C$ y sea $\varphi\colon B \to C$ un homomorfismo de anillos graduados de grado 1. Sea $U := \mathbf{D}_+(\varphi[B_+]C) \subseteq Y$ y sea $\varphi^a\colon U \to X$ el morfismo inducido por φ (prop. 3.30). Entonces

$$f^*(\mathscr{O}_X(n)) \cong \mathscr{O}_Y(n)|_U, \qquad f_*(\mathscr{O}_Y(n)|_U) \cong (f_*\mathscr{O}_U)(n).$$

Demostración:

1. Sea $f \in B_1$ y considere el abierto afín $\mathbf{D}_+(f) = \operatorname{Spec}(B_{(f)})$. Entonces, por definición, se cumple que
$$\mathscr{O}_X(n)|_{\mathbf{D}_+(f)} = \widetilde{B(n)_{(f)}} = \widetilde{B_{(f)}(n)} = f^n \widetilde{B(n)} = f^n \cdot \mathscr{O}_X|\mathbf{D}_+(f),$$
lo que prueba que es libre y de rango 1 en $\mathbf{D}_+(f)$.

2. Basta recordar que $() \mapsto \widetilde{()}$ es un funtor exacto sobre esquemas afines y claramente $M(n) = B(n) \otimes_B M$ para B-módulos graduados M. Empleando que B es una A-álgebra homogénea de tipo finito, ésta observación basta para pegar los isomorfismos.

3. Esto se reduce, al igual que el caso anterior, a verificarlo sobre cartas afines. □

Proposición 5.46: Sea X un esquema localmente noetheriano, y sea $\mathscr{F}$ un haz coherente sobre X. Supongamos que para un punto $x \in X$ la fibra es libre $\mathscr{F}_x \simeq \mathscr{O}_{X,x}^n$, entonces existe un entorno $x \in U$ tal que el haz es libre $\mathscr{F}^n|_U \simeq \mathscr{O}_X^n|_U$.

En consecuencia, $\mathscr{F}$ es localmente libre de rango n syss para todo punto $x \in X$ se cumple que la fibra $\mathscr{F}_x$ sea un $\mathscr{O}_{X,x}$-módulo libre de rango n.

Demostración: Considere $V = \operatorname{Spec} A$ un entorno afín de x, entonces podemos construir una sucesión exacta de $\mathscr{O}_X$-módulos
$$0 \longrightarrow \ker\alpha \longrightarrow \mathscr{O}_X^m|_V \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F}|_V \longrightarrow 0$$
donde $\ker\alpha$ es coherente, por definición. Como V es afín, entonces $\ker\alpha \cong \widetilde{N}$ para algún A-módulo finitamente generado N, y así $\mathscr{F}|_V = \widetilde{A^m/N}$ y comparando fibras tenemos que
$$\mathscr{O}_{X,x}^n \cong \mathscr{F}_x \cong (A^m/N)_{\mathfrak{p}_x} \cong \mathscr{O}_{X,x}^m/N_{\mathfrak{p}_x},$$
de modo que $N_{\mathfrak{p}_x} \cong A_{\mathfrak{p}_x}^{m-n}$. Así, podemos construir el siguiente diagrama conmutativo:
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^{m-n} \arrow[r] \arrow[d, hook] & A^m \arrow[r] \arrow[d, equal] & A^n \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & A^m \arrow[r] & \mathscr{F}(V) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
de modo que ahora tenemos la sucesión exacta $0 \to \ker\beta \to A^n \to \mathscr{F}(V) \to 0$, donde $(\ker\beta)_{\mathfrak{p}_x} = 0$, de modo que existe un subentorno $x \in U \subseteq V$ tal que $\ker\beta|_U = 0$ y, por lo tanto, $\mathscr{F}|_U \cong \mathscr{O}_X^n|_U$ como se quería probar. □

De la proposición anterior se sigue que si A es un anillo noetheriano, entonces el único haz invertible sobre $X := \operatorname{Spec} A$ es $\mathscr{O}_X$. Uno estaría tentado a decir lo mismo siempre que X sea un esquema localmente noetheriano, pero ojo que los isomorfismos en las fibras no vienen de un único morfismo de haces, sino que son independientes entre sí.

Lema 5.47: Sea A un anillo, sea $B := A[t_0, \dots, t_d]$ el álgebra polinomial y sea $X := \operatorname{Proj} B$. Entonces para todo n se tiene

$$\Gamma(X, \mathscr{O}_X(n)) = \begin{cases} B_n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

así que $B \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathscr{O}_X(n))$.

En el enunciado, B_n denota los polinomios homogéneos de grado n.

Demostración: Supongamos que $d \geq 1$. Sea $f \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X(n))$ una sección global, el cual es el pegado de secciones $f_i \in \Gamma(\mathbf{D}_+(t_i), \mathscr{O}_X(n))$. Los módulos $\Gamma(\mathbf{D}_+(t_i), \mathscr{O}_X(n))$ y $\Gamma\big(\mathbf{D}_+(t_i) \cap \mathbf{D}_+(t_j), \mathscr{O}_X(n)\big)$ pueden verse de forma canónica como A-submódulos de

$$C := A[t_0, t_1, \dots, t_d, t_0^{-1}, \dots, t_d^{-1}],$$

de modo que podemos ver a f como un elemento de C. Sea $1 \leq i \leq d$, el que $f \in t_i^n \Gamma(\mathbf{D}_+(t_i), \mathscr{O}_X)$, implica que f es una fracción de homogéneos que no posee un t_0 en el denominador, y como $f \in t_0^n \Gamma(\mathbf{D}_+(t_0), \mathscr{O}_X)$, entonces se sigue que f es necesariamente homogéneo de grado n si $n \geq 0$ o que $f = 0$ si $n < 0$. Es fácil verificar que $B_n \subseteq \Gamma(X, \mathscr{O}_X(n))$. □

Definición 5.48: Definimos el $\mathscr{O}_X(X)$-módulo graduado asociado a $\mathscr{F}$ por

$$\Gamma_*(\mathscr{F}) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathscr{F}(n)).$$

La proposición anterior nos dice ahora que $\Gamma_*(\mathscr{O}_X) = B$ si $X = \operatorname{Proj} B = \operatorname{Proj} A[t_0, \dots, t_d]$.

Definición 5.49: Sea X un esquema y $\mathscr{L}$ un haz invertible sobre X. Para toda sección global $s \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ se define

$$X_s := \{x \in X : \mathscr{L}_x = s|_x \cdot \mathscr{O}_{X,x}\},$$

tal que si $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X$ coincide con la notación anterior (cf. prop. 3.75), y por argumentos análogos prueba ser abierto.

Proposición 5.50: Sea X un esquema compacto y cuasiseparado. Sea $\mathscr{L}$ un haz invertible y $\mathscr{F}$ un haz cuasicoherente sobre X, y sean $s \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ y $f \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ secciones globales.

1. Supongamos que $s|_{X_f} = 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s \otimes f^{\otimes n} = 0 \in \Gamma(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n})$.

2. Para toda sección $t \in \Gamma(X_f, \mathscr{F})$ existe $n > 0$ tal que la sección $t \otimes f^{\otimes n} \in \Gamma(X_f, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n})$ admite una extensión a una sección global.

Demostración:

1. Sean $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ un cubrimiento por finitos abiertos afines de X tal que $\mathscr{L}|_{U_i}$ es libre, y sea $\psi_i \colon \mathscr{F}|_{U_i} \to \mathscr{O}_{U_i}$ un isomorfismo fijo. Luego $\mathscr{F}|_{U_i} \cong \widetilde{M_i}$ para algún A_i-módulo M_i. Sea $g_i := \psi_i(f|_U) \in \Gamma(U_i, \mathscr{O}_X)$ y, luego, $X_f \cap U_i = \mathbf{D}(g_i)$. Como $s|_{X_f} = 0$, entonces $g_i^n s = 0 \in M_i$ para algún $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande (independiente del i). Ahora bien, como $\mathscr{L}$ es localmente libre, se induce un isomorfismo

$$\mathrm{Id}_{\mathscr{F}} \otimes \psi_i^{\otimes n} \colon \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}|_{U_i},$$

mediante el cual se comprueba que $s|_{U_i} \otimes f^{\otimes n} = 0$ y, pegando las secciones, vemos que $s \otimes f^{\otimes n} = 0$.

2. Es análogo a la demostración de la proposición 6.12. □

Proposición 5.51: Sea B un anillo graduado que es una B_0-álgebra finitamente generada por B_1. Sea $X = \operatorname{Proj} B$ y sea $\mathscr{F}$ un haz cuasicoherente sobre X. Entonces existe un isomorfismo natural

$$\beta \colon \widetilde{\Gamma_*(\mathscr{F})} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}$$

Así pues $M \mapsto \widetilde{M}$ establece una equivalencia de categorías, cuya inversa es $\Gamma_*(-)$.

Demostración: Vamos a definir β en abstracto para cualquier $\mathscr{O}_X$-módulo (no necesariamente cuasicoherente) $\mathscr{F}$. Como $\Gamma_*(\mathscr{F})$ es cuasicoherente, basta definirlo en $\mathbf{D}_+(f)$ para $f \in B_1$ arbitrario. Una sección $s \in \Gamma(\mathbf{D}_+(f), \widetilde{\Gamma_*(\mathscr{F})}) = \Gamma * (\mathscr{F})_{(f)}$ es de la forma m/f^d, donde $m \in \Gamma(X, \mathscr{F}(d))$. Podemos ver a $f^{-d} \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X(-d))$ de modo que

$$\beta(m/f^d) := m \otimes f^{-d} \in \Gamma(X, \mathscr{F}(d) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(-d)) = \mathscr{F}(X).$$

Ahora, supongamos que $\mathscr{F}$ es cuasicoherente. Como B es un A-esquema proyectivo, entonces es compacto y separado, así que por el lema anterior, tomando $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X(1)$, vemos que $\mathscr{F}(X_f) = \mathscr{F}(\mathbf{D}_+(f)) \cong \Gamma_*(\mathscr{F})(f)$. □

Corolario 5.51.1: Sea A un anillo y sea $\iota\colon Z \hookrightarrow \mathbb{P}^d_A$ un subesquema cerrado. Entonces existe un ideal homogéneo $\mathfrak{b} \trianglelefteq A[t_0, \dots, t_d] =: B$ tal que $Z \cong \mathbf{V}_+(\mathfrak{b}) \cong \operatorname{Proj}(B/\mathfrak{b})$.

Demostración: Recuérdese que $\iota^\sharp\colon \mathscr{O}_X \to \iota^*\mathscr{O}_Z$, donde $X := \operatorname{Proj} B = \mathbb{P}^d_A$, de modo que $\mathscr{I} := \ker(\iota^\sharp)$ es un haz de ideales sobre X y, en particular, es cuasicoherente. Defínase $\mathfrak{b} := \Gamma_*(\mathfrak{I})$, entonces $\mathscr{I} = \widetilde{\mathfrak{b}}$ por la proposición anterior. El morfismo canónico $\mathscr{I}(n) \hookrightarrow \mathscr{O}_X(n)$ es inyectivo, puesto que $\mathscr{O}_X(n)_x \cong \mathscr{O}_{X,x}$ es un $\mathscr{O}_{X,x}$-módulo plano. Así, se ve que $\mathfrak{b}$ es un ideal homogéneo sobre B y finalmente es fácil notar que $\mathbf{V}(\widetilde{\mathfrak{b}}) \cong \operatorname{Proj}(B/\mathfrak{b})$ como esquemas. □

Definición 5.52: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo cuasiproyectivo, y sea $\mathscr{L}$ un haz invertible sobre X. Se dice que $\mathscr{L}$ es ***muy amplio (respecto a f)*** si existe un encaje $\iota\colon X \to \mathbb{P}^r_Y$ tal que $\mathscr{L} \cong \iota^*\big(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r_Y}(1)\big)$.

La existencia de un encaje ya asegura que X sea cuasiproyectivo, dicho de otro modo, si X no es cuasiproyectivo, no admite haces muy amplios.

Definición 5.53: Sea X un esquema. Se dice que un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ está ***globalmente generado*** o *generado por (finitas) secciones globales* $s_0, \dots, s_d \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ si cada fibra lo está:

$$\mathscr{F}_x = \sum_{i=1}^{d} (s_i)|_x \cdot \mathscr{O}_{X,x}.$$

Nótese que ésta definición de «ser generado» es mejor que la ingenua definición de que «el módulo de secciones globales esté generado por los s_i», ya que las secciones globales pueden ser vacías (cfr., lema 5.47).

Ejemplo 5.54: Sea A un anillo, B una A-álgebra graduada y $X = \operatorname{Proj} B$. Si B es tal que B_n está finitamente generado (como A-módulo) por $b_1, \dots, b_r$, entonces $\mathscr{O}_X(n) \cong \widetilde{B(n)}$ está generado por las secciones globales $b_1, \dots, b_r$. ⌟

Teorema 5.55 (Serre): Sea A un anillo y X un esquema proyectivo sobre A. Para todo haz cuasicoherente finitamente generado $\mathscr{F}$ sobre X se cumple que $\mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_X(1)^{\otimes n}$ está globalmente generado para n suficientemente grande.

DEMOSTRACIÓN: Sea $f\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}_A^d$ un encaje cerrado. Entonces $f_*\mathscr{F}$ es cuasicoherente finitamente generado sobre $\mathbb{P}_A^d$ por la proposición 6.21. Más aún, es fácil ver que $f_*\mathscr{F}(n) = (f_*\mathscr{F})(n)$ (¿por qué?), y como

$$\Gamma(\mathbb{P}_A^d, f_*\mathscr{F}(n)) = \Gamma(X, \mathscr{F}(n)), \qquad \Gamma_*(f_*\mathscr{F}) = \Gamma_*(\mathscr{F});$$

entonces basta probar el caso $X = \mathbb{P}_A^d = \operatorname{Proj} A[t_0, t_1, \dots, t_d]$.

Sea $U_i := \mathbf{D}_+(t_i)$. Entonces $\mathscr{F}|_{U_i} = \widetilde{M_i}$ debe ser un $\operatorname{Spec} B_i = \mathscr{O}_X(U_i)$ módulo finitamente generado por secciones, digamos, s_{ij} con $0 \le j \le m$ suficientemente grande; donde $B_i = A[t_0/t_i, t_1/t_i, \dots, t_d/t_i]$. Por la proposición 6.35 existe n suficientemente grande tal que cada $t_i^n s_{ij}$ se extiende a la sección global $u_{ij} \in \Gamma(X, \mathscr{F}(n))$ y éstas generan todo $\mathscr{F}(n)$ localmente. □

Corolario 5.55.1: Sea A un anillo y X un esquema proyectivo sobre A. Todo haz cuasicoherente finitamente generado $\mathscr{F}$ sobre X es el cociente de un haz $\mathscr{O}_X(n)^{\oplus r}$ para algunos $n, r \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior, existe una sucesión exacta de haces $\mathscr{O}_X^{\oplus r} \to \mathscr{F}(-n) \to 0$ para algún $-n \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande, así que tensorizando por el haz de torcimientos $\mathscr{O}_X(n)$ se tiene la sucesión $\mathscr{O}_X(n)^r \to \mathscr{F} \to 0$. □

Teorema 5.56: Sea k un cuerpo y A una k-álgebra de tipo finito. Sea X un A-esquema proyectivo y $\mathscr{F}$ un haz coherente sobre X. Entonces $\Gamma(X, \mathscr{F})$ es un A-módulo finitamente generado. En particular, si $A = k$, entonces $\Gamma(X, \mathscr{F})$ es un k-espacio vectorial de dimensión finita.

DEMOSTRACIÓN: Dos observaciones básicas: A es noetheriano y $X = \operatorname{Proj} B$ donde B es una A-álgebra homogénea de tipo finito por el corolario 6.37. Así que sea $M := \Gamma_*(X)$, de modo que $\mathscr{F} \cong \widetilde{M}$ para algún B-módulo graduado M. Por el teorema de Serre, $\mathscr{F}(n)$ está generado por secciones de $\Gamma(X, \mathscr{F}(n))$. Sea $N \leq M$ el submódulo generado por dichas secciones, lo que induce un monomorfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos $\widetilde{N} \hookrightarrow \widetilde{M} = \mathscr{F}$. Torciendo n veces, tenemos un monomorfismo $\widetilde{N}(n) \hookrightarrow \mathscr{F}(n)$ el cual es un isomorfismo en las fibras, luego es global. Torciendo de vuelta, obtenemos que $\widetilde{N} \cong \mathscr{F}$, de modo que $M \cong N$ es finitamente generado. Basta ver que si M es un B-módulo finitamente generado, entonces $\Gamma(X, \widetilde{M})$ es un A-módulo finitamente generado. Ahora bien, sabemos que existe una filtración Demostrar [**8,** pág. 50].

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_r,$$

de modo que cada $M_i/M_{i-1} \cong (B/\mathfrak{p}_i)(n_i)$ para algún $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Proj} B$. Ésta filtración induce la sucesión exacta $0 \to \widetilde{M_{i-1}} \to \widetilde{M_i} \to \widetilde{M_i/M_{i-1}} \to 0$, de modo que induce la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \widetilde{M_{i-1}}) \longrightarrow \Gamma(X, \widetilde{M_i}) \longrightarrow \Gamma(X, \widetilde{M_i/M_{i-1}}).$$

Luego, por inducción, basta ver que $\Gamma(X, \widetilde{B/\mathfrak{p}}(n))$ es un A-módulo finitamente generado. Sustituyendo B por $B/\mathfrak{p}$, nos reducimos a probar que $\Gamma(X, \mathscr{O}_X(n))$ es un A-módulo finitamente generado.

Sea $B = A[\alpha_0, \dots, \alpha_r]$ con cada $\alpha_i \in B$ homogéneo de grado 1. Multiplicar por α_0 induce un monomorfismo $B(n) \hookrightarrow B(n+1)$ que a su vez induce $\Gamma(X, \mathscr{O}_X(n)) \hookrightarrow \Gamma(X, \mathscr{O}_X(n+1))$, de modo que basta probar que $\Gamma(X, \mathscr{O}_X(n))$ es finitamente generado sobre A para n suficientemente grande, digamos $n \geq 0$.

Sea $C := \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathscr{O}_X(n))$. Entonces C es un anillo que contiene a B y contenida en $\bigcup_{i=1}^r B[1/\alpha_i]$. Veremos que C es una B-álgebra entera.

Sea $s \in C$ homogéneo de grado $d \geq 0$. Como $s \in B[1/\alpha_i]$, entonces $\alpha_i^m s \in B$ para todo i con m suficientemente grande. Como los α_i's generan a B_1, los monomios de α_i de grado e generan a B_e, así que eligiendo m aún más grande, podemos suponer que $ys \in B$ para todo $y \in B_m$. Como s es de grado positivo, entonces para todo $y \in B \geq m = \bigoplus_{e=m}^{\infty} B_e$ se cumple que $ys \in B \geq m$. Tómese $y = \alpha_0^n$, entonces lo anterior nos dice que para todo $q \geq 1$ se tiene que $sq \in (1/\alpha_0^n)B$, el cual es un B-submódulo finitamente generado de $\operatorname{Frac}(C) = \operatorname{Frac}(B)$, por lo que, s es entero.

Así, como B es una k-álgebra de tipo finito y $C \subseteq \operatorname{Frac}(B)$ es entero sobre B, luego C es un B-módulo finitamente generado; en particular, para cada n vemos que C_n es un B_0-módulo finitamente generado como se quería probar. $\square$

Definición 5.57: Sea k un cuerpo, sea X una variedad proyectiva sobre k y sea $\mathscr{L}$ un haz coherente (e.g., un haz invertible) sobre X. Denotaremos por $h^0(\mathscr{L}) := \dim_k \Gamma(X, \mathscr{L})$.

Éste valor será un primer ejemplo y acercamiento a la cohomología de haces. En ésta sección no lo explotaremos tanto, pero veremos su utilidad al ver las conjeturas de Weil para curvas (vid., §8.5).

Corolario 5.57.1: Sea k un cuerpo, y sean X, Y un par de k-esquemas de tipo finito. Para todo haz coherente $\mathscr{F}$ sobre X y todo morfismo k-proyectivo $f\colon X \to Y$, se cumple que $f_*\mathscr{F}$ es coherente sobre Y.

Demostración: Todo morfismo proyectivo es separado y compacto, así que podemos reducirnos al caso de $Y = \operatorname{Spec} A$, donde A es una k-álgebra de tipo finito. Como $\mathscr{F}$ es cuasicoherente, entonces $f_*\mathscr{F}$ también, luego

$$f_*\mathscr{F} = \widetilde{\Gamma(Y, f_*\mathscr{F})} = \widetilde{\Gamma(X, \mathscr{F})},$$

donde $\Gamma(X, \mathscr{F})$ es un A-módulo finitamente generado, luego $f_*\mathscr{F}$ es coherente. □

Proposición 5.58: Sea X un esquema sobre un anillo A y sea $Y := \operatorname{Proj}(A[t_0, \dots, t_d]) = \mathbb{P}^d_A$. Para un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{L}$ son equivalentes:

1. $\mathscr{L}$ es invertible y está globalmente generado por $d+1$ secciones $s_0, \dots, s_d$.
2. Existe un A-morfismo $f\colon X \to Y$ tal que $\mathscr{L} \simeq f^*\mathscr{O}_Y(1)$ y $s_i = f^*t_i$.

Demostración: $2 \implies 1$. Trivial.

$1 \implies 2$. Nótese que los $\{X_{s_i}\}_{i=0}^d$ forman un cubrimiento por abiertos de X. Para cada sección s_i definamos el A-morfismo $f_i\colon X_{s_i} \to \mathbf{D}_+(t_i) \subseteq Y$ inducido por el homomorfismo de anillos

$$\begin{aligned} f_i^\sharp\colon \operatorname{Spec}(A[\boldsymbol{t}/t_i]) &\longrightarrow \Gamma(X_{s_i}, \mathscr{O}_X) \\ t_j/t_i &\longmapsto s_j/s_i. \end{aligned}$$

Es fácil verificar que los morfismos son compatibles y, por tanto, se pegan en un A-morfismo $X \to Y$ que satisface lo pedido. □

Nótese que, en la proposición, $\mathscr{L}$ no necesariamente es muy amplio, puesto que f no es necesariamente un encaje.

§5.2.1 Haces amplios. La noción de «amplitud» es relativamente controversial, ya que hay muchas definiciones distintas que son más o menos equivalentes. Nuestra referencia aquí es [**Stacks**], Section 01PR.

Definición 5.59: Sea X un esquema y $\mathscr{L}$ haz invertible sobre X. Se dice que $\mathscr{L}$ es ***amplio*** si:

1. X es compacto.
2. Para todo punto $x \in X$ existe un $n \geq 1$ y una sección global $s \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n})$, tal que X_s es un entorno afín de x.

Se siguen de la definición:

Corolario 5.59.1: Sea X un esquema compacto y $\mathscr{L}, \mathscr{M}$ un par de haces invertibles, donde $\mathscr{L}$ es amplio sobre X. Se cumplen:

1. Fijemos $n \geq 1$. Entonces $\mathscr{M}$ es amplio syss $\mathscr{M}^{\otimes n}$ es amplio.
2. Para todo subesquema cerrado $j\colon Z \hookrightarrow X$, se cumple que $\mathscr{L}|_Z := j_*\mathscr{L}$ es amplio.
3. Dada una sección $t \in \Gamma(X, \mathscr{M})$, para todo abierto afín $U \subseteq X$ se cumple que $U \cap X_t$ es afín.
4. Si los abiertos $\{X_t : t \in \Gamma(X, \mathscr{M}^{\otimes m}), m \geq 1\}$ cubren a X, entonces $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ es amplio.

Demostración:

1. Basta notar que $X_{s^n} = X_s$, donde $s^n = \underbrace{s \otimes s \otimes \cdots \otimes s}_{n} \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n})$.
2. Basta notar que Z es compacto y que un subesquema cerrado de un esquema afín es también afín.
3. La pregunta es local y podemos suponer que $X = \operatorname{Spec} A$ es afín. Como $\mathscr{M}$ es invertible, entonces es cuasicoherente y $\mathscr{M} = \widetilde{N}$. Así, dado $s \in N$, queremos ver que $U := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : s \notin \mathfrak{p}N\}$ es un abierto afín.

   Sea $B := \operatorname{Sym} N = \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n$ la A-álgebra simétrica de N (la cual es conmutativa y graduada), e identifiquemos $s \in B_1$. Sea $C := B/(s-1)B$, la cual es una A-álgebra y, C es nula (o un cambio de base suyo), syss $s \equiv 0 \pmod{C}$. Dado $x_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Spec} A \smallsetminus U$, tenemos que $C \otimes_A \Bbbk(x) = 0$; así concluimos que $\operatorname{Spec} C \to \operatorname{Spec} A$ se factoriza a través de U. Por otro lado, si $\operatorname{Spec} D \subseteq U$ es un abierto afín, entonces s se manda a un elemento de la base de $N \otimes_A D$, de modo que $C \otimes_A D = D[s]/(s-1) \cong D$, por lo que $\operatorname{Spec} C \to U$ es un isomorfismo y U es afín.

4. Se sigue del inciso anterior. □

Lema 5.60: Sea X un esquema y $\mathscr{L}$ un haz invertible. Supongamos que los abiertos $\{X_s : s \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n}), n \geq 1\}$ forman una base de la topología de X. Entonces los abiertos afines X_s también forman una base.

Demostración: Se sigue del inciso 3 de la proposición anterior. □

Proposición 5.61: Sea X un esquema y $\mathscr{L}$ un haz invertible. Supongamos que para todo punto $x \in X$ existe una sección $s \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n})$ para $n \geq 1$ tal que X_s es un abierto afín de x (e.g., si $\mathscr{L}$ es amplio). Entonces X es separado.

Demostración: Por definición, la familia

$$\{X_s \text{ afín} : s \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n}), n \geq 1\}$$

es un cubrimiento por abiertos afines y, por el inciso 3 del corolario 5.59.1, vemos que la intersección $X_s \cap X_t$ es afín; así que X es cuasiseparado.

Veamos que X es separado por el criterio valuativo. Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo de valuación con $K := \operatorname{Frac} A$ y sean $f, g\colon \operatorname{Spec} A \to X$ un par de morfismos tales que sus composiciones $\operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} A \to X$ coinciden. Como A es local, existen $s \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes p}), t \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes q})$ para algunos $p, q \geq 1$ tales que X_s, X_t son afines y $f[\operatorname{Spec} A] \subseteq X_s, g[\operatorname{Spec} A] \subseteq X_t$. Reemplazando s, t por potencias adecuadas podemos suponer que $p = q$ y podemos reemplazar $\mathscr{L}$ por $\mathscr{L}^{\otimes p}$.

Como $\mathscr{L}$ es cuasicoherente, vemos que $f^*\mathscr{L} = \widetilde{M}, g^*\mathscr{L} = \widetilde{N}$ para M, N un par de A-módulos. Tanto M como N son localmente libres de rango 1, luego son planos y finitamente generados, y como A es local, entonces M, N son libres. Así, podemos identificar M, N con A-submódulos de $M \otimes_A K, N \otimes_A K$ resp. La igualdad $f|_{\operatorname{Spec} K} = g|_{\operatorname{Spec} K}$ induce un isomorfismo $\varphi\colon M \otimes_A K \xrightarrow{\sim} N \otimes_A K$.

Sean $u \in M, v \in N$ los elementos dados por la imagen de s a través de f^*, g^* resp. Nótese que $\varphi(u \otimes 1) = v \otimes 1$. Como la imagen de f está contenida en X_s, vemos que $u \notin \mathfrak{m}M$, es decir, $M = uA$. Así, φ induce un isomorfismo entre M y el submódulo $vA \leq N$. De manera análoga φ^{-1} induce un isomorfismo entre N y el submódulo $uA = M$; de modo que $vA = N$ y, por tanto, $v \notin \mathfrak{m}N$. Así $g[\operatorname{Spec} A] \subseteq X_s$ y, como X_s es afín, entonces es separado y, por tanto, $f = g$. □

Lema 5.62: Sea T un esquema y $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_T$-módulo invertible. Dado un homomorfismo de anillos graduados $\varphi\colon A \to \Gamma_*(\mathscr{L})$, sea

$$U(\varphi) := \bigcup_{f \in A_+} T_{\varphi(f)},$$

donde f recorre los elementos homogéneos de A. Entonces el homomorfismo φ induce un morfismo de esquemas $r_{\mathscr{L},\varphi}\colon U(\varphi) \to \operatorname{Proj} A =: X$ y un homomorfismo de $\mathscr{O}_T$-álgebras graduadas:

$$\theta\colon r_{\mathscr{L},\varphi}^* \left(\bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathscr{O}_X(d) \right) \longrightarrow \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathscr{L}^{\otimes d}|_{U(\varphi)}.$$

Además, la terna $(U(\varphi), r_{\mathscr{L},\varphi}, \theta)$ está caracterizada por lo siguiente:

1. Para todo $f \in A_+$ homogéneo tenemos que $r_{\mathscr{L},\varphi}^{-1}[\mathbf{D}_+(f)] = T_{\varphi(f)}$.

2. Para todo $d \geq 0$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A_d \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \Gamma(T, \mathscr{L}^{\otimes d}) \arrow[d, "\rho^T_{U(\varphi)}"] \\ \Gamma(X, \mathscr{O}_X(d)) \arrow[r, "\theta"] & \Gamma(U(\varphi), \mathscr{L}^{\otimes d}) \end{tikzcd}$$

Este lema debería compararse con la proposición 3.22. Para la demostración, véase **[Stacks]**, `Tag 01NK`.

Proposición 5.63: Sea X un esquema, $\mathscr{L}$ un haz invertible y sea $S := \Gamma_*(\mathscr{L})$. Si cada punto $x \in X$ está contenido en un X_s para algún $s \in S_+$ homogéneo, entonces existe un morfismo de esquemas

$$f\colon X \longrightarrow \operatorname{Proj} S =: Y,$$

que satisface lo siguiente:

(a) Para cada $s \in S_+$ homogéneo, $X_s = f^{-1}[\mathbf{D}_+(s)]$.

(b) Existen homomorfismos de $\mathscr{O}_X$-módulos $f^*\mathscr{O}_Y(n) \to \mathscr{L}^{\otimes n}$ compatibles con el producto en S.

(c) La composición $S_n \to \Gamma(Y, \mathscr{O}_Y(n)) \to \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n})$ es la identidad.

(d) Para todo $x \in X$ existe un entero $d \geq 1$ y un entorno $x \in U \subseteq X$ tal que $f^*\mathscr{O}_Y(dn)|_U \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}^{\otimes dn}|_U$ es un isomorfismo para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Además:

1. Si X es compacto, el morfismo f es compacto y dominante.
2. Si $\mathscr{L}$ es amplio, el morfismo f es un encaje abierto dominante.

Demostración: Sea $\varphi \colon S \to \Gamma_*(\mathscr{L})$ la función identidad, la cual induce un morfismo $f := r_{\mathscr{L},\varphi} \colon U(\varphi) \to Y$ y, por hipótesis, $U(\varphi) = X$. Las propiedades señaladas se derivan del lema anterior.

1. Para ver que f es compacto, basta probar que $f^{-1}[\mathbf{D}_+(s)]$ es compacto para cada $s \in S_+$ homogéneo. Sea $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ un cubrimiento por abiertos afines. Entonces cada $X_i \cap X_s$ es afín por el corolario 5.59.1 y, por tanto, cada X_s es compacto.

   Ahora probaremos que f es dominante por contradicción: si no lo fuese, como los $\mathbf{D}_+(s)$ forman una base de la topología de $\operatorname{Proj} S$, podemos encontrar $s \in S_+$ homogéneo con $\mathbf{D}_+(s) \neq \varnothing$ tal que $f[X] \cap \mathbf{D}_+(s) = \varnothing$; pero por la propiedad (a) se sigue que $X_s = \varnothing$ y, por tanto, $s^n = 0 \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n \deg(s)})$. Por lo tanto, $\mathbf{D}_+(s) = \varnothing$, lo que es absurdo.

2. Sabemos que X es cuasiseparado por la proposición 5.61, así que sean $s_1, \dots, s_n \in S_+$ homogéneos tales que cada X_{s_i} sea afín y que $X = \bigcup_{i=1}^n X_{s_i}$. Sea $d_i := \deg(s_i)$. Luego el homomorfismo de anillos graduados
   $$S(d_i)_{(s_i)} = \Gamma(\mathbf{D}_+(s_i), \mathscr{O}_{\operatorname{Proj} S}) \longrightarrow \Gamma(X_{s_i}, \mathscr{O}_X)$$
   es un isomorfismo, por lo que cada $f|_{X_{s_i}} \colon X_{s_i} \to \mathbf{D}_+(s_i)$ es un isomorfismo. Así f determina un isomorfismo de X con el subesquema abierto $\bigcup_{i=1}^n \mathbf{D}_+(s_i)$. □

Corolario 5.63.1: Sea X un esquema con un $\mathscr{O}_X$-módulo amplio $\mathscr{L}$ (e.g., si X es cuasiproyectivo sobre un esquema S). Para todo conjunto finito Z y todo entorno afín $U \supseteq Z$ existe una sección $f \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n})$ para algún $n > 0$ tal que X_f es un abierto afín y $Z \subseteq X_f \subseteq U$.

Demostración: Definiendo $A := \Gamma_*(\mathscr{L})$, entonces podemos ver a X como subesquema abierto de $P := \operatorname{Proj} A$. Sea $Y := P \setminus U$ el cual es un cerrado en P, luego existe un ideal homogéneo $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ tal que $Y = \mathbf{V}_+(\mathfrak{a})$. Ahora los puntos de Z corresponden a primos relevantes $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ que no contienen a $\mathfrak{a}$. Por evitamiento de primos, existe un elemento homogéneo $f \in \mathfrak{a} \cap A_+$ tal que $f \notin \bigcup_{i=1}^r \mathfrak{p}_i$, de modo que $Z \subset \mathbf{D}_+(f) \subseteq U$ y $\mathbf{D}_+(f) = X_f$. □

Teorema 5.64: Sea X un esquema compacto y $\mathscr{L}$ un haz invertible sobre X. Denotemos $S := \Gamma_*(\mathscr{L})$. Son equivalentes:

1. $\mathscr{L}$ es amplio.
2. La familia $\{X_s : s \in S_+ \text{ homogéneo}\}$ es un cubrimiento de X y el morfismo asociado $X \hookrightarrow \operatorname{Proj} S$ es un encaje abierto.
3. La familia $\{X_s : s \in S_+ \text{ homogéneo}\}$ es una base de la topología de X.
4. La familia $\{X_s \text{ afín} : s \in S_+ \text{ homogéneo}\}$ es una base de la topología de X.
5. Para todo haz cuasicoherente $\mathscr{F}$, la suma de las imágenes de los homomorfismos canónicos
$$\Gamma(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{L}^{\otimes -n} \longrightarrow \mathscr{F}$$
da precisamente el módulo $\mathscr{F}$.

5′ Lo mismo que la 5 para $\mathscr{F}$ un haz de ideales.

6. X es cuasiseparado y para todo haz cuasicoherente finitamente generado $\mathscr{F}$, existe $n_0 > 0$ tal que cada $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ para $n \geq n_0$ está globalmente generado.
7. X es cuasiseparado y para todo haz cuasicoherente finitamente generado $\mathscr{F}$, existen enteros $n > 0, \ell \geq 0$ tales que $\mathscr{F}$ es un cociente de $\bigoplus^{\ell} \mathscr{L}^{\otimes -n}$.

7′ Lo mismo que la 7 para $\mathscr{F}$ un haz de ideales.

Demostración: De los lemas anteriores se prueba $1 \iff 2$. En general se siguen $2 \implies 4 \implies 3$, y otra proposición anterior demuestra $3 \implies 1$.

1-4 $\implies$ 5. Sea $\mathscr{F}$ un haz cuasicoherente y sea $s \in S_+$ tal que X_s sea afín. Entonces toda sección $t \in \Gamma(X_s, \mathscr{F})$ se extiende a una sección $t' \otimes s^{-n}$

para algún $t' \in \Gamma(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n})$ pues X es cuasiseparado. Así que t está en alguna imagen como se quería probar.

$5 \implies 5' \implies 4$. Dado un punto $x \in X$, sea U un entorno afín de x y sea $Z := (X \setminus U)_{\text{red}}$. Sea $Z = \mathbf{V}(\mathscr{I})$, donde $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{O}_X$ es un haz cuasicoherente de ideales. Por hipótesis, existe una sección $s \in \Gamma(X, \mathscr{I}\mathscr{L}^{\otimes n})$ que no se anula en x, así que pensándola como una sección de $\mathscr{L}^{\otimes n}$, vemos que s se anula en Z, de modo que $X_s \subseteq U$ y, por lo tanto, es afín.

1-$5' \implies 6$. Por 2., vemos que existen $s_i \in S_{d_i}$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^r X_{s_i}$. Sea $d := d_1 \cdots d_r$, entonces $\mathscr{L}^{\otimes d}$ está globalmente generado por $s_1^{d/d_1}, \dots, s_r^{d/d_r}$. En consecuente, si $\mathscr{L}^{\otimes j}$ está globalmente generado, entonces $\mathscr{L}^{\otimes(j+dn)}$ también para todo $n \geq 0$. Así repitiendo el proceso es fácil encontrar un n suficientemente grande tal que $\mathscr{L}^{\otimes(j+dn)}$ esté globalmente generado para todo $0 \leq j < d$ y, por tanto, un n_0 como en el enunciado.

Sea $\mathscr{F}$ un haz cuasicoherente finitamente generado sobre X y sea $\mathscr{F}_n$ la imagen del homomorfismo del inciso 5, de modo que $\mathscr{F} = \sum_{n \geq 0} \mathscr{F}_n$. Como $\mathscr{F}$ está finitamente generado, existe N tal que $\mathscr{F} = \sum_{n=1}^N \mathscr{F}_n$ y, por tanto, $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ está globalmente generado para $n \geq N + n_0(\mathscr{L})$, pues cada $\mathscr{F}_n \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ lo está.

$6 \implies 7$. Como algún $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ está globalmente generado, entonces el homomorfismo canónico

$$\Gamma(X, \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}^{\otimes n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{L}^{\otimes -n} \longrightarrow \mathscr{F}$$

es un epimorfismo para algún $n \geq 1$. Sea I la familia de subconjuntos finitos de $\Gamma(X, \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}^{\otimes n})$ y, dado $i = \{s_1, \dots, s_{t(i)}\} \in I$, definamos el homomorfismo

$$\psi_i \colon \bigoplus^{t(i)} \mathscr{L}^{\otimes -n} \longrightarrow \mathscr{F},$$

el cual en la j-ésima coordenada corresponde a multiplicar por s_j. Sea $\mathscr{F}_i := \operatorname{Img}(\psi_i)$. El que el homomorfismo canónico sea un epimorfismo se traduce en que $\mathscr{F} = \varinjlim_{i \in I} \mathscr{F}_i$ y, por tanto, $\mathscr{F} = \mathscr{F}_i$ para algún i, que es precisamente el enunciado de la condición 7.

$7 \implies 7' \implies 5'$. Sea $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{O}_X$ un haz cuasicoherente de ideales. Entonces, como X es cuasiseparado, entonces $\mathscr{I} = \varinjlim_\alpha \mathscr{J}_\alpha$, donde cada $\mathscr{J}_\alpha$ es cuasicoherente finitamente generado y, como cada $\mathscr{J}_\alpha$ es un cociente de $\bigoplus^\ell \mathscr{L}^{\otimes -n}$, entonces lo mismo se dice de $\mathscr{I}$. □

La equivalencia 6. suele ser la definición estándar de «haz amplio» (e.g., Hartshorne [**8**, pág. 153]). El teorema 5.55 de Serre ahora se traduce en que todo haz muy amplio es amplio.

Corolario 5.64.1: Sea X un esquema compacto y sea $\mathscr{L}$ un haz invertible. Son equivalentes:

1. $\mathscr{L}$ es amplio.
2. $\mathscr{L}^{\otimes n}$ es amplio para algún $n > 0$.
3. $\mathscr{L}^{\otimes n}$ es amplio para todo $n > 0$.

Teorema 5.65: Sea X un esquema compacto y cuasiseparado, $\mathscr{L}$ un haz invertible sobre X, y sea $f\colon X \to \operatorname{Spec} A$ un morfismo de tipo finito. Son equivalentes:

1. $\mathscr{L}$ es amplio.
2. Existe $m \geq 1$ tal que $\mathscr{L}^{\otimes m}$ es muy amplio (respecto a f).
3. Para todo haz invertible $\mathscr{M}$ se cumple que $\mathscr{L}^{\otimes n} \otimes \mathscr{M}$ es f-muy amplio para n suficientemente grande.

DEMOSTRACIÓN: $2 \implies 3$. Si $\mathscr{L}$ es f-muy amplio, entonces es amplio y, por la equivalencia 6 del teorema 5.64, tenemos que $\mathscr{L}^{\otimes n} \otimes \mathscr{M}$ está globalmente generado, luego se sigue de la proposición 5.58.

$3 \implies 1$. Tómese $\mathscr{M} = \mathscr{O}_X$ y sea n tal que $\mathscr{L}^{\otimes n}$ es f-muy amplio, entonces es amplio y, por el corolario anterior, $\mathscr{L}$ es amplio.

$1 \implies 2$. Procedemos por pasos:

(I) Para todo punto $x \in X$ existe un n natural y una sección $s \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n})$ tal que X_s es un entorno afín de x. Esto se sigue de la equivalencia 4 del teorema 5.64.

(II) Como X es compacto, existen finitas secciones $s_i \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n})$, para un único n suficientemente grande, tales que $\{X_{s_i}\}_i$ forman un cubrimiento por abiertos afines de X. Sea $\Gamma(X_{s_i}, \mathscr{O}_X) = A[\{f_{ij}\}_j]$, donde los f_{ij}'s son finitos. Por la proposición 5.50 existe un r suficientemente grande tal que cada $f_{ij} \otimes s_i^r \in \Gamma(X_{s_i}, \mathscr{L}^{\otimes nr})$ se extiende a una sección global $t_{ij} \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes nr})$.

(III) Las secciones globales $\{s_i^r, t_{ij}\}_{i,j}$ generan $\mathscr{L}^{\otimes nr}$. Sea

$$\pi\colon X \to \operatorname{Proj}(A[\{S_i, T_{ij}\}_{i,j}]) =: Y$$

el morfismo de esquemas definido por el homomorfismo de anillos que identifica cada $S_i \mapsto s_i$ y cada $T_{ij} \mapsto t_{ij}$. Sea $U_i := \mathbf{D}_+(S_i) \subseteq Y$, entonces vemos que $\pi^{-1}[U_i] = X_{s_i}$ y cada $\mathscr{O}_X(U_i) \to \mathscr{O}_X(X_{s_i})$ es suprayectivo, pues $T_{ij}/S_i \mapsto f_{ij}$. De éste modo, vemos que π determina un encaje cerrado desde X hasta $U := \bigcup_i U_i$, por lo que π es un encaje y muestra que $\mathscr{L}^{\otimes nr}$ es muy amplio respecto a f. □

§5.2.2 El grupo de Picard.

Proposición 5.66: Sea X un esquema localmente noetheriano. Entonces:

1. Si $\mathscr{F}$ es localmente libre de rango n, entonces:
$$\mathscr{F}^{\wedge} := \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X)$$
es localmente libre de rango n.

2. En particular, si $\mathscr{L}$ es un haz invertible, también lo es $\mathscr{L}^{\wedge}$. Más aún, en éste caso $\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}^{\wedge} \simeq \mathscr{O}_X$.

Definición 5.67: Sea X un esquema localmente noetheriano. Entonces, los haces invertibles (salvo $\mathscr{O}_X$-isomorfismo) junto con el producto tensorial forman un grupo abeliano, llamado el ***grupo de Picard*** de X y denotado $\operatorname{Pic} X$.

§5.2.3 Imágenes esquemáticas y aplicaciones racionales.

Definición 5.68: Sea X un esquema. Se dice que un abierto $U \subseteq X$ es ***esquemáticamente denso*** si para todo abierto $V \subseteq X$ el único subesquema cerrado $Z \hookrightarrow V$ tal que $U \cap V \subseteq Z$ es $Z = V$. Un encaje abierto $j \colon Y \hookrightarrow X$ se dice ***esquemáticamente dominante*** si su imagen es un abierto esquemáticamente denso.

Proposición 5.69: Sea X un S-esquema y sea $j \colon U \hookrightarrow X$ un encaje abierto. Son equivalentes:

1. j es esquemáticamente dominante.
2. El homomorfismo $j^\sharp \colon \mathscr{O}_X \to j_*\mathscr{O}_U$ es inyectivo.
3. Para todo abierto $V \subseteq X$, todo S-esquema separado Y y todo par de S-morfismos $f, g \colon V \to Y$ tales que $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$, se cumple que $f = g$.

Proposición 5.70: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de esquemas. Entonces existe un único subesquema cerrado $\operatorname{Img} f \subseteq Y$ que satisface lo siguiente:

IE1. El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "\exists!"'] & & Y \\ & \operatorname{Img} f \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

IE2. Si $Z \hookrightarrow Y$ es otro subesquema cerrado tal que f se factoriza por $X \to Z \hookrightarrow Y$, entonces $Z \supseteq \operatorname{Img} f$.

A $\operatorname{Img} f$ le llamamos la ***imagen esquemática*** de f.

Demostración: Sea $\mathcal{F}$ la familia de subesquemas cerrados $Z := \mathbf{V}(\mathscr{I}_Z) \subseteq Y$ (donde $\mathscr{I}_Z$ es un haz cuasicoherente de ideales de $\mathscr{O}_Y$), tales que f se factoriza por $X \to Z \hookrightarrow Y$. Definamos $\mathscr{I}_f := \sum_{Z \in \mathcal{F}} \mathscr{I}_Z$, el cual es un haz cuasicoherente de ideales (prop. 5.17), y sea $\operatorname{Img} f := \mathbf{V}(\mathscr{I}_f)$. Entonces claramente $\operatorname{Img} f$ satisface las condiciones del enunciado. □

Evidentemente la imagen esquemática no siempre tiene el mismo espacio topológico que la imagen conjuntista: basta tomar un abierto en Y que no sea cerrado.

Proposición 5.71: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo compacto. Entonces el núcleo $\mathscr{K} := \ker(f^\sharp)$ de $f^\sharp\colon \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ es un haz cuasicoherente de ideales, $\operatorname{Img} f = \mathbf{V}(\mathscr{K}_f)$ y la imagen esquemática tiene el mismo espacio subyacente que $\overline{f[X]}$.

Demostración: Sea $i\colon Z = \mathbf{V}(\mathscr{I}_Z) \hookrightarrow Y$ un subesquema cerrado. Entonces f se factoriza $X \to Z \hookrightarrow Y$ syss $Z \supseteq f[X]$ y el homomorfismo $f^\sharp\colon \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ se factoriza a través del epimorfismo $i^\sharp\colon \mathscr{O}_Y \to i_*\mathscr{O}_Z$; lo que equivale a que $\mathscr{I}_Z \subseteq \mathscr{K}$.

Así vemos que $\operatorname{Img} f = \mathbf{V}(\mathscr{K})$ syss $\mathscr{K}$ fuese un $\mathscr{O}_Y$-módulo cuasicoherente de ideales. Como $\operatorname{Supp}(\mathscr{O}_Y \setminus \mathscr{K}) = \overline{f[X]}$, la última afirmación se sigue de ésta.

Así que basta ver que $\mathscr{K}$ es cuasicoherente. Como f es compacto, podemos suponer que Y es afín y que $X = \bigcup_{i=1}^r U_i$, donde cada U_i es un abierto afín. Sea $j_i\colon U_i \hookrightarrow X$ la inclusión y apliquemos f_* al monomorfismo $\mathscr{O}_X \hookrightarrow \bigoplus_i (j_i)_*\mathscr{O}_{U_i}$, de modo que obtenemos un monomorfismo:

$$\varphi\colon f_*\mathscr{O}_X \lhook\joinrel\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r}(j_i\circ f)_*\mathscr{O}_{U_i} =: \mathscr{G}.$$

Como cada $j_i \circ f$ es un morfismo entre esquemas afines, vemos que cada $(j_i \circ f)_*\mathscr{O}_{U_i}$ y $\mathscr{G}$ son cuasicoherentes. Finalmente es fácil ver que $\mathscr{K} = \ker\varphi$, por lo que es cuasicoherente. □

Corolario 5.71.1: Sea $i\colon X \hookrightarrow Y$ un encaje compacto. Entonces el morfismo inducido $j\colon X \hookrightarrow \overline{X}$ es un encaje abierto esquemáticamente denso, y la imagen esquemática $\operatorname{Img} i$ se dice la ***clausura esquemática*** de X en Y.

Definición 5.72: Sean X, Y un par de S-esquemas. Una ***aplicación racional*** (sobre S), denotada $f\colon X \dashrightarrow Y$ es una clase de equivalencia de S-morfismos $f_U\colon U \to Y$ definidos sobre abiertos densos de X tales que f_U, f_V son equivalentes si existe un subabierto denso $W \subseteq U \cap V$ tal que $f_U|_W = f_V|_W$.

Proposición 5.73: Sean X, Y un par de S-esquemas irreducibles con puntos genéricos ξ, η resp. Una aplicación racional $f\colon X \dashrightarrow Y$ es dominante syss $f(\xi) = \eta$. En particular, si X, Y son íntegros, $f\colon X \dashrightarrow Y$ es dominante syss viene de un homomorfismo $K(Y) \to K(X)$.

También, trivialmente los S-esquemas íntegros y separados (como objetos) junto a las aplicaciones racionales (como flechas) conforman una categoría, luego admiten una noción de isomorfismo:

Definición 5.74: Sean X, Y un par de S-esquemas. Una aplicación racional $f\colon X \dashrightarrow Y$ se dice ***birracional*** si existe otra aplicación racional $g\colon Y \dashrightarrow X$ tales que $f \circ g = \mathrm{Id}_X$ y $g \circ f = \mathrm{Id}_Y$ (como aplicaciones racionales). De existir una aplicación birracional, se dice que X, Y son ***birracionales***.

Ojo que la cualidad de ser birracionales no significa que los esquemas seann isomorfos, sino que existen dos abiertos densos entre los esquemas que son isomorfos, luego ser birracionales significa «parecerse mucho». Como el cuerpo de funciones racionales está definido sobre abiertos vemos lo siguiente:

Corolario 5.74.1: Un par de S-esquemas íntegros X, Y que son birracionales, son tales que $K(X) \cong K(Y)$ (en Fld).

Podemos también probar el recíproco salvo mejores condiciones:

Teorema 5.75: Sean X, Y un par de S-esquemas íntegros de tipo finito. Un S-morfismo $f\colon X \to Y$ es birracional syss induce un isomorfismo $f^\sharp\colon K(Y) \to K(X)$.

Demostración: $\implies$. Es el corolario anterior.

$\impliedby$. Podemos reducirnos al caso en que $X = \operatorname{Spec} B, Y = \operatorname{Spec} A, S = \operatorname{Spec} C$ sean afines. Así, f induce un homomorfismo de C-álgebras $\varphi\colon A \to B$ que, como f es birracional (y luego dominante), es inyectivo. Como $K(Y) = K(X) =: K$ podemos considerar que $A \subseteq B \subseteq K$ y así, como B es una C-álgebra de tipo finito, está generada por $\beta_1, \dots, \beta_n \in B$ y, como cada $\beta_i \in K = \operatorname{Frac} A$, entonces $\beta_i = a_i/f$ donde $a_i, f \in A$. Luego induce un isomorfismo $A[1/f] \to B[1/f]$, que luego se corresponde a un isomorfismo $X \supseteq \mathbf{D}(\varphi(f)) \to \mathbf{D}(f) \subseteq Y$. □

Ahora es conveniente exigir que Y sea separado sobre S, puesto que, por el teorema 4.43, se cumple que los morfismos se pueden pegar de forma única y coinciden en $W = U \cap V$:

Proposición 5.76: Sean X, Y un par de S-esquemas con Y separado sobre S. Dada una aplicación racional $f\colon X \dashrightarrow Y$, existe un abierto maximal $U \subseteq X$ tal que existe un morfismo $f_U\colon U \to Y$ que se corresponde con f. Dicho U se denomina ***dominio de definición*** de f.

Proposición 5.77: Sea S un esquema localmente noetheriano, y X, Y un par de S-esquemas íntegros, separados y de tipo finito. Sea $f\colon X \dashrightarrow Y$ una aplicación racional dominante. Entonces f está definida en un punto $x \in X$ (i.e., x está en el dominio de definición) syss existe $y \in Y$ tal que el homomorfismo $\mathscr{O}_{Y,y} \to \mathscr{O}_{X,x}$ inducido por $K(Y) \to K(X)$ es un monomorfismo de anillos locales.

Proposición 5.78: Sea A un anillo noetheriano, X, Y un par de A-esquemas íntegros con Y de tipo finito sobre A. Dado un A-monomorfismo $\varphi^\sharp\colon K(Y) \to K(X)$, existe una única aplicación A-racional dominante $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ tal que induce $\varphi^\sharp$.

Demostración: Podemos reducirnos al caso en que $X = \operatorname{Spec} C$ e $Y = \operatorname{Spec} B$ son afines. Luego $\varphi^\sharp$ induce una inclusión $B \hookrightarrow \operatorname{Frac} C$. Si $B = A[\beta_1, \dots, \beta_n]$, entonces vemos $\beta_i = c_i/f$ para algunos $c_i, f \in C$, de modo que induce una inclusión $B \hookrightarrow C[1/f]$ lo que se corresponde a la aplicación C-racional dominante $\mathbf{D}(f) \to X$. □

Proposición 5.79: Sea S un esquema compacto y cuasiseparado, y sea $f\colon X \to S$ un morfismo. Entonces f es proyectivo syss es propio y cuasiproyectivo.

Demostración: $\Longrightarrow$. Es trivial.

$\Longleftarrow$. Si f es cuasiproyectivo, entonces existe un haz invertible f-amplio $\mathscr{L}$. Por tanto, existe m suficientemente grande tal que $\mathscr{L}^{\otimes m}$ sea f-muy amplio e induce un S-morfismo $X \to \mathbb{P}^n_S$ que factoriza a f. Como f es propio, vemos que $X \to \mathbb{P}^n_S$ es un encaje cerrado, por lo que f es proyectivo. □

Teorema 5.80 – *Lema de Chow*: Sea S un esquema compacto y cuasiseparado, y sea X un S-esquema separado de tipo finito con finitas componentes irreducibles (e.g., si S es noetheriano).

Entonces existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, dashed, "\pi"'] \arrow[dr, dashed, "g"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & S \end{tikzcd}$$

donde π es suprayectivo y proyectivo, g es cuasiproyectivo, tal que existe un abierto compacto denso $U \subseteq X$ tal que $V := \pi^{-1}[U] \subseteq X'$ es denso y la restricción $\pi|_V \colon \pi^{-1}[U] \to U$ es un isomorfismo (en consecuencia, π es birracional). Más aún:

1. f es propio syss g es proyectivo.
2. Si X es reducido (resp. irreducible, íntegro), entonces podemos elegir a X' de modo que también sea reducido (resp. irreducible, íntegro).

Demostración:

(i) Sean $\{X_i\}_{i=1}^r$ las componentes irreducibles de X, a las cuales dotamos de la estructura reducida. Para cada i sea $V_i \subseteq X_i$ un abierto compacto no vacío que no corta a ninguna otra componente. Así V_i es abierto en X y lo vemos como subesquema abierto. Como X es $\mathbb{Z}$-cuasiseparado, entonces la inclusión $V_i \hookrightarrow X_i$ es un morfismo compacto. Así la clausura esquemática de V_i en X es un subesquema cerrado con espacio subyacente X_i (proposición 5.71) y, si X es reducido, entonces V_i también y coincide con X_i.

Si para cada X_i existe un S-esquema irreducible X_i' con un morfismo $\pi_i\colon X_i' \to X_i$ que satisface las propiedades del enunciado, entonces $X' := \coprod_i X_i'$ es un S-esquema cuasiproyectivo. Además X' es reducido syss cada X_i' es reducido. El morfismo $\pi\colon X' \to X$ inducido por los π_i es suprayectivo, y el encaje $X_i \hookrightarrow X$ es proyectivo, de modo que la composición $X_i' \to X_i \hookrightarrow X$ es proyectiva y π también. Finalmente elegimos $U := \bigcup_i U_i \cap V_i$.

(II) Así podemos suponer que X es irreducible. Sean $\{S_j\}_j, \{X_\ell\}_{\ell=1}^r$ un par de cubrimientos finitos por abiertos afines de S y X resp., tales que cada $f[X_\ell]$ esté contenido en algún S_{j_ℓ}. Así $f|_{X_\ell}\colon X_\ell \to S_{j_\ell}$ es afín de tipo finito, por lo que, es cuasiproyectivo. Más aún, la inclusión $S_j \hookrightarrow S$ es un morfismo compacto (¿por qué?), luego es cuasiproyectivo. Así cada $f|_{X_\ell}\colon X_\ell \to S$ es cuasiproyectivo y, por tanto, existen S-esquemas proyectivos P_ℓ tales que $f|_{X_\ell}$ se factoriza por un encaje $r_\ell\colon X_\ell \hookrightarrow P_\ell$.

Sea $U := \bigcap_{\ell=1}^r X_\ell \subseteq X$. Como X es irreducible, $j\colon U \hookrightarrow X$ es un abierto denso. Luego las restricciones $r_\ell|_U$ inducen un encaje compacto de S-esquemas

$$r\colon U \longhookrightarrow P_1 \times_S \cdots \times_S P_r =: P,$$

y, por tanto, un encaje compacto $h := (j, r)_S\colon U \hookrightarrow X \times_S P$. Sea $X' := \operatorname{Img} h \subseteq X \times_S P$ la imagen esquemática, la cual se factoriza por un encaje abierto esquemáticamente dominante $U \hookrightarrow X'$ compuesto con un encaje cerrado $i\colon X' \hookrightarrow X \times_S P$. Finalmente definimos π como la composición:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, hook, "i"'] \arrow[rr, bend left, "\pi"] & X \times_S P \arrow[r, two heads, "p_1"'] & X, \end{tikzcd}$$

y definimos $V := \pi^{-1}[U]$.

(III) Como cada P_i es (S-)proyectivo, entonces P es proyectivo. Luego $X \times_S P \twoheadrightarrow X$ es proyectivo, e i es un encaje cerrado, luego es proyectivo; por lo que π es proyectivo.

Por definición, $V = i^{-1}[U \times_S P]$ es la clausura esquemática del subesquema $h[U] \subseteq U \times_S P$. Pero el morfismo $h = (\mathrm{Id}_U, r|_U)_S \colon U \to U \times_S P$ es el gráfico del morfismo separado r, por lo que es un encaje cerrado. Así, h induce un isomorfismo $U \xrightarrow{\sim} V$ cuya inversa es la restricción $\pi|_V \colon V \to U$. También se sigue que V es esquemáticamente denso en X' y, finalmente, $\pi[X']$ contiene a U y es cerrado en X (pues π es proyectivo, luego universalmente cerrado), por lo que π es suprayectivo.

(IV) Si X es reducido, por el paso (I) podemos suponer que X es íntegro y, como U es también reducido, su imagen esquemática por $h \colon U \to X \times_S P$ es reducida, la cual es X'.

(V) Sólo queda probar que X' es S-cuasiproyectivo, para lo que basta ver que

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, hook, "i"'] \arrow[rr, bend left, "\iota"] & X \times_S P \arrow[r, two heads, "p_2"'] & P \end{tikzcd}$$

es un encaje. Denotemos por $q_\ell \colon P \to P_\ell$ la ℓ-ésima proyección y sea $W_\ell := q_\ell^{-1}\big[r_\ell[X_\ell]\big]$, el cual es abierto en P.

Probemos que $\iota[X'] \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{r} W_\ell$: para ello, sean $\{X'_\ell := \pi^{-1}[X_\ell]\}_\ell$ los cuales forman un cubrimiento abierto de X'. Nótese que cada $\iota|_V \circ q_\ell = \pi|_V \circ r_\ell$ y, como V es esquemáticamente denso en X', lo es en X'_ℓ y, como P_ℓ es separado sobre S, concluimos que $\iota|_{X_\ell} \circ q_\ell = \pi|_{X_\ell} \circ r_\ell$. Así cada $X'_\ell \subseteq \iota^{-1}[W_\ell]$, lo que prueba la afirmación.

De este modo, basta probar que cada restricción $\iota_\ell \colon V_\ell := \iota^{-1}[W_\ell] \to W_\ell$ es un encaje. Sea Γ_ℓ el gráfico de la composición $u_\ell \colon W_\ell \to r_\ell[X_\ell] \to X_\ell \hookrightarrow X$, el cual es un subesquema cerrado de $W_\ell \times_S X$ porque X es separado sobre S. Nótese que $(p_1 \circ u_\ell)|_V = p_2|_V$, donde p_1, p_2 son las proyecciones de $W_\ell \times_S X$. Por ello, $\ker(p_1 \circ u_\ell, p_2) = \Gamma_\ell \supseteq V \supseteq V_\ell$, de modo que escribimos ι_ℓ como la composición $V_\ell \hookrightarrow \Gamma_\ell \xrightarrow{\sim} W_\ell$, por lo que i_ℓ es un encaje.

(VI) Finalmente, el inciso 1 se sigue de la proposición anterior. □

El lema de Chow será importante para extender teoremas en el caso proyectivo al caso propio.

6

Propiedades locales

6.1 Dimensión

Recuérdese que la ***dimensión (combinatorial)*** de un espacio topológico X es el n supremo tal que existe una cadena $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n$ de cerrados irreducibles de X. Se sigue de la definición que $\dim \varnothing = -\infty$ (pues es el supremo de un conjunto vacío). Dado un cerrado irreducible $Y \subseteq X$ habíamos definido la ***codimensión (combinatorial)***, denotada $\operatorname{codim}(Y, X) = n$, como el supremo tal que existe una cadena de cerrados irreducibles que comienza en $Y = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n$. Claramente, se sigue que la dimensión de X es el supremo de las codimensiones.

Proposición 6.1: Sea X un espacio topológico. Entonces:

1. Para todo $Y \subseteq X$ se cumple que $\dim Y \leq \dim X$.
2. Si $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$, donde X_i son cerrados en X, entonces $\dim X = \text{máx}_i\{\dim X_i\}$.

Definición 6.2: Sea X un espacio topológico y sea $x \in X$ un punto. Entonces se define la ***dimensión local*** en x como

$$\dim_x X := \text{ínf}\{\dim U : x \in U \text{ abierto}\}.$$

Proposición 6.3: Sea X un espacio topológico.

1. Dado un punto $x \in X$, un entorno U de x y una familia $Y_i \subseteq X$ finita de cerrados tales que $x \in Y_i$ para todo i y $U \subseteq \bigcup_{i=1}^n Y_i$, entonces $\dim_x X = \max_i\{\dim_x Y_i\}$.

2. Se cumple que $\dim X = \sup_{x \in X} \dim_x X$.

3. Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto o un cubrimiento cerrado localmente finito de X, entonces $\dim X = \sup\limits_{i \in I} \dim X_i$.

4. Sea X un espacio T_0 y noetheriano, y sea F el conjunto de puntos cerrados de X, entonces $\dim X = \sup\limits_{x \in F} \dim_x X$.

5. Para todo cerrado irreducible $Y \subseteq X$ se cumple que
$$\dim Y + \operatorname{codim}(Y, X) \leq \dim X.$$

6. Para todo par de cerrados irreducibles $Y \subseteq Z \subseteq X$ se cumple que
$$\operatorname{codim}(Y, Z) + \operatorname{codim}(Z, X) \leq \operatorname{codim}(Y, X).$$

7. Un cerrado irreducible Y tiene codimensión 0 syss es una componente irreducible.

Demostración:

1. De la proposición anterior, para todo $V \subseteq U$ entorno de x se tiene que
$$\dim_x X = \inf_V \max_i\{\dim(Y_i \cap V)\},$$
y para cada Y_i vemos que $\dim_x Y_i = \inf_V \dim(Y_i \cap V)$. Si para algún i tenemos que $\dim_x Y_i = \infty$ es evidente que $\dim_x X = \infty$, así que, si no, tenemos que $\dim_x Y_i$ alcanza un valor finito (mínimo) para cada i, así que existe un entorno $V_0 \subseteq U$ de x tal que $\dim_x Y_i = \dim(Y_i \cap V_0)$ y así para todo $V \subseteq V_0$ tenemos que el valor es el mismo, de lo que se sigue el enunciado.

2. Claramente $\dim_x X \leq \dim X$ para todo punto $x \in X$. Por otro lado, sea $\varnothing \neq F_0 \subset \cdots \subset F_n$ una cadena de irreducibles en X y sea $x \in F_0$; para todo entorno U de x, vemos que $U \cap F_i$ es cerrado en U y $\overline{U \cap F_i} = F_i$ (¿por qué?), así que los $U \cap F_i$'s son cerrados irreducibles en U y tenemos que $\dim U \geq n$.

3. Si el cubrimiento es abierto y $x \in X_i$, entonces $\dim_x X \geq \dim_x X_i$. Si el cubrimiento es cerrado, $x \in X$ y U es un entorno de x que corta a finitos cerrados, entonces

$$\dim_x X \leq \dim U = \max_i \{\dim(U \cap X_i)\} \leq \sup_i \dim X_i.$$

4. Basta notar que si un espacio es T_0, entonces todo cerrado irreducible minimal F corresponde a un punto cerrado.

5-7. Triviales. □

Como ejericio, ¿dónde empleamos que X es noetheriano en el inciso 4?

Corolario 6.3.1: Sea X un espacio topológico T_0 y noetheriano.

1. X tiene $\dim X = 0$ syss es discreto, finito (y no vacío).
2. Un punto $x \in X$ tiene $\dim_x X = 0$ syss está aislado.

Demostración:

1. Todas las componentes irreducibles tienen dimensión 0, luego, como X es T_0 es fácil ver que corresponden a puntos, y como es noetheriano, posee finitas componentes irreducibles, es decir, finitos puntos cerrados, luego abiertos.
2. Basta notar que el punto posee un entorno T_0 y noetheriano de dimensión 0. □

Proposición 6.4: Sea A un anillo, y sea $X := \operatorname{Spec} A$.

1. $\dim X = k.\dim A = k.\dim(A/\mathfrak{N}) = \dim(X_{\text{red}})$.
2. Para todo primo $\mathfrak{p} \lhd A$, se cumple que:

$$k.\dim(A_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{alt}\mathfrak{p} = \operatorname{codim}(\overline{\{x_{\mathfrak{p}}\}}, X), \qquad k.\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim\overline{\{x_{\mathfrak{p}}\}}.$$

3. $\dim X = \sup\{k.\dim(A_{\mathfrak{m}}) : \mathfrak{m} \in \operatorname{mSpec} A\}$.
4. $\dim X = \sup\{k.\dim(A/\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \text{ minimal}\}$.

Antes de seguir vamos a dar un ejemplo relevante de la clase de posibles desastres en la teoría de la dimensión:

Ejemplo. Sea $(A, \mathfrak{m})$ un dominio de valuación discreta y sea $X := \operatorname{Spec} A$. Luego $\dim X = k.\dim A = 1$, y $X = \{\xi, x\}$, donde $\xi = (0)$ y $x = \mathfrak{m}$. Como x corresponde a un ideal maximal, entonces es un punto cerrado del espacio, luego $U := X \setminus \{x\} = \{\xi\}$ es abierto y, además, es denso. Pero $\dim U = 0$ pues es un punto y $\dim X = 1 \neq \dim U$.

Así, por ejemplo, vemos que en general no podemos calcular dimensión en un abierto, realmente es necesario un cubrimiento.

El teorema del ascenso y del descenso de Cohen-Seidenberg tienen la siguiente consecuencia esquemática:

Corolario 6.4.1: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo entero (e.g. finito) de esquemas. Entonces $\dim X = \dim Y$.

Y una traducción directa del teorema A.43:

Teorema 6.5: Sea k un cuerpo y sea X una variedad afín sobre k. Entonces:

1. $\dim X = \operatorname{trdeg}_k K(X) = \operatorname{trdeg}_k K(U) = \dim U$, para cualquier abierto no vacío $U \subseteq X$.
2. Toda cadena maximal de cerrados irreducibles en X tiene la misma longitud.[1]
3. Para todo punto $x \in X$ se tiene que

$$\dim \overline{\{x\}} + \operatorname{codim}(\overline{\{x\}}, X) = \dim X.$$

Ejemplo. Sea k un cuerpo. Entonces:

1. $\mathbb{A}^n_k$ es una variedad afín y $\dim(\mathbb{A}^n_k) = n$.
2. $\dim(\mathbb{P}^n_k) = n$, pues $\mathbb{P}^n_k = \bigcup_{i=0}^n U_i$, donde cada

$$U_i \cong \operatorname{Spec}(A[t_0/t_i, \dots, t_n/t_0]) \cong \mathbb{A}^n_k.$$

3. Sea $X = \operatorname{Spec}(k[x,y]/(y^2 - x^3))$, entonces $\dim X = 1$, pues $k[x,y](y^2 - x^3) = k[x, \sqrt{x^3}]$ es una extensión entera de $k[x]$.

[1] Una cadena de cerrados irreducibles $F_0 \subset F_1 \subset \cdots$ se dice *maximal* si no existe un cerrado irreducible Y tal que $F_j \subset Y \subset F_{j+1}$. Grothendieck y Dieudonné **[EGA IV$_1$]** emplea el adjetivo *saturado*.

Definición 6.6: Se dice que un espacio topológico X es ***equidimensional*** o que tiene ***dimensión pura*** n si todas sus componentes irreducibles tienen dimensión n.

Así, sustituyendo ser un k-esquema *íntegro* por *de dimensión pura*, entonces los resultados del teorema anterior se preservan.

Definición 6.7: Se dice que un espacio topológico X es ***catenario*** si para todo par de cerrados irreducibles $Y \subseteq Z$ se cumple que $\operatorname{codim}(Y, Z) < \infty$ y toda cadena maximal de cerrados irreducibles

$$Y = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = Z$$

tiene igual longitud $n = \operatorname{codim}(Y, Z)$.

Se dice que un esquema X es ***universalmente catenario*** si todo X-esquema de tipo finito es catenario.

Proposición 6.8: Para un espacio topológico X, son equivalentes:

1. X es catenario.
2. X admite un cubrimiento por abiertos catenarios.
3. Para todo par de cerrados irreducibles $Y \subseteq Z$ se cumple que $\operatorname{codim}(Y, Z) < \infty$, y para todo trío de cerrados irreducibles $Y \subseteq Z \subseteq W$ se cumple que
$$\operatorname{codim}(Y, Z) + \operatorname{codim}(Z, W) = \operatorname{codim}(Y, W).$$

DEMOSTRACIÓN: $1 \implies 2$ y $1 \implies 3$ son triviales.

$2 \implies 1$. Basta notar que la función $F \mapsto \overline{F}$ determina una biyección entre los cerrados de un subespacio abierto $U \subseteq X$ y los cerrados de X que cortan a U.

$3 \implies 1$. Fijemos $Y \subseteq Z$ dos cerrados irreducibles en X como extremos. Basta probar que toda cadena con extremos Y, Z tiene igual longitud por inducción sobre la longitud, notando que si hay una cadena maximal de longitud 1, entonces es trivial, y si hay una cadena más larga, la descomponemos en dos para emplear la hipótesis inductiva. □

Corolario 6.8.1: Los espectros de cuerpos son universalmente catenarios y, en consecuencia, todo esquema algebraico sobre un cuerpo k es universalmente catenario.

Demostración: Por el teorema 6.5 se sigue que todo esquema algebraico afín irreducible sobre k es catenario, y claramente todo esquema algebraico admite un cubrimiento por afines irreducibles, luego también es catenario. □

Ojo que ser catenario no implica ser equidimensional. Es claro que un esquema sobre un cuerpo puede constar de varias componentes irreducibles de distinta dimensión. Nagata construyó el primer ejemplo de un anillo noetheriano que no es catenario; en el apéndice hay un ejemplo de un esquema afín que no es catenario.

Proposición 6.9: Sea k un cuerpo y sea X un esquema algebraico sobre k de dimensión pura n. Para toda extensión algebraica L/k se cumple que X_L tiene dimensión pura n.

Definición 6.10: Sea X un espacio topológico. Una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ se dice ***semicontinua superior*** si todo punto $x \in X$ posee un entorno abierto U tal que para todo $z \in U$ se tiene que $f(x) \geq f(z)$. Una función $g\colon X \to \mathbb{R}$ se dice ***semicontinua inferior*** si $-g$ es semicontinua superior.

Proposición 6.11: Sea X un espacio topológico. Si f es semicontinua superior, entonces para todo $x \rightsquigarrow y$ se tiene que $f(x) \leq f(y)$.

La proposición anterior da una idea de cómo pensar la semicontinuidad. Por ejemplo:

Proposición 6.12: Sea X un espacio topológico T_0. La función $x \mapsto \dim_x X$ es semicontinua superior.

Demostración: Si x es tal que $\dim_x X = \infty$ entonces es claro. Si $\dim_x X = d < \infty$, entonces, por definición de dimensión local, existe un entorno $x \in U_0$ tal que $\dim U = d$ para todo U abierto que satisfaga $x \in U \subseteq U_0$. Así pues, para todo $y \in U_0$, vemos que todo entorno $V \subseteq U_0$ satisface $\dim V \leq \dim U_0$, por lo que $\dim_y X \leq d$. □

Nótese que $x \mapsto \operatorname{codim}(\overline{\{x\}}, X)$ no es ni semicontinua superior, ni semicontinua inferior. Si A es un anillo de valuación y $X := \operatorname{Spec} A = \{\eta, s\}$, donde η es genérico, entonces el único entorno de s es X mismo, y $\operatorname{codim}(\overline{\{\eta\}}, X) = 0 < 1 = \operatorname{codim}(\overline{\{s\}}, X)$. No obstante, si $Y := \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ y $\xi \in Y$ es el punto genérico de Y, vemos que $\operatorname{codim}(\overline{\{\xi\}}, Y) = 0$, pero todo entorno de ξ contiene puntos de codimensión 1.

6.2 Esquemas normales

Aquí haremos fuerte uso de definiciones y propiedades de dependencia íntegra, un resumen de los resultados se encuentra en el apéndice §A.4.

Definición 6.13: Un esquema X se dice ***normal*** si para cada punto $x \in X$ se cumple que el anillo local $\mathscr{O}_{X,x}$ es normal. Un esquema X normal de $\dim X \leq 1$ se dice un esquema de Dedekind.

Corolario 6.13.1: Un anillo A es normal syss el esquema $\operatorname{Spec} A$ es normal.

Proposición 6.14: Todo esquema compacto posee puntos cerrados.

Proposición 6.15: Sea X un esquema irreducible. Son equivalentes:

1. X es normal.
2. Para todo abierto $U \subseteq X$, el anillo $\mathscr{O}_X(U)$ es normal.

Si además X es compacto, entonces ambas son equivalente a:

3. Las fibras $\mathscr{O}_{X,x}$ son normales en todos los puntos cerrados.

Demostración: La equivalencia $1 \iff 2$ sale de la definición de anillo normal y es trivial que $1 \implies 3$.

$3 \implies 1$. Sea x un punto arbitrario del esquema. Entonces existe un punto cerrado $y \in \overline{\{x\}}$, y así $\mathscr{O}_{X,y}$ es normal, y como $\mathscr{O}_{X,x}$ es una localización de $\mathscr{O}_{X,y}$, entonces $\mathscr{O}_{X,x}$ también es normal. □

Ejemplo. Sea A un anillo normal (e.g., $A = k$ un cuerpo). Como $A[x_1, \dots, x_n]$ es normal (proposición A.36), entonces $\mathbb{A}^n_A$ y $\mathbb{P}^n_A$ son esquemas normales.

Corolario 6.15.1: Sea X un esquema íntegro noetheriano. Entonces X es de Dedekind syss cada $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ es de Dedekind.

Definición 6.16: Un esquema X se dice ***factorial*** si para cada punto $x \in X$, se cumple que la fibra $\mathscr{O}_{X,x}$ es un DFU.

Proposición 6.17: Se cumple:

1. Todo esquema factorial es normal.
2. Si X es un esquema de Dedekind, entonces todos los anillos locales $\mathscr{O}_{X,x}$ son DIPs.
3. Sea X un esquema irreducible de $\dim X = 1$. Entonces X es de Dedekind syss X es normal.

Teorema 6.18: Sea X un esquema normal localmente noetheriano. Para todo $F \subseteq X$ cerrado de $\operatorname{codim}(F, X) \geq 2$, la restricción

$$\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \longrightarrow \Gamma(X \setminus F, \mathscr{O}_X)$$

es un isomorfismo. Es decir, toda función regular en $X \setminus F$ se extiende a X.

Demostración: Sea $X = \operatorname{Spec} A$ afín. Para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ de $\operatorname{alt} \mathfrak{p} = 1$ se cumple que $\mathfrak{p} \in X \setminus F$, luego concluimos el teorema pues

$$A = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \\ \operatorname{alt} \mathfrak{p} = 1}} A_{\mathfrak{p}}. \qquad \square$$

Proposición 6.19: Sea S un esquema localmente noetheriano, X un S-esquema íntegro normal de tipo finito e Y un S-esquema propio. Sea $f: U \to Y$ un morfismo definido sobre un abierto $\varnothing = U \subseteq X$. Entonces f se extiende de manera única a un morfismo $\overline{f}: V \to Y$, donde V es un abierto de X que contiene a todos los puntos de codimensión 1. Más aún, si X es de Dedekind, podemos exigir $V = X$.

Demostración: La unicidad sale del hecho de que el morfismo estructural $Y \to S$ es separado, y del teorema 4.43. Sea $\xi \in X$ el punto genérico, entonces $\xi \in U$ e induce un morfismo $f_\xi: \operatorname{Spec} k(X) \to Y$. Sea $x \in X$ de codimensión 1, entonces $\mathscr{O}_{X,x}$ es un dominio de valuación discreta con $\operatorname{Frac}(\mathscr{O}_{X,x}) = k(X)$, luego se extiende a $f_x: \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{X,x} \to Y$. Como Y es de tipo finito sobre S, entonces f_x se extiende a $g: U_x \to Y$ para un entorno U_x de x. Sea $W \subseteq Y$ un entorno afín de $g(x)$ y considere las restricciones de f, g a $U' := f^{-1}[W] \cap g^{-1}[W]$. Así, U' es un abierto no vacío pues contiene a ξ. Los homomorfismos de anillos $\mathscr{O}_Y(W) \to \mathscr{O}_X(U')$ inducidos por f, g son idénticos pues coinciden en $k(X) \supseteq U'$, así que $f|_{U'} = g|_{U'}$ (pues el codominio es afín, teorema 3.75), así que coinciden en $U \cap U_x$ (nuevamente, por el teorema 4.43). Así iteramos el proceso para cada punto de codimensión 1 y pegamos en V. $\square$

Lema 6.20: Sea A un dominio de valuación discreta con $K := \operatorname{Frac} A$, y sea k el cuerpo de restos de A. Sea X un A-esquema con $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ una A-álgebra plana para todo abierto afín $U \subseteq X$. Si X_K es normal y X_k es reducido, entonces X es normal.

Demostración: Podemos reducirnos al caso en que $X = \operatorname{Spec} B$ es afín. Por hipótesis, el homomorfismo canónico $B = B \otimes_A A \to B \otimes_A K$ es inyectivo. Sea t un uniformizador de A. Sea $\beta \in \operatorname{Frac} B$ entero sobre B; como $B \otimes_A K$ es normal, existe $b \in B$ y $r \in \mathbb{Z}$ tal que $\beta = bt^{-r}$. Sea $b \notin tB$, probaremos que $r \leq 0$. Como β es entero, sea

$$\beta^n + c_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots + c_1\beta + c_0 = 0, \qquad c_i \in B.$$

Si $r > 0$, multiplicando por t^{rn}, vemos que b es nilpotente en B/tB, así que $b \in tB$ lo que es absurdo. Así que $r \leq 0$ y $\beta \in B$. $\square$

Definición 6.21: Sea X un esquema íntegro. Un morfismo $\pi\colon X' \to X$ se dice una ***normalización*** si X' es normal y todo morfismo $f\colon Y \to X$ dominante con Y normal se factoriza:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\exists!"'] \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r, "\pi"'] & X \end{tikzcd}$$

Lema 6.22: Sea A un dominio íntegro con $K := \operatorname{Frac} A$. Sea $A' := \mathcal{O}_K/A$ la clausura íntegra de A en K, entonces $\pi := (\iota^a)\colon \operatorname{Spec}(A') \to \operatorname{Spec} A$ es la normalización.

Demostración: Sea $f\colon Y \to X$ un morfismo dominante con Y normal, entonces viene de un homomorfismo de anillos $\varphi\colon A \to \mathscr{O}_Y(Y)$, el cual es inyectivo pues f es dominante. Así que se factoriza como $A \longrightarrow A' \xrightarrow{g} \mathscr{O}_Y(Y)$ lo que induce el morfismo de esquemas $g^a\colon Y \to \operatorname{Spec}(A')$. $\square$

Notamos que la normalización descrita por el lema anterior es una aplicación birracional por el teorema 4.89.

Proposición 6.23: Sea X un esquema íntegro. Entonces existe una única normalización $\pi\colon X' \to X$ salvo isomorfismo (de Sch/X). Más aún, $f\colon Y \to$

X es una normalización syss Y es normal y f es un morfismo entero y birracional.

Pista: Basta ir pegando abiertos afínes y empleando la unicidad de la normalización. □

Definición 6.24: Sea X un esquema íntegro y sea $L \supseteq k(X)$ una extensión algebraica de cuerpos. Se le llama una ***normalización*** de X en L a un morfismo $\pi\colon X' \to X$ entero con X' normal y $k(X') = L$ que extiende al morfismo canónico $\operatorname{Spec} L \to X$.

Del mismo modo que se probaba la proposición anterior se prueba:

Proposición 6.25: Sea X un esquema íntegro y sea $L/k(X)$ una extensión algebraica. Entonces existe una única normalización $\pi\colon X' \to X$ de X en L salvo isomorfismo (de Sch/X).

Proposición 6.26: Sea X un esquema noetheriano normal y sea $L/k(X)$ una extensión algebraica separable. La normalización $X' \to X$ de X en L es un morfismo finito y, en consecuencia, $\dim(X') = \dim X$.

Demostración: Ésta es una traducción de la proposición A.42. □

Proposición 6.27: Sea k un cuerpo, sea $A := k[t_1, \dots, t_n]$ el álgebra polinomial, sea $K := \operatorname{Frac} A$ y sea L/K una extensión finita (posiblemente inseparable). Entonces la clausura íntegra de A en L es un A-módulo finitamente generado.

Demostración: Sabemos que L puede verse como $L/L_i/K$, donde L_i/K es una extensión puramente inseparable y L/L_i es separable. Así, por la proposición anterior, podemos reducirnos al caso en que L/K sea puramente inseparable. Supongamos que $\operatorname{car} K =: p > 0$ y sea $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ una K-base de L. Sabemos que existe $q := p^r$ para algún $r > 0$ tal que cada $\alpha_i^q \in K$ (teorema A.15). Fijemos una clausura algebraica[2] $K^{\mathrm{alg}} \supseteq L$, de modo que $L \subseteq k'[\beta_1, \dots, \beta_n]$ donde cada $\beta_i = t_i^{1/q} \in K^{\mathrm{alg}}$, y donde k'/k es la extensión generada por añadir las raíces q-ésimas de los coeficientes de los α_i's. Así $k'[\beta_1, \dots, \beta_n]/A$ es una extensión de anillos entera y finita, luego

[2]Tecnicamente aquí fijamos dos cosas: una clausura algebraica de K y un monomorfismo $K \hookrightarrow K^{\mathrm{alg}}$, y también un K-monomorfismo $L \hookrightarrow K^{\mathrm{alg}}$.

$B \subseteq k'[\beta_1, \dots, \beta_n]$ también es un A-módulo finitamente generado. □

Proposición 6.28: Sea X un esquema algebraico íntegro sobre un cuerpo k, y sea $L/K(X)$ una extensión finita de cuerpos. Entonces la normalización $X' \to X$ de X en L es un morfismo finito, de modo que X' es un esquema algebraico íntegro sobre L.

DEMOSTRACIÓN: Podemos reducirnos al caso de $X = \operatorname{Spec} A$ afín. Sea $k[t_1, \dots, t_n] \hookrightarrow A$ un monomorfismo finito (dado por el teorema de normalización de Noether), luego la clausura íntegra B de A en L es la misma que la de $k[\boldsymbol{t}]$ en L, la cual es finitamente generada como $k[\boldsymbol{t}]$-módulo, por tanto también como A-módulo; así el morfismo $X' \to X$ es finito. □

Proposición 6.29: Sea X un esquema íntegro cuya normalización sea finita. Entonces el conjunto de puntos normales de X es abierto.

DEMOSTRACIÓN: Podemos reducirnos al caso en que $X = \operatorname{Spec} A$ es afín. Ahora la normalización de X es $\operatorname{Spec} B$ con $B := \mathcal{O}_{\operatorname{Frac}(A)/A}$. Sea U el conjunto de puntos normales de X, de modo que $x_{\mathfrak{p}} \in U$ syss $(B/A) \otimes_A A_{\mathfrak{p}} = 0$, luego sea $\mathfrak{a} := \operatorname{Ann}_A(B/A)$. Claramente $\mathbf{D}(\mathfrak{a}) = \operatorname{Spec} A \setminus \mathbf{V}(\mathfrak{a}) \subseteq U$. Recíprocamente, sea $\mathfrak{p} \in U$, entonces como B/A-módulo finitamente generado, existe $a \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $a(B/A) = 0$ (¿por qué?), luego $\mathfrak{p} \notin \mathbf{D}(a)$ y así se tiene igualdad, donde $\mathbf{D}(a)$ es claramente abierto. □

Corolario 6.29.1: Sea X un esquema algebraico íntegro sobre un cuerpo k. Entonces la normalización sí es finita y el conjunto de puntos normales de X es abierto.

DEMOSTRACIÓN: Resulta de aplicar los dos últimos resultados. □

Teorema 6.30 (Krull-Akizuki): Sea X un esquema íntegro noetheriano de $\dim X = 1$, sea $L/K(X)$ una extensión finita de cuerpos y sea $\pi \colon X' \to X$ su normalización en L. Entonces X' es de Dedekind y para todo subesquema cerrado propio $Z \subset X$, la restricción $\pi^{-1}[Z] \to Z$ es un morfismo finito.

DEMOSTRACIÓN: Claramente $\dim(X') = 1$ y X' es normal, luego basta probar que es noetheriano y que la restricción $\pi^{-1}[Z] \to Z$. Ambas propiedades son locales y podemos suponer que X es afín, de lo que se deduce del teorema algebraico de Krull-Akizuki. □

6.3 Esquemas regulares

Definición 6.31: Sea X un esquema y $x \in X$ un punto. Sea $(\mathscr{O}_{X,x}, \mathfrak{m}_x, \Bbbk(x))$ el anillo local en x, entonces el ***espacio tangente de Zariski*** en x es:

$$T_{X,x} := (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\vee = \operatorname{Hom}_{\Bbbk(x)}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, \Bbbk(x)) = \mathfrak{m}_x \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \Bbbk(x).$$

Sea $f \colon X \to Y$ un morfismo entre esquemas. Para todo $x \in X$, el morfismo f induce un homomorfismo de anillos:

$$T_{f,x} \colon T_{X,x} \to T_{Y,y} \otimes_{\Bbbk(y)} \Bbbk(x).$$

Proposición 6.32: Si X es un esquema localmente noetheriano, entonces para todo punto $x \in X$ se tiene que $\dim_{\Bbbk(x)} T_{X,x} \geq k.\dim(\mathscr{O}_{X,x})$.

Demostración: Es una traducción de la proposición A.52. □

Proposición 6.33: Sean $f \colon X \to Y, g \colon Y \to Z$ un par de morfismos entre esquemas y sea $x \in X$. Entonces $T_{f \circ g,x} = T_{f,x} \circ (T_{g,f(x)} \otimes_{\Bbbk(y)} \mathrm{Id}_{\Bbbk(x)})$.

Definición 6.34: Sea X un esquema. Se dice que un punto $x \in X$ es ***regular*** en X si su anillo local $\mathscr{O}_{X,x}$ es regular, vale decir, si $k.\dim(\mathscr{O}_{X,x}) = k.\dim(T_{X,x}) = \dim_{\Bbbk(x)}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)$; de lo contrario se dice que x es ***singular***. Se dice que X es un esquema ***regular*** si todos sus puntos son regulares.

Geométricamente uno piensa que «singular» se traduce o en una variedad con «puntas» o «con cruces»; el segundo tipo es más fácil de ilustrar:

Ejemplo. Sea k un cuerpo y tómese $X = \mathbf{V}(x) \cup \mathbf{V}(y) \subseteq \mathbb{A}^2_k$ la unión de los dos ejes. Este subesquema es afín y $A := \Gamma(X, \mathscr{O}_X) = k[x,y]/(xy)$; aquí denotaremos por u la imagen de x, y por v la imagen de y, los cuales satisfacen $uv = 0 \in A$.

Un punto $P := (a,b) \in k^2$ lo asociamos al primo $\mathfrak{m}_P = (x-a, y-b) \in \mathbb{A}^2_k$; de modo que podemos verificar que X es regular en los puntos de la forma $(a,0),(0,a)$ con $a \in k^\times$ y en los puntos genéricos. El razonamiento es que en la localización $B := A_{(u-a,v)}$, por definición, u es invertible, de modo que $v = (1/u)uv = 0$. Así que $B \cong k[x]_{(x-a)}$ el cual es un dominio de valuación discreta (¿por qué?), luego es regular.[3] Si localizamos $A_{(u)}$ (pues uA es un primo minimal), entonces aquí v es invertible, de modo que $u = uv(1/v) = 0$, por lo que $A_{(u)} = k(v)$, el cual es un cuerpo.

Finalmente, el punto $(0,0)$ correspondiente al ideal (u,v) es singular en X y la razón está en que la localización $B := k[u,v]_{(u,v)}$ satisface que su maximal es $(u,v)B$, luego su espacio tangente de Zariski es

$$T_{X,(0,0)} = \frac{(u,v)B}{(u^2,v^2)B} \cong k\langle 1, \overline{u}, \overline{v}\rangle,$$

donde el símbolo de la derecha significa «el k-espacio vectorial con base $1, \overline{u}, \overline{v}$», donde $\overline{()}$ representa la imagen salvo el cociente. Este k-espacio vectorial tiene dimensión 2, mientras que X tiene dimensión 1.

Proposición 6.35: Sea X un esquema noetheriano.

1. Si X es regular en un punto x y $x' \rightsquigarrow x$ es una generización, entonces x' es regular.

2. En consecuencia, X es regular syss todos sus puntos cerrados son regulares.

3. Si X es regular, entonces todas sus componentes conexas son normales.

DEMOSTRACIÓN: Los primeros dos incisos son una aplicación del teorema de regularidad de Serre, y el tercero es una aplicación del teorema de Auslander-Buchsbaum-Nagata. □

Ahora nos dedicaremos a probar el criterio del jacobiano para probar regularidad:

Definición 6.36: Sea k un cuerpo, sea $Y := \mathbb{A}^n_k = \operatorname{Spec}(k[t_1, \dots, t_n])$ y sea $y \in Y(k)$ un punto racional. Definimos el homomorfismo $D_y\colon k[\boldsymbol{t}] \to \operatorname{Hom}_k(k^n, k) = (k^n)^\vee$ que para un polinomio $f(\boldsymbol{t}) \in k[\boldsymbol{t}]$ actúa como

$$D_y(f)(\boldsymbol{u}) := \sum_{i=1}^n \left.\frac{\partial f}{\partial t_i}\right|_{\boldsymbol{t}=y} u_i,$$

a esta aplicación le llamamos el ***diferencial*** de f en y.

[3]Tecnicamente verificamos regularidad en los puntos k-racionales; el resto de puntos se trabaja análogamente.

Lema 6.37: Sea k un cuerpo. Sea $Y := \mathbb{A}_k^n$, sea $y \in Y(k)$ un punto racional y $\mathfrak{m} := \mathfrak{p}_y$. Entonces:

1. $\mathfrak{m}^2 \subseteq \ker D_y$ de modo que $D_y\colon \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to (k^n)^\vee$ es un isomorfismo.

2. Existe un isomorfismo canónico $T_{Y,y} \cong k^n$.

Proposición 6.38: Sea k un cuerpo. Sea $X = \mathbf{V}(\mathfrak{a})$ un subesquema cerrado de $Y := \mathbb{A}_k^n$, sea $f\colon X \hookrightarrow Y$ el encaje cerrado canónico y sea $x \in X(k)$. La transformación k-lineal $T_{f,x}\colon T_{X,x} \to T_{Y,y}$ induce un isomorfismo de $T_{X,x}$ con $(D_x[\mathfrak{a}])^\perp \subseteq k^n$, así que

$$T_{X,x} \cong \left\{ \boldsymbol{u} \in k^n : \sum_{i=1}^n \left.\frac{\partial f}{\partial t_i}\right|_{\boldsymbol{t}=x} \cdot u_i = 0 \right\}.$$

Teorema 6.39 – *Criterio del jacobiano*: Sea k un cuerpo. Sea $X = \mathbf{V}(\mathfrak{a})$ un subesquema cerrado de $Y := \mathbb{A}_k^n$, sea $f\colon X \hookrightarrow Y$ el encaje cerrado canónico, sea $x \in X(k)$ y sean $f_1, \dots, f_r$ tales que generan $\mathfrak{a}$. Considere la siguiente matriz, denominada el ***jacobiano*** en x:

$$\mathcal{J}_x := \left[\left.\frac{\partial f_i}{\partial t_j}\right|_{\boldsymbol{t}=x} \right] \in \operatorname{Mat}_{r\times n}(k),$$

entonces el punto x es regular en X syss $\operatorname{rang} \mathcal{J}_x = n - k.\dim(\mathscr{O}_{X,x})$.

Teorema 6.40: Sea k un cuerpo. Todo conjunto algebraico geométricamente irreducible sobre k tiene un punto cerrado regular.

Definición 6.41: Sea X un esquema localmente noetheriano. Se denota por $\operatorname{Sing} X$ el conjunto de puntos singulares de X y por $\operatorname{Reg} X$ el conjunto de puntos regulares.

Lema 6.42: Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y sea X un esquema algebraico sobre K. Entonces todo punto regular de X se especializa en algún punto regular y cerrado.

Proposición 6.43: Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y sea X un esquema algebraico sobre K. Entonces $\operatorname{Reg} X$ es un abierto en X.

Los siguientes forman parte de un criterio fundamental de Serre en álgebra conmutativa.

Definición 6.44: Se dice que un esquema X es ***regular en codimensión*** r si para toda localización $\mathscr{O}_{X,x}$ de dimensión $\leq r$ se cumple que $\mathscr{O}_{X,x}$ es regular.

Se dice que un esquema X satisface la propiedad (S_r) si para todo punto $x \in X$ se satisface que

$$(\mathscr{O}_{X,x}) \geq \text{mín}\{\text{codim}(\overline{\{x\}}, X), r\},$$

donde «» denota la profundidad de un anillo local.

La condición S_r podemos leerla como que si $(\mathscr{O}_{X,x}) < s$, entonces también $\text{codim}(\overline{\{x\}}, X) < s$ para todo $s \leq r$. Ambas definiciones son generalizaciones naturales de sus análogos en álgebra conmutativa; por definición un anillo es regular si es regular en codimensión r para todo r, y un anillo es de Cohen-Macaulay si satisface (S_r) para todo r.

Si X es localmente noetheriano, entonces ser regular en codimensión 0 significa que para todo punto genérico $\xi \in X$ el anillo local $\mathscr{O}_{X,\xi}$, que es artiniano, sea regular. Pero es sabido que un anillo local artiniano es regular syss es un cuerpo, por lo que X debe ser reducido en ξ.

Teorema 6.45 (criterio de normalidad de Serre): Sea X un esquema localmente noetheriano. Entonces:

1. X es reducido syss es regular en codimensión 0 (o es genéricamente reducido) y satisface la propiedad (S_1).
2. X es normal syss es regular en codimensión 1 y satisface la propiedad (S_2).

En consecuencia, si X es normal, entonces $\text{codim}(\text{Sing}\, X, X) \geq 2$.

6.4 Morfismos

§6.4.1 Morfismos planos.

Definición 6.46: Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas y sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. Se dice que $\mathscr{F}$ es ***f-plano sobre*** Y en $x \in X$ si el homomorfismo de anillos $f_x^\sharp : \mathscr{O}_{Y,f(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$ induce que $\mathscr{F}_x$ sea un $\mathscr{O}_{Y,f(x)}$-módulo plano. Se dice que $\mathscr{F}$ es ***f-plano sobre*** Y (a secas) si lo es en cada punto.

Se dice que $\mathscr{F}$ es ***plano sobre*** X en el punto x si es Id_X-plano en x, vale decir, si la fibra $\mathscr{F}_x$ es un $\mathscr{O}_{X,x}$-módulo plano. Se dice que el morfismo f es ***plano*** (en $x \in X$) si $\mathscr{O}_X$ es f-plano sobre Y (en x).

Proposición 6.47: Se cumplen:

1. Los encajes abiertos son planos.
2. Los morfismos planos son estables salvo cambio de base.
3. La composición de morfismos planos es plana.
4. El producto fibrado de morfismos planos es plano.
5. Sea $\varphi\colon A \to B$ un homomorfismo de anillos. Entonces $\varphi^a\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ es plano syss φ es plano.
6. Si X es un esquema localmente noetheriano, entonces un haz $\mathscr{F}$ finitamente generado es plano syss es localmente libre.

Lema 6.48: Sea Y un esquema irreducible y sea $f\colon X \to Y$ un morfismo plano. Entonces todo abierto no vacío $U \subseteq X$ domina a Y (i.e., $f[U]$ es denso). Más aún, si X tiene finitas componentes irreducibles, entonces cada componente domina a Y.

Proposición 6.49: Sea Y un esquema con finitas componentes irreducibles y sea $f\colon X \to Y$ un morfismo plano. Si Y es reducido (resp. irreducible, íntegro) y las fibras genéricas son reducidas (resp. irreducibles, íntegras), entonces X es reducido (resp. irreducible, íntegro).

Proposición 6.50: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo plano de tipo finito entre esquemas noetherianos, entonces es abierto.

Demostración: Por el lema 6.48, entonces f es dominante y luego por el teorema 4.64 tiene que satisfacerse que $f[X]$ contiene un abierto denso V en Y. Luego considere el cambio de base $f^{-1}[Y \setminus V] = X \times_Y (Y \setminus V) \to Y \setminus V$ el cual también es plano y de tipo finito entre esquemas noetherianos, por lo que la imagen contiene un abierto $U_1 \subseteq Y \setminus V$ el cual induce un abierto $V_1 \supseteq V$, y así sucesivamente construimos una sucesión de abiertos $V \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots$ (o por complementos, una sucesión descendente de cerrados) de modo que se estabiliza y prueba que $f[X]$ es abierto.

Cambiando X por un abierto U, es claro que U sigue siendo noetheriano y que el morfismo sigue siendo plano de tipo finito, así que se ve que $f[U]$ es abierto. □

Ejemplo. Es fácil comprobar que la proyección canónica $\mathbb{A}_k^{n+m} \to \mathbb{A}_k^n$ con $m \geq 0$ es un morfismo plano; por tanto la proyección es abierta (recuérdese que ya comprobamos que esta proyección no es cerrada en general). Esto coincide con la situación en topología general.

Proposición 6.51: Sea X un esquema reducido e Y un esquema de Dedekind. Un morfismo $f\colon X \to Y$ es plano syss toda componentes irreducible domina a Y.

Corolario 6.51.1: Sea X un esquema íntegro e Y un esquema de Dedekind. Todo morfismo no constante $X \to Y$ es plano.

Teorema 6.52: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de esquemas localmente noetherianos. Sean $x \in X$ e $y := f(x)$, entonces

$$k.\dim(\mathscr{O}_{X_y,x}) \geq k.\dim(\mathscr{O}_{X,x}) - k.\dim(\mathscr{O}_{Y,y}).$$

Más aún, si f es plano, entonces se alcanza igualdad.

Corolario 6.52.1: Sea k un cuerpo y sean X, Y un par de conjuntos algebraicos sobre k con X equidimensional e Y irreducible. Para todo morfismo $f\colon X \to Y$ plano y todo $y \in Y$ se comprueba que la fibra X_y es equidimensional y

$$\dim X_y = \dim X - \dim Y.$$

Si volvemos a tomar el ejemplo de la proyección canónica entre espacios afines podemos notar que trivialmente se cumple el teorema anterior, puesto que las fibras son asímismas espacios afines (de dimensión constante).

Ejemplo. Considere la proyección $\operatorname{Spec}(k[x,y,z]) \to \operatorname{Spec}(k[z]) = \mathbb{A}_k^1$ y precompongamos con el encaje cerrado por el subesquema cerrado $X := \mathbf{V}(x^2+y^2-z^2)$. Denotando $f\colon X \to \mathbb{A}_k^1$ (ver fig. 6.1) notamos que las fibras X_w con $w \neq 0 \in \mathbb{A}_k^1$ (un punto cerrado) son circunferencias y, en particular, tienen $\dim(X_w) = 1$ (formalice esto). Por el contrario, la fibra X_0 solo consta del punto $(0,0,0)$, de modo que tiene $\dim(X_0) = 0$, por lo que el morfismo f no puede ser plano.

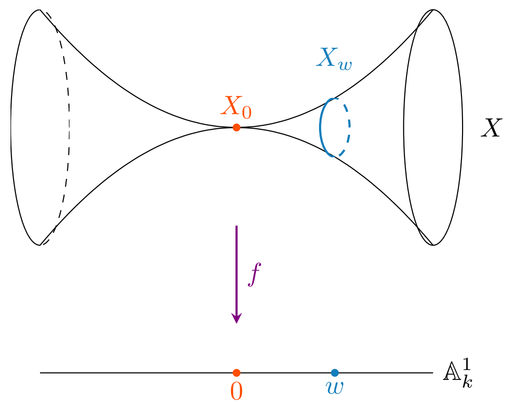

Figura 6.1. Un morfismo que no es plano.

Finalmente, un último resultado que será útil:

Teorema 6.53 (planitud genérica): Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo dominante de tipo finito entre esquemas íntegros noetherianos. Entonces existe un abierto no vacío $U \subseteq Y$ tal que la restricción $f^{-1}[U] \to U$ es un morfismo fielmente plano.

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, por el teorema 4.64 sabemos que $f[X]$ contiene a un abierto denso V, de modo que $f^{-1}[V] \to V$ es sobreyectivo. Restringiéndose a un abierto afín de V y así mismo con $f^{-1}[V]$ podemos suponer que tenemos un morfismo dominante de tipo finito $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ entre espectros de anillos noetherianos. Es decir, $A \subseteq B$ es una extensión de dominios íntegros noetherianos de tipo finito y podemos aplicar la planitud genérica de álgebra conmutativa. □

Como el teorema anterior engloba el caso afín, nos referiremos a éste como «planitud genérica».

Corolario 6.53.1: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo dominante de tipo finito entre esquemas íntegros noetherianos, y sea d la dimensión de la fibra genérica de f. Entonces:

1. Las componentes irreducibles de las fibras no vacías de f tienen dimensión $\geq d$.
2. Existe un abierto denso $U \subseteq Y$ tal que para todo $y \in U$ la fibra X_y tiene dimensión pura d.

DEMOSTRACIÓN: Por planitud genérica se obtiene inmediatamente el inciso 2. Pasando al abierto $U \subseteq Y$ y restringiéndose a $f|_{f^{-1}[U]}$ podemos suponer que tenemos un morfismo plano. Sean $\eta \in X, \xi \in Y$ los puntos genéricos; como f es dominante, sabemos que $f(\eta) = \xi$ y, como $\xi \in U$, por el teorema 6.52 tenemos que $\dim(X_\xi) = \dim X - \dim Y$ y, aplicándo el mismo teorema concluimos el inciso 1. □

§6.4.2 Morfismos étale.

Definición 6.54: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de tipo finito entre esquemas localmente noetherianos. Se dice que f es ***no ramificado*** en $x \in X$ si el homomorfismo de anillos $f_x^\sharp\colon \mathscr{O}_{Y,f(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$ satisface que

$$\mathfrak{m}_{Y,f(x)}\mathscr{O}_{X,x} = \mathfrak{m}_{X,x} \iff \frac{\mathscr{O}_{X,x}}{\mathfrak{m}_{Y,f(x)}\mathscr{O}_{X,x}} \cong \Bbbk(x)$$

y si la extensión finita de cuerpos $\Bbbk(x) \supseteq \Bbbk(y)$ es separable. Se dice que f es ***étale*** en $x \in X$ si es no ramificado y plano en x.

Se dice que f es ***no ramificado*** (resp. ***étale***) si lo es en cada punto.

Ejemplo. Sea L/k una extensión finita de cuerpos. El morfismo $\operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} k$ es no ramificado (o equivalentemente, étale) syss la extensión L/k es separable.

Lema 6.55: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de tipo finito entre esquemas localmente noetherianos. Entonces f es no ramificado syss es cuasifinito, reducido y para cada $y \in Y$ y $x \in X_y$ se cumple que la extensión $\Bbbk(x)/\Bbbk(y)$ es separable.

Proposición 6.56: Se cumplen:

1. Los encajes cerrados entre esquemas localmente noetherianos son no ramificados.
2. Los encajes abiertos entre esquemas localmente noetherianos son étale.
3. Los morfismos no ramificados (resp. étale) son estables salvo composición.
4. Los morfismos no ramificados (resp. étale) son estables salvo cambio de base.

5. Los morfismos no ramificados (resp. étale) son estables salvo productos fibrados.

6. Sean $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ un par de morfismos tales que $f \circ g$ es no ramificado (resp. étale) y g es separado. Entonces f es no ramificado (resp. étale).

Proposición 6.57: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo étale. Sean $x \in X$ e $y := f(x)$, entonces se cumplen:

1. $k.\dim(\mathscr{O}_{X,x}) = k.\dim(\mathscr{O}_{Y,y})$.

2. El morfismo tangente $T_{f,x}\colon T_{X,x} \to T_{Y,y} \otimes_{\Bbbk(x)} \Bbbk(x)$ es un isomorfismo.

Corolario 6.57.1: Sea Y un esquema localmente noetheriano, y sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de tipo finito que es étale en $x \in X$. Entonces X es regular en x syss Y es regular en $f(x)$.

Proposición 6.58: Sea Y un esquema localmente noetheriano, $f\colon X \to Y$ un morfismo de tipo finito y $x \in X_y$ un punto tal que $\Bbbk(x) = \Bbbk(y)$. Sea $\widehat{\mathscr{O}}_{Y,y} \to \widehat{\mathscr{O}}_{X,x}$ el homomorfismo entre las compleciones formales. Entonces f es étale en x syss $\widehat{\mathscr{O}}_{Y,y} \to \widehat{\mathscr{O}}_{X,x}$ es un isomorfismo.

§6.4.3 Morfismos suaves.

Definición 6.59: Sea k un cuerpo y X un esquema algebraico sobre k. Se dice que X es ***suave*** en un punto $x \in X$ si $X_{k^{\mathrm{alg}}}$ es regular en todos los puntos de la fibra de x. Decimos que X es ***suave*** (a secas) si es suave en todos sus puntos (si es *geométricamente regular*).

Ejemplo. Sea k un cuerpo. Entonces el espacio afín $\mathbb{A}_k^n$ y el espacio proyectivo $\mathbb{P}_k^n$ son variedades suaves.

Ejemplo 6.60: Sea k un cuerpo de car $k \neq 2$. Y sea $C := \operatorname{Spec}(k[x,y]/(y^2 - f(x)))$, donde $f(x) \in k[x]$ es un polinomio no constante. Entonces, aplicando el criterio del jacobiano, uno puede notar que C es suave (syss $C_{k^{\mathrm{alg}}}$ es regular) syss $f(x)$ no posee raíces repetidas en k^{alg}; lo que equivale a que su discriminante sea no nulo. ⌟

El ejemplo anterior es importante pues reaparecerá en el estudio de curvas elípticas.

Proposición 6.61: Sea k un cuerpo, X un esquema algebraico sobre k y $x \in X$ un punto cerrado. Se cumplen:

1. Si X es suave en x, entonces X es regular en x.
2. Si $\Bbbk(x)/k$ es separable (e.g., si k es perfecto) y X es regular en x, entonces X es suave en x.

Demostración:

1. Sea $x' \in X_{k^{\rm alg}}$ en la fibra de x, de modo que es regular. Por el lema 6.42 tenemos que x' se especializa en un punto $z' \in X_{k^{\rm alg}}$ cerrado y regular; por tanto, sea $z \in X$ la imagen de z'. Entonces z es regular, por la proposición anterior, y es claramente especializa a x, por lo que x es regular (por la proposición 6.35). □

Corolario 6.61.1: Sea X un esquema algebraico sobre un cuerpo k. Se cumplen:

1. El conjunto de puntos suaves de X, denominado ***locus suave***, es abierto.
2. Si X es geométricamente reducido o si X es irreducible y es reducido en el punto genérico, entonces el locus suave es denso.

Demostración: Basta probar la primera, la cual se deduce de leer la proposición anterior como que X es suave en el punto x syss X es regular y geométricamente reducido en x, por lo que el locus suave es la intersección del locus regular con el locus geométricamente reducido, donde ambos son abiertos. □

Definición 6.62: Sea Y un esquema localmente noetheriano y sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de tipo finito. Se dice que f es ***suave*** en un punto $x \in X$ si es plano en x y si la fibra X_y con $y = f(x)$ es un $\Bbbk(y)$-esquema suave en x. Se dice que f es un ***morfismo suave de dimensión relativa*** n si es suave en todo punto de X y si todas las fibras son de dimensión pura n. El conjunto de puntos donde f es suave, se le llama el ***locus suave*** de f.

6.5 Haz de diferenciales de Kähler

Definición 6.63: Sea A un anillo, B una A-álgebra conmutativa y M un B-módulo. Una A-***derivación*** es un homomorfismo de A-módulos $D\colon B \to$

M tal que para todo $u, v \in B$ se satisface la ***regla de Leibniz***:

$$D(u \cdot v) = vD(u) + uD(v).$$

El conjunto de A-derivaciones $D\colon B \to M$ se denota $\operatorname{Der}_A(B, M)$ y es un A-módulo.

Es claro que $\operatorname{Der}_A(B, -)\colon \mathsf{Mod}_B \to \mathsf{Mod}_A$ determina un funtor (si el lector lo prefiere, puede suponer que el codominio es Set) y es un resultado de álgebra conmutativa su representabilidad:

Definición 6.64: Sea B/A una álgebra conmutativa. Se define el ***módulo de diferenciales de Kähler*** como el B-módulo $\Omega^1_{B/A}$ junto con una A-derivación $\mathrm{d}\colon B \to \Omega^1_{B/A}$ tal que para toda A-derivación $D\colon B \to M$ existe un único homomorfismo de B-módulos $\overline{D}\colon \Omega^1_{B/A} \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[dr, "D"'] & \Omega^1_{B/A} \arrow[d, dashed, "\exists!\overline{D}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Claramente una manera de construirlo es construir el B-módulo libre $B^{\oplus B}$ y cocientar por el submódulo generado por la restricción de la regla de Leibniz.

Las propiedades generales del módulo $\Omega_{B/A}$ están contenidas en el apéndice §A.8.

Proposición 6.65: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de esquemas. Existe un único haz cuasicoherente $\mathscr{O}^1_{X/Y}$ sobre X tal que para todo punto $x \in X$, y para todo abierto afín $U \subseteq f^{-1}[V]$ contenido en la preimagen de un abierto afín $V \subseteq Y$ tenemos que

$$\Omega^1_{X/Y}|_U \simeq \widetilde{\Omega^1_{\mathscr{O}_X(U)/\mathscr{O}_Y(V)}}, \qquad (\Omega^1_{X/Y})_x \cong \Omega^1_{\mathscr{O}_{X,x}/\mathscr{O}_{Y,f(x)}}.$$

Éste haz se llama el ***haz de diferenciales relativos de grado 1*** sobre X/Y. Si $Y = \operatorname{Spec} A$ se denota $\Omega^1_{X/A}$ y obviaremos el subíndice «Y» de no haber ambigüedad.

Demostración: Sea $\varphi\colon A \to B$ un homomorfismo de anillos, sea $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ un primo y sea $\mathfrak{p} := \varphi^{-1}[\mathfrak{q}] \in \operatorname{Spec} A$, entonces la proposición A.63 nos da

$$\Omega^1_{B/A} \otimes_B B_{\mathfrak{q}} \cong \Omega^1_{B_{\mathfrak{q}}/A} \cong \Omega^1_{B_{\mathfrak{q}}/A_{\mathfrak{p}}}.$$

Por simplicidad, denotemos $\Omega^1_x := \Omega^1_{\mathscr{O}_{X,x}/\mathscr{O}_{Y,f(x)}}$ para $x \in X$. Dado un abierto afín $V \subseteq Y$ y un abierto afín $U \subseteq f^{-1}[V]$, sea $\omega \in \Omega^1_{\mathscr{O}_X(U)/\mathscr{O}_Y(V)}$ y sea $x \in U$. Denotemos por $\omega|_x$ la imagen de ω en $\Omega^1_{\mathscr{O}_X(U)/\mathscr{O}_Y(V)} \otimes \mathscr{O}_{X,x} \cong \Omega^1_x$.

Ahora, finalmente definimos $\Omega^1_{X/Y}(U)$ como las funciones $s\colon U \to \coprod_{x\in U} \Omega^1_x$ tales que para todo $x \in U$ existe un entorno afín $V_x \subseteq Y$ de $f(x)$, un entorno afín $x \in U_x \subseteq f^{-1}[V_x] \cap U$ y un elemento $\omega \in \Omega^1_{\mathscr{O}_X(U)/\mathscr{O}_Y(V)}$ tal que

$$\forall z \in U_x \quad s(z) = \omega|_z.$$

Con las restricciones triviales es fácil ver que $\Omega^1_{X/Y}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo y también es fácil verificar que $(\Omega^1_{X/Y})_x \cong \Omega^1_x$. Sea $U \subseteq f^{-1}[V]$ un abierto afín con $V \subseteq Y$ abierto afín, entonces tenemos un homomorfismo natural de $\mathscr{O}_X(U)$-módulos $\Omega^1_{\mathscr{O}_X(U)/\mathscr{O}_Y(V)} \to \Omega^1_{X/Y}(U)$ que induce un morfismo de $\mathscr{O}_X|_U$-módulos:

$$\widetilde{\Omega^1_{\mathscr{O}_X(U)/\mathscr{O}_Y(V)}} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y}|_U,$$

el cual es un isomorfismo pues lo es en las fibras. Así pues $\Omega^1_{X/Y}$ satisface todo lo exigido. □

Corolario 6.65.1: Si $f\colon X \to Y$ es un morfismo de tipo finito entre esquemas noetherianos, entonces $\Omega^1_{X/Y}$ es un haz coherente sobre X.

Demostración: Basta aplicar el corolario A.64.1. □

Las propiedades de §A.8 ahora se reescriben como:

Teorema 6.66: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de esquemas. Entonces:

1. (Cambio de base) Para todo Y-esquema W se cumple que

$$\Omega^1_{X_W/Y_W} = \Omega^1_{X_W/W} \simeq p^*\Omega^1_{X/Y},$$

donde $p\colon X_W \to X$ es la proyección canónica.

2. Para todo morfismo de esquemas $Y \to Z$ se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$f^*\Omega^1_{Y/Z} \longrightarrow \Omega^1_{X/Z} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0$$

3. Para todo abierto $U \subseteq X$ tenemos $\Omega^1_{X/Y}|_U \simeq \Omega^1_{U/Y}$. Para todo punto $x \in X$ tenemos $(\Omega^1_{X/Y})_x \cong \Omega^1_{\mathscr{O}_{X,x}/\mathscr{O}_{Y,f(x)}}$.

4. Si $Z \hookrightarrow X$ es un subesquema cerrado dado por $Z = \mathbf{V}(\mathscr{I})$, entonces tenemos la sucesión exacta:

$$\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z \longrightarrow \Omega^1_{Z/Y} \longrightarrow 0$$

Veamos unos ejemplos sobre el cómo calcular el haz de diferenciales relativos:

Ejemplo 6.67: Sea Y un esquema y $X := \mathbb{A}^n_Y$. Si $Y = \operatorname{Spec} A$ fuese afín, entonces por el hecho de que $\Omega^1_{A[x_1,\dots,x_n]/A} = A[x_1,\dots,x_n]^n$ (proposición A.61) implica que, sobre abiertos afines U, tenemos $\Omega^1_{X/Y}|_U \simeq \mathscr{O}^n_X|_U$. Estos isomorfismos son claramente compatibles entre sí de lo que se sigue que $\Omega^1_{X/Y} \simeq \mathscr{O}^n_X$. ⌟

Teorema 6.68: Sea $Y := \operatorname{Spec} A$ un esquema afín y sea $X := \operatorname{Proj}(A[x_0,\dots,x_n]) = \mathbb{P}^n_A$. Entonces existe una sucesión exacta de $\mathscr{O}_X$-módulos:

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow \mathscr{O}_X(-1)^{\oplus(n+1)} \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow 0.$$

Demostración: Sea $B := A[\boldsymbol{x}]$, la cual es una A-álgebra graduada y sea $M := B(-1)^{n+1}$ el B-módulo graduado, donde $B(-1)$ denota un torcimiento (en los grados). Sean $\boldsymbol{e}_0,\dots,\boldsymbol{e}_n$ la base en grado 1 y sea $\varphi\colon M \to B$ el homomorfismo de B-módulos dado por $\boldsymbol{e}_i \mapsto x_i$. Entonces tenemos una sucesión exacta $0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow B$ de B-módulos graduados que induce una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \widetilde{K} \longrightarrow \mathscr{O}_X(-1)^{\oplus(n+1)} \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow 0$$

donde la flecha roja es un epimorfismo pues lo es en grados suficientemente grandes.

Veremos que $\widetilde{K} \simeq \Omega^1_{X/Y}$. Localizando por x_i, vemos que $M[x_i^{-1}] \to B[x_i^{-1}]$ es un epimorfismo de $B[x_i^{-1}]$-módulos libres, de modo que $K[x_i^{-1}]$ es un módulo libre de rango n generado por $\{\boldsymbol{e}_j - \frac{x_j}{x_i}\boldsymbol{e}_i\}_{i\neq j}$. Tomando $U_i :=$

$\mathbf{D}_+(x_i)$, lo anterior se traduce en que $\widetilde{K}|_{U_i}$ es un $\mathscr{O}_X|_{U_i}$-módulo libre generado por secciones globales

$$\left\{\frac{1}{x_i}\boldsymbol{e}_j - \frac{x_j}{x_i^2}\boldsymbol{e}_i\right\}_{i\neq j},$$

(donde el factor $1/x_i$ es para que los elementos tengan grado 0, recordando el torcimiento.)

Recuérdese que $U_i \cong \operatorname{Spec}(A[x_0/x_i, x_1/x_i, \dots, x_n/x_i])$, así que definamos $\varphi_i\colon \Omega^1_{X/Y}|_{U_i} \to \widetilde{K}|_{U_i}$ mediante la regla

$$(\varphi_i)_{U_i}(\mathrm{d}(x_i/x_j)) := \frac{1}{x_i^2}(x_i\boldsymbol{e}_j - x_j\boldsymbol{e}_i),$$

(por el ejemplo anterior, $\Omega^1_{\mathbb{A}^n_A/A}$ es libre y generado por los símbolos $\mathrm{d}(x_i/x_j)$.) Así cada φ_i es un isomorfismo y son compatibles, pues en $U_i \cap U_j = \mathbf{D}_+(x_ix_j)$ para cada ℓ tenemos que $x_\ell/x_i = (x_\ell/x_j)\cdot(x_j/x_i)$ y en $\Omega^1_{X/Y}|_{U_i\cap U_j}$ se tiene

$$\varphi_i\big(\mathrm{d}(x_\ell/x_i)\big) = \mathrm{d}\left(\frac{x_\ell}{x_i}\right) - \frac{x_\ell}{x_j}\mathrm{d}\left(\frac{x_j}{x_i}\right) = \frac{x_j}{x_i}\mathrm{d}\left(\frac{x_\ell}{x_i}\right) = \varphi_j\big(\mathrm{d}(x_\ell/x_i)\big),$$

lo cual verifica que son compatibles. □

Ejemplo. Sea A un anillo, $B := A[x_1,\dots,x_n]$, sea $F \in B$ y $C := B/(F)$. Definiendo $X = \operatorname{Spec} B$, vemos que $Z = \operatorname{Spec} C = \mathbf{V}(F) \hookrightarrow X$. Luego, empleando el ejemplo 6.67 y el inciso 4 de la proposición 6.66 nos dan que

$$\Omega^1_{C/A} \cong \frac{\bigoplus_{i=1}^n C\,\mathrm{d}x_i}{C\,\mathrm{d}F},$$

donde $\mathrm{d}F = \sum_{i=1}^n (\partial F/\partial x_i)\,\mathrm{d}x_i$.

Ejemplo 6.69: Sea k un cuerpo y sea $X := \operatorname{Spec}(k[T,S]/f(T,S)) = \mathbf{V}(f) \subseteq \mathbb{A}^2_k$ una curva afín suave. Denotemos por t, s las imágenes de T, S en $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ y denotemos por $\partial_t F$ la imagen de $\partial F/\partial T \in k[T,S]$ en $\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$ y análogamente con s. Por el ejemplo anterior, sobre el abierto principal $\mathbf{D}(\partial_s F)$, el ejemplo anterior nos da que $\Gamma\big(\mathbf{D}(\partial_s F), \Omega^1_{X/k}\big)$ es libre generado por $\mathrm{d}t/\partial_s F$ y en el otro abierto principal $\Gamma\big(\mathbf{D}(\partial_t F), \Omega^1_{X/k}\big)$ es libre generado por $\mathrm{d}s/\partial_t F$.

Como $\partial_t F\,\mathrm{d}t = -\partial_s F\,\mathrm{d}s$ y como $\mathbf{D}(\partial_s F) \cup \mathbf{D}(\partial_t F) = X$ por el criterio del jacobiano, vemos que $\Gamma(X, \Omega^1_{X/k})$ es libre generado por $\mathrm{d}t/\partial_s F$. ⌟

Definición 6.70: Sea k un cuerpo. Una ***curva elíptica*** sobre k es una curva suave proyectiva E sobre k que es isomorfa a una subvariedad cerrada de $\mathbb{P}^2_k$ dada por una ***ecuación de Weierstrass (larga)***:

$$v^2w + a_1uvw + a_3vw^2 = u^3 + a_2u^2w + a_4uw^2 + a_6w^3, \tag{6.1}$$

con el punto distinguido $o = [0 : 1 : 0]$.

La ecuación de Weierstrass usual sale de cortar con el abierto afín $w = 1$; uno puede memorizar los índices asignandole los «pesos» $u \to 2$ e $v \to 3$, en consecuencia, no hay a_5.

Proposición 6.71: Sea E una curva elíptica sobre un cuerpo k dada por una ecuación de Weierstrass (6.1). Sean $x := u/w, y := v/w \in K(E)$ y

$$\omega := \frac{\mathrm{d}x}{2y + a_1x + a_3} \in \Omega^1_{K(E)/k}.$$

Entonces $\Omega^1_{E/k} = \omega\mathscr{O}_E$.

Demostración: Nótese que $E \subseteq \mathbb{P}^2_k$ es la unión de los abiertos principales $U := \mathbf{D}_+(w) \cap E, V := \mathbf{D}_+(v) \cap E$ cuyos anillo de coordenadas son

$$\Gamma(U, \mathscr{O}_E) = \frac{k[x, y]}{(y^2 + (a_1x + a_3)y - (x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6))},$$
$$\Gamma(V, \mathscr{O}_E) = \frac{k[t, z]}{(z + a_1tz + a_3z^2 - (t^3 + a_2t^2z + a_4tz^2 + a_6z^3))},$$

donde $t := u/v = x/y$ y $z := w/v = 1/y$.

Por el ejemplo 6.69 vemos que $\Omega^1_{U/k}$ es libre y generado por ω, mientras que $\Omega^1_{V/k}$ es libre y generado por

$$\omega' := \frac{\mathrm{d}z}{a_1z - (3t^2 + 2a_2tz + a_4z^2)}.$$

Finalmente, en $\Omega^1_{K(E)/k}$ tenemos que $\mathrm{d}z = -\mathrm{d}y/y^2$, por lo que es fácil comprobar que

$$\omega' = \frac{-\mathrm{d}y}{a_1y - (3x^2 + 2a_2x + a_4)} = \omega. \qquad \square$$

Lema 6.72: Sea k un cuerpo y A una k-álgebra de tipo finito. Sea $x \in (\operatorname{Spec} A)(k)$ un punto k-racional y sea $\mathfrak{m} := \mathfrak{p}_x \in \operatorname{Spec} A$. Entonces el homomorfismo de la segunda sucesión fundamental

$$\delta\colon \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{A/k} \otimes_A \Bbbk(x)$$

es un isomorfismo.

Demostración: Por la segunda sucesión fundamental $\operatorname{coker}\delta = 0$, así que basta ver que $\ker\delta = 0$. Sea $\pi\colon B := k[\boldsymbol{t}] \twoheadrightarrow A$ un k-homomorfismo suprayectivo, y sea $\mathfrak{n} := \pi^{-1}[\mathfrak{m}] \in \operatorname{Spec} B$. Entonces, se tiene el siguiente diagrama con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{a} \arrow[r, dotted] \arrow[d, equal] & \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \arrow[r] \arrow[d, "\delta'"] & \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & 0 \\
\mathfrak{a} \arrow[r, "\gamma"] & \Omega^1_{B/k} \otimes \Bbbk(x) \arrow[r, dotted] & \Omega^1_{A/k} \otimes \Bbbk(x) \arrow[r, dotted] & 0
\end{tikzcd}$$

donde γ es la composición $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \to \Omega^1_{B/k} \otimes_B A$ tensorizado por $\Bbbk(x)$. Una aplicación del lema de la serpiente da que $\ker\delta = \ker(\delta')$, el cual es cero. □

Proposición 6.73: Sea X una variedad algebraica sobre un cuerpo k y sea $x \in X$. Son equivalentes:

1. $\Omega^1_{X,x}$ es libre de rango $\dim_x X$.
2. X es suave en un entorno de x.
3. X es suave en x.

Demostración: $1 \implies 2$. Como X es localmente noetheriano, si $\Omega^1_{X,x}$ es libre de rango $n := \dim_x X$ en x, entonces es libre de rango n en un entorno U de x (prop. 5.46). Podemos suponer que U es conexo y que tiene $\dim U = n$. Sea $V := U_{k^{\mathrm{alg}}}$, el cual tiene $\dim V = n$ (prop. 6.9). Aplicando cambio de base, vemos que $\Omega^1_{V/k^{\mathrm{alg}}}$ también es libre de rango n y, por el lema anterior, para todo punto cerrado $y \in V^0$ tenemos que

$$\dim_{\Bbbk(y)}(T_{V,y}) = \dim_{\Bbbk(y)}\left(\Omega^1_{V,y} \otimes \Bbbk(y)\right) = n,$$

de modo que V es suave en todos los puntos y tales que $\dim_y V = n$.

Veamos U es irreducible. En efecto, de lo contrario habrían dos componentes irreducibles que se cortan en un punto cerrado $x_0 \in U^0$ de $\dim_{x_0}(U)$. Pero hemos visto que tal punto sería suave, luego íntegro. Por lo tanto, U es irreducible y V tiene dimensión n en todos los puntos cerrados, de modo que U es suave.

$2 \implies 3$. Trivial.
$3 \implies 1$. Sea $x' \in X_{k^{\text{alg}}}$ en la fibra de x. ... □

La proposición anterior da una demostración (muchísimo más sencilla) de que el conjunto de puntos regulares es abierto.

Corolario 6.73.1: Sea $f\colon X \to S$ un morfismo de tipo finito entre esquemas localmente noetherianos. Entonces f es no ramificado sobre un punto $x \in X$ syss $\Omega^1_{X/S,x} = 0$.

Lema 6.74: Sea $X \to S$ un morfismo de tipo finito entre esquemas localmente noetherianos. Sean $s \in S, x \in X_s$ y defínase

$$d := \dim_{\Bbbk(x)} \big(\Omega^1_{X_s/\Bbbk(s),x} \otimes_{\mathscr{O}_{X_s,x}} \Bbbk(x)\big).$$

Entonces en un entorno de x existe un encaje cerrado $X \hookrightarrow Z$ donde Z es un S-esquema suave en x tal que $\dim_x(Z_s) = d$ y tal que $\Omega^1_{Z/S,x}$ es un $\mathscr{O}_{Z,x}$-módulo libre de rango d.

Proposición 6.75: Sea S un esquema localmente noetheriano y $f\colon X \to S$ un morfismo de tipo finito. Se cumplen:

1. Si f es suave en x, entonces existe un entorno $x \in U$ tal que $\Omega^1_{X/S}|_U$ es libre de rango $\dim_x(X_s)$, donde $s := f(x)$.
2. Si f es plano y las fibras son de dimensión pura n. Entonces f es suave syss $\Omega^1_{X/S}$ es localmente libre de rango n.

Corolario 6.75.1: Sea S un esquema localmente noetheriano y sea $f\colon X \to Y$ un morfismo entre S-esquemas suaves. Entonces se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow f^*\Omega^1_{Y/S} \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{X/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0$$

Pista: Falta verificar la inyectividad de la flecha α, lo cual se verifica en fibras empleando que todos son haces localmente libres. □

Teorema 6.76: Sea S un esquema localmente noetheriano, regular y conexo, X un esquema irreducible y $f\colon X \to S$ un morfismo de tipo finito. Sea $x \in X$ un punto tal que para $s := f(x)$ tenemos

$$k.\dim \mathscr{O}_{X,x} = k.\dim \mathscr{O}_{X_s,x} + k.\dim \mathscr{O}_{S,s}. \tag{6.2}$$

Entonces f es suave en x syss $\Omega^1_{X/S,x}$ es un $\mathscr{O}_{X,x}$-módulo libre de rango $\dim_x(X_s)$.

Corolario 6.76.1: Sea X un esquema algebraico sobre un cuerpo k. Entonces X es suave syss $\Omega^1_{X/k}$ es localmente libre y para todo punto genérico $\xi \in X$ se satisface que la extensión $\Bbbk(\xi)/k$ es separable. En particular, si k es perfecto, entonces X es suave syss $\Omega^1_{X/k}$ es localmente libre.

Demostración: Por evitamiento de primos podemos restringirnos a un abierto irreducible y así suponer que X es irreducible con punto genérico ξ. Nótese que X siempre posee al menos un punto regular, luego sus generizaciones son regulares y, en particular, ξ es regular en X, de modo que la extensión $\Bbbk(\xi)/k$ es separable syss X es suave en ξ. Como $\Omega^1_{X/k}$ es localmente libre, tenemos que $\Omega^1_{X/k,\xi} = \Omega^1_{\Bbbk(x)/k} \cong \Bbbk(x)^n$ y, como es suave, de hecho $n = \operatorname{trdeg}_k\big(\Bbbk(x)\big) = \dim X$. Así concluimos que $\Omega^1_{X/k}$ es localmente libre de rango $\dim X$ y, por el teorema anterior, estamos listos. □

Proposición 6.77: Sea S un esquema localmente noetheriano y sea $f\colon X \to Y$ un morfismo entre S-esquemas de tipo finito.

1. Si f es étale en un punto $x \in X$, entonces el homomorfismo canónico
$$\varphi\colon (f^*\Omega_{Y/S})_x \longrightarrow (\Omega^1_{X/S})_x \tag{6.3}$$
es un isomorfismo.

2. Si X (resp. Y) es suave sobre S en x (resp. $f(x)$) y el homomorfismo canónico (6.3) es un isomorfismo, entonces f es étale en x.

Corolario 6.77.1: Sea S un esquema localmente noetheriano y $f\colon X \to S$ un morfismo suave en $x \in X$. Existe un entorno U de x tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & \mathbb{A}^n_S \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

donde g es étale en x.

Demostración: Restringiéndose a un abierto de S (y recordando que la suavidad es local), podemos suponer que $S = \operatorname{Spec} A$ es afín. Sea $\mathrm{d}f_1, \dots, \mathrm{d}f_n \in \Omega^1_{X,x}$ una $\mathscr{O}_{X,x}$-base; restringiéndose a un abierto U de X podemos suponer que cada f_i es regular en U; por lo que determinan un A-homomorfismo:

$$\mathrm{ev}_{f_1,\dots,f_n} \colon A[t_1, \dots, t_n] \longrightarrow \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$$

que manda cada $t_j \mapsto f_j$. Por adjunción esto determina un S-morfismo $g \colon U \to \mathbb{A}^n_S =: Y$, veamos que es étale en x. Nótese que induce el homomorfismo sobre haces

$$g^*\Omega^1_{Y/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/S}$$

que manda $\mathrm{d}t_j \mapsto \mathrm{d}f_j$, de modo que en la fibra de x determina un epimorfismo $(g^*\Omega^1_{Y/S})_x \to (\Omega^1_{X/S})_x$. Finalmente, como ambos son localmente libres, en realidad determina un isomorfismo y concluimos por la proposición anterior. □

Definición 6.78: Sea X un esquema. Un ***engrosamiento***[4] de X es un subesquema cerrado $Z \hookrightarrow X$ tal que comparten el mismo espacio topológico. En otras palabras, es un subesquema cerrado $Z = \mathbf{V}(\mathscr{I})$, donde $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{O}_X$ es un haz de ideales tal que para todo punto $x \in X$, el ideal $\mathscr{I}_x \trianglelefteq \mathscr{O}_{X,x}$ es nilpotente.

Ojo que un engrosamiento no es lo mismo que un $\mathbf{V}_X(\mathscr{I})$, donde $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{O}_X$ es nilpotente. La razón es que en cada punto la potencia que anule a la fibra $\mathscr{I}_x$ puede crecer. Si X fuese noetheriano, entonces el haz de ideales $\mathscr{I}$ sí sería nilpotente.

Proposición 6.79: Sea S un esquema localmente noetheriano y $f \colon X \to S$ un morfismo suave (resp. étale, no ramificado). Para todo S-esquema Y y todo S-engrosamiento $i \colon Y' \hookrightarrow Y$, la función canónica

$$\operatorname{Hom}_S(Y, X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(Y', X), \qquad f \mapsto i \circ f$$

es sobreyectiva (resp. biyectiva, inyectiva).

La proposición anterior nos dice, en lenguaje de Görtz y Wedhorn **[0,** págs. 36-40], que un morfismo suave (resp. étale, no ramificado) es lo mismo que un morfismo *formalmente* suave (resp. formalmente étale, formalmente no ramificado) de tipo finito.

[4] Eng. *thickening*. El término es original de **[Stacks],** Tag 04EX.

§6.5.1 Intersección completa local. Recuérdese que dado un A-módulo M decimos que $a \in A$ es ***M-regular*** si la a-torsión $M[a] = 0$. Decimos que una sucesión $(a_1, \dots, a_n)$ es ***débilmente M-regular*** si a_1 es M-regular y cada a_r es $M/(a_1, \dots, a_{r-1})M$-regular.

Esta definición de álgebra conmutativa es dependiente del orden en general, pero si $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local noetheriano, M es finitamente generado y cada $a_i \in \mathfrak{m}$, entonces es independiente del orden.

Definición 6.80: Sea Y un esquema localmente noetheriano y $f\colon X \to Y$ un encaje. Se dice que f es un ***encaje regular*** (resp. ***encaje regular de codimensión*** n) en un punto $x \in X$ si $\ker(\mathscr{O}_{Y,f(x)} \to \mathscr{O}_{X,x})$ es un $\mathscr{O}_{Y,f(x)}$-módulo generado por una sucesión regular (resp. sucesión regular de n elementos). Se dice que f es un ***encaje regular*** (resp. ***encaje regular de codimensión*** r) si lo es en cada punto de X.

Lema 6.81: Sea A un anillo y $\mathfrak{a} \lhd A$. Si $\mathfrak{a}$ está generado por una sucesión (débilmente) $\mathfrak{a}$-regular $a_1, \dots, a_n$, entonces $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ es un $A/\mathfrak{a}$-módulo libre con base $a_1, \dots, a_n \mod \mathfrak{a}$.

DEMOSTRACIÓN: del Dados $u_1, \dots, u_n \in A$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_i \in \mathfrak{a}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathfrak{a},$$

existen $w_i \in \mathfrak{a}$ tales que $\sum_{i=1}^{n} a_i(u_i - w_i) = 0$ Luego, por el lema A.67, concluimos que $u_i \in \mathfrak{a}$, lo que prueba que los $a_i \mod \mathfrak{a}$ conforman una base. □

Definición 6.82: Sea $f\colon X \to Y$ un encaje. Entonces sea $V \subseteq Y$ un subesquema abierto tal que f se factoriza por un encaje cerrado $i\colon X \hookrightarrow\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow V$ y sea $X = \mathbf{V}_V(\mathscr{I})$. El haz $\mathscr{C}_{X/Y} := i^*(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)$ se dice el ***haz conormal de X en Y*** y su dual es $\mathscr{N}_{X/Y} := (\mathscr{C}_{X/Y})^\vee$ el ***haz normal***.

Corolario 6.82.1: Sea $x\colon X \to Y$ un encaje regular (de codimensión r), entonces el haz conormal $\mathscr{C}_{X/Y}$ es localmente libre (de rango r).

DEMOSTRACIÓN: Igual que en la definición sea $V \subseteq Y$ abierto tal que mediante f tenemos que $X = \mathbf{V}_V(\mathscr{I})$. Sea $x \in X$ un punto y sea $y := f(x)$. Entonces $f^*(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_x = \mathscr{I}_y/\mathscr{I}_y^2$ y $\ker(\mathscr{O}_{Y,y} \twoheadrightarrow \mathscr{O}_{X,x}) = \mathscr{I}_y$. El lema anterior ahora dice que $f^*(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_x$ es libre (de rango n si f es de codimensión n) sobre $\mathscr{O}_{X,x}$. □

Proposición 6.83: Sean X, Y, W, Z un conjunto de esquemas localmente noetherianos. Se cumplen:

1. Sean $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ encajes regulares (de codimensión n, m resp.). Entonces $f \circ g$ es un encaje regular (de codimensión $n+m$) y tenemos la sucesión exacta
$$0 \longrightarrow f^*\mathscr{C}_{Y/Z} \longrightarrow \mathscr{C}_{X/Z} \longrightarrow \mathscr{C}_{X/Y} \longrightarrow 0. \tag{6.4}$$
2. Sea $i\colon X \hookrightarrow Y$ un encaje cerrado y regular de codimensión n. Entonces para toda componente irreducible Y' de Y que corta a X tenemos que $\operatorname{codim}(X \cap Y', Y') = n$. Más aún, $k.\dim(\mathscr{O}_{X,x}) = k.\dim(\mathscr{O}_{Y,x}) - n$.
3. Sea $f\colon X \to Y$ un encaje regular. Para todo Y-esquema W el homomorfismo canónico $p^*\mathscr{C}_{X/Y} \twoheadrightarrow \mathscr{C}_{X_W/W}$ es un epimorfismo, donde $p\colon X \times_Y W \to X$ es la proyección.
4. Sea $f\colon X \to Y$ un encaje regular (de codimensión n). Entonces para todo Y-esquema plano W el cambio de base $f_W\colon X_W \to W$ es un encaje regular (de codimensión n) y el homomorfismo canónico $p^*\mathscr{C}_{X/Y} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_{X_W/W}$ es un isomorfismo.

Demostración:

1. Lo único no trivial es probar la exactitud de (6.4). Inmediatamente tenemos una sucesión exacta
$$f^*\mathscr{C}_{Y/Z} \longrightarrow \mathscr{C}_{X/Z} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{C}_{X/Y} \longrightarrow 0.$$
Los haces en la sucesión son coherentes y localmente libres, de modo que $\ker\alpha$ es plano (se puede verificar en abiertos afines, donde se reduce a un problema de álgebra) y coherente, por tanto es localmente libre. Luego el homomorfismo de haces abelianos $f^*\mathscr{C}_{Y/Z} \twoheadrightarrow \ker\alpha$ es un epimorfismo y, las fibras de ambos tienen el mismo rango en las fibras, de modo que debe ser un isomorfismo (¿por qué?).
2. Pasando a un abierto denso podemos suponer que $Y = \operatorname{Spec} A$ es afín con A noetheriano local de punto cerrado y. Por hipótesis $\mathscr{I}_y$ tiene

una base (como $\mathscr{O}_{Y,y}$-módulo) $a_1, \dots, a_n$ y, por una inducción sencilla, basta reducirnos al caso de $n = 1$ (i.e., $X = \mathbf{V}(a)$). Sea $\mathfrak{p}$ el primo minimal de A tal que $\overline{\{x_\mathfrak{p}\}} = Y'$ y sea $b := a \mod \mathfrak{p} \in A/\mathfrak{p}$. Entonces $b \neq 0$ (¿por qué?) y $\dim(X \cap Y') = \dim(Y') - 1$ por el teorema de ideales principales de Krull. Finalmente $\dim X = \dim Y - 1$.

3. Ejercicio.

4. El que $f_W : X_W \to W$ sea un encaje regular viene del lema 6.81. El que $p^*\mathscr{C}_{X/Y} \to \mathscr{C}_{X_W/W}$ sea un isomorfismo se sigue de que es un epimorfismo entre haces localmente libres del mismo rango sobre X. □

Proposición 6.84: Sea S un esquema localmente noetheriano. Sean X, Y esquemas suaves sobre S. Todo encaje $f : X \to Y$ de S-esquemas es un encaje regular y tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}_{X/Y} \longrightarrow f^*\Omega^1_{Y/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \longrightarrow 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $x \in X, y := f(x)$ y s la imagen de y (y luego de x) en S bajo el morfismo estructural. Por inducción sobre $e := \dim_y(Y_s) - \dim_x(X_s)$ probaremos que f es regular de codimensión e en x. Si $e = 0$, entonces f es un isomorfismo por la proposición **??**. Si $e \geq 1$, entonces existe $f_1 \in \mathscr{I}_y \setminus \{0\}$ tal que $Z := \mathbf{V}_Y(f_1)$ es un entorno de y suave sobre S en x. Así, la inclusión canónica $Z \hookrightarrow Y$ es un encaje regular en x y $\dim_y(Z_s) - \dim_x(X_s) = e - 1$, por lo que concluimos por hipótesis inductiva y por el inciso 1 de la proposición anterior.

Hacer demostración, LIU [**9,** pág. 222].

Para la sucesión exacta, en primer lugar cambiando Y por un subesquema abierto podemos suponer que $f : X \hookrightarrow Y$ es un encaje cerrado. Luego aplicando el inciso 4 del teorema 6.66 construimos la siguiente sucesión exacta:

$$\mathscr{C}_{X/Y} = \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \xrightarrow{\delta} f^*\Omega^1_{Y/S} = \Omega^1_{Y/S} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \longrightarrow 0,$$

así que solo queda verificar que δ es un monomorfismo. Ahora bien, los términos de la sucesión son localmente libres y, por el corolario 6.82.1 vemos que

$$\operatorname{rang}(f^*\Omega^1_{Y/S})_x - \operatorname{rang}(\Omega^1_{X/S})_x = \dim_y(Y_s) - \dim_x(X_s) = e = \operatorname{rang}(\mathscr{C}_{X/Y})_s.$$

Y así δ establece un epimorfismo con su imagen, y como tienen el mismo rango, ha de ser un isomorfismo, por lo que δ es un monomorfismo. □

Corolario 6.84.1: Sea Y un esquema localmente noetheriano y sea $f\colon X \to Y$ un morfismo suave y separado. Entonces toda sección $\pi\colon Y \to X$ (tal que $\pi \circ f = \mathrm{Id}_Y$) es un encaje cerrado regular y tenemos el isomorfismo canónico $\mathscr{C}_{Y/X} \simeq \pi^*\Omega^1_{X/Y}$.

Demostración: Por la proposición 4.41, X es un Y-esquema separado y X, Y son X-esquemas, de modo que

$$Y = X \times_X Y \xhookrightarrow{\pi} X \times_Y Y = X$$

es un encaje cerrado. Luego aplicamos la sucesión exacta de la proposición anterior con $\Omega^1_{Y/Y} = 0$ para concluir el enunciado. □

Definición 6.85: Sea Y un esquema localmente noetheriano y $f\colon X \to Y$ un morfismo de tipo finito. Se dice que f es ***intersección completa local*** (abrev., ***i.c.l.***) en un punto $x \in X$ si existe un entorno U de x y un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "g"] \\ U \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[r, "f|_U"'] & Y \end{tikzcd}$$

donde i es un encaje regular y g es un morfismo suave. Se dice que f es de ***intersección completa local*** (i.c.l.) si lo es en todos los puntos de X.

Proposición 6.86: Se cumplen:

1. Todo encaje regular y todo morfismo suave son i.c.l.
2. La composición de morfismos i.c.l. es i.c.l.
3. Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo i.c.l., y sea W un Y-esquema plano. Entonces $f_W\colon X_W \to W$ es i.c.l.

Demostración:

1. Trivial.
2. Como los encajes regulares y los morfismos suaves son estables salvo composición, basta probar que si $f\colon X \to Y$ es suave y $g\colon Y \to Z$ es un encaje regular, entonces $f \circ g$ es i.c.l. Como f es suave, por el corolario 6.77.1, en un abierto tenemos que f se factoriza por un

encaje cerrado $i\colon X \hookrightarrow \mathbb{A}^n_Y$ y la proyección canónica $\mathbb{A}^n_Y \to Y$. Luego, haciendo cambio de base por $\mathbb{A}^n_Z$ tenemos que $g'\colon \mathbb{A}^n_Y \hookrightarrow \mathbb{A}^n_Z$ es un encaje regular. Por la proposición 6.84 tenemos que i es regular, luego $i \circ g'$ es un encaje regular y claramente la proyección $\mathbb{A}^n_Z \to Z$ es suave.

3. Basta recordar que tanto los encajes regulares como los morfismos suaves son estables salvo cambio de base plano. □

Proposición 6.87: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo i.c.l.

1. Si f es un encaje, entonces es un encaje regular.
2. Si f se descompone en un encaje $i\colon X \hookrightarrow Z$ y un morfismo suave $g\colon Z \to Y$, entonces i es un encaje regular. Más aún, si f es un encaje regular, se induce la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}_{X/Y} \longrightarrow \mathscr{C}_{X/Z} \longrightarrow i^*\Omega^1_{Z/Y} \longrightarrow 0.$$

Demostración:

1. Pasando a un abierto U podemos emplear la descomposición siguiente (cor. 6.77.1):

$$\begin{tikzcd} V := X \times_Z U \arrow[r, hook, "\text{regular}"] \arrow[d, hook] & U \arrow[r, "\text{étale}"] \arrow[d, hook] & \mathbb{A}^n_Y \arrow[d] \\ X \arrow[r, hook, "\text{regular}"'] & Z \arrow[r, "\text{suave}"'] & Y \end{tikzcd}$$

de modo que es fácil ver que se factoriza por un encaje regular $V \hookrightarrow \mathbb{A}^n_Y$ con la proyección $\mathbb{A}^n_Y \to Y$. Luego queda al lector verificar que componer con $\mathbb{A}^Y_n$ da un encaje regular (aplíquese la proposición A.70).

2. Cambiando Z por un subesquema abierto de Y podemos suponer que i es un encaje cerrado. Defínase $X \times_Y Z$. entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\pi"] \arrow[rr, hook, bend left, "i"] \arrow[dr, equal] & W \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & Z \arrow[d, "g"] \\ & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

donde π es la sección de $g_X : Z_X \to X$, el cual es suave y separado por ser cambio de base de un morfismo suave y separado, de modo que es un encaje cerrado regular. Como Z es plano sobre Y, el morfismo f_Z es i.c.l. Luego $\pi \circ f_Z = i$ es i.c.l., y es un encaje, así que el inciso anterior prueba que es un encaje regular.

Si suponemos que f es un encaje regular, entonces por el inciso 1 de la proposición 6.83 tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \pi^* \mathscr{C}_{W/Z} \longrightarrow \mathscr{C}_{X/Z} \longrightarrow \mathscr{C}_{X/W} \longrightarrow 0$$

y por el corolario 6.84.1 tenemos

$$\pi^* \mathscr{C}_{W/Z} \simeq \pi^* p^* \mathscr{C}_{X/Z} \simeq \mathscr{C}_{X/Y},$$
$$\mathscr{C}_{X/W} \simeq \pi^* \Omega^1_{W/X} \simeq \pi^* q^* \Omega^1_{Z/Y} \simeq i^* \Omega^1_{Z/Y},$$

que es precisamente lo que queríamos probar. □

Lema 6.88: Sea S un esquema localmente noetheriano y sea $i : X \hookrightarrow Y$ un encaje de S-esquemas localmente noetherianos y planos. Sea $s \in S$ un punto y $x \in X_s$ en la fibra, si $i_s : X_s \hookrightarrow Y_s$ es un encaje regular en x, entonces i es un encaje regular en x.

Demostración: Podemo ssuponer que i es un encaje cerrado y definir $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{O}_Y$ el haz de ideales tal que $X := \mathbf{V}_Y(\mathscr{I})$. Entonces tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}_x \longrightarrow \mathscr{O}_{Y,x} \longrightarrow \mathscr{O}_{X,x} \longrightarrow 0$$

que, localmente sobre $s \in S$ induce

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}_x \otimes_{\mathscr{O}_{S,s}} \Bbbk(s) = \mathscr{I}_x \mathscr{O}_{Y_s,x} \longrightarrow \mathscr{O}_{Y_s,x} \longrightarrow \mathscr{O}_{X_s,x} \longrightarrow 0.$$

Por hipótesis, existen $a_1, \ldots, a_n \in \mathscr{I}_x$ cuyas imágenes $b_1, \ldots, b_n \in \mathscr{I}_x \mathscr{O}_{Y_s,x}$ forman un sistema generador débilmente $\mathscr{O}_{Y_s,x}$-regular. Es decir

$$\frac{\mathscr{I}_x}{(a_1, \ldots, a_n)} \otimes_{\mathscr{O}_{S,s}} \Bbbk(s) = 0,$$

lo que implica, por el lema de Nakayama, que $\mathscr{I}_x = (a_1, \ldots, a_n)$.

Finalmente, tenemos la situación de un homomorfismo de anillos locales noetherianos $A := \mathscr{O}_{S,s} \to \mathscr{O}_{Y,x} =: B$ con un B-módulo $N := \mathscr{I}_x$ que es A-plano y $M := A$, y concluimos por la proposición A.70. □

Este es un primer ejemplo de «descenso plano».

Corolario 6.88.1: Sea Y un esquema localmente noetheriano y $f\colon X \to Y$ un morfismo plano de tipo finito. Entonces f es i.c.l. syss para todo $y \in Y$ la fibra $f_y\colon X_y \to \operatorname{Spec} \Bbbk(y)$ es i.c.l.

DEMOSTRACIÓN: $\Longleftarrow$. Sobre un abierto afín uno puede descomponer f como un encaje $i\colon X \to Z := \mathbb{A}^n_Y$ con la proyección $p\colon Z \to Y$. Sea $y \in Y$ y $x \in X_y$, de modo que f_y es i.c.l.; como $p_y\colon \mathbb{A}^n_{\Bbbk(y)} \to \Bbbk(y)$ es suave, entonces i_y es un encaje regular, luego como Z_y es Z-plano, entonces descendemos para ver que i es un encaje regular. Así f es i.c.l.

$\Longrightarrow$. Supongamos la misma situación anterior donde i es un encaje regular y p es suave. Sea i de manera que $\mathscr{O}_{X,x}$ está generado por una sucesión débilmente regular $b_1, \dots, b_m \in \mathscr{O}_{Z,m}$. En particular, $k.\dim \mathscr{O}_{X,x} = k.\dim \mathscr{O}_{Z,x} - m$ y, además, por el corolario 6.52.1

$$\begin{aligned} k.\dim \mathscr{O}_{X_y,x} &= k.\dim \mathscr{O}_{X,x} - k.\dim \mathscr{O}_{Y,y}, \\ k.\dim \mathscr{O}_{Z_y,x} &= k.\dim \mathscr{O}_{Z,x} - k.\dim \mathscr{O}_{Y,y}; \end{aligned}$$

por lo que $k.\dim \mathscr{O}_{X_y,x} = k.\dim \mathscr{O}_{Z_y,x} - m$. Luego al localizar (que es tensorizar por un módulo plano) las imágenes de los b_i siguen forman una sucesión débilmente regular y, por tanto, $X_y \to Z_y$ es un en encaje regular. $\square$

Notas históricas

Los morfismos étale fueron una invención de Grothendieck. Varios autores señalan que la palabra *étale* es poco frecuente en francés, salvo en poesía y usualmente referido al mar donde tendría el equivalente español de «calmado, tranquilo o profundo». Señala MUMFORD **[10]:** «La palabra aparentemente se refiere a la apariencia del mar en marea alta bajo una luna llena en determinados tipos de clima.»

7

Cohomología de haces

En éste capítulo vamos a introducir las diferentes nociones de cohomología que resultan fundamentales en la geometría algebraica. Por un lado, la teoría general de haces sobre un espacio topológico admite su noción de cohomología llamada *cohomología de Čech* que estudiamos en el primer capítulo y que fue protagónico en el famoso artículo SERRE **[29]**. Por otro lado, los haces abelianos sobre un espacio topológico ya forman una categoría abeliana con suficientes inyectivos, de modo que podemos definir categorías y funtores derivados *dentro* de la geometría algebraica misma (i.e., sin construir complejos de módulos asociados); esto es una ventaja absoluta que otras teorías desposeen, y que querremos aprovechar al máximo.

7.1 Cohomología de haces y de Čech

§7.1.1 Cohomología abstracta.

Proposición 7.1: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado. La categoría de haces de $\mathscr{O}_X$-módulos es abeliana y posee suficientes inyectivos.

DEMOSTRACIÓN: Ya hemos visto que la categoría de haces de grupos abelianos es abeliana, y la misma demostración aplica para haces a valores en A-módulos. Para $\mathscr{O}_X$-módulos queda de ejercicio juntar las proposiciones previas del capítulo de haces cuasicoherentes.

La parte de complejidad es la de poseer suficientes inyectivos, ésto se deduce de la construcción del funtor $M \mapsto J_A(M)$ sobre Mod_A ya dada, y que a cada A-módulo le asigna una extensión inyectiva que es funtorial. □

Hay varias maneras de asociar funtorialmente módulos inyectivos a módulos. Otro ejemplo es la envoltura inyectiva (el «mínimo módulo inyectivo que le extiende»), o incluso la mera existencia de extensiones inyectivas es útil (cfr. Hartshorne [**8,** pág. 207], thm. II.2.2).

Corolario 7.1.1: Sea X un espacio topológico. La categoría $\mathsf{Sh}(X;\mathsf{Ab})$ de haces abelianos es abeliana y posee suficientes inyectivos.

Demostración: Basta dotar a X del haz estructural $\mathscr{O}_X := \mathbb{Z}_X^+$ que es constante a valores en $\mathbb{Z}$ (nótese que en abiertos, éste haz toma valores en sumas directas de $\mathbb{Z}$, los cuales son anillos de manera canónica). □

Así pues, tenemos un dominio bastante extenso sobre el que poder hacer álgebra homológica.

Definición 7.2: Sea X un espacio topológico. El funtor $\Gamma(X,-)\colon \mathsf{Sh}(X) \to \mathsf{Ab}$ es exacto por la izquierda, de modo que definimos los ***funtores cohomológicos*** como los funtores derivados derechos $H^i(X,-) := \mathsf{R}^i\Gamma(X,-)$ de $\Gamma(X,-)$. Fijado un haz abeliano $\mathscr{F}$ sobre X, los $H^i(X,\mathscr{F})$ se dicen los ***grupos de cohomología de*** $\mathscr{F}$.

Un haz abeliano $\mathscr{F}$ sobre X se dice un ***haz inyectivo*** si es un objeto inyectivo de $\mathsf{Sh}(X,\mathsf{Ab})$.

En general, entre grupos abelianos y módulos se suele omitir buena parte de la discusión sobre objetos inyectivos puesto que son «poco intuitivos» y sus ejemplos son más complicados que en el caso de los objetos proyectivos. En consecuente, los haces inyectivos son relativamente «raros» y, por tanto, conviene buscar un reemplazo:

Definición 7.3: Un haz concreto $\mathscr{F}$ sobre un espacio topológico X se dice ***flácido***[1] si para todo par de abiertos $\varnothing \neq U \subseteq V$ se tiene que la restricción $\rho_U^V\colon \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$ es suprayectiva.

Un buen ejemplo de un haz flácido son los haces rascacielos.

Necesitaremos la siguiente construcción:

[1] fr. *flasque*, eng. *flabby*.

Definición 7.4: Sea X un espacio topológico, $j\colon U \to X$ un abierto y $\mathscr{G}$ un haz abeliano sobre U. Llamamos la ***extensión por cero fuera de*** U al haz sobre X, denotado $j_!(\mathscr{G})$, dado por hacificar el prehaz

$$V \mapsto \begin{cases} \mathscr{G}(V), & V \subseteq U \\ 0, & V \nsubseteq U \end{cases}$$

Lema 7.5: Sea X un espacio topológico, $Z \subseteq X$ un cerrado y $U := X \setminus Z$ su complemento. Denótese $i\colon U \hookrightarrow X$ y $j\colon Z \hookrightarrow X$ las inclusiones. Para todo haz $\mathscr{F}$ sobre X se tiene la siguiente sucesión exacta canónica:

$$0 \longrightarrow j_!(\mathscr{F}|_U) \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow i_*(\mathscr{F}|_Z) \longrightarrow 0$$

Pista: La exactitud se verifica en las fibras. Es fácil verificar que si $x \in Z$, entonces $\big(i_*(\mathscr{F}|_Z)\big)_x = \mathscr{F}_x$ y $\big(j_!(\mathscr{F}|_U)\big)_x = 0$. Por otro lado, $x \in U$, entonces $\big(i_*(\mathscr{F}|_Z)\big)_x = 0$ y $\big(j_!(\mathscr{F}|_U)\big)_x = \mathscr{F}_x$. □

Lema 7.6: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado. Todo $\mathscr{O}_X$-módulo inyectivo es un haz flácido.

Demostración: Sean $V \subseteq U$ abiertos de X y denótense $i\colon V \hookrightarrow X$ y $j\colon U \hookrightarrow X$ las inclusiones. Luego $0 \to i_!(\mathscr{O}_X|_V) \to j_!(\mathscr{O}_X|_U)$ es una sucesión exacta de $\mathscr{O}_X$-módulos (¿por qué?). Para un $\mathscr{O}_X$-módulo inyectivo se obtiene la sucesión exacta $\mathscr{I}(U) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}\big(j_!(\mathscr{O}_X|_U), \mathscr{I}\big) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}\big(i_!(\mathscr{O}_X|_V), \mathscr{I}\big) = \mathscr{I}(V) \to 0$. □

Proposición 7.7: Sea X un espacio topológico. Si $\mathscr{F}$ es un haz flácido sobre X, entonces $H^i(X, \mathscr{F}) = 0$ para todo $i > 0$.

Demostración: Sea $\mathscr{F} \to \mathscr{I}$ un monomorfismo con $\mathscr{I}$ inyectivo y considere la sucesión exacta $0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{I} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \longrightarrow 0$. Como $\mathscr{F}, \mathscr{I}$ son flácidos, entonces $\mathscr{G}$ también y, por lo tanto, tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{I}) \xrightarrow{\varphi(X)} \Gamma(X, \mathscr{G}) \longrightarrow 0,$$

empleando la sucesión exacta larga de $H^i(X, -)$ y que $H^i(X, \mathscr{I}) = 0$ para $i > 0$ vemos que $H^1(X, \mathscr{F}) = \operatorname{coker}\big(\varphi(X)\big) = 0$, pues $\varphi(X)$ es un epimorfismo. Como $\mathscr{G}$ también es flácido, la misma demostración prueba que $H^1(X, \mathscr{G}) = 0$.

Finalmente, como $H^i(X, \mathscr{I}) = 0$, tenemos que $H^i(X, \mathscr{F}) = H^{i-1}(X, \mathscr{G})$ por lo que una simple inducción va probando que son cero. □

El recíproco es falso, vale decir, un haz acíclico (tal que $H^i(X, \mathscr{F}) = 0$) puede no ser flácido. Por ejemplo, veremos en el teorema 7.20 que todo haz sobre un esquema afín es acíclico.

Proposición 7.8: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado. Los funtores derivados derechos de $\Gamma(X, -)\colon \mathsf{Mod}_{\mathscr{O}_X} \to \mathsf{Ab}$ coinciden con $H^i(X, -)$.

Demostración: Los $H^i(X, -)$ se calculan mediante resoluciones inyectivas, los $\mathscr{O}_X$-módulos inyectivos son $\mathscr{O}_X$-módulos flácidos, que son haces flácidos y, por tanto, $\Gamma(X, -)$-acíclicos. □

Definición 7.9: Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos. Dado un objeto A, una ***resolución inyectiva*** es una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} I^0 \xrightarrow{\mathrm{d}^0} I^1 \xrightarrow{\mathrm{d}^1} \cdots$$

donde cada I^p con $p \geq 0$ es un objeto inyectivo de $\mathscr{A}$. Por lo general, denotaremos lo anterior como $0 \to A \to I^\bullet$.

Cuando $\mathscr{A} \subseteq \mathsf{Sh}(X, \mathsf{Ab})$ es una subcategoría de haces abelianos, entonces también diremos que una ***resolución flácida*** de un haz $\mathscr{F}$ es una sucesión exacta larga $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G}^\bullet$, donde cada $\mathscr{G}^p$ es flácido.

Podemos emplear resoluciones flácidas para calcular los grupos de cohomología.

Proposición 7.10: Dada una resolución flácida $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G}^\bullet$, de modo que $\Gamma(X, \mathscr{G}^\bullet)$ es un complejo de cocadenas (en Ab), se tiene que

$$H^i(X, \mathscr{F}) = H^i(\Gamma(X, \mathscr{G}^\bullet)).$$

Pista: En esencia se reduce al caso de las resoluciones inyectivas pues en ambos casos se emplea recursivamente que los $\mathscr{G}^\bullet$'s son acíclicos para obtener igualdades convenientes. □

Poniendo «resolución inyectiva» en lugar de «resolución flácida», el lector avanzado notará que esta es precisamente la manera de definir los funtores derivados en álgebra homológica (y, más concretamente, esta es la construcción de Hartshorne [**8,** pág. 204]).

§7.1.2 Cohomología de Čech. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{U} := \{U_i \to U\}_{i\in I}$ un cubrimiento. Para una tupla de índices $(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$ se define

$$U_{i_0,\dots,i_p} := U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_p}.$$

Sea $(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$ una tupla y $j \in \{0, 1, \dots, p\}$; entonces obtenemos una inclusión $U_{i_0,\dots,i_p} \hookrightarrow U_{i_0,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_p}$, donde «$\hat{i}_j$» denota borrar la j-ésima coordenada. Esta, a su vez, induce una restricción $\rho_j \colon \mathscr{F}(U_{i_0,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_p}) \to \mathscr{F}(U_{i_0,\dots,i_p})$.

Definición 7.11: Sea X un espacio topológico, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de X y $\mathscr{F}$ un haz de A-módulos sobre X. Se define

$$\check{C}^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) := \prod_{(i_0,\dots,i_p)\in I^{p+1}} \mathscr{F}(U_{i_0,\dots,i_p}),$$

y definimos el homomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^q \colon \check{C}^q &\longrightarrow \check{C}^{q+1} \\ f &\longmapsto \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \rho_j(f) \end{aligned}$$

Así, es fácil verificar que $\left(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathscr{F}), \mathrm{d}^\bullet\right)$ es un complejo de cocadenas, llamado el ***complejo de Čech (usual)***.

Siguiendo la terminología usual, los elementos de $\check{C}^q, \ker(\mathrm{d}^q), \operatorname{Img}(\mathrm{d}^{q-1})$ se dicen ***cocadenas***, ***cociclos*** y ***cobordes q-ésimos de Čech*** resp. También se denomina ***q-ésimo grupo de cohomología de Čech*** a:

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) := H^q(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathscr{F})) = \frac{\ker(\mathrm{d}^q)}{\operatorname{Img}(\mathrm{d}^{q-1})}.$$

Una q-ésima cocadena $f \in \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ se dice ***alternante*** si $f_{(i_0,\dots,i_q)} = 0$ cuando hay índices repetidos y cuando para toda permutación $\sigma \in S_{p+1}$ se satisface que

$$f_{(i_{\sigma 0},\dots,i_{\sigma q})} = \operatorname{sign} \sigma f_{(i_0,\dots,i_q)}.$$

Es claro que si f es alternante, entonces $\mathrm{d}^q f$ también lo es y, por lo tanto, $\check{C}'^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ conforma un subcomplejo, llamado el ***complejo alternante (de Čech)***.

Proposición 7.12: Sea X un espacio topológico, $\mathcal{U}$ un cubrimiento de X y $\mathscr{F}$ un haz de A-módulos sobre X. Entonces $\check{H}^0(\mathcal{U}, X) \cong \check{H}'^0(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \cong \Gamma(X, \mathscr{F})$.

Demostración: Esta es una traducción de la exactitud de (3.1). □

Esto nos dice que $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ con $p = 0$ es independiente de la elección de $\mathcal{U}$, esto no es cierto en general para $p > 0$.

Proposición 7.13: Sea X un espacio topológico, $\mathcal{U}$ un cubrimiento de X y $\mathscr{F}$ un haz de A-módulos sobre X. La inclusión canónica $\iota\colon \check{C}'(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to \check{C}(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ induce un isomorfismo entre los grupos de cohomología de Čech $H(\iota)\colon \check{H}'(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \check{H}(\mathcal{U}, \mathscr{F})$.

Si ahora exigimos que I admita un orden lineal (?!), entonces podemos cambiar tuplas ordenadas por desordenadas y obtener el siguiente complejo:

$$\check{C}''^p(\mathcal{U}, \mathscr{F}) := \prod_{i_0 < \cdots < i_p} \mathscr{F}(U_{i_0,\dots,i_p}).$$

Corolario 7.13.1: Sea X un espacio topológico, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de X donde los índices I admiten un orden lineal y $\mathscr{F}$ un haz de A-módulos sobre X. Entonces existe un isomorfismo canónico $H^\bullet(C''(\mathcal{U}, \mathscr{F})) \cong \check{H}^\bullet(\mathcal{U}, \mathscr{F})$.

Demostración: Basta construir el homomorfismo $C'^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to C''^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ dado por mandar $(i_0, \dots, i_p) \mapsto i_0 < \cdots < i_p$ (aquí la aplicación «reordena» las coordenadas). Por definición de alternante, este homomorfismo es compatible con las flechas diferenciales (los «$\mathrm{d}^\bullet$») y es claramente un isomorfismo de A-módulos, por tanto también desciende en cohomología. □

Corolario 7.13.2: Sea X un espacio topológico, $\mathcal{U}$ un cubrimiento de X por n abiertos y $\mathscr{F}$ un haz de A-módulos sobre X. Entonces $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathscr{F}) = 0$ para todo $p \geq n$.

Demostración: Basta notar que no existe una tupla con $n+1$ coordenadas no repetidas sobre $\mathcal{U}$. □

Recuérdese que dados dos cubrimientos $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ de X se dice que $\mathcal{V}$ es un ***refinamiento*** de $\mathcal{U}$ si para cada $V \in \mathcal{V}$ existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$. (Bajo AE) Esto equivale a exigir que exista una inyección $\sigma\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ que induce un homomorfismo:

$$\begin{aligned} \check{C}^p(\sigma, \mathscr{F})\colon \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathscr{F}) &\longrightarrow \check{C}^p(\mathcal{V}, \mathscr{F}) \\ f &\longmapsto (f|_{\sigma(V_{j_0,\dots,j_p})})_{j_0,\dots,j_p}. \end{aligned}$$

Este homomorfismo conmuta con los diferenciales e induce un homomorfismo en los grupos de cohomología:

$$\check{H}^p(\sigma, \mathscr{F}) \colon \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow \check{H}^p(\mathcal{V}, \mathscr{F}).$$

Proposición 7.14: Sea X un espacio topológico, $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ un par de cubrimientos tales que $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ y $\mathscr{F}$ un haz de A-módulos sobre X. Entonces $\check{H}^p(\sigma, \mathscr{F})$ no depende de $\sigma \colon \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{U}$.

Como corolario es claro:

Corolario 7.14.1: Sea X un espacio topológico y $\mathscr{F}$ un haz de A-módulos sobre X. Si $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ son cubrimientos de X tales que $\mathcal{U}$ es un refinamiento de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}$ un refinamiento de $\mathcal{U}$, entonces $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to \check{H}^p(\mathcal{V}, \mathscr{F})$ es un isomorfismo.

Definición 7.15: Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ un par de cubrimientos de X. Se dice que $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ son ***equivalentes*** si uno es el refinamiento del otro y viceversa. Dado un haz $\mathscr{F}$ de A-módulos sobre X, se define el ***p-ésimo grupo de cohomología de Čech***:

$$\check{H}^p(X, \mathscr{F}) := \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathscr{F}),$$

donde $\mathcal{U}$ recorre las clases de equivalencias de cubrimientos de X ordenadas por refinamiento.

La proposición 7.12 dice que el 0-ésimo grupo de cohomología de Čech es $\check{H}^0(X, \mathscr{F}) = \mathscr{F}(X)$. Si permitimos que $\mathscr{F}$ sea un prehaz en lugar de un haz, entonces $\check{H}^0(X, \mathscr{F}) = \mathscr{F}^+(X)$, la hacificación de $\mathscr{F}$.

Definición 7.16: Sea $(I, \leq)$ un conjunto dirigido (o bien una categoría filtrada). Un subconjunto $S \subseteq I$ se dice un ***sistema cofinal*** si para cada $i \in I$ existe $s \in S$ tal que $i \leq s$.

Claramente, si $\{X_i\}_{i \in I}$ es un diagrama filtrado (en una categoría cualquiera) cuyo límite directo exista y $J \subseteq I$ es un sistema cofinal, entonces (canónicamente) $\varinjlim_{i \in I} X_i \cong \varinjlim_{j \in J} X_j$.

Sea I el conjunto de clases de equivalencia de cubrimientos de X (ordenados por refinamiento). Si X es compacto, entonces los cubrimientos finitos conforman un sistema cofinal de I. Si X es un esquema, entonces los cubrimientos por abiertos afines también conforman un sistema cofinal. Cuando hablemos de que una familia de cubrimientos es un sistema cofinal, siempre nos referiremos con respecto al conjunto I.

Definición 7.17: Sean $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}, \mathcal{V}$ un par de cubrimientos de X. Para una tupla $\alpha := (i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$ se denota

$$\mathcal{V}_\alpha := \{U_\alpha \cap V\}_{V\in\mathcal{V}}$$

el cual es un cubrimiento de U_α.

Teorema 7.18 (de aciclicidad de Leray): Sea $\mathscr{F}$ un haz de A-módulos sobre un espacio topológico X. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de X y supongamos que existe un sistema cofinal de cubrimientos $(\mathcal{V}^\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tal que

$$\check{H}^q(\mathcal{V}^\lambda_\alpha, \mathscr{F}|_{U_\alpha}) = 0$$

para todo $\alpha \in I^{p+1}$, todo $\lambda \in \Lambda$ y todo $q \geq 1$. Entonces el homomorfismo canónico $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \check{H}^p(X, \mathscr{F})$ es un isomorfismo para todo $p \geq 0$.

Proposición 7.19: Sea X un espacio topológico y sea

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de haces abelianos. Entonces existe un morfismo, llamado ***conector*** $\partial\colon \mathscr{H}(X) \to \check{H}^1(X, \mathscr{F})$ tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma(X,\mathscr{F}) \arrow[r] & \Gamma(X,\mathscr{G}) \arrow[r] & \Gamma(X,\mathscr{H}) \arrow[dll, "\partial", bend left] \\
& \check{H}^1(X,\mathscr{F}) \arrow[r] & \check{H}^1(X,\mathscr{G}) \arrow[r] & \check{H}^1(X,\mathscr{H})
\end{tikzcd}$$

Demostración: Sea $s \in \Gamma(X, \mathscr{H})$. Como β es un epimorfismo existen secciones $t_i \in \Gamma(U_i, \mathscr{G})$ tales que $\beta_{U_i}(t_i) = s|_{U_i}$ y tales que $\mathcal{U} := \{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento de X. Por exactitud, existe unas únicas secciones $w_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \mathscr{F})$ tales que $\alpha_{U_{ij}}(w_{ij}) = t_i|_{U_{ij}} - t_j|_{U_{ij}}$; luego $\boldsymbol{w}_s := (w_{ij})_{ij} \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ y, es claro que $\boldsymbol{w} \in \ker\big(\check{C}^1(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathscr{F})\big)$. Así, sea $\overline{w} \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ la imagen de $\boldsymbol{w}_s$ y sea $\widetilde{w}_s \in \check{H}^1(X, \mathscr{F})$ la imagen de $\overline{w}$. Nótese que $\overline{w}$ es independiente de la elección de t_i (¿por qué?). Sea $\mathcal{V} := \{V_j\}_{j\in J}$ un refinamiento de $\mathcal{U}$, de modo que para todo j se tiene que $s|_{V_j} \in \operatorname{Img}(\beta_{V_j})$ y, por tanto, podemos definir $\overline{u} \in \check{H}^1(\mathcal{V}, \mathscr{F})$ como antes y, es fácil verificar que $\overline{u}$ es la imagen de $\overline{w}$, de modo que $\widetilde{w}_s \in \check{H}^1(X, \mathscr{F})$ es independiente de la elección de $\mathcal{U}$.

Definamos la aplicación $\partial(s) := \widetilde{w}_s$ la cual es visiblemente un homomorfismo. Veamos que la sucesión inducida es exacta en $\mathscr{H}(X)$. Sea $s \in \ker \partial$, lo que equivale a que $\overline{w}_s = 0$ syss existen $w_i \in \Gamma(U_i, \mathscr{F})$ tales que $w_{ij} = w_i|_{U_{ij}} - w_j|_{U_{ij}}$ para todo i, j, y $\overline{w}_i = 0$ implica que las secciones $t_i - \alpha_{U_i}(w_i)$ son compatibles y, por tanto, se pegan en una única sección $t \in \Gamma(X, \mathscr{G})$ tal que $\beta_X(t) = s$, es decir, $s \in \operatorname{Img}(\beta_X)$.

Finalmente, veamos que la sucesión es exacta en $\check{H}^1(X, \mathscr{F})$. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento de X y sea $\boldsymbol{w} := (w_{ij})_{ij} \in \ker\big(\check{C}^1(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathscr{F})\big)$ tal que $\check{H}^1(X, \alpha)(\boldsymbol{w}) = 0$, vale decir, existen $t_i \in \Gamma(U_i, \mathscr{F})$ tales que $\alpha_{U_{ij}}(w_{ij}) = t_i|_{U_{ij}} - t_j|_{U_{ij}}$, de modo que las secciones $s_i := \beta_{U_i}(t_i)$ son compatibles y se pegan en una sección $s \in \Gamma(X, \mathscr{H})$ tal que $w_s = w$. Es decir, $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Img} \partial$ y estamos listos. □

Teorema 7.20: Sea $X = \operatorname{Spec} A$ un esquema afín y $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo cuasicoherente.

1. Para todo cubrimiento finito $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X por abiertos principales se tiene que $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathscr{F}) = 0$ para cada $p \geq 1$.
2. En consecuencia, $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathscr{F}) = 0$ para cada $p \geq 1$.

Demostración:

1. Como X es afín, entonces con $M := \Gamma(X, \mathscr{F})$ tenemos que $\mathscr{F} = \widetilde{M}$. Sea $f \in \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \cap \ker(\mathrm{d}^p)$, queremos encontrar f' tal que $\mathrm{d}^{p-1} f' = f$. Sea $U_i = \mathbf{D}(g_i)$ y $\alpha := (i_0, \dots, i_p)$ en notación multiíndice tal que $g_\alpha := g_{i_0} \cdots g_{i_p}$ y dado $0 \leq j \leq p$ denotaremos $\alpha - j := (i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_p)$. Que $f \in \check{C}^p$ significa que para multiíndice $\alpha \in I^{p+1}$ tenemos $f_\alpha = s_\alpha / g_\alpha^N$, para algún $s_\alpha \in M$ y un N suficientemente grande. Que $f \in \ker(\mathrm{d}^p)$ significa que para todo $i \in I$ tenemos que $(\mathrm{d}f)_{i,\alpha} = 0$, lo que se expande a que
$$\left.\left(\frac{s_\alpha}{g_\alpha^N} + \sum_{j=0}^{p} (-1)^{j+1} \frac{s_{\alpha-j}}{g_i^N g_{\alpha-j}^N}\right)\right|_{U_{i,\alpha}} = 0.$$
Ser cero en la intersección de abiertos principales significa que existe un $l \geq 1$ tal que:
$$g_i^{N+l} f_\alpha = \frac{g_i^{N+l} s_\alpha}{g_\alpha^N} = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \frac{g_i^l g_{i_j}^N s_{\alpha-j}^N}{g_\alpha^N}.$$

Como los $\mathbf{D}(g_i^{N+l})$ cubren X existen h_i's tales que $1 = \sum_{i\in I} h_i g_i^{N+l}$. Sea $f' \in \check{C}^{p-1}(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ definido por

$$f'_\beta := \sum_{i\in I} h_i g_i^l \frac{s_{i,\beta}}{g_\beta^N} \in \Gamma(U_\beta, \mathscr{F})$$

donde $\beta \in I^p$ es un multiíndice. Así, para todo $0 \le j \le p$ y todo $\alpha \in I^{p+1}$ multiíndice tenemos que

$$f'_{\alpha-j}|_{U_\alpha} = \sum_{i\in I} h_i \frac{g_i^l g_{i_j}^N s_{i,\alpha-j}}{g_\alpha^N}.$$

Finalmente

$$(\mathrm{d}f')_\alpha = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j f'_{\alpha-j}|_{U_\alpha} = \sum_{i\in I} h_i g_i^{N+l} f_\alpha = f_\alpha.$$

2. Claramente los cubrimientos por abiertos principales forman un sistema cofinal de cubrimientos, por lo que concluimos por el teorema de aciclicidad de Leray. □

Teorema 7.21: Sea X un esquema separado, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo cuasicoherente y $\mathcal{U}$ un cubrimiento por afines de X. Entonces, el homomorfismo canónico $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \check{H}^p(X, \mathscr{F})$ es un isomorfismo para cada $p \ge 0$.

Demostración: Para $p = 0$ es trivial pues $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$ independiente del cubrimiento. Para $p > 0$, entonces notamos que los cubrimientos por abiertos afines conforman un sistema cofinal de cubrimientos y aplicamos el teorema de aciclicidad de Leray. □

Como ejercicio para el lector, ¿dónde se empleo que el esquema sea separado?

Corolario 7.21.1: Sea X un esquema separado y $0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de haces sobre X con $\mathscr{F}$ cuasicoherente. Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta larga:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Gamma(X,\mathscr{F}) \arrow[r] & \Gamma(X,\mathscr{G}) \arrow[r] & \Gamma(X,\mathscr{H}) \arrow[dll, "\partial"] \\ & \check{H}^1(X,\mathscr{F}) \arrow[r] & \check{H}^1(X,\mathscr{G}) \arrow[r] & \check{H}^1(X,\mathscr{H}) \arrow[dll, "\partial"] \\ & \check{H}^2(X,\mathscr{F}) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

En consecuencia, $\check{H}^i(X,\mathscr{F}) = H^i(X,\mathscr{F})$.

Demostración: Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos afines de X. Entonces es fácil verificar que se induce una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas de $\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$-módulos:

$$0 \longrightarrow \check{C}(\mathcal{U},\mathscr{F}) \longrightarrow \check{C}(\mathcal{U},\mathscr{G}) \longrightarrow \check{C}(\mathcal{U},\mathscr{H}) \longrightarrow 0$$

que, por tanto, induce una sucesión exacta larga de módulos como en el enunciado. Finalmente, como la cohomología de Čech se calcula en cualquier cubrimiento cuando X es separado, entonces tenemos la sucesión del enunciado. □

Corolario 7.21.2: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo afín de esquemas separados, y sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo cuasicoherente. Entonces para todo i tenemos los isomorfismos naturales:

$$H^i(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} H^i(Y, f_*\mathscr{F}).$$

Ejercicio 7.22: Sea X un esquema y defínase el haz de grupos abelianos

$$\Gamma(U,\mathscr{O}_X^\times) := \Gamma(U,\mathscr{O}_X)^\times.$$

1. Dado un haz invertible $\mathscr{L}$ sobre X y dado un cubrimiento $\mathcal{U} := \{U_i\}_i$ tal que $\mathscr{L}|_{U_i} = e_i\mathscr{O}_X(U_i)$ (es libre), denotemos $U_{ij} := U_i \cap U_j$ y $f_{ij} \in \Gamma(U_{ij},\mathscr{O}_X^\times)$ tal que $e_i|_{U_{ij}} = e_j|_{U_{ij}} f_{ij}$. Con ello, sea $f := (f_{ij})_{i,j} \in \check{C}'^1(\mathcal{U},\mathscr{O}_X^\times)$. Demuestre que la clase $[f] \in \check{H}^1(X,\mathscr{O}_X^\times)$ es independiente de la elección del cubrimiento y de los e_i's.

   Así tenemos una aplicación canónica $\bar{\phi}\colon \mathscr{L} \mapsto [f] \in \check{H}^1(X,\mathscr{O}_X^\times)$.

2. Demuestre que $\bar{\phi}(\mathscr{L}) = 1$ syss $\mathscr{L} \simeq \mathscr{O}_X$, de modo que $\bar{\phi}$ induce una inyección canónica $\phi\colon \operatorname{Pic} X \hookrightarrow \check{H}^1(X,\mathscr{O}_X^\times)$.

3. Demuestre que ϕ es, de hecho, un isomorfismo de grupos canónico.

En particular, si X es separado, entonces $\operatorname{Pic} X \cong H^1(X, \mathscr{O}_X^\times)$.

Esto lo dejamos como ejercicio, puesto que este isomorfismo lo recuperaremos (con más hipótesis) en la proposición 8.28.

Teorema 7.23 – *Criterio de afinidad de Serre*: Sea X un esquema compacto y cuasiseparado. Son equivalentes:

1. X es afín.
2. Existen $f_i \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ tales que X_{f_i} forma un cubrimiento por abiertos afines de X.
3. Para todo haz cuasicoherente $\mathscr{F}$ sobre X se tiene que $\check{H}^p(X, \mathscr{F}) = 0$ para todo $p \geq 1$.
4. Para todo haz de ideales cuasicoherente $\mathscr{I}$ sobre X se satisface que $\check{H}^1(X, \mathscr{I}) = 0$.
5. Para todo $\mathscr{O}_X$-submódulo $\mathscr{F}$ de algún $\mathscr{O}_X^n$ se satisface que
$$\check{H}^1(X, \mathscr{F}) = 0.$$

Demostración: Trivialmente $1 \implies 3 \implies 5 \implies 4$.

$1 \iff 2$. La implicancia «$\implies$» es obvia, así que realizamos la recíproca. Sea $A := \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$. Como $\{X_{f_i}\}_i$ forma un cubrimiento de X, entonces los f_i's generan el ideal (1) en A. Por definición tenemos un morfismo de esquemas $g\colon X \to \operatorname{Spec} A$, veamos que es un isomorfismo verificando que las restricciones $g|_{X_{f_i}} \colon X_{f_i} \to \mathbf{D}(f_i)$ son isomorfismos. Como los X_{f_i}'s son afines, basta verificar que $g|_{X_{f_i}}^\sharp$ es un isomorfismo, lo que se sigue de la proposición 3.75.

$4 \implies 5$. Sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-submódulo de $\mathscr{O}_X^n$, de modo que es cuasicoherente. Considere la filtración canónica $\mathscr{O}_X^1 \subseteq \mathscr{O}_X^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathscr{O}_X^n$ y defínase $\mathscr{F}_j := \mathscr{F} \cap \mathscr{O}_X^j$; los cuales son también cuasicoherentes. De éste modo, $\mathscr{F}_1$ es un haz de ideales y cada $\mathscr{F}_j/\mathscr{F}_{j-1}$ también, y podemos aplicar inductivamente la sucesión exacta inducida:
$$\check{H}^1(X, \mathscr{F}_{j-1}) \longrightarrow \check{H}^1(X, \mathscr{F}_j) \longrightarrow \check{H}^1(X, \mathscr{F}_j/\mathscr{F}_{j-1}).$$

$5 \implies 2$. Por la proposición 3.88 todo punto se especializa en un punto cerrado, así que si tomamos una familia de abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ que cubre todos los puntos cerrados, entonces será un cubrimiento de X.

Podemos reducirnos a probar lo siguiente: para cada punto cerrado $x \in X^0$ y cada entorno afin $x \in U$ existe un $f \in A$ tal que $x \in X_f \subseteq U$. Sean $\mathscr{I}, \mathscr{J}$ los haces cuasicoherentes de ideales tales que $\mathbf{V}(\mathscr{I}) = (X \setminus U)_{\text{red}}$ y $\mathbf{V}(\mathscr{J}) = (X \setminus U \cup \{x\})_{\text{red}}$. Así pues $\mathscr{J} \subseteq \mathscr{I}$ y $\mathscr{I}/\mathscr{J} \cong \big(\Bbbk(x)\big)_X^x$, el haz rascacielos centrado en x. Como $\check{H}^1(X, \mathscr{J}) = 0$, entonces el homomorfismo $\Gamma(X, \mathscr{I}) \to \Bbbk(x)$ es un epimorfismo y, por tanto, existe $f \in \Gamma(X, \mathscr{I})$ tal que $f(x) \neq 0$ y, por tanto, $x \in X_f \subseteq U$.

Finalmente, queda probar que si $X = \bigcup_{i=1}^n X_{f_i}$, entonces los f_i's generan el ideal A (nótese la finitud por compacidad de X). En efecto, las secciones globales generan un epimorfismo $u\colon \mathscr{O}_X^n \twoheadrightarrow \mathscr{O}_X$ dada por mandar $\boldsymbol{e}_i \mapsto f_i$. Claramente u es un epimorfismo en X_{f_i} y, por tanto, es un epimorfismo en X y, como $\check{H}^1(X, \ker u) = 0$, entonces u es un epimorfismo en secciones globales. □

Proposición 7.24: Sea A un anillo. Entonces:

1. Para todo subconjunto finito de puntos $F \subseteq \mathbb{P}_A^n$ y todo cerrado $Z \subseteq \mathbb{P}_A^n$ tal que $Z \cap F = \varnothing$ existe un polinomio homogéneo $f \in A[\boldsymbol{x}]$ tal que $\mathbf{V}_+(f) \supseteq Z$ y $\mathbf{V}_+(f) \cap F = \varnothing$.

2. Para todo esquema X cuasiproyectivo sobre A se cumple que todo conjunto finito de puntos $F \subseteq X$ está contenido en un abierto afín.

Demostración:

1. Sea $Z = \mathbf{V}_+(\mathfrak{a})$ donde $\mathfrak{a} \trianglelefteq A[\boldsymbol{x}]$ es homogéneo. Los puntos de F están en correspondencia con primos $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ y la condición de que $Z \cap F = \varnothing$ se traduce en que $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ para cada i. Eligiendo un elemento homogéneo $f \in \mathfrak{a} \setminus \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{p}_i$ (¿por qué existe?) vemos que se satisface el enunciado.

2. Por definición, podemos identificar X con un abierto de algún $\mathbb{P}_A^n$. Sea $\overline{X}$ la clausura de X en $\mathbb{P}_A^n$ y sea $Z := \overline{X} \setminus X$. Por el inciso anterior sea $\mathbf{V}_+(f)$ el hiperplano tal que $\mathbf{V}_+(f) \supseteq Z$ y $\mathbf{V}_+(f) \cap F = \varnothing$. Finalmente $X \cap \mathbf{D}_+(f)$ es un abierto afín de X que satisface lo pedido. □

Teorema 7.25 (anulamiento de Grothendieck): Sea X un esquema cuasiproyectivo de dimensión d sobre un anillo noetheriano A. Entonces X admite un cubrimiento por $d+1$ abiertos afines y, en particular, para todo haz cuasicoherente $\mathscr{F}$ sobre X se tiene que $\check{H}^p(X, \mathscr{F}) = 0$ para todo $p > d$.

Demostración: Al igual que antes, identificamos X con un abierto de $\mathbb{P}^n_A$, consideramos su clausura allí $\overline{X}$ y definimos $Z := \overline{X} \setminus X$. Por la proposición anterior, existe un hiperplano $\mathbf{V}_+(f_1) \subseteq \mathbb{P}^n_A$ tal que $\mathbf{V}_+(f_1) \supseteq Z$ y tal que $\mathbf{V}_+(f_1)$ no contiene puntos genéricos de X. Recursivamente, construimos un hiperplano $\mathbf{V}_+(f_{r+1}) \supseteq Z$ que no contiene puntos genéricos de $X \cap \bigcap_{j=1}^r \mathbf{V}_+(f_j)$. Ahora bien, en cada intersección $X \cap \bigcap_{j=1}^r \mathbf{V}_+(f_j)$ la dimensión decrece estrictamente, de modo que

$$X \cap \bigcap_{j=1}^{d+1} \mathbf{V}_+(f_j) = \varnothing$$

y, recíprocamente, los $\mathbf{D}_+(f_j) \cap X$'s son $d+1$ abiertos afines de X que le cubren. □

Se puede generalizar ligeramente la proposición a exigir solamente que X sea noetheriano (vid., Hartshorne [**8,** págs. 208-211]).

§7.1.3 Criterio de afinidad de Chevalley.

Lema 7.26: Sea X un esquema noetheriano y sea X_0 un subesquema cerrado que tenga el mismo espacio topológico subyacente. Entonces X es afín syss X_0 es afín. En particular, X es afín syss X_{red} es afín.

Demostración: Nótese que basta probar la parte de «en particular».

$\Longrightarrow$. Trivial, puesto que si $X = \operatorname{Spec} A$, entonces $X_{\mathrm{red}} = \mathbf{V}(\widetilde{\mathfrak{N}(A)})$.

$\Longleftarrow$. Sea $\mathscr{N}$ el haz de ideales de elementos nilpotentes sobre X. Nótese que existe $r \geq 1$ tal que $\mathscr{N}^r = 0$ (esto es trivial sobre abiertos afines y podemos cubrir a X con finitos). Sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo coherente, entonces podemos considerar la siguiente cadena de $\mathscr{O}_X$-módulos $\mathscr{F} \supseteq \mathscr{N}\mathscr{F} \supseteq \cdots \supseteq \mathscr{N}^r\mathscr{F} = 0$. Ahora bien, $\mathscr{N}^{r-1}\mathscr{F}$ y $\mathscr{N}^j\mathscr{F}/\mathscr{N}^{j+1}\mathscr{F}$ tienen estructura canónica de $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{red}}}$-módulo coherente y, como $\Gamma(X_{\mathrm{red}}, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$, entonces los grupos de cohomología coinciden (sobre los módulos comunes). Así vemos que

$$H^1(X, \mathscr{N}^{r-1}\mathscr{F}) = 0, \qquad H^1\left(X, \frac{\mathscr{N}^j\mathscr{F}}{\mathscr{N}^{j+1}\mathscr{F}}\right) = 0.$$

Empleando las sucesiones exactas de $\mathscr{O}_X$-módulos

$$H^1(X, \mathscr{N}^{j+1}\mathscr{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathscr{N}^j\mathscr{F}) \longrightarrow H^1\left(X, \frac{\mathscr{N}^j\mathscr{F}}{\mathscr{N}^{j+1}\mathscr{F}}\right) = 0$$

y aplicando inductivamente que $H^1(X, \mathscr{N}^{j+1}\mathscr{F}) = 0$ deducimos que $H^1(X, \mathscr{F}) = 0$ y concluimos por el criterio de afinidad de Serre. $\square$

Teorema 7.27 (criterio de afinidad de Chevalley): Sea Y un esquema noetheriano y $f\colon X \to Y$ un morfismo finito y suprayectivo. Entonces X es afín syss Y es afín.

Demostración: $\Longleftarrow$. Trivial pues los morfismos finitos son afines.

$\Longrightarrow$. Sea $Z \hookrightarrow Y$ un subesquema cerrado de Y, entonces $f_Z\colon f^{-1}[Z] \to Z$ también es finito y suprayectivo, y $f^{-1}[Z]$ también es afín (por ser un subesquema cerrado del afín X) así que, por inducción noetheriana, podemos suponer que todos los subesquemas cerrados propios de Y son afines. Por el lema anterior también podemos suponer que Y es reducido. Queremos verificar que $H^1(Y, \mathscr{I}) = 0$ para todo haz coherente de ideales $\mathscr{I}$ en Y.

(i) Supongamos que $\operatorname{Supp}(\mathscr{F}) \subset Y$. Entonces sea $Z := \mathbf{V}(\operatorname{Ann}\mathscr{F})$ el cual es un subesquema cerrado propio de Y y, por hipótesis inductiva, es afín. Sea $Z \overset{\iota}{\hookrightarrow} Y$ el encaje cerrado, tenemos que $\mathscr{F} = \iota_*(\iota^*\mathscr{F})$ por la proposición 5.34 y, por lo tanto

$$H^1(Y, \mathscr{F}) = H^1\big(Y, \iota_*(\iota^*\mathscr{F})\big) \cong H^1(Z, \iota^*\mathscr{F}) = 0.$$

(ii) Ahora suponemos que $\operatorname{Supp}\mathscr{F} = Y$. Veremos dos casos, el primero suponiendo que Y es reducible. En éste caso, sea $Z \overset{\iota}{\hookrightarrow} Y$ una componente conexa (pensada como un subesquema cerrado íntegro), entonces el homomorfismo canónico $u\colon \mathscr{F} \to \iota_*(\iota^*\mathscr{F})$ induce la sucesión exacta

$$H^1(Y, \ker u) \to H^1(Y, \mathscr{F}) \to H^1(Y, \operatorname{Img} u).$$

Sea ξ el punto genérico de Z, entonces la localización u_ξ es un isomorfismo y por tanto $\xi \notin \operatorname{Supp}(\ker u)$ es un subesquema cerrado propio de Y, por lo que, por el paso (i) concluimos que $H^1(Y, \ker u) = 0$. Además $\operatorname{Img} u \subseteq \operatorname{Supp}\big(\iota_*(\iota^*\mathscr{F})\big) \subseteq Z$ está también contenido en un cerrado propio, por lo que $H^1(X, \operatorname{Img} u) = 0$ y, finalmente, $H^1(X, \mathscr{F}) = 0$.

(iii) Supongamos que Y es íntegro. Luego, existe una componente irreducible X' de X tal que $f[X']$ contiene el punto genérico de Y, de modo que la restricción $f\colon (X')_{\text{red}} \to Y$ es finita y suprayectiva, luego podemos suponer que X es íntegro.

Como f es finito, $\mathscr{B} := f_*\mathscr{O}_X$ es una $\mathscr{O}_Y$-álgebra finitamente generada. Sea ξ el punto genérico de Y, entonces $\mathscr{B}_\xi$ es un $\mathscr{O}_{Y,\xi} = K(Y)$-espacio vectorial de dimensión finita, de modo que existe un abierto $V \subseteq Y$ donde $\mathscr{B}|_V$ es un $\mathscr{O}_Y$-módulo localmente libre de rango finito. Así $U := f^{-1}[V] \subseteq X$ es un abierto afín, donde $B := \Gamma(U, \mathscr{O}_X) = \Gamma(V, \mathscr{B})$ es un A-módulo libre de base $b_1, \dots, b_n$. Limpiando denominadores, existe $g \in C := \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ no nulo, tal que $gb_i = s_i \in C$ y los $c_i \in \Gamma(Y, \mathscr{B})$ determinan un epimorfismo $u\colon \mathscr{O}_Y^n \to \mathscr{B}$ tal que determina un isomorfismo en la localización u_ξ, de modo que se restringen a un isomorfismo $u|_W$ para un abierto $W \subseteq Y$. Para todo haz de ideales coherente $\mathscr{I}$ tenemos el homomorfismo de $\mathscr{O}_Y$-módulos

$$v := h_u\colon \mathscr{G} := \mathscr{H}om(f_*\mathscr{O}_X, \mathscr{I}) \to \mathscr{H}om(\mathscr{O}_Y^n, \mathscr{I}) \cong \mathscr{I}^n$$

tal que $v|_W$ es un isomorfismo.

Como Y es íntegro, las restricciones en $\mathscr{I}$ son inyectivas, de modo que v es un monomorfismo pues $v|_W$ es un isomorfismo. Sea $\mathscr{K} := \operatorname{coker} v$, entonces $\operatorname{Supp} \mathscr{K}$ es cerrado propio (pues es disjunto de W), por lo que $H^1(Y, \mathscr{K}) = 0$ por el paso (i) y finalmente basta comprobar que $H^1(Y, \mathscr{G}) = 0$. Ahora, $\mathscr{G}$ es un $f_*\mathscr{O}_X$-módulo coherente, por lo que existe un $\mathscr{O}_X$-módulo cuasicoherente $\mathscr{H}$ (por la proposición 5.25) tal que $f_*\mathscr{H} = \mathscr{G}$ y, por el corolario 7.21.2 calculamos

$$H^1(Y, \mathscr{G}) = H^1(Y, f_*\mathscr{H}) \cong H^1(X, \mathscr{H}) = 0. \qquad \square$$

7.2 Cohomología de esquemas proyectivos

Teorema 7.28: Sea A un anillo, $B := A[x_0, \dots, x_d]$ y sea $X := \operatorname{Proj} B = \mathbb{P}^d_A$ con $d \geq 1$. Se cumplen:

1. El homomorfismo canónico $B \to \Gamma_*(\mathscr{O}_X)$ es un isomorfismo de B-módulos graduados.
2. $H^i(X, \mathscr{O}_X(n)) = 0$ para $0 < i < d$ y todo $n \in \mathbb{Z}$.
3. $H^d(X, \mathscr{O}_X(-d-1)) \cong A$.
4. $H^d(X, \mathscr{O}_X(n)) \cong H^0(X, \mathscr{O}_X(-n-d-1))^\vee$, donde $\vee$ denota el dual como A-módulo. En particular, $H^d(X, \mathscr{O}_X(n)) = 0$ para $n \geq -d$.

Demostración: ... $\square$

Teorema 7.29 (anulamiento de Serre): Sea X un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano A y sea $\mathscr{F}$ un haz coherente sobre X. Entonces:

1. Para todo $p \geq 0$, el A-módulo $H^p(X, \mathscr{F})$ es finitamente generado.

2. Existe un entero n_0 (que depende de $\mathscr{F}$) tal que para todo $n \geq n_0$ y todo $p \geq 1$ se tiene que $H^p(X, \mathscr{F}(n)) = 0$.

Demostración: Sea $f : X \hookrightarrow \mathbb{P}^d_A$ un encaje cerrado, por tanto, un morfismo afín; luego por el corolario 7.21.2 tenemos que $H^p(X, \mathscr{F}(n)) = H^p(\mathbb{P}^d_A, f_*\mathscr{F}(n))$. Como $f_*\mathscr{F}$ es coherente y $f_*(\mathscr{F}(n)) \cong (f_*\mathscr{F})(n)$, entonces podemos restringirnos al caso $X = \mathbb{P}^d_A$.

Ahora, por el teorema de anulamiento de Grothendieck, $H^p(X, \mathscr{F}) = 0$ para $p > d$. Procedemos por inducción descendiente. Por el corolario 5.55.1 existen m, r tales que se construye la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{G} := \ker \varphi \longrightarrow \mathscr{O}_X(m)^{\oplus r} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

donde todos son $\mathscr{O}_X$-módulos coherentes (¿por qué?). Podemos tensorizar por $\mathscr{O}_X(n)$, el cual es un haz invertible y por tanto plano, para obtener la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{G}(n) \longrightarrow \mathscr{O}_X(m+n)^{\oplus r} \longrightarrow \mathscr{F}(n) \longrightarrow 0$$

que induce una sucesión exacta larga en grupos de cohomología. Eligiendo n_0 tal que $m + n_0 \geq -d$ entonces

$$0 = H^p\big(X, \mathscr{O}_X(m+n)^{\oplus r}\big) \longrightarrow H^p(X, \mathscr{F}(n)) \longrightarrow H^{p+1}(X, \mathscr{G}(n)) = 0,$$

donde el primero es cero por el teorema anterior, y el segundo es cero por hipótesis inductiva. □

Corolario 7.29.1: Sea X un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano A y sea $0 \longrightarrow \mathscr{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathscr{F}_2 \xrightarrow{\varphi_r} \cdots \longrightarrow \mathscr{F}_r \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de haces coherentes. Entonces para todo n suficientemente grande se cumple que la sucesión

$$0 \to \Gamma(X, \mathscr{F}_1(n)) \to \Gamma(X, \mathscr{F}_2(n)) \to \cdots \to \Gamma(X, \mathscr{F}_r(n)) \to 0$$

es exacta.

Pista: Basta elegir n suficientemente grande tal que

$$H^1(X, \mathscr{F}_i(n)) = H^1(X, \ker(\varphi_i)(n)) = H^1(X, \operatorname{coker}(\varphi_i)(n)) = 0$$

y notar que el funtor H^1 «mide la inexactitud» de $\Gamma(X, -)$. □

Teorema 7.30 (criterio de amplitud de Serre): Sea X un esquema propio sobre un anillo noetheriano A. Para un $\mathscr{O}_X$-módulo invertible $\mathscr{L}$ son equivalentes:

1. $\mathscr{L}$ es amplio.

2. Para todo haz coherente $\mathscr{F}$ sobre X y todo n suficientemente grande se tiene que $H^p(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) = 0$.

3. Para todo haz de ideales coherente $\mathscr{I}$ sobre X y todo n suficientemente grande se tiene que $H^1(X, \mathscr{I} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) = 0$.

Demostración: $1 \implies 2$. Como $\mathscr{L}$ es amplio, por el teorema 5.65 existe algún n tal que $\mathscr{L}^{\otimes n}$ es muy amplio (respecto a $\operatorname{Spec} A$), es decir, existe un encaje $i \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^r_A$ tal que $\mathscr{L}^{\otimes n} \cong i_* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^r_A}(1)$. Como el morfismo estructural $f \colon X \to \operatorname{Spec} A$ es propio, entonces i ha de ser necesariamente un encaje cerrado, de modo que X es proyectivo sobre A y, por tanto, f es proyectivo. Concluímos aplicando el teorema anterior.

$2 \implies 3$. Trivial.

$3 \implies 1$. Por definición de amplio, queremos probar que para todo punto $x \in X$ existe una sección global $s \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n})$ para algún n tal que X_s sea un entorno afín de x. Como X es compacto, todo punto se especializa en un punto cerrado, de modo que basta probar lo anterior sobre puntos cerrados.

Así, sea $x \in X^0$ un punto cerrado. Sea U un entorno afín de x tal que $\mathscr{L}|_U$ es libre. Definamos $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$ haces de ideales tales que $\mathbf{V}(\mathscr{I}) = (X \setminus U)_{\mathrm{red}}$ y $\mathbf{V}(\mathscr{J}) = (X \setminus U \cup \{x\})_{\mathrm{red}}$. Luego tenemos la sucesión exacta (como en la demostración del criterio de afinidad de Serre):

$$0 \longrightarrow \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{I}/\mathscr{J} \longrightarrow 0,$$

donde $\mathscr{I}/\mathscr{J}$ es el haz rascacielos a valor $\Bbbk(x)$ centrado en x.

Como $\mathscr{L}^{\otimes n}$ es plano sobre X, podemos tensorizar para obtener:

$$0 \longrightarrow \mathscr{J}\mathscr{L}^{\otimes n} \longrightarrow \mathscr{I}\mathscr{L}^{\otimes n} \longrightarrow (\mathscr{I}/\mathscr{J}) \otimes \mathscr{L}^{\otimes n} \longrightarrow 0,$$

de modo que

$$H^0(X, \mathscr{I}\mathscr{L}^{\otimes n}) \longrightarrow H^0(X, (\mathscr{I}/\mathscr{J}) \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) = \Bbbk(x) \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \mathscr{L}_x^{\otimes n} \longrightarrow 0$$

es exacto. Esto implica, por el lema de Nakayama, que $\Gamma(X, \mathscr{I}\mathscr{L}^{\otimes n}) \otimes_A \mathscr{O}_{X,x} \twoheadrightarrow \mathscr{L}_x^{\otimes n}$ es un epimorfismo. Así pues, sea $s \in \Gamma(X, \mathscr{I}\mathscr{L}^{\otimes n})$ tal que $s|_x$

sea una base de $\mathscr{L}_x^{\otimes n}$ y, por tanto, $x \in X_s \subseteq U$ el cual será afín. Prosiga con los pasos (ii) y (iii) de la demostración del teorema 5.65. □

Corolario 7.30.1: Sea X un esquema propio sobre un anillo noetheriano A y sea $\mathscr{L}$ un haz invertible sobre X.

1. $\mathscr{L}$ es amplio sobre X syss $\mathscr{L}_{\text{red}}$ es amplio sobre X_{red}.
2. Sean $\{X_i\}_i$ las componentes irreducibles de X. Entonces $\mathscr{L}$ es amplio sobre X syss cada $\mathscr{L}|_{X_i}$ es amplio.
3. Sea $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ finito y suprayectivo. Entonces $\mathscr{L}$ es amplio sobre X syss $f_*\mathscr{L}$ es amplio sobre Y.

Pista: La primera es análoga a la del lema 7.26 y la tercera es análoga a la del criterio de afinidad de Chevalley, empleando el criterio anterior junto al corolario 7.21.2. El inciso 2 puede deducirse de la equivalencia 3 del teorema 5.64. □

§7.2.1 El funtor Ext**.** Definimos los grupos de cohomología como los funtores derivados del grupo de secciones globales $\Gamma(X, -)$ puesto que éste es exacto por la izquierda, pero hay muchos otros ejemplos, a considerar:

Lema 7.31: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado.

1. Fijando un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$, los funtores $\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, -)\colon \mathsf{Mod}_{\mathscr{O}_X} \to \mathsf{Ab}$ y $\mathscr{H}om(\mathscr{F}, -)\colon \mathsf{Mod}_{\mathscr{O}_X} \to \mathsf{Mod}_{\mathscr{O}_X}$ son exactos por la izquierda.
2. Fijado un morfismo de espacios anillados $f\colon (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$, el funtor $f_*(-)\colon \mathsf{Mod}_{\mathscr{O}_X} \to \mathsf{Mod}_{\mathscr{O}_Y}$ es exacto por la izquierda.

Definición 7.32: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado y $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. Denotamos

$$\operatorname{Ext}^i(\mathscr{F}, -) := \mathsf{R}^i \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, -), \qquad \mathscr{E}xt^i(\mathscr{F}, -) := \mathsf{R}^i\, \mathscr{H}om(\mathscr{F}, -).$$

Lema 7.33: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado y $j\colon U \hookrightarrow X$ un abierto no vacío.

1. La restricción a U determina un funtor exacto $(-)|_U\colon \mathsf{Mod}_{\mathscr{O}_X} \to \mathsf{Mod}_{\mathscr{O}_X|_U}$ y el funtor dado por extender por cero $j_!(-)$ es su adjunta izquierda. Vale decir, para todo $\mathscr{O}_X|_U$-módulo $\mathscr{F}$ y todo $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{G}$ se tiene
$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(j_!\mathscr{F}, \mathscr{G}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X|_U}(\mathscr{F}, \mathscr{G}|_U).$$

2. En consecuencia, el funtor $j_!(-)$ es exacto.

3. Si $\mathscr{I}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo inyectivo, entonces $\mathscr{I}|_U$ es un $\mathscr{O}_X|_U$-módulo inyectivo.

Proposición 7.34: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado y $U \subseteq X$ un abierto no vacío. Entonces $\mathscr{E}xt^i_X(\mathscr{F}, \mathscr{G})|_U \simeq \mathscr{E}xt^i_U(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$.

Proposición 7.35: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado, para todo $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{G}$ se tiene que:

1. $\mathscr{E}xt^0(\mathscr{O}_X, \mathscr{G}) = \mathscr{G}$.

2. $\mathscr{E}xt^i(\mathscr{O}_X, \mathscr{G}) = 0$ para todo $i > 0$.

3. $\mathrm{Ext}^i(\mathscr{O}_X, \mathscr{G}) \cong H^i(X, \mathscr{G})$ para todo $i \geq 0$.

Demostración: Para las dos primeras basta notar que $\mathscr{H}om(\mathscr{O}_X, -)$ es la identidad. Para la última basta notar que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X, \mathscr{G}) = \Gamma(X, \mathscr{G})$, así que sus funtores derivados son $H^i(X, -)$ por definición. □

Proposición 7.36: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado y sea $0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_3 \to 0$ una sucesión exacta corta de $\mathscr{O}_X$-módulos. Para todo $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{G}$ se tiene la siguiente sucesión exacta larga:

$$\begin{tikzcd}
0 & \mathrm{Hom}(\mathscr{F}_1, \mathscr{G}) \arrow[l] & \mathrm{Hom}(\mathscr{F}_2, \mathscr{G}) \arrow[l] & \mathrm{Hom}(\mathscr{F}_3, \mathscr{G}) \arrow[l] \\
& \mathrm{Ext}^1(\mathscr{F}_1, \mathscr{G}) \arrow[urr, bend left] & \mathrm{Ext}^1(\mathscr{F}_2, \mathscr{G}) \arrow[l] & \mathrm{Ext}^1(\mathscr{F}_3, \mathscr{G}) \arrow[l] \\
& \mathrm{Ext}^2(\mathscr{F}_1, \mathscr{G}) \arrow[urr, bend left] & \cdots \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

Y análogamente con el funtor $\mathscr{E}xt^i(-, \mathscr{G})$.

Demostración: En primer lugar, nótese que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(-, \mathscr{G})$ es un funtor contravariante exacto por la izquierda, de modo que admite funtores derivados derechos para los cuales uno tiene una sucesión exacta larga como en el enunciado. Para verificar que $\mathrm{Ext}^i(-, \mathscr{G})$ corresponden a dichos funtores, basta calcular $\mathsf{R}^i \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(-, \mathscr{I}^\bullet)$, donde $0 \to \mathscr{G} \to \mathscr{I}^\bullet$ es una resolución inyectiva y notar que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(-, \mathscr{I}^p)$ es exacto para cada uno. □

Nótese que esta proposición no es obvia, puesto que la definición de Ext y $\mathscr{E}xt$ nos dan sucesiones exactas por el otro lado.

Lema 7.37: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado y $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo localmente libre de rango finito.

1. Para todo $\mathscr{O}_X$-módulo inyectivo $\mathscr{I}$, se cumple que $\mathscr{L} \otimes \mathscr{I}$ es inyectivo.
2. Para todo par de $\mathscr{O}_X$-módulos $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ se cumplen:

$$\operatorname{Ext}^i(\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}, \mathscr{G}) \cong \operatorname{Ext}^i(\mathscr{F}, \mathscr{L}^\vee \otimes \mathscr{G}).$$

3. Se cumplen:

$$\mathscr{E}xt^i(\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}, \mathscr{G}) \simeq \mathscr{E}xt^i(\mathscr{F}, \mathscr{L}^\vee \otimes \mathscr{G}) \simeq \mathscr{E}xt^i(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes \mathscr{L}^\vee.$$

Demostración: Todas se deducen de la adjunción $- \otimes \mathscr{L}^\vee \dashv - \otimes \mathscr{L}$. Por ejemplo, con $\mathscr{I}$ inyectivo tenemos que

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(-, \mathscr{L} \otimes \mathscr{I}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(- \otimes \mathscr{L}^\vee, \mathscr{I})$$

es exacto pues $\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(-, \mathscr{I})$ es exacto y $- \otimes \mathscr{L}^\vee$ es exacto. □

Ahora, a por el caso de esquemas:

Definición 7.38: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado y $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo finitamente generado. Se le llama una ***resolución localmente libre*** a una sucesión exacta de $\mathscr{O}_X$-módulos

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{L}_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} \mathscr{L}_0 \xrightarrow{\mathrm{d}_0} \mathscr{F} \longrightarrow 0,$$

donde cada $\mathscr{L}_i$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo localmente libre finitamente generado.

Proposición 7.39: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado y $\mathscr{L}_\bullet \to \mathscr{F} \to 0$ una resolución localmente libre. Entonces para todo $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{G}$ tenemos que

$$\mathscr{E}xt^i(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \simeq h^i\big(\mathscr{H}om(\mathscr{L}_\bullet, \mathscr{G})\big).$$

Recuérdese que $h^i(\cdots \longrightarrow C_{i+1} \xrightarrow{\mathrm{d}_{i+1}} C_i \xrightarrow{\mathrm{d}_i} C_{i-1} \to \cdots)$ denota el cociente $\ker(\mathrm{d}_i)/\operatorname{Img}(\mathrm{d}_{i+1})$ (que siempre está bien definido en una categoría abeliana).

Demostración: Los funtores $\mathscr{E}xt^i(\mathscr{F},-)$ y $h^i\big(\mathscr{H}om(\mathscr{L}_\bullet,-)\big)$, ambos moviendo el i, determinan sucesiones exactas largas y, para un $\mathscr{O}_X$-módulo inyectivo $\mathscr{G}$ en ambos casos se anulan. □

Proposición 7.40: Sea $X = \operatorname{Spec} A$ un esquema afín y sean M, N un par de A-módulos finitamente generados. Entonces

$$\operatorname{Ext}^i_X(\widetilde{M},\widetilde{N}) \cong \operatorname{Ext}^i_A(M,N), \qquad \mathscr{E}xt^i(\widetilde{M},\widetilde{N}) \simeq \widetilde{\operatorname{Ext}^i_A(M,N)}.$$

Demostración: Sobre $\mathscr{O}_X$-módulos coherentes, el teorema 5.12 nos dice que existe una equivalencia natural de funtores $\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\widetilde{M},-) \cong \operatorname{Hom}_A(M,\Gamma(X,-))$, de modo que sus funtores derivados coinciden. □

Proposición 7.41: Sea X un esquema localmente noetheriano, $\mathscr{F},\mathscr{G}$ un par de $\mathscr{O}_X$-módulos con $\mathscr{F}$ coherente y $x \in X$ un punto. Entonces

$$\mathscr{E}xt^i(\mathscr{F},\mathscr{G})_x \cong \operatorname{Ext}^i_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{F}_x,\mathscr{G}_x),$$

donde el funtor de la derecha es el Ext definido para $\mathscr{O}_{X,x}$-módulos clásicos.

Demostración: Por la proposición 7.34 podemos suponer que $X = \operatorname{Spec} A$ es afín y que $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, donde M es un A-módulo finitamente generado. Por tanto, $\mathscr{F}$ admite una resolución localmente libre $\mathscr{L}_\bullet \to \mathscr{F} \to 0$. Luego basta notar que

$$\mathscr{H}om(\mathscr{F},\mathscr{G})_x \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{F}_x,\mathscr{G}_x),$$

y aplicar la proposición anterior y notar que $h^i(\operatorname{Hom}_A(F_\bullet,N))$ con $F_\bullet \to M \to 0$ una resolución libre, calcula el funtor Ext sobre A-módulos. □

Proposición 7.42: Sea X un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano A. Sea $\mathscr{O}_X(1)$ el haz de torcimientos de Serre, $\mathscr{F},\mathscr{G}$ un par de $\mathscr{O}_X$-módulos coherentes e $i \geq 0$ un índice. Entonces para todo n suficientemente grande se satisface que

$$\operatorname{Ext}^i(\mathscr{F},\mathscr{G}(n)) \cong \Gamma\big(X,\mathscr{E}xt^i(\mathscr{F},\mathscr{G}(n))\big).$$

Nótese que el n depende también del superíndice i.

Demostración: Procedemos por inducción. El caso base $i = 0$ es trivial de expandir las definiciones. El enunciado es cierto para $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X$ por la proposición 7.35 y por el teorema de anulamiento de Serre.

Si $\mathscr{F}$ es localmente libre, entonces como

$$\operatorname{Ext}^i(\mathscr{F}, \mathscr{G} \otimes \mathscr{O}_X(n)) \cong \operatorname{Ext}^i(\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_X(-n), \mathscr{G}),$$

concluimos pues $\mathscr{F}(-n) = 0$ para n suficientemente grande.

Si $\mathscr{F}$ es un haz coherente general, entonces existe un haz localmente libre $\mathscr{E}$ y de rango finito tal que tenemos la sucesión exacta $0 \to \mathscr{K} \to \mathscr{E} \to \mathscr{F} \to 0$. Esto induce la sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G}(n)) \to \operatorname{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{G}(n)) \to \operatorname{Hom}(\mathscr{K}, \mathscr{G}(n)) \to \operatorname{Ext}^1(\mathscr{F}, \mathscr{G}(n)) \to 0$$

para todo n suficientemente grande, y similarmente con $\mathscr{H}om$ y $\mathscr{E}xt$. Esto además induce que $\operatorname{Ext}^{i+1}(\mathscr{F}, \mathscr{G}(n)) \simeq \operatorname{Ext}^i(\mathscr{K}, \mathscr{G}(n))$, donde $\mathscr{K}$ es coherente, lo que permite aplicar un argumento inductivo sobre i. Finalmente, podemos agrandar el n de modo que, por el corolario 7.29.1, la sucesión $\Gamma(X, -(n))$ sea exacta para poder comparar las sucesiones Hom con $\mathscr{H}om$ y concluimos aplicando que $\mathscr{E}xt^i(\mathscr{H}, \mathscr{G}(n)) \simeq \mathscr{E}xt^i(\mathscr{H}, \mathscr{G})(n)$. $\square$

§7.2.2 Funtores derivados de tensores. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Recuérdese que un complejo (de cocadenas) en $\mathscr{A}$ es un diagrama $A^\bullet \colon \mathsf{Poset}(\mathbb{Z})^{\mathrm{op}} \to \mathscr{A}$ (vale decir, una familia $(A^n)_n$ de objetos en $\mathscr{A}$ con flechas $\mathrm{d}^n \colon A^n \to A^{n+1}$) tales que $\mathrm{d}^n \circ \mathrm{d}^{n+1} = 0$ para todo n.[2]

Definición 7.43: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado. Sean $\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet$ un par de complejos de $\mathscr{O}_X$-módulos. Definimos el complejo

$$\mathscr{H}om^n(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) := \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathscr{H}om(\mathscr{F}^p, \mathscr{G}^{p+n}),$$

con el diferencial dado por

$$\mathrm{d}^n_{\mathscr{H}om} := h_{\mathrm{d}_{\mathscr{F}}} + (-1)^{n+1} h^{\mathrm{d}_{\mathscr{G}}}.$$

También definimos el complejo

$$(\mathscr{F}^\bullet \otimes \mathscr{G}^\bullet)^r := \bigoplus_{p+q=r} \mathscr{F}^p \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}^q,$$

con el diferencial dado por

$$\mathrm{d}^r|_{\mathscr{F}^p \otimes \mathscr{G}^q} := \mathrm{d}^p_{\mathscr{F}} \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{G}^q} + (-1)^p \, \mathrm{Id}_{\mathscr{F}^p} \otimes \mathrm{d}^q_{\mathscr{G}}.$$

[2] Quizá un lector de homología de módulos esté más acostumbrado a los complejos de cadenas, en lugar de los complejos de cocadenas. Esta convención existe pues $\mathsf{Mod}_{\mathscr{O}_X}$ posee suficientes inyectivos, pero no suficientes proyectivos.

Definición 7.44: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado. Se dice que un complejo $\mathscr{F}^\bullet$ de $\mathscr{O}_X$-módulos es ***plano*** si para todo complejo exacto $\mathscr{G}^\bullet$ se cumple que $(\mathscr{F} \otimes \mathscr{G})^\bullet$ es un complejo exacto.

Nótese que, para un $\mathscr{O}_X$-módulo arbitrario $\mathscr{F}$, si definimos $\mathscr{F}^\bullet$ como el complejo concentrado en grado 0 con valor $\mathscr{F}$.

Definición 7.45: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado. Como $-\otimes-\colon \mathsf{K}(X)\times \mathsf{K}(X) \to \mathsf{K}(X)$ es un bifuntor triangulado, definimos el ***producto tensorial derivado*** como su funtor derivado izquierdo

$$\otimes^{\mathsf{L}} := \otimes^{\mathsf{L}}_{\mathscr{O}_X} \colon \mathsf{D}(X) \times \mathsf{D}(X) \longrightarrow \mathsf{D}(X).$$

Formalmente, a un par de complejos $(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet)$ los manda a $(\mathscr{F} \otimes \mathscr{P}_{\mathscr{G}})^\bullet$, donde $\mathscr{P}^\bullet_{\mathscr{G}} \to \mathscr{G}^\bullet$ es una resolución plana.

§7.2.3 Imágenes directas superiores.

Proposición 7.46: Sea $f\colon X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos y sea $\mathscr{F}$ un haz abeliano sobre X. Entonces $\mathsf{R}^q f_*\mathscr{F}$ es la hazificación del prehaz $V \mapsto H^q(f^{-1}[V], \mathscr{F}|_{f^{-1}[V]})$.

Demostración: Sea $\mathscr{H}^q(X, \mathscr{F})$ la hazificación del prehaz $V \mapsto H^q(f^{-1}[V], \mathscr{F}|_{f^{-1}[V]})$. Es claro que $\mathscr{H}^0(X, \mathscr{F}) = f_*\mathscr{F}$ y $\mathscr{H}^q(X, \mathscr{I}) = 0$ para todo haz flácido (en particular, todo haz inyectivo) $\mathscr{I}$ sobre X y todo $q > 0$. Más aún, dada una sucesión exacta $0 \longrightarrow \mathscr{F}_1 \longrightarrow \mathscr{F}_2 \longrightarrow \mathscr{F}_3 \longrightarrow 0$ de haces abelianos sobre X, se induce la sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow \mathscr{H}^0(X, \mathscr{F}_1) \longrightarrow \mathscr{H}^0(X, \mathscr{F}_2) \longrightarrow \mathscr{H}^0(X, \mathscr{F}_3) \longrightarrow \mathscr{H}^1(X, \mathscr{F}_1) \longrightarrow \cdots,$$

esto puede verificarse localmente o en fibras o en abiertos afines. Finalmente, esto es suficiente para ver que $\mathscr{H}^q(X, \mathscr{F}) \simeq \mathsf{R}^q f_*\mathscr{F}$. □

Corolario 7.46.1: Sea $f\colon X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos, $\mathscr{F}$ un haz abeliano sobre X y $V \subseteq Y$ un abierto. Definiendo $U := f^{-1}[V]$ tenemos que $\mathsf{R}^q f_*(\mathscr{F})|_V \simeq \mathsf{R}^q(f|_U)_*(\mathscr{F}|_U)$.

Corolario 7.46.2: Sea $f\colon X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos. Para todo haz flácido $\mathscr{F}$ sobre X tenemos que $\mathsf{R}^q f_*\mathscr{F} = 0$ para todo $q > 0$.

Proposición 7.47: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de espacios anillados. Entonces los funtores derivados de $f_*\colon \mathsf{Mod}_{\mathscr{O}_X} \to \mathsf{Mod}_{\mathscr{O}_Y}$ coinciden con $\mathsf{R}^q f_*$.

Demostración: Basta notar que un $\mathscr{O}_X$-módulo es inyectivo (como $\mathscr{O}_X$-módulo) syss lo es como haz abeliano. □

Proposición 7.48: Sea X un esquema noetheriano, $\mathscr{F}$ un haz cuasicoherente sobre X y $f\colon X \to Y$ un morfismo separado de esquemas. Si Y es afín, entonces $\mathsf{R}^q f_*\mathscr{F} = \widetilde{H^q(X,\mathscr{F})}$. En general, para todo Y el haz $\mathsf{R}^q f_*\mathscr{F}$ es cuasicoherente.

Demostración: La técnica es la misma de la proposición 7.46, se construye el funtor de la derecha y se comprueba que coinciden en $q = 0$, que se anulan para haces inyectivos e inducen una sucesión exacta larga. □

Lema 7.49: Sea $f\colon X \to \operatorname{Spec} A$ un morfismo compacto y separado. Sea $\mathscr{F}$ un haz cuasicoherente sobre X y M un A-módulo, y denotemos por $\mathscr{F} \otimes_A M$ el haz sobre X que para abiertos afines $U \subseteq X$ satisface

$$\Gamma(U, \mathscr{F} \otimes_A M) := \Gamma(U, \mathscr{F}) \otimes_A M.$$

Entonces tenemos los homomorfismos canónicos $\check{H}^q(X,\mathscr{F}) \otimes_A M \to \check{H}^q(X, \mathscr{F} \otimes_A M)$. Además, si M es plano, entonces éste homomorfismo es un isomorfismo.

Demostración: Claramente $\mathscr{F} \otimes_A M$ es cuasicoherente. Dado un complejo de A-módulos $N_1 \xrightarrow{\alpha} N_2 \xrightarrow{\beta} N_3$ tenemos un homomorfismo canónico

$$\frac{\ker \beta}{\operatorname{Img} \alpha} \otimes_A M \longrightarrow \frac{\ker(\beta \otimes_A \operatorname{Id}_M)}{\operatorname{Img}(\alpha \otimes_A \operatorname{Id}_M)}$$

el cual es un isomorfismo si M es plano.

Sea $\mathcal{U} := \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento finito por abiertos afines de X. Entonces tenemos que $(\mathscr{F} \otimes_A M)(U_{i_0,\dots,i_p}) = \mathscr{F}(U_{i_0,\dots,i_p}) \otimes_A M$ pues X es separado. Así probamos que

$$\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \otimes_A M \longrightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathscr{F} \otimes_A M),$$

y verificando que el diferencial es $\mathrm{d}^\bullet \otimes_A \operatorname{Id}_M$ obtenemos el homomorfismo del enunciado. El homomorfismo de arriba es un isomorfismo si M es plano, lo que induce el isomorfismo entre grupos de cohomología de Čech. □

Proposición 7.50 (fórmula de proyección): Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo compacto y separado, y sea $\mathscr{F}$ un haz cuasicoherente sobre X.

1. Dado $\mathscr{G}$ un haz cuasicoherente sobre Y, para todo $q \geq 0$ tenemos homomorfismos canónicos:

$$(\mathsf{R}^q f_* \mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{G} \longrightarrow \mathsf{R}^q f_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} f^* \mathscr{G});$$

   más aún, este homomorfismo es un isomorfismo si $\mathscr{G}$ es plano.

2. Dado un Y-esquema $g\colon W \to Y$, para todo $q \geq 0$ tenemos homomorfismos canónicos:

$$g^* \mathsf{R}^q f_* \mathscr{F} \longrightarrow \mathsf{R}^q (f_W)_*((g_X)^* \mathscr{F});$$

   más aún, este homomorfismo es un isomorfismo si W es plano sobre Y.

Demostración: Vamos a probar el inciso 1, porque el segundo se demuestra análogamente. Basta notar que, sobre un abierto afín $V \subseteq Y$ con $U := f^{-1}[V]$, la proposición 7.46 nos dice que las imágenes directas superiores se expresan en términos de grupo de cohomología que, para esquemas separados, coincide con la de Čech:

$$\check{H}^q(U, \mathscr{F}|_U) \otimes_{\mathscr{O}_Y(V)} \mathscr{G}(V),$$

y como $\mathscr{G}(V)$ es plano, el lema nos dice que es isomorfo a

$$\check{H}^q(U, \mathscr{F}|_U \otimes_{\mathscr{O}_Y(V)} \mathscr{G}(V)) \cong \check{H}^q\big(U, (\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} f^* \mathscr{G})|_U\big). \qquad \square$$

Corolario 7.50.1: Sea $f\colon X \to Y := \operatorname{Spec} A$ un morfismo compacto y cuasiseparado, y sea $\mathscr{F}$ un haz cuasicoherente sobre X. Dado un punto $y \in Y$, denotemos por $\Bbbk(y)$ el haz constante sobre $\overline{\{y\}}$; entonces para todo $q \geq 0$ tenemos el isomorfismo canónico

$$H^q(X_y, \mathscr{F}_y) \cong H^q(X, \mathscr{F} \otimes \Bbbk(y)).$$

Demostración: Sea $Y' := \overline{\{y\}}_{\mathrm{red}} \hookrightarrow Y$, y sea $X' := X \times_Y Z$ el cual es un subesquema cerrado de X. Entonces el isomorfismo del enunciado solo depende del esquema $\mathscr{F}' := \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} f^* \Bbbk(y)$ sobre X'. Así, sustituyendo $X, Y, \mathscr{F}$ por $X', Y', \mathscr{F}'$ podemos suponer que Y es afín e íntegro, y que y es su punto genérico, de modo que $\operatorname{Spec} \Bbbk(y) \to Y$ es un morfismo plano, por lo que ahora resulta una mera aplicación de la fórmula de proyección con la proposición 7.48. $\square$

Proposición 7.51: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de esquemas noetherianos separados. Sea $\mathscr{F}$ un haz cuasicoherente sobre X y $\mathcal{U} := \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos afines de Y. Entonces:

$$\mathsf{R}^q f_*(\mathscr{F}) \simeq h^q\big(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, f_*\mathscr{F})\big).$$

En particular, si f es afín, tenemos que $\mathsf{R}^q f_*\mathscr{F} = 0$ para $q > 0$.

Proposición 7.52: Sea Y un esquema localmente noetheriano y sea $f\colon X \to Y$ un morfismo cuasiproyectivo. Sea $r := \sup\{\dim(X_y) : y \in Y\}$. Entonces para todo haz cuasicoherente $\mathscr{F}$ sobre X y todo $q > r$ tenemos que $\mathsf{R}^q f_*\mathscr{F} = 0$.

DEMOSTRACIÓN: Es una aplicación del teorema de anulamiento de Grothendieck. □

Lema 7.53 (de *dévissage*): Sea X un esquema noetheriano y sea $\mathcal{K}$ una clase de $\mathscr{O}_X$-módulos coherentes que satisface lo siguiente:

Dév1. Si $\mathscr{F} \in \mathcal{K}$ y $\mathscr{G} \simeq \mathscr{F}$, entonces $\mathscr{G} \in \mathcal{K}$.

Dév2. Dada una sucesión exacta $0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_3 \to 0$ de haces coherentes, donde $\mathscr{F}_2, \mathscr{F}_3$ (o $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_3$) están en $\mathcal{K}$. Entonces el tercero también está en $\mathcal{K}$.

Dév3. Si $\mathscr{F}$ es un haz coherente tal que $\mathscr{F}^{\otimes d} \in \mathcal{K}$ para algún $d \geq 1$, entonces $\mathscr{F} \in \mathcal{K}$.

Dév4. Para todo punto $\eta \in X$ el subesquema cerrado $i\colon Z := \overline{\{\eta\}}_{\mathrm{red}} \hookrightarrow X$ posee un $\mathscr{O}_Z$-módulo coherente $\mathscr{H}$ tal que $\mathscr{H}_\eta \neq 0$ y $i_*\mathscr{H} \in \mathcal{K}$.

Entonces $\mathcal{K}$ contiene a todos los $\mathscr{O}_X$-módulos coherentes.

La palabra francesa «*dévissage*» significa literalmente «desatornillar».

DEMOSTRACIÓN: En lo sucesivo, diremos que un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{G}$ *tiene soporte* en un subesquema cerrado $\mathbf{V}(\mathscr{I}) \hookrightarrow X$ si $\mathscr{I}\mathscr{G} = 0$. Por inducción noetheriana podemos suponer que $\mathcal{K}$ contiene a todo $\mathscr{O}_X$-módulo coherente con soporte en un subesquema cerrado propio. Sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo coherente; procedemos con la demostración por pasos:

(I) Dado un homomorfismo de haces coherentes $\varphi\colon \mathscr{G}_1 \to \mathscr{G}_2$ tales que $\mathscr{G}_2, \ker\varphi, \operatorname{coker}\varphi$ están en $\mathcal{K}$, entonces $\mathscr{G}_1$ también está en $\mathcal{K}$ por Dév2. Si $\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2 \in \mathcal{K}$ entonces $\mathscr{G}_1 \oplus \mathscr{G}_2 \in \mathcal{K}$.

(ii) Si X no es reducido, sea $0 \neq \mathscr{N} \subseteq \mathscr{O}_X$ su haz de ideales nilpotentes y, por noetherianidad, sea $m > 0$ el mínimo natural tal que $\mathscr{N}^m = 0$. Entonces $\mathscr{N}^{m-1}\mathscr{F}$ es coherente y tiene soporte en $\mathbf{V}(\mathscr{N})$, de modo que está en $\mathcal{K}$ y lo mismo para todo $\mathscr{N}^j\mathscr{F}/\mathscr{N}^{j+1}\mathscr{F}$. Luego empleando repetidas veces el paso (i) vemos que $\mathscr{F} \in \mathcal{K}$.

Si X fuera reducido, pero no irreducible; denotemos por $\{X_j\}_j$ sus componentes irreducibles vistas como subesquemas cerrados íntegros y sea $i_j : X_j \hookrightarrow X$ la inclusión. Sea $\varphi_j : \mathscr{F} \to \mathscr{F}_j := (i_j)_*(i_j)^*\mathscr{F}$ el homomorfismo canónico, y sea $\psi : \mathscr{F} \to \mathscr{G} := \bigoplus_j \mathscr{F}_j$ el homomorfismo diagonal. Por hipótesis, cada $\mathscr{F}_j$ tiene soporte en X_j de modo que está en $\mathcal{K}$, por lo que $\mathscr{G} \in \mathcal{K}$. Más aún, la restricción de ψ a $X_j \setminus \bigcap_{l\neq j} X_l$ es un isomorfismo, de modo que $\ker\psi, \operatorname{coker}\psi \in \mathcal{K}$ con lo que concluimos por (i).

(iii) Por (ii) podemos suponer que X es íntegro con punto genérico ξ y podemos suponer que $\operatorname{Supp}\mathscr{F} = X$. Sea $\mathscr{H} \in \mathcal{K}$ tal que $\mathscr{H}_\xi \neq 0$; luego existen naturales $d, e \geq 0$ tales que $\mathscr{F}_\xi^d \cong \mathscr{H}_\xi^e$ como $K(X)$-espacios vectoriales. Por Dév3, podemos reemplazar $\mathscr{F}$ con $\mathscr{F}^d$ y $\mathscr{H}$ con $\mathscr{H}^e$ de modo que $\mathscr{F}_\xi \cong \mathscr{H}_\xi$. Luego existe un abierto afín no vacío $j : U \hookrightarrow X$ y un isomorfismo $\psi : \mathscr{F}|_U \to \mathscr{H}|_U$. Sean α la composición $\mathscr{F} \to j_*(\mathscr{F}|_U) \to j_*(\mathscr{H}|_U)$ y $\beta : \mathscr{H} \to j_*(\mathscr{H}|_U)$ el homomorfismo canónico. Entonces, ambos $\operatorname{Img}\alpha, \operatorname{Img}\beta$ son coherentes y luego $\mathscr{G} := \operatorname{Img}\alpha \oplus \operatorname{Img}\beta$ lo es. Más aún, $\mathscr{G}|_U \cong \mathscr{H}|_U$, de modo que $\mathscr{G}/\mathscr{H} \in \mathcal{K}$ (pues tiene soporte en $X \setminus U$) y como $\mathscr{H} \in \mathcal{K}$ vemos que $\mathscr{G} \in \mathcal{K}$ por Dév2.

Sea φ la composición $\mathscr{F} \to \operatorname{Img}\alpha \hookrightarrow \mathscr{G}$, de modo que $\varphi|_U = \psi$ es un isomorfismo. De esto se sigue que $\ker\varphi, \operatorname{coker}\varphi \in \mathcal{K}$, por lo que concluimos por (i). □

Éste es el lema original de dévissage (cfr. [**EGA III₁**, pág. 115], thm. III.3.1.2), pero el lector interesado puede revisar otras versiones en [**Stacks**], `Section 01YC`.

Teorema 7.54: Sea X un esquema propio sobre un cuerpo k.

1. Si X es geométricamente conexo y geométricamente reducido, entonces $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) = k$.

2. Para todo haz coherente $\mathscr{F}$ sobre X, las secciones globales $\Gamma(X, \mathscr{F})$ forman un k-espacio vectorial de dimensión finita.

Demostración:

1. Por la fórmula de proyección podemos suponer que k es algebraicamente cerrado. Sea $s \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ una sección global vista como un k-morfismo $s\colon X \to \mathbb{A}^1_k$. Basta probar que s se factoriza por un punto k-valuado de $\mathbb{A}^1_k$. Como X es propio, $Z := \operatorname{Img} s$ es un cerrado de $\mathbb{A}^1_k$, al que podemos dotar de la estructura reducida. Como X es reducido, vemos que s se factoriza por la inclusión $Z \hookrightarrow X$, por lo que basta probar que $Z = \operatorname{Spec} k$. Mediante el encaje $\mathbb{A}^1_k \hookrightarrow \mathbb{P}^1_k$ podemos ver a Z como un cerrado propio de $\mathbb{P}^1_k$, por lo que es un k-esquema finito (¿por qué?) y como X es conexo y reducido, Z también lo es, de modo que $Z = \operatorname{Spec} L$ para alguna extensión finita de cuerpos L/k, es decir, $L = \operatorname{Spec} k$.

2. Sea $\mathcal{K}$ la clase de haces coherentes $\mathscr{F}$ tales que $\dim_k \Gamma(X, \mathscr{F}) < \infty$. Dado que $\Gamma(X, -)$ es exacto por la izquierda se comprueba Dév2 y Dév3 se comprueba trivialmente. Para comprobar Dév4 basta considerar $\mathscr{H} = \mathscr{O}_Z$ que, por el inciso 1, satisface que $\Gamma(X, \mathscr{H}) = k^n$, donde dicho n puede crecer con la cantidad de componentes conexas e irreducibles sobre k^{alg}, pero que serán finitas por noetherianidad. □

Corolario 7.54.1: Sea X un esquema propio, geométricamente conexo y geométricamente reducido sobre un cuerpo k, y sea Y un esquema afín sobre k.

Teorema 7.55 (de coherencia de Grothendieck): Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo propio de esquemas noetherianos separados, sea $\mathscr{O}_X(1)$ un haz muy amplio de X sobre Y y sea $\mathscr{F}$ un haz coherente sobre X. Entonces:

1. Para n suficientemente grande tenemos un epimorfismo $f^* f_* \mathscr{F}(n) \twoheadrightarrow \mathscr{F}(n)$.

2. Para todo $q \geq 0$, el haz $\mathsf{R}^q f_* \mathscr{F}$ es coherente.

3. Para n suficientemente grande y todo $q \geq 0$, se tiene que $\mathsf{R}^q f_*\big(\mathscr{F}(n)\big) = 0$.

7.3 Dualidad y el haz canónico

Definición 7.56: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de esquemas, entonces definimos para un entero $r \geq 0$ el ***haz de diferenciales relativos de***

orden r a $\Omega^r_{X/Y} := \bigwedge^r \Omega^1_{X/Y}$. Si Y es localmente noetheriano y f es suave, entonces $\Omega^1_{X/Y}$ es localmente libre y podemos definir $\det \Omega^1_{X/Y}$ (cfr. §9.1.2).

Propiedades del determinante son las siguientes:

Proposición 7.57: Sea X un esquema y $\mathscr{F}$ un haz localmente libre de rango finito sobre X. Se cumplen:

1. Para todo morfismo de esquemas $p\colon Y \to X$ tenemos un isomorfismo canónico $\det(p^*\mathscr{F}) \simeq p^*(\det \mathscr{F})$.
2. Sea $0 \to \mathscr{E} \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to 0$ una sucesión exacta de haces localmente libres de rango finito sobre X. Entonces hay un isomorfismo canónico $\det \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \det \mathscr{G} \simeq \det \mathscr{F}$.
3. Hay un isomorfismo canónico $\det(\mathscr{F}^\vee) \simeq (\det \mathscr{F})^\vee$.
4. Los isomorfismos de los incisos anteriores conmutan con cambio de base.

Lema 7.58: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de tipo finito entre esquemas localmente noetherianos. Dado el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, hook', "i_1"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, hook, "i_2"] & \\ Z_1 \arrow[r, "g_1"'] & Y & Z_2 \arrow[l, "g_2"] \end{tikzcd}$$

donde cada i_j es un encaje regular y cada g_j suave, entonces tenemos un isomorfismo canónico de haces sobre X:

$$\psi_{12}\colon \det(\mathscr{C}_{X/Z_1})^\vee \otimes i_1^*(\det \Omega^1_{Z_1/Y}) \xrightarrow{\sim} \det(\mathscr{C}_{X/Z_2})^\vee \otimes i_2^*(\det \Omega^1_{Z_2/Y}).$$

Demostración: Sea $W := Z_1 \times_Y Z_2$ y sea $h := (i_1, i_2)\colon X \to W$. Aplicando el corolario 6.84 obtenemos las sucesiones exactas:

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}_{X/Z_1} \longrightarrow \mathscr{C}_{X/W} \longrightarrow h^*\Omega^1_{W/Z_1} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}_{X/Z_2} \longrightarrow \mathscr{C}_{X/W} \longrightarrow h^*\Omega^1_{W/Z_2} \longrightarrow 0.$$

Luego, tenemos que $\Omega^*_{W/Z_1} \simeq p_2^*\Omega^1_{Z_2/Y}$ donde $p_2\colon W \to Z_2$ es la proyección canónica, luego $h^*\Omega^*_{W/Z_1} \simeq i_2^*\Omega^1_{Z_2/Y}$ y análogamente $h^*\Omega^*_{W/Z_2} \simeq i_1^*\Omega^1_{Z_1/Y}$. Concluimos por la proposición anterior. $\square$

Definición 7.59: Sea Y un esquema localmente noetheriano y $f\colon X \to Y$ un morfismo cuasiproyectivo i.c.l. Sea Z (que podemos suponer de la forma $\mathbb{P}^n_Y$) tal que f se factoriza por un encaje $i\colon X \hookrightarrow Z$ y un morfismo suave $Z \to Y$. Definimos el ***haz canónico*** de f como el haz invertible

$$\omega_{X/Y} := \det(\mathscr{C}_{X/Z})^\vee \otimes i^*(\det \Omega^1_{Z/Y}).$$

Teorema 7.60: Sean $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ un par de morfismos cuasiproyectivos i.c.l.'s. Se cumplen:

1. **Fórmula de adjunción:** Tenemos el isomorfismo canónico
$$\omega_{X/Z} \simeq \omega_{X/Y} \otimes_{\mathscr{O}_X} f^*\omega_{Y/Z}.$$
2. (Cambio de base) Sea W un Y-esquema, denótese $p := f_W\colon X_W \to W$ y supongamos que W o X son planos sobre Y, entonces tenemos el isomorfismo canónico $\omega_{X_W/W} \simeq p^*\omega_{X/Y}$.

Demostración:

1. Elijamos dos encajes $i\colon X \hookrightarrow U := \mathbb{P}^n_Y$ y $j\colon Y \hookrightarrow V := \mathbb{P}^n_Z$ (de misma dimensión), tales que tenemos el siguiente diagrama conmutativo (y tal que i, j son encajes regulares por la proposición 6.87):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & U \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & \mathbb{P}^n_V =: V' \arrow[d, "q"] \\
& Y \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "g"'] & V \arrow[d] \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, nótese que si $i\colon X \to U$ es un encaje arbitrario, entonces $\omega_{X/U} = \det(\mathscr{C}_{X/U})^\vee$, de modo que aplicando la proposición 6.83 con el inciso 2 de prop. 7.57 obtenemos los siguientes isomorfismos canónicos:

$$\omega_{X/V'} \simeq \omega_{X/U} \otimes i^*\omega_{U/V'} \simeq \omega_{X/U} \otimes i^*p^*\omega_{Y/V} \simeq \omega_{X/U} \otimes f^*\omega_{Y/V}. \quad (7.1)$$

Así mismo, si $V' \to Z$ es suave, entonces $\omega_{V'/Z} = \det \Omega^1_{V'/Z}$ y aplicamos la primera sucesión fundamental (con exactitud al principio, por el corolario 6.75.1) para probar que $\omega_{V'/Z} \simeq \omega_{V'/V} \otimes q^*\omega_{V/Z}$. Por cambio de base (prop. 6.66):

$$j_{V'}^*\omega_{V'/V} = j_{V'}^* \det(\Omega_{V'/V})^\vee \simeq \det(j_{V'}^*\Omega_{V'/V})^\vee \simeq \det(\Omega_{U/Y})^\vee \simeq \omega_{U/Y},$$

donde todos los isomorfismos son canónicos.

Así tenemos que

$$\begin{aligned}(i \circ j_{V'})^*\omega_{V'/Z} &\simeq i^*\omega_{U/Y} \otimes (i \circ j_{V'})^* q^*\omega_{V/Z} \\ &\simeq i^*\omega_{U/Y} \otimes f^*g^*\omega_{V/Z},\end{aligned} \tag{7.2}$$

Finalmente, tensorizando (7.1) y (7.2) obtenemos el enunciado.

2. Si W es plano sobre Y aplicamos cambio de base para el haz de diferenciales relativos y cambio de base plano para el haz conormal.

¿Por qué plano implica localmente afín?

Si X es plano sobre Y, entonces se factoriza localmente por un encaje cerrado $X \hookrightarrow Z := \mathbb{A}_Y^n$ (este Z no tiene nada que ver con el del enunciado) y la proyección canónica $Z \twoheadrightarrow Y$. Sea $x \in X$ y sea $y := f(x)$, de modo que $m := \operatorname{codim}_W(\overline{\{x\}}, X)$. Luego $X_y \to Z_y$ es un encaje regular (cfr. demostración del corolario 6.88.1) de codimensión m en x y para todo punto $x' \in (X \times_Y W)_x$, tenemos que $X_W \hookrightarrow Z_W$ es un encaje regular de codimensión m en x'.

Denotando $p\colon X_W = X \times_Y W \to X$ la proyección canónica, vemos que el epimorfismo $p^*\mathscr{C}_{X/Z} \twoheadrightarrow \mathscr{C}_{X_{Z_W}/Z_W} = \mathscr{C}_{X_W/Z_W}$ dado por el inciso 3 de la proposición 6.83 es un isomorfismo por estar dado entre haces localmente libres de mismo rango. Finalmente, concluimos pues $\omega_{Z/Y}$ dado por el teorema 6.68 siempre conmuta con todo cambio de base. □

Proposición 7.61: Sea Y un esquema localmente noetheriano. Entonces para todo $n \geq 1$ se tiene que $\omega_{\mathbb{P}_Y^n/Y} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}_Y^n}(-n-1)$.

Demostración: Aplicando cambio de base, basta demostrarlo para $Y = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. ... □

Ahora procedemos a hablar de dualidad de Serre-Grothendieck, para ello seguimos la exposición de Altman y Kleiman [12].

Teorema 7.62 (de dualidad de Yoneda-Cartier): Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ un par de categorías abelianas, donde $\mathscr{A}$ posee suficientes inyectivos. Sea $T\colon \mathscr{A} \to$

$\mathscr{B}$ un funtor aditivo exacto por la izquierda. Entonces para todo par de objetos $F, G \in \operatorname{Obj} \mathscr{A}$ existe un emparejamiento, llamado ***de Yoneda***,

$$\mathsf{R}^p\, T(F) \times \operatorname{Ext}^q(F, G) \longrightarrow \mathsf{R}^{p+q}\, T(G),$$

para todo $p, q \geq 0$, los cuales son ∂-funtores; vale decir, son una equivalencia de bifuntores.

DEMOSTRACIÓN: Sean $0 \to F \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$ y $0 \to G \to J^\bullet$ dos resoluciones inyectivas. Definimos el complejo de cocadenas $\operatorname{Hom}^\bullet(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$ de grupos abelianos como el que tiene por objetos $\operatorname{Hom}^q(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$ como la familia de flechas $(u_p\colon I^p \to J^{q+p})_{p\in\mathbb{Z}}$ (que no necesariamente forman un morfismo de complejos) y definimos el operador de coborde

$$\begin{aligned} \partial^q\colon \operatorname{Hom}^q(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}) &\longrightarrow \operatorname{Hom}^{q+1}(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}) \\ (u_p)_{p\in\mathbb{Z}} &\longmapsto (u_p \circ \mathrm{d}_J^{p+q} + (-1)^q \mathrm{d}_I^p \circ u_{p+1})_{p\in\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Efectivamente es un complejo de cocadenas y tiene la propiedad de que $\partial(v_\bullet) = 0$ syss $v_\bullet$ es nulhomotópica, de modo que $h^q(\operatorname{Hom}^\bullet(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}))$ es el grupo de clases de homotopía de morfismos que anticonmutan con el coborde.

Así $u_\bullet \in \operatorname{Hom}^q(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$ induce un morfismo de cocadenas $T(u)\colon TI^\bullet \to TJ^\bullet[q]$. Si $\partial u_\bullet = 0$, entonces induce un homomorfismo $h^p\big(T(u)\big)\colon\ \mathsf{R}^p\, T(F) \to \mathsf{R}^{p+q}\, T(G)$ para todo p. Si $u_\bullet = \partial w_\bullet$, entonces $h^\bullet T(u) = 0$, de modo que $h^\bullet T(u)$ solo depende de la clase de homotopía de $u_\bullet$; luego existen emparejamientos $\mathsf{R}^p\, T(F) \times h^q\big(\operatorname{Hom}^\bullet(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})\big) \to \mathsf{R}^{p+q}\, T(G)$ como se quería ver.

Basta verificar que $h^q\big(\operatorname{Hom}^\bullet(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})\big)$ es isomorfo al $\operatorname{Ext}^q(F, G)$. Para ello construimos el morfismo de complejos de cocadenas $\Phi\colon\ \operatorname{Hom}^\bullet(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}) \to \operatorname{Hom}(F, J^\bullet)$ dado por $\Phi(u_\bullet) := \varepsilon \circ u_0$ (queda al lector verificar que conmuta con los cobordes), de modo que desciende a un homomorfismo

$$h^q\Phi\colon h^q\big(\operatorname{Hom}^\bullet(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})\big) \longrightarrow \operatorname{Ext}^q(F, G).$$

Para construir una inversa, sea $a \in \operatorname{Ext}^q(F, G)$ y sea $z \in \operatorname{Hom}(F, J^q)$ un representante de a. Vale decir, $z \circ \mathrm{d}_J^q = 0$, de modo que se factoriza por $\ker \mathrm{d}$ lo que induce el siguiente diagrama conmutativo (pues los J^i's son inyectivos):

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d, "z"] & I^0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "y_0"] & I \arrow[r] \arrow[d, dashed, "y_1"] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & \ker \mathrm{d} \arrow[r] & J^q \arrow[r] & J^{q+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Esto induce un morfismo de complejos $y^\bullet\colon I^\bullet \to J^\bullet[q]$, el cual es único salvo homotopía.

Finalmente si $z = s\circ \mathrm{d}_J^q$, entonces uno puede extenderlo a una homotopía $(s_p)_{p\in\mathbb{Z}}\colon y^\bullet \simeq 0$, de modo que $y^\bullet$ depende, salvo homotopía, exclusivamente de a. Si $\tilde{y}$ es la clase de homotopía de $\big((-1)^p y^p\big)_{p\in\mathbb{Z}}$, entonces el morfismo $a \mapsto \tilde{y}$ es una inversa de $h^q\Phi$. □

Teorema 7.63: Sean $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$ un trío de categorías abelianas, donde $\mathscr{A},\mathscr{B}$ tienen suficientes inyectivos. Sean $T\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}, S\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ un par de funtores aditivos, donde S exacto por la izquierda. Supongamos que T transforma objetos inyectivos en S-acíclicos (i.e., $\mathsf{R}^q\, S(TQ) = 0$ para todo Q inyectivo y todo $q > 0$). Entonces para todo objeto $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{A}$ existe una sucesión espectral

$$E_2^{p,q} := \mathsf{R}^q\, S(\mathsf{R}^p\, T(A)) \Longrightarrow E^{p+q} := \mathsf{R}^{p+q}(T\circ S)(A).$$

Demostración: Sea $0 \to A \to I^\bullet$ una resolución inyectiva de A y para cada $p \geq 0$ sea $0 \to T(I^p) \to J^{p,\bullet}$ una resolución inyectiva. Podemos elegir dichas resoluciones de modo que $J^{\bullet,\bullet}$ sea un complejo doble. ... □

Veamos la potencia de éste teorema con ejemplos concretos:

Corolario 7.63.1: Sea $f\colon (X,\mathscr{O}_X) \to (Y,\mathscr{O}_Y)$ un morfismo de espacios anillados y sean $\mathscr{F},\mathscr{G}$ un par de $\mathscr{O}_X$-módulos. Entonces tenemos el siguiente par de sucesiones espectrales

$$H^p\big(X, \mathscr{E}xt^q(\mathscr{F},\mathscr{G})\big) \Longrightarrow \operatorname{Ext}^{p+q}(\mathscr{F},\mathscr{G}),$$

$$H^p(Y, \mathsf{R}^q\, f_*\mathscr{F}) \Longrightarrow H^{p+q}(X,\mathscr{F}).$$

Corolario 7.63.2: Sea $f\colon Z \hookrightarrow X$ un encaje cerrado de espacios anillados, y sean $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo localmente libre de rango finito, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo arbitrario y $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_Y$-módulo. Tenemos un par de sucesiones espectrales:

$$\operatorname{Ext}_X^p\left(\mathscr{F}, \mathscr{E}xt_Y^q(f^*\mathscr{E},\mathscr{G})\right) \Longrightarrow \operatorname{Ext}_Y^{p+q}\left(f^*(\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{F}),\mathscr{G}\right)$$

$$\mathscr{E}xt_X^p\left(\mathscr{F}, \mathscr{E}xt_Y^q(f^*\mathscr{E},\mathscr{G})\right) \Longrightarrow \mathscr{E}xt_Y^{p+q}\left(f^*(\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{F}),\mathscr{G}\right)$$

El teorema 7.28 en este contexto admite una interpretación como «dualidad sobre espacios proyectivos». Una consecuencia del emparejamiento de Yoneda aplicado a la dualidad de Serre es:

Teorema 7.64 – *Dualidad de Serre*: Sea k un cuerpo, $P := \mathbb{P}_k^n$ y $\mathscr{F}$ un haz coherente sobre P. El emparejamiento de Yoneda $H^r(P, \mathscr{F}) \times \operatorname{Ext}_P^{n-r}(\mathscr{F}, \omega_{P/k}) \to H^n(P, \omega_{P/k})$ es no singular; vale decir, existe un isomorfismo $\eta\colon H^n(P, \omega_{P/k}) \xrightarrow{\sim} k$ y los homomorfismos canónicos

$$\operatorname{yon}_r(\mathscr{F})\colon \operatorname{Ext}_P^{n-r}(\mathscr{F}, \omega_{P/k}) \xrightarrow{\quad\sim\quad} H^r(P, \mathscr{F})^\vee$$

son isomorfismos ∂-funtoriales en $\mathscr{F}$.

Teniendo ya dualidad de Serre, uno es capaz de demostrar una serie de resultados profundos como el teorema de Riemann-Roch o la existencia de polinomios de Hilbert-Samuel. El último es tratado en la sección §8.1.2, que se recomienda leer desde ya, pero que necesita de un detalle técnico que resolvemos más adelante.

7.4 Cohomología sobre fibras

Recuérdese que dado un ideal $\mathfrak{a} \lhd A$ podemos definir la ***compleción $\mathfrak{a}$-ádica*** como el límite $\varprojlim_n A/\mathfrak{a}^n$. Usualmente elegiremos el ideal $\mathfrak{a}$ de modo que sea primo. Si $(A, \mathfrak{m})$ es local, denotaremos $\widehat{A} := \varprojlim_n A/\mathfrak{m}^n$ el cual también es un anillo local que preserva varias propiedades de A.

Definición 7.65: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo propio entre esquemas noetherianos, $\mathscr{F}$ un haz coherente sobre X e $y \in Y$ un punto. Denotando por $L_n := \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_{Y,y}^n)$ un ***Y-esquema local grueso*** sobre y con el morfismo canónico $g_n\colon L_n \to Y$ podemos definir

$$X_n := X \times_Y L_n, \qquad \mathscr{F}_n := (g_n)_X^* \mathscr{F}.$$

Ahora bien $\mathsf{R}^q f_* \mathscr{F}$ es un haz coherente sobre Y, y $(\mathsf{R}^q f_* \mathscr{F})_y$ es un $\mathscr{O}_{Y,y}$-módulo y, tomando compleciones, denotamos

$$\widehat{\mathsf{R}^q f_* \mathscr{F}_y} := \varprojlim_n (\mathsf{R}^q f_* \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_{Y,y}^n).$$

La fórmula de proyección y la proposición 7.48 nos dan homomorfismos canónicos:

$$\widehat{\mathsf{R}^q f_* \mathscr{F}_y} \longrightarrow \varprojlim_n \mathsf{R}^q (f_{L_n})_* \mathscr{F}_n = \varprojlim_n H^q(X_n, \mathscr{F}_n).$$

Teorema 7.66 (de funciones formales): Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo propio entre esquemas noetherianos, $\mathscr{F}$ un haz coherente sobre X e $y \in Y$ un punto. Con la notación de la definición anterior, para todo $q \geq 0$ tenemos un isomorfismo canónico:

$$\widehat{\mathsf{R}^q f_* \mathscr{F}_y} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n H^q(X_n, \mathscr{F}_n).$$

Demostración: La demostración es por pasos.

Revisar argumento. Probablemente se necesite teo. prin. de Zariski.

(i) Sean $\pi\colon X' \twoheadrightarrow X$ suprayectivo, proyectivo y birracional, y $g\colon X' \to Y$ proyectivo tales que $\pi \circ f = g$ por lema de Chow.

(ii) Primero consideraremos que f es un morfismo proyectivo. Sea $i\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^d_Y$, tal que, $f = i \circ p$, donde $p\colon \mathbb{P}^d_Y \to Y$ es el morfismo canónico. Luego, denotando por $L_n := \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}^n_{Y,y})$ el Y-esquema local grueso en y, vemos que el cambio de base $i_{L_n}\colon X_n \to (\mathbb{P}^d_Y)_n$ sigue siendo un encaje cerrado (en particular, es un morfismo afín, por lo que preserva cohomología), de modo que sustituyendo $\mathscr{F}$ por $i_*\mathscr{F}$, vemos que basta demostrarlo para $X = \mathbb{P}^d_Y$.

(iii) Definiendo $A := \mathscr{O}_{Y,y}$, notamos que el esquema local $\operatorname{Spec} A$ en y es plano sobre Y. Por lo que, aplicando la fórmula de proyección, podemos suponer que Y es afín, que y es cerrado y que A es local. Aquí, por la proposición 7.48, la fórmula ha demostrar es

$$\widehat{H^q(X, \mathscr{F})} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n H^q(X_n, \mathscr{F}_n) \tag{7.3}$$

(iv) Probaremos que (7.3) aplica por dévissage sobre $X = \mathbb{P}^d_A$. En primer lugar, para $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X(p)$ se satisface que $\mathscr{F}_n = \mathscr{O}_{X_n}(p)$ sobre $X_n = \mathbb{P}^d_{A_n}$, donde $A_n := A/\mathfrak{m}^n$. Nótese que $H^q(X_n, \mathscr{O}_{X_n}(p)) \cong H^q(X, \mathscr{O}_X(p)) \otimes_A A/\mathfrak{m}^n$ por el teorema 7.28, por lo que el resultado es cierto por definición.

De éste modo, al pasar a un subesquema cerrado $Z = \overline{\{\eta\}} \subseteq X$, el cual será proyectivo, podemos seguir el mismo procedimiento del paso (ii) para ver que el teorema vale para algún $\mathscr{H}$ y así, la condición Dév4 está satisfecha. La condición Dév1 y Dév3 también se satisfacen trivialmente.

(v) Finalmente sólo queda probar la condición Dév2. Sea $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$ una sucesión exacta donde el enunciado vale para $\mathscr{F}, \mathscr{G}$. Entonces podemos tensorizar por $\mathscr{O}_{X_n}$ (¡el cual no es exacto, en general!) y obtener la sucesión exacta $\mathscr{F}_n \xrightarrow{\alpha_n} \mathscr{G}_n \longrightarrow \mathscr{H}_n \longrightarrow 0$.

Definiendo $\mathscr{K}_n := \ker(\alpha_n)$ e $\mathscr{I}_n := \operatorname{Img}(\alpha_n)$, tenemos las siguientes dos sucesiones exactas

$$0 \to \mathscr{K}_n \to \mathscr{F}_n \to \mathscr{I}_n \to 0, \tag{7.4}$$
$$0 \to \mathscr{I}_n \to \mathscr{G}_n \to \mathscr{H}_n \to 0. \tag{7.5}$$

Ahora bien, empleando que el funtor de compleción de A-módulos $\widehat{()}$ es exacto y tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{H^q(X,\mathscr{F})} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1", "\wr"'] & \widehat{H^q(X,\mathscr{G})} \arrow[r] \arrow[dd, "\alpha_2", "\wr"'] & \widehat{H^q(X,\mathscr{H})} \arrow[r] \arrow[dd, "\alpha_3"] & \widehat{H^{q+1}(X,\mathscr{F})} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_4", "\wr"'] & \widehat{H^{q+1}(X,\mathscr{G})} \arrow[dd, "\alpha_5", "\wr"'] \\
\varprojlim_n H^q(X_n,\mathscr{F}_n) \arrow[d, "\beta_1"] & & & \varprojlim_n H^{q+1}(X_n,\mathscr{F}_n) \arrow[d, "\beta_2"] & \\
\varprojlim_n H^q(X_n,\mathscr{I}_n) \arrow[r] & \varprojlim_n H^q(X_n,\mathscr{G}_n) \arrow[r] & \varprojlim_n H^q(X_n,\mathscr{H}_n) \arrow[r] & \varprojlim_n H^{q+1}(X_n,\mathscr{I}_n) \arrow[r] & \varprojlim_n H^{q+1}(X_n,\mathscr{H}_n)
\end{tikzcd}$$

Basta probar que β_1, β_2 (que vienen inducidos de la sucesión (7.5)) son isomorfismos para aplicar el lema de los cinco y ver que α_3 es un isomorfismo. Demostrar que los β's son isomorfismos es equivalente a ver que $\varprojlim_n H^q(X_n, \mathscr{K}_n) = 0$ y, para ello, es suficiente ver que el homomorfismo de haces $\rho_n^m \colon \mathscr{K}_m \to \mathscr{K}_n$ con $m > n$ es nulo para un n suficientemente grande.

Ver que $\rho_n^m = 0$ se puede hacer localmente en X, por lo que podemos suponer que $X = \operatorname{Spec} B$ es afín, y que $\mathscr{F} = \widetilde{F}, \mathscr{G} = \widetilde{G}, \mathscr{K}_n = \widetilde{K_n}$. Denótese $\mathfrak{b} := \mathfrak{m}_{Y,y} B$. Así, F es un B-submódulo de G y

$$K_n = \ker(F/\mathfrak{b}^n F \to G/\mathfrak{b}^n G) = \frac{F \cap \mathfrak{b}^n G}{\mathfrak{b}^n F}.$$

Pero por el lema de Artin-Rees, la topología $\mathfrak{b}$-ádica sobre F es la topología subespacio de la $\mathfrak{b}$-ádica sobre G y, por tanto, existe n suficientemente grande tal que $F \cap \mathfrak{b}^n G \subseteq \mathfrak{b}^n F$ como se quería probar. □

El nombre *funciones formales* se debe a que la compleción (t)-ádica del anillo de polinomios $k[t]$ es el anillo de series formales de potencias $k[[t]]$.

Teorema 7.67 (principio de conexión de Zariski): Sea Y un esquema localmente noetheriano y $f\colon X \to Y$ un morfismo propio. Si $f^\sharp\colon \mathscr{O}_Y \xrightarrow{\sim} f_*\mathscr{O}_X$ es un isomorfismo, entonces para todo $y \in Y$ la fibra X_y es geométricamente conexa sobre $\Bbbk(y)$.

Demostración:

(i) X_y es conexo: Supongamos, por contradicción, que $X_y = X' \amalg X''$, donde X', X'' son cerrados disjuntos. Es fácil notar que $\operatorname{Spec} \Bbbk(y) \to \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_{Y,y}^n)$ es universalmente homeomorfismo, de modo que $X_n = X'_n \amalg X''_n$, por lo que

$$\Gamma(X_n, \mathscr{O}_{X_n}) \cong \Gamma(X'_n, \mathscr{O}_{X'_n}) \oplus \Gamma(X''_n, \mathscr{O}_{X''_n}).$$

Por el teorema de funciones formales, $\widehat{\mathscr{O}_{Y,y}} = \widehat{f_*\mathscr{O}_{X\,y}} \cong \varprojlim_n \Gamma(X_n, \mathscr{O}_{X_n}) \cong A' \oplus A''$, donde

$$A' := \varprojlim_n \Gamma(X'_n, \mathscr{O}_{X'_n}), \qquad A'' := \varprojlim_n \Gamma(X''_n, \mathscr{O}_{X''_n}).$$

Pero esto es absurdo puesto que un anillo local no puede ser el producto de otros dos anillos (basta notar que cada componente conexa tiene un punto cerrado distinto).

(ii) X_y es geométricamente conexo: Haciendo cambio de base por $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{Y,y}$, podemos suponer que $Y = \operatorname{Spec} A$ es afín, que $y \in A$ es cerrado y que $(A, \mathfrak{m})$ es local. Sea $k := \Bbbk(y)$ y $K := k[t]/(\tilde{f}(t))$ una extensión simple de k, donde $\tilde{f}(t) \in k[t]$ es mónico irreducible. Sea $f(t) \in A[t]$ mónico tal que $f(t) \equiv \tilde{f}(t) \pmod{\mathfrak{m}}$, y sea $B := A[t]/(f(t))$, la cual es una A-álgebra de tipo finito, local y plana (¿por qué?). Sea $q := f_B\colon X_B \to \operatorname{Spec} B$ el cual es un morfismo proyectivo y tenemos que $\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} B} \simeq q_*\mathscr{O}_{X_B}$, de modo que aplicando el paso (i) vemos que la fibra del punto cerrado $s \in \operatorname{Spec} B$ en X_B es conexa, y precisamente $(X_B)_s \cong X_y \times_k \operatorname{Spec} K$. Como cada extensión finita de k está generado por adjuntar finitos elementos, entonces concluimos. □

A veces al siguiente corolario se le llama *teorema principal de Zariski* (e.g., Hartshorne [**8**]):

Corolario 7.67.1: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo propio birracional, y supongamos que Y es localmente noetheriano, íntegro y normal. Entonces todas las fibras X_y son geométricamente conexas.

Demostración: Basta probar que $\mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ es un isomorfismo. Podemos suponer que $Y = \operatorname{Spec} A$ es afín Nótese que $f_*\mathscr{O}_X$ es un $\mathscr{O}_Y$-módulo coherente por coherencia de Grothendieck y $B := \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ es una A-álgebra entera por el teorema 4.49; pero A, B son dominios íntegros con el mismo cuerpo de fracciones y A es íntegramente cerrado. □

Lema 7.68: Sea $(A, \pi A, k)$ un dominio de valuación discreta y sea $K := \operatorname{Frac} A$. Dado un A-módulo finitamente generado M, entonces se satisface

$$\dim_k(M \otimes_A k) - \dim_k(M[\pi]) = \dim_K(M \otimes_A K).$$

Lema 7.69: Sea A un dominio de valuación discreta. Sea X un esquema sobre A y $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo cuasicoherente plano sobre A. Entonces para todo $q \geq 0$ y todo $\alpha \in \mathscr{O}_X \setminus \{0\}$ tenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \frac{H^q(X, \mathscr{F})}{\alpha H^q(X, \mathscr{F})} \longrightarrow H^q(X, \mathscr{F}/\alpha\mathscr{F}) \longrightarrow H^{q+1}(X, \mathscr{F})[\alpha] \longrightarrow 0$$

Teorema 7.70: Sea $S := \operatorname{Spec} A$ el espectro de un dominio de valuación discreta con punto cerrado s y punto genérico η. Sea X un esquema propio sobre S y sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo cuasicoherente S-plano. Para todo $p \geq 0$ se cumplen:

1. La función $y \mapsto \dim_{\Bbbk(y)} H^p(X_y, \mathscr{F}_y)$ sobre S es semicontinua superior. Equivalentemente:
$$\dim_{\Bbbk(\eta)} H^p(X_\eta, \mathscr{F}_\eta) \leq \dim_{\Bbbk(s)} H^p(X_s, \mathscr{F}_s). \tag{7.6}$$

2. La desigualdad (7.6) es una igualdad syss $H^p(X, \mathscr{F})$ es un A-módulo libre y el homomorfismo canónico
$$\beta_s \colon H^p(X, \mathscr{F}) \otimes_A \Bbbk(s) \longrightarrow H^p(X_s, \mathscr{F}_s) \tag{7.7}$$
es un isomorfismo.

3. Supongamos que β_s es un epimorfismo, entonces el homomorfismo canónico
$$\rho_M \colon H^p(X, \mathscr{F}) \otimes_A M \longrightarrow H^p(X, \mathscr{F} \otimes_A M)$$
para todo A-módulo M.

4. El homomorfismo β_s es un isomorfismo syss $H^{p+1}(X, \mathscr{F})$ es un A-módulo libre.

Proposición 7.71: Sea Y un esquema localmente noetheriano y $f\colon X \to Y$ un morfismo propio. Sea X' el conjunto de puntos $x \in X$ que están aislados en la fibra $f^{-1}[\{f(x)\}] = X_{f(x)}$. Entonces X' es abierto y la restricción de la factorización de Stein f' a X' induce un isomorfismo.

Proposición 7.72: Sea Y un esquema localmente noetheriano y $f\colon X \to Y$ un morfismo. Son equivalentes:

1. f es finito.
2. f es afín y propio.
3. f es propio y cuasifinito.

***Teorema 7.73 – Teorema principal de Zariski*:** Sea Y un esquema noetheriano y $f\colon X \to Y$ un morfismo cuasiproyectivo. Sea X' el conjunto de puntos $x \in X$ que están aislados en la fibra $X_{f(x)}$. Entonces X' es un abierto de X y existe un Y-esquema finito Y' tal que X' es un subesquema abierto de Y'.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\text{cuasiproyectivo}"] & Y \\
X' \arrow[u, hook, "\circ" description] \arrow[r, hook, "\circ" description] & Y' \arrow[u, "\text{finito}"']
\end{tikzcd}$$

Hay muchas otras versiones del teorema principal de Zariski. El lector interesado puede consultar [**EGA III$_1$**], §III.4.4.

8

Divisores y diferenciales

8.1 Funciones meromorfas

§8.1.1 Puntos asociados y encajados.

Definición 8.1: Sea X un espacio topológico, $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos y $s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ una sección. Se le llama el ***soporte*** de la sección s y del haz $\mathscr{F}$ a:

$$\operatorname{Supp}(s) := \{x \in X : s|_x \neq 0\}, \qquad \operatorname{Supp} \mathscr{F} := \{x \in X : \mathscr{F}_x \neq 0\}.$$

Lema 8.2: Sea X un esquema y $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. Entonces:

1. Para toda sección $s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ se cumple que $\operatorname{Supp}(s)$ es un cerrado en el subespacio U.
2. Si $\mathscr{F}$ está globalmente generado, entonces $\operatorname{Supp} \mathscr{F}$ es un cerrado de X.

Recuérdese la siguiente definición de álgebra conmutativa:

Definición 8.3: Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Se dice que un primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ está ***asociado*** a M si existe un $m \in M$ tal que $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann} m$.

Definición 8.4: Sea X un esquema y $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. Se dice que un punto $x \in X$ está ***asociado*** a $\mathscr{F}$ si el primo $\mathfrak{m}_{X,x}$ es asociado a la fibra

$\mathscr{F}_x$. Denotamos por $\mathrm{As}_X(\mathscr{F})$ el conjunto de puntos asociados de X a $\mathscr{F}$. Decimos que un punto de X es un ***punto asociado*** si está asociado a $\mathscr{O}_X$.

Ahora una serie de traducciones de resultados sobre primos asociados (§A.10):

Proposición 8.5: Sea X un esquema y sea $\mathscr{F}$ un haz cuasicoherente sobre X. Sea $\operatorname{Spec} A = U \subseteq X$ un abierto afín, sea $M = \Gamma(U, \mathscr{F})$ y sea $x \in U$ un punto. Denotando por $\mathfrak{p} := \mathfrak{p}_x$ se tiene:

1. Si $\mathfrak{p}$ está asociado a M, entonces x está asociado a $\mathscr{F}$.
2. Si $\mathfrak{p}$ es finitamente generado y $x_\mathfrak{p}$ está asociado a $\mathscr{F}$, entonces $\mathfrak{p}$ está asociado a M.

En particular, si X es localmente noetheriano, entonces

$$\mathfrak{p} \in \mathrm{As}\big(\Gamma(U, \mathscr{F})\big) \iff x \in \mathrm{As}_U(\mathscr{F}).$$

Proposición 8.6: Sea X un esquema y sea $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$ una sucesión exacta de haces cuasicoherentes. Entonces $\mathrm{As}(\mathscr{F}) \subseteq \mathrm{As}(\mathscr{G}) \subseteq \mathrm{As}(\mathscr{F}) \cup \mathrm{As}(\mathscr{H})$.

Proposición 8.7: Sea X un esquema localmente noetheriano y sea $\mathscr{F}$ un haz cuasicoherente.

1. $\mathrm{As}\,\mathscr{F} \subseteq \operatorname{Supp}\mathscr{F}$.
2. Si $\mathscr{F}$ es coherente, entonces para todo abierto compacto $U \subseteq X$ se cumple que $\mathrm{As}(\mathscr{F}) \cap U$ es finito.
3. Si x es un punto $\rightsquigarrow$-minimal de $\operatorname{Supp}(\mathscr{F})$, entonces $x \in \mathrm{As}(\mathscr{F})$. En particular, todo punto genérico de X es un punto asociado.
4. $\mathscr{F} = 0$ syss no posee puntos asociados.

Ejemplo 8.8: Sea k un cuerpo y sea

$$A := k[t_0, t_1, t_2, \dots]/\big(\{t_i^2 : i \in \mathbb{N}\}\big),$$

es fácil verificar que $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local con $\mathfrak{m} := (t_0, t_1, t_2, \dots)$, pero no es ni reducido ni noetheriano. El $\operatorname{Spec} A = \{x_\mathfrak{m}\}$ y es fácil notar que no existe ningún elemento en A cuyo aniquilador sea $\mathfrak{m}$, por lo que $\mathrm{As}(A) = \varnothing$ y $\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}$ es un haz cuasicoherente sin puntos asociados. ⌟

Éste es también un ejemplo de un anillo local de dimensión 0 que no es noetheriano (cfr. **[39]**, ej. 6.93).

Proposición 8.9: Sea X un esquema localmente noetheriano y sea $\mathscr{F}$ un haz cuasicoherente. Si $U \subseteq X$ es un abierto tal que $U \supseteq \operatorname{As}(\mathscr{F})$, entonces la restricción $\Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(U, \mathscr{F})$ es inyectiva.

Demostración: Sea $s \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ una sección tal que $s|_U = 0$. Considere el morfismo de haces $\mathscr{O}_X \xrightarrow{\mu_s} \mathscr{F}$ que sobre abiertos V corresponde a multiplicar por $s|_V$, y sea $\mathscr{G} := \operatorname{Img}(\mu_s) \subseteq \mathscr{F}$. Claramente $\operatorname{Supp} \mathscr{G} \cap U = \varnothing$ y como $\operatorname{As}(\mathscr{G}) \subseteq \operatorname{As}(\mathscr{F}) \subseteq U$ por la proposición 8.6, y $\operatorname{As}(\mathscr{G}) \subseteq \operatorname{Supp} \mathscr{G}$ por la proposición anterior; entonces $\operatorname{As}(\mathscr{G}) = \varnothing$ y $\mathscr{G} = 0$ por la proposición anterior. □

Proposición 8.10: Sea X un esquema localmente noetheriano y sea $\varphi \colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de haces cuasicoherentes. Si para todo $x \in X$ se cumple alguna de las siguientes:

(a) $\mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ es inyectivo.

(b) $x \notin \operatorname{As}(\mathscr{F})$.

Entonces φ es inyectivo.

Demostración: Basta notar que las condiciones (a) y (b) implican que $\operatorname{As}(\ker \varphi) = \varnothing$. □

Definición 8.11: Sea X un esquema y $\mathscr{F}$ un haz cuasicoherente sobre X. Se dice que un punto $x \in X$ es un ***punto encajado*** de $\mathscr{F}$ si está asociado a $\mathscr{F}$ y no es $\rightsquigarrow$-minimal en $\operatorname{As}(\mathscr{F})$, i.e., si existe $z \in \operatorname{As}(\mathscr{F})$ tal que $x \in \overline{\{z\}}$. Un punto de X es un ***punto encajado*** si lo es de $\mathscr{O}_X$. Un punto asociado de X que no es genérico se dice un ***punto encajado***.

Sea $Z \subseteq X$ un cerrado irreducible. Se dice que Z es un ***ciclo primo asociado*** (resp. ***encajado***) a $\mathscr{F}$ si $Z = \overline{\{\xi\}}$, donde ξ es un punto asociado (resp. punto encajado) de $\mathscr{F}$.

Lema 8.12: Sea X un esquema localmente noetheriano y $\mathscr{F}$ un haz coherente. Entonces:

1. Los puntos genéricos del subespacio $\operatorname{Supp} \mathscr{F}$ son puntos asociados de $\mathscr{F}$.

2. Un punto asociado de $\mathscr{F}$ es un punto encajado syss no es un punto genérico de $\operatorname{Supp}\mathscr{F}$.

Proposición 8.13: Sea X un esquema noetheriano. Son equivalentes:

1. X es reducido.
2. X no posee puntos encajados y para todo punto genérico ξ tenemos que $\mathscr{O}_{X,\xi}$ es un cuerpo (i.e., X es genéricamente reducido).

En consecuencia, un esquema localmente noetheriano no posee puntos encajados.

He aquí un contraejemplo simple:

Ejemplo. Sea k un cuerpo y sea $A := k[u,v]/(u^2, uv)$, entonces $\operatorname{Spec} A$ es un esquema noetheriano, pero no reducido. Aquí (u,v) es un punto encajado de A.

§8.1.2 Intermezzo: Característica de Euler-Poincaré. Esta subsección originalmente se ubica dentro de los tópicos del capítulo de cohomología, pero es necesario un resultado acerca de puntos asociados para llegar al gran teorema del final.

Las funciones denominadas *características de Euler-Poincaré* son bastante útiles cuando sea que sean definibles.[1] Además de introducir tal concepto veremos la aparición de polinomios de Hilbert-Samuel que eran parte del teorema fundamental de la dimensión (de Krull) en álgebra conmutativa.

Definición 8.14: Sea X un esquema propio sobre un cuerpo k. Para todo haz coherente sobre X definimos su ***característica de Euler-Poincaré***:

$$\chi_k(X, \mathscr{F}) := \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathscr{F}).$$

Omitiremos el subíndice «k» de no haber ambigüedad. El ***género aritmético*** de X se define como

$$p_a(X) := (-1)^{\dim X}(\chi_k(X, \mathscr{O}_X) - 1).$$

[1]En general, cualquier función sobre una clase de $\mathscr{O}_X$-módulos que satisfaga la proposición 8.16 se dice una *característica de Euler-Poincaré*. Son actores estelares en álgebra homológica.

El lector avanzado observará que es suficientemente bueno tomar un esquema X sobre un anillo artiniano A y, en este caso definimos $\chi_A(X, \mathscr{F}) := \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{long}_A H^i(X, \mathscr{F})$ que tiene pragmáticamente el mismo efecto (cfr. [**EGA III$_1$**], §III.2.5).

Proposición 8.15: Sea X un esquema propio, geométricamente conexo y geométricamente reducido sobre un cuerpo k de dimensión d. Entonces:

1. $p_a(X) = (-1)^d \left(\sum_{i=1}^{d} (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathscr{O}_X) \right)$.
2. Si $\dim X = 1$, entonces $p_a(X) = \dim_k H^1(X, \mathscr{O}_X)$.

DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar el teorema 7.54 y anulamiento de Grothendieck. □

Proposición 8.16: Sea X un esquema propio sobre un cuerpo k y sea $0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_3 \to 0$ una sucesión exacta de haces coherentes sobre X. Entonces $\chi(X, \mathscr{F}_2) = \chi(X, \mathscr{F}_1) + \chi(X, \mathscr{F}_3)$.

DEMOSTRACIÓN: Dada una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_n \longrightarrow 0$$

de k-espacios vectoriales de dimensión finita, entonces las formulas de dimensión nos permiten probar que $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_k(V_i) = 0$. Expandiendo la sucesión exacta larga de $H^i(X, -)$ obtenemos entonces el enunciado. □

Lema 8.17: Sea k un cuerpo, $r > 0$ un entero y $X := \mathbb{P}_k^r$ un espacio proyectivo. Entonces $\chi_k(X, \mathscr{O}_X(n)) = \binom{n+r}{r}$.

Aquí, el coeficiente binomial generalizado se define como:

$$\binom{a}{b} := \frac{a(a-1)\cdots(a-(b-1))}{b(b-1)\cdots 1}.$$

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 7.28, tenemos que

$$\chi_k(X, \mathscr{O}_X(n)) = \dim_k H^0(X, \mathscr{O}_X(n)) + (-1)^r \dim_k H^r(X, \mathscr{O}_X(n)).$$

Si $n \geq 0 > -r$, entonces $H^r(X, \mathscr{O}_X(n)) = 0$ y el enunciado se sigue del hecho de que basta contar monomios de grado n que se pueden formar con las variables $t_0, \dots, t_r$, los cuales hay $\binom{n+r}{r}$. Si $n \leq -r-1$, definamos $h := -r-n$, entonces $H^0(X, \mathscr{O}_X(n)) = 0$ y $H^r(X, \mathscr{O}_X(-r-1-n)) = \binom{h+r-1}{r} = (-1)^r\binom{-h}{r} = (-1)^r\binom{n+r}{r}$. Finalmente, si $-r < n \leq 0$, entonces $H^0(X, \mathscr{O}_X(n)) = 0$ y, nuevamente, se deduce del teorema 7.28. □

Teorema 8.18: Sea X un esquema proyectivo sobre un cuerpo k, sea $\mathscr{L}$ un haz muy amplio sobre X y sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo coherente, donde denotaremos $\mathscr{F}(n) := \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}^{\otimes n}$.

1. Existe un único polinomio $P(t) \in \mathbb{Q}[t]$, llamado ***polinomio de Hilbert-Samuel***, tal que $\chi_k(X, \mathscr{F}(n)) = P(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
2. Para n suficientemente grande, se cumple que
$$\chi_k(X, \mathscr{F}(n)) = \dim_k \Gamma(X, \mathscr{F}(n)).$$
3. El coeficiente lider de $P(t)$ es positivo (posiblemente 0 si $\mathscr{F} = 0$).
4. $\deg P(n) = \dim \operatorname{Supp}(\mathscr{F})$.

Demostración:

1. Sea $i \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^r_k =: Y$ un encaje cerrado; nótese pues que $\chi_k(X, \mathscr{F}(n)) = \chi_k(Y, i_*\mathscr{F}(n))$ (corolario 7.21.2, puesto que i es un encaje cerrado), de modo que podemos suponer que $X = \mathbb{P}^r_k = \operatorname{Proj}(S)$, donde $S = k[t_0, \dots, t_r]$.

   Como $\mathscr{F}$ es coherente, tenemos que $\mathscr{F} = \widetilde{M}$ donde $M := \Gamma_*(\mathscr{F})$ es un S-módulo graduado finitamente generado, luego admite una resolución libre finita (r.l.f.) por S-módulos graduados libres de rango finito:
$$0 \longrightarrow L_q \longrightarrow L_{q-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$
   y, como $M \mapsto \widetilde{M}$ es un funtor exacto y $\mathscr{L}(n)$ es plano, entonces tenemos
$$0 \to \widetilde{L}_q(n) \to \widetilde{L}_{q-1}(n) \to \cdots \to \widetilde{L}_1(n) \to \widetilde{M}(n) \to 0,$$
   por lo que, finalmente, por la proposición anterior, tenemos que
$$\chi_k(X, \widetilde{M}(n)) = \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1} \chi_k(X, \widetilde{L}_j(n)).$$

Así, se reduce a probar el teorema para el caso en que M es graduado y libre de rango finito, de lo que se sigue del cálculo anterior.

2. Basta notar que $H^p(X, \mathscr{F}(n)) = 0$ para todo $p > 0$ fijo y n suficientemente grande, por anulamiento de Serre.

3. Trivial.

4. Sabemos que $\operatorname{Supp} \mathscr{F}$ es un cerrado en X y, para $\mathscr{I} \subseteq \operatorname{Ann} \mathscr{F}$ cuasi-coherente, tenemos un encaje cerrado $i \colon \mathbf{V}(\mathscr{I}) \hookrightarrow X$ que induce que $\mathscr{F} \cong i_* i^* \mathscr{F}$ (proposición 5.34), de modo que $\chi_k(X, \mathscr{F}) = \chi_k(Y, i^*\mathscr{F})$, por lo que podemos suponer que $\operatorname{Supp} \mathscr{F} = X$.

   Procedemos por inducción sobre $d := \dim(\operatorname{Supp} \mathscr{F}) = \dim X$. Si $d = 0$, entonces X es un esquema artiniano y, por tanto, $\mathscr{F}(n) = \mathscr{F}$, de modo que $\chi_k(\mathscr{F}(n)) = \dim_k H^0(X, \mathscr{F})$ es constante y de grado 0. Supongamos que $d > 0$, entonces $Z := \operatorname{As}(\mathscr{F})$ es un conjunto finito por la proposición 8.7 y, como $\mathscr{L}$ es muy amplio, existe una sección $f \in \Gamma(X, \mathscr{L}(m))$ para algún $m > 0$ tal que $Z \subseteq X_f$ (cor. 5.63.1). Por tanto, la multiplicación por f induce un monomorfismo $\mathscr{F} \to \mathscr{F}(m)$ y, en consecuente, tenemos la siguiente sucesión exacta de $\mathscr{O}_X$-módulos coherentes:

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\times f} \mathscr{F}(m) \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow 0. \tag{8.1}$$

   Por el lema de Nakayama, los puntos $x \in \operatorname{Supp} \mathscr{G}$ son precisamente aquellos tales que $f(x) = 0$. Por la proposición 8.7, vemos que Z incluye a todos los puntos genéricos de X, de modo que X_f es denso y, aplicando el teorema de los ideales principales de Krull, se sigue que $\dim(\operatorname{Supp} \mathscr{G}) = d - 1$.

   Finalmente, tensorizando (8.1) por $\mathscr{L}(n)$ y denotando por $Q(t)$ al polinomio de Hilbert-Samuel de $\mathscr{G}$ obtenemos que $P(t+m) - P(t) = Q(t)$ y, expandiendo binomios, es fácil comprobar que $\deg(g(t+a) - g(t)) = \deg g - 1$ para todo a y todo $g(t) \in \mathbb{Q}[t]$ (¡ésta igualdad falla en característica prima!), con lo que se demuestra lo exigido. □

El resultado anterior se puede generalizar reemplazando k por un anillo artiniano, aunque la prueba se reduce al caso de cuerpos (cfr. **[EGA III₁]**, thm. III.2.5.3 y **[EGA IV₂]**, prop. IV.5.3.1).

Más adelante, gracias al teorema de Snapper, veremos que podemos relajar las condiciones a que X sea propio y a que $\mathscr{L}$ sea un haz invertible, no necesariamente amplio.

Teorema 8.19: Sea T un esquema noetheriano íntegro y $X \to T$ un morfismo proyectivo. Sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo coherente y, para todo $t \in T$, sea $P_t(n) = \chi_{\Bbbk(t)}(X_t, \mathscr{F}_t(n))$ los polinomios de Hilbert-Samuel de las fibras X_t. Son equivalentes:

1. $\mathscr{F}$ es T-plano.
2. $P_t(x)$ es independiente de $t \in T$.

Si además $T = \operatorname{Spec} A$ es afín, las anteriores equivalen a que:

3. $H^0(X, \mathscr{F}(m))$ es un A-módulo libre para m suficientemente grande.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\eta \in T$ el punto genérico, haciendo cambio de base por $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{T,\eta}) \to T$ podemos suponer que $T = \operatorname{Spec} A$ es un esquema afín con $(A, \mathfrak{m})$ noetheriano local. Sea $j\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_T$ un encaje cerrado, entonces notando que $H^q(X, \mathscr{F}) \cong H^q(\mathbb{P}^r_T, j_*\mathscr{F})$ (corolario 7.21.2), podemos suponer que $X = \mathbb{P}^r_T$.

$1 \implies 3$. Como X es separado, podemos tomar un cubrimiento por abiertos afines $\mathcal{U}$ de X y calcular:

$$H^q(X, \mathscr{F}(m)) = \check{H}^q(X, \mathscr{F}(m)) = h^q(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathscr{F}(m))).$$

Como $\mathscr{F}$ es plano, cada $\check{C}^i(\mathcal{U}, \mathscr{F}(m))$ es un A-módulo plano. Por el teorema 7.28 vemos que $H^q(X, \mathscr{F}(m)) = 0$ para $q > 0$ y m suficientemente grande. Así tenemos una sucesión exacta de A-módulos:

$$0 \to H^0(X, \mathscr{F}(m)) \to \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathscr{F}(m)) \to \cdots \to \check{C}^n(\mathcal{U}, \mathscr{F}(m)) \to 0,$$

donde cada $\check{C}^i(\mathcal{U}, \mathscr{F}(m))$ es plano, luego separando en sucesiones cortas y empleando la sucesión exacta larga del Tor se concluye que $H^0(X, \mathscr{F}(m))$ es plano. Más aún, es finitamente generado sobre A, que es noetheriano local, por tanto es un A-módulo libre.

$3 \implies 2$. Basta probar que

$$P_t(n) = \operatorname{rang}_A H^0(X, \mathscr{F}(n)),$$

para m suficientemente grande (dependiente del t). Para esto, basta probar que para todo $t \in T$ se cumple que $H^0(X_t, \mathscr{F}_t(m)) = H^0(X, \mathscr{F}(m)) \otimes_A \Bbbk(t)$ para m suficientemente grande. Sea $T' := \operatorname{Spec}(A_\mathfrak{p})$, donde $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_t$, y considérelo como T-esquema plano; sea $s \in T$ el punto cerrado y sea $k := \Bbbk(s)$. Dada una presentación de k (como A-módulo) $A^N \to A \to k \to 0$, esta induce la sucesión exacta

$$\mathscr{F}^N \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}_s \longrightarrow 0.$$

Y, por el corolario 7.29.1, obtenemos

$$\Gamma\big(X, \mathscr{F}(m)^N\big) \longrightarrow \Gamma\big(X, \mathscr{F}(m)\big) \longrightarrow \Gamma\big(X_s, \mathscr{F}_s(m)\big) \longrightarrow 0.$$

Por otro lado, tensorizando $A^N \to A \to k \to 0$ con $\Gamma(X, \mathscr{F}(m))$ obtenemos el isomorfismo $\Gamma(X_s, \mathscr{F}_s(m)) \cong \Gamma(X, \mathscr{F}(m)) \otimes_A k$ deseado.

$2 \implies 3$. Es un ejercicio para el lector demostrar que si $(A, \mathfrak{m}, k)$ es dominio íntegro noetheriano local con $\operatorname{Frac} A =: K$, entonces un A-módulo finitamente generado M es plano syss $\dim_k(M \otimes_A k) = \dim_K(M \otimes_A K)$. □

Éste teorema también admite una generalización a morfismos propios, pero en éste caso el paso no es tan sencillo como una simple aplicación del lema de Chow, sino que hay que rehacer la demostración empleando *complejos de Mumford* (vid. **[EGA III$_2$]**, §III.7.9; o también Vakil **[11]**, 25.2.5).

Corolario 8.19.1: Sea T un esquema noetheriano conexo y sea $X \subseteq \mathbb{P}^n_T$ un subesquema cerrado que es plano sobre T. Entonces para todo $t \in T$, la dimensión de X_t y el género aritmético $p_a(X_t)$ (visto como esquema sobre $\Bbbk(t)$) son independientes de t.

Demostración: Haciendo cambio de base por las componentes irreducibles, podemos suponer que X es íntegro. Sea P_t el polinomio de Hilbert-Samuel de X_t sobre $\Bbbk(t)$. Basta notar que $\dim(X_t) = \deg P_t$ y $p_a(X_t) = (-1)^{\dim(X_t)}(P_t(0) - 1)$. □

Nótese que esto da otra prueba, en un caso más restrictivo, de que las fibras bajo un morfismo plano tienen igual dimensión. El que compartan género aritmético refuerza la idea de que los morfismos planos pueden verse como «una buena deformación de familias de variedades».

§8.1.3 Funciones meromorfas. Recuérdese que dado un anillo A, no necesariamente un dominio íntegro, podemos asociarle su *anillo de fracciones totales*, que también denotaremos por $A_{\text{tot}} := S^{-1}A$, donde S es el conjunto de elementos en A que no son divisores de cero. Esto coincide con el cuerpo de fracciones si A es un dominio íntegro.

Definición 8.20: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado y sea $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{O}_X$ un subhaz de conjuntos. Definimos el prehaz de anillos $\mathscr{O}_X[\mathscr{S}^{-1}]$ así:

$$\Gamma(U, \mathscr{O}_X[\mathscr{S}^{-1}]) := \Gamma(U, \mathscr{O}_X)\big[\Gamma(U, \mathscr{S})^{-1}\big].$$

Si $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo, definimos $\mathscr{F}[\mathscr{S}^{-1}]$ como la hacificación del prehaz $U \mapsto \mathscr{F}(U)[\mathscr{S}(U)^{-1}]$, o equivalentemente, es el $\mathscr{O}_X$-módulo:

$$\mathscr{F}[\mathscr{S}^{-1}] := \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X[\mathscr{S}^{-1}].$$

Éste objeto es el análogo a la localización de anillos. Es fácil ver que para todo punto $x \in X$ la fibra es

$$\mathscr{O}_X[\mathscr{S}^{-1}]_x \cong \mathscr{O}_{X,x}[(\mathscr{S}_x)^{-1}], \qquad \mathscr{F}[\mathscr{S}^{-1}]_x \cong \mathscr{F}_x[(\mathscr{S}_x)^{-1}].$$

El subhaz $\mathscr{S}$ que nos interesa es el siguiente:

Definición 8.21: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado. Sea $\Gamma(U, \mathscr{S})$ el conjunto de secciones $s \in \mathscr{O}_X(U)$ cuyos gérmenes locales $s|_x \in \mathscr{O}_{X,x}$ no son divisores de cero. Denotamos por[2] $\mathscr{K}_X$ a la hazificación de $\mathscr{O}_X[\mathscr{S}^{-1}]$, llamado el ***haz de funciones meromorfas de*** $\mathscr{O}_X$.

Sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. Denotamos por $\mathscr{K}_X(\mathscr{F}) := \mathscr{F}[\mathscr{S}^{-1}]$, llamado el ***haz de funciones meromorfas de*** $\mathscr{F}$. Una ***sección meromorfa*** de $\mathscr{F}$ es una sección global de $\mathscr{K}_X(\mathscr{F})$.

Lema 8.22: Sea X un esquema compacto y sea $h \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ una sección global. Si una sección meromorfa $f \in \Gamma(X, \mathscr{K}_X)$ es tal que $f|_{X_h} = 0$, entonces $h^n f = 0$ para algún n.

DEMOSTRACIÓN: Como X es compacto, podemos cubrirlo por finitos abiertos afines y basta comprobar el enunciado en cada uno, así que podemos suponer que $X = \operatorname{Spec} A$ es afín. Nótese que una sección meromorfa f es ahora de la forma $f = a/s$, donde $a \in A$ y s no es divisor de cero (¿por qué?), luego ver que $f|_{\mathbf{D}(h)} = 0$ equivale a que $a|_{\mathbf{D}(h)} = 0$, lo que equivale a que $h^n a = 0 = h^n f$ para algún $n > 0$. Empleamos la finitud para escoger el n mayor dentro de las finitas cartas afines. □

Proposición 8.23: Sea X un esquema localmente noetheriano. Se cumplen:

[2] GROTHENDIECK y DIEUDONNÉ [**EGA IV$_4$,** pág. 227] emplea $\mathscr{M}_X$.

1. Para todo $x \in X$, la fibra $\mathscr{S}_x \subseteq \mathscr{O}_{X,x}$ corresponde al conjunto de gérmenes que no son divisores de cero. En consecuencia, $\mathscr{K}_{X,x} = (\mathscr{O}_{X,x})_{\mathrm{tot}}$.
2. Para todo abierto afín $U \subseteq X$, se cumple que $\mathscr{K}_X(U) = \mathscr{O}_X(U)_{\mathrm{tot}}$.

Demostración: Podemos suponer que $X = \operatorname{Spec} A$ es afín.

1. Sea $x \in X$ un punto y $\mathfrak{p} := \mathfrak{p}_x$. Es fácil ver que $\mathscr{S}_x \subseteq \mathscr{O}_{X,x} = A_{\mathfrak{p}}$ no contiene divisores de cero; así que tomemos un gérmen $s = f/g \in A_{\mathfrak{p}}$ que no sea divisor de cero y veamos que está en $\mathscr{S}_x$. Sea $\mathfrak{a} := \{a \in A : af = 0\}$, sabemos que $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = 0$ y como A es noetheriano, entonces $\mathfrak{a}$ es finitamente generado y existe $h \in A \smallsetminus \mathfrak{p}$ tal que $h\mathfrak{a} = 0$, por lo que f no es divisor de cero en $A[1/h] \cong \mathbf{D}(h)$ el cual es un entorno de $x = x_{\mathfrak{p}}$.
2. Sea $f \in \Gamma(X, \mathscr{K}_X)$ una función meromorfa y sea $\mathfrak{a} := \{a \in A : af \in A\}$. Sea $x \in X$ un punto y $\mathfrak{p} := \mathfrak{p}_x$. Por el inciso anterior $f = a/b$ con $a, b \in A_{\mathfrak{p}}$, donde $b \in A_{\mathfrak{p}}$ no es divisor de cero, luego $b = c/d$ con $c, d \in A$ y $d \notin \mathfrak{p}$. Así, $ad - cf$ es una sección meromorfa que se anula en un entorno de x, digamos en un entorno de la forma $\mathbf{D}(e)$ con $e \in A \smallsetminus \mathfrak{p}$; luego $e^n(ad - cf) = 0$ para n suficientemente grande. Así $e^n c \in \mathfrak{a}$ y $e^n c$ no es divisor de cero en $A_{\mathfrak{p}}$.

   Sean $\operatorname{As}(A) := \{\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_t\}$ los primos asociados de A, los cuales son finitos porque A es noetheriano; así, vemos que $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{q}_i$ para cada i y luego, por evitamiento de primos, encontramos

   $$x \in \mathfrak{a} \smallsetminus \left(\bigcup_{i=1}^{t} \mathfrak{q}_i \right),$$

   y como los divisores de cero son elementos de los $\mathfrak{q}_i$'s, vemos que x no es divisor de cero en A. Finalmente, $f = (xf)/x \in A_{\mathrm{tot}}$ como se quería probar. □

Proposición 8.24: Sea X un esquema localmente noetheriano y $U \subseteq X$ un abierto tal que $U \supseteq \operatorname{As}(X)$. Sea $i \colon U \hookrightarrow X$ la inclusión, entonces el homomorfismo canónico $\mathscr{K}_X \to i_*\mathscr{K}_U$ es un isomorfismo.

Demostración: Denotemos por $\mathscr{K}'_X := \mathscr{O}_X[\mathscr{S}^{-1}]$, de modo que $\mathscr{K}_X := (\mathscr{K}'_X)^+$. Por la proposición 8.9 tenemos inyectividad de $\mathscr{O}_X \to i_*\mathscr{O}_U$, y es claro que induce inyectividad en $\mathscr{K}'_X \to i_*\mathscr{K}'_U$ y finalmente también lo hace en las hazificaciones puesto que las fibras $\mathscr{K}_{X,x} = \mathscr{K}'_{X,x}$ coinciden.

Para probar que es suprayectiva, podemos suponer que $X = \operatorname{Spec} A$ es afín y veremos primero que $\mathscr{K}'_X \to \mathscr{K}'_U$ es suprayectivo. Sea $\mathbf{V}(\mathfrak{a}) = X \setminus U$, luego $\mathbf{V}(\mathfrak{a}) \cap \operatorname{As}(A) = \varnothing$, por lo que $\mathfrak{a}$ no está contenido en ningún primo asociado de A y como $\operatorname{As}(A)$ es finito, entonces $\mathfrak{a} \nsubseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{As}(A)} \mathfrak{a}$ por evitamiento de primos. Así, sea

$$a \in \mathfrak{a} \setminus \left(\bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{As}(A)} \mathfrak{p} \right),$$

de modo que a no es divisor de cero, $\mathbf{D}(a) \subseteq U$ y $\operatorname{As}(A) \subseteq \mathbf{D}(a)$. Finalmente, es claro que la composición

$$\mathscr{K}'_X(X) \hookrightarrow \mathscr{K}'_U(U) \hookrightarrow \mathscr{K}'_X(\mathbf{D}(a))$$

es un isomorfismo (recuérdese que las secciones globales son el anillo de fracciones totales en éste caso), por lo que $\mathscr{K}'_X \to \mathscr{K}'_U$ debe ser un isomorfismo.

Sea $s \in i_*\mathscr{K}_U(X) = \mathscr{K}_X(U)$ una sección meromorfa. Por definición de hazificación, existe $\{U_i = \operatorname{Spec}(A_i)\}_{i \in I}$ cubrimiento por abiertos afines de U tal que s es el pegado de algunos $s|_{U_i} \in \mathscr{K}'_X(U_i)$. Así, $s|_{U_i} = a_i/b_i$ con $a_i, b_i \in A_i$ y donde b_i no es divisor de cero. Sea $V_i := \mathbf{D}(b_i) \subseteq U_i$ y sea $V := \bigcup_{i \in I} V_i$; luego $s|_{V_i} \in \mathscr{O}_X(V_i)$, por lo que $s|_V \in \mathscr{O}_X(V)$. Nótese que $\operatorname{As}(A_i) \subseteq V_i$, de modo que $\operatorname{As}(A) = \operatorname{As}(\mathscr{O}_U) \subseteq V$. Así pues, hemos visto que $s|_V = t|_V$ para algún $t \in \mathscr{K}'_X(X)$, y como $\mathscr{K}_X(U) \hookrightarrow \mathscr{K}_X(V)$ es inyectivo, se tiene que $s = t|_U$. Nótese que esto otorga una demostración alternativa de que $\mathscr{K}'_X = \mathscr{K}_X$. □

§8.1.4 Divisores de Cartier. Sea $\mathscr{F}$ una $\mathscr{O}_X$-álgebra sobre X. Entonces, podemos definir el prehaz de grupos abelianos:

$$\Gamma(U, \mathscr{F}^\times) := \Gamma(U, \mathscr{F})^\times.$$

Definición 8.25: Sea X un esquema. Un ***divisor de Cartier*** es una sección $s \in \Gamma(X, \mathscr{K}_X^\times/\mathscr{O}_X^\times) =: \operatorname{CaDiv} X$, donde $\mathscr{K}_X^\times/\mathscr{O}_X^\times$ representa el haz cociente (i.e., es la hacificación de los cocientes coordenada a coordenada). Dado un abierto $U \subseteq X$, denotamos por $D|_U \in \Gamma(U, \mathscr{K}_X^\times/\mathscr{O}_X^\times)$ a la restricción (como sección) de $D \in \operatorname{CaDiv} X$. Un divisor de Cartier se dice ***principal*** si es la imagen de algún $f \in \Gamma(X, \mathscr{K}_X^\times)$, en cuyo caso denotamos $\operatorname{div} f \in \operatorname{CaDiv} X$.

Empleamos notación adivita sobre el grupo $\operatorname{CaDiv} X$. Dos divisores de Cartier $D_1, D_2 \in \operatorname{CaDiv} X$ se dicen ***linealmente equivalentes*** (denotado

«$D_1 \sim D_2$») si $D_1 - D_2$ es principal. Es claro que los divisores principales conforman un subgrupo de $\operatorname{CaDiv} X$, luego se denota por $\operatorname{CaCl} X$ el grupo cociente, llamado el ***grupo de clases de divisores de Cartier***.

Un divisor de Cartier $D \in \operatorname{CaDiv} X$ se dice ***efectivo*** (denotado «$D \geq 0$») si está en el (haz) imagen de

$$\Gamma(X, \mathscr{O}_X \cap \mathscr{K}_X^\times) \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{K}_X^\times / \mathscr{O}_X^\times) = \operatorname{CaDiv} X.$$

El conjunto de divisores de Cartier efectivos se denota $(\operatorname{CaDiv} X)_+$.

Por definición, un divisor de Cartier puede representarse por una familia $\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$ donde los U_i's forman un cubrimiento por abiertos afines de X, donde $f_i \in \mathscr{O}_X(U_i)_{\text{tot}}$ y donde

$$f_i|_{U_i\cap U_j} = (f_j|_{U_i\cap U_j}) \cdot u, \qquad u \in \mathscr{O}_X(U_i \cap U_j)^\times.$$

Definición 8.26: Sea X un esquema y $D \in \operatorname{CaDiv} X$ un divisor de Cartier, representado por una familia $\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$. Le asignamos un subhaz de $\mathscr{K}_X$ dado por:

$$\mathscr{O}_X(D)|_{U_i} := f_i^{-1}\mathscr{O}_X|_{U_i},$$

el cual es claramente un haz invertible.

Nótese que, con este lenguaje, $D \in \operatorname{CaDiv} X$ es efectivo syss $\mathscr{O}_X(-D) \subseteq \mathscr{O}_X = \mathscr{O}_X(0)$.

Proposición 8.27: Sea X un esquema. Se cumplen:

1. La aplicación $\rho\colon D \to \mathscr{O}_X(D)$ es aditiva, vale decir,

$$\rho(D_1 + D_2) = \mathscr{O}_X(D_1)\mathscr{O}_X(D_2) \simeq \mathscr{O}_X(D_1) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(D_2).$$

2. La aplicación ρ induce un monomorfismo $\overline{\rho}\colon \operatorname{CaCl} X \to \operatorname{Pic} X$ de grupos.

3. $\operatorname{Img} \rho$ corresponde a los subhaces invertibles de $\mathscr{K}_X$.

DEMOSTRACIÓN:

1. Trivial de la construcción.

2. La construcción claramente manda divisores principales de Cartier en $\mathscr{O}_X$-módulos libres de rango 1, de modo que se restringe a $\overline{\rho}$. Sea $D \in \ker \rho$, queremos ver que $D \sim 0$. Por definición, esto significa que $\mathscr{O}_X(D) = f\mathscr{O}_X \subseteq \mathscr{K}_X$. El que $\mathscr{O}_X(D)$ esté generado localmente por elementos de $\mathscr{K}_X$ implica que $f \in \Gamma(X, \mathscr{K}_X^\times)$, luego se concluye que $D = \operatorname{div} f$.

3. Sea $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{K}_X$ un subhaz invertible, esto significa que existe un cubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ de X tal que
$$\mathscr{L}|_{U_i} = f_i\mathscr{O}_{U_i} \subseteq \mathscr{K}_{U_i} = \mathscr{K}_X|_{U_i},$$
un argumento análogo al anterior demuestra que $f_i \in \mathscr{K}_X(U_i)^\times$ y así el divisor D representado por $\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$ satisface que $\rho(D) = \mathscr{L}$. □

Corolario 8.27.1: Sea X un esquema noetheriano sin puntos encajados. Entonces el homomorfismo canónico $\operatorname{CaCl} X \to \operatorname{Pic} X$ es un isomorfismo.

Demostración: Por la proposición anterior basta probar que todo haz invertible $\mathscr{L}$ es isomorfo a un subhaz de $\mathscr{K}_X$. Sean $\xi_1, \dots, \xi_n$ los puntos genéricos de X, los cuales son los puntos asociados por hipótesis, y elijamos entornos
$$\xi_j \in U_j \subseteq \overline{\{\xi_j\}} \setminus \bigcup_{i\neq j} \overline{\{\xi_i\}}.$$
Restringiendo más los U_j's podemos elegirlos de modo que $\mathscr{L}|_{U_j}$ sea libre. Definamos $U := \bigcup_{i=1}^n U_i$. Por la proposición 8.9 tenemos que $\mathscr{L} \hookrightarrow i_*(\mathscr{L}|_U)$ es inyectivo y
$$\mathscr{L} \lhook\joinrel\longrightarrow i_*(\mathscr{L}|_U) \simeq i_*\mathscr{O}_U \lhook\joinrel\longrightarrow i_*\mathscr{K}_U \simeq \mathscr{K}_X,$$
donde empleamos que $i_*\mathscr{K}_U \simeq \mathscr{K}_X$ por la proposición 8.24 y que $\mathscr{L}|_U$ es libre. □

Proposición 8.28: Sea X un esquema noetheriano sin puntos encajados (e.g. reducido). Entonces existe un isomorfismo canónico $\operatorname{CaCl} X \cong H^1(X, \mathscr{O}_X^\times)$.

Demostración: Sean $\xi_1, \dots, \xi_n \in X$ los puntos genéricos de X. Para todo abierto afín $V = \operatorname{Spec} A$, tenemos que $\mathscr{K}_X(V) = A_{\text{tot}} = \bigoplus_{\xi_i\in V} \mathscr{K}_{X,\xi_i}$ y, por la proposición 8.24, esto nos permite ver que aplica para todo U (puesto que X es cuasiseparado y por evitamiento de primos). En consecuencia, $\mathscr{K}_X$

y $\mathscr{K}_X^\times$ son flácidos y, por lo tanto, la sucesión exacta $0 \to \mathscr{O}_X^\times \to \mathscr{K}_X^\times \to \mathscr{K}_X^\times/\mathscr{O}_X^\times \to 0$ induce, en cohomología:

$$\Gamma(X, \mathscr{K}_X^\times) \longrightarrow \operatorname{CaDiv} X \longrightarrow H^1(X, \mathscr{O}_X^\times) \longrightarrow 0,$$

de modo que $H^1(X, \mathscr{O}_X^\times) \cong (\operatorname{CaDiv} X)/\Gamma(X, \mathscr{K}_X^\times) \cong \operatorname{CaCl} X$. □

Proposición 8.29: Sea X un esquema íntegro, y sea $\mathscr{L}$ un haz invertible sobre X. A cada $s \in \Gamma(X, \mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{K}_X)$ no nulo, podemos asignarle un divisor de Cartier $\operatorname{div} s \in \operatorname{CaDiv} X$ de manera análoga.[3] Entonces:

1. Para toda sección $s \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ se tiene que $\operatorname{div} s \geq 0$.
2. Para todo divisor $D \in \operatorname{CaDiv}^+ X$ identificando $\mathscr{O}_X(D) \subseteq \mathscr{K}_X$, se satisface sobre un abierto $U \subseteq X$:

$$\Gamma(U, \mathscr{O}_X(D)) = \{f \in \Gamma(U, \mathscr{K}_X^\times) : \operatorname{div} f + D|_U \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Pista: Esto es un ejercicio de expandir las definiciones con cautela. □

Proposición 8.30: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo y supongamos que se satisface alguna de las siguientes condiciones:

(a) f es plano.

(b) X es reducido, tiene finitas componentes irreducibles y cada una domina una componente irreducible de Y (e.g., si X, Y son íntegros y f es dominante).

Entonces el homomorfismo canónico $\mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ se extiende a un homomorfismo canónico $\mathscr{K}_Y \to f_*\mathscr{K}_X$, el cual induce un homomorfismo canónico $f^* = \operatorname{CaCl}(f)\colon \operatorname{CaCl} Y \to \operatorname{CaCl} X$.

Demostración: Como $\mathscr{K}_X$ es la hazificación de $\mathscr{O}_X[\mathscr{S}_X^{-1}]$ basta ver que el homomorfismo canónico se extiende a un homomorfismo canónico

$$\mathscr{O}_Y[\mathscr{S}_Y^{-1}] \longrightarrow f_*\mathscr{O}_X[\mathscr{S}_X^{-1}],$$

es decir, que dados abiertos afines $U \subseteq X, V \subseteq Y$ tales que $f[U] \subseteq V$, entonces el homomorfismo canónico $A := \Gamma(V, \mathscr{O}_Y) \to \Gamma(U, \mathscr{O}_X) =: B$ manda

[3] Elegimos un cubrimiento $\{U_i\}_i$, tal que $\mathscr{L}|_{U_i} \simeq \mathscr{O}_{U_i}$ y, mediante dicho isomorfismo canónico, la familia $\{(U_i, f_i)\}_i$ (donde $s|_{U_i} = e_i f_i$, con e_i un generador global de $\mathscr{L}|_{U_i}$) es un divisor de Cartier.

elementos regulares en elementos regulares. En el caso (a) cuando f es plano, vemos que el homomorfismo $A \to B$ es plano y basta notar que, en general, dado $a \in A$ regular y M un A-módulo, tenemos que $\operatorname{Tor}^1(A/aA, M) \cong M[a]$; y $\operatorname{Tor}^1(-, B) = 0$ pues B es plano.

Para el caso (b), sabemos que B es reducido y que cada componente irreducible de U domina a una componente irreducible de V (¿por qué?). Así que supongamos que $\varphi := f^\sharp(V) \colon A \to B$ manda algún $a \in A$ en un divisor de cero. Luego, $\varphi(a)$ está contenido en un primo minimal $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ y, por hipótesis, $\varphi^{-1}[\mathfrak{q}] \in \operatorname{Spec} A$ es un primo minimal, de modo que a es un divisor de cero. □

Proposición 8.31: Sea $f \colon X \to Y$ un morfismo finito dominante entre esquemas noetherianos íntegros. Para todo punto $y \in Y$ de codimensión 1 y todo $D \in \operatorname{Div} Y$ tenemos

$$[K(X) : K(Y)]\nu_y(D) = \sum_{f(x)=y} [\Bbbk(x) : \Bbbk(y)]\nu_x(f^*D).$$

Justificar el por qué Liu [9, pág. 263].

Demostración: Sea $x \in X_y$ un punto en la fibra. Entonces x tiene codimensión ≤ 1 y no tiene dimensión 0 puesto que f es dominante. Ya que $\nu_y(D)$ se calcula localmente, podemos restringirnos a un entorno afín de y y suponer que $Y = \operatorname{Spec} A$ es afín, y que y es un punto cerrado de Y. Sea $B := \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ y supongamos que D está definido por un elemento regular $a \in A$.

Sea $n := [K(X) : K(Y)]$. Es fácil ver que $\operatorname{long}_A(B/aB) = n \operatorname{long}_A(A/aA)$ y sean $b_1, \dots, b_n$ una $K(Y)$-base de $K(X)$. Sea $M := \sum_{i=1}^n b_i A \leq B$ el cual es un A-submódulo. Como B/M es un A-módulo finitamente generado de pura torsión, entonces tiene longitud finita sobre A y podemos construir las siguientes sucesiones exactas de A-módulos de longitud finita:

$$0 \longrightarrow aB/aM \longrightarrow B/aM \longrightarrow B/aB \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M/aM \longrightarrow B/aM \longrightarrow B/M \longrightarrow 0$$

donde la multiplicación por a (que es un isomorfismo) induce $aB/aM \cong B/M$. Como

$$\begin{aligned} \operatorname{long}_A(B/aM) &= \operatorname{long}_A(aB/aM) + \operatorname{long}_A(B/aB) \\ &= \operatorname{long}_A(M/aM) + \operatorname{long}_A(B/M) \end{aligned}$$

y como M es un A-módulo libre de rango n concluimos que $\operatorname{long}_A(M/aM) = n \operatorname{long}_A(A/aA)$. □

8.2 Ciclos y divisores de Weil

Desde ahora trabajaremos con esquemas noetherianos, a diferencia del caso de divisores de Cartier sobre *localmente* noetherianos. El lector interesado puede acarrear sobre las siguientes definiciones condición de sumas *localmente* finitas.

Definición 8.32: Sea X un esquema noetheriano. Un ***ciclo primo*** es un cerrado irreducible X, o equivalentemente, es un conjunto de la forma $\overline{\{x\}}$ para algún $x \in X$. Un ***ciclo*** en X es una suma formal de ciclos primos:

$$Z = \sum_{x \in X} n_x[x],$$

donde el coeficiente $n_x =: \operatorname{mult}_x(Z)$ se dice la ***multiplicidad*** de x en Z, y donde se exige que éstas sean nulas para todos salvo finitos puntos.

Se dice que el punto $x \in X$ (o que su clausura $\overline{\{x\}}$) es una ***componente*** de Z si $\operatorname{mult}_x(D) \neq 0$; el conjunto de sus componentes se denomina su ***soporte*** $\operatorname{Supp} Z := \{x \in X : \operatorname{mult}_x(Z) \neq 0\}$. Se dice que dos ciclos Z_1, Z_2 son ***disjuntos*** si sus soportes son disjuntos.

Se dice que un ciclo Z es ***positivo***, denotado $Z \geq 0$, si $\operatorname{mult}_x(Z) \geq 0$ para todo x. Se denota $Z > 0$ si $Z \geq 0$ y $Z \neq 0$. Se denota $Z_1 \geq Z_2$ (resp. $Z_1 > Z_2$) si $Z_1 - Z_2 \geq 0$ (resp., $Z_1 - Z_2 > 0$). Dado un ciclo Z, existen unos únicos ciclos Z_0, Z_∞ disjuntos, llamados ***ciclo de ceros*** y ***ciclo de polos*** resp., tales que $Z = Z_0 - Z_\infty$.

Se dice que un ciclo es de ***codimensión pura*** r si sus componentes tienen todas codimensión r (incluyendo al ciclo nulo). Se denota por $\mathcal{Z}(X)$ al grupo de los ciclos de X y por $\mathcal{Z}^r(X)$ al subgrupo de los ciclos de codimensión pura r. Un ***divisor de Weil*** es un ciclo de codimensión pura 1 y denotamos $\operatorname{Div} X := \mathcal{Z}^1(X)$. Nótese que $\mathcal{Z}(X) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \mathcal{Z}^r(X)$.

Nótese que si X es un noetheriano de dimensión pura 1, entonces un ciclo de codimensión pura 1 es solamente una suma formal de finitos puntos cerrados.

Si exigimos que X sea íntegro, noetheriano y regular en codimensión 1, entonces cada $\mathscr{O}_{X,\eta}$, donde $\eta \in X$ es un punto de codimensión 1, resulta ser un dominio de valuación discreta. En éste caso:

Proposición 8.33: Sea X íntegro, localmente noetheriano y regular en codimensión 1. Entonces $f \in K(X)^\times$ tiene un cero en un divisor primo $Y = \overline{\{\eta\}}$ syss $f_\eta \in \mathfrak{m}_{X,\eta}$, y tiene un polo en Y syss $f_\eta \notin \mathscr{O}_X(Y)$.

Lema 8.34: Sea X un esquema íntegro (localmente) noetheriano. Para todo $f \in K(X)^\times$ las familias:

$$\{Y \subseteq X : Y \text{ divisor primo con punto genérico } \eta \text{ y } f \in \mathscr{O}_{X,\eta}\},$$
$$\{Y \subseteq X : Y \text{ divisor primo y } \nu_Y(f) = 0\},$$

son (localmente) finitas.

Acá ν_Y, donde $Y = \overline{\{\eta\}}$ representa la valuación $\mathfrak{m}_{X,\eta}$-ádica, la cual siempre existe independiente si el anillo local $\mathscr{O}_{X,\eta}$ es de valuación discreta o no.

Demostración: Sea ξ el punto genérico de X. Como $K(X) = \mathscr{O}_{X,\xi} = \varinjlim_U \mathscr{O}_X(U)$, entonces existe un U afín tal que $f \in \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ y luego las familias del enunciado corresponden a componentes irreducibles de $X \setminus U$. Como $X \setminus U$ es localmente noetheriano, entonces admite una base por abiertos afínes noetherianos, en cada uno de ellos hay finitas componentes irreducibles, luego hay localmente finitas componentes irreducibles en X. Es fácil notar como el argumento nos da que las familias son finitas si X es noetheriano. □

Ejemplo. Sea k un cuerpo, $X := \mathbb{A}_k^2$ y tome el punto cerrado $P := (x, y) \in \operatorname{Spec}(k[x, y]) = X$. Analicemos la ecuación $f := x/y \in K(X) = k(x, y)$. El anillo local en P es $A := \mathscr{O}_{X,P} = k[x, y]_{(x,y)}$ y su ideal maximal es $\mathfrak{m}_{X,P} = (x, y)^e$; como $k.\dim A = 2$ vemos que A no es un dominio de valuación discreta. Para calcular $\nu_P(f)$ con $f \in \operatorname{Frac} A$, calculamos la valuación de su numerador $\nu_P(x) = 1$ y de su denominador $\nu_P(y) = 1$, y concluimos que $\nu_P(f) = 0$.

Éste es un ejemplo prototípico de un «problema» cuando miramos valuaciones en anillos que no son de valuación discreta. El lector puede argüir que era esperable dado que el punto que tomamos era de codimensión 2, pero un caso similar pasaría con una variedad con un punto singular de codimensión 1: tendríamos un ideal maximal con varios generadores.

Definición 8.35: Sea X un esquema íntegro localmente noetheriano. El ***divisor de Weil principal*** asociado a $f \in K(X)^\times$ es

$$\operatorname{div} f := \sum_Y \nu_Y(f) \cdot Y,$$

donde Y recorre los divisores primos.

Lema 8.36: Sea X un esquema íntegro localmente noetheriano. Para todo par $f, g \in K(X)^\times$ se cumple que

$$\operatorname{div}(f \cdot g) = \operatorname{div} f + \operatorname{div} g.$$

Así, los divisores de Weil forman un grupo (multiplicativo) y los divisores principales un subgrupo.

Definición 8.37: Sea X un esquema íntegro localmente noetheriano. Dos divisores de Weil D_1, D_2 se dicen ***linealmente equivalentes*** si $D1 - D2$ es un divisor principal. El cociente del grupo de los divisores de Weil por el subgrupo de los divisores principales se llama el ***grupo de clases de divisores de Weil***, denotado $\operatorname{Cl} X$.

Proposición 8.38: Sea A un dominio íntegro noetheriano. Entonces A es un DFU syss $X := \operatorname{Spec} A$ es normal y $\operatorname{Cl} X = 0$.

DEMOSTRACIÓN: $\Longrightarrow$. Si A es DFU, entonces A es un anillo normal y, además, $\operatorname{Cl} X = 0$.

$\Longleftarrow$. Si A es normal y $\operatorname{Cl} X = 0$, queremos ver que todo primo de altura 1 es principal para concluir por el teorema A.54. Sea $\mathfrak{p}$ un primo de altura 1 y sea $Y := \mathbf{V}(\mathfrak{p})$ su divisor asociado. Entonces, existe $f \in K := \operatorname{Frac} A$ tal que $\operatorname{div}(f) = Y$, puesto que $\operatorname{Cl} X = 0$. Así, $\nu_Y(f) = \nu_{\mathfrak{p}}(f) = 1$ y luego $f \in A_{\mathfrak{p}}$ y es, de hecho, un uniformizador (i.e., $fA_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$). Si $\mathfrak{q}$ es otro primo de altura 1, entonces $Z := \mathbf{V}(\mathfrak{q})$ es otro divisor y $\nu_Z(f) = 0$, de modo que $f \in A_{\mathfrak{q}}$ y es invertible. Por el teorema A.55 vemos que

$$f \in \bigcap_{\operatorname{alt} \mathfrak{q} = 1} A_{\mathfrak{q}} = A,$$

de modo que $f \in A \cap \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. Más aún, si $g \in \mathfrak{p}$, entonces $\nu_{\mathfrak{p}}(g) \geq 1$, luego $\nu_{\mathfrak{p}}(g/f) \geq 0$ y $g/f \in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, pero $g/f \in A_{\mathfrak{q}}$ para todo primo $\mathfrak{q}$ de altura 1, así que $g/f \in A$ y se nota que $g \in (f)$ como se quería probar. □

Nótese que la proposición anterior generaliza el conocido teorema de que un dominio de Dedekind es un DIP syss es un DFU.

Ejemplo. Sea k un cuerpo y $X := \mathbb{A}_k^n = \operatorname{Spec}(A[t_1, \dots, t_n])$. Como $A[t_1, \dots, t_n]$ es un DFU (teorema A.7), entonces $\operatorname{Cl} X = 0$.

Vamos a calcular nuestro primer ejemplo no trivial, para los espacios proyectivos. Comenzamos con observaciones importantes, por nuestra clasificación de los cerrados de $\mathbb{P}^n_k$ (corolario 6.37) sabemos que éstos son de la forma $Y := \mathbf{V}_+(\mathfrak{a})$ donde $\mathfrak{a}$ es un ideal homogéneo en $A[t_0, \dots, t_n] =: B$. Para que Y tenga codimensión 1, entonces $\mathfrak{a}$ tiene que tener altura 1. Como B es un DFU, entonces $\mathfrak{a} = (f)$ con f homogéneo y definimos $\deg Y := \deg f$.

Proposición 8.39: Sea k un cuerpo y $X := \mathbb{P}^n_k = \operatorname{Proj} A[t_0, \dots, t_n]$ el espacio proyectivo. Definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} \deg\colon \operatorname{Div}(X) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \sum_{i=1}^r a_i[\mathbf{V}_+(f_i)] &\longmapsto \sum_{i=1}^r a_i \deg(f_i). \end{aligned}$$

1. Sea H el hipersuperficie dado por $\mathbf{V}(t_0)$. Para todo divisor $D \in \operatorname{Div} X$ con $\deg D = d$, se cumple que $D \sim dH$. En consecuencia, si D, E son divisores y $\deg D = \deg E$, entonces $D \sim E$, de modo que deg induce una aplicación $\deg\colon \operatorname{Cl} X \to \mathbb{Z}$.

2. Sea $f \in K(X)^\times$, entonces $\deg(\operatorname{div} f) = 0$.

3. La aplicación $\deg\colon \operatorname{Cl} X \to \mathbb{Z}$ es un isomorfismo de grupos.

Demostración: Sea $B := A[t_0, \dots, t_n]$ y sea $g \in B$ un polinomio homogéneo de grado d. Entonces g se factoriza de forma única en primos $g = g_1^{\alpha_1} \cdots g_m^{\alpha_m}$, donde cada g_i determina una hipersuperficie $Y_i := \mathbf{V}_+(g_i)$. Así $\operatorname{div} g = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot Y_i$ aplicando la definición y notamos que $\deg(\operatorname{div} g) = \deg g$. Por ello, si $f = g/h \in K(X)^\times$ es una fracción de polinomios homogéneos del mismo grado, vemos que $\deg(\operatorname{div} f) = \deg(\operatorname{div} g) - \deg(\operatorname{div} h) = 0$, lo que prueba 2.

Sea D un divisor arbitrario de grado d, entonces podemos escribir $D = D_1 - D_2$ donde D_1, D_2 son divisores efectivos de grados d_1, d_2 resp., tales que $d = d_1 - d_2$. Sean $D_1 = \operatorname{div} g_1, D_2 = \operatorname{div} g_2$ por las observaciones previas. Entonces $D - dH = \operatorname{div} f$, donde $f = g_1/t_0^d g_2$ es una función racional de $K(X)^\times$, lo que prueba 1. Finalmente, basta observar que $\deg H = 1$ para concluir 3. $\square$

Proposición 8.40: Sea X un esquema íntegro localmente noetheriano, sea $Z \subseteq X$ un cerrado propio y sea $U := X \setminus Z$. Entonces:

1. Existe un epimorfismo (de grupos) $\operatorname{Cl} X \twoheadrightarrow \operatorname{Cl} U$ dado por $\sum_Y a_Y Y \mapsto \sum_Y a_Y (Y \cap U)$, donde borramos las coordenadas tales que $Y \cap U = \varnothing$.

2. Si $\operatorname{codim}(Z, X) \geq 2$, entonces $\operatorname{Cl} X \to \operatorname{Cl} U$ es un isomorfismo.

3. Si Z es un cerrado irreducible de codimensión 1, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \langle Z \rangle \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Cl} X \longrightarrow \operatorname{Cl} U \longrightarrow 0$$

es exacta, donde $\varphi(a) := a \cdot Z$.

Demostración:

1. Nótese que un divisor primo en U posee un punto genérico, luego necesariamente es de la forma $Y \cap U$ donde Y es un divisor primo en X no disjunto de U. Más aún, dado $f \in K(X) = K(U)$ vemos que $\operatorname{div}_U(f) = \sum_Y a_Y(Y \cap U)$ de modo que corresponde a un epimorfismo.

2. Las clases $\operatorname{Div} X$ y $\operatorname{Cl} X$ dependen de divisores de codimensión 1, así que no afecta.

3. El $\ker(\operatorname{Cl} X \to \operatorname{Cl} U)$ consiste en los divisores con soporte en Z, así que, si Z es irreducible, se corresponde al subgrupo de $\operatorname{Cl} X$ generado por $1 \cdot Z$. □

Ejemplo. • Sea k un cuerpo, y $\mathbb{Z}$ una hipersuperficie de grado d en $\mathbb{P}^n_k$. Entonces las proposiciones anteriores prueban que $\operatorname{Cl}(\mathbb{P}^n_k \setminus Z) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

• En particular, tomando $Z = \mathbf{V}(t_0)$ en el ejemplo anterior, obtenemos que $\operatorname{Cl}(\mathbb{A}^n_k) \cong \operatorname{Cl}(\mathbb{P}^n_k \setminus Z) \cong 0$.

Ahora veremos como construir una aplicación entre divisores de Cartier y divisores de Weil.

Definición 8.41: Sea X un esquema íntegro localmente noetheriano. Dado un divisor de Cartier $D \in \operatorname{CaDiv} X$ se define:

$$[D] := \sum_Y \nu_Y(D) \cdot [Y] \in \operatorname{Div} X.$$

Proposición 8.42: Sea X un esquema íntegro localmente noetheriano. Se cumplen:

1. La aplicación $D \mapsto [D]$ determina un homomorfismo de grupos $\operatorname{CaDiv} X \to \operatorname{Div} X$. Más aún, la imagen de divisores de Cartier efectivos son divisores efectivos.
2. Si X es regular en codimensión 1 (e.g., normal) y $f \in \Gamma(X, \mathscr{K}(X)^\times) = K(X)^\times$, entonces $[\operatorname{div} f] = \operatorname{div} f$ (lo que justifica la notación).
3. Si X es regular en codimensión 1, entonces se induce un monomorfismo $\operatorname{CaCl} X \hookrightarrow \operatorname{Cl} X$ de grupos. Más aún, $D \in \operatorname{CaDiv} X$ es efectivo syss $[D] \in \operatorname{Div} X$ es efectivo.

DEMOSTRACIÓN: 1 y 2., son claros, así que veamos 3: Sea $D \in \operatorname{CaDiv} X$ representado por abiertos afines $\{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$. Si $[D] \geq 0$, entonces para cada U_i, el divisor $[\operatorname{div} f_i] = [D|_{U_i}] = [D]|_{U_i}$ es efectivo y, por la proposición 8.33, se sigue que $f_i \in \mathscr{O}_X(U_i)$, así que $D \geq 0$. Si $[D] = 0$ entonces como $[D] \geq 0$ y $[-D] \geq 0$, concluimos que $D = 0$, por lo que, $\operatorname{CaDiv} X \hookrightarrow \operatorname{Div} X$ es inyectivo y $\operatorname{CaCl} X \to \operatorname{Cl} X$ también. □

Teorema 8.43: Sea X un esquema separado, noetheriano, íntegro y factorial (e.g., una variedad suave). Entonces existe un isomorfismo canónico $\operatorname{Div} X \cong \operatorname{CaDiv} X$, tal que los divisores principales de Weil corresponden exactamente a los divisores principales de Cartier.

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, nótese que como X es íntegro, entonces el haz $\mathscr{K}_X$ es el haz constante $K(X)$. □

Definición 8.44: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo finito dominante entre esquemas íntegros. Se define el ***grado*** de f como $\deg f := [K(X) : K(Y)]$ (cfr. corolario 5.28.3). Dado un ciclo $Z \in \mathcal{Z}(X)$, entonces definimos un ciclo $f^*Z \in \mathcal{Z}(Y)$ que, para un punto $y \in Y$, tiene multiplicidad:

$$\operatorname{mult}_y(f^*Z) := \sum_{f(x)=y} [\Bbbk(x) : \Bbbk(y)] \operatorname{mult}_x(Z).$$

Es inmediato comprobar que $f^*\colon \mathcal{Z}(X) \to \mathcal{Z}(Y)$ es un homomorfismo de grupos y que la construcción f^* es funtorial.

Teorema 8.45: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo finito dominante entre esquemas íntegros noetherianos. Entonces para todo divisor de Cartier $D \in \operatorname{CaDiv} X$ tenemos

$$f_*[f^*D] = (\deg f)[D].$$

DEMOSTRACIÓN: Como la igualdad puede verificarse localmente (ya que el valor de $[D]$ se determina localmente), podemos suponer que D es un divisor principal y, como tanto f_* como f^* son homomorfismos de grupos, podemos suponer que D es efectivo. Es claro que $\operatorname{Supp} f_*[f^*D] = \operatorname{Supp} D$ y la igualdad en multiplicidades se deduce de la proposición 8.31. □

El teorema 5.75 nos dice que un morfismo finito dominante tiene grado 1 syss es birracional y, por el teorema anterior, ahora equivale a que f_*, f^* sean isomorfismos, uno la inversa del otro.

Lema 8.46: Sea $f: X \to Y$ un morfismo separado birracional de tipo finito entre esquemas íntegros noetherianos. Entonces:

1. Existe un abierto no vacío $V \subseteq Y$ tal que $f^{-1}[V] \to V$ es un isomorfismo.

2. Sea W la unión de abiertos V_i's tales que cada $f^{-1}[V_i] \to V_i$ sea un isomorfismo. Entonces $x \in W$ syss $f_x^\sharp: \mathscr{O}_{Y,f(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$ es un isomorfismo.

Definición 8.47: Sea $f: X \to Y$ un morfismo separado birracional de tipo finito entre esquemas íntegros noetherianos. El conjunto de puntos $x \in X$ tales que $f_x^\sharp: \mathscr{O}_{Y,f(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$ no es un isomorfismo se llama el ***conjunto excepcional*** del morfismo f.

Este conjunto adquiere particular relevancia al estudiar resolución de singularidades.

Teorema 8.48 (de puridad de van der Waerden): Sea $f: X \to Y$ un morfismo separado birracional de tipo finito entre esquemas íntegros noetherianos. Si Y es regular, entonces el conjunto excepcional E de f o es vacío, o es un cerrado de codimensión pura 1.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $E \neq \varnothing$. Por el lema podemos ver que $E|_U$ es el conjunto excepcional de $f|_U: U \to Y$, de modo que podemos suponer que X, Y son afines. Así $X \to Y$ es cuasiproyectivo y sea $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_Y$ un encaje por el que f se factoriza. Denotemos $\overline{X}$ la clausura de X de $\mathbb{P}^n_Y$ con la estructura reducida con la cual $\overline{X}$ es íntegro y luego f se extiende a un morfismo birracional proyectivo, de modo que podemos suponer que X es proyectivo sobre Y.

Sea $H := \mathbf{V}_+(h) \subseteq \mathbb{P}^n_Y$ una hipersuperficie que no contiene puntos genéricos de E. Sea $X = \operatorname{Proj}(A[t_0, \dots, t_n]/\mathfrak{p})$, donde $Y = \operatorname{Spec} A$; luego vemos que la imagen de h en X es no nula. Sea $D \in \operatorname{CaDiv}^+ X$ el divisor asociado a h y escribamos

$$[D] = \sum_{i=1}^{r} a_i [F_i] \in \operatorname{Div} X,$$

donde cada $F_i = \overline{\{\eta_i\}}$ es un ciclo primo de codimensión 1 en X. Entonces cada $\eta_i \notin E$, pues $\eta_i \in \operatorname{Supp}[D] = H \cap X$, de modo que $f(\eta_i) \in Y$ tiene codimensión 1. Como Y es regular, existen $\Delta_i \in \operatorname{CaDiv}^+ Y$ tales que $[\Delta_i] = \overline{\{f(\eta_i)\}}$. Definamos

$$\Delta := \sum_{i=1}^{r} a_i \Delta_i \in \operatorname{CaDiv}^+ Y, \qquad Z := [f^*\Delta] - [D] \in \operatorname{Div} X.$$

Nótese que basta probar que $\operatorname{Supp} Z = E$. Sea $W := X \setminus E$, como sabemos que $f|_W : W \xrightarrow{\sim} f[W]$ es un isomorfismo, vemos que $Z|_W = [f^*\Delta]|_W - [D]|_W = 0$, por lo que, $\operatorname{Supp} Z \subseteq E$. Para probar el recíproco, sea $x \in E$ y sea $y := f(x)$. Como Y es normal, tenemos $f_*\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_Y$, de modo que X_y no tiene puntos aislados y, por tanto, $\dim(X_y) \geq 1$. Como $H \cap X_y \neq \varnothing$ (¿por qué?), vemos que $y \in f[H \cap X]$ y, por tanto,

$$E \subseteq f^{-1}\big[f[H \cap X]\big] = \operatorname{Supp}[f^*\Delta] \subseteq (H \cap X) \cup \operatorname{Supp} Z.$$

Como H no contiene puntos genéricos de E, concluimos que $E \subseteq \operatorname{Supp} Z$ como se quería probar. □

8.3 Divisores sobre curvas y el problema de Riemann-Roch

Lema 8.49: Sea X un esquema noetheriano no vacío con componentes irreducibles $\{X_i\}_i$, tal que ninguna componente corresponde a un punto aislado. Son equivalentes:

1. Todo punto cerrado $x \in X^0$ tiene codimensión 1, o equivalentemente, $k.\dim(\mathscr{O}_{X,x}) = 1$.
2. Los cerrados irreducibles de X son los X_i's y los puntos cerrados
3. X tiene dimensión pura 1.

Definición 8.50: Un esquema que satisface las condiciones del lema anterior se dice una ***curva absoluta***.

Nótese que la definición general de *curva absoluta* ni siquiera exige ser íntegro.

Corolario 8.50.1: Los conjuntos constructibles de una curva absoluta irreducible X son finitos puntos cerrados o complementos de finitos puntos cerrados. En consecuencia, un conjunto constructible es abierto o cerrado.

Demostración: Como X es noetheriano (en particular, compacto) cada cerrado posee finitas componentes irreducibles, luego los cerrados son o bien X mismo, o bien finitos puntos cerrados. Así, un conjunto localmente cerrado es abierto o finitos puntos cerrados. Más aún, así se ve que la unión de un abierto no vacío con un cerrado es nuevamente abierto. □

Proposición 8.51: Sea X un esquema conexo no vacío, sea Y una curva absoluta irreducible y sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de tipo finito. Entonces:

1. $f[X]$ es o bien un abierto denso o bien un punto cerrado de Y.
2. Si f es cerrado, entonces o bien es suprayectivo o bien es constante.
3. Si X es íntegro e Y es normal (o equivalentemente, regular), entonces f es plano syss es no constante.

Demostración:

1. Esto es una consecuencia del corolario anterior y el teorema de constructibilidad de Chevalley.
2. Trivial del inciso anterior. □

Definición 8.52: Una ***curva*** X sobre un cuerpo k es un esquema algebraico que es una curva absoluta (i.e., de dimensión pura 1).

Proposición 8.53: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo entre curvas irreducibles sobre un cuerpo k. Supongamos que f es no constante, entonces:

1. f es dominante y cuasifinito.
2. Si X es propio e Y es separado sobre k, entonces f es finito suprayectivo e Y es propio sobre k.

Demostración:

1. Por la proposición anterior, $f[X]$ es un abierto denso de Y y, en particular, f es dominante. Probar que f es cuasifinito equivale a ver que las fibras de f tienen dimensión 0. Si alguna tuviese dimensión 1, sería un cerrado (por el teorema de Chevalley), de modo que sería todo X, lo que es absurdo.

2. Si X es propio, e Y es separado, entonces f es propio (prop. 4.46) y, por tanto, es un morfismo finito. Además, como f es propio, entonces es cerrado y, por la proposición anterior, debe ser suprayectivo. □

Corolario 8.53.1: Un divisor principal sobre una curva suave completa X tiene grado 0. En consecuencia, la aplicación $\deg\colon \operatorname{Cl} X \to \mathbb{Z}$ es un epimorfismo.

Demostración: Sea $f \in K(X)^\times$. Si $f \in k$, entonces claramente $\operatorname{div} f = 0$. Si $f \notin k$, entonces $k(f) \subseteq K(X)$ induce un morfismo $g\colon X \to \mathbb{P}^1_k$ (puesto que f es k-trascendente ya que k es algebraicamente cerrado). Como g es un morfismo no constante entre curvas sobre k, debe ser dominante finito por la proposición 6.57, y claramente $\operatorname{div} f = g^*([0] - [\infty])$; donde el $0, \infty$ son los puntos dados por los ideales $(x), (y)$ de $\operatorname{Proj}(k[x, y]) = \mathbb{P}^1_k$. Como $\deg([0] - [\infty]) = 0$, entonces se sigue de la proposición anterior. □

Un comentario acerca de qué son los divisores primos sobre una curva suave: estos corresponden a puntos cerrados, así que admitimos la siguiente definición:

Definición 8.54: Sea X una curva sobre un cuerpo k. Definimos el grado de un divisor $D \in \operatorname{CaDiv} X$ como

$$\deg_k D := \sum_{x \in X^0} \operatorname{mult}_x(D)[\Bbbk(x) : k].$$

Lema 8.55: Sea X una curva sobre un cuerpo k. Para todo divisor $D \in \operatorname{CaDiv}^+ X$ se tiene que $\deg_k D = \dim_k(\Gamma(X, \mathscr{O}_X(D)))$.

Lema 8.56: Sea X un esquema noetheriano de dimensión 1, y sea $D \in \operatorname{CaDiv} X$. Entonces existen divisores efectivos no nulos $E, F \in \operatorname{CaDiv}^+ X$ tales que $D = E - F$.

Proposición 8.57: Sea k un cuerpo y $\pi\colon X \to Y$ un morfismo finito entre curvas suaves sobre k. Para todo divisor $D \in \operatorname{Div} Y$ se cumple

$$\deg(\pi^* D) = \deg \pi \cdot \deg D.$$

En particular, $\deg(\pi^* D) = \deg D$ si π es una normalización.

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que para todo punto cerrado $Q \in Y$ (divisor primo) se cumple que $\deg(f^* Q) = \deg f$. Sea $V = \operatorname{Spec} A \subseteq Y$ un entorno afín de Q y sea $B := \mathcal{O}_{k(X)/A}$. Entonces, como en la prueba de la proposición 6.57, se tiene que $f^{-1}[V] = \operatorname{Spec} B$. Sea $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_Q \lhd A$ el ideal maximal dado por la fibra $\mathscr{O}_{Y,Q}$, entonces localizamos por $S := A \setminus m$ para obtener el morfismo $\mathscr{O}_{Y,Q} = A_\mathfrak{m} \to B_\mathfrak{m}$, definiendo $B' := B_\mathfrak{m}$ obtenemos que es un $A_\mathfrak{m}$-módulo finitamente generado. Ahora bien, B' es libre de torsión, y $A_\mathfrak{m}$ es un dominio de valuación discreta, en particular un DIP, así que B' es libre y tiene rango $r := [K(X) : K(Y)] = \deg f$. Si t es un uniformizador de $A_\mathfrak{m}$, entonces B'/tB' es un $\Bbbk(Q)$-espacio vectorial de dimensión r. Por otro lado, los puntos $P_i \in f^{-1}[\{Q\}]$ están en biyección con los ideales maximales $\mathfrak{n}_i$ de B, así que, cada $B^i_\mathfrak{m} = \mathscr{O}_{X,P_i}$. Como $tB = \bigcap_i (tB'_{\mathfrak{n}_i} \cap B')$, el teorema chino del resto nos da que

Revisar conclusión del rango.

$$\dim_{\Bbbk(Q)}(B'/tB') = \sum_i \dim_{\Bbbk(Q)} \left(\frac{B'}{tB'_{\mathfrak{n}_i} \cap B'} \right),$$

pero

$$\frac{B'}{tB'_{\mathfrak{n}_i} \cap B'} \cong \frac{B'_{\mathfrak{n}_i}}{tB'_{\mathfrak{n}_i}} \cong \frac{\mathscr{O}_{X,P_i}}{t\mathscr{O}_{X,P_i}},$$

así que $\dim_{\Bbbk(Q)} \left(\frac{B'}{tB'_{\mathfrak{n}_i} \cap B'} \right) = \nu_{P_i}(t)$ como se quería probar. $\square$

La ventaja es que para curvas ser normal es lo mismo que ser regular, en donde podemos emplear que los divisores de Weil y de Cartier son canónicamente isomorfos.

Corolario 8.57.1: Sean X una curva suave sobre un cuerpo k y sea $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1_k$ un morfismo finito. Sea $t \in k(t) = K(Y)$ y sea $f := \pi^\sharp(t) \in K(X)$. Entonces

$$\deg \pi = \deg\big((\operatorname{div} f)_0\big) = \deg\big((\operatorname{div} f)_\infty\big).$$

Demostración: Como X, Y son suaves identificamos divisores de Weil y de Cartier. Así $[t] = [P] - [Q]$, para algunos $P, Q \in \mathbb{P}^1_k$ racionales y

$$\operatorname{div} f = \pi^*(\operatorname{div} t) = \pi^*[P] - \pi^*[Q],$$

como $\pi^*[P], \pi^*[Q]$ son divisores efectivos de soporte disjunto, entonces necesariamente $\pi^*[P] = (\operatorname{div} f)_0$ y $\pi^*[Q] = (\operatorname{div} f)_\infty$; como $\deg_k[P] = 1$ el enunciado se sigue de la proposición anterior. □

Lema 8.58: Sean X, Y un par de curvas completas sobre un cuerpo k. Para un morfismo $\pi \colon X \to Y$ son equivalentes:

1. π es finito.
2. π no es constante en ninguna componente irreducible de X.
3. La imagen de un punto genérico (de X) es un punto genérico (de Y).

Demostración: Claramente $1 \implies 2 \implies 3$. □

Teorema 8.59 (Riemann): Sea X una curva completa sobre un cuerpo k. Para todo $D \in \operatorname{CaDiv} X$ se cumple que

$$\chi_k(X, \mathscr{O}_X(D)) = \deg_k D + \chi_k(X, \mathscr{O}_X)$$

Demostración: Sea $D = E - F$, donde $E, F \in \operatorname{CaDiv}^+ X$ (cfr., lema 8.56). Luego a E, F le corresponden subesquemas cerrados por el lema 9.31 y tenemos la siguiente sucesión exacta de $\mathscr{O}_X$-módulos:

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X(-F) \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_F \longrightarrow 0.$$

Como $\mathscr{O}_X(E)$ es plano, podemos tensorizar y obtener la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X(D) \longrightarrow \mathscr{O}_X(E) \longrightarrow \mathscr{O}_X(E)|_F \longrightarrow 0.$$

Como F es un esquema finito, se tiene que $\mathscr{O}_X(E)|_F \simeq \mathscr{O}_F$ y, como $H^q(F, \mathscr{O}_F) = 0$ para cada $q \geq 1$, entonces por la proposición 8.16 tenemos que

$$\chi(\mathscr{O}_X(D)) = \chi(\mathscr{O}_X(E)) - \chi(\mathscr{O}_F) = \chi(\mathscr{O}_X(E)) - \deg F,$$

donde hemos empleado el lema 8.55.

Empleando $D = 0$ y $F = E$, obtenemos que $\chi(\mathscr{O}_X(E)) = \chi(\mathscr{O}_X) + \deg_k E$ y reemplazando obtenemos el enunciado. □

Definición 8.60: Sea X un esquema propio sobre un cuerpo k. Para un divisor de Cartier $D \in \operatorname{CaDiv} X$, se denotan:

$$L(D) := \Gamma(X, \mathscr{O}_X(D)), \qquad \ell(D) := \dim_k L(D).$$

Para un haz invertible $\mathscr{L}$ sobre X, se define su ***grado*** como:

$$\deg \mathscr{L} := \chi_k(X, \mathscr{L}) - \chi_k(X, \mathscr{O}_X).$$

Corolario 8.60.1: Sea X una curva completa sobre un cuerpo k. Para todo divisor de Cartier $D \in \operatorname{CaDiv} X$ tenemos que

$$\ell(D) \geq \deg_k D + 1 - p_a(X).$$

Corolario 8.60.2: Sea X una curva completa normal sobre un cuerpo k. Entonces $X \cong \mathbb{P}^1_k$ syss existe un divisor de Cartier D de $\deg_k D = 1$ y $\ell(D) \geq 2$. Más aún, de existir dicho D, el haz $\mathscr{O}_X(D)$ es muy amplio.

DEMOSTRACIÓN: $\Longleftarrow$. Sea D dicho divisor, y sea $g \in L(D)$. Luego $D \sim D + \operatorname{div} g \geq 0$ (proposición 8.29), de modo que podemos suponer que D es efectivo. Como $[D]$ es efectivo y de grado 1, entonces, visto como divisor de Weil, tiene que estar asociado a un único punto racional $x_1 \in X(k)$. En particular, $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \cong k$, pues $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ es un cuerpo (pues X es propio) y tiene un k-morfismo $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \to k$.

Sea $f \in L(D) \smallsetminus k$, luego $\operatorname{div} f + D$ es un divisor efectivo distinto de D, por tanto, $\operatorname{div} f = [x_0] - [x_1]$, donde $x_0 \in X(k) \smallsetminus \{x_1\}$ Finalmente, f induce un morfismo $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1_k$ no constante, que es luego finito y de grado 1 por la proposición 8.57. Ahora bien, π es birracional y como $\mathbb{P}^1_k$ es normal, la proposición 6.19 nos permite extender π a un isomorfismo.

$\Longrightarrow$. Trivial. □

Proposición 8.61: Sea X una curva completa sobre un cuerpo k.

1. Sean $D_1 \leq D_2$ divisores de Cartier sobre X. Entonces:

$$\ell(D_1) \leq \ell(D_2) \leq \ell(D_1) + \deg(D_2 - D_1).$$

   En particular, si $D \geq 0$, entonces

$$\ell(D) \leq \deg D + \dim_k \Gamma(X, \mathscr{O}_X).$$

Supongamos que X es íntegro.

2. Si $D \in \operatorname{CaDiv} X$ tiene $\deg_k D = 0$, entonces $\ell(D) \neq 0$ syss $D \sim 0$. Si $\deg_k D < 0$, entonces $\ell(D) = 0$.
3. Sea $\mathscr{L}$ un haz invertible sobre X. Entonces $\mathscr{L} \sim \mathscr{O}_X$ syss $\deg \mathscr{L} = 0$ y $\Gamma(X, \mathscr{L}) \neq 0$.

Demostración:

1. Como $\mathscr{O}_X(D_1) \subseteq \mathscr{O}_X(D_2)$, vemos que $\ell(D_1) \leq \ell(D_2)$. Supongamos que $D_1 < D_2$ y escribamos $D_2 = D_1 + E$, donde $E > 0$. Tensorizando la sucesión exacta
$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X(-E) \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_E \longrightarrow 0$$
por el haz invertible (luego, plano) $\mathscr{O}_X(D_2)$, obtenemos
$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X(D_1) \longrightarrow \mathscr{O}_X(D_2) \longrightarrow \mathscr{O}_X(D_2)|_E \longrightarrow 0.$$
Como E es un esquema finito, vemos que $\mathscr{O}_X(D_2)|_E \simeq \mathscr{O}_E$, luego tenemos la sucesión exacta de k-espacios vectoriales
$$0 \longrightarrow L(D_1) \longrightarrow L(D_2) \longrightarrow \Gamma(E, \mathscr{O}_E),$$
y sacando dimensiones obtenemos la desigualdad deseada.
2. Supongamos que $\ell(D) \neq 0$. Sea $f \in L(D) \setminus \{0\}$, entonces $D \sim \operatorname{div} f + D \geq 0$, por lo que, $\deg D \geq 0$. Si $\deg D = 0$, entonces necesariamente $\operatorname{div} f + D = 0$, es decir, $D \sim 0$.
3. Supongamos que $\deg \mathscr{L} = 0$, pero existe una sección global $s \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ no nula. Entonces sea $\mathscr{M} := \mathscr{L} \otimes (s\mathscr{O}_X)^\vee$, el cual es un haz invertible que contiene a $\mathscr{O}_X$ (¿por qué?) y contenido en $\mathscr{K}_X$ (aquí empleamos que X es íntegro). Luego está asociado un único divisor de Cartier efectivo D y, como $\mathscr{L} \simeq \mathscr{M}$, vemos que $\deg D = \deg \mathscr{L} = 0$. Así $D = 0$ y $\mathscr{L} \simeq \mathscr{O}_X$ como se quería probar. □

Teorema 8.62 – *Teorema de Riemann-Roch*: Sea $f : X \to \operatorname{Spec} k$ una curva completa. Para todo divisor de Cartier $D \in \operatorname{Div} X$ se tiene que:
$$h^0(D) - h^0(K_X - D) = \deg D + 1 - p_a(X),$$
donde K_X representa el haz invertible ω_f visto como divisor. En particular, si X es íntegro y $\deg D > 2(p_a(X) - 1) = \deg(K_X)$, entonces

tenemos que $h^0(D) = \deg D + 1 - g$.

Demostración: Por dualidad de Serre, para todo haz invertible $\mathscr{L}$ tenemos que

$$H^0(X, \mathscr{L}^\vee \otimes \omega_f) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{L}, \omega_f) \simeq H^1(X, \mathscr{L})^\vee.$$

Así, lo aplicamos a $\mathscr{L} := \mathscr{O}_X(D)$ y, en el enunciado, al lado izquierdo tenemos la característica de Euler-Poincaré de $\mathscr{O}_X(D)$, con lo que es consecuencia del teorema de Riemann. □

Corolario 8.62.1: Sea X una curva completa sobre un cuerpo k. Entonces un haz invertible $\mathscr{L}$ sobre X es amplio syss $\deg_k(\mathscr{L}) > 0$.

Demostración: Dado otro haz invertible $\mathscr{M}$, identificamos $\mathscr{M} \simeq \mathscr{O}_X(E)$ y $\mathscr{L} \simeq \mathscr{O}_X(D)$, donde D es efectivo. Luego es fácil notar que $nD + E > 0$ para n suficientemente grande y, de hecho, por aditividad de $\chi_k(X, -)$ podemos encontrar n tal que $\deg_k(nD+E) > \deg_k(K_X)$, de modo que $h^0(nD+E) > 0$. Así, $\mathscr{L}^{\otimes n} \otimes \mathscr{M}$ tiene secciones globales no nulas y es invertible, así que está globalmente generado; con ello vemos que D es amplio. □

Proposición 8.63: Sea X una curva propia i.c.l. (e.g., suave) sobre un cuerpo k. Se cumplen:

1. $\deg_k(\omega_{X/k}) = 2(p_a - 1)$.
2. Si X es geométricamente conexa y geométricamente reducida, entonces $p_g = \dim_k H^0(X, \omega_{X/K}) = p_a$.

Demostración:

1. Como X es i.c.l., entonces $\omega_f = \omega_{X/k}$ (el haz dualizante), entonces se sigue del teorema de Riemann.
2. Si X es una curva geométricamente conexa y geométricamente reducida, entonces $h^0(\mathscr{O}_X) = h^1(\omega_{X/k}) = 1$ por dualidad de Serre y concluimos por el inciso anterior. □

En consecuencia, al hablar de curvas proyectivas suaves nos referiremos a su *género* a secas, y le denotaremos $g(X)$.

Ejemplo. La recta proyectiva $\mathbb{P}^1_k$ tiene, pues, género aritmético $p_a(\mathbb{P}^1_k) = 0$. Ya que sabemos que $\omega_{\mathbb{P}^1/k} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$ tiene grado -2.

Proposición 8.64: Sea X una curva suave, proyectiva, geométricamente irreducible sobre un cuerpo k finito. Entonces $\operatorname{Pic}^0 X \le \operatorname{Pic} X$ tiene una clase lateral cuyos elementos se representan por divisores efectivos. En particular, $\operatorname{Pic}^0 X$ es finito.

Demostración: ... Veamos el «en particular»: nótese que si D es tal que $[D] \in \operatorname{Pic}^0 X$, entonces D solo puede ser efectivo si $D = 0$. Enumeremos los puntos cerrados de X como $x_1, x_2, x_3, \dots$ y para cada divisor D, denotemos $n_i(D)$ el coeficiente de x_i. Si $\operatorname{Pic}^0 X$ fuera infinito entonces o bien hay algún i tal que $n_i(D)$ toma infinitos valores negativos, o bien cada $n_i(D)$ toma finitos valores negativos, pero infinitos de los $n_i(D)$ (moviendo el i) son < 0. En cualquier caso, no existe un divisor E tal que todas las clases en $\operatorname{Pic}^0 X + E$ son efectivas. □

8.4 Números de intersección

En ésta sección daremos una introducción a la intersección empleando los polinomios de Hilbert-Samuel introducidos en §8.1.2. Ésta sección está inspirada en el apéndice §VI.2 de Kollár **[15]**.

Teorema 8.65 (Kleiman-Snapper): Sea X un esquema propio sobre un cuerpo k. Sean $\mathscr{L}_1, \dots, \mathscr{L}_r$ haces invertibles sobre X y $\mathscr{F}$ un haz coherente. Sea $d := \dim \operatorname{Supp} \mathscr{F}$. Existe un único polinomio, llamado ***de Hilbert-Samuel*** $P(t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{Q}[\boldsymbol{t}]$ tal que para toda tupla de enteros $n_1, \dots, n_r$ se satisface que

$$P(n_1, \dots, n_r) = \chi_k(X, \mathscr{L}_1^{n_1} \otimes \cdots \mathscr{L}_r^{n_r} \otimes \mathscr{F}).$$

Éste polinomio tiene grado total $\le d$.

Demostración: Si X es proyectivo y los $\mathscr{L}_i$'s son muy amplios, entonces es una mera construcción recursiva de polinomios de Hilbert-Samuel. Si X es proyectivo, entonces siempre existe un haz muy amplio $\mathscr{L}_0$ tal que cada $\mathscr{L}_0 \otimes \mathscr{L}_i$ es muy amplio (esto pues alguna potencia de $\mathscr{L}_0$ satisface que cada uno sea globalmente generado) y así, defínase

$$Q(n_0, n_1, \dots, n_r) := \chi_k(X, \mathscr{L}_0^{n_0} \otimes (\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1)^{n_1} \otimes \cdots \otimes (\mathscr{L}_0\mathscr{L}_r)^{n_r} \otimes \mathscr{F}),$$

y así basta definir $F(t_1, \dots, t_r) := Q(-t_1 - \cdots - t_r, t_1, \dots, t_r)$.

Cuando X es propio en general, aplicaremos dévissage. Trivialmente se satisface Dév1 y Dév 3; aplicando que $\chi_k(X, -)$ separa sucesiones exactas se sigue Dév2, así que basta probar que para todo subesquema cerrado íntegro $Z \subseteq X$ se cumple que $\mathscr{O}_Z$ satisface el teorema. Como los encajes cerrados son propios, podemos aplicar inducción noetheriana y suponer que $Z = X$ y basta probar que $\mathscr{O}_X$ satisface el teorema. Por la proposición 8.27 existe un divisor $D \in \operatorname{CaDiv} X$ tal que:

- $\mathscr{O}_X(D) = \mathscr{L}_1$.
- $\mathscr{I} := \mathscr{O}_X(-D) \cap \mathscr{O}_X$, $\mathscr{J} := \mathscr{O}_X(D) \cap \mathscr{O}_X$ sean $\mathscr{O}_X$-submódulos coherentes de $\mathscr{K}_X$, no libres.
- $\mathscr{I} \otimes \mathscr{L}_1 = \mathscr{J}$.

Así, tensorizando $0 \to \mathscr{I} \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X/\mathscr{I} \to 0$ con $\mathscr{L}_1^{\otimes n_1}$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{I} \otimes \mathscr{L}_1^{\otimes n_1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{L}_1^{\otimes n_1} \arrow[r] & \mathscr{L}_1^{\otimes n_1} \otimes (\mathscr{O}_X/\mathscr{I}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{J} \otimes \mathscr{L}_1^{\otimes n_1 - 1} \arrow[r] & \mathscr{L}_1^{\otimes n_1 - 1} \arrow[r] & \mathscr{L}_1^{\otimes n_1 - 1} \otimes (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

así aplicando característica de Euler, obtenemos que

$$\chi(X, \mathscr{L}_1^{\otimes n_1}) - \chi(X, \mathscr{L}_1^{\otimes n_1 - 1} a) = \chi(\mathbf{V}(\mathscr{I}), \mathscr{L}_1^{n_1}) - \chi(\mathbf{V}(\mathscr{J}), \mathscr{L}_1^{n_1 - 1}),$$

donde por hipótesis noetheriana el lado derecho es un polinomio por hipótesis noetheriana. Aplicando inducción sobre los grados $n_1, \dots, n_r$ y un argumento similar se concluye el enunciado. □

Definición 8.66: Un polinomio $f(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{Q}[\boldsymbol{x}]$ se dice ***a valores enteros*** si para toda tupla $(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}^r$ se cumple que $f(\boldsymbol{n}) \in \mathbb{Z}$.

Lema 8.67: Sea $f(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{Q}[\boldsymbol{x}]$ un polinomio a valores enteros, entonces f se puede escribir, en notación multiíndice, como

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_\alpha c_\alpha \binom{x_1 + \alpha_1}{\alpha_1} \cdots \binom{x_r + \alpha_r}{\alpha_r},$$

donde

$$\binom{x + m}{m} := \frac{(x + m)(x + m - 1) \cdots (x + 1)}{m!} \in \mathbb{Q}[x].$$

Pista: La prueba es una mera inducción, primero en una variable y luego sobre la cantidad de variables. El único paso delicado es probar que si $f(x)$ tiene grado d, entonces $d! f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. □

Como consecuencia:

Corolario 8.67.1: Sea X un esquema propio sobre un cuerpo k. Sean $\mathscr{L}_1, \dots, \mathscr{L}_d$ haces invertibles sobre X y $\mathscr{F}$ un haz coherente con $\dim \operatorname{Supp} \mathscr{F} = d$. El coeficiente e que acompaña a $n_1 \cdots n_d$ de $\chi(X, \mathscr{L}_1^{n_1} \otimes \cdots \mathscr{L}_d^{n_d} \otimes \mathscr{F})$ es entero, y definimos el ***símbolo de intersección***:

$$(\mathscr{L}_1 \dots \mathscr{L}_d . \mathscr{F}) := e.$$

Proposición 8.68: Sea X un esquema propio sobre un cuerpo k, sean $\mathscr{L}, \mathscr{L}_1, \dots, \mathscr{L}_r$ haces invertibles sobre X y $\mathscr{F}, \mathscr{G}, \mathscr{H}$ un trío de haces coherentes.

1. La función $(\mathscr{L}_1 \dots \mathscr{L}_r . \mathscr{F})$, con $\mathscr{F}$ fijo, es multilineal en los $\mathscr{L}_i$'s.
2. Si $d := \dim \operatorname{Supp} \mathscr{F}$ y se tiene que
$$\chi(X, \mathscr{L}^n \otimes \mathscr{F}) = en^d + \text{términos de menor grado},$$
entonces $(\underbrace{\mathscr{L} . \mathscr{L} \dots \mathscr{L}}_{d} . \mathscr{F}) = d!e$.
3. Si la sucesión $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$ es exacta, entonces
$$(\mathscr{L}_1 \dots \mathscr{L}_r . \mathscr{G}) = (\mathscr{L}_1 \dots \mathscr{L}_r . \mathscr{F}) + (\mathscr{L}_1 \dots \mathscr{L}_r . \mathscr{H}).$$

Demostración:

1. Sean $\mathscr{L}, \mathscr{M}$ un par de haces invertibles, entonces
$$\chi(X, \mathscr{L}^n \otimes \mathscr{M}^m \otimes \mathscr{L}_2^{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathscr{L}_r^{n_r} \otimes \mathscr{F}) \\ = ann_2 \cdots n_r + bmn_2 \cdots n_r + \cdots,$$
donde $a, b \in \mathbb{Q}$ y reemplazando $n = 0$ y $m = 0$ se comprueba que
$$a = (\mathscr{L} . \mathscr{L}_2 \dots \mathscr{L}_r . \mathscr{F}), \qquad b = (\mathscr{M} . \mathscr{L}_2 \dots \mathscr{L}_r . \mathscr{F}).$$
Con $m = n$ tenemos que
$$((\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}) . \mathscr{L}_2 \dots \mathscr{L}_r . \mathscr{F}) = (\mathscr{L} . \mathscr{L}_2 \dots \mathscr{L}_r . \mathscr{F}) + (\mathscr{M} . \mathscr{L}_2 \dots \mathscr{L}_r . \mathscr{F}),$$
con $\mathscr{M} = \mathscr{L}^\vee$ se comprueba que también respeta inversas.

2. Sean $P(n) = \chi(X, \mathscr{L}^n \otimes \mathscr{F})$ y
$$Q(n_1, \dots, n_r) = \chi(X, \mathscr{L}^{n_1} \otimes \mathscr{L}^{n_2} \otimes \cdots \otimes \mathscr{L}^{n_r} \otimes \mathscr{F})$$
los polinomios de Hilbert-Samuel. Vamos a denotar las variables $P(x)$, $Q(y_1, \dots, y_r)$, de modo que el inciso se sigue de que
$$Q(y_1, \dots, y_r) = P(y_1 + \cdots + y_r), \qquad \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r} P(0) = \frac{\partial^r}{\partial y_1 \cdots \partial y_r} Q(\vec{0}),$$
puesto que al expandir la derivada izquierda sale el coficiente lider junto a un factor $r!$
3. Trivial. □

De la definición se siguen un par de observaciones que dotan al objeto de una perspectiva más geométrica: es claro que $\chi(X, \mathscr{L}^{\otimes n} \otimes \mathscr{F})$ no varía si reemplazamos $\mathscr{L} \simeq \mathscr{M}$, de modo que desciende a $\operatorname{Pic} X$. En particular, la proposición 8.27 nos dice que siempre podemos definirlo para divisores de Cartier.

Sea $Z \subseteq X$ un subesquema cerrado (no necesariamente íntegro) con $\mathscr{O}_Z = \mathscr{O}_X/\mathscr{I}$, donde $\mathscr{I}$ es un haz coherente de ideales. Dados $D_1, \dots, D_r \in \operatorname{CaDiv} X$, con $\mathscr{L}_i := \mathscr{O}_X(D_i)$ denotamos
$$(D_1.D_2 \dots D_r.Z) := (\mathscr{L}_1 \dots \mathscr{L}_r.\mathscr{O}_Z), \qquad (D^r.Z) := (\underbrace{D.D \dots D}_{r}.Z).$$

Lema 8.69: Sea X un esquema propio sobre un cuerpo k, y sea Y un subesquema cerrado de X. Sean $\mathscr{L}_1, \dots, \mathscr{L}_r$ haces invertibles sobre X, donde $\mathscr{L}_1$ es muy amplio. Sea $D_1 \in \operatorname{CaDiv}^+ X$ tal que $\mathscr{L}_1 \simeq \mathscr{O}_X(D_1)$ y supongamos que D_1 no contiene ningún punto asociado de Z. Sea Z la intersección esquemática entre D_1, Y. Entonces
$$(D_1.D_2 \dots D_r.Y) = (D_2 \dots D_r.Z).$$
En particular, si $D_1, \dots, D_r$ son amplios tenemos que $(D_1 \dots D_r.Y) > 0$.

Demostración: Sea $Y = \mathbf{V}(\mathscr{I}_Y)$ y sea $\mathscr{J} := \mathscr{O}_X(D_1) \subseteq \mathscr{K}_X$. Así, se define $Z := \mathbf{V}(\mathscr{I}_Y + \mathscr{J})$. Sabemos que $\mathscr{J}$ es un haz invertible.

Sea $U = \operatorname{Spec} A$ un abierto afín de X que contenga un punto genérico de Y, tal que $Y \cap U = \mathbf{V}(\mathfrak{a})$ y tal que $Y \cap D_1 \cap U = \operatorname{div}_A f$. Aquí uno tiene la sucesión exacta de A-módulos:

$$0 \longrightarrow fA \otimes \frac{A}{\mathfrak{a}} \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{a}} \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{a} + fA} \longrightarrow 0,$$

de la que se induce la sucesión exacta de $\mathscr{O}_X$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathscr{J} \otimes \mathscr{O}_Y \longrightarrow \mathscr{O}_Y \longrightarrow \mathscr{O}_{Y \cap D_1} \longrightarrow 0.$$

Ahora, como $\mathscr{J} \simeq \mathscr{L}_1^\vee$, entonces tensorizamos la sucesión anterior por $\mathscr{L}_1^{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathscr{L}_r^{n_r}$ y aplicamos la aditividad del símbolo de intersección:

$$\begin{aligned}(D_1 \dots D_r.Y)n_1 \cdots n_r - (D_1 \dots D_r.Y)(n_1 - 1)n_2 \cdots n_r + \cdots \\ = (D_2 \dots D_r.Z)n_2 \cdots n_r + \cdots ,\end{aligned}$$

donde los «$+ \cdots$» representan los términos de grado menor.

La parte de «en particular» se sigue de que, si D_1 es amplio, existe $n > 0$ tal que nD_1 es muy amplio y, por multilinealidad, tenemos que $n(D_1 \dots D_r.Y) = (nD_1 \dots D_r.Y) > 0$. □

Lema 8.70: Sea X un esquema propio sobre un cuerpo k, y sean $Y \subseteq Z \subseteq X$ subesquemas cerrados. Supongamos que $\dim Y = r$, entonces

$$(\mathscr{L}_1 \dots \mathscr{L}_r.Y)_X = (\mathscr{L}_1|_Z \dots \mathscr{L}_r|_Z.Y)_Z.$$

Demostración: Basta notar que en los productos $\mathscr{L}_1^{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathscr{L}_r^{n_r} \otimes \mathscr{O}_Y$ podemos tensorizar por $\mathscr{O}_Z$ y obtener el mismo haz, y notar que uno puede calcular cohomología en subesquemas cerrados (que contengan al soporte). □

Lema 8.71: Sea X un esquema propio sobre un anillo noetheriano A y sea $\mathscr{L}$ un haz invertible sobre X. Si $\mathscr{L}$ está globalmente generado y para toda curva íntegra $C \subseteq X$ se tiene que $\mathscr{L}|_C$ es amplio, entonces $\mathscr{L}$ es amplio.

Demostración: Sea $f\colon X \to \mathbb{P}^n_A$ tal que $\mathscr{L} = f^*\mathscr{O}(1)$ por la proposición 5.58. Veamos que f es un morfismo finito: de lo contrario, como es propio, no debe ser cuasifinito y, por tanto, alguna fibra X_P para $P \in \mathbb{P}^n_A$ cerrado contiene una curva íntegra $C' \subseteq X_P$. Sea $g\colon C \to C'$ la normalización de C' en el composito $\Bbbk(P)^{\mathrm{alg}} \vee K(C')$ visto como cociente de $\Bbbk(P)^{\mathrm{alg}} \otimes_{\Bbbk(P)} K(C')$. Ahora, como C es normal, es regular, luego es propio y suave sobre $\Bbbk(P)^{\mathrm{alg}}$. Como $\mathscr{L}|_{C'}$ es amplio, entonces $\mathscr{M} := g^*(\mathscr{L}|_{C'})$ también lo es, Así $\deg_k \mathscr{M} > 0$, pero $\mathscr{M} = g^* f^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}}(1)$, lo cual es absurdo pues $f|_{C'}$ es constante. Esto prueba que f es finito y aplicamos el corolario 7.30.1. □

Teorema 8.72 – *Criterio de amplitud de Nakai-Moishezon*: Sea X un esquema propio sobre un cuerpo k. Un divisor de Cartier D es amplio sobre X syss $(D^r.Y) > 0$ para todo subesquema cerrado íntegro $Y \subseteq X$ de dimensión $r \leq \dim X$.

DEMOSTRACIÓN: $\Longrightarrow$. Se sigue de un lema anterior.

$\Longleftarrow$. Por el corolario 7.30.1 podemos suponer que X es íntegro (reducido e irreducible). Sea $\mathscr{L} := \mathscr{O}_X(D)$, por el lema anterior e inducción noetheriana podemos suponer que $\mathscr{L}|_Z$ es amplio para todo subesquema cerrado $Z \subset X$. Procedemos por pasos:

(I) Como $a := (D^d.X) > 0$, donde $d = \dim X$, entonces $\chi_k(X, \mathscr{L}^d) = \frac{a}{d!}x^d$+términos de grado menor, de modo que $\chi_k(X, \mathscr{L}^d) \to \infty$.

(II) Como X es íntegro, entonces podemos identificar $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{K}_X = K(X)$, donde el de la derecha corresponde al haz constante a valores en $K(X)$. Sea $\mathscr{I} := \mathscr{L}^\vee \cap \mathscr{O}_X$, el cual es un haz coherente de ideales en $\mathscr{O}_X$ que define un subesquema cerrado $Y \subset X$. Más aún, $\mathscr{I}\mathscr{L} = \mathscr{L} \cap \mathscr{O}_X$ también es un haz coherente de ideales que determina $Z := \mathbf{V}(\mathscr{I}\mathscr{L}) \subset X$. Así tenemos dos sucesiones exactas de $\mathscr{O}_X$-módulos:

$$0 \longrightarrow \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_Y \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}\mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_Z \longrightarrow 0.$$

Tensorizamos la primera por $\mathscr{L}^{\otimes n}$ y la segunda por $\mathscr{L}^{\otimes n-1}$ y, por inducción noetheriana, empleamos que $H^p(Y, \mathscr{L}^{\otimes n}|_Y) = 0 = H^p(Z, \mathscr{L}^{\otimes n-1}|_Z)$ para $p \geq 1$ y n suficientemente grande. Así, para $q \geq 2$, tenemos los isomorfismos canónicos:

$$H^q(X, \mathscr{L}^{\otimes n}) \cong H^q(X, \mathscr{I} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) \cong H^q(X, \mathscr{L}^{\otimes n-1}).$$

Así, concluimos que para n suficientemente grande

$$h^0(\mathscr{L}^{\otimes n}) \geq \chi(X, \mathscr{L}^{\otimes n}) + C \to \infty,$$

de modo que $H^0(X, \mathscr{L}^{\otimes n}) \neq 0$.

(III) Como $\mathscr{L}^{\otimes n}$ posee secciones globales no nulas (para n suficientemente grande), vemos que existe un divisor efectivo $E \in \operatorname{CaDiv}^+ X$ tal que $E \sim nD$. Como el símbolo de intersección es invariante salvo equivalencia lineal, podemos suponer que D es efectivo.

(iv) Considere la sucesión exacta corta $0 \to \mathscr{L}^\vee \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X(D) \to 0$. Tensorizando por $\mathscr{L}^{\otimes n}$ obtenemos:

$$0 \longrightarrow \mathscr{L}^{\otimes n-1} \longrightarrow \mathscr{L}^{\otimes n} \longrightarrow \mathscr{L}|_D^{\otimes n} \longrightarrow 0.$$

Como $\mathbf{V}(\mathscr{O}_D) \subset X$, por inducción noetheriana obtenemos que $\mathscr{L}|_D^{\otimes n}$ es amplio y $H^1(X, \mathscr{L}|_D^{\otimes n}) = 0$ por amplitud de Serre. Así obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$H^0(X, \mathscr{L}^{\otimes n}) \xrightarrow{\alpha_n} H^0(X, \mathscr{L}|_D^{\otimes n}) \longrightarrow H^1(X, \mathscr{L}^{\otimes n-1}) \twoheadrightarrow H^1(X, \mathscr{L}^{\otimes n})$$

por lo que tenemos la cadena de dimensiones

$$h^1(\mathscr{L}^n) \geq h^1(\mathscr{L}^{n+1}) \geq h^1(\mathscr{L}^{n+2}) \geq \cdots,$$

que tiene que ser eventualmente estacionaria, de modo que

$$H^1(X, \mathscr{L}^{\otimes n-1}) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathscr{L}^{\otimes n})$$

es un isomorfismo para n suficientemente grande y α_n es un epimorfismo. Como $\mathscr{L}|_D^{\otimes n}$ es amplio, entonces para n suficientemente grande $\mathscr{L}$ está globalmente generado.

(v) Por inducción sobre $\dim X$ nos reducimos a probar el enunciado para $\dim X = 1$, lo que se reduce al corolario 8.62.1. Para $\dim X \geq 2$, notamos que, para cada $C \subseteq X$ curva íntegra, el haz $\mathscr{L}^{\otimes n}|_C$ es amplio y $\mathscr{L}^{\otimes n}$ está globalmente generado, así que el lema anterior nos da que $\mathscr{L}$ es amplio. □

8.5 Aplicación: las conjeturas de Weil para curvas

Proposición 8.73: Sea k una $\mathbb{Z}$-álgebra de tipo finito que también es un cuerpo, entonces k es finito.

Éste resultado admite dos posibles demostraciones. Primero una demostración algebraica:

Demostración: Es claro que $\mathbb{Z}$ es un anillo de Jacobson y, denotando $\varphi\colon \mathbb{Z} \to k$ el homomorfismo canónico, por el teorema A.19, tenemos que $\varphi^{-1}[(0)]$ es maximal en $\mathbb{Z}$, luego es de la forma $p\mathbb{Z}$ para algún primo p y, por tanto, $\operatorname{car} k = p$. Ahora aplicamos el lema de Zariski usual para notar que $k/\mathbb{F}_p$ debe ser extensión finita y, así, k debe ser finito. □

Y una demostración geométrica:

Demostración: Si k tiene característica $p > 0$, entonces aplicamos el lema de Zariski para notar que $k/\mathbb{F}_p$ ha de ser una extensión finita y estamos listos. Si no, entonces el homomorfismo canónico $\mathbb{Z} \hookrightarrow k$ es inyectivo, luego k es un $\mathbb{Z}$-módulo plano, y así el morfismo $f\colon \operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ es plano. Claramente, $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}, \operatorname{Spec} k$ son esquemas noetherianos y el morfismo f es de tipo finito, luego f es abierto, por la proposición 6.50; pero ningún punto es abierto en $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. □

Definición 8.74: Dado un esquema X, definimos la ***función dseta de Hasse-Weil*** de X como:

$$\zeta(X, s) := \prod_{x \in X^0} \frac{1}{1 - |\Bbbk(x)|^{-s}},$$

donde s es una variable compleja. Si $X = \operatorname{Spec} A$, entonces denotamos $\zeta(A, s) := \zeta(\operatorname{Spec} A, s)$.

Ejemplo.

1. Sea $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, entonces:

$$\zeta(\mathbb{Z}, s) = \prod_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \frac{1}{1 - |\Bbbk(\mathfrak{p})|^{-s}} = \prod_{p} \frac{1}{1 - |\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}|^{-s}} = \zeta(s),$$

   donde $\zeta(s)$ es la función dseta de Euler usual.[4]

2. Análogamente si K es un cuerpo numérico, y $A := \mathcal{O}_{K/\mathbb{Z}}$ es su anillo de enteros algebraicos, entonces $\zeta(A, s)$ es la función dseta de Dedekind-Hasse usual asociado al cuerpo K.

3. Será útil tener presente que $\zeta(X_{\text{red}}, s) = \zeta(X, s)$ para todo X esquema. Éste hecho es un ejercicio para el lector.

Por los ejemplos anteriores se puede notar que la construcción es famosa, pero está en una situación delicada cuando el esquema se toma sobre el espectro de un anillo de característica cero. Las conjeturas de Weil atacan el caso de característica prima:

[4] Técnicamente hablando, la función dseta *de Riemann* es la prolongación analítica de la función dseta de Euler.

Definición 8.75: Sea X un conjunto algebraico sobre $\mathbb{F}_q$, se define:

$$Z(X,t) := Z(X,q^{-s}) = \zeta(X,s) = \prod_{x\in X^0} \frac{1}{1-t^{\deg x}},$$

donde $\deg x := [\Bbbk(x):\mathbb{F}_q]$

Lema 8.76: Sea X un conjunto algebraico sobre $\mathbb{F}_q$. Entonces $|X(\mathbb{F}_{q^n})| = O(q^{n\dim X})$ y, por ende, para todo $N\in\mathbb{N}$ hay solo finitos $x\in X$ tales que $\deg x\le N$.

Demostración: Podemos suponer que X es una variedad. Por el teorema de normalización de Noether, existe un morfismo finito $f\colon U\to\mathbb{A}^{\dim X}_{\mathbb{F}_q}$ para algún abierto $U\subseteq X$ denso, y claramente

$$|U(\mathbb{F}_{q^n})| \le (\deg f)\cdot q^{n\dim X},$$

podemos concluir aplicando inducción sobre $\dim X$. □

Proposición 8.77: Sea X un conjunto algebraico sobre $\mathbb{F}_q$, entonces

$$t\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log Z(X,t) = \sum_{n=1}^{\infty}|X(\mathbb{F}_{q^n})|\cdot t^n \in \mathbb{Q}[[t]].$$

Demostración: Basta hacer el cálculo:

$$\begin{aligned} t\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log Z(X,t) &= t\cdot\sum_{x\in X^0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log\left((1-t^{\deg x})^{-1}\right) = \sum_{x\in X^0}(\deg x)\cdot\frac{t^{\deg x}}{1-t^{\deg x}}\\ &= \sum_{x\in X^0}(\deg x)\cdot\sum_{j\ge1}t^{j\cdot\deg x} = \sum_{x\in X^0}\sum_{\deg x\mid n}(\deg x)t^n, \end{aligned}$$

finalmente, los puntos $\mathbb{F}_{q^n}$-valuados de X son precisamente los pares (x,σ) donde x es un punto cerrado de $\deg x\mid n$ y por un monomorfismo $\sigma\colon\Bbbk(x)\to\mathbb{F}_{q^n}$, luego es cada punto x de grado $\deg x\mid n$ contado $\deg x$ veces; así concluimos el enunciado. □

Proposición 8.78: Sea $X/\mathbb{F}_q$ un conjunto algebraico. El producto formal de $\zeta(X,s)$ converge uniforme y absolutamente sobre compactos de $U := \{s\in\mathbb{C} : \operatorname{Re}s > \dim X\}$. Por tanto, determina una función analítica.

Demostración: Sin perdida de generalidad, supongamos que X es reducido. Si $X = X_1 \cup X_2$, donde X_1, X_2 son cerrados irreducibles, entonces se puede comprobar que

$$\zeta(X,s) = \frac{\zeta(X_1,s)\cdot\zeta(X_2,s)}{\zeta(X_1\cap X_2,s)},$$

así que podemos suponer que X es variedad.

Para demostrar la convergencia de $\zeta(X,s)$ con $\operatorname{Re} s > \dim X$, basta probar la convergencia de la serie de potencias de $t \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log Z(X,t)$ con $0 < t < q^{-\dim X}$, lo cual se deduce de que

$$\begin{aligned} t\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log Z(X,t) &= \sum_{n\geq 1}|X(\mathbb{F}_{q^n})|t^n \leq M\cdot\sum_{n\geq 1} q^{n\dim X}t^n \\ &= M\cdot\sum_{n\geq 1}(q^{\dim X}t)^n. \end{aligned}$$

□

Teorema 8.79: Sea X una curva suave, proyectiva, geométricamente conexa sobre $\mathbb{F}_q$. Entonces:

CW1. $Z(X,t)$ es una función racional, de hecho:

$$Z(X,t) = \frac{f(t)}{(1-t)(1-qt)}, \tag{8.2}$$

donde $f(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tiene $\deg f \leq 2g$ y coeficiente libre 1.

CW2. **Ecuación funcional:**

- $Z(X, q^{-1}t^{-1}) = q^{1-g}t^{2-2g}Z(X,t)$.
- $f(t)$ en (8.2) tiene $\deg f = 2g$.
- $f(t) = \prod_{i=1}^{2g}(1-\omega_i t) \in \mathbb{C}[t]$, donde $\omega_i\cdot\omega_{2g+1-i} = q$ para cada i.

Demostración: Calculemos:

$$Z(X,t) = \prod_{x\in X^0}\frac{1}{1-t^{\deg x}} = \prod_{x\in X^0}\sum_{j=0}^{\infty} t^{j\deg x} = \sum t^{\sum j_i \deg x_i},$$

donde nótese que $\sum_{i=1}^n j_i \deg x_i = \deg\left(\sum_{i=1}^n j_i\cdot x_i\right)$ el cual es un divisor efectivo de Weil. Así, vemos que $Z(X,t) = \sum_{\substack{D\in\operatorname{Div} X\\ D\geq 0}} t^{\deg D}$. Fijemos un $D \in \operatorname{Div} X$, entonces los divisores efectivos linealmente equivalentes a D

conforman el sistema lineal completo $|D|$. Sea $\mathscr{L} := \mathscr{L}(D)$ el haz invertible asociado a D, luego $|D|$ está en biyección con el conjunto

$$\frac{\Gamma(X, \mathscr{L}) \setminus \{0\}}{\mathbb{F}_q^\times},$$

de modo que

$$Z(X,t) = \sum_{\substack{\mathscr{L} \in \operatorname{Pic} X \\ \mathscr{L} \geq 0}} \frac{q^{h_0(\mathscr{L})-1}}{q-1} \cdot t^{\deg \mathscr{L}},$$

por el problema de Riemann-Roch podemos ver que

$$Z(X,t) = \underbrace{\sum_{0 \leq \deg \mathscr{L} \leq 2g-2} \frac{q^{h_0(\mathscr{L})} - 1}{q-1} \cdot t^{\deg \mathscr{L}}}_{g_1(t)} + \underbrace{\sum_{2g-2 < \deg \mathscr{L}} \frac{q^{\deg \mathscr{L} + 1 - g} - 1}{q-1} \cdot t^{\deg \mathscr{L}}}_{g_2(t)}.$$

Claramente $g_1(t)$ ya es racional así que enfoquémonos en $g_2(t)$. Por la proposición 8.64, el grupo $\operatorname{Pic}^0 X$ es finito y luego podemos expresarlo como:

$$\begin{aligned} g_2(t) &= |\operatorname{Pic}^0 X| \sum_{n=2g-1}^{\infty} \frac{q^{n-1+g} - 1}{q-1} \cdot t^n \\ &= \frac{|\operatorname{Pic}^0 X|}{q-1} \left(\frac{q^{g-1}(qt)^{2g-1}}{1-qt} - \frac{t^{2g-1}}{1-t} \right) = \frac{h(t)}{(1-t)(1-qt)}. \end{aligned}$$

Finalmente, vemos que $g_1(t)$ tiene grado $\leq 2g-1$ y es claro que $h(t)$ tiene grado $\leq 2g$. Evaluando podemos corroborar la afirmación del coeficiente libre y así probamos el inciso 1.

Volvamos ahora a $g_1(t)$ y a cada haz invertible $\mathscr{L}$ asociémosle $\omega_X \otimes \mathscr{L}^{-1}$, la cual es una biyección y, por Riemann-Roch, tendremos

$$\begin{aligned} \frac{q^{h^0(\omega_X \otimes \mathscr{L}^{-1})} - 1}{q-1} \cdot t^{\deg(\omega_X \otimes \mathscr{L}^{-1})} &= \frac{q^{h^0(\mathscr{L}) - \deg \mathscr{L} - 1 + g} - 1}{q-1} \cdot t^{2g-2-\deg \mathscr{L}} \\ &= \frac{q^{h^0(\mathscr{L})} - q^{\deg \mathscr{L} + 1 - g}}{q-1} \cdot q^{-(\deg \mathscr{L} + 1 - g)} t^{2g-2-\deg \mathscr{L}} \\ &= q^{g-1} t^{2g-2} \cdot \frac{q^{h^0(\mathscr{L})} - q^{\deg \mathscr{L} + 1 - g}}{q-1} \cdot (q^{-1}t^{-1})^{\deg \mathscr{L}}, \end{aligned} \tag{8.3}$$

donde recordamos que

$$\frac{q^{h^0(\mathscr{L})} - 1}{q-1} = \frac{q^{h^0(\mathscr{L})} - q^{\deg \mathscr{L} + 1 - g}}{q-1} + \frac{q^{\deg \mathscr{L} + 1 - g} - 1}{q-1}.$$

Así, podemos ver que $Z(X,t)$ se descompone como

$$Z(X,t) = \sum_{0\le\deg\mathscr{L}\le g-1} \frac{q^{h^0(\mathscr{L})}-1}{q-1}\cdot t^{\deg\mathscr{L}} + \sum_{g\le\deg\mathscr{L}\le 2g-2} \frac{q^{h^0(\mathscr{L})}-q^{\deg\mathscr{L}+1-g}}{q-1}\cdot t^{\deg\mathscr{L}}$$
$$+ \sum_{g\le\deg\mathscr{L}} \frac{q^{\deg\mathscr{L}+1-g}-1}{q-1}\cdot t^{\deg\mathscr{L}}.$$

Por el cálculo (8.3) vemos que la primera línea satisface la ecuación funcional, mientras que la segunda línea:

$$\begin{aligned}\sum_{g\le\deg\mathscr{L}} \frac{q^{\deg\mathscr{L}+1-g}-1}{q-1}\cdot t^{\deg\mathscr{L}} &= |\operatorname{Pic}^0 X|\sum_{n=g}^{\infty}\frac{q^{n+1-g}-1}{q-1}t^n\\ &= \frac{|\operatorname{Pic}^0 X|t^g}{q-1}\left(\frac{q}{1-qt}-\frac{1}{1-t}\right)\\ &= |\operatorname{Pic}^0 X|\cdot\frac{t^g}{(1-qt)(1-t)}.\end{aligned}$$

Y es fácil verificar que satisface la ecuación funcional.

Finalmente, basta aplicar la ecuación funcional sobre (8.2):

$$\frac{f(q^{-1}t^{-1})}{(1-q^{-1}t^{-1})(1-t^{-1})} = \frac{t^{2-2g}q^{1-g}f(t)}{(1-t)(1-qt)},$$

lo que nos da que $f(t) = t^{2g}q^g f(q^{-1}t^{-1})$, por lo que, necesariamente, $\deg f = 2g$. Llamando ω_i's a las raíces de $f(t)$, vemos que la expresión del lado derecho tiene raíces $\left\{\frac{1}{q\omega_1},\dots,\frac{1}{q\omega_{2g}}\right\}$, es decir, que existe una permutación $\sigma\in S_{2g}$ tal que $\omega_i\cdot\omega_{\sigma(i)} = q$. □

Finalmente queda la última de las conjeturas de Weil. Hay dos demostraciones que haremos, una aquí empleando únicamente el teorema de Riemann-Roch que sigue el artículo de Bombieri **[21],** basado en un argumento de Stepanov **[36]** (1969).

Lema 8.80: Sean $\lambda_1,\dots,\lambda_m\in\mathbb{C}$ tales que $\left|\sum_{i=1}^m \lambda_i^n\right|$ está acotado (como función de n), entonces cada $|\lambda_i|\le 1$.

Demostración: De haber $\lambda_i = 0$ los borramos de la lista. Nótese que podemos encontrar algún N suficientemente grande tal que $\operatorname{Re}(\lambda_i^N) > 0$ y $|\operatorname{Im}(\lambda_i^N)| < \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\lambda_i^N)$. Esto se logra escribiendo $\lambda_i = r_i e^{\mathrm{i}\alpha_i}$ con $r_i\in\mathbb{R}_{>0}$, y traduciendo la condición en que $N\alpha_i$ caiga en un intervalo conveniente de la forma:

$$\exists j \in \mathbb{Z} \quad N\alpha_i \in (2\pi j - \arctan(1/2), 2\pi j + \arctan(1/2)),$$

y luego concluir por principio del palomar. Por inducción sobre m la cantidad de sumandos, obtenemos que para dicho N se tiene que

$$\sum_{i=1}^{m} |\lambda_i|^N \leq \sqrt{2}^m \left| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^N \right|.$$

Por palomar de hecho encontramos infinitos N's que cumplen la condición, así que aplicando límites obtenemos el enunciado. □

Proposición 8.81: Sea X una curva suave, proyectiva, geométricamente conexa sobre $\mathbb{F}_q$. Son equivalentes:

1. **(Hipótesis de Riemann)** Los ceros ω_i de $Z(X,t)$ tienen $|\omega_i| = q^{1/2}$.
2. $|X(\mathbb{F}_{q^n})| = q^n + O(q^{n/2})$.

Demostración: 1 $\implies$ 2. Por la proposición 8.77 podemos aplicar derivadas logarítmicas a

$$Z(X,t) = \frac{\prod_{i=1}^{2g}(1-\omega_i t)}{(1-t)(1-qt)},$$

para obtener que

$$|X(\mathbb{F}_{q^n})| = 1 + q^n - \sum_{n=1}^{2g} \omega_i^n = q^n + O(q^{n/2}). \tag{8.4}$$

2 $\implies$ 1. Recíprocamente, definiendo $\lambda_i := \omega_i q^{-1/2}$ tenemos que $|\omega_i| \leq q^{1/2}$ por (8.4). Por la ecuación funcional (teo. 8.79), sabemos también que

$$|\omega_i| = \frac{q}{|\omega_{2g+1-i}|} \geq q^{1/2},$$

concluimos por antisimetría. □

A corolario de la hipótesis de Riemann, tenemos lo siguiente:

Corolario 8.81.1 (cotas de Hasse-Weil): Sea $X/\mathbb{F}_q$ una curva suave, proyectiva y geométricamente íntegra de género g. Entonces

$$|X(\mathbb{F}_q)| = q + 1 - \epsilon,$$

con $|\epsilon| \leq 2g\sqrt{q}$.

Este es uno de los primeros resultados en un curso estándar sobre curvas elípticas (sabiendo que éstas son suaves, proyectivas, geométricamente íntegras y de género $g = 1$).

9

Esquemas proyectivos

En éste último capítulo de los métodos esquemáticos pretendemos dar principalmente ejemplos de variedades y construcciones que serán protagónicas en los capítulos subsiguientes, como la construcción de esquemas mediante funtores representables, espacios de moduli, variedades de Brauer-Severi, variedades de Hilbert y las explosiones.

9.1 Funtores representables

Recuérdese que el encaje de Yoneda $X \mapsto \operatorname{Hom}(-, X)$ es un funtor covariante plenamente fiel $よ\colon \mathscr{C} \to \mathsf{Fun}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$ que a cada objeto le asocia un funtor contravariante de conjuntos. Un funtor contravariante $F\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ que es isomorfo a $\operatorname{Hom}(-, X)$ se dice un ***funtor representable***. Si $\mathscr{A}$ es una categoría aditiva, entonces tenemos el encaje (enriquecido) de Yoneda $よ\colon \mathscr{A} \to \mathsf{Fun}(\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Ab})$ y la misma terminología aplica; este es el caso, por ejemplo, con los prehaces (abelianos) sobre un espacio topológico.

Ejemplo. El funtor $\mathsf{Sch}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ que manda un esquema $X \mapsto \Gamma(X, \mathscr{O}_X)^{\otimes n}$ está representado por el esquema $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$.

Esto se sigue de que

$$\operatorname{Hom}_{\mathsf{Sch}}(X, \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathsf{Ring}}(\mathbb{Z}[t], \Gamma(X, \mathscr{O}_X)) \cong \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$$

(por el teorema 3.63) y de propiedades del tensor de haces.

Ejemplo. Sea S un esquema y $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ un par de $\mathscr{O}_S$-módulos cuasicoherentes con $\mathscr{G}$ localmente libre finitamente generado. Entonces, el funtor

$$\begin{aligned}(\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathsf{Set}\\ X &\longmapsto \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}_{(X)}, \mathscr{G}_{(X)})\end{aligned}$$

dado por cambio de base de haces está representado por $\mathbf{V}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}^\vee)$.

Proposición 9.1: Sea S un esquema y $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de haces cuasicoherentes. Se cumplen:

1. Si $\mathscr{G}$ es finitamente generado, entonces el conjunto de puntos $x \in X$ tales que φ_x sea un epimorfismo es abierto. Más precisamente, el funtor

   $$\begin{aligned}(\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathsf{Set}\\ T &\longmapsto \{f \in \operatorname{Hom}_S(T, S) : f^*(\varphi) \text{ es epimorfismo}\}\end{aligned}$$

   está representado por un subesquema abierto de S.

2. Si $\mathscr{G}$ es localmente libre finitamente generado, entonces el conjunto de puntos $x \in X$ tales que $\varphi_x = 0$ es cerrado. Más precisamente, el funtor

   $$\begin{aligned}(\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathsf{Set}\\ T &\longmapsto \{f \in \operatorname{Hom}_S(T, S) : f^*(\varphi) = 0\}\end{aligned}$$

   está representado por un subesquema cerrado de S.

Demostración:

1. En otras palabras, se nos pide mostrar que existe un abierto $U \subseteq S$ tal que un morfismo $f\colon T \to S$ se factoriza como $T \to U \hookrightarrow S$ syss $f^*(\varphi)\colon f^*\mathscr{F} \to f^*\mathscr{G}$ es un epimorfismo. Como $\operatorname{coker}\varphi$ es un $\mathscr{O}_S(S)$-módulo finitamente generado, entonces su soporte es cerrado y, como f^* es exacto por la derecha, tenemos que $\operatorname{coker}(f^*\varphi) = f^*(\operatorname{coker}\varphi)$. Así pues, $U := S \setminus \operatorname{Supp}(\operatorname{coker}\varphi)$ satisface lo exigido.

2. Como $\mathscr{G}$ es localmente libre y finitamente generado, tenemos

   $$\mathscr{H}\!om(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \cong \mathscr{F}^\vee \otimes \mathscr{G} \cong (\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}^\vee)^\vee,$$

   por lo tanto, φ induce un homomorfismo de haces $\widehat{\varphi}\colon \mathscr{F} \otimes \mathscr{G}^\vee \to \mathscr{O}_S$. Sea $\mathscr{I} := \operatorname{Img}\widehat{\varphi}$, el cual es un haz de ideales cuasicoherente, por tanto $Z := \mathbf{V}(\mathscr{I})$ es un subesquema cerrado de S. Por la correspondencia $f^*(\varphi) = 0$ syss $f^*(\widehat{\varphi}) = 0$ lo cual equivale a que $f\colon T \to S$ se factorice $T \to Z \hookrightarrow S$. $\square$

Cabe destacar que, si es la primera exposición del lector a ello, puede aparentar curioso el que el dominio sea $(\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}}$. Recuérdese que un haz de conjuntos es un funtor $\mathsf{Op}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, por lo que, parece que Sch/S juega el rol de los abiertos de una especie de espacio; siguiendo éste paralelo definimos:

Definición 9.2: Sea S un esquema y $F\colon (\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ un funtor. Se dice que F es un ***haz en la topología de Zariski*** si para todo S-esquema X y todo cubrimiento por subesquemas abiertos $\{\varphi^i\colon U_i \to X\}_{i\in I}$ se tiene el siguiente diagrama de ecualizador:

$$FX \longrightarrow \prod_{i\in I} FU_i \rightrightarrows F(U_i \times_X U_j).$$

Vale decir, para toda familia $\{s_i \in FU_i\}_{i\in I}$ tal que $F\varphi_i^{ij}(s_i) = F\varphi_j^{ij}(s_j)$ (compatible), donde $\varphi_i^{ij}\colon U_i \times_X U_j \to U_i$ es el morfismo canónico, existe un único $s \in FX$ tal que $F\varphi^i(s) = s_i$.

Esta definición hará eco en la parte siguiente del libro en contexto de sitios.

Lema 9.3: Todo funtor representable $F\colon (\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ es un haz en la topología de Zariski.

Demostración: Esto es otra manera de escribir que morfismos compatibles se pueden pegar (prop. 3.62). □

Teorema 9.4: Sea $F\colon (\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ un haz en la topología de Zariski. Supongamos que existe una familia de funtores $\{F_i\colon (\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}\}_{i\in I}$ y una familia $\alpha_i\colon F_i \to F$ de transformaciones naturales tales que:

(i) Para cada S-esquema X, la familia $\{\alpha_i\colon F_iX \hookrightarrow FX\}_{i\in I}$ está conformada por un cubrimiento de subesquemas abiertos de FX.

(ii) Cada F_i es representable.

Entonces F es representable.

Pista: Si Y_i representa al funtor F_i, entonces se pega en un esquema Y. La condición de ser haz en la topología de Zariski y la condición (i) se emplean para poder pegar apropiadamente los esquemas. □

§9.1.1 Spec y Proj relativos. Volvamos a los haces cuasicoherentes y veamos cómo aplicar el teorema anterior.

Definición 9.5: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado. Una ***$\mathscr{O}_X$-álgebra*** es un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{A}$ tal que para todo abierto U se tiene que $\mathscr{A}(U)$ es una $\mathscr{O}_X(U)$-álgebra. Equivalentemente, una $\mathscr{O}_X$-álgebra es un haz de anillos sobre X junto con un morfismo de haces $\mathscr{O}_X \to \mathscr{A}$. La categoría de $\mathscr{O}_X$-álgebras se denota $\mathsf{Alg}_{\mathscr{O}_X}$.

Dado un morfismo $f\colon X \to Y$ de esquemas, se cumple que $f_*(\mathscr{O}_X)$ es una $\mathscr{O}_Y$-álgebra; si además f es afín (por tanto, un morfismo compacto y separado), entonces la proposición 5.18 implica que $f_*(\mathscr{O}_X)$ es una $\mathscr{O}_Y$-álgebra cuasicoherente.

Si fijamos S un esquema, para todo morfismo afín $f\colon X \to S$ denotamos $\mathscr{A}_S(X) := f_*(\mathscr{O}_X)$.

Proposición 9.6: Sea S un esquema. Entonces podemos definir el funtor $\mathscr{A}_S\colon (\mathsf{Aff}/S)^{\text{op}} \to \mathsf{QCohAlg}_{\mathscr{O}_S}$ dado por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & S \arrow[d, equal] & & \mathscr{A}_S(Y) & \mathscr{O}_S \arrow[l, "f^\sharp"'] \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "g"'] & S \arrow[r, phantom, "=\!=\!=\mathscr{A}_S\Longrightarrow"] & & \mathscr{A}_S(X) \arrow[u, "g_*(h^\sharp)"'] & \mathscr{O}_S \arrow[l, "g^\sharp"] \end{tikzcd}$$

Este funtor es plenamente fiel y, en consecuencia, refleja isomorfismos (i.e., un S-morfismo $h\colon X \to Y$ entre esquemas afines sobre S es un isomorfismo syss $\mathscr{A}(h)$ lo es).

Proposición 9.7: Sea S un esquema y $\mathscr{B}$ una $\mathscr{O}_S$-álgebra cuasicoherente. El funtor contravariante

$$F(-) := \operatorname{Hom}_{\mathsf{Alg}_{\mathscr{O}_S}}(\mathscr{B}, -)\colon (\mathsf{Sch}/S)^{\text{op}} \to \mathsf{Set}$$

es representable. Denotamos por $\mathbf{Spec}_S(\mathscr{B})$ al objeto representado y se le denomina el Spec *relativo.*

Demostración: Sea Y un S-esquema, entonces para un abierto U definimos

$$\Gamma(U, \mathscr{F}) := F(U) = \operatorname{Hom}_{\mathsf{Alg}_{\mathscr{O}_S}}(\mathscr{B}, \mathscr{A}_S(U)),$$

lo cual conforma un haz de *conjuntos* (¿por qué?); esto se resume en que F es un haz en la topología de Zariski.

Por el teorema 9.4, podemos verificar que el funtor es representable cuando S es afín y emplear que admite un cubrimiento afín. Así si $S = \operatorname{Spec} A$ la representabilidad de F se sigue de que $\mathscr{B} = \widetilde{B}$ para alguna A-álgebra B y, en este caso, el funtor está representado por $\operatorname{Spec} B$. □

Como corolario:

Teorema 9.8: Para un esquema S, el funtor $\mathbf{Spec}_S(-)$ establece una equivalencia contravariante entre las $\mathscr{O}_S$-álgebras cuasicoherentes y los S-esquemas afines.

Ahora vamos a construir el Proj relativo.

Lema 9.9: Sea S un esquema y $\mathscr{A}$ una $\mathscr{O}_S$-álgebra graduada cuasicoherente. Sean $U \subseteq V \subseteq S$ un par de abiertos afines y sean $B := \mathscr{A}(U), A := \mathscr{A}(V)$. El homomorfismo de anillos graduados $A \to B$ induce un morfismo de esquemas $r\colon \operatorname{Proj} B \to \operatorname{Proj} A$ tal que se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Proj} B \arrow[r, "r"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & \operatorname{Proj} A \arrow[d] \\ U \arrow[r, hook, "\circ" marking] & V \end{tikzcd}$$

Más aún:

1. Existen isomorfismos canónicos $r^*\mathscr{O}_{\operatorname{Proj} A}(n) \to \mathscr{O}_{\operatorname{Proj} B}(n)$ compatibles con los productos.

2. El morfismo r es un encaje abierto.

3. La construcción $U \mapsto \operatorname{Proj}(\mathscr{A}(U))$ dada por el diagrama es funtorial.

Demostración: Sean $R := \Gamma(U, \mathscr{O}_S), R' := \Gamma(V, \mathscr{O}_S)$. Como $\mathscr{A}$ es cuasicoherente, entonces la aplicación $R \otimes_{R'} A \to B$ es un isomorfismo (¿por qué?). □

Teorema 9.10: Sea S un esquema y $\mathscr{A}$ una $\mathscr{O}_S$-álgebra graduada cuasicoherente. Entonces existe (un esquema y) un morfismo $\pi\colon \mathbf{Proj}_S(\mathscr{A}) \to S$ que satisface lo siguiente:

1. Para todo abierto afín $U \subseteq S$ existe un isomorfismo $i_U \colon \pi^{-1}[U] \to \operatorname{Proj}(\mathscr{A}(U))$.

2. Para todo par de abiertos afines $U \subseteq V \subseteq S$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Proj}(\mathscr{A}(U)) \arrow[r, hook, "r"] \arrow[d, "i_U"'] & \operatorname{Proj}(\mathscr{A}(V)) \\ \pi^{-1}[U] \arrow[r, hook] & \pi^{-1}[V] \arrow[u, "i_V"'] \end{tikzcd}$$

   donde r es el encaje abierto descrito en el lema anterior.

Al esquema $\mathbf{Proj}_S(\mathscr{A})$ se le llama Proj *relativo*.

También se puede construir $\mathbf{Proj}_S(\mathscr{A})$ como el objeto que represente un funtor (vid. [**Stacks**], `Section 01NS`).

Proposición 9.11: Sea S un esquema, sea $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_S$-módulo inversible y $\mathscr{A}$ una $\mathscr{O}_S$-álgebra graduada cuasicoherente. Denotemos por $p \colon X := \mathbf{Proj}_S \mathscr{A} \to S$ el morfismo estructural. Denotemos

$$\mathscr{A}_{\mathscr{L}} := \bigoplus_{d \geq 0} \mathscr{A}_d \otimes \mathscr{L}^{\otimes d},$$

la cual es una $\mathscr{O}_S$-álgebra graduada cuasicoherente, y sea $q \colon X_{\mathscr{L}} := \mathbf{Proj}_S(\mathscr{A}_{\mathscr{L}}) \to S$. Entonces existe un S-isomorfismo

$$g_{\mathscr{L}} \colon X_{\mathscr{L}} \xrightarrow{\sim} X$$

tal que $\mathscr{O}_{X_{\mathscr{L}}}(n) = g_{\mathscr{L}} * \mathscr{O}_X(n) \otimes q^*(\mathscr{L}^{\otimes n})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración: Sea $\mathscr{A}' := \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ y $X' := X_{\mathscr{L}}$. Existe una base de abiertos afines $U \subseteq S$ tales que existe un isomorfismo $\theta \colon \mathscr{L}|_U \to \mathscr{O}_U$ que, a su vez, induce un isomorfismo $\mathscr{A}'|_U \cong \mathscr{A}|_U$ y un U-isomorfismo $\operatorname{Proj}(\mathscr{A}'(U)) \cong \operatorname{Proj}(\mathscr{A}(U))$. Si $\theta' \colon \mathscr{L}|_U \to \mathscr{O}_U$ fuese otro isomorfismo, entonces su composición induce un automorfismo de $\mathscr{O}_X(U)$ correspondiente a multiplicar todo por una unidad $f \in \Gamma(U, \mathscr{O}_X)^\times$; de modo que induce un automorfismo ψ de $\mathscr{A}(U)$ que corresponde en grado d a multiplicar por f^d.

Ahora bien, esto no afecta ni a los primos de la $\mathscr{O}_X(U)$-álgebra $\mathscr{A}(U)$ y además, como las secciones del haz estructural son cocientes de elementos homogéneos de grado cero, vemos que induce el automorfismo identidad en $\operatorname{Proj}(\mathscr{A}(U))$. En otras palabras, θ y θ' inducen exactamente el mismo isomorfismo $\operatorname{Proj}(\mathscr{A}(U)) \cong \operatorname{Proj}(\mathscr{A}'(U))$, de modo que recorriendo la base de abiertos afines se pegan en el isomorfismo $g_{\mathscr{L}}$ descrito en el enunciado. No obstante, el automorfismo ψ induce sobre haz de torcimientos $\mathscr{O}_{X'}(1)$ una multiplicación por f, de ahí que $\mathscr{O}_{X'}(1) \cong g_{\mathscr{L}} * \mathscr{O}_X(1) \otimes q^* \mathscr{L}$ y análogamente en otros grados. $\square$

Empleando la misma técnica de pasar a una base de abiertos afines podemos generalizar algunos resultados de §5.2 que antes requerían de una base afín:

Lema 9.12.A: Sea S un esquema y sea $\mathscr{A}$ una $\mathscr{O}_S$-álgebra graduada cuasicoherente generada por $\mathscr{A}_1$, el cual es un $\mathscr{O}_S$-módulo finitamente generado. Sea $\pi\colon X := \mathbf{Proj}_S\, \mathscr{A} \to S$ el morfismo estructural, entonces para todo $n \in \mathbb{Z}$ hay un isomorfismo de $\mathscr{A}_0$-módulos:

$$\alpha_n\colon \mathscr{A}_n \xrightarrow{\ \sim\ } \pi_*\big(\mathscr{O}_X(n)\big) \tag{9.1}$$

Teorema 9.12: Sea S un esquema y sea $\mathscr{A}$ una $\mathscr{O}_S$-álgebra graduada cuasicoherente generada por $\mathscr{A}_1$, el cual es un $\mathscr{O}_S$-módulo finitamente generado. Sea $\pi\colon X := \mathbf{Proj}_S\, \mathscr{A} \to S$ el morfismo estructural, entonces:

1. Para todo $\mathscr{O}_X$-módulo cuasicoherente $\mathscr{F}$, se tiene que
$$\Gamma_*(\mathscr{F}) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \pi_*\big(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(n)\big)$$
es un $\mathscr{A}$-módulo graduado y existe un isomorfismo funtorial de $\mathscr{O}_X$-módulos $\widetilde{\Gamma_*(\mathscr{F})} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}$.

2. Si S es compacto y $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo cuasicoherente finitamente generado, entonces el homomorfismo canónico $\pi^*\pi_*\mathscr{F}(n) \to \mathscr{F}(n)$ es un epimorfismo para n suficientemente grande.

§9.1.2 Las variedades grassmannianas. Este es quizá la mayor motivación para hablar de funtores representables, pero es una construcción complicada de hacer.

Recuérdese que si A es un anillo y M es un A-módulo, entonces definimos el ***álgebra tensorial*** dada por

$$\mathrm{T}_A(M) := \bigoplus_{d\geq 0} M^{\otimes d},$$

Definición 9.13: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado y $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. Se define $\bigwedge^n \mathscr{F}$ como la hacificación del prehaz

$$U \longmapsto \textstyle\bigwedge^n_{\mathscr{O}_X(U)} \mathscr{F}(U),$$

y se define $\operatorname{Sym}^n \mathscr{F}$ como la hacificación del prehaz

$$U \longmapsto \operatorname{Sym}^n \big(\mathscr{F}(U)\big).$$

Si $\mathscr{E}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo localmente libre de rango n denotaremos por $\det \mathscr{E} := \bigwedge^n \mathscr{E}$.

Proposición 9.14: Sea S un esquema, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_S$-módulo cuasicoherente y $r \in \mathbb{N}$. Entonces:

1. La r-ésima potencia exterior $\bigwedge^r \mathscr{F}$ es cuasicoherente.
2. Si $S = \operatorname{Spec} A$ es afín, entonces
$$\textstyle\bigwedge^r \widetilde{M} \cong \widetilde{\bigwedge^r M}.$$
3. Dado un morfismo de esquemas $f \colon T \to S$ existe un isomorfismo de $\mathscr{O}_T$-módulos cuasicoherentes:
$$f^* \big(\textstyle\bigwedge^r \mathscr{F}\big) \xrightarrow{\ \sim\ } \textstyle\bigwedge^r (f^* \mathscr{F}).$$
Más aún, estos isomorfismos constituyen una equivalencia natural entre ambos funtores.

Proposición 9.15: Sea S un esquema y $\varphi \colon \mathscr{F} \to \mathscr{E}$ un morfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos, donde $\mathscr{F}, \mathscr{E}$ son finitamente generados y $\mathscr{E}$ es localmente libre. Son equivalentes:

1. Para todo abierto afín $U \subseteq S$ existe un morfismo de $\mathscr{O}_U$-módulos $\psi \colon \mathscr{E}|_U \to \mathscr{F}|_U$ tal que $\varphi|_U \circ \psi = \operatorname{Id}_{\mathscr{F}|_U}$.
2. φ es un monomorfismo y $\mathscr{E} / \operatorname{Img} \varphi$ es un $\mathscr{O}_S$-módulo localmente libre.
3. Para todo punto $s \in S$, la aplicación $\varphi \otimes \operatorname{Id}_{\Bbbk(s)}$ es un monomorfismo de $\Bbbk(s)$-espacios vectoriales.
4. Para todo morfismo $f \colon T \to S$ se cumple que $f^*(\varphi) \colon f^* \mathscr{F} \to f^* \mathscr{E}$ es un monomorfismo.

5. $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{O}_S$-módulo localmente libre y el dual $\varphi^\vee\colon \mathscr{E}^\vee \to \mathscr{F}^\vee$ es un epimorfismo.

Corolario 9.15.1: Sea S un esquema y $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{E}$ un homomorfismo de $\mathscr{O}_S$-módulos localmente libres de igual rango finito. Son equivalentes:

1. φ es un isomorfismo.
2. Para todo punto $s \in S$ se cumple que $\varphi \otimes \mathrm{Id}_{\Bbbk(s)}$ es un isomorfismo.
3. $\det(\varphi)\colon \det(\mathscr{F}) \to \det(\mathscr{E})$ es biyectiva.

Para poder definir los grassmannianos, se precisan los siguientes funtores $\mathsf{Sch}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$:

$$G_{d,n}(S) := \{\mathscr{F} \subseteq \mathscr{O}_S^n : \mathscr{O}_S^n/\mathscr{F} \text{ es localmente libre de rango } n-d\},$$
$$G_{d,n}^I(S) := \{\mathscr{F} \subseteq \mathscr{O}_S^n : \mathscr{O}_S^I \hookrightarrow \mathscr{O}_S^n \twoheadrightarrow \mathscr{O}_S^n/\mathscr{F} \text{ es un isomorfismo}\},$$

donde I es un subconjunto con $n-d$ elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$ y el monomorfismo $\mathscr{O}_S^I \hookrightarrow \mathscr{O}_S^n$ está inducido por elegir las coordenadas en I. Claramente $G_{d,n}^I(S) \subseteq G_{d,n}(S)$ lo que determina una transformación natural $\iota^I\colon G_{d,n}^I \Rightarrow G_{d,n}$.

Definición 9.16: Dada una categoría $\mathscr{C}$, denotamos $\mathscr{C}^\wedge := \mathsf{Fun}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$. El encaje de Yoneda es $よX := \mathrm{Hom}(-, X)\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}^\wedge$. Recordemos que un funtor $F \in \mathscr{C}^\wedge$ es representable si existe un objeto X y un isomorfismo natural $\alpha\colon よX \Rightarrow F$ de funtores; mediante éste, el objeto $\alpha_X(1_X) \in FX$ se llama ***elemento universal***.

Sean $F, G \in \mathscr{C}^\wedge$. Una transformación natural $\alpha\colon F \Rightarrow G$ se dice ***representable*** si para todo objeto $X \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ se cumple que el funtor $よX \times_G F$ sea representable.

Sea $\mathcal{P}$ una propiedad de flechas de $\mathscr{C}$. Decimos la transformación natural representable α es $\mathcal{P}$ si la flecha que representa el funtor $よX \times_G F$ para todo $X \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ satisface $\mathcal{P}$.

Lema 9.17: Se cumplen:

1. La transformación natural ι^I es representable y un encaje abierto.
2. El funtor $G_{d,n}^I$ es isomorfo (como funtor) a $よ\mathbb{A}^{d(n-d)}$ y, en consecuente, es representable.

Demostración:

1. Sea X un esquema, entonces una transformación natural $\alpha\colon よX \to G_{d,n}$, al evaluarla en X y luego tomar $1_X \in \operatorname{Hom}(X, X)$ corresponde a un $\mathscr{O}_X$-submódulo $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{O}_X^n$ localmente libre de rango $n - d$. Sea Y otro esquema arbitrario, entonces por definición:

$$よX \times_{G_{d,n}} G_{d,n}^I = \{f \in X(S) = \operatorname{Hom}_{\mathsf{Sch}}(S, X) : f^*\mathscr{F} \in G_{d,n}^I(S)\}.$$

   Ahora queremos ver que este funtor está representado por un subesquema abierto $U \hookrightarrow X$, vale decir: queremos ver que un morfismo $f\colon S \to X$ se factoriza a través de U syss la composición $v_f\colon \mathscr{O}_S^I \hookrightarrow \mathscr{O}_S^n \twoheadrightarrow \mathscr{O}_S^n/f^*\mathscr{F}$ es un isomorfismo. Como $\mathscr{O}_S^I, \mathscr{O}_S^n/f^*\mathscr{F}$ son ambos localmente libres de igual rango esto equivale a verificar que v_f sea un epimorfismo y el subconjunto de puntos de X en donde lo es constituyen un subesquema abierto.

2. Sea S un esquema y $\mathscr{E} \in G_{d,n}^I(S)$, de modo que $w_S\colon \mathscr{O}_S^I \to \mathscr{O}_S^n/\mathscr{E}$ es un isomorfismo de haces. Definamos $\pi_{\mathscr{E}}$ el morfismo de haces de modo que el siguiente diagrama conmute y la fila superior sea exacta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r] & \mathscr{O}_S^n \arrow[rr, "\pi_{\mathscr{E}}"] \arrow[dr, ->>] & & \mathscr{O}_S^I \arrow[r] & 0 \\
& & & \mathscr{O}_S^n/\mathscr{E} \arrow[ur, "\sim", "w_S^{-1}"'] & &
\end{tikzcd}$$

   Nótese que $u^I \circ \pi_{\mathscr{E}} = \operatorname{Id}_{\mathscr{O}_S^I}$. Recíprocamente, dado un epimorfismo $\pi\colon \mathscr{O}_S^n \to \mathscr{O}_S^I$ tal que $u^I \circ \pi = \operatorname{Id}_{\mathscr{O}_S^I}$ notamos que $\ker \pi \in G_{d,n}^I(S)$ y la aplicación

$$\begin{aligned} F(S) := \{\pi \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_S^n, \mathscr{O}_S^I) : u^I \circ \pi = \operatorname{Id}_{\mathscr{O}_S^I}\} &\longrightarrow G_{d,n}^I(S) \\ \pi &\longmapsto \ker \pi \end{aligned}$$

   es biyectiva y funtorial en S. Por tanto, determina una equivalencia natural $F \xrightarrow{\sim} G_{d,n}^I$. Ahora bien, el conjunto F puede determinarse de la manera siguiente, definiendo $J := \{1, \dots, n\} \setminus I$:

$$F(S) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_S^J, \mathscr{O}_S^I) \approx \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^{d(n-d)}(S), \qquad \pi \mapsto \pi|_{\mathscr{O}_S^J},$$

   (cfr. ejemplo 4.26). □

Teorema 9.18: El funtor $G_{d,n}\colon \mathsf{Sch}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ es representable y su objeto representado se denota $\mathrm{Grass}_{d,n}$ y se denomina ***esquema grassmanniano***.

Demostración: Veremos que la familia $\{\iota^I\colon G^I_{d,n} \Rightarrow G_{d,n}\}_I$ establece un cubrimiento de $G_{d,n}$ en el sentido de la condición (i) y concluiremos por el teorema 9.4.

Sea X un esquema y $\alpha\colon \text{よ}X \to G_{d,n}$ inducido por una elección de $\mathscr{E} \in G_{d,n}$. Sea $H^I := \text{よ}X \times_{G_{d,n}} G^I_{d,n}$, el cual es un funtor representado por un subesquema abierto $U^I \subseteq X$. Considere el morfismo de esquemas inducido $f\colon \coprod_I U^I \to X$.

Verifiquemos que f es suprayectivo: por la proposición 4.27 basta ver que es suprayectivo sobre puntos K-valuados, donde K es un cuerpo arbitrario. Sea $x\colon \operatorname{Spec} K \to X$ un punto K-valuado; poscomponiendo con α obtenemos una transformación natural $\text{よ}\operatorname{Spec} K \Rightarrow G_{d,n}$ inducida por un K-subespacio vectorial $V \leq K^n$ de dimensión d. Por definición x está en la imagen de $U^I(K) \hookrightarrow X(K)$ syss $K^I + U = K^n$ (donde la suma es como subespacios). Pero claramente podemos completar una base de U con entradas en la base canónica, obteniendo así algún K^I, de modo que x está en la imagen de f. □

Observación 9.18.1: Aquí, el objeto universal de $G_{d,n} \cong \text{よ}\mathrm{Grass}_{d,n}$ sería un haz cociente $\mathscr{O}^n_{\mathrm{Grass}_{d,n}} \twoheadrightarrow \mathscr{Q}_{\mathrm{univ}}$ localmente libre de rango d. Releyendo el lema de Yoneda, vemos que un objeto de $G_{d,n}(S)$, es decir, un haz cociente $\mathscr{O}^n_S \twoheadrightarrow \mathscr{E}$ localmente libre de rango d, se corresponde a un morfismo $f\colon S \to \mathrm{Grass}_{d,n}$, el cual induce una función en direcciones contrarias a nivel de puntos $\mathrm{Grass}_{d,n}$-valuados; evaluando en $\mathscr{Q}_{\mathrm{univ}}$, concluimos que equivale a darse $f^*\mathscr{Q}_{\mathrm{univ}} = \mathscr{E}$.

De la construcción se sigue que $\mathrm{Grass}_{d,n}$ admite un cubrimiento por abiertos afines isomorfos a $\mathbb{A}^{d(n-d)}_{\mathbb{Z}}$; en consecuencia:

Corolario 9.18.2: El esquema $\mathrm{Grass}_{d,n}$ es íntegro, suave (sobre $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$) y tiene dimensión $d(n-d)$.

Ejercicio 9.19: Rastreando la demostración, demuestre que $\mathrm{Grass}_{1,n} \cong \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{Z}}$.

Proposición 9.20: Sea S un esquema y $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_S$-módulo cuasicoherente finitamente generado. Fijemos $e \geq 0$ y sea $G^e(\mathscr{E})\colon (\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ el funtor que asigna

$$(T \xrightarrow{h} S) \longmapsto \{\mathscr{F} \subseteq \mathscr{E} : h^*(\mathscr{E})/\mathscr{F} \text{ es localmente libre de rango } e\}.$$

Entonces:

1. $G^e(\mathscr{E})$ es un funtor representable y su objeto representado se denota $\mathrm{Grass}^e(\mathscr{E})$.

2. Si $\varphi\colon \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2$ es un epimorfismo de $\mathscr{O}_S$-módulos (cuasicoherentes y finitamente generados), el morfismo inducido $i_\varphi\colon \mathrm{Grass}^e(\mathscr{E}_2) \to \mathrm{Grass}^e(\mathscr{E}_1)$ es un encaje cerrado.

En **[EGA I],** §I.9.7 se detalla una construcción del $\mathrm{Grass}^e(-)$ para módulos cuasicoherentes sin la restricción de ser finitamente generado y también emplea representabilidad de funtores.

Demostración: Haremos los incisos en orden inverso, probando que la transformación $G^e(\mathscr{E}_2) \Rightarrow G^e(\mathscr{E}_1)$ es un encaje cerrado.

2. Sea $h\colon X \to S$ un S-esquema. Dada una transformación natural $\text{よ}X \Rightarrow G^e(\mathscr{E}_1)$, sea $\mathscr{F}_X \in G^e(\mathscr{E}_1)(X)$, de modo que $h^*(\mathscr{E}_1)/\mathscr{F}_X$ es localmente libre de rango e y, por tanto, la composición $\ker(h^*\varphi) \to h^*(\mathscr{E}_1)/\mathscr{F}_X$ induce un encaje cerrado por la proposición 9.1.

1. Claramente $G^e(\mathscr{E})$ es un haz en la topología de Zariski, por lo que la representabilidad es local (teorema 9.4). Así, supongamos que $S = \operatorname{Spec} A$ es afín y, por tanto, $\mathscr{E} = \widetilde{E}$ con E un A-módulo finitamente generado. El epimorfismo de A-módulo $A^n \twoheadrightarrow E$ induce una transformación suprayectiva $G^e(\mathscr{E}) \Rightarrow G^e(\mathscr{O}_S^n) \cong \text{よ}(\mathrm{Grass}_{n-e,n} \times_{\mathbb{Z}} S)$, de modo que el funtor $G^e(\mathscr{E})$ es representable por un subesquema cerrado de $\mathrm{Grass}_{n-e,n} \times_{\mathbb{Z}} S$. □

Debido a la proposición anterior, denotaremos por $\text{よ}\mathrm{Grass}^e(\mathscr{E})$ al funtor $G^e(\mathscr{E})$. Por lo general, al trabajar con los esquemas grassmannianos nos daremos transformaciones naturales entre funtores representables y emplearemos el lema de Yoneda.

Ejemplo 9.21: Sea S un esquema y $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_S$-módulo localmente libre de rango n. La transformación natural dada sobre un S-esquema $h\colon T \to S$ por:

$$(\iota\colon \mathscr{F} \to h^*\mathscr{E}) \longmapsto \big(\operatorname{coker}(\iota)^\vee \hookrightarrow h^*(\mathscr{E}^\vee)\big)$$

induce un morfismo de S-esquemas $\operatorname{Grass}^e(\mathscr{E}) \to \operatorname{Grass}^{n-e}(\mathscr{E}^\vee)$. Aplicando la misma transformación es fácil comprobar que de hecho se trata de un isomorfismo. ⌟

Definición 9.22: Sea S un esquema y $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_S$-módulo cuasicoherente. Se define el ***fibrado proyectivo inducido por*** $\mathscr{E}$ como el S-esquema $\mathbb{P}(\mathscr{E}) := \operatorname{Grass}^1(\mathscr{E})$.

Ejemplo. Sea S un esquema. Entonces $\mathbb{P}\big((\mathscr{O}_S^{n+1})^\vee\big) \cong \mathbb{P}_S^n$.

Procedemos a dar otra descripción en términos del Proj relativo:

Lema 9.23.A: Sea S un esquema y $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_S$-módulo cuasicoherente y $\mathscr{L}$ un haz inversible. Entonces existe un S-isomorfismo

$$i\colon X := \mathbf{Proj}_S(\operatorname{Sym}\mathscr{E}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathbf{Proj}_S(\operatorname{Sym}(\mathscr{E}\otimes\mathscr{L})) =: Y$$

tal que $i^*\mathscr{O}_Y(n) = \mathscr{O}_X(n)\otimes\pi^*(\mathscr{L}^{\otimes n})$ para todo $n\in\mathbb{Z}$, donde $\pi\colon X\to S$ es el morfismo estructural.

En particular, $\mathbf{Proj}_S(\operatorname{Sym}\mathscr{L}) \cong \mathbf{Proj}_S(\operatorname{Sym}\mathscr{O}_S) = S$.

Demostración: Basta notar que hay un isomorfismo canónico de haces $\operatorname{Sym}^n(\mathscr{E}\otimes\mathscr{L}) \cong \operatorname{Sym}^n(\mathscr{E})\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}$ dado en secciones de un abierto U por

$$(e_1\otimes s_1)\cdots(e_n\otimes s_n) \mapsto (s_1\cdots s_n)\otimes(s_1\otimes\cdots\otimes s_n),$$

(donde $\cdot$ denota la operación en la álgebra simétrica) de modo que se sigue de la proposición 9.11. □

Teorema 9.23: Sea S un esquema y $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_S$-módulo cuasicoherente. Existe un S-isomorfismo canónico $\mathbf{Proj}_S(\operatorname{Sym}\mathscr{E}) \cong \mathbb{P}(\mathscr{E})$. En otras palabras, para todo S-esquema $f\colon T\to S$, existe una biyección canónica entre S-morfismos $T\to\mathbf{Proj}_S(\operatorname{Sym}\mathscr{E})$ y haces inversibles $\mathscr{L}$ sobre T con epimorfismos $f^*\mathscr{E}\twoheadrightarrow\mathscr{L}$.

Demostración: El isomorfismo $\alpha_1\colon \operatorname{Sym}^1\mathscr{E} = \mathscr{E} \to \pi_*\mathscr{O}_X(1)$ descrito en (9.1) induce, por adjunción, un homomorfismo $\alpha_1^\sharp\colon \pi^*\mathscr{E}\to\mathscr{O}_X(1)$ de $\mathscr{O}_X$-módulos. Sea $u\colon \mathscr{E}\otimes_{\mathscr{O}_S}\operatorname{Sym}\mathscr{E}\to(\operatorname{Sym}\mathscr{E})(1)$ el homomorfismo canónico de $(\operatorname{Sym}\mathscr{E})$-módulos, el cual es visiblemente sobreyectivo; entonces es claro que

$\alpha_1^\sharp = \widetilde{u}$, de modo que $\alpha_1^\sharp$ es sobreyectivo. Esto, por definición, determina un S-morfismo

$$r_{\mathscr{E}} \colon \mathbf{Proj}_S(\operatorname{Sym}\mathscr{E}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathscr{E})$$

lo cual, por la observación 9.18.1, satisface que $r_{\mathscr{E}}\mathscr{L}_{\text{univ}} = \mathscr{O}_X(1)$, donde $\mathscr{L}_{\text{univ}}$ es el haz inversible universal de $\mathbb{P}(\mathscr{E}) = \operatorname{Grass}^1(\mathscr{E})$.

Definamos su inversa: por definición del S-esquema $p\colon Y := \mathbb{P}(\mathscr{E}) \to S$ este viene inducido por un epimorfismo de haces $p^*\mathscr{E} \twoheadrightarrow \mathscr{L}_{\text{univ}} =: \mathscr{L}$. Por funtorialidad de Sym sobre haces, obtenemos un epimorfismo de $\mathscr{O}_Y$-álgebras cuasicoherentes:

$$\varphi\colon \operatorname{Sym}(p^*\mathscr{E}) = p^*(\operatorname{Sym}\mathscr{E}) \longrightarrow \operatorname{Sym}\mathscr{L} = \bigoplus_{d\geq 0} \mathscr{L}^{\otimes d}.$$

Por funtorialidad del $\mathbf{Proj}_S$ obtenemos

$$s\colon \mathbf{Proj}_S(\operatorname{Sym}\mathscr{L}) \cong Y \longrightarrow \mathbf{Proj}_Y\, p^*(\operatorname{Sym}\mathscr{E}) = X \times_S Y \twoheadrightarrow X.$$

Queda de ejercicio verificar que $r_{\mathscr{E}}$ y s son mutuamente inversas. □

Corolario 9.23.1: Sea X un S-esquema. Existe una biyección canónica entre S-morfismos $X \to \mathbb{P}_S^n$ y las clases de isomorfismo $(\mathscr{L}, s_0, \dots, s_n)$, donde $\mathscr{L}$ es un haz inversible sobre X y $s_0, \dots, s_n \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ son secciones globales que generan a $\mathscr{L}$.

Aquí entendemos que dos clases $(\mathscr{L}, s_0, \dots, s_n)$ y $(\mathscr{M}, t_0, \dots, t_n)$ son equivalentes si existe un isomorfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos $\varphi\colon \mathscr{L} \to \mathscr{M}$ tal que $\varphi_X(s_i) = t_i$.

Ejemplo 9.24 (encajes d-ésimos)**:** Sea A un anillo y sean $n \geq 1, d \geq 1$ enteros. Existe un A-morfismo $P := \mathbb{P}_A^n \to \mathbb{P}_A^N$, donde $N := \binom{n+d}{n} - 1$ dado, en el corolario anterior, por la clase $(\mathscr{O}_P(d), s_0, \dots, s_N)$, donde los s_i recorren todos los monomios de grado d en n variables. Éste morfismo es un encaje cerrado y se conoce como el ***encaje d-ésimo***. ⌟

El siguiente ejemplo es un poco más sencillo:

Definición 9.25: Sea S un esquema y $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_S$-módulo cuasicoherente. Definimos el ***fibrado vectorial*** inducido por $\mathscr{E}$ como el S-esquema

$$\mathbf{V}_S(\mathscr{E}) := \mathbf{Spec}_S(\operatorname{Sym}\mathscr{E}).$$

Proposición 9.26: Sea S un esqumea y $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_S$-módulo cuasicoherente. Para todo S-esquema $f\colon T \to S$ existe una biyección natural

$$\operatorname{Hom}_S(T, \mathbf{V}_S(\mathscr{E})) \approx \Gamma\left(T, (f^*\mathscr{E})^\vee\right).$$

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de los isomorfismos naturales

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_S(T, \mathbf{V}(\mathscr{E})) &\approx \operatorname{Hom}_{\mathsf{Alg}(\mathscr{O}_S)}(\operatorname{Sym}\mathscr{E}, f_*\mathscr{O}_T) \approx \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E}, f_*\mathscr{O}_T)\\ &\approx \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_T}(f^*\mathscr{E}, \mathscr{O}_T) \approx \Gamma\left(T, (f^*\mathscr{E})^\vee\right). \qquad \square\end{aligned}$$

Ejemplo. Sea S un esquema. Entonces $\mathbf{V}_S((\mathscr{O}_S^n)^\vee) \cong \mathbb{A}_S^n$.

Morfismos de Segre y de Plücker.

Definición 9.27: Sea S un esquema y $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ un par de $\mathscr{O}_S$-módulos localmente libres de rango finito. Definimos una transformación natural como prosigue, donde $h\colon T \to S$ es un S-esquema:

$$\begin{aligned}\text{よ}\mathbb{P}(\mathscr{E}) \times \text{よ}\mathbb{P}(\mathscr{F}) &\longrightarrow \text{よ}\mathbb{P}(\mathscr{E} \otimes \mathscr{F})\\ (\varphi\colon h^*\mathscr{E} \twoheadrightarrow \mathscr{L}, \psi\colon h^*\mathscr{F} \to \mathscr{M}) &\longmapsto \big(\varphi \otimes \psi\colon h^*(\mathscr{E} \otimes \mathscr{F}) \twoheadrightarrow \mathscr{L} \otimes \mathscr{M}\big).\end{aligned}$$

Por el lema de Yoneda, esto induce un morfismo de esquemas $\sigma_{\mathscr{E},\mathscr{F}}\colon \mathbb{P}(\mathscr{E}) \times_S \mathbb{P}(\mathscr{F}) \to \mathbb{P}(\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F})$ denominado el ***encaje de Segre***.

Ejemplo. Empleando $\mathscr{E} := (\mathscr{O}_S^{n+1})^\vee$ y $\mathscr{F} := (\mathscr{O}_S^{m+1})^\vee$, entonces $\sigma_{\mathscr{E},\mathscr{F}}$ induce el encaje de Segre usual (cfr. lema 4.56).

A mi juicio quizá esta forma de ver el encaje de Segre ilustra mejor la dimensión del codominio.

Proposición 9.28: Sea S un esquema y $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ un par de $\mathscr{O}_S$-módulos localmente libres de rango finito. El encaje de Segre $\sigma_{\mathscr{E},\mathscr{F}}$ es un encaje cerrado.

DEMOSTRACIÓN: La propiedad de ser «encaje cerrado» se puede verificar localmente en el codominio, así que podemos suponer que $S = \operatorname{Spec} A$ es afín, en cuyo caso, $\mathscr{E} \cong (\mathscr{O}_S^{n+1})^\vee$ y $\mathscr{F} \cong (\mathscr{O}_S^{m+1})^\vee$. Ahora, por el ejemplo anterior, el encaje de Segre corresponde al encaje clásico de Segre, el cual efectivamente es un encaje cerrado. $\square$

Definición 9.29: Sea S un esquema. Definimos una transformación natural como prosigue:

$$\text{よ}\varpi\colon \text{よ}\mathrm{Grass}^{n-d}(\mathscr{O}_S^n) \longrightarrow \text{よ}\mathrm{Grass}^{\binom{n}{d}-1}\left(\bigwedge^d \mathscr{O}_S^n\right)$$

$$\mathscr{F} \longmapsto \bigwedge^d \mathscr{F},$$

el cual induce un un morfismo de esquemas ϖ llamado el ***encaje de Plücker***.

Proposición 9.30: Los encajes de Plücker son encajes cerrados.

Demostración: Por el ejemplo 9.21 podemos dualizar $\operatorname{Grass}_{d,n} \xrightarrow{\sim} G := \operatorname{Grass}_{n-d,n}$ y obtener:

$$\operatorname{Grass}^{\binom{n}{d}-1}\left(\bigwedge^d \mathscr{O}^n_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}\right) \xrightarrow{\quad\sim\quad} \mathbb{P}\left(\bigwedge^d \mathscr{O}^n_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}\right) =: P.$$

Mediante la dualización, el morfismo de Plücker viene dado por la transformación natural:

$$\begin{aligned} \pi(S)\colon \text{よ}G(S) &\longrightarrow \text{よ}P(S) \\ (\mathscr{O}^n_S \twoheadrightarrow \mathscr{O}^n_S/\mathscr{F}) &\longmapsto \left(\bigwedge^d \mathscr{O}^n_S \twoheadrightarrow \bigwedge^d \mathscr{O}^n_S/\mathscr{F}\right) \end{aligned}$$

Dado un subconjunto $J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ con d elementos, sea G^J el funtor que da encajes abiertos de G. Definamos también el funtor P^J dado por:

$$P^J(S) := \left\{ \bigwedge^d \mathscr{O}^n_S \twoheadrightarrow \mathscr{L} \in P(S) : \bigwedge^d \mathscr{O}^J_S \hookrightarrow \bigwedge^d \mathscr{O}^n_S \twoheadrightarrow \mathscr{L} \text{ es un isomorfismo} \right\}.$$

Veamos que $\{P^J\}_J$ forma un cubrimiento por Zariski abiertos de P: en efecto, un homomorfismo φ entre $\mathscr{O}_S$-módulos localmente libres de rango d es un isomorfismo syss $\bigwedge^d \varphi = \det(\varphi)$ es un isomorfismo. Como ser un «encaje cerrado» se verifica localmente en el dominio, basta notar que $\pi^J\colon G^J \to P^J$ es un encaje cerrado, donde para justificar el codominio basta notar que $\pi(S)^{-1}\big(P^J(S)\big) = G^J(S)$.

Definiendo $I := \{1, \dots, n\} \setminus J$, tenemos una biyección funtorial:

$$G^J(S) \xrightarrow{\quad\sim\quad} H^J(S) := \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}^I_S, \mathscr{O}^J_S),$$

la cual convierte conúcleos en núcleos. Análogamente podemos identificar $P^J(S)$ con $\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E}, \bigwedge^d \mathscr{O}^J_S)$, donde $\mathscr{E}$ es el complemento ortogonal de $\bigwedge^d \mathscr{O}^n_S$. Ahora bien, como

$$\bigwedge^d \mathscr{O}^n_S = \bigoplus_{j=0}^d \mathscr{E}_j, \qquad \mathscr{E}_j := \bigwedge^{d-j} \mathscr{O}^J_S \otimes \bigwedge^j \mathscr{O}^I_S,$$

podemos tomar $\mathscr{E} := \bigoplus_{j=1}^d \mathscr{E}_j$ e identificar P^J con

$$Q^J(S) := \bigoplus_{j=1}^d \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_S}\left(\mathscr{E}_j, \bigwedge^d \mathscr{O}_S^J\right).$$

Como los $\mathscr{O}_S$-módulos $\mathscr{E}_j$ son libres, entonces $Q^J \cong \Bbbk\mathbb{A}_S^N$ con $N := \operatorname{rang}(\mathscr{E}_1) + \cdots + \operatorname{rang}(\mathscr{E}_d)$.

Mediante éstas identificaciones, π está dado por $u \mapsto \pi(u) = (u_1, \dots, u_d)$, donde

$$u_j \colon \mathscr{E}_j \to \bigwedge^d \mathscr{O}_S^J, \qquad x \otimes y \mapsto x \wedge (\textstyle\bigwedge^j u)(y),$$

para cada $x \in \Gamma(U, \bigwedge^{d-j} \mathscr{O}_S^J)$ e $y \in \Gamma(U, \bigwedge^j \mathscr{O}_S^I)$ con $U \subseteq S$ abierto.

Finalmente, u está en correspondencia biunívoca con la primera coordenada u_1 de $\pi(u)$ mediante el isomorfismo:

$$\begin{aligned} \alpha \colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_S^I, \mathscr{O}_S^J) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\textstyle\bigwedge^{d-1} \mathscr{O}_S^J \otimes \mathscr{O}_S^I, \bigwedge^d \mathscr{O}_S^J) \\ v &\longmapsto (x \otimes y \mapsto x \wedge v(y)). \end{aligned}$$

De éste modo, $H^J(S)$ se corresponde a las tuplas $(u_j)_j \in Q^J(S)$ que satisfacen la ecuación

$$\forall 2 \le j \le d, \qquad u_j(x \otimes y) = x \wedge (\textstyle\bigwedge^j \alpha^{-1}(u_1))(y).$$

Así, vemos que $H^J(S) \cong \Gamma(U, \mathscr{O}_S)^{(n-d)d}$ es un Zariski-cerrado de $Q^J(S) \cong \Gamma(U, \mathscr{O}_S)^N$ y, por tanto, H^J es un subesquema cerrado de Q^J. $\square$

§9.1.3 Sistemas lineales.

Lema 9.31: Sea X un esquema localmente noetheriano. Existen biyecciones canónicas entre los siguientes conjuntos:

1. El conjunto de divisores de Cartier efectivos de X.
2. Los pares $(\mathscr{L}, s)$ donde $\mathscr{L}$ es un haz invertible de X y $s \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ es una sección global que, para cada punto $x \in X$, su germen $s|_x$ no es divisor de cero en $\mathscr{O}_{X,x}$. Acá s es elegido único salvo una unidad $u \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X^\times)$.
3. Los subesquemas cerrados $Y \subseteq X$ tal que cada punto $y \in Y$ posee un entorno afín $U = \operatorname{Spec} A$, donde $Y \cap U = \mathbf{D}_A(f)$ para un solo $f \in A$.

DEMOSTRACIÓN: Los conjuntos descritos por los incisos 1, 2, 3 se denotan A, B, C resp.

La función $A \to B$ asocia a un divisor $D \in \operatorname{CaDiv}^+(X)$ el haz invertible $\mathscr{L} := \mathscr{O}_X(D)$ y, como es efectivo, $\mathscr{O}_X \subseteq \mathscr{L}$, de modo que la sección elegida es $1 \in \Gamma(X, \mathscr{L})$.

Para la función $B \to C$, elijamos un par $(\mathscr{L}, s)$ y elijamos un cubrimiento finito por abiertos afines $\{U_i\}_i$ tales que $\mathscr{L}|_{U_i} \cong \mathscr{O}_X|_{U_i}$. Este isomorfismo, manda $s|_{U_i}$ a un elemento $f_i \in \Gamma(U_i, \mathscr{O}_X)$ y denotamos $Y_i := \mathbf{V}_{U_i}(f_i)$. Finalmente $Y := \bigcup_i Y_i$ es el cerrado y uno puede probar que $Y_i \cap U_j = Y_j \cap U_i$.

Para la función $C \to A$, dado un cerrado $Y \in C$, elegimos un cubrimiento finito por abiertos afines $\{U_i\}_i$ tales que $Y \cap U_i = \mathbf{V}(f_i)$. Luego $D := \{(U_i, f_i)\}_i$ es un divisor de Cartier. □

Sea A un anillo noetheriano y sea $i\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_A$ un encaje cerrado. Definiendo $\mathscr{L} := i^*\mathscr{O}(1)$, entonces el pull-back induce un homomorfismo de A-módulos

$$i*\colon \Gamma(\mathbb{P}^n_A, \mathscr{O}(1)) \to \Gamma(X, \mathscr{L}).$$

Una sección regular $H \in \Gamma(\mathbb{P}^n_A, \mathscr{O}(1))$ es una forma lineal homogénea con coeficientes en A, lo que induce un hiperplano en $\mathbb{P}^n_A$, y análogamente, por el lema anterior, una sección regular $s \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ es un divisor de Cartier efectivo linealmente equivalente a $\mathscr{L}$. Finalmente, dos secciones regulares inducen el mismo divisor de Cartier syss difieren (multiplicativamente) por una unidad $u \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X^\times)$.

Si $A = k$ es un cuerpo, entonces ser una sección regular equivale a ser una sección global no nula y $\Gamma(X, \mathscr{O}_X^\times) = k^\times$. Es decir, hay una biyección:

$$\{D \in \operatorname{CaDiv}^+ X : D \sim \mathscr{L}\} \xleftrightarrow{\sim} \frac{\Gamma(X, \mathscr{L}) \setminus \{0\}}{\{s \sim t \iff \exists u \in k^\times \quad s = ut\}}.$$

Finalmente, $\Gamma(X, \mathscr{L})$ es un k-espacio vectorial de dimensión finita o, lo que es lo mismo, un $\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} k}$-módulo libre; por lo que el cociente de la derecha puede identificarse con $\mathbb{P}_k(\Gamma(X, \mathscr{L})^\vee)$.

Definición 9.32: Sea X un esquema localmente noetheriano y sea $D \in \operatorname{CaDiv}(X)$ un divisor de Cartier. El ***sistema lineal completo*** $|D|$ es el conjunto de divisores de Cartier efectivos que son linealmente equivalentes a D; lo cual está en correspondencia natural con secciones $s \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X(D))$ cuyos gérmenes locales no son divisores de cero.

Sea X una variedad completa geométricamente conexa y geométricamente reducida sobre un cuerpo k. Un ***sistema lineal*** $\mathfrak{d}$ sobre X es un subconjunto de $\operatorname{CaDiv}^+(X)$ tal que:

SL1. Si $D_1, D_2 \in \mathfrak{d}$, entonces $D_1 \sim D_2$ (equivalentemente, es un subconjunto de algún $|D|$).

SL2. Existe un haz inversible $\mathscr{L}$ y un k-subespacio vectorial $V \leq \Gamma(X, \mathscr{L})$ tal que $\mathfrak{d} = \{(\operatorname{div} s)_0 : s \in V\}$.

Por lo anterior, hay una biyección entre los sistemas lineales $\mathfrak{d}$ y los subespacios lineales Z de $\mathbb{P}_k(\Gamma(X, \mathscr{L})^\vee)$. La ***dimensión*** de $\mathfrak{d}$ se define como $\dim \mathfrak{d} := \dim Z = \dim_k V - 1$. Un ***punto base*** de $\mathfrak{d}$ es un punto P tal que para todo $D \in \mathfrak{d}$ se tiene que $P \in \operatorname{Supp} P$.

Nótese que al exigir que X sea propio sobre un cuerpo, obtenemos que $\Gamma(X, \mathscr{L})$ es un k-espacio vectorial de dimensión finita (cfr. teorema 7.54).

Lema 9.33: Sea X un esquema completo sobre un cuerpo k y sea $\mathfrak{d}$ el sistema lineal correspondiente al k-espacio vectorial $V \leq \Gamma(X, \mathscr{L})$. Un punto $P \in X$ es un punto base de $\mathfrak{d}$ syss $s|_P \in \mathfrak{m}_{X,P}\mathscr{L}_P$ para toda sección $s \in V$. En consecuencia, son equivalentes:

1. $\mathfrak{d}$ no tiene puntos base.

2. $\mathscr{L}$ está generado por secciones globales en V.

3. Dada una k-base $t_0, \dots, t_n$ de V, la k-aplicación racional $r_{\boldsymbol{t}} \colon X \to \mathbb{P}_k^n$ inducida sobre puntos por $x \mapsto [t_0(x) : \cdots : t_n(x)]$ es un morfismo.

DEMOSTRACIÓN: Por definición, P no es un punto base de $\mathfrak{d}$ syss existe $D \in \mathfrak{d}$ tal que $x \notin D$ syss $s|_P = 0$ donde $D = (\operatorname{div} s)_0$ para un $s \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ syss $s|_P$ genera a $\mathscr{L}_P$. □

Nótese que $r_{\boldsymbol{t}}$ solo depende de la elección de k-base, de modo que es único salvo un k-automorfismo lineal de $\mathbb{P}_k^n$ (correspondiente al k-automorfismo lineal de V dado por el cambio de base). Así pues, por abuso de notación, hablaremos de $r_{\mathfrak{d}} \colon X \to \mathbb{P}_k^{\dim \mathfrak{d}}$.

Definición 9.34: Se dice que un sistema lineal $\mathfrak{d}$ es ***muy amplio*** si (alguna elección de) $r_{\mathfrak{d}}$ es un encaje cerrado.

Proposición 9.35: Sea X una variedad completa sobre un cuerpo k. Un sistema lineal $\mathfrak{d}$ es muy amplio syss satisface las siguientes condiciones:

1. **Separa puntos:** Para todo par de puntos distintos $x, y \in X$ existe $D \in \mathfrak{d}$ tal que $x \in D$ e $y \notin D$.

2. **Separa vectores tangentes:** Para todo punto $x \in X$ y todo vector tangente no nulo $t \in T_{X,x} \setminus \{\vec{0}\}$ existe $D \in \mathfrak{d}$ tal que $x \in D$ y $t \notin T_{D,x}$.

Demostración: $\Longrightarrow$. Esto es un ejercicio para el lector que se reduce a probar las propiedades para el espacio proyectivo y los hiperplanos.

$\Longleftarrow$. Sea $f := r_{\mathfrak{d}} \colon X \to \mathbb{P}^n_k$. La propiedad de que $\mathfrak{d}$ separa puntos se traduce en la inyectividad de f. Como X es propio sobre k, entonces también es propio sobre $\mathbb{P}^n_k$, de modo que f determina un encaje topológico cerrado. Para concluir que f es un encaje cerrado geométrico hay que verificar que $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} \to f_* \mathscr{O}_X$ es un epimorfismo, lo cual puede verificarse en fibras. Así, sea $x \in X$ un punto cerrado, queremos ver que $f^\sharp_x \colon A := \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n, x} \to \mathscr{O}_{X,x} =: B$ sea un epimorfismo de anillos noetherianos locales, donde:

- Hay un isomorfismo de cuerpos de restos $A/\mathfrak{m}_A = B/\mathfrak{m}_B$.

- La imagen de $\mathfrak{m}_A$ genera $\mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$.

- B es un A-módulo finitamente generado.

Lo cual se sigue del lema de Nakayama. □

9.2* Límites de esquemas

Esta sección puede ser saltada en una primera lectura. El objetivo que nos fijamos está principalmente en la *aproximación noetheriana* y, como consecuencia, la *eliminación de hipótesis noetherianas*. Además, el lenguaje categórico de límites será de gran utilidad al referirnos a los teoremas de funciones formales. Esta sección está inspirada en [**Stacks**], `Chapter 01YT` y el capítulo 10 de Görtz y Wedhorn [**7**].

Definición 9.36: Un ***conjunto dirigido*** es un conjunto preordenado $(I, \leq)$ no vacío tal que para todo $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$.

Un diagrama $(S_-, f_{-,-}) \colon \mathsf{Poset}(I)^{\mathrm{op}} \to \mathscr{C}$ se dice un ***sistema inverso*** si I es un conjunto dirigido, donde para cada $i \in I$ se denota por S_i su imagen y para cada flecha $i \geq j$ en I se denota por $f_{ij} \colon S_i \to S_j$ su imagen. Las flechas f_{ij}'s se dicen ***flechas de vínculo***.[1] Si existe el límite inverso (S, f_i), las flechas $f_i\colon S \to S_i$ se llaman ***flechas límite***.

Un diagrama $\mathsf{Poset}(I) \to \mathscr{C}$ se dice un ***sistema dirigido***.

Lema 9.37.A: Sea I un conjunto dirigido y $(S_i, f_{ij})_{i\in I}$ un sistema dirigido de esquemas afines. Entonces $S := \varprojlim_{i\in I} S_i$ existe, es un esquema afín y de hecho

$$\Gamma(S, \mathscr{O}_S) = \varinjlim_{i\in I} \Gamma(S_i, \mathscr{O}_{S_i}).$$

Demostración: Es trivial de que $X \mapsto \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ visto como funtor covariante $\mathsf{Sch} \to \mathsf{CRing}^{\mathrm{op}}$ sea una adjunta izquierda de $\operatorname{Spec}\colon \mathsf{CRing}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Sch}$. □

Proposición 9.37: Sea I un conjunto dirigido y $(S_i, f_{ij})_{i\in I}$ un sistema dirigido de esquemas cuyos morfismos de vínculo son afines. Entonces:

1. $S = \varprojlim_{i\in I} S_i$ existe y cada morfismo límite $f_i\colon S \to S_i$ es afín.
2. Para cada $0 \in I$ y cada abierto $U_0 \subseteq S_0$ se satisface que
$$f_0^{-1}[U_0] = \varprojlim_{i\geq 0} f_{i0}^{-1}[U_0].$$
3. Para cada $0 \in I$ y cada S_0-esquema T se satisface que
$$T \times_{S_0} \left(\varprojlim_{i\geq 0} S_i\right) \cong \varprojlim_{i\geq 0} T \times_{S_0} S_i.$$

Demostración: Fijemos $0 \in I$. Que $f_{i0}\colon S_i \to S_0$ sea afín, se traduce en que existe una $\mathscr{O}_{S_0}$-álgebra cuasicoherente $\mathscr{A}_i$ tal que $S_i \cong \mathbf{Spec}_{S_0}(\mathscr{A}_i)$. Definiendo así la $\mathscr{O}_{S_0}$-álgebra cuasicoherente $\mathscr{B} := \varinjlim_{i\geq 0} \mathscr{A}_i$, vemos que $S := \mathbf{Spec}_{S_0}(\mathscr{B})$ satisface que $S = \varprojlim_{i\geq 0} S_i$ por la adjunción $f_* \dashv \mathbf{Spec}_{S_0}$. Es claro que $f_0\colon S \to S_0$ es afín y, por composición y cancelación derecha (prop. 5.24), cada $f_i\colon S \to S_i$ es afín.

Sea $g_i\colon L \to S_i$ un cono del diagrama. Dado $y \in L$, sea $U_0 \subseteq S_0$ un entorno afín de $g_0(y)$ y sea $V \subseteq g_0^{-1}[U_0]$ un entorno afín de y. El sistema inverso $(f_i^{-1}[U_0], f_{ij})_{i\geq 0}$ está conformado por esquemas afines y es claro que $f_0^{-1}[U_0]$ es su límite (aquí empleamos que $\mathscr{B}$ sea un haz), por lo que cada $g_i|_V$ se factoriza de manera única a

[1] **[Stacks]**, Tag 0030 les llama *mapas de transición*.

$$\begin{tikzcd} V \subseteq T \arrow[rr, "\exists! g_V"] \arrow[dr, "g_i"'] & & f_0^{-1}[U_0] \subseteq S \arrow[dl, "f_i"] \\ & f_{i0}^{-1}[U_0] \subseteq S_i & \end{tikzcd}$$

Como los abiertos afines son un cubrimiento de T y los g_V's son morfismos compatibles, se pegan de manera única en un morfismo $g\colon T \to S$. Esto prueba 1 y 2, y la tercera es una propiedad formal de límites. □

Lema 9.38.A: Sea $(S_i)_{i\in I}$ un sistema inverso de esquemas con vínculos afines. Entonces el funtor olvidadizo $\mathsf{Sch} \to \mathsf{Set}$ preserva el límite (inverso) de $S_\bullet$.

Demostración: Por el inciso 2 de la proposición anterior, podemos suponer que cada S_i es afín y reducirnos al siguiente problema de álgebra conmutativa: sean $(A_i, \varphi_{ij})_{i\in I}$ un sistema dirigido de anillos con $A := \varinjlim_{i\in I} A_i$ y homomorfismos límite $\psi_i\colon A_i \to A$. Queremos verificar que $\operatorname{Spec} A = \varprojlim_{i\in I} \operatorname{Spec}(A_i)$ para lo cual, sean $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec}(A_i)$ tales que para cada $i \le j$ se satisfaga que $\mathfrak{p}_i = \varphi_{ij}^{-1}[\mathfrak{p}_j]$. Defínase

$$\mathfrak{p} := \{a \in A : \exists i \in I, a_i \in \mathfrak{p}_i \quad \varphi_i(a_i) = a\} \subseteq A.$$

Es claro que $\mathfrak{p}$ es un ideal de A y que satisface $\psi_i^{-1}[\mathfrak{p}] = \mathfrak{p}_i$, de modo que debe ser primo. □

Proposición 9.38: Sea $(S_i)_{i\in I}$ un sistema inverso de esquemas con vínculos afines. Entonces el funtor olvidadizo $\mathsf{Sch} \to \mathsf{Top}$ preserva el límite de $S_\bullet$.

Demostración: El límite cofiltrado X de los espacios topológicos X_i tiene por conjunto $X = \varprojlim_{i\in I} X_i$ (en Set) y su topología es la inicial (i.e. los conjuntos $f_i^{-1}[U_i]$ con $U_i \subseteq X_i$ abierto, forman una base).

Al igual que antes, podemos suponer que los S_i's son afines, de modo que tenemos un sistema dirigido $(A_i, \varphi_{ij})_{i\in I}$ de anillos y definimos $A := \varinjlim_{i\in I} A_i$ con los homomorfismos límite $\psi_i\colon A_i \to A$. Claramente todo conjunto de la forma $f_i^{-1}[U_i]$ es abierto en $\operatorname{Spec} A = S$ para todo abierto $U_i \subseteq \operatorname{Spec} A_i$, pero hay que comprobar que esto forma una base.

Sea $s \in S$ un punto y $V \subseteq S$ un entorno de s. Fijemos $0 \in I$ y sea $U_0 \subseteq S_0$ un entorno afín de la imagen $f_0(s)$. Como $f_0^{-1}[U_0]$ y cada $f_{i0}^{-1}[U_0]$

es afín, por la proposición 9.37, vemos que

$$\Gamma(f_0^{-1}[U_0], \mathscr{O}_S) = \varinjlim_{i\geq 0} \Gamma(f_{i0}^{-1}[U_0], \mathscr{O}_{S_i}).$$

Sea $a \in \Gamma(f_0^{-1}[U_0], \mathscr{O}_S)$ tal que $s \in \mathbf{D}(a) \subseteq V$. Entonces, elijamos $i \geq 0$ y $a_i \in \Gamma(f_{i0}^{-1}[U_0], \mathscr{O}_{S_i})$ tal que se mande a a mediante f_i, por lo que $\mathbf{D}_{S_i}(a_i) \subseteq f_{i0}^{-1}[U_0]$ es un abierto cuya preimagen contiene a s y está contenida en $\mathbf{D}(a)$. $\square$

Corolario 9.38.1: Sea $(S_i)_{i\in I}$ un sistema inverso de esquemas con vínculos afines. Si cada S_i es no vacío y compacto, entonces $\varprojlim_{i\in I} S_i$ es no vacío.

Demostración: Esto se sigue de que el límite inverso de espacios topológicos compactos no vacío es no vacío. $\square$

Los siguientes resultados siempre considerarán la siguiente notación, que agrupamos para evitar reiteración:

Situación 9.39: Sea I un conjunto dirigido, $(S_i, \varphi_{ij})_{i\in I}$ es un sistema codirigido de esquemas compactos y cuasiseparados con vínculos afines, cuyo límite se denota $S := \varprojlim_{i\in I} S_i$. Las flechas límite son $\varphi_i : S \to S_i$.

Además, tras elegir $0 \in I$, podemos agregarle a las hipótesis:

(a) Un S_0-esquema X_0. Se definen $X_i := X_0 \times_{S_0} S_i$ para $i \geq 0$ y $X := X_0 \times_{S_0} S$.

(b) Un S_0-esquema Y_0. Se definen $Y_i := Y_0 \times_{S_0} S_i$ para $i \geq 0$ y $Y := Y_0 \times_{S_0} S$.

(c) Un S_0-morfismo $f_0 : X_0 \to Y_0$. Se definen $f_i := (f_0)_{S_i} : X_i \to Y_i$ para $i \geq 0$ y $f := (f_0)_S : X \to Y$.

Proposición 9.40: En la situación 9.39:

1. Dado un abierto compacto $V \subseteq S$, existe un abierto compacto $V_i \subseteq S_i$ para algún $i \in I$ tal que $V = \varphi_i^{-1}[V_i]$.
2. Dados $V_i \subseteq S_i, V_j \subseteq S_j$ abiertos compactos tales que $\varphi_i^{-1}[V_i] = \varphi_j^{-1}[V_j]$. Entonces existe $k \geq i, j$ tal que $\varphi_{ki}^{-1}[V_i] = \varphi_{kj}^{-1}[V_j]$.
3. Dados $V_{1,i}, V_{2,i}, \dots, V_{n,i} \subseteq S_i$ abiertos compactos tales que

$$S = \varphi_i^{-1}[V_{1i}] \cup \cdots \cup \varphi_i^{-1}[V_{ni}],$$

entonces existe $j \geq i$ tal que $S_j = \varphi_{ji}^{-1}[V_{1i}] \cup \cdots \cup \varphi_{ji}^{-1}[V_{ni}]$.

La siguiente definición es un buen sustituto universal de «morfismo de tipo finito» en el caso no noetheriano:

Definición 9.41: Un morfismo $f\colon X \to Y$ entre esquemas se dice ***localmente de presentación finita*** si todo punto $x \in X$ posee un entorno afín $U = \operatorname{Spec} B \subseteq X$ y existe un abierto afín $V = \operatorname{Spec} A \subseteq Y$ tal que $f[U] \subseteq V$ y tal que B es una A-álgebra de presentación finita.

Se dice que f es ***de presentación finita*** si es compacto y localmente de presentación finita.

Lema 9.42.A: En la situación 9.39, supongamos que para cada $i \in I$ elegimos un cerrado no vacío $Z_i \subseteq S_i$, tales que $\varphi_{ij}[Z_i] \subseteq Z_j$ para todo $j \geq i$. Entonces existe $s \in S$ tal que $\varphi_i(s) \in Z_i$ para cada $i \in I$.

Demostración: Dotemos a Z_i de la estructura reducida. Como los encajes cerrados son morfismos afines, entonces $\{Z_j \to S_i\}_{j \geq i}$ forma un sistema codirigido con vínculos afines, entonces por el corolario 9.38.1, el límite $Z := \varprojlim_{j \geq i} Z_i$ es no vacío y claramente hay un morfismo canónico $Z \to S$. □

Lema 9.42.B: Sea $(A_i, \varphi_{ij})_{i \in I}$ un sistema dirigido de anillos, y sea $A := \varinjlim_{i \in I} A_i$. Dada una A_0-álgebra de presentación finita B_0 y una A_0-álgebra C_0 para un índice $0 \in I$, denotemos por $B_i := A_i \otimes_{A_0} B_0$ y $B := A \otimes_{A_0} B_0$, y análogamente con C. Entonces:

$$\varinjlim_{i \in I} \operatorname{Hom}_{\mathsf{Alg}(A_i)}(B_i, C_i) \cong \operatorname{Hom}_{\mathsf{Alg}(A)}(B, C).$$

Demostración: En lo sucesivo denotamos Hom_{A_0} en lugar de $\operatorname{Hom}_{\mathsf{Alg}(A_0)}$. Empleando la adjunción con el producto tensorial, vemos que

$$\operatorname{Hom}_{A_i}(B_i, C_i) = \operatorname{Hom}_{A_0 \otimes_{A_0} A_i}(B_0 \otimes_{A_0} A_i, C_i) \cong \operatorname{Hom}_{A_0}(B_0, C_i),$$

y de igual modo con A, B, C. Así, el problema se reduce a probar que el homomorfismo canónico

$$\theta\colon \varinjlim_{i \in I} \operatorname{Hom}_{A_0}(B_0, C_i) \to \operatorname{Hom}_{A_0}\left(B_0, \varinjlim_{i \in I} C_i\right). \tag{9.2}$$

es un isomorfismo.

Veamos que θ es inyectivo: Sean $f_i, g_i \colon B_0 \to C_i$ dos homomorfismos de A_0-álgebras que inducen el mismo homomorfismo límite $f = g \colon B_0 \to C_i \to C$. Sea $B_0 = A_0[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$. Como $f(\alpha_j) = g(\alpha_j) \in C = \varinjlim_{i \in I} C_i$, esto significa que $f_\ell(\alpha_j) = g_\ell(\alpha_j) \in B_\ell$ para algún $\ell \geq i$; así, como el conjunto es dirigido, podemos encontrar ℓ suficientemente grande de modo que $f_\ell(\alpha_j) = g_\ell(\alpha_j)$ para todo $1 \leq j \leq n$.

Veamos que θ es sobreyectivo: Escribamos $B_0 = A_0[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_m)$, donde las x_i's son indeterminadas y los $f_i(\boldsymbol{x}) \in A_0[\boldsymbol{x}]$ son polinomios (de tal modo que la clase de x_i se manda en α_i). Sea $g \colon B_0 \to C$ un homomorfismo de A_0-álgebras. Mediante el mismo argumento, sea $j \in I$ suficientemente grande tal que cada $g(\alpha_i)$ cae en la imagen de $C_j \to C$. Sea $h_j \colon A[\boldsymbol{x}] \to C_j$ el homomorfismo de A_0-álgebras dado por $x_i \mapsto g(\alpha_i)$, de modo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A_0[\boldsymbol{x}] \arrow[r, "h_j"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & C_j \arrow[d] \\ B_0 \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Como cada $g(f_i) = 0$, existe $j' \geq j$ tal que $h_{j'}(f_i) = 0 \in B_{j'}$, de modo que se factoriza por $\psi_{j'} \colon B_0 \to C$ como se quería ver. $\square$

Nótese que el homomorfismo (9.2) no es un isomorfismo por razones categoriales; en efecto, el hecho de que $\operatorname{Hom}_{A_0}(B_0, -) \dashv B_0 \otimes_{A_0} -$ prueba que $\operatorname{Hom}_{A_0}(B_0, -)$ preserva límites *inversos*.

Teorema 9.42: En la situación 9.39, supongamos que X_0 es compacto y cuasiseparado, y que Y_0 es localmente de presentación finita sobre S_0. Entonces:

$$\varinjlim_{i \geq 0} \operatorname{Hom}_{S_i}(X_i, Y_i) \cong \operatorname{Hom}_S\left(\varprojlim_{i \geq 0} X_i, \varprojlim_{i \geq 0} Y_0 \right).$$

Demostración: Veamos que la aplicación es inyectiva: Sean $f_i, g_i \colon X_i \to Y_i$ un sistema de morfismos, tales que inducen el mismo límite $f = g \colon X \to Y$. Como X es compacto, entonces $f[X]$ está contenido en finitos abiertos afines $\bigcup_{j=1}^n V_j \subseteq Y$. Más aún, como los vínculos de Y son afines, podemos suponer que existe $i \in I$ tal que $V_j = V_{j,i} \times_{Y_i} Y$, donde cada $V_{j,i} \subseteq Y_i$ es afín; y tales que $Y_i = \bigcup_{j=1}^n V_{j,i}$. En consecuente, $Y_\ell = \bigcup_{j=1}^n V_{j,\ell}$ para todo $\ell \geq i$.

Defínanse $U'_{j,\ell} := f_\ell^{-1}[V_{j,\ell}]$, $U''_{j,\ell} := g_\ell^{-1}[V_{j,\ell}]$ y $U_{j,\ell} := U'_{j,\ell} \cap U''_{j,\ell}$. Nótese que $\varprojlim_{\ell \geq i} \bigcup_{j=1}^n U_{j,\ell} = X$, así que, tomando complementos y aplicando el corolario 9.38.1, vemos que $\bigcup_{j=1}^{n} U_{j,\ell} = X_\ell$ para un ℓ suficientemente grande. Cada punto $x \in X_\ell$ está contenido en un $U_{j,\ell}$ afín donde las restricciones de f_ℓ, g_ℓ caen en $U_{j,\ell} \to V_{j,\ell}$, de modo que nos reducimos al caso afín y aplicamos el lema anterior para ver inyectividad allí.

Veamos que la aplicación es sobreyectiva: Sea $f\colon X \to Y$ un S-morfismo y defínanse $V_j, V_{j,\ell}$ como antes. Fijemos un cubrimiento por abiertos afines $f^{-1}[V_j] = \bigcup_{i,j} U_{ij}$ y, por la proposición 9.40, existen abiertos compactos $U_{ij,\ell} \subseteq X_\ell$ tales que $U_{ij,\ell} \times_{X_\ell} X = U_{ij}$ y, mediante el lema anterior, podemos construir morfismos $f_{ij,\ell}\colon U_{ij,\ell} \to Y_\ell$ compatibles con f para todo ℓ. Como los X_ℓ's son cuasiseparados, las intersecciones $U_{ij,\ell} \cap U_{i'j',\ell}$ son compactas y, por el lema anterior, obtenemos inyectividad sobre éstas, de modo que los morfismos $f_{ij,\ell}$ son compatibles y se pueden pegar en morfismos $X_\ell \to Y_\ell$ como se quería ver. □

Uno puede probar que el lema 9.42.B puede mejorarse a una equivalencia (vid. [**Stacks**], `Tag 00QO`), y en consecuente, el teorema anterior también (vid. [**Stacks**], `Tag 01ZC`).

Corolario 9.42.1: En la situación 9.39, supongamos que X_0 e Y_0 son localmente de presentación finita sobre S_0. Entonces f es un isomorfismo syss algún f_j lo es (con $j \geq 0$).

Demostración: $\Longleftarrow$. Es trivial de que el cambio de base de un isomorfismo sea un isomorfismo.

$\Longrightarrow$. Basta aplicar el teorema anterior a tanto f como su inversa. □

Lema 9.43.A: Sea R un anillo (e.g. $\mathbb{Z}$) y sea $(A_i)_{i\in I}$ un sistema dirigido de R-álgebras con $A := \varinjlim_{i\in I} A_i$. Dada una A-álgebra de presentación finita B, existe una A_0-álgebra de presentación finita B_0 con $0 \in I$ tal que $B \cong B_0 \otimes_{A_0} A$.

Teorema 9.43: En la situación 9.39. Si X es de presentación finita sobre S, entonces existe $0 \in I$ tal que X_0 también es de presentación finita sobre S_0.

Teorema 9.44 – *Aproximación noetheriana*: Sea A un anillo y sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de esquemas sobre A. Son equivalentes:

1. X e Y son de presentación finita sobre A.

2. Existe un anillo noetheriano A_0, un A-morfismo $f_0\colon X_0 \to Y_0$ de esquemas de tipo finito sobre A y un homomorfismo de anillos $\varphi\colon A_0 \to A$, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & \operatorname{Spec} A \arrow[d, "\varphi^a"] \\ X_0 \arrow[r, "f_0"'] & Y_0 \arrow[r] & \operatorname{Spec}(A_0) \end{tikzcd}$$

En este caso, podemos elegir A_0 de tipo finito sobre $\mathbb{Z}$.

Demostración: $2 \implies 1$. Trivial.

$1 \implies 2$. Nótese que $A = \varinjlim_{i\in I} A_i$, donde A_i son sus subanillos de tipo finito (sobre $\mathbb{Z}$). En primer lugar, existe X_j de tipo finito sobre $\operatorname{Spec}(A_j)$ (en particular, X_j es noetheriano) con $j \in I$ tal que $X \cong X_j \times_{A_j} \operatorname{Spec} A$. Así, denotando $X_i := X_j \times_{A_j} A_i$ para $i \geq j$, ahora $(X_i)_{i\geq j}$ es un sistema codirigido de esquemas noetherianos con vínculos afines (por cambio de base). Por cancelación derecha, Y es un X-esquema de presentación finita, por lo que, otra aplicación del teorema anterior, da que existe un X_0-esquema de tipo finito Y_0 con $0 \in I$ tal que $Y \cong Y_0 \times_{X_0} X$, como se quería probar. □

§9.2.1 Conjuntos constructibles II. Una primera aplicación de la eliminación noetheriana será al teorema de constructibilidad de Chevalley, lo cual nos permitirá obtener mejores conclusiones acerca de los morfismos planos, pero advertimos que no es tarea fácil, ya que la noción apropiada de *conjunto constructible* es más engorrosa en esquemas que no sean (localmente) noetherianos:

Definición 9.45: Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $E \subseteq X$ se dice:[2]

Retrocompacto si para todo abierto compacto $U \subseteq X$, la intersección $E \cap U$ es compacta.

Constructible si es la unión finita de $U \setminus V$, donde U, V son abiertos retrocompactos de X.

[2]Esta es la notación de [**Stacks**], cfr. `Tag 005A` y `Tag 005G`; mientras que Görtz y Wedhorn [**7**, pág. 256] les llama *globalmente constructible* y *constructible*, a lo que nosotros llamamos *constructible* y *localmente constructible* resp.

Localmente constructible si todo punto $x \in X$ posee un entorno U tal que $E \cap U$ es constructible en U.

Corolario 9.45.1: Sea X un espacio topológico.

1. La unión de finitos conjuntos retrocompactos es retrocompacta.
2. Todo conjunto localmente constructible es retrocompacto.
3. Si X es compacto, entonces las nociones de «constructible» y «localmente constructible» coinciden.
4. Si X es noetheriano, entonces todo abierto es (retro)compacto y, por tanto, las nociones de «constructible» y «localmente constructible» coinciden con la noción de conjunto constructible anterior (cfr. def. 4.61).

Demostración:

1. Esto se sigue de que unión finita de compactos es compacto.
2. Si $U \subseteq X$ es un abierto compacto y $V, W \subseteq U$ son abiertos retrocompactos (respecto a U), entonces $U \cap V \cap (X \setminus W)$ es un cerrado en $U \cap V$, el cual es compacto; lo que prueba que $V \setminus W$ es retrocompacto.
3. Para cada $x \in X$ sea U_x tal que $E \cap U_x$ es constructible en U_x. Como X es compacto, podemos cubrirlo por finitos U_x's, digamos $U_1, \dots, U_n$; y en cada U_i vemos que $E \cap U_i = \bigcup_{j=1}^{N} V_{ij} \setminus W_{ij}$, donde cada V_{ij}, W_{ij} es un abierto retrocompacto de U_i. Finalmente basta notar que V_{ij}, W_{ij} son también retrocompactos en X para concluir.
4. Trivial. □

Las siguientes proposiciones se demuestran de manera análoga al caso anterior y, por tanto, quedan como ejercicios para el lector:

Proposición 9.46: Sea X un espacio topológico. La familia de los conjuntos constructibles es la mínima que contiene a todos los abiertos retrocompactos y es cerrada bajo complementos y uniones finitas.

Corolario 9.46.1: Sea X un esquema.

1. Las uniones finitas y complementos de conjuntos (localmente) constructibles es también (localmente) constructible.

2. Sea $E \subseteq X$ un conjunto localmente constructible, y sea $Z \subseteq X$ un cerrado irreducible. Entonces $E \cap Z$ ó $Z \setminus E$ contiene un abierto denso de Z.

Proposición 9.47: Sea X un esquema compacto y cuasiseparado. Un abierto $U \subseteq X$ es localmente constructible syss es compacto. En consecuencia, un conjunto $E \subseteq X$ es localmente constructible syss es la unión de finitos conjuntos de la forma $V \setminus W$, donde V, W son abiertos compactos.

Lema 9.48: Sea X un esquema compacto y cuasiseparado, y sea $E \subseteq X$ localmente constructible. Entonces existe un esquema afín Y y un morfismo $f\colon Y \to X$ tal que $f[Y] = E$.

Pista: Repita la demostración del lema 4.65. □

Proposición 9.49: Sea $S := \varprojlim_{i\in I} S_i$ el límite codirigido de un sistema con vínculos afines. Dado $0 \in I$, supongamos que S_0 es compacto y cuasiseparado, y sean $E_0, F_0 \subseteq S_0$ conjuntos localmente constructibles. Denotemos $E_i := f_{i0}^{-1}[E_0]$ (para $i \geq 0$) y $E := f_0^{-1}[E]$, y análogamente con F. Son equivalentes:

1. $E \subseteq F$.

2. Existe $i \geq 0$ tal que $E_i \subseteq F_i$.

Demostración: $\Longleftarrow$. Trivial.

$\Longrightarrow$. Sea $G_0 := F_0 \setminus E_0$ y defínanse $G_i := f_{i0}^{-1}[G_0]$ y $G := f_0^{-1}[G_0]$. Por teoría de conjuntos, $G_i = F_i \setminus E_i$ y $G = F \setminus G$, así que se reduce a probar que si $G = \varnothing$, entonces algún $G_i = \varnothing$. Por el lema 9.48, sea Y_0 afín con morfismo $g_0\colon Y_0 \to S_0$ tal que $g_0[Y_0] = G_0$; entonces definiendo $g_i := (g_0)_{S_i}\colon Y_0 \times_{S_0} S_i \to S_i$ se nota que $g_i[Y_0 \times_{S_0} S_i] = G_i$ y aplicamos el corolario 9.38.1. □

Así, como una aplicación de eliminación noetheriana tenemos:

Teorema 9.50 (Chevalley): Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de presentación finita. Entonces $f[X]$ es localmente constructible.

Demostración: Como ser «localmente constructible» se puede verificar en abiertos, así que podemos suponer que Y es afín. Como la preimagen de abiertos compactos es compacto, entonces X es compacto y, como la unión de localmente constructibles es constructible, podemos suponer que X también es afín. Finalmente, $f\colon X\to Y$ es un morfismo de presentación finita entre esquemas afines, así que por aproximación noetheriana, existe Y_0 noetheriano con $f_0\colon X_0\to Y_0$ de tipo finito y un morfismo $\pi\colon Y\to Y_0$ tal que $f=(f_0)_Y$ viene de cambio de base. Así, $f[X]=\pi^{-1}\big[f_0[X_0]\big]$, donde $f_0[X_0]$ es localmente constructible por el teorema de Chevalley anterior. □

Corolario 9.50.1: Sea $f\colon X\to Y$ un morfismo localmente de presentación finita. Son equivalentes:

1. La función f es abierta.
2. Para todo punto $x\in X$, el homomorfismo $f_x^\sharp\colon \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{X,x})\to\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{Y,f(x)})$ es sobreyectivo.
3. La función f refleja generizaciones (i.e. para todo punto $x\in X$ y toda generización $y'\rightsquigarrow f(x)$, existe $x'\rightsquigarrow x$ tal que $f(x')=y'$).

Corolario 9.50.2: Sea $f\colon X\to Y$ un morfismo plano de presentación finita. Entonces f es un morfismo (universalmente) abierto.

Demostración: La demostración de que f es abierto es la misma que antes. Ahora, como las propiedades de «presentación finita» y «plano» son estables bajo cambio de base, la consecuencia de «abierto» también. □

Definición 9.51: Sea $\mathbf{P}(X,k)$ una propiedad de esquemas algebraicos X sobre un cuerpo k. Decimos que la propiedad $\mathbf{P}$ es ***constructible*** si:

PC1. Para toda extensión L/k de tipo finito, la propiedad $\mathbf{P}(X,k)$ equivale a $\mathbf{P}(X_L,L)$.

PC2. Para todo esquema íntegro noetheriano S y todo morfismo de tipo finito $X\to S$, definiendo

$$E:=\{s\in S:\text{se satisface }\mathbf{P}(X_s,\Bbbk(s))\},$$

entonces E ó $S\smallsetminus E$ contiene un abierto denso de S.

Por lo general, todas las «propiedades geométricas» satisfacen PC1..

Proposición 9.52: Sea **P** una propiedad constructible y sea $X \to S$ un morfismo de presentación finita. Entonces el conjunto

$$E := \{s \in S : \text{se satisface } \mathbf{P}(X_s, \Bbbk(s))\},$$

es localmente constructible.

Proposición 9.53: Las siguientes propiedades son constructibles:

- Ser geométricamente íntegro.
- Ser geométricamente irreducible.
- Ser geométricamente reducido.
- Ser geométricamente conexo.

9.3 Teoremas del tipo Bertini

Esta sección está basada en las secciones §I.4 y §I.6 de JOUANOLOU [**14**] y, en caso de querer profundizar en el tema, éste libro es recomendado. También algunos resultados involucrando propiedades constructibles son originales de §IV.9.7 del [**EGA IV$_3$,** págs. 76-82].

En primer lugar vamos a conseguir una aplicación del teorema de constructibilidad de Chevalley.

Lema 9.54: Sea X un esquema algebraico sobre un cuerpo k. Entonces existe una extensión finita K/k tal que:

1. $(X_K)_{\text{red}}$ es geométricamente reducido.
2. Las componentes irreducibles de X_K son geométricamente irreducibles.
3. Las componentes conexas de X_K son geométricamente conexas.

Teorema 9.55: Sea $f : X \to Y$ un morfismo de tipo finito entre esquemas noetherianos. Entonces el conjunto de puntos $y \in Y$ tales que la fibra X_y sea geométricamente reducida (resp. geométricamente irreducible, geométricamente conexa, geométricamente íntegra) es constructible.

DEMOSTRACIÓN: Claramente no perdemos generalidad si suponemos que Y es irreducible y afín, y aplicando el funtor de reducción, podemos suponer que $Y = \operatorname{Spec} A$ donde A es un dominio íntegro noetheriano con $k := \operatorname{Frac} A$. Sea K/k una extensión finita tal que satisfaga las hipótesis del lema anterior con el k-esquema X_k. Eligiendo una k-base S de K, entonces $B := A[S]$ es una A-álgebra de tipo finito. Por el teorema de normalización de Noether podemos sustituir A por una localización principal $A[1/f]$ de modo que B/A sea una álgebra finitamente generada como módulo. Así, sea $Y' := \operatorname{Spec} B$ y sea $X' := X \times_Y Y'$ de modo que tenemos el diagrama conmutativo de esquemas

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "\alpha"'] & X \end{tikzcd}$$

donde α y β son morfismos finitos dominantes y, por tanto, sobreyectivos.

Sea E el conjunto de $y \in Y$ tales que la fibra de f satisfaga una propiedad geométrica $\mathcal{P}$ como en el enunciado, y sea E' el conjunto de los $y' \in Y'$ tales que la fibra de f' satisfaga $\mathcal{P}$. Dado $y' \in Y'$, definiendo $y := \alpha(y)$, notamos que $\Bbbk(y')^{\rm alg} = \Bbbk(y)^{\rm alg}$ (pues α es finito), y por tanto,

$$f^{-1}[\{y\}] \times_{\Bbbk(y)} \Bbbk(y)^{\rm alg} \cong (f')^{-1}[\{y'\}] \times_{\Bbbk(y')} \Bbbk(y')^{\rm alg},$$

es decir, poseen la misma fibra geométrica, de modo que $E = \alpha[E']$. Aplicando el teorema de constructibilidad de Chevalley, basta probar que E' es constructible. Más aún, aplicando el lema anterior y empleando que la constructibilidad es meramente topológica uno puede suponer que:

- $(X_k)_{\rm red} = (X_{\rm red})_k$ es geométricamente reducido.
- Las componentes irreducibles (resp. conexas) de X_k son geométricamente irreducibles (resp. geométricamente conexas).

Por la proposición 4.66 queremos ver que $Y \setminus E$ sea semiconstructible. Así supongamos, mediante inducción noetheriana, que $Y \setminus E$ contiene al punto genérico de Y, vale decir, que X_k no posee la propiedad $\mathcal{P}$; entonces es claro que hay un abierto U tal que para todo $y \in Y$ se cumple que X_y tampoco
Justificar por qué. posee la propiedad $\mathcal{P}$. ... □

Ahora vamos a introducir la noción de *hiperplano afín* asociado a un esquema algebraico. Sea X un esquema algebraico sobre un cuerpo k y sea

$f\colon X \to \mathbb{A}^n_k$ un k-morfismo con coordenadas $f_i := f \circ \pi_i$. Denotemos por Z al cerrado de $X \times_k \mathbb{A}^{n+1}_k$ dado por

$$Z := \{(x, y_0, \dots, y_n) \in X \times_k \mathbb{A}^{n+1}_k : y_0 + y_1 f_1(x) + \cdots + y_n f_n(x) = 0\}.$$

Despejando la variable y_0, es fácil notar que Z es realmente el gráfico de $X \times_k \mathbb{A}^n_k$ bajo el k-morfismo $X \times_k \mathbb{A}^n_k \to \mathbb{A}^1_k$ dado sobre puntos por $-y_1 f_1(x) - \cdots - y_n f_n(x)$; de modo que Z es un fibrado vectorial de rango n sobre X.

También, Z posee dos proyecciones canónicas (dadas por restricción a las de $X \times_k \mathbb{A}^{n+1}_k$), $\pi_1\colon Z \to X$ y $\pi_2\colon Z \to \mathbb{A}^{n+1}_k$.

Definición 9.56: Sea X un esquema algebraico sobre un cuerpo k y sea $f\colon X \to \mathbb{A}^n_k$ un k-morfismo como antes. Dado un punto k-racional $\boldsymbol{u} := (u_0, \dots, u_n) \in k \times k^n \setminus \{\vec{0}\}$, denotamos por

$$H_{\boldsymbol{u}} := \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{A}^n_k : u_0 + u_1 y_1 + \cdots + u_n y_n = 0\}$$

un hiperplano inducido por $\boldsymbol{u}$. El ***hiperplano afín*** sobre X inducido por $\boldsymbol{u}$ (y por f) es la preimagen $f^{-1}[H_{\boldsymbol{u}}]$, o equivalentemente, la fibra $Z_{\boldsymbol{u}}$ del morfismo $Z \to \mathbb{A}^{n+1}_k$ (descrito arriba).

Decimos que una propiedad $\mathcal{P}$ vale ***para casi todo*** hiperplano afín si existe un abierto denso $U \subseteq \mathbb{A}^{n+1}_k$ tal que para todo punto racional $\boldsymbol{u} \in U(k)$ con $(u_1, \dots, u_n) \neq \vec{0}$ se cumple que el hiperplano afín $Z_{\boldsymbol{u}}$ satisface $\mathcal{P}$.

Si $k = \mathbb{C}$, entonces el «para casi todo» en sentido de geometría algebraica implica el «para casi todo» en sentido de topología diferencial, ya que un cerrado en la topología de Zariski es claramente un conjunto Lebesgue-nulo.

Lema 9.57: Sea X un esquema algebraico irreducible sobre un cuerpo k con un k-morfismo $f\colon X \to \mathbb{A}^n_k$. Son equivalentes:

1. El morfismo $\pi_2\colon Z \to \mathbb{A}^{n+1}_k$ es dominante
2. $\dim \overline{f[X]} \geq 1$ (equivalentemente, f no es localmente constante).

Demostración: Haciendo cambio de base por k^{alg}, vemos que basta probar el enunciado para una componente irreducible de $X \times_k k^{\mathrm{alg}}$, de modo que podemos suponer que $k = k^{\mathrm{alg}}$. Además, como las condiciones son de naturaleza topológica podemos suponer que X es reducido (y luego, íntegro).

$1 \implies 2$. Por contrarrecíproca supongamos que $\dim \overline{f[X]} = 0$. Es decir, $f[X]$ consiste solamente de finitos puntos (necesariamente racionales), digamos $\boldsymbol{z}_j := (z_{j1}, \dots, z_{jn})$ para $1 \leq j \leq r$. Es claro entonces que $\pi_2[Z]$ no corta al abierto denso

$$\bigcap_{j=1}^{r} \mathbf{D}(z_{j1}t_1 + \cdots + z_{jn}t_n + t_0) \subseteq \operatorname{Spec}(k[\boldsymbol{t}]) = \mathbb{A}_k^{n+1}.$$

$2 \implies 1$. Como $\dim Z - \dim \mathbb{A}_k^{n+1} = \dim X - 1$ y la dimensión en las fibras es semicontinua superior, concluimos que para que π_2 sea dominante, basta que una fibra de π_2 tenga dimensión $\dim X - 1$, que es lo que buscaremos.

Dado un esquema algebraico íntegro Y, sabemos que $\dim Y = \operatorname{trdeg}_k K(Y)$, de modo que la hipótesis se traduce en que el subcuerpo $k(f_1, \ldots, f_n) \subseteq K(X)$ tiene grado de trascendencia ≥ 1 sobre k. En consecuente, algún f_i es trascendente, digamos f_1 y, por tanto, el morfismo $f_1 \colon X \to \mathbb{A}_k^1$ es dominante. Ahora bien, todo morfismo no constante hacia una curva es plano y, por consiguiente, para todo $u \in \mathbb{A}_k^1$ tenemos la igualdad de dimensiones

$$\dim f_1^{-1}[\{u\}] = \dim X - 1.$$

Finalmente

$$\pi_2^{-1}[\{(-u, 1, 0, \ldots, 0)\}] = f_1^{-1}[\{u\}]. \qquad \square$$

Lema 9.58: Sea X un esquema algebraico irreducible sobre un cuerpo k con un k-morfismo $f \colon X \to \mathbb{A}_k^n$ tal que la proyección $\varphi := (f_1, \ldots, f_m) \colon X \to \mathbb{A}_k^m$ a las primeras $m \leq n$ coordenadas sea dominante. Entonces el morfismo

$$\begin{aligned} \psi \colon Z &\longrightarrow \mathbb{A}_k^{n+1} \times_k \mathbb{A}_k^m \\ (x, y_0, \ldots, y_n) &\longmapsto (y_0, \ldots, y_n, f_1(x), \ldots, f_m(x)) \end{aligned}$$

es dominante.

Demostración: Al igual que antes podemos suponer que k es algebraicamente cerrado. Como φ es dominante, combinándolo con planitud genérica, vemos que para casi todo punto racional $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{A}_k^m(k)$ su fibra

$$\varphi^{-1}[\{\boldsymbol{a}\}] = \{x \in X : \forall 1 \leq i \leq m \quad f_i(x) = a_i\}$$

tiene dimensión pura $\dim X - m$. Como $\dim Z - \dim(\mathbb{A}_k^{n+1} \times_k \mathbb{A}_k^{m-1}) = \dim X - m$, por semicontinuidad superior basta probar que existe una fibra de ψ con dimensión $\dim X - m$ para ver que ψ es dominante. Al igual que antes, se concluye pues

$$\psi^{-1}[\{(a_m, 0, \ldots, \underset{u_m}{-1}, \ldots, 0, \boldsymbol{a})\}] = \varphi^{-1}[\{\boldsymbol{a}\}]. \qquad \square$$

Teorema 9.59 – *Teorema de Bertini*: Sea X un esquema algebraico sobre un cuerpo infinito k y $f\colon X \to \mathbb{A}_k^n$ un k-morfismo. Se cumplen:

1. Si $\dim \overline{f[X]} = 0$, entonces casi todos los hiperplanos afines son vacíos.

2. Si $\dim \overline{f[X]} \geq 1$, entonces denotando por $X_1, \dots, X_r$ las componentes irreducibles de X, tenemos que las componentes irreducibles de $f^{-1}[H_u]$ son las de un único $f^{-1}[H_u] \cap X_i$, el cual es de dimensión pura $\dim(X_i) - 1$.

3. Si $\dim \overline{f[X]} \geq 2$ y X es geométricamente irreducible, entonces casi todo hiperplano afín también es geométricamente irreducible.

4. Supongamos que f no es ramificado o que $\operatorname{car} k = 0$. Si X es suave (resp. geométricamente reducido) sobre k, entonces casi todo hiperplano afín también es suave (resp. geométricamente reducido) sobre k.

Aquí el que el cuerpo sea infinito es para asegurar que los puntos racionales de la recta afín $\mathbb{A}_k^n(k)$ formen un subconjunto denso de $\mathbb{A}_k^n$, lo cual claramente falla si el cuerpo es finito.

Demostración:

1. Basta aplicar el primer lema 9.57 notando que los puntos de la imagen de $\pi_2\colon Z \to \mathbb{A}_k^{n+1}$ (que es un Zariski-cerrado propio) son tales que su fibra (que es un hiperplano afín) sea no vacía.

2. Denotemos por Z_i el gráfico de $(X_i, f|_{X_i})$ y denotemos, con abuso de notación, por $\pi_i := \pi_2|_{Z_i}$. Reordenemos las componentes X_i de modo que $\pi_1, \dots, \pi_m$ sean dominantes por el mismo lema 9.57, y que $\pi_{m+1}, \dots, \pi_n$ no; por el inciso anterior, podemos obviar estas componentes. Las afirmaciones restantes se siguen del corolario 6.53.1.

3. En primer lugar, recuérdese que el conjunto
$$G := \{y \in \mathbb{A}_k^{n+1} : \text{la fibra } Z_y \text{ es geométricamente irreducible}\}$$
es constructible, lo que significa que es la unión finita de conjuntos localmente cerrados. Así, si el punto genérico de $\mathbb{A}_k^{n+1}$ está en G, se comprueba que G es abierto.

Podemos suponer que X es reducido, por tanto es íntegro y, luego $Z \cong X \times_k \mathbb{A}_k^n$ y F también son esquemas íntegros. Recuérdese que el esquema íntegro Z es geométricamente irreducible syss $K(Z)$ y k^{sep} son linealmente disjuntos sobre k, lo cual basta para probar que F lo sea. Por el primer lema, vemos que $\dim \overline{f[X]} \geq 2$ implica que el morfismo

$$\Pi \colon Z \to \mathbb{A}_k^{n+2}, \qquad (x, \boldsymbol{y}) \mapsto (\boldsymbol{y}, f_1(x))$$

(quizá tras reordenar los f_j's) es dominante. Recordemos que la proyección $\pi_1 \colon Z \to X$ identifica $K(Z) = K(X)(y_1, \dots, y_n)$, donde $\boldsymbol{y}$ forma una base de trascendencia. Así, defínanse

$$K_0 := k(y_1, \dots, y_n) \subseteq K(y_0) =: K \subseteq K(f_1) =: L \subseteq K(Z).$$

Nuevamente, como Π es dominante, $\{y_0, \dots, y_n, f_1\}$ forman una base de trascendencia de L/k. Sean $\tilde{K} := K(Z) \cap K^{\mathrm{sep}}$ y $\tilde{L} := K(Z) \cap L^{\mathrm{sep}}$, entonces basta ver que $\tilde{K} = K$. Como $K(Z)$ es de tipo finito sobre k, entonces $\tilde{K}/K$ y $\tilde{L}/L$ son extensiones finitas. Definamos también para cada $c \in k$ el $K(X)$-automorfismo τ_c de $K(Z)$ inducido por

$$\tau_c(y_1) = y_1 + c, \qquad \forall 1 < j \leq n \quad \tau_c(y_j) = y_j.$$

De la identidad $y_0 + y_1 t_1 + \cdots + y_n f_n = 0$ concluimos que $\tau_c(y_0) = y_0 - c f_1$, de modo que se comprueba que L y $\tilde{L}$ son estables bajo τ_c. Así, defínase $M_c := L(\tau_c \tilde{K})$ el cual es una extensión finita separable de L al estar contenido en $\tilde{L}$; como $\tilde{L}/L$ es finita, entonces solo posee finitas subextensiones y, como k es infinito, existen $c_1 \neq c_2 \in k$ tales que $M_{c_1} = M_{c_2}$. Definiendo

$$\theta_j := \tau_{c_j}(y_0) = y_0 - c_j f_1,$$

obtenemos que $L = K_0(\theta_1, \theta_2)$ y, como $\operatorname{trdeg}_{K_0}(L) = 2$, se concluye que θ_1, θ_2 forman una base de trascendencia. Sea γ el elemento primitivo de $\tilde{K}/K$ y sean $\alpha_j := \tau_{c_j}(\gamma)$, entonces trivialmente

$$M := K_0(\theta_1, \theta_2, \alpha_1) = M_{c_1} = M_{c_2} = K_0(\theta_1, \theta_2, \alpha_2),$$

así α_j es separable sobre $K_0(\theta_j)$ resp.

En lo sucesivo diremos que la extensión F_2/F_1 es primaria si $F_2 \cap F_1^{\mathrm{sep}} = F_1$. Como $K(X)/k$ es primaria, entonces $K(Z) := K(X)(\boldsymbol{y})$ es primaria sobre $K_0 = k(\boldsymbol{y})$, por lo tanto, $K_0(\theta_1, \alpha_1)/K_0$ también es primaria. Como θ_2 es $K_0(\theta_1, \alpha_1)$-trascendente, entonces $M = K_0(\theta_1, \alpha_1, \theta_2)/K_0(\theta_2)$

es primaria. Pero $\alpha_2 \in M$ es separable sobre $K_0(\theta_2)$ así que, por definición de primaria

$$\tau_{c_2}(\gamma) = \alpha_2 \in K_0(\theta_2) = \tau_{c_2}[K].$$

Aplicando $\tau_{c_2}^{-1}$ a ambos lados vemos que $\gamma \in K$, por lo que $\tilde{K} = K(\gamma) = K$ como se quería probar.

4. Si X es suave, entonces es reducido y, por tanto, las componentes irreducibles son las componentes conexas. Pasando a estas, podemos suponer que X es íntegro. Sea F la fibra genérica de π_2, querremos ver que es una variedad suave sobre $k(t_0,\ldots,t_n) = K(\mathbb{A}_k^{n+1})$. Si $\operatorname{car} k = 0$, entonces basta probar que F es regular, lo que se sigue de que $Z \cong X \times_k \mathbb{A}_k^n$ sea regular y que los anillos locales de F lo son también de Z.

   Supongamos que f no es ramificado. Pasando a un abierto afín, podemos suponer que $X = \operatorname{Spec} A$, donde A es una k-álgebra íntegra, de tipo finito y formalmente suave de dimensión m. Así f viene inducido por el homomorfismo de anillos

$$f^\sharp\colon k[y_1,\ldots,y_n] \to A, \qquad y_i \mapsto f_i.$$

   Decir que f es no ramificado equivale a que $\Omega^1_{A/k[\boldsymbol{y}]} = 0$ (corolario 6.73.1), lo cual a su vez por el corolario 6.75.1 equivale a que el homomorfismo canónico

$$A \otimes_{k[\boldsymbol{y}]} \Omega^1_{k[\boldsymbol{y}]/k} \to \Omega^1_{A/k}, \qquad 1 \otimes \mathrm{d}y_j \mapsto \mathrm{d}f_j$$

   sea sobreyectivo, lo que equivale a que los $\mathrm{d}f_j$'s generen $\Omega^1_{A/k}$ el cual, como A es suave, es localmente libre de rango constante $m = \dim A$.

   En este contexto Z es el espectro de

$$A \otimes_k \frac{k[t_0,\ldots,t_n]}{(t_0 + t_1 f_1 + \cdots + t_n f_n)}$$

   mientras que la fibra genérica F de π es el espectro del dominio íntegro

$$B := \frac{A \otimes_k k(t_0,\ldots,t_n)}{(t_0 + t_1 f_1 + \cdots + t_n f_n)}$$

   de dimensión de Krull $m-1$. Sabemos que B es una $k(\boldsymbol{t})$-álgebra suave syss $\Omega^1_{B/k(\boldsymbol{t})}$ es localmente libre de rango $m-1$. Definiendo $L := k(\boldsymbol{t})$, vemos que F es un cerrado de X_L y, por el inciso 4 del teorema 6.66 obtenemos la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{array}{ccccccc} B & \longrightarrow & \dfrac{\Omega^1_{A\otimes_k L/L}}{(t_0+t_1f_1+\cdots+t_nf_n)} & \longrightarrow & \Omega^1_{F/L} & \longrightarrow & 0 \\ 1 & \longmapsto & t_1\,\mathrm{d}f_1+\cdots+t_n\,\mathrm{d}f_n. & & & & \end{array}$$

(Esto pues el ideal que determina a B es principal.) Por cambio de base sabemos que $\Omega^1_{A\otimes_k L/L} \simeq \Omega^1_{A/k} \otimes_k L$, por lo que hay un isomorfismo canónico

$$\Omega^1_{B/L} \cong B \otimes_{A\otimes_k L} \frac{\Omega^1_{A/k}\otimes_k L}{(t_1\,\mathrm{d}f_1+\cdots+t_n\,\mathrm{d}f_n)}.$$

Así pues, para verificar que $\Omega^1_{B/L}$ es localmente libre de rango $m-1$ basta mostrar que, en el B-módulo $M := B\otimes_{A\otimes_k L}(\Omega^1_{A/k}\otimes_k L)$, el submódulo generado $t_1f_1+\cdots+t_nf_n$ es un sumando directo.

Denotando por

$$P := \Omega^1_{A/k}\otimes_k k[\boldsymbol{t}]$$

el $k[\boldsymbol{t}]$-módulo localmente libre, basta probar que para todo primo $\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} A[\boldsymbol{t}]$ tal que

$$t_0+t_1f_1+\cdots+t_nf_n\in\mathfrak{p}, \qquad \mathfrak{p}\cap S=\varnothing, \qquad S:=k[\boldsymbol{t}]\smallsetminus\{0\},$$

la clase de $t_1\,\mathrm{d}f_1+\cdots+t_n\,\mathrm{d}f_n$ en $P_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}P_\mathfrak{p}$ es no nula. Supondremos, por contradicción, que no es el caso, que exista tal $\mathfrak{p}$ y sean $\mathfrak{q}:=\mathfrak{p}\cap A$ y $\Omega := \Omega^1_{A/k}$. Entonces, las clases $\mathrm{d}f_1/1,\dots,\mathrm{d}f_n/1$ de $\Omega_\mathfrak{q}$ forman un sistema generador y, quizá tras reordenar los f_j's, podemos suponer que $\overline{\mathrm{d}f_1},\dots,\overline{\mathrm{d}f_m}$ forman una $\Bbbk(\mathfrak{q})$-base de $\Omega_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}\Omega_\mathfrak{q}$. Empleando que

$$t_1\,\mathrm{d}f_1+\cdots t_n\,\mathrm{d}f_n\equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}\Omega_\mathfrak{q}}$$

y que los $\overline{\mathrm{d}f_j}$'s se expresan en términos de los primeros, concluimos que las clases $\overline{t_1},\dots,\overline{t_m}$ pertenecen al $\Bbbk(\mathfrak{q})$-espacio vectorial generado por $\overline{t_{m+1}},\dots,\overline{t_n}$. Así, deducimos que

$$\Bbbk(\mathfrak{p})=\Bbbk(\mathfrak{q})(\overline{t_1},\dots,\overline{t_n})=\Bbbk(\mathfrak{q})(\overline{t_{m+1}},\dots,\overline{t_n})$$

y, en particular, $\operatorname{trdeg}_{\Bbbk(\mathfrak{q})}\Bbbk(\mathfrak{p})\le n-m$. Ahora bien

$$\begin{aligned}\operatorname{trdeg}_{\Bbbk(\mathfrak{q})}\Bbbk(\mathfrak{p}) &= \operatorname{trdeg}_k\Bbbk(\mathfrak{p})-\operatorname{trdeg}_k\Bbbk(\mathfrak{q}) = k.\dim(A[\boldsymbol{t}]/\mathfrak{p})-k.\dim(A/\mathfrak{q})\\ &= (n+1+m-\operatorname{alt}\mathfrak{p})-(m-\operatorname{alt}\mathfrak{q}) = n+1+\operatorname{alt}\mathfrak{q}-\operatorname{alt}\mathfrak{p}.\end{aligned}$$

Como $\mathfrak{p}$ es disjunto de S, entonces la localización $A[\boldsymbol{t}]_\mathfrak{p}$ es también una localización (geométricamente, un abierto) de $A\otimes_k k(\boldsymbol{t})$, el cual tiene dimensión m; de modo que $\operatorname{alt}\mathfrak{p} \leq m$, lo que nos conlleva a la contradicción:

$$n + 1 - m + \operatorname{alt}\mathfrak{q} \leq n - m.$$

Si X es geométricamente reducido, basta aplicar suavidad genérica. □

Veamos un par de usos del teorema de Bertini a encajes proyectivos:

Teorema 9.60 (Fulton-Hansen): Sea X un esquema completo geométricamente irreducible sobre un cuerpo k y sea $f\colon X \to (\mathbb{P}_k^n)^r$ un k-morfismo. Si $\dim X > (r-1)n$, entonces el k-esquema $f^{-1}[\Delta]$ es no vacío y geométricamente conexo, donde $\Delta \subseteq (\mathbb{P}_k^n)^r$ denota la diagonal.

Corolario 9.60.1: Sean $X_1, \ldots, X_r$ un conjunto de esquemas completos geométricamente irreducibles sobre un cuerpo k y sean $f_j\colon X_j \to \mathbb{P}_k^n$ un conjunto de k-morfismos. Si

$$\dim f_1[X_1] + \cdots + \dim f_r[X_r] > (r-1)n,$$

entonces el k-esquema

$$X_1 \times_{\mathbb{P}^n} X_2 \times_{\mathbb{P}^n} \cdots \times_{\mathbb{P}^n} X_r$$

es geométricamente conexo y no vacío.

Teorema 9.61: Sea X un esquema completo geométricamente irreducible sobre un cuerpo k y sea $f\colon X \to \mathbb{P}_k^n$ un k-morfismo no ramificado. Si $\dim X > n/2$, entonces f es un encaje cerrado.

9.4 Amplitud y encajes hacia esquemas proyectivos

Definición 9.62: Sea $f\colon X \to S$ un morfismo de tipo finito. Un haz invertible $\mathscr{L}$ sobre X se dice ***f*-amplio** (o ***amplio relaivo a* *f***, o ***S*-amplio**) si para todo abierto afín $U \subseteq S$ el haz $\mathscr{L}|_{f^{-1}[U]}$ es amplio sobre $f^{-1}[U]$.

En esta sección, si quieremos decir que $\mathscr{L}$ es amplio en el sentido antiguo, diremos que es *absolutamente amplio*; esto equivale a ser $\mathbb{Z}$-amplio.

En primer lugar, mejoramos el teorema 5.55 de Serre:

Teorema 9.63: Sea X un esquema de tipo finito sobre S, y sea $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo invertible.

1. Si $\mathscr{L}$ es f-muy amplio, entonces $\mathscr{L}$ es f-amplio.
2. Supongamos que S es compacto, entonces son equivalentes:
   a) $\mathscr{L}$ es f-amplio.
   b) Existe un $n > 0$ suficientemente grande tal que $\mathscr{L}$ es f-muy amplio.
   c) Para todo $\mathscr{O}_X$-módulo invertible $\mathscr{M}$ existe $n_0 > 0$ tal que $\mathscr{M} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ es f-muy amplio para todo $n \geq n_0$.

Demostración:

1. Podemos suponer que S es afín, de modo que se sigue del teorema 5.55 de Serre.
2. Nuevamente, podemos suponer que S es afín y ahora resulta un ejercicio de agrupar todas nuestras equivalencias. $\square$

Una consecuencia del teorema anterior y del lema de comunicación afín es:

Proposición 9.64: Sea $f\colon X \to S$ un morfismo de tipo finito y sea $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo invertible. Entonces $\mathscr{L}$ es f-amplio syss existe un cubrimiento por abiertos afines $\{U_i\}_i$ de S tales que cada $\mathscr{L}|_{f^{-1}[U_i]}$ es absolutamente amplio.

En particular, si S es afín, entonces $\mathscr{L}$ es f-amplio syss es absolutamente amplio.

Proposición 9.65: Sea $f\colon X \to S$ un morfismo de tipo finito y $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo invertible. Si $\mathscr{L}$ es f-amplio, entonces para todo S-esquema $g\colon T \to S$ se cumple que $(g_X)^*\mathscr{L}$ es amplio relativo al cambio de base $f_T\colon X \times_S T \to T$.

Demostración: Por la proposición anterior, podemos suponer que S, T son afines; de modo que g y, su cambio de base, g_X son morfismos afines. Luego, si $f \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes d})$ es tal que X_f es afín, entonces $(g_X)^{-1}[X_f] = Y_{(g_X)^*(f)}$, donde $Y := X \times_S T$. Finalmente, esto implica que $(g_X)^*\mathscr{L}$ es amplio por la equivalencia 4 de la proposición 5.64. $\square$

Lema 9.66.A: Sea X un esquema compacto y sea $u\colon \mathscr{G} \to \mathscr{F}$ un morfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos cuasicoherentes. Si $\mathscr{F}$ es finitamente generado y $\mathscr{G}$ es el límite filtrado de los $\mathscr{O}_X$-módulos cuasicoherentes $\{\mathscr{G}_i\}_{i\in I}$. Entonces u es un epimorfismo syss existe $j \in I$ tal que $u_j : \mathscr{G}_j \to \mathscr{F}$ es un epimorfismo.

Demostración: $\Longleftarrow$. Trivial.

$\Longrightarrow$. Como las afirmaciones son locales, podemos suponer que $X = \operatorname{Spec} A$ es afín. A través de $\Gamma(X, -)$ se traduce en que un homomorfismo de A-módulos $\varphi \colon M \to N$, con $M = \varinjlim_{i\in I} M_i$, sea sobreyectivo syss algún $\varphi_j : M_j \to N$ lo sea. Como N es finitamente generado, sean $v_1, \dots, v_n \in N$ un sistema generador. Como cada $v_\ell \in \operatorname{Img} \varphi$, sea $i(\ell) \in I$ tal que $v_\ell \in \operatorname{Img}(\varphi_{i(\ell)})$. Como el diagrama $\{M_i\}_{i\in I}$ es filtrado, sea $j \geq i(\ell)$ para cada ℓ; claramente φ_j es sobreyectivo. □

Proposición 9.66: Sea X compacto y cuasiseparado, sea $U \subseteq X$ un abierto compacto y sea $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_X$-modulo cuasicoherente. Para todo $\mathscr{O}_U$-submódulo cuasicoherente finitamente generado $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{G}|_U$ existe un $\mathscr{O}_X$-submódulo cuasicoherente finitamente generado $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$ tal que $\mathscr{F}|_U = \mathscr{F}'$.

Demostración: Definamos $\overline{\mathscr{F}}$ como

$$\Gamma(V, \overline{\mathscr{F}}) = \{s \in \Gamma(V, \mathscr{G}) : s|_{U\cap V} \in \Gamma(U \cap V, \mathscr{F}')\}.$$

Denotando por $\iota \colon U \hookrightarrow X$ el encaje abierto, entonces $\overline{\mathscr{F}}$ es la preimagen de $\iota_* \mathscr{F}'$ mediante el morfismo canónico $\mathscr{G} \to \iota_* \iota^* \mathscr{G}$, por lo que es cuasicoherente y satisface que $\overline{\mathscr{F}}|_U = \mathscr{F}'$.

(i) Si $X = \operatorname{Spec} A$ es afín: Entonces $\overline{\mathscr{F}} = \widetilde{N}$ para algún A-submódulo de $\Gamma(X, \mathscr{G})$. Escribamos a $N = \bigcup_{i\in I} N_i$, donde N_i son sus submódulos finitamente generados. Como $\overline{\mathscr{F}}|_U = \mathscr{F}'$, el lema anterior dice que existe j tal que $\widetilde{N_j}|_U = \mathscr{F}'$ como se quería probar.

(ii) En el caso general, sea $X = \bigcup_{\alpha=1}^m V_\alpha$ un cubrimiento por finitos abiertos afines. Sean $W_\alpha := \bigcup_{\beta\leq\alpha} V_\beta$ y $U_\alpha := U \cap W_\alpha$. Denotando $\mathscr{F}_0 := \mathscr{F}'$ podemos probar por inducción que existen $\mathscr{O}_{U_\alpha}$-módulos cuasicoherentes finitamente generados $\mathscr{F}_\alpha$ tales que $\mathscr{F}_\alpha|_{U_\beta} = \mathscr{F}_\beta$ para todo $0 \leq \beta < \alpha$.

La hipótesis inductiva lo reduce a probarlo para $X = U \cup V$, donde V es un abierto afín. Como podemos pegar $\mathscr{O}_X$-módulos basta probar que existe un $\mathscr{O}_V$-submódulo cuasicoherente finitamente generado $\mathscr{F}'' \subseteq \mathscr{G}|_V$ tal que $\mathscr{F}''|_{U\cap V} = \mathscr{F}'|_U$, lo cual está cubierto por el paso anterior.

□

Note que una desventaja de la demostración, no evitable, es que la construcción de $\mathscr{F}$ no es funtorial ni explícita.

Corolario 9.66.1: Sea X compacto y cuasiseparado, y sea $U \subseteq X$ un abierto compacto (e.g. X noetheriano). Dado un $\mathscr{O}_U$-módulo cuasicoherente finitamente generado $\mathscr{F}'$, existe un $\mathscr{O}_X$-módulo cuasicoherente finitamente generado $\mathscr{F}$ tal que $\mathscr{F}|_U \cong \mathscr{F}'$.

Corolario 9.66.2: Sea X compacto y cuasiseparado. Todo $\mathscr{O}_X$-módulo cuasicoherente es el límite filtrado de sus $\mathscr{O}_X$-submódulos cuasicoherentes finitamente generados.

Lema 9.67.A: Sea X un esquema compacto y cuasiseparado. Son equivalentes:

1. Existe un encaje abierto $X \hookrightarrow Y$, donde Y es afín.

1′ El morfismo canónico $X \to \operatorname{Spec} \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ es un encaje abierto compacto esquemáticamente dominante.

2. El haz estructural $\mathscr{O}_X$ es (absolutamente) amplio.
3. Cada $\mathscr{O}_X$-módulo inversible es amplio.

Demostración: 1 $\implies$ 2. En un esquema afín Y se cumple que $\mathscr{O}_Y$ es amplio. Como X es compacto, entonces el encaje $i\colon X \hookrightarrow Y$ es compacto también, por lo que $i^*\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_X$ es amplio.

2 $\implies$ 3. Sabemos que $\mathscr{O}_X^{\otimes n} = \mathscr{O}_X$, de modo que la equivalencia de «ser amplio» prueba que todo $\mathscr{O}_X$-módulo inversible $\mathscr{L}$ es ($\mathbb{Z}$-)muy amplio y, luego es amplio. La implicancia «3 $\implies$ 2» es trivial.

2 $\implies$ 1′ $\implies$ 1. Basta notar que, como $\mathscr{O}_X$ es amplio, entonces tenemos un encaje abierto

$$X \hookrightarrow \operatorname{Proj}\left(\bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(X, \mathscr{O}_X^{\otimes(nd)}) \right) = \operatorname{Proj}\big(\Gamma(X, \mathscr{O}_X)[t]\big) = \operatorname{Spec}\Gamma(X, \mathscr{O}_X),$$

donde t es una indeterminada. □

Definición 9.67: Un esquema X se dice ***cuasiafín*** si satisface las condiciones del lema anterior. Un morfismo de esquemas $f\colon X \to S$ se dice ***cuasiafín*** si existe un cubrimiento por afines $\{U_i\}_{i \in I}$ de S tal que cada $f^{-1}[U_i]$ es cuasiafín.

Ejemplo. Es claro que todo morfismo cuasiafín es cuasiproyectivo y que todo morfismo afín es cuasiafín, pero la propiedad 4 prueba que un esquema proyectivo X sobre un cuerpo k solo es cuasiafín cuando tiene dimensión 0.

Proposición 9.68: Sea X compacto y cuasiseparado. Son equivalentes:

1. X es cuasiafín.
2. Existe un $\mathscr{O}_X$-módulo inversible $\mathscr{L}$ tal que $\mathscr{L}, \mathscr{L}^{-1}$ son (absolutamente) amplios.
3. Todo $\mathscr{O}_X$-módulo cuasicoherente es globalmente generado.

DEMOSTRACIÓN: $3 \implies 1 \iff 2$. Trivial. Veamos $1 \implies 3$, como $\mathscr{O}_X$ es amplio, entonces cada $\mathscr{O}_X$-módulo cuasicoherente finitamente generado es globalmente generado, y como todo $\mathscr{O}_X$-módulo cuasicoherente es el límite filtrado de sus submódulos finitamente generados (corolario 9.66.2), entonces también es globalmente generado. $\square$

Corolario 9.68.1: Un morfismo de tipo finito $f : X \to S$ es cuasiafín syss $\mathscr{O}_X$ es f-amplio.

Corolario 9.68.2: Un morfismo de esquemas es finito syss es propio y cuasiafín.

DEMOSTRACIÓN: Basta probar «$\Longleftarrow$»: si $f : X \to Y$ es propio y cuasiafín, como «ser finito» es Zariski-local, podemos suponer que Y es afín y X es cuasiafín. Definiendo $A := \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$, podemos factorizar f como la composición de un encaje esquemáticamente dominante $j : X \hookrightarrow \operatorname{Spec} A$ y $g : \operatorname{Spec} A \to Y$. Como f es propio, entonces j también, por lo que es un isomorfismo. Así que X es afín y, por tanto, f es propio y afín, luego es finito. $\square$

Empleando lo anterior podemos dar un refinamiento del teorema de normalización de Noether:

Teorema 9.69: Sea k un cuerpo infinito y sea X un esquema proyectivo sobre k de $\dim X =: d$. Entonces existe un morfismo finito suprayectivo $\pi : X \twoheadrightarrow \mathbb{P}^d_k$.

Demostración: Nótese que construyendo un morfismo finito suprayectivo $X \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n_k$ inmediatamente tendremos que $n = d$.

Como X es proyectivo existe un encaje cerrado $f\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$, que es por tanto un k-morfismo finito. Probaremos la afirmación por inducción descendiente sobre n. Si f es suprayectivo, entonces estamos listos. Si no, $\operatorname{Img} f$ es un subesquema cerrado propio de $\mathbb{P}^n_k$ y, como k es infinito, existe un punto k-racional $q \in \mathbb{P}^n(k)$ tal que no está contenido en $\operatorname{Img} f$ (por que no hay un polinomio homogéneo que se anule en todo $\mathbb{P}^n(k)$). Sea $\pi_q\colon \mathbb{P}^n_k \setminus \{q\} \to P' \cong \mathbb{P}^{n-1}_k$ la proyección con centro q, entonces $\pi_q|_{\operatorname{Img} f}$ es un morfismo finito por la proposición anterior y, luego, $f \circ \pi_q\colon X \to \mathbb{P}^{n-1}_k$ es finito como se quería probar. □

9.5 Explosiones

Definición 9.70: Sea X un esquema y sea $Z \subseteq X$ un subesquema cerrado propio (distinto de $\varnothing, X$). Una ***explosión***[a] de X con ***centro*** Z es un X-esquema $\pi\colon \tilde{X} \to X$ tal que $\pi^{-1}[Z]$ es un divisor efectivo de Cartier de $\tilde{X}$ con la propiedad universal de que si $g\colon Y \to X$ es otro X-esquema tal que $g^{-1}[Z] \in \operatorname{CaDiv}^+ Y$, entonces existe un único X-morfismo $Y \to \tilde{X}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\exists!"] \arrow[dr, "g"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Al divisor $\pi^{-1}[Z]$ se le llama ***divisor excepcional***.

[a] eng. *blow-up*. Grothendieck y Dieudonné [**EGA II**] emplean la expresión *(pré)schéma éclaté*.

Teorema 9.71: Sea X un esquema y $Z \subseteq X$ un subesquema cerrado propio. Entonces existe un único X-esquema (salvo isomorfismo en Sch/X) que es una explosión con centro Z, y lo denotamos $\operatorname{Bl}_Z(X)$.

Demostración: Sea $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{O}_X$ el haz cuasicoherente de ideales tal que $Z = \mathbf{V}(\mathscr{I})$. Denotaremos $\mathscr{I}^d$ la d-ésima potencia (como haz) de $\mathscr{I}$, donde $\mathscr{I}^0 := \mathscr{O}_X$. Entonces $\mathscr{B} := \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathscr{I}^d$ es una $\mathscr{O}_X$-álgebra graduada cuasicoherente generada (globalmente) en grado 1. Definimos $\tilde{X} := \mathbf{Proj}_X(\mathscr{B})$ y denotamos $E := \pi^{-1}[Z]$. Probaremos que $\tilde{X}$ es una explosión: nótese que la propiedad universal puede verificarse localmente en un abierto afín.

Supongamos que $X = \operatorname{Spec} A$ es afín. Sea $Z = \mathbf{V}(\mathfrak{a})$, donde $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$. Entonces, en éste contexto, $B := \bigoplus_{d\geq 0} \mathfrak{a}^d$ es una A-álgebra gradudada[3] tal que $\tilde{X} = \operatorname{Proj} B$. Describamos $\tilde{X}$ localmente; sea $f \in \mathfrak{a}$ y sea $A[\mathfrak{a}/f]$ la A-subálgebra de $A[1/f]$ generada por elementos de la forma a/f con $a \in \mathfrak{a}$. Identificando $a, f \in B_1$, entonces a/f puede considerarse un elemento de grado 0 en $B[1/f]$, de modo que obtenemos un A-isomorfismo canónico $A[\mathfrak{a}/f] \xrightarrow{\sim} B_{(f)}$. Así, recorriendo $f \in \mathfrak{a}$, vemos que los $\mathbf{D}_+(f) = \operatorname{Spec}(A[\mathfrak{a}/f])$'s forman un cubrimiento por abiertos afines de $\tilde{X}$.

Si $\{a_i\}_{i\in I}$ es un sistema generador de $\mathfrak{a}$, entonces tenemos un epimorfismo de A-álgebras

$$\begin{aligned} \frac{A[\{t_i\}_i]}{(\{ft_i - a_i : i \in I\})} &\longrightarrow A[\mathfrak{a}/f] \\ [t_i] &\longmapsto a_i/f \end{aligned}$$

y los elementos de su núcleo son precisamente aquellos aniquilados por una potencia de f.

El ideal $\mathfrak{a}A[\mathfrak{a}/f]$ está generado por $f \in A[\mathfrak{a}/f]$, el cual no es divisor de cero. Así, si $\varphi\colon A \to C$ es otra A-álgebra tal que $\varphi(f)$ es regular y genera $\varphi[\mathfrak{a}]C = \mathfrak{a}^e$, entonces existe un único homomorfismo de A-álgebras $A[\mathfrak{a}/f] \to C$ que manda a/f al único $c \in C$ tal que $\varphi(f)c = \varphi(a)$. En conclusión, $\tilde{X}$ es la explosión de A con centro $\mathbf{V}(\mathfrak{a})$ como se quería probar. □

Más generalmente, en la construcción, el divisor excepcional es el subesquema cerrado dado por

$$E = \operatorname{Proj}\left(\bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathscr{I}^d/\mathscr{I}^{d+1}\right).$$

De la construcción se siguen:

Proposición 9.72: Sea X un esquema y $Z \subseteq X$ un subesquema cerrado dado por el haz cuasicoherente de ideales $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{O}_X$. Se cumplen:

1. Si $\mathscr{I}$ es finitamente generado (e.g., si X es localmente noetheriano), entonces $\operatorname{Bl}_Z(X)$ es proyectivo sobre X y $\mathscr{I}\mathscr{O}_{\tilde{X}} = \mathscr{O}_{\tilde{X}}(1)$ es muy amplio resp. a π.

[3]De hecho, los escritos más actuales de álgebra conmutativa llaman al $\bigoplus_{d\geq 0} \mathfrak{a}^d$ la A-álgebra de explosión, o álgebra de Rees.

2. Si $j\colon Y \hookrightarrow X$ es otro subesquema cerrado, entonces el morfismo (dado por la propiedad universal) $\mathrm{Bl}_Z(j)\colon \mathrm{Bl}_{Y\cap Z}(Y) \to \mathrm{Bl}_Z(X)$ es un encaje cerrado.

Demostración:

1. Ejercicio para el lector.

2. Sea $Y = \mathbf{V}(\mathscr{J})$. Entonces el subesquema cerrado $Y \cap Z$ está definido por el haz cuasicoherente de ideales $(\mathscr{I} + \mathscr{J})/\mathscr{J}$ en $\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_X/\mathscr{J}$. Así $\mathrm{Bl}_Z(j)$ viene inducido por homomorfismo

$$\bigoplus_{d\geq 0} \mathscr{I}^d \twoheadrightarrow \bigoplus_{d\geq 0} ((\mathscr{I} + \mathscr{J})/\mathscr{J})^d$$

suprayectivo de $\mathscr{O}_X$-álgebras graduadas y, por tanto, es un encaje cerrado. □

Definición 9.73: Sea X un esquema y $Z \subset X$ un subesquema cerrado. Dado Y otro subesquema cerrado que no esté contenido en Z, entonces $\mathrm{Bl}_{Y\cap Z}(Y)$ se le llama la ***transformada estricta*** de Y respecto a la explosión $\mathrm{Bl}_Z(X)$.

Proposición 9.74: Sea X un esquema, $Z \subseteq X$ un subesquema cerrado propio, $\pi\colon \mathrm{Bl}_Z(X) \to X$ la explosión y sea $f\colon Y \to X$ otro X-esquema.

1. Existe un único X-morfismo $\mathrm{Bl}_Z(f)\colon \mathrm{Bl}_{f^{-1}[Z]}(Y) \to \mathrm{Bl}_Z(X)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Bl}_{f^{-1}[Z]}(Y) \arrow[r, "\mathrm{Bl}_Z(f)"] \arrow[d] & \mathrm{Bl}_Z(X) \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd} \tag{9.3}$$

2. Si f es plano, entonces $\mathrm{Bl}_{f^{-1}[Z]}(Y) \cong \mathrm{Bl}_Z(X) \times_X Y$.

3. Sea $U \subseteq X \setminus Z$ el subesquema abierto. Entonces la restricción $\pi^{-1}[U] \xrightarrow{\sim} U$ es un isomorfismo.

4. Sea $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{O}_X$ el haz de ideales cuasicoherente tal que $Z = \mathbf{V}(\mathscr{I})$ y supongamos que para cada abierto afín $V \subseteq X$ el anillo $\Gamma(V, \mathscr{I})$ contiene un elemento regular (e.g., si X íntegro). Entonces π es birracional.

Demostración:

1. Se sigue inmediato de la propiedad universal de las explosiones.
2. Sea $\tilde{Y} := \mathrm{Bl}_Z(X) \times_X Y$ y sea $p\colon \tilde{Y} \to \mathrm{Bl}_Z(X)$ la proyección, la cual es plana por cambio de base. Por la propiedad universal del producto fibrado, tenemos un morfismo $r\colon \mathrm{Bl}_{f^{-1}[Z]}(Y) \to \tilde{Y}$. Sea $E := \pi^{-1}[Z]$ el divisor excepcional en $\mathrm{Bl}_Z(X)$; luego $E' := p^{-1}[E]$ es un divisor efectivo de Cartier (cfr., proposición 8.30) y E' es la imagen inversa de $f^{-1}[Z]$ por la proyección $\tilde{Y} \to Y$. Así, por la propiedad universal, tenemos un morfismo $s\colon \tilde{Y} \to \mathrm{Bl}_{f^{-1}[Z]}(Y)$ y es fácil comprobar que es la inversa de r.
3. Basta notar que los encajes abiertos son planos para emplear el inciso anterior, con $\mathrm{Bl}_\varnothing(U) = U$.
4. Es una aplicación del inciso anterior, notando que la hipótesis se traduce en que U (y $\pi^{-1}[U]$) sean esquemáticamente densos. □

Corolario 9.74.1: Sea X un esquema íntegro y sea $\varnothing \neq Z \subset X$ un subesquema cerrado definido por el haz de ideales $\mathscr{I}$ el cual es finitamente generado (e.g., si X es localmente noetheriano). Se cumplen:

1. $\mathrm{Bl}_Z(X)$ es un esquema íntegro y el morfismo estructural $\pi\colon \mathrm{Bl}_Z(X) \to X$ es birracional, proyectivo y suprayectivo.
2. En particular, si X es una variedad sobre un cuerpo k, entonces $\mathrm{Bl}_Z(X)$ también es una variedad sobre k.
3. Más aún, si X es cuasiproyectivo (resp. proyectivo) sobre k, entonces $\mathrm{Bl}_Z(X)$ también es cuasiproyectivo (resp. proyectivo) sobre k.

Demostración: Nótese que todo se sigue del inciso 1. Sea $U := X \setminus Z$, entonces U es esquemáticamente denso pues es abierto y no vacío en un espacio topológico irreducible, y $\pi^{-1}[U]$ es el complemento de un divisor efectivo de Cartier, por lo que es esquemáticamente denso en $\mathrm{Bl}_Z(X)$. Así π es birracional.

El morfismo π es proyectivo por una proposición anterior y, en particular, es cerrado, por lo que es suprayectivo. Como $\pi^{-1}[U] \cong U$ es irreducible y denso, $\mathrm{Bl}_Z(X)$ es irreducible. Sea $V \subseteq X$ un abierto afín, entonces $B_V := \Gamma(V, \bigoplus_{d\geq 0} \mathscr{I}^d)$ es un dominio íntegro y, por lo tanto, para todo $f \in B_{V,+}$ homogéneo, vemos que el abierto principal $\mathbf{D}_+(f) \subseteq \mathrm{Bl}_Z(X)$ es íntegro, por lo que los anillos locales de $\mathrm{Bl}_Z(X)$ son íntegros y, como es un esquema conexo, entonces $\mathrm{Bl}_Z(X)$ es íntegro. □

Teorema 9.75: Sea X un esquema localmente noetheriano tal que existe un haz amplio sobre X (e.g., si X es cuasiproyectivo sobre un esquema afín). Dado un morfismo proyectivo birracional $f\colon X' \to X$, donde X' es un esquema íntegro, entonces existe un subesquema cerrado Z tal que $X' \cong \mathrm{Bl}_Z(X)$ (en Sch/X).

Teorema 9.76: Sea X un esquema localmente noetheriano regular y sea $\pi\colon \tilde{X} \to X$ la explosión de X cuyo centro sea un subesquema cerrado regular $Z = \mathbf{V}(\mathscr{I})$. Se satisfacen:

1. $\tilde{X}$ es regular.
2. Para todo punto $x \in X$, la fibra $\tilde{X}_x$ es isomorfa a $\mathbb{P}^{r-1}_{\Bbbk(x)}$, donde $r := \dim_x X - \dim_x Y$.
3. Sea $E := \pi^{-1}[Z]$ el divisor excepcional, entonces el encaje cerrado $E \hookrightarrow \tilde{X}$ es un encaje regular. Además si X es afín y $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ es libre de rango r sobre Z, entonces
$$E \cong \mathbb{P}^{r-1}_Z, \qquad \omega_{E/\tilde{X}} \simeq \mathscr{O}_E(1).$$

§9.5.1 Compactificaciones. En éste sección seguimos la exposición de B. Conrad **[22]**. La palabra *compactificación* en geometría algebraica debe recibirse «con un grano de sal» puesto que en un esquema irreducible todo abierto es topológicamente compacto. En su lugar, el simil apropiado de las variedades analíticas compactas son los esquemas propios. En un análisis minucioso de la demostración de Nagata, nueva luz fue arrojada a la teoría de explosiones.

Definición 9.77: Sea X un esquema y $U \subseteq X$ un abierto. Una ***explosión U-admisible*** es un X-esquema de la forma $\mathrm{Bl}_Z(X)$, donde $Z = \mathbf{V}(\mathscr{I})$ es un subesquema cerrado de X disjunto a U tal que $\mathscr{I}$ es finitamente generado (e.g., si X es localmente noetheriano).

Teorema 9.78: Sea S un esquema compacto y cuasiseparado, sea X un esquema compacto y cuasiseparado sobre S e Y un esquema propio sobre S. Dado un abierto denso compacto $U \subseteq X$ y un S-morfismo $f\colon U \to Y$, existe una explosión U-admisible $\pi\colon \tilde{X} \to X$ y un S-morfismo $\tilde{f}\colon \tilde{X} \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& \widetilde{X} \arrow[ddl, bend right, "\pi"'] \arrow[ddr, bend left, "\exists \tilde{f}"] & \\
& U \arrow[u, hook, "\circ"] \arrow[dl, hook', "\circ"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X \arrow[rr, dashed, "f"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

§9.5.2 Criterio de amplitud de Seshadri. Un uso interesante de explosiones resulta en otro criterio de amplitud.

Definición 9.79: Sea X un esquema propio sobre un cuerpo k. Un haz invertible $\mathscr{L}$ (o un divisor) se dice ***nef***[a] si $(\mathscr{L}.C) \geq 0$ para toda curva íntegra $C \subseteq X$. Se dice que $\mathscr{L}$ es ***numéricamente trivial*** si $(\mathscr{L}.C) = 0$ para toda curva íntegra $C \subseteq X$; y dos divisores $D_1, D_2 \in \operatorname{CaDiv} X$ se dicen ***numéricamente equivalentes*** si $D_1 - D_2$ es numéricamente trivial.

[a] Abreviación de *numéricamente efectivo*. El término fue sugerido por M. Reid y es empleado en casi toda la literatura.

El criterio de Nakai-Moishezon dice que D es amplio syss $(D.C) > 0$ para toda curva íntegra.

Teorema 9.80 (Kleiman): Sea X un esquema propio sobre un cuerpo k. Un haz invertible $\mathscr{L}$ sobre X es nef syss $(D^r.Y) \geq 0$ para todo subesquema cerrado íntegro $Y \subseteq X$ de dimensión $r \leq \dim X$.

Demostración: $\Longleftarrow$. Trivial.

$\Longrightarrow$. Por simplicidad, escribiremos la demostración para $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X(D)$. Sea $Y \subseteq X$ un cerrado íntegro, el cual es también propio sobre k, entonces sustituyendo X, D por $Y, D|_Y$; podemos restringirnos a probar que $(D^d.X) \geq 0$, donde $d = \dim X$ y donde X es íntegro. Más aún, podemos suponer que X es proyectivo, puesto que, por el lema de Chow, existe un morfismo birracional suprayectivo $\pi\colon X' \to X$ donde X' es íntegro y proyectivo sobre k, y donde $E := \pi^* D$ satisface $(E^d.X') = (D^d.X)$. Procedemos por inducción Revisar cálculo.
sobre d; nótese que $d = 0$ es trivial.

Supongamos que $\dim X > 0$. Como X es proyectivo, sea H un divisor muy amplio y sean $m_i := (H^i.D^{d-i})$. Entonces como H es amplio, el criterio de Nakai-Moishezon dice que $m_d > 0$ y la hipótesis inductiva implica que

$m_i \geq 0$ para $1 \leq i < d$. Queremos probar que $m_0 \geq 0$ y procederemos por contradicción.

Sea $F := aD + bH$ y sea

$$P(t) := m_0 + \binom{n}{1} m_1 t + \cdots + \binom{n}{n-1} m_{n-1} t^{n-1} + m_n t^n \in \mathbb{Z}[t].$$

Entonces, por multilinealidad del símbolo de intersección

$$(F^n) = a^n (D^n) + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 (D^{n-1}.H) + \cdots + b^n (H^n) = a^n P(b/a).$$

Nótese que $P(t)$ es estrictamente creciente, puesto que es suma de crecientes, y como $P(0) = m_0 < 0$, entonces existe un único $t_0 > 0$ tal que $P(t) > 0$ para todo $t > t_0$.

Afirmamos que F es amplio para todo $a, b \in \mathbb{N}_{>0}$ tales que $b/a > t_0$, puesto que para todo cerrado íntegro $Y \subset X$ de $\dim Y = r < d$ tenemos que

$$(F^r.Y) = a^r (D^r.Y) + \binom{r}{1} a^{r-1} b (D^{r-1}.H.Y) + \cdots + b^r (H^r.Y) > 0,$$

donde $(D^{r-i}.H^i.Y) \geq 0$ para todo $i < r$ por inducción y $(H^r.Y) > 0$ puesto que H es amplio. Reemplazando F por nF para un $n > 0$ suficientemente grande, podemos suponer que F es muy amplio.

Así, nótese que $(D.F^{d-1}) \geq 0$ (puesto que, como F es muy amplio, F^{d-1} está representado por una curva en X). Considere los polinomios:

$$Q(t) := m_0 + \binom{d-1}{1} m_1 t + \cdots + m_{d-1} t^{d-1}, \quad R(t) := m_1 t + \binom{d-1}{1} m_2 t^2 + \cdots + m_d t^d.$$

Nótese que $P(t) = Q(t) + R(t)$. Finalmente, para todo $a, b \in \mathbb{N}_{>0}$ tales que $b/a > t_0$ se nota que $(D.F^{d-1}) = a^{d-1} Q(b/a) \geq 0$ y, por continuidad, $Q(t) \geq 0$ para todo $t > t_0$. Además $R(t) > 0$ para todo $t > 0$ pues todos sus coeficientes son positivos y $m_n > 0$, así que

$$0 = P(t_0) = Q(t_0) + R(t_0) > 0,$$

lo que es absurdo. □

Teorema 9.81 (criterio de amplitud de Seshadri): Sea X un esquema propio sobre un cuerpo y sea $\mathscr{L}$ un haz invertible sobre X. Entonces $\mathscr{L}$ es amplio syss existe $\epsilon > 0$ tal que $(\mathscr{L}.C) \geq \epsilon m(C)$ para toda curva íntegra $C \subseteq X$.

Notas históricas

El teorema de Fulton-Hansen como corolario de Bertini fue probado en **[32]** (1979).

El *teorema de compactificación de Nagata* fue originalmente demostrado por Nagata en **[34]** (1962) y **[35]** (1963). En los artículos originales de Nagata, él emplea el lenguaje de variedades de Zariski-Weil, y en el segundo señala que su demostración no es traducible en el lenguaje esquemático; años más tarde Brian Conrad escuchó rumores de que ciertos geómetras dudaban de la validez del resultado, y al preguntarle a P. Deligne por su visión al respecto, éste preparó unas notas reescribiendo la prueba de Nagata y, notando además, que de hecho podía reljarse la hipótesis de noetherianidad por compacto y cuasiseparado.

Parte III.

Geometría de variedades

10

El sitio étale

En la sección §8.5 ya vimos la introducción a las conjeturas de Weil y vimos dos soluciones, la primera en la misma sección mediante métodos de conteo de Bombieri-Stepanov y la segunda adaptando la demostración original de Weil (vid., §14.1.1). Las llamadas ***conjeturas de Weil*** forman una generalización del caso de curvas y fueron un elemento determinante para el desarrollo de la geometría algebraica en los años sucesivos. He aquí el enunciado.

Sea $X/\mathbb{F}_q$ una variedad proyectiva, suave y geométricamente irreducible de dimensión d sobre un cuerpo finito. Definiendo las funciones $\zeta(X,s)$ de Hasse-Weil y $Z(X,t)$ (como en §8.5) las conjeturas son las siguientes:

CW1. **Racionalidad:** $Z(X,t)$ es una función racional y de hecho:

$$Z(X,t) = \frac{P_1(t)P_3(t)\cdots P_{2d-1}(t)}{P_0(t)P_2(t)\cdots P_{2d}(t)} \in \mathbb{Q}(t),$$

donde cada $P_i(t) \in \mathbb{Z}[t]$, donde $P_0(t) = 1-t, P_{2d}(t) = 1-q^d t$ y cada $P_i(t) = \prod_j (1-\alpha_{ij}t) \in \mathbb{Q}^{\text{alg}}[t]$ con $0 < i < 2d$.

CW2. **Ecuación funcional:** Si $\chi := \chi(X, \mathscr{O}_X)$ es la característica de Euler, entonces

$$Z\left(X, \frac{1}{q^d t}\right) = \pm q^{n\chi/2} t^{\chi} Z(X,t).$$

CW3. **Hipótesis de Riemann:** Se cumple que $|\alpha_{ij}| = q^{i/2}$ para $0 < i < 2d$.

También hay una cuarta conjetura CW4 que de momento no tocaremos, ya que no podemos enunciarla.

Históricamente, y siguiendo una acorazonada de Weil, el problema sería resuelto con una teoría cohomológica análoga a la homología simplicial de topología algebraica. El primer problema al que nos enfrentaremos es que la topología de Zariski que hemos dado a las variedades es irreducible, por lo que nuestros haces dan muy poca información con la cohomología de Čech, así que hemos de redefinir nuestros espacios para que las propiedades se resuelvan adecuadamente.

10.1 Sitios, haces y cohomologías

Definición 10.1: Sea $\mathscr{C}$ una categoría pequeña con productos fibrados. Fijado un objeto $U \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$ y dado un par de conjuntos $\mathcal{S}_1 := \{U_i\}_{i\in I}, \mathcal{S}_2 := \{V_j\}_{j\in J}$ de objetos de $\mathscr{C}/U$, se dice que $\mathcal{S}_2$ es un ***refinamiento*** de $\mathcal{S}_1$ si para todo $i \in I$ existe un $j \in J$ y una flecha $U_i \to V_j$ (de $\mathscr{C}/U$).

Se le llama una ***(pre)topología de Grothendieck*** a una familia $J := \{\operatorname{Cov}_U\}_{U\in\operatorname{Obj}\mathscr{C}}$, tal que para cada objeto $U \in \operatorname{Obj}\mathscr{C}$, se cumple que Cov_U es una familia de conjuntos de flechas, llamados ***cubrimientos*** que satisface lo siguiente:

COV1. Para todo isomorfismo $V \to U$ se cumple que $\{V \to U\}$ es un cubrimiento.

COV2. El refinamiento de un cubrimiento es también un cubrimiento.

COV3. El cambio de base de un cubrimiento induce un cubrimiento. Vale decir, dado un cubrimiento $\mathcal{S} := \{U_i \to U\}_{i\in I} \in \operatorname{Cov}_U$ y una flecha $V \to U$, la familia $\mathcal{S} \times_U V := \{U_i \times_U V \to V\}_{i\in I} \in \operatorname{Cov}_V$.

COV4. Sea $\mathcal{S}_1 := \{U_i \to U\}_{i\in I} \in \operatorname{Cov}_U$ y $\mathcal{S}_2 := \{V_j \to U\}_{j\in J}$ una familia de flechas. Si para cada U_i se cumple que $\mathcal{S}_2 \times_U U_i \in \operatorname{Cov}_{U_i}$, entonces $\mathcal{S}_2 \in \operatorname{Cov}_U$.

Un ***sitio*** es un par $X := (\mathscr{C}, J)$, donde J es una (pre)topología de Grothendieck sobre $\mathscr{C}$. Denotamos $\operatorname{Cat}(X) := \mathscr{C}$.

La definición de una topología de Grothendieck es otra, pero uno puede probar que una pretopología induce de manera única una topología.

Ejemplo. Sea X un espacio topológico. Definimos el *sitio topológico* X_{top} como el sitio con $\operatorname{Cat}(X_{\text{top}}) := \mathsf{Op}(X)$ y donde los cubrimientos coinciden con la definición previa de «cubrimiento».

Éste es un ejemplo sencillo, pero queremos ampliar un poco más la definición, en particular a sitios que capturen ciertas propiedades de morfismos de esquemas.

Definición 10.2: Sea $\mathscr{C}$ una categoría concreta (e.g., Sch). Se dice que una familia de flechas de codominio fijo $\{f_i \colon V_i \to U\}$ es ***colectivamente suprayectiva*** si $U = \bigcup_{i \in I} f_i[V_i]$.

Ejemplo 10.3: Sea S un esquema. Un ***cubrimiento por Zariski abiertos*** (resp. ***cubrimiento étale***) es una familia $\{\varphi_i \colon U_i \to X\}$ de encajes abiertos (resp. morfismos étale) que es colectivamente suprayectiva.

El ***gran sitio de Zariski*** (resp. ***gran sitio étale***), denotado $(\mathsf{Sch}/S)_{\text{Zar}}$ (resp. $(\mathsf{Sch}/S)_{\text{ét}}$), es aquél que tiene por categoría subyacente a Sch/S con los cubrimientos por Zariski abiertos (resp. cubrimientos étale).

El ***(pequeño) sitio de Zariski***, denotado S_{Zar}, es aquél que tiene por categoría los subesquemas abiertos de S (por objetos) con los encajes abiertos (por flechas), y cuyos cubrimientos son los cubrimientos por Zariski abiertos. El ***(pequeño) sitio étale***, denotado $S_{\text{ét}}$, es aquél que tiene por categoría los S-esquemas étale (por objetos) con los morfismos de esquemas (por flechas), y cuyos cubrimientos son los cubrimientos étale. ⌟

Vamos a ver más ejemplos, pero antes un par de definiciones:

Definición 10.4: Un morfismo de esquemas $f \colon X \to Y$ se dice ***localmente de presentación finita*** si para todo punto $x \in X$ existen un par de entornos afines $x \in U$ y $f(x) \in V$ tales que $f[U] \subseteq V$, y tales que $\mathscr{O}_X(U)$ es una $\mathscr{O}_Y(V)$-álgebra de presentación finita.

Un morfismo de esquemas $f \colon X \to Y$ se dice ***fppf***[1] si es fielmente plano y localmente de presentación finita. Se dice que f es ***fpqc***[2] si es fielmente plano y todo abierto compacto de Y es la imagen de un abierto compacto de X.

Ejemplo. Si X, Y son localmente noetherianos, entonces para un morfismo $X \to Y$ ser «localmente de presentación finita» equivale a ser «localmente

[1] Del fr., abrev. de *fidèlement plat et presentation fini.*

[2] Del fr., abrev. de *fidèlement plat et quasi-compact:* fielmente plano y (cuasi)compacto.

de tipo finito».

Ahora dos ejemplos más:

Ejemplo 10.5: Sea S un esquema. Un ***cubrimiento fppf*** (resp. ***cubrimiento fpqc***) es una familia $\{\varphi_i \colon Y_i \to Y\}_{i\in I}$ tal que $\coprod_{i\in I} Y_i \to X$ es un morfismo fppf (resp. fpqc).

El ***(gran) sitio fppf*** (resp. ***(gran) sitio fpqc***), denotado S_{fppf} (resp. S_{fpqc}), es aquel que tiene por categoría subyacente Sch/S y cuyos cubrimientos son los fppf (resp. fpqc). ⌟

En general respecto a los sitios de Zariski y étale nos referiremos a ellos como los sitios pequeños, mientras que en los sitios fppf y fpqc nos referiremos a los sitios grandes.

Nótese que, por la proposición 6.56, todo cubrimiento por Zariski abiertos es étale; en consecuencia, si nos restringimos a los sitios grandes (para tener la misma categoría subyacente), la topología étale es más *fina* que la de Zariski («tiene más abiertos»).

Definición 10.6: Sean X, Y un par de sitios. Una ***aplicación continua*** $f \colon X \to Y$ es un funtor $F := f^t \colon \operatorname{Cat}(Y) \to \operatorname{Cat}(X)$ que preserva cubrimientos, vale decir:

AC1. Para todo cubrimiento $\{V_i \xrightarrow{\varphi_i} V\}_{i\in I}$ en Y, se cumple que $\{FV_i \xrightarrow{F(\varphi_i)} FV\}_{i\in I}$ es un cubrimiento en X.

AC2. Para todo cubrimiento $\{V_i \xrightarrow{\varphi_i} V\}_{i\in I}$ y toda flecha $W \to V$ en Y, se cumple que $F(V_i \times_V W) \cong FV_i \times_{FV} FW$.

Ejemplo. Sean X, Y un par de espacios topológicos y sea $f \colon X \to Y$ una función continua. Definimos $f_{\text{top}} \colon X_{\text{top}} \to Y_{\text{top}}$ como el funtor $V \mapsto f^{-1}[V]$; entonces f_{top} es continuo.

Empleamos la nomenclatura «aplicación continua» (siguiendo a Poonen **[19]**) en lugar de «morfismo de sitios», pues éste último lo reservamos para otros propósitos (**[Stacks]**).

Sobre un conjunto X, dadas dos topologías τ_1, τ_2, se cumple que τ_1 es más fina que τ_2 es equivalente a que la identidad $\operatorname{Id} \colon (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ sea continua. Análogamente, sobre una categoría fija $\mathscr{C}$, dos topologías de Grothendieck $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ satisfacen que $\mathcal{T}_1$ es más fina que $\mathcal{T}_2$ si $\operatorname{Id} \colon (\mathscr{C}, \mathcal{T}_1) \to (\mathscr{C}, \mathcal{T}_2)$ es continua. Así, tenemos lo siguiente:

Proposición 10.7: Sea S un esquema, entonces son aplicaciones continuas:

$$S_{\text{fpqc}} \longrightarrow S_{\text{fppf}} \longrightarrow (\mathsf{Sch}/S)_{\text{ét}} \longrightarrow (\mathsf{Sch}/S)_{\text{Zar}}.$$

Vale decir, todo cubrimiento por Zariski abiertos es étale, todo cubrimiento étale es fppf, y todo cubrimiento fppf es fpqc.

Definición 10.8: Sea X un sitio. Un ***prehaz*** (con valores en $\mathscr{C}$) es un funtor $\mathscr{F}\colon \operatorname{Cat}(X)^{\text{op}} \to \mathscr{C}$. Se dice que un prehaz $\mathscr{F}$ es un haz si la sucesión

$$\mathscr{F}(U) \xrightarrow{\alpha} \prod_i \mathscr{F}(U_i) \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \mathscr{F}(U_i \times_U U_j) \tag{10.1}$$

es exacta para todo cubrimiento $\{U_i \to U\}$, donde las flechas son las mismas que en (3.1).

Los prehaces (resp. haces) sobre X con valores en $\mathscr{C}$ conforman una categoría denotada $\mathsf{PSh}(X;\mathscr{C})$ (resp. $\mathsf{Sh}(X;\mathscr{C})$). Cuando $\mathscr{C} = \mathsf{Ab}$ decimos que los objetos de $\mathsf{PSh}(X;\mathscr{C})$ (resp. $\mathsf{Sh}(X;\mathscr{C})$) se dicen prehaces (resp. haces) abelianos.

Ejemplo. Si X es un espacio topológico, entonces las nociones de haz sobre X (como haz sobre un espacio) y haz sobre X_{top} (como haz sobre un sitio) coinciden.

La condición (10.1) se verifica sobre cubrimientos, por tanto, mientras más fina sea la topología de Grothendieck, más verificaciones. En consecuencia, si tenemos un prehaz sobre Sch/S que es un haz en la topología fpqc, entonces será un haz en las topologías fppf, étale y de Zariski.

Definición 10.9: Sea X un esquema y $\mathscr{C} \subseteq \mathsf{Sch}/X$. Sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo cuasicoherente (en particular, un haz sobre X_{Zar}). Se define un prehaz $\mathscr{F}_{\mathscr{C}}$ dado por:

$$\Gamma(U, \mathscr{F}_{\mathscr{C}}) := \Gamma(U, p^*\mathscr{F})$$

para cada objeto $U \xrightarrow{p} X$ en $\mathscr{C}$.

Proposición 10.10: Sea X un esquema y $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo cuasicoherente. Entonces $\mathscr{F}_\tau$ es un haz sobre X_τ para todo $\tau \in \{\text{fpqc}, \text{fppf}, \text{ét}, \text{Zar}\}$.

Proposición 10.11: Sea X un sitio y $\mathscr{F}\colon \operatorname{Cat}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathscr{C}$ un prehaz de conjuntos o de grupos abelianos. Entonces $\mathscr{F}$ posee una hazificación $\mathscr{F}^+$ y este determina un funtor.

La demostración es esencialmente la misma que detallamos anteriormente. De hecho, las construcciones relativas a haces sobre sitios es análoga a la de haces sobre espacios topológicos, por lo que dejaremos los detalles al lector.

Definición 10.12: Sea X un sitio y $\alpha\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de prehaces abelianos sobre X. Se definen los siguientes prehaces:

$$\Gamma(U, \ker\alpha) := \ker(\alpha_U), \qquad \Gamma(U, (\operatorname{Img}\alpha)^-) := \operatorname{Img}(\alpha_U),$$
$$\Gamma(U, (\operatorname{coker}\alpha)^-) := \operatorname{coker}(\alpha_U).$$

Proposición 10.13: Sea X un sitio y $\alpha\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de haces abelianos sobre X. Entonces $\ker\alpha$ es un haz sobre X, y

$$\operatorname{Img}\alpha := \big((\operatorname{Img}\alpha)^-\big)^+, \qquad \operatorname{coker}\alpha := \big((\operatorname{coker}\alpha)^-\big)^+$$

son haces sobre X; más aún, efectivamente son el núcleo, la imagen y el conúcleo en $\mathsf{Sh}(X; \mathsf{Ab})$.

Proposición 10.14: Sea X un sitio y $0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H}$ una sucesión exacta de haces abelianos. Entonces para todo $U \in \operatorname{Obj}\operatorname{Cat}(X)$, la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathscr{F}) \xrightarrow{\ \alpha\ } \Gamma(U, \mathscr{G}) \xrightarrow{\ \beta\ } \Gamma(U, \mathscr{H})$$

es exacta (en Ab). Vale decir, el funtor $\Gamma(U, -)\colon \mathsf{Sh}(X; \mathsf{Ab}) \to \mathsf{Ab}$ es exacto por la izquierda.

Lema 10.15: Para todo sitio X, la categoría $\mathsf{Sh}(X; \mathsf{Ab})$ es abeliana y tiene suficientes inyectivos.

Definición 10.16: Sea X un sitio. Definimos el funtor $H^q(X, -)\colon \mathsf{Sh}(X; \mathsf{Ab}) \to \mathsf{Ab}$ como el q-ésimo funtor derivado derecho del funtor $\Gamma(X, -)$. Si S es un esquema y $X = S_\tau$ (con $\tau \in \{\mathrm{fpqc}, \mathrm{fppf}, \text{ét}, \mathrm{Zar}\}$), entonces denotamos $H^q_\tau(S, -)$ para enfatizar la topología de Grothendieck.

Es decir, para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow 0$ de haces abelianos sobre S_τ, se induce la siguiente sucesión exacta larga:

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \Gamma(X_\tau, \mathscr{F}_\tau) \longrightarrow \Gamma(X_\tau, \mathscr{G}_\tau) \longrightarrow \Gamma(X_\tau, \mathscr{H}_\tau) \\ \hookrightarrow H^1_\tau(X, \mathscr{F}) \longrightarrow H^1_\tau(X, \mathscr{G}) \longrightarrow H^1_\tau(X, \mathscr{H}) \\ \hookrightarrow H^2_\tau(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

§10.1.1 Cohomología de Čech. Sea X un sitio y sea $\mathcal{U} := \{U_i \to U\}_{i\in I}$ un cubrimiento. Para una tupla de índices $(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$ se define

$$U_{i_0,\dots,i_p} := U_{i_0} \times_U U_{i_1} \times_U \cdots \times_U U_{i_p}.$$

Sea $(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$ una tupla y $j \in \{0, 1, \dots, p\}$; entonces obtenemos una proyección $\rho_j \colon U_{i_0,\dots,i_p} \to U_{i_0,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_p}$, donde «$\hat{i}_j$» denota borrar la j-ésima coordenada.

Definición 10.17: Se define

$$\check{C}^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) := \prod_{(i_0,\dots,i_p)\in I^{p+1}} \mathscr{F}(U_{i_0,\dots,i_p}),$$

y definimos el homomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^q \colon \check{C}^q &\longrightarrow \check{C}^{q-1} \\ s &\longmapsto \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \rho_j(s) \end{aligned}$$

Así, es fácil verificar que $\big(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathscr{F}), \mathrm{d}^\bullet\big)$ es un complejo de cocadenas, llamado el ***complejo de Čech***.

Siguiendo la terminología usual, los elementos de $\check{C}^q, \ker(\mathrm{d}^q), \operatorname{Img}(\mathrm{d}^{q-1})$ se dicen ***cocadenas***, ***cociclos*** y ***cobordes*** q***-ésimos de Čech*** resp. También se denomina q***-ésimo grupo de cohomología de Čech*** a:

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) := H^q(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathscr{F})) = \frac{\ker(\mathrm{d}^q)}{\operatorname{Img}(\mathrm{d}^{q-1})}.$$

Proposición 10.18: Sea $\mathscr{F}$ un haz abeliano sobre un sitio X. Entonces, las flechas canónicas satisfacen lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\check{H}^0(U,\mathscr{F}) &\xrightarrow{\ \sim\ } H^0(U,\mathscr{F}) = \mathscr{F}(U)\\
\check{H}^1(U,\mathscr{F}) &\xrightarrow{\ \sim\ } H^1(U,\mathscr{F})\\
\check{H}^2(U,\mathscr{F}) &\hookrightarrow H^2(U,\mathscr{F})
\end{aligned}$$

Demostración: Esto es una aplicación de la sucesión espectral de cohomología de Čech. □

Teorema 10.19 (M. Artin): Sea X un esquema compacto tal que cada conjunto finito de puntos de X esté contenido en un entorno afín (e.g., si X es cuasiproyectivo sobre un esquema afín). Entonces, para todo haz abeliano $\mathscr{F}_{\text{ét}}$ sobre $X_{\text{ét}}$ tenemos que el homomorfismo canónico:

$$\check{H}^q_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\ \sim\ } H^q_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})$$

es un isomorfismo para $q \in \mathbb{N}$.

Proposición 10.20 (lema de Cartan): Sea $\mathscr{F}$ un haz abeliano sobre un esquema S y sea $\mathscr{K}$ la clase de morfismos étale $U \to X$ que satisfacen lo siguiente:

1. Si $U, V \in \mathscr{K}$ entonces $U \times_X V \in \mathscr{K}$.
2. Toda extensión étale $Y \to X$ admite un cubrimiento étale $\{U_i \to Y\}_{i\in I}$ tal que cada composición $(U_i \to X) \in \mathscr{K}$.
3. Se tiene que $\check{H}^i_{\text{ét}}(U,\mathscr{F}) = 0$ para todo $U \in \mathscr{K}$ y todo $i > 0$.

Entonces los homomorfismos canónicos

$$\check{H}^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\ \sim\ } H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})$$

son isomorfismos.

Definición 10.21: Sea X un esquema. Un objeto acíclico en $\mathsf{Sh}(X_\tau, \mathsf{Ab})$ con $\tau \in \{\text{fppf}, \text{fpqc}, \text{ét}, \text{Zar}\}$ se dice un ***haz flácido*** (en la topología respectiva).

Igual que antes, todo haz inyectivo es flácido, pero el recíproco no es cierto.

Definición 10.22: Sea X un esquema y sea $\mathscr{L}_\tau$ un haz en la topología $\tau \in \{\text{fppf}, \text{fpqc}, \text{ét}, \text{Zar}\}$. Se dice que $\mathscr{L}_\tau$ es ***invertible*** en la topología τ si X posee un cubrimiento $\{U_i \to X\}$ en la respectiva topología tal que $\mathscr{L}|_{U_i} \cong \mathscr{O}_{U_i,\tau}$.

La clase de haces invertibles (en la topología τ) salvo isomorfismo de haces, se denota $\operatorname{Pic}_\tau X$.

Proposición 10.23: Sea X un esquema. Entonces:

1. $H^0_{\text{Zar}}(X, \mathbb{G}_m) \cong H^0_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m) \cong H^0_{\text{fppf}}(X, \mathbb{G}_m) \cong \Gamma(X, \mathscr{O}_X)^\times$.
2. (Teorema de Hilbert 90) $H^1_{\text{Zar}}(X, \mathbb{G}_m) \cong H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m) \cong H^1_{\text{fppf}}(X, \mathbb{G}_m) \cong \operatorname{Pic} X$.

§10.1.2 Puntos geométricos y entornos étale.

Definición 10.24: Sea X un esquema. Un ***punto geométrico*** de X es un punto k-valuado (i.e., un morfismo $\operatorname{Spec} k \to X$), donde k es un cuerpo separablemente cerrado. Se dice que $U \to X$ es un ***entorno étale*** de un punto k-valuado $x \in X(k)$ si $U \to X$ es un morfismo étale y se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] & X \\ \operatorname{Spec} k \arrow[u, "y"] \arrow[ur, "x"'] & \end{tikzcd}$$

Lema 10.25: Sea X un esquema y x un punto geométrico. Los entornos étale de x forman un categoría filtrada.

Definición 10.26: Sea X un esquema y x un punto geométrico. El ***anillo local estricto*** en x es el límite directo

$$\mathscr{O}_{X_{\text{ét}},x} := \varinjlim_U \Gamma_{\text{ét}}(U, \mathscr{O}_X),$$

donde U recorre los entornos étale de x.

Más generalmente, si $\mathscr{F}$ es un haz sobre $X_{\text{ét}}$ y x es un punto geométrico de X, entonces se define la ***fibra*** en x como:

$$\mathscr{F}_{\text{ét},x} := \varinjlim_U \Gamma_{\text{ét}}(U, \mathscr{F}),$$

donde U recorre los entornos étale de x.

Ahora se sigue lo siguiente:

Proposición 10.27: Sea X un esquema noetheriano.

1. Sea $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de haces abelianos sobre $X_{\text{ét}}$. Entonces φ es un isomorfismo syss para todo punto geométrico x tenemos que $\varphi_x : \mathscr{F}_{\text{ét},x} \to \mathscr{G}_{\text{ét},x}$ es un isomorfismo.

2. Sea $\mathscr{S} : \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H}$ una sucesión de haces abelianos sobre $X_{\text{ét}}$. Entonces $\mathscr{S}$ es exacta (en $\mathsf{Sh}(X_{\text{ét}}, \mathsf{Ab})$) syss para todo punto geométrico x tenemos que $\mathscr{S}_{\text{ét},x}$ es exacta (en Ab).

Más aún, si X/k es un esquema algebraico podemos hacer las verificaciones sobre puntos geométricos cuya imagen sea cerrada.

Al contrario de lo que sucedía antes, ésta proposición sí depende de que el sitio sea una topología étale sobre un esquema noetheriano y es falso en un sitio general (¿cuál sería la definición de un punto geométrico?). A ésta propiedad a veces se le llama *tener suficientes puntos*.

10.2 Anillos henselianos

Recuérdese que un polinomio $f \in A[t_1, \dots, t_n]$ se dice ***primitivo*** si sus coeficientes son coprimos en conjunto, vale decir, si el ideal en A generado por sus coeficientes es (1).

Lema 10.28: Sea A un anillo y sea $f \in B := A[t_1, \dots, t_n]$.

1. Si f es primitivo, entonces es un elemento regular de B y $B/(f)$ es una A-álgebra plana.

2. Supongamos que $n = 1$. Entonces f es primitivo syss $\operatorname{Spec}(A[t]/(f)) \to \operatorname{Spec} A$ tiene fibras finitas.

DEMOSTRACIÓN:

1. Nótese que f es primitivo syss para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ se cumple que $f \mod \mathfrak{p} \neq 0$. Veamos el endomorfismo (de A-módulos) $\times f\colon B \to B$ y sea $K := \ker(\times f) = B[f]$ la f-torsión. Como B es de presentación

finita y plano sobre A, entonces podemos tensorizar $\otimes \Bbbk(\mathfrak{p})$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, y vemos que $K \otimes \Bbbk(\mathfrak{p}) = 0$, por lo que $K = 0$. Así $\times f$ es inyectivo y el conúcleo $B/(f)$ es plano sobre A (por la sucesión exacta en Tor).

2. Basta notar que exigir que las fibras de $\operatorname{Spec}(A[t]/(f)) \to \operatorname{Spec} A$ sean finitas equivale a ver que $\Bbbk(\mathfrak{p})[t]/(f \mod \mathfrak{p})$ sea un $\Bbbk(\mathfrak{p})$-espacio vectorial de dimensión finita, lo que equivale a que $f \mod \mathfrak{p} \neq 0$. □

Proposición 10.29: Sea $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anillo local, y denotemos por $s := x_{\mathfrak{m}} \in \operatorname{Spec} A =: S$. Son equivalentes:

1. Toda A-álgebra finitamente generada (como módulo) es un producto de anillos locales.

2. Para todo $f \in A[t]$ mónico, la A-álgebra $A[t]/(f)$ es un producto de anillos locales.

3. Sea X un S-esquema separado de tipo finito. Entonces existe una partición $X = Y \amalg X_1 \amalg \cdots \amalg X_r$ en subesquemas abiertos y cerrados, tal que toda componente irreducible de Y_s tiene dimensión ≥ 1 y tal que cada $X_i = \operatorname{Spec}(B_i)$, donde cada B_i es una A-álgebra local finitamente generada.

4. Dado $f \in A[t]$ y una factorización $f \equiv g_0 \cdot h_0 \pmod{k[t]}$ tal que g_0 sea mónico y $g_0, h_0 \in k[t]$ son coprimos, existen $g, h \in A[t]$ tales que g es mónico, $f = g \cdot h$ y $g \equiv g_0, h \equiv h_0 \pmod{k[t]}$.

Proposición 10.30: Sea $f\colon X \to S$ un morfismo suave. Sea $s \in S$ y sea $x \in X_s$ un punto cerrado de la fibra tal que la extensión $\Bbbk(x)/\Bbbk(s)$ sea separable. Entonces existe un entorno abierto U de s y un subesquema $Z \subseteq f^{-1}[U]$ con $x \in Z$ tal que $f|_Z\colon Z \to U$ es étale.

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} \Bbbk(x) \arrow[dd, hook] \arrow[dr] \arrow[dddd, bend right, "\text{étale}"'] & & \\
& Z \arrow[dd, "\text{étale}"'] \arrow[dr, hook] & \\
X_s \arrow[rr] \arrow[dd] & & X \arrow[dd, "f"', "\text{suave}"] \\
& U \arrow[dr, hook] & \\
\operatorname{Spec} \Bbbk(s) \arrow[ur] \arrow[rr] & & S
\end{tikzcd}
$$

Corolario 10.30.1: Sea $f\colon X \to S$ un morfismo sobreyectivo suave. Existe un morfismo étale sobreyectivo $T \to S$ y una sección $\sigma\colon T \to X_T$ (i.e., tal que $\sigma \circ f_T = \mathrm{Id}_T$).

Proposición 10.31: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de esquemas. Son equivalentes:

1. f es afín y $f_*\mathscr{O}_X$ es un $\mathscr{O}_Y$-módulo localmente libre de rango finito.
2. f es un morfismo finito, plano y de presentación finita.
3. Para todo abierto afín $V = \operatorname{Spec} A \subseteq Y$ su preimagen es afín $f^{-1}[V] = \operatorname{Spec} B$ y la A-álgebra B es un A-módulo finitamente generado proyectivo.

En cuyo caso, decimos que f es un ***morfismo finito localmente libre***.

Si Y es un esquema localmente noetheriano, entonces por el inciso 2, un morfismo finito es localmente libre syss es plano. Nótese que como todo morfismo finito localmente libre es plano y de presentación finita, entonces es un morfismo universalmente abierto; y, por ser un morfismo finito, también es un morfismo universalmente cerrado.

Así pues, si Y es conexo y $X \neq \varnothing$, entonces es sobreyectivo.

Lema 10.32: Sea S un esquema conexo y sea $\pi\colon X \to S$ un morfismo finito localmete libre (e.g., morfismo finito étale). Entonces X es la unión disjunta finita de subesquemas conexos abiertos y cerrados.

Demostración: Basta probarlo por inducción sobre $d := \deg \pi$. Para $d = 0$ se tiene que $X = \varnothing$, y para $d = 1$ tenemos que $X \cong S$, así que están listos. Si X no es conexo, entonces $X = X_1 \amalg X_2$ y $\deg \pi = \deg(\pi|_{X_1}) + \deg(\pi|_{X_2})$. □

Definición 10.33: Sea S un esquema y $\overline{s}\colon \operatorname{Spec} \Omega \to S$ un punto geométrico. Dado un S-esquema finito étale X, podemos definir la ***fibra*** $X_{\overline{s}} := X \times_S \operatorname{Spec} \Omega$ el cual es una unión disjunta de copias de $\operatorname{Spec} \Omega$, de modo que viene completamente determinado por su conjunto $\operatorname{Hom}_S(\operatorname{Spec} \Omega, X)$. El ***funtor de fibras*** es

$$\mathcal{F}_{\overline{s}}\colon \mathsf{F\acute{E}t}/S \longrightarrow \mathsf{Set}, \qquad X \mapsto \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Spec} \Omega, X) = X_{\overline{s}}.$$

Si S es conexo, la subcategoría plena de $\mathsf{Fun}(\mathsf{F\acute{E}t}/S, \mathsf{Set})$ cuyos objetos son isomorfos a funtores de fibras $\mathcal{F}_{\overline{s}}$, donde $\overline{s}\colon \operatorname{Spec} \Omega \to S$ recorre los puntos geométricos de S, se denomina el ***grupoide fundamental*** de S y se denota $\Pi_{\text{alg}}(S)$.

Recuérdese que los encajes cerrados son morfismos finitos, que estos son estables salvo composición y cambio de base, de modo que admiten cancelación izquierda por morfismos separados. Los morfismos étale también poseen cancelación por morfismos separados, aunque las razones son distintas.

Proposición 10.34: Sea $f\colon X \to S$ un cubrimiento étale finito, y sea $s\colon S \to X$ una sección suya (i.e., $s \circ f = \mathrm{Id}_S$). Entonces s induce un isomorfismo de S con un subesquema abierto y cerrado de X.

Demostración: Como $s \circ f = \mathrm{Id}_S$ es étale finito y f es separado, entonces s también es étale finito, luego es un morfismo universalmente abierto y cerrado por las observaciones anteriores. □

Corolario 10.34.1: Sea Z un S-esquema conexo, X un S-esquema étale finito y sean $f, g\colon Z \to X$ un par de S-morfismos. Si existe un punto geométrico $\overline{z}\colon \operatorname{Spec} k \to Z$ tal que $\overline{z} \circ f = \overline{z} \circ g$, entonces $f = g$.

10.3 Descenso

Comencemos con dos resultados sencillos de álgebra conmutativa:

Proposición 10.35: Sea $\varphi\colon A \to B$ un homomorfismo fielmente plano de anillos, sea M un A-módulo y denótese $M_B := M \otimes_A B$ visto como B-módulo. Si M_B es plano (resp. finitamente generado, de presentación finita, localmente libre de rango n), entonces M también lo es.

Demostración: Que la planitud satisfaga descenso plano es trivial.

Sea $e_1, \dots, e_n$ un sistema generador de M_B sobre B, donde cada $e_i := \sum_j m_{ij} \otimes b_{ij} \in M_B$ para $m_{ij} \in M$ y $b_{ij} \in B$. Luego, el homomorfismo $\varphi\colon A^N \to M$ de evaluación sobre los m_{ij}'s satisface que $\varphi_B\colon B^N \to M_B$ sea sobreyectivo y, por definición de «fielmente plano», se sigue que φ debe ser sobreyectivo. Si M_B es de presentación finita, en ésta situación tenemos que $\ker(\varphi_B)$ es un B-módulo finitamente generado, pero $\ker(\varphi_B) \cong \ker\varphi \otimes_A B$ por planitud, luego $\ker\varphi$ es finitamente generado.

Finalmente, ser «localmente libre» equivale a ser «plano de presentación finita», ambas propiedades que satisfacen descenso plano. La igualdad de los rangos se verifica pasando a un cuerpo de restos. □

Proposición 10.36: Sea $\varphi\colon A \to A'$ un homomorfismo fielmente plano de anillos, sea B una A-álgebra y sea $B' := B \otimes_A A'$ visto como A'-álgebra. Si B' es una A'-álgebra de tipo finito (resp. de presentación finita), entonces B también lo es como A-álgebra.

Pista: La demostración es análoga a la anterior empleando $A[t_1, \dots, t_N]$ en lugar de $A^{\oplus N}$. □

El problema del *descenso* es principalmente el siguiente: sea $\mathbf{P}$ una propiedad de morfismos de esquemas y supongamos que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & Y' \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & S' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, dotted] & S \end{tikzcd} \tag{10.2}$$

¿Qué propiedad podemos imponer en g de modo que si f' satisface $\mathbf{P}$ entonces f también satisface $\mathbf{P}$?

Un ejemplo sencillo:

Proposición 10.37: En el diagrama conmutativo (10.2) supongamos que g es sobreyectivo. Entonces:

1. El morfismo f es sobreyectivo syss f' lo es.
2. Si f' es inyectivo, entonces f también lo es.
3. Si f' tiene fibras de cardinalidad finita, entonces f también.
4. El morfismo f es universalmente inyectivo syss f' lo es.

Pista: Los tres primeros incisos aplican para funciones en general en un diagrama conmutativo de conjuntos. El cuarto se sigue del segundo. □

Definición 10.38: Sean $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ propiedades de morfismos de esquemas. Diremos que una propiedad $\mathbf{P}$ de morfismos satisface «descenso por morfismos $\mathbf{Q}$» si en todo diagrama conmutativo (10.2) donde g satisface $\mathbf{Q}$ se cumple que f satisface $\mathbf{P}$ siempre que f' satisface $\mathbf{P}$.

Más brevemente, diremos que una propiedad satisface descenso fpqc (resp. fppf, étale) si satisface descenso por morfismos fpqc (resp. fppf, étale).

He aquí el interés que podría tener la teoría de descenso para teoristas de números:

Ejemplo. Sea k un cuerpo. El morfismo $\operatorname{Spec}(k^{\text{alg}}) \to \operatorname{Spec} k$ siempre es fpqc, aunque casi nunca es fppf. Para toda extensión finita L/k el morfismo $\operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} k$ es fppf, aunque no siempre es étale. Para toda extensión finita separable L/k el morfismo $\operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} k$ es étale.

Definición 10.39: Sea Y un esquema compacto y cuasiseparado, un subconjunto $E \subseteq Y$ se dice ***proconstructible*** si existe un morfismo $f\colon \operatorname{Spec} A \to Y$ desde un esquema afín con $f[\operatorname{Spec} A] = E$.

Corolario 10.39.1: Sea Y un esquema compacto y cuasiseparado. Entonces:

1. Todo subconjunto localmente constructible de Y es proconstructible.
2. La imagen de todo morfismo compacto $X \to Y$ es proconstructible.
3. La intersección de finitos conjuntos proconstructibles de Y es proconstructible.

Recuérdese que decíamos que un morfismo de esquemas $f\colon X \to Y$ *refleja generizaciones* si para todo punto $x \in X$ y toda generización $y' \rightsquigarrow f(x)$, existe $x' \rightsquigarrow x$ en X tal que $y' = f(x')$. Esto era equivalente a que $f[\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{X,x})] = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{Y,f(x)})$.

Lema 10.40.A: Sea Y un esquema compacto y cuasiseparado, sea $Z \subseteq Y$ un subconjunto proconstructible y sea $f\colon X \to Y$ un morfismo que refleja generizaciones. Entonces $\overline{f^{-1}[Z]} = f^{-1}[\,\overline{Z}\,]$.

Demostración: Nótese que podemos suponer que $Y = \operatorname{Spec} A$ sea afín (¿por qué?). Siempre se satisface la inclusión $\overline{f^{-1}[Z]} \subseteq f^{-1}[\,\overline{Z}\,]$, probemos «$\supseteq$»: sea $x \in U := X \setminus \overline{f^{-1}[Z]}$. Como $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{X,x}) \subseteq U \subseteq f^{-1}[Y \setminus Z]$, vemos que

$$f[\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{X,x})] = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{Y,f(x)}) \subseteq Y \setminus Z.$$

Afirmamos que $y := f(x) \notin \overline{Z}$. Sea A' una A-álgebra tal que $g\colon Y' := \operatorname{Spec}(A') \to Y$ tiene imagen Z; sea $\mathfrak{p} := \mathfrak{p}_y$ el primo asociado a $y \in Y$, como

$g[\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{Y,y})] = \varnothing$, se verifica que

$$\varinjlim_{s \notin \mathfrak{p}} (A[1/s] \otimes_A A') = A_{\mathfrak{p}} \otimes_A A' = 0,$$

por lo que existe $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $A[1/s] \otimes_A A' = 0$, es decir, tal que $\mathbf{D}(s) \cap Z = \varnothing$. □

Lema 10.40.B: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo compacto que refleja generizaciones. Entonces $f\colon X \to f[X]$ es una identificación topológica (i.e., el subespacio topológico $f[X] \subseteq Y$ es un cociente topológico de X).

Demostración: Nuevamente podemos suponer que $Y = \operatorname{Spec} A$ sea afín. Sea $Z \subseteq f[X]$ tal que $F := f^{-1}[Z] \subseteq X$ sea cerrado, queremos ver que Z es cerrado en la topología subespacio; vale decir, que $Z = \overline{Z} \cap f[X]$. Dotándolo de la estructura reducida, vemos a F como subesquema cerrado de X y la composición $F \hookrightarrow X \longrightarrow Y$ da un morfismo compacto, por lo que su imagen Z es proconstructible. Así pues

$$Z = f\big[f^{-1}[Z]\big] = f\big[\,\overline{f^{-1}[Z]}\,\big] = f^{-1}\big[f[\,\overline{Z}\,]\big] = \overline{Z} \cap f[X]$$

como se quería ver. □

Es inmediato del lema anterior que:

Proposición 10.40: Todo morfismo fpqc es una identificación.

Proposición 10.41: Las siguientes propiedades satisfacen descenso fpqc:

Ser morfismo abierto.	Ser morfismo cerrado.	Ser homeomorfismo.
Ser morfismo compacto.	Ser cuasiseparado.	Ser separado.

Demostración: Considere la situación del diagrama (10.2). Las primeras dos se siguen inmediatamente de que las flechas verticales sean identificaciones topológicas; la tercera se sigue de que un homeomorfismo es una biyección abierta.

Para ver que los morfismos compactos satisfacen descenso fpqc basta notar que si $V \subseteq Y$ es un abierto compacto, entonces

$$f^{-1}[V] = g_X[(f')^{-1}[g_Y^{-1}[V]]]$$

es compacto, pues g_Y es un morfismo compacto por cambio de base.

Finalmente, un morfismo se dice cuasiseparado (resp. separado) syss la diagonal $\Delta_f : X \to X \times_Y X$ es un morfismo compacto (resp. un morfismo cerrado) y ya probamos que ambas propiedades satisfacen descenso fpqc. □

Corolario 10.41.1: Las propiedades de ser «universalmente abierto», «universalmente cerrado» y de ser un «homeomorfismo universal» satisfacen descenso fpqc.

Proposición 10.42: Las siguientes propiedades satisfacen descenso fpqc:

Ser (localmente) de tipo finito.	Ser un isomorfismo.	Ser propio.
Ser (localmente) de presentación finita.	Ser un monomorfismo.	Ser afín.
Ser cuasifinito.	Ser un encaje.	Ser finito.

Demostración: En la situación del diagrama (10.2) vemos que g_Y es fpqc, así que supondremos $Y = S$. Ser (localmente) de tipo finito y de presentación finita satisface descenso fpqc por la proposición 10.36. Ser cuasifinito es ser de tipo finito con fibras finitas, por lo que se sigue de las proposiciones anteriores.

Si f' es un isomorfismo, entonces también es un homeomorfismo universal y f también por descenso. Así, basta ver que $f^\sharp : \mathscr{O}_Y \to f_* \mathscr{O}_X$ es un isomorfismo de haces; aplicándole el funtor g^* obtenemos el morfismo de haces

$$(f')^\sharp : \mathscr{O}_{Y'} = g^* \mathscr{O}_Y \xrightarrow{\ \sim\ } f'_* \mathscr{O}_{X'} = g^* f_* \mathscr{O}_X$$

el cual es un isomorfismo por hipótesis. Así que $g^* f^\sharp$ es un isomorfismo, pero como g es fielmente plano, $f^\sharp$ debe serlo. Un monomorfismo es un morfismo cuya diagonal es un isomorfismo, así que trivialmente satisface descenso fpqc.

Ser propio equivale a ser de tipo finito, separado y universalmente cerrado; todas propiedades que satisfacen descenso fpqc.

Si f' es afín, entonces es compacto y cuasiseparado (por lo que f también) y la $\mathscr{O}_{Y'}$-álgebra cuasicoherente $\mathscr{A}' := f'_* \mathscr{O}_{X'}$ satisface que $X' = \mathbf{Spec}_{Y'}(\mathscr{A}')$. Definiendo $\mathscr{A} := f_* \mathscr{O}_X$, vemos que $g^* \mathscr{A}' = \mathscr{A}$ luego tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \mathbf{Spec}_{Y'}(\mathscr{A}') \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y' \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "\bar{f}"'] & \mathbf{Spec}_Y(\mathscr{A}) \arrow[r, dotted] & Y
\end{tikzcd}$$

y por descenso fpqc comprobamos que $\bar{f}$ es un isomorfismo, de modo que f es afín.

Ser finito equivale a ser afín y propio, las cuales satisfacen descenso. □

Ahora seguimos a Bosch *et al.* [**0,** págs. 129 ss.], §6.1. El problema que pretendemos resolver es el siguiente: dado un morfismo de esquemas $S' \to S$, ¿bajo qué condiciones el funtor de pull-back $\mathscr{F} \mapsto p^*\mathscr{F}$ es una equivalencia de categorías (canónicamente)? O en otras palabras, ¿cuándo un haz sobre S' *desciende* a un haz de S?

Definición 10.43: Sea $p\colon S' \to S$ un morfismo de esquemas y denótese $S'' := S' \times_S S'$. Dado un $\mathscr{O}_{S'}$-módulo $\mathscr{F}'$, un par $(\mathscr{F}', \varphi)$ se dice un ***dato de cubrimiento*** si $\varphi\colon \pi_1^*\mathscr{F}' \to \pi_2^*\mathscr{F}'$ es un isomorfismo de $\mathscr{O}_{S''}$-módulos, donde $\pi_1, \pi_2\colon S'' \to S'$ denotan las proyecciones. Los haces con datos de cubrimiento forman una categoría $\mathscr{C}_{S'/S}$ donde una flecha $f\colon (\mathscr{F}', \varphi) \to (\mathscr{G}', \psi)$ es un morfismo de haces $f\colon \mathscr{F}' \to \mathscr{G}'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\pi_1^*\mathscr{F}' \arrow[r, "\pi_1^* f"'] \arrow[d, "\wr"'] & \pi_1^*\mathscr{G}' \arrow[d, "\wr"] \\
\pi_2^*\mathscr{F}' \arrow[r, "\pi_2^* f"] & \pi_2^*\mathscr{G}'
\end{tikzcd}$$

Nótese que si $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{O}_S$-módulo, entonces $p^*\mathscr{F}$ es un haz sobre S' con la identidad como dato de cubrimiento.

Proposición 10.44: Sea $p\colon S' \to S$ un morfismo fpqc, denótense $\pi_j\colon S'' := S' \times_S S' \to S'$ las proyecciones y $q := \pi_1 \circ p = \pi_2 \circ p$. Dado un par de $\mathscr{O}_S$-módulos cuasicoherentes $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$, el siguiente diagrama es un ecualizador

$$\operatorname{Hom}_S(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \xrightarrow{p^*} \operatorname{Hom}_{S'}(p^*\mathscr{F}, p^*\mathscr{G}) \underset{\pi_2^*}{\overset{\pi_1^*}{\rightrightarrows}} \operatorname{Hom}_{S''}(q^*\mathscr{F}, q^*\mathscr{G}).$$

En consecuencia, el funtor $p^*(-)\colon \mathsf{QCoh}_S \to \mathscr{C}_{S'/S}$ es plenamente fiel.

Demostración: Podemos suponer que $S = \operatorname{Spec} A$ es afín. Como el morfismo es compacto, podemos cubrir a S' con finitos abiertos afines $\{U_i\}_i$, de modo que el morfismo $\coprod_i U_i \to \operatorname{Spec} A$ es fielmente plano, de modo que podemos suponer que $S' = \operatorname{Spec} B$ es afín.

Ahora, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$ y $\mathscr{G} = \widetilde{N}$ y

$$\operatorname{Hom}_{S'}(p^*\mathscr{F}, p^*\mathscr{G}) = \operatorname{Hom}_B(M \otimes_A B, N \otimes_A B) \cong \operatorname{Hom}_A(M, N) \otimes_A B,$$

por lo que, definiendo $H := \operatorname{Hom}_A(M, N)$, nos reducimos a probar que la sucesión

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow H \otimes_A B \xrightarrow{\gamma} H \otimes_A B \otimes_A B$$

es exacta, donde γ es la tensorización del homomorfismo $b \mapsto b \otimes 1 - 1 \otimes b$ de $B \to B \otimes_A B$. Es decir, la sucesión de arriba es la tensorización de la sucesión exacta $0 \to A \to B \to B \otimes_A B$ lo cual induce la sucesión exacta

$$\operatorname{Tor}_1^A(H, B \otimes_A B) \longrightarrow H \longrightarrow H \otimes_A B \xrightarrow{\gamma} H \otimes_A B \otimes_A B,$$

donde $\operatorname{Tor}_1(H, B \otimes_A B) = 0$ pues $B \otimes_A B$ es un A-módulo fielmente plano (¿por qué?). $\square$

En consecuencia, $p^*(-)$ establece una equivalencia con una subcategoría de $\mathscr{C}_{S'/S}$.

Situación 10.45: Sea $p\colon S' \to S$ un morfismo de esquemas. Denotaremos por $S'' := S' \times_S S'$ y $S''' := S'' \times_S S'$, las cuales vendrán dotadas de las proyecciones $\pi_1, \pi_2\colon S'' \to S'$ y $\pi_{ij}\colon S''' \to S''$ con $1 \le i < j \le 3$.

Definición 10.46: En la situación 10.45, un haz cuasicoherente sobre S' con dato de cubrimiento $(\mathscr{F}', \varphi)$ se dice que conforma un ***dato de descenso*** si el siguiente diagrama conmuta (llamado *condición de cociclos*):

$$\begin{tikzcd}
& \pi_{12}^*\pi_1^*\mathscr{F} \arrow[r, "\pi_{12}^*\varphi"] \arrow[dl, equal] & \pi_{12}^*\pi_2^*\mathscr{F} \arrow[dr, equal] & \\
\pi_{13}^*\pi_1^*\mathscr{F} \arrow[dr, "\pi_{13}^*\varphi"'] & & & \pi_{23}^*\pi_1^*\mathscr{F} \arrow[dl, "\pi_{23}^*\varphi"] \\
& \pi_{13}^*\pi_2^*\mathscr{F} \arrow[r, equal] & \pi_{23}^*\pi_2^*\mathscr{F} &
\end{tikzcd}$$

Los haces cuasicoherentes con datos de descenso conforman una subcategoría plena $\mathscr{D}_{S'/S} \subseteq \mathscr{C}_{S'/S}$. Se dice que el dato de descenso φ es ***efectivo*** si el par $(\mathscr{F}', \varphi)$ está en la imagen esencial[3] del funtor de pull-back $p^*(-)$.

[3] Vale decir, si $(\mathscr{F}', \varphi)$ es isomorfo (en $\mathscr{C}_{S'/S}$) a $p^*\mathscr{F}$, para algún haz cuasicoherente $\mathscr{F}$ sobre S.

Ejemplo. En la situación 10.45, sea $\mathscr{F}$ un haz cuasicoherente sobre S. Entonces, se sigue que Id es un dato de descenso para $p^*\mathscr{F}$, de modo que $p^*(-)\colon \mathsf{QCoh}_S \to \mathscr{D}_{S'/S}$ es plenamente fiel.

Lema 10.47.A: Supongamos que $p\colon S' \to S$ es un morfismo con una sección (o equivalentemente, que $S'(S) \neq \varnothing$). Entonces todo dato de descenso sobre un $\mathscr{O}_{S'}$-módulo cuasicoherente $\mathscr{F}'$ es efectivo.

Demostración: Sea $s \in S'(S)$. Vamos a probar que la cuasi-inversa de $p^*(-)\colon \mathsf{QCoh}_S \to \mathscr{D}_{S'/S}$ es s^*. Sea $(\mathscr{F}', \varphi)$ un haz cuasicoherente sobre S' con un dato de descenso; dados tres puntos T-valuados $t_1, t_2, t_3 \in S'(T)$ y empleando pull-back por $(t_i, t_j)\colon T \to S''$ obtenemos el isomorfismo $\varphi_{t_i,t_j} : t_i^*\mathscr{F}' \to t_j^*\mathscr{F}'$ (con $1 \leq i < j \leq 3$) de «ser un dato de cubrimiento» y la condición de cociclos como

$$\varphi_{t_1,t_3} = \varphi_{t_1,t_2} \circ \varphi_{t_2,t_3}.$$

Empleando los puntos $t_1 = \mathrm{Id}_{S'}$ y $t_2 = s \circ p \in S'(S')$ obtenemos un isomorfismo

$$f := \varphi_{t_1,t_2} \colon \mathscr{F}' = t_1^*\mathscr{F}' \to t_2^*\mathscr{F}' = p^*\mathscr{F},$$

donde $\mathscr{F} := s^*\mathscr{F}'$. Para probar que f es un isomorfismo en $\mathscr{C}_{S'/S}$ queremos probar que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\pi_1^*\mathscr{F}' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_1^* f"'] & \pi_2^*\mathscr{F}' \arrow[d, "\pi_2^* f"] \\
\pi_1^* p^*\mathscr{F} \arrow[r, equal] & \pi_2^* p^*\mathscr{F}
\end{tikzcd} \tag{10.3}$$

conmuta, para ello considere los puntos valuados

$$\pi_1, \quad \pi_2, \quad t_3 := \pi_1 \circ p \circ s = \pi_2 \circ p \circ s \in S'(S''),$$

y nótese que

$$\varphi_{\pi_1,\pi_2} = \varphi, \qquad \varphi_{\pi_1,t_3} = \pi_1^* f, \qquad \varphi_{\pi_2,t_3} = \pi_2^* f,$$

de modo que la condición de cociclos se traduce en que $\pi_1^* f = \varphi \circ \pi_2^* f$, es decir, que (10.3) conmuta. $\square$

Teorema 10.47 (Grothendieck): Sea $p\colon S' \to S$ un morfismo fpqc. Entonces el funtor $p^*(-)\colon \mathsf{QCoh}_S \to \mathscr{D}_{S'/S}$ es una equivalencia de categorías. Dicho de otro modo, todo dato de descenso sobre un $\mathscr{O}_{S'}$-módulo cuasicoherente es efectivo.

Demostración: Sea $u\colon T' \to S'$ un morfismo fpqc y sea $\overline{p} := u \circ p\colon T' \to S$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo de categorías y funtores

$$\begin{tikzcd} \mathsf{QCoh}_S \arrow[r, "p^*"] \arrow[dr, "\overline{p}^*"'] & \mathscr{D}_{S'/S} \arrow[d, hook, "u^*"] \\ & \mathscr{D}_{T'/S'}, \end{tikzcd}$$

donde u^* es plenamente fiel por la proposición **??**. Así, si probamos el enunciado para $\overline{p}^*$, veremos que u^* es una equivalencia y luego se sigue que p^* también.

Por ello, podemos suponer que $S = \operatorname{Spec} A$ y $S' = \operatorname{Spec} B$. Sea $(\mathscr{F}' = \widetilde{N}, \varphi)$ un B-módulo con dato de descenso $\varphi\colon N \otimes_A B \to B \otimes_A N$ (donde en el tensor identificamos a N con un A-módulo). Los A-homomorfismos $B \rightrightarrows B \otimes_A B$ dados por $b \mapsto b \otimes 1$ y $b \mapsto 1 \otimes b$ inducen, al tensorizar por $- \otimes_B N$ y componer con φ, un par de A-homomorfismos $N \rightrightarrows N \otimes_A B$, y definimos el A-módulo

$$K := \ker\Big(\; N \rightrightarrows N \otimes_A B, \; \Big).$$

Queremos probar que $K \otimes_A B = N$, pero, de momento, solo podemos construir el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, equal] & K \otimes_A B \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & K \otimes_A B \otimes_A B \arrow[d, dashed, "\beta"] \\ K \arrow[r] & N \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & N \otimes_A B \end{tikzcd}$$

donde queremos probar que α es un isomorfismo. Para ello, podemos hacer cambio de base fielmente plano $A \to B$ correspondiente al morfismo fpqc de esquemas $S'' \to S'$ que posee una sección, por lo que N_B desciende a un A_B-módulo, por el lema anterior, y este necesariamente es K_B, es decir, α_B es un isomorfismo y, finalmente, α también. $\square$

11

Esquemas de Hilbert y de Picard

En éste capítulo construimos varios tipos de esquemas de moduli y estudiamos sus aplicaciones. Para adelantar, los esquemas de Hilbert son fundamentales en la teoría de deformaciones, mientras que los esquemas de Picard tienen fuertes aplicaciones para curvas y variedades abelianas.

11.1 El funtor de puntos de Hilbert

§11.1.1 Regularidad de Castelnuovo-Mumford y estratificación plana. Entendemos por *estratificación* el proceso de descomponer un esquema en varios. Esta sección está inspirada en el capítulo 4 de SERNESI [**17**].

Definición 11.1: Sea k un cuerpo. Un haz coherente $\mathscr{F}$ en $\mathbb{P}^n_k$ se dice m-***regular*** si

$$\forall p > 0 \qquad H^p(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{F}(m-p)) = 0.$$

Por anulamiento de Serre, todo haz coherente es m-regular para algún m suficientemente grande. Nótese que la definición es generalizable a cualquier S-esquema proyectivo con un haz S-muy amplio fijo, no obstante, reduciremos la discusión posterior a éste contexto.

Proposición 11.2: Sea k un cuerpo. Si $\mathscr{F}$ es un haz m-regular sobre $\mathbb{P}^n_k$, entonces:

1. El homomorfismo canónico
$$H^0(\mathbb{P}^n_A, \mathscr{O}(1)) \otimes H^0(\mathbb{P}^n_A, \mathscr{F}(r)) \to H^0(\mathbb{P}^n_A, \mathscr{F}(r+1))$$
es sobreyectivo para todo $r \geq m$.

2. $H^p(\mathbb{P}^n_A, \mathscr{F}(r)) = 0$ para todo $p > 0$ y $r \geq m - p$. En consecuencia, $\mathscr{F}$ es m'-regular para todo $m' \geq m$.

3. El haz $\mathscr{F}(r)$ es globalmente generado y H^p-acíclico para $r \geq m$.

Demostración: Probaremos los incisos 1 y 2 por inducción sobre n. Si $n = 0$, entonces $\mathbb{P}^0_k = \operatorname{Spec} k$ es afín y el enunciado es claro. Haciendo cambio de base podemos suponer que k es infinito. Supongamos que $n > 0$ y sea H un hiperplano (una subvariedad cerrada íntegra de codimensión 1) que no contiene ningún punto de $\operatorname{As}\mathscr{F}$ (el cual existe puesto que $\operatorname{As}\mathscr{F}$ es finito). Tensorizando la sucesión exacta $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-H) \hookrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_k} \twoheadrightarrow \mathscr{O}_H$ por $\mathscr{F}(r)$ obtenemos
$$0 \longrightarrow \mathscr{F}(r-1) \longrightarrow \mathscr{F}(r) \longrightarrow \mathscr{F}|_H(r) \longrightarrow 0.$$
Y así, por la sucesión exacta larga en cohomología, obtenemos para todo $p > 0$:
$$H^p(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{F}(m-p)) \longrightarrow H^p(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{F}|_H(m-p)) \longrightarrow H^{p+1}(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{F}(m-p-1))$$
de modo que $\mathscr{F}|_H$ es m-regular en H. Así, por hipótesis inductiva, los incisos 1 y 2 son ciertos para $\mathscr{F}|_H$.

Nuevamente, por la sucesión exacta larga en cohomología, para $p \geq 0$:
$$H^{p+1}(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{F}(m-p-1)) \longrightarrow H^{p+1}(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{F}(m-p)) \longrightarrow H^{p+1}(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{F}|_H(m-p))$$
donde el término izquierdo es nulo por definición de «m-regular», y el derecho es nulo por el inciso 2; lo que prueba que $\mathscr{F}$ es $(m+1)$-regular.

Considere entonces el siguiente diagrama conmutativo:
$$\begin{tikzcd}
 & H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{F}(m)) \otimes H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{O}(1)) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\mu"] & H^0(H, \mathscr{F}_H(m)) \otimes H^0(H, \mathscr{O}_H(1)) \arrow[d, "\tau"] \\
H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{F}(m)) \arrow[r, "\alpha"] & H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{F}(m+1)) \arrow[r, "\nu_{r+1}"'] & H^0(H, \mathscr{F}_H(m+1))
\end{tikzcd}$$

Nótese que la restricción $\nu_r \colon H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{F}(r)) \to H^0(H, \mathscr{F}_H(r))$ es sobreyectiva, puesto que $H^1(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{F}(r-1)) = 0$ por m-regularidad, de modo que σ es sobreyectivo. Asimismo, τ es sobreyectivo por hipótesis inductiva, por lo que su composición $\sigma \circ \tau$ es sobreyectiva; luego $\mu \circ \nu_{r+1}$ también y $H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{F}(r+1)) = \operatorname{Img}\mu + \ker(\nu_{r+1})$. Por exactitud de la fila inferior, $H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{F}(r+1)) = \operatorname{Img}\mu + \operatorname{Img}\alpha$, pero como $\operatorname{Img}\alpha \subseteq \operatorname{Img}\mu$, concluimos que $H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{F}(r+1)) = \operatorname{Img}\mu$, lo que prueba el inciso 1.

Finalmente para el inciso 3, considere el homomorfismo

$$H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{F}(r)) \otimes H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{O}(p)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{F}(r+p))$$

el cual es sobreyectivo para $r \geq m$ y $p \geq 0$ por iteración del inciso 1. Como $\mathscr{F}(r+p)$ está globalmente generado para $p \gg 0$, concluimos que $\mathscr{F}(r)$ también; que los grupos de cohomología superior se anulen se sigue del inciso 2. □

De la demostración se extrae lo siguiente:

Corolario 11.2.1: Sea k un cuerpo y sean $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ haces coherentes en $\mathbb{P}^n_k$. Si $\mathscr{F}$ es m-regular y la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}(-1) \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow 0 \tag{11.1}$$

es exacta, entonces $\mathscr{G}$ es m-regular.

Teorema 11.3: Sea k un cuerpo. Un haz coherente $\mathscr{F}$ sobre $\mathbb{P}^n_k$ es m-regular syss admite una resolución de la forma:

$$0 \to \mathscr{O}(-m-n-1)^{b_{n+1}} \to \cdots \to \mathscr{O}(-m)^{b_0} \to \mathscr{F} \to 0, \tag{11.2}$$

para algunos $b_0, \dots, b_{n+1} > 0$.

Demostración: $\Longleftarrow$. Si $\mathscr{F}$ admite la ... □

Teorema 11.4 (Mumford): Para todo $p, n \in \mathbb{N}$ existe un polinomio $F_{p,n} \in \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]$ que satisface lo siguiente: para todo cuerpo k y todo haz coherente $\mathscr{F}$ sobre $\mathbb{P}^n_k$ isomorfo a un subhaz de $\mathscr{O}^p_{\mathbb{P}^n_k}$, sea

$$\chi_k(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{F}(r)) = \sum_{i=0}^{n} a_i \binom{r}{i}$$

su polinomio de Hilbert-Samuel; entonces $\mathscr{F}$ es m-regular con $m := F_{p,n}(a_0, \dots, a_n)$.

Demostración: ... □

Lema 11.5: Sea $f\colon T \to S$ un morfismo entre esquemas noetherianos y sea $\mathscr{F}$ un haz coherente sobre $\mathbb{P}^n_S$. Denótese por $\mathscr{F}_T := (f_{\mathbb{P}^n_S})^*\mathscr{F}$ el pull-back, y por $\pi_T\colon \mathbb{P}^n_T \to T$, $\pi_S\colon \mathbb{P}^n_S \to S$ los morfismos canónicos. Entonces el homomorfismo canónico

$$f^*(\pi_S)_*\mathscr{F}(r) \xrightarrow{\sim} (\pi_T)_*\mathscr{F}_T(r)$$

es un isomorfismo para $r \gg_f 0$ suficientemente grande.

La notación «$\gg_f$» enfatiza que el tamaño de r depende de f. El enunciado es un análogo a la fórmula de proyección, pero sin hipótesis de planitud.

Demostración: Como el enunciado es válido con f un encaje abierto (por la fórmula de proyección), podemos cubrir a S y a T mediante finitos abiertos afines, y suponer que S, T son esquemas afines.

Nótese que un cálculo da que el enunciado es cierto para los haces de torcimientos $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_S}(r)$; más aún, si $\varphi\colon \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_S}(a) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_S}(b)$ es un homomorfismo de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}$-módulos, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
f^*(\pi_S)_*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_S}(a+r) \arrow[r, "f^*(\pi_S)_*\varphi(r)"] \arrow[d, "\wr"] & f^*(\pi_S)_*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_S}(b+r) \arrow[d, "\wr"] \\
(\pi_T)_*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_T}(a+r) \arrow[r, "(\pi_T)_*\varphi_T(r)"'] & (\pi_T)_*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_T}(b+r)
\end{tikzcd}$$

□

§11.1.2 El esquema de Hilbert.

Definición 11.6: Sea X un S-esquema. Se define el ***funtor de Hilbert*** como

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hilb}(X/S)\colon (\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathsf{Set} \\
T &\longmapsto \{\text{subesquemas } Z \subseteq X_T \text{ propios y planos sobre } T\}.
\end{aligned}$$

Si X es proyectivo sobre S, $\mathscr{O}_X(1)$ es un haz S-amplio y $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ es un polinomio numérico, entonces definimos el funtor de Hilbert $\operatorname{Hilb}_P(X/S)$ tal que sus T-puntos valuados son los subesquemas $Z = \mathbf{V}(\mathscr{I}) \subseteq X_T$ propios y planos sobre T cuyos polinomios de Hilbert son $P(x)$:

$$\chi(X_T, \mathscr{I}^{\otimes n} \otimes \mathscr{O}(1)) = P(n), \qquad n \gg 0.$$

Dado un S-esquema conexo T, entonces vemos que

$$\operatorname{Hilb}(X/S)(T) = \coprod_P \operatorname{Hilb}_P(X/S)(T).$$

El funtor anterior admite una generalización natural, aunque un tanto más complicada:

Definición 11.7: Sea X un esquema de tipo finito sobre un esquema noetheriano S, y sea $\mathscr{E}$ un haz coherente de X. Dado un S-esquema T, una ***familia de cocientes de $\mathscr{E}$ parametrizada por*** T es un par $(\mathscr{F}, q)$ tal que:

1. $\mathscr{F}$ es un haz coherente de X_T, plano relativo a T y con soporte esquemático propio sobre T.
2. $q\colon \pi^*\mathscr{E} \twoheadrightarrow \mathscr{F}$ es un epimorfismo, donde $\pi\colon X_T \to X$ es la proyección canónica.

Dos cocientes $(\mathscr{F}, q)$ y $(\mathscr{F}', q')$ se dicen *equivalentes* si existe un isomorfismo de haces $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \pi^*\mathscr{E} \arrow[r, "q"] \arrow[d, equal] & \mathscr{F} \arrow[d, "\varphi", "\wr"'] \\ \pi^*\mathscr{E} \arrow[r, "q'"'] & \mathscr{F}' \end{tikzcd}$$

Nótese que dado un S-morfismo $f\colon T' \to T$, entonces el pull-back $f^*q\colon f^*\pi^*\mathscr{E} \twoheadrightarrow f^*\mathscr{F}$ induce un epimorfismo, es plano y tiene soporte esquemático propio sobre T' por cambio de base y puesto que el tensor es exacto por la derecha y preserva planitud. Además, la operación de pull-back respeta equivalencias. Así, construimos el funtor

$$\begin{aligned} \operatorname{Quot}_{\mathscr{E}/X/S}\colon (\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathsf{Set} \\ T &\longmapsto \{\text{las clases de equivalencia } [\mathscr{F}, q] \text{ de cocientes parametrizados}\}. \end{aligned}$$

Si además fijamos un polinomio numérico $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ y un haz inversible $\mathscr{L}$ sobre X, entonces podemos denotar por $\operatorname{Quot}^{P,\mathscr{L}}_{\mathscr{E}/X/S}$ el subfuntor que asocia a T los cocientes parametrizados $(\mathscr{F}, q)$ tales que para todo punto $t \in T$, el polinomio de Hilbert-Samuel de la fibra $\mathscr{F}_t$ respecto a $\mathscr{L}_t$ sea P; en una fórmula:

$$\chi_{\Bbbk(t)}((X_T)_t, \mathscr{F}_t \otimes \mathscr{L}_t^{\otimes n}) = P(n), \qquad n \gg 0.$$

En efecto, con $\mathscr{E} := \mathscr{O}_X$ recuperamos $\operatorname{Hilb}_{X/S}$. Nótese que la última condición puede rebajar el «todo punto» a «algún punto» cuando T es conexo, puesto que el polinomio de Hilbert-Samuel es invariante en una familia plana.

Teorema 11.8: Sea X un S-esquema proyectivo, $\mathscr{O}_X(1)$ un haz S-amplio y $\mathscr{F}$ un haz coherente de X. Para todo polinomio numérico $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ hay un subesquema cerrado $i_P \colon S_P \hookrightarrow S$ tal que para todo S-esquema $p \colon T \to S$ son equivalentes:

1. El pull-back $p^*\mathscr{F}$ sobre X_T es plano sobre T y tiene polinomio de Hilbert-Samuel P.
2. El morfismo p se factoriza:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "\exists!"'] & & S \\ & S_P \arrow[ur, hook, "i_P"'] & \end{tikzcd}$$

Teorema 11.9: Para todo polinomio numérico $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ existe un natural $N(P)$ tal que para todo subhaz de ideales $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{O}_{\mathbb{P}^m_k}$ de un espacio proyectivo $\mathbb{P}^m_k$ sobre un cuerpo k con polinomio de Hilbert-Samuel $P(x)$ y todo $n \geq N(P)$ se satisface que:

1. $H^p(\mathbb{P}^m_k, \mathscr{I}(n)) = 0$ para $p > 0$.
2. $\mathscr{I}(n)$ está globalmente generado.
3. El homomorfismo $H^0(\mathbb{P}^m_k, \mathscr{I}(n)) \otimes H^0(\mathbb{P}^m_k, \mathscr{O}(1)) \to H^0(\mathbb{P}^m_k, \mathscr{I}(n+1))$ es sobreyectivo.

Teorema 11.10 (Altman-Kleiman): Sea S un esquema noetheriano, sea $\pi \colon X \to S$ un subesquema cerrado de $\mathbb{P}_S(\mathscr{E})$ para algun haz localmente libre $\mathscr{E}$ sobre S, sea $\mathscr{L} := \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{E})}(1)|_X$, sea $\mathscr{Q}$ un haz coherente sobre X dado como cociente $\pi^*\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes s} \twoheadrightarrow \mathscr{Q}$ donde $\mathscr{F}$ es un haz localmente libre sobre S. Fijemos también un polinomio numérico $P \in \mathbb{Q}[t]$.

Entonces, el funtor $\operatorname{Quot}^{P,\mathscr{L}}_{\mathscr{F}/X/S}$ está representado por un subesquema cerrado de $\mathbb{P}_S(\mathscr{G})$, donde $\mathscr{G}$ es un haz localmente libre sobre S.

Teorema 11.11: Sea X un S-esquema proyectivo, $\mathscr{O}_X(1)$ un haz S-amplio de X y $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio numérico. Entonces el funtor de Hilbert $\operatorname{Hilb}_P(X/S)$ está representado por un S-esquema proyectivo $\mathbf{Hilb}_P(X/S)$.

DEMOSTRACIÓN:

(I) Como X es proyectivo, identifiquemoslo con un subesquema cerrado $X \hookrightarrow \mathbb{P}_S(\mathscr{E}) = \mathbb{P}^m_S$ donde $\mathscr{E}$ es un haz localmente libre de rango constante $m+1$ sobre S. Esto claramente induce un encaje cerrado de funtores $\operatorname{Hilb}(X/S) \hookrightarrow \operatorname{Hilb}(\mathbb{P}^m_S/S)$. Así, construiremos primero el esquema de Hilbert para $\mathbb{P}^m_S$. Denotaremos por $f\colon \mathbb{P}^m_S \to S$ el morfismo estructural.

(II) Dado un S-esquema T, sea $Z \hookrightarrow T \times_S \mathbb{P}^m_S = \mathbb{P}^m_T$ un subesquema cerrado plano sobre T con polinomio de Hilbert-Samuel P. Sea k un cuerpo con un morfismo $\operatorname{Spec} k \to T$ (i.e. un k-punto valuado), de modo que Z_k es un subesquema cerrado de $\mathbb{P}^m_k$. Sea $\mathscr{I}_k$ el haz de ideales tal que $Z_k = \mathbf{V}(\mathscr{I}_k)$, entonces

$$\begin{aligned}\chi_k(\mathbb{P}^m_k, \mathscr{I}_k(n)) &= \chi_k(\mathbb{P}^m_k, \mathscr{O}(n)) - \chi_k(Z_k, \mathscr{O}(n)) \\ &= \binom{m+n}{m} - \chi_k(Z_k, \mathscr{O}(n)) =: Q(n).\end{aligned}$$

Así, Q sólo depende de P y m.

Luego, sea $N := N(P)$ un entero tal que satisfaga el enunciado del teorema 11.9. De la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}_k \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^m_k} \longrightarrow \mathscr{O}_{Z_k} \longrightarrow 0$$

se induce la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow (f_k)_*\mathscr{I}_k(N) \longrightarrow (f_k)_*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^m_k}(N) \longrightarrow (f_k)_*\mathscr{O}_{Z_k}(N) \longrightarrow \mathsf{R}^1(f_k)_*\mathscr{I}_k(N).$$

Como $\mathscr{I}_k$ es plano y $H^p(\mathbb{P}^m_k, \mathscr{I}_k) = 0$ para todo $p > 0$, concluimos que $\mathsf{R}^1(f_k)_*\mathscr{I}_k(N) = 0$.

Usando que $H^p(\mathbb{P}^m_k, \mathscr{I}_k) = 0 = H^p(\mathbb{P}^m_k, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^m})$ para $p > 0$, y la sucesión exacta larga en cohomología, vemos que:

$$h^0(Z_k, \mathscr{O}) = P(N), \qquad H^p(Z_k, \mathscr{O}) = 0.$$

En consecuencia, $(f_T)_*\mathscr{O}_Z(N)$ es localmente libre de rango $P(N)$ y, por tanto,

$$(f_T)_*\mathscr{I}_Z(N) \hookrightarrow (f_T)_*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^m_k}(N) = f^* \operatorname{Sym}^N(\mathscr{E})$$

es un subhaz localmente libre de rango $Q(N)$. En definitiva, tenemos una transformación natural

$$\operatorname{Hilb}(\mathbb{P}^m_S/S) \longrightarrow \text{よ}\operatorname{Grass}^{Q(N)}(\operatorname{Sym}^N \mathscr{E}).$$

Construyamos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Grass}^{Q(N)}(\operatorname{Sym}^N \mathscr{E}) \times_S \mathbb{P}^m_S \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & \mathbb{P}^m_S \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Grass}^{Q(N)}(\operatorname{Sym}^N \mathscr{E}) \arrow[r, "g"'] & S
\end{tikzcd}$$

Sea $\mathscr{U} \hookrightarrow g^* \operatorname{Sym}^N \mathscr{E}$ la imagen de la identidad sobre $\operatorname{Grass}^{Q(N)}(\operatorname{Sym}^N \mathscr{E})$ mediante el funtor よGrass; y sea $\mathscr{F}$ el conúcleo de

$$\pi_1^*\mathscr{U} \to \pi_1^* g^* \operatorname{Sym}^N \mathscr{E} = \pi_2^* f^* \operatorname{Sym}^N \mathscr{E} = \pi_2^* f^* f_* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^m_k}(1) \twoheadrightarrow \pi_2^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^m_k}(1).$$

□

11.2 El funtor de Picard

La siguiente sección está inspirada en el capítulo de Kleiman [**0**].

Definición 11.12: Sea X un S-esquema. Se define el ***funtor de Picard absoluto*** de X/S como

$$\operatorname{Pic}_X \colon (\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}, \qquad T \mapsto \operatorname{Pic}(X_T).$$

Se define el ***funtor de Picard relativo*** de X/S como

$$\operatorname{Pic}_{X/S} \colon (\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}, \qquad T \mapsto \operatorname{Pic}(X_T)/\operatorname{Pic}(T).$$

Y dada una topología $\tau \in \{\mathrm{Zar}, \text{ét}, \mathrm{fppf}\}$ sobre Sch/S, denotamos por $\operatorname{Pic}_{X/S,\tau}$ a la hacificación del prehaz $\operatorname{Pic}_{X/S}$ en la topología τ. El funtor $\operatorname{Pic}_{X/S,\mathrm{fppf}}$ se llama el ***funtor de Picard***.

Cabe notar que las tres topologías pueden casualmente influir en distintas situaciones.

Teorema 11.13: Supongamos que $f \colon X \to S$ satisface lo siguiente:

(*) Para todo S-esquema T se cumple que $\mathscr{O}_T = (f_T)_* \mathscr{O}_{X_T}$.
Entonces:

1. Los morfismos de prehaces naturales son monomorfismos:

$$\operatorname{Pic}_{X/S} \hookrightarrow \operatorname{Pic}_{X/S,\mathrm{Zar}} \hookrightarrow \operatorname{Pic}_{X/S,\text{ét}} \hookrightarrow \operatorname{Pic}_{X/S,\mathrm{fppf}}.$$

2. Si además f posee una sección (i.e. existe $\sigma\colon S \to X$ tal que $\sigma \circ f = \operatorname{Id}_S$), entonces los morfismos superiores son isomorfismos.

La condición (*) se satisface, por el teorema principal de Zariski, cuando f es plano, propio, de presentación finita y tiene fibras geométricamente reducidas y geométricamente conexas.

Queremos estudiar cuando el funtor de Picard es representable; para ello emplearemos la representabilidad del esquema de Hilbert.

Definición 11.14: Sea X un S-esquema. Un ***divisor efectivo relativo*** (a S) es un divisor de Cartier efectivo $D \subseteq X$ (que puede identificarse con un subesquema cerrado, cfr. 9.31) tal que es plano sobre S (equivalentemente, tales que $\mathscr{O}_X(D)$ es S-plano).

Defínase el funtor

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}_{X/S}\colon (\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathsf{Set} \\ T &\longmapsto \{\text{divisores efectivos relativos de } X_T/T\}. \end{aligned}$$

Que $\operatorname{Div}_{X/S}$ sea un funtor se sigue de la siguiente proposición, cuya demostración es análoga a la de la proposición 9.31:

Proposición 11.15: Sea $f\colon X \to S$ un S-esquema. Sea $D \subseteq X$ un subesquema cerrado, $x \in D$ un punto y $s := f(x) \in S$ su imagen. Son equivalentes:

1. El subesquema D determina un divisor efectivo relativo en un entorno de x.

2. Los S-esquemas X y D son planos en x, y la fibra D_s es un divisor efectivo relativo de X_s.

3. El S-esquema X es plano en x y el subesquema $D \subseteq X$ es de la forma $\mathbf{D}_A(f)$ en un entorno afín $\operatorname{Spec} A$ de x, donde f es regular en la fibra X_s.

Teorema 11.16: Sea X un S-esquema plano y proyectivo. Entonces $\mathrm{Div}_{X/S}$ es un funtor representado por un subesquema abierto $\mathbf{Div}_{X/S}$ del esquema de Hilbert $\mathbf{Hilb}_{X/S}$.

Finalmente tenemos todo lo necesario para definir el esquema de Picard:

Definición 11.17: Sea X un S-esquema. Si algun funtor $\mathrm{Pic}_{X/S,\tau}$ con $\tau \in \{\mathrm{Zar}, \text{ét}, \mathrm{fppf}\}$ es representable, entonces el esquema que le representa, denotado $\mathbf{Pic}_{X/S}$, se llama el ***esquema de Picard*** de X/S.

Si existe el esquema de Picard, se dice que un haz inversible $\mathscr{P}$ sobre $X \times_S \mathbf{Pic}_{X/S}$ es un ***haz de Poincaré*** (o *haz universal*) si para todo S-esquema T y todo haz inversible $\mathscr{L}$ en $X \times_S T$ existe un único S-morfismo $h\colon T \to \mathbf{Pic}_{X/S}$ tal que para algún haz inversible $\mathscr{N}$ sobre T se cumpla que

$$\mathscr{L} \simeq (\mathrm{Id}_X \times_S h)^* \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}_{X_T}} f_T^* \mathscr{N}.$$

La situación viene descrita en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X_T \arrow[r, "\mathrm{Id}_X \times_S h"] \arrow[d, "f_T"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & X \times_S \mathbf{Pic}_{X/S} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "\exists! h"'] & \mathbf{Pic}_{X/S} \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Proposición 11.18: Sea X un S-esquema tal que $\mathbf{Pic}_{X/S}$ existe.

1. Para todo S-esquema T, el esquema $\mathbf{Pic}_{X_T/T}$ existe y $\mathbf{Pic}_{X_T/T} \cong \mathbf{Pic}_{X/S} \times_S T$.
2. Existe un haz de Poincaré sobre $X \times_S \mathbf{Pic}_{X/S}$ syss $\mathbf{Pic}_{X/S}$ representa a $\mathrm{Pic}_{X/S}$ (e.g. si f satisface (*)).

Definición 11.19: Sea $f\colon X \to S$ un morfismo de esquemas. Dada una propiedad $\mathcal{P}$ de morfismos y τ una topología sobre Sch (e.g. la topología de Zariski, étale, fppf, etc.), decimos que f es τ-localmente $\mathcal{P}$ si existe un τ-cubrimiento $\{U_i \to S\}_i$ tal que cada $f_{U_i}\colon X \times_S U_i \to U_i$ posee $\mathcal{P}$.

Teorema 11.20: Sea $f\colon X \to S$ un morfismo plano, con fibras geométricamente íntegras y Zariski-localmente proyectivo.

1. El funtor $\mathrm{Pic}_{X/S,\text{ét}}$ está representado por un S-esquema $\mathbf{Pic}_{X/S}$ separado y localmente de tipo finito. En consecuencia, es un S-esquema en grupos.

2. Más aún, si S es noetheriano y X es proyectivo sobre S, entonces $\mathbf{Pic}_{X/S}$ es una unión disjunta de subesquemas abiertos cuasiproyectivos sobre S.

Solo por completitud mencionamos el siguiente resultado: si rebajamos las hipótesis de f a que satisfaga (*), entonces $\mathbf{Pic}_{X/S}$ es un *espacio algebraico* (cfr., [**Stacks**], `Tag 0D2C`). Esta noción es más general que la de un esquema, pero es un sustituto útil para la representabilidad de algunos espacios de moduli.

Teorema 11.21: Sea X una curva proyectiva suave de género g sobre un cuerpo separablemente cerrado k. Entonces:

1. $\mathbf{Pic}_{X/k}$ es la unión disjunta de variedades completas suaves $\mathbf{Pic}^d_{X/k}$ de dimensión g, cuyos puntos k-racionales están en biyección con $\mathscr{O}_X$-módulos inversibles (salvo isomorfismo) de grado d.
2. $\mathbf{Pic}^0_{X/k}$ es un subesquema en grupos abierto (y cerrado) de $\mathbf{Pic}_{X/k}$.
3. Para todo $d \geq 0$ existe un morfismo canónico $\gamma_d\colon \mathbf{Hilb}^d_{X/k} \to \mathbf{Pic}^d_{X/k}$.
4. Los γ_d's son sobreyectivos para $d \geq g$ y suaves para $d \geq 2g-1$.
5. El morfismo $\gamma_g\colon \mathbf{Hilb}^g_{X/k} \to \mathbf{Pic}^g_{X/k}$ es birracional.

§11.2.1 Los teoremas del subibaja y del cubo. Los dos siguientes resultados son fundamentales en la teoría de esquemas abelianos.

Lema 11.22.A: Sea X una variedad completa sobre un cuerpo k. Un haz inversible $\mathscr{L}$ sobre X es trivial syss $\Gamma(X,\mathscr{L}) \neq 0 \neq \Gamma(X,\mathscr{L}^{-1})$.

Demostración: $\Longrightarrow$. Trivial.

$\Longleftarrow$. Sean $0 \neq s \in \Gamma(X,\mathscr{L})$ y $0 \neq t \in \Gamma(X,\mathscr{L}^{-1})$ y consideremos los homomorfismos de multiplicación $s\colon \mathscr{O}_X \to \mathscr{L}$ y $t\colon \mathscr{L} \to \mathscr{O}_X$. Como X es íntegro, entonces $s \circ t \in \Gamma(X,\mathscr{O}_X)$ es no nulo. Como X es propio sobre k, entonces $\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$ es una extensión finita de k, de modo que $s \circ t$ ha de ser un isomorfismo, por lo que t es un epimorfismo y, finalmente, todo epimorfismo entre $\mathscr{O}_X$-módulos localmente libres de igual rango es un isomorfismo. □

En los siguientes lemas, dado un espacio anillado $(X,\mathscr{O}_X)$, se denota por VB_X la categoría de $\mathscr{O}_X$-módulos localmente libres de rango finito.

Lema 11.22.B: Sea $f\colon X \to S$ un morfismo de espacios anillados. Para todo abierto $U \subseteq S$ considere el funtor

$$f_U^*\colon \mathsf{VB}_U \to \mathsf{VB}_{f^{-1}[U]}, \qquad \mathscr{M} \mapsto (f|_U)^*\mathscr{M}.$$

Entonces los funtores f_U^* son plenamente fieles para cada abierto $U \subseteq S$ syss $f^\sharp\colon \mathscr{O}_S \to f_*\mathscr{O}_X$ es un isomorfismo.

Demostración: $\Longrightarrow$. La condición de que los funtores f_U^* sean plenamente fieles se traduce en que haya una biyección a nivel de Hom's, lo que induce un isomorfismo

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) \to (f_U)_* f_U^*\, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2). \tag{11.3}$$

Sustituyendo $U = S$ y $\mathscr{M}_1 = \mathscr{M}_2 = \mathscr{O}_S$, obtenemos el buscado $\mathscr{O}_S = f_*\mathscr{O}_X$.

$\Longleftarrow$. Si $\mathscr{O}_S = f_*\mathscr{O}_X$, entonces claramente $\mathscr{O}_U = (f_U)_*\mathscr{O}_{f^{-1}[U]}$ para todo abierto $U \subseteq S$. Para todo $\mathscr{M} \in \operatorname{Obj} \mathsf{VB}_U$ se cumple que $(f_U)_* f_U^* \mathscr{M} = \mathscr{M}$; esto puede verificarse localmente, de modo que restringiendo U podemos suponer que $\mathscr{M} = \mathscr{O}_U^n$ y, por tanto, es obvio. Finalmente, empleando que $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) = \mathscr{M}_1^\wedge \otimes \mathscr{M}_2$ concluimos el isomorfismo (11.3). □

Lema 11.22.C: Sea $f\colon X \to S$ un morfismo de espacios anillados tal que $f^\sharp$ es un isomorfismo. Para un $\mathscr{O}_X$-módulo localmente libre $\mathscr{E}$ de rango r, son equivalentes:

1. $\mathscr{E}$ es isomorfo a un haz de la forma $f^*\mathscr{M}$.
2. El $\mathscr{O}_S$-módulo $f_*\mathscr{E}$ es localmente libre y el homomorfismo canónico $f^*f_*\mathscr{E} \to \mathscr{E}$ es un isomorfismo.
3. Los $\mathscr{O}_S$-módulos $f_*\mathscr{E}, f_*\mathscr{E}^\wedge$ son localmente libres de rango r y el emparejamiento canónico
$$f_*\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_S} f_*\mathscr{E}^\wedge \to f_*(\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E}^\wedge) \to f_*\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_S \tag{11.4}$$
es perfecto.

Más aún, si $\mathscr{E}$ satisface lo anterior y $f_T^\sharp$ es un isomorfismo tras todo cambio de base por $u\colon T \to S$ en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \times_S T \arrow[r, "u_X"] \arrow[d, "f_T"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "u"'] & S \end{tikzcd} \tag{11.5}$$

entonces $(f_T)_* u_X^* \mathscr{E} = u^* f_* \mathscr{E}$.

Demostración: $1 \implies 2+3$. Sea $\mathscr{M} \in \operatorname{Obj} \mathsf{VB}_S$ tal que $\mathscr{E} \simeq f^*\mathscr{M}$. Por el lema anterior, $\mathscr{M} \simeq f_*\mathscr{E}$, de modo que $f_*\mathscr{E}$ es localmente libre de rango r ya que $f^*f_*\mathscr{E} = \mathscr{E}$. El mismo argumento aplica para $f_*(\mathscr{E}^\wedge)$, por lo que vemos que $\mathscr{M}^\wedge = f_*(\mathscr{E}^\wedge)$ y, por lo tanto, el emparejamiento (11.4) es perfecto. Para ver que $f^*f_*\mathscr{E} \to \mathscr{E}$ es un isomorfismo, basta probarlo localmente y, por tanto, podemos suponer que $\mathscr{E}|_U = \mathscr{O}_U^r$ y emplear que $\mathscr{O}_S \to f_*\mathscr{O}_X$ es un isomorfismo.

$3 \implies 2$. Sea $\mathscr{M} := f_*\mathscr{E}$, el cual es localmente libre por hipótesis. Como la cuestión es local, podemos suponer que $\mathscr{M} \simeq \mathscr{O}_S^r \simeq f_*(\mathscr{E}^\wedge)$, de modo que $\varphi\colon f^*\mathscr{M} = \mathscr{O}_X^r \to \mathscr{E}$ se corresponde de manera única a un homomorfismo en $\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_S^r, f_*\mathscr{E}^\wedge)$ por definición de plenamente fiel. Finalmente, por hipótesis existe

$$\psi \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_S^r, f_*(\mathscr{E}^\wedge)) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X^r, \mathscr{E}^\wedge) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{O}_X^r)$$

tal que $\varphi \circ \psi = \operatorname{Id}_{\mathscr{O}_X^r}$. Así, ψ es sobreyectivo y, por tanto, un isomorfismo.

$2 \implies 1$. Es trivial.

Para probar el «más aún» basta notar que

$$(f_T)_*u_X^*\mathscr{E} = (f_T)_*u_X^*f^*f_*\mathscr{E} = (f_T)_*f_T^*u^*f_*\mathscr{E} = u^*f_*\mathscr{E},$$

donde empleamos que $(f_T)^*$ y f_T^* son funtores inversos por el lema anterior empleando que $f_T^\sharp$ es un isomorfismo. □

Teorema 11.22 (del subibaja): Sea S localmente noetheriano y sea $f\colon X \to S$ un morfismo plano, propio con fibras geométricamente conexas y geométricamente reducidas. Dado un $\mathscr{O}_X$-módulo localmente libre $\mathscr{E}$ de rango finito existe un único subesquema $Z \subseteq S$ tal que para todo S-esquema $u\colon T \to S$, entonces u se factoriza a través de Z syss existe un $\mathscr{O}_T$-módulo localmente libre de rango finito $\mathscr{M}$ tal que $f_T^*\mathscr{M} \cong u_X^*\mathscr{E}$.

Además:

1. El encaje $Z \hookrightarrow S$ es de tipo finito y como conjunto
$$Z = \{s \in S : \mathscr{E}_s \text{ es un } \mathscr{O}_{X_s}\text{-módulo libre}\}.$$
2. Supongamos que existe $t \in Z$ tal que $H^1(X_t, \mathscr{O}_{X_t}) = 0$. Entonces, existe un abierto $U \subseteq S$ tal que $t \in U \subseteq Z$.
3. Supongamos que f posee fibras geométricamente íntegras y que $\mathscr{E}$ es inversible. Entonces Z es un subesquema cerrado.

Demostración: La unicidad de Z es obvia. Por el inciso 2 de la proposición 5.32 se sigue que el conjunto de puntos X_r donde $\mathscr{E}$ tiene rango r es abierto y cerrado. Como f es cerrado (pues es propio) y abierto (pues es plano), entonces $S_r := f[X_r] \subseteq S$ es un subesquema abierto y cerrado, y $X_r = f^{-1}[S_r]$; como las fibras de f son conexas, entonces podemos suponer que $\mathscr{E}$ tiene rango constante r ya que todas las propiedades sobre f son Zariski-locales.

Ver [**0,** pág. 403], 24.61, 24.63.

Por factorización de Stein se verifica que $f_T^\sharp$ es un isomorfismo para todo cambio de base. El inciso 1 se verifica por cohomología y cambio de base. ... □

Lema 11.23.A: Sea S localmente noetheriano y $f\colon X \to S, f_i\colon X_i \to S$ un conjunto de S-esquemas planos, propios con fibras geométricamente conexas y geométricamente reducidas. Considere el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[rr, "g_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Sea $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo localmente libre de rango r tal que $g_i^*\mathscr{E} \simeq \mathscr{O}_{X_i}^r$ y sea

$$Z = \{s \in S : \mathscr{E}_s \text{ es un } \mathscr{O}_{X_s}\text{-módulo libre}\}.$$

Supongamos que $s \in Z$ satisface que el homomorfismo

$$H^1(X_s, \mathscr{O}_{X_s}) \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^n H^1(X_{i,s}, \mathscr{O}_{X_{i,s}})$$

sea inyectivo. Entonces existe un entorno abierto $U \subseteq S$ de s tal que $f_*\mathscr{E}|_U \simeq \mathscr{O}_U^r$ y tal que $f^*f_*\mathscr{E} \to \mathscr{E}$ sea un isomorfismo sobre U. En consecuencia, $U \subseteq Z$.

Teorema 11.23 – *Teorema del cubo*: Sea S localmente noetheriano y sean X, Y un par de S-esquemas planos, propios con fibras geométricamente conexas y geométricamente reducidas. Dado otro S-esquema T, un haz inversible $\mathscr{L}$ sobre $X \times_S Y \times_S T$, secciones $x \in X(S), y \in Y(S)$ y un punto $t_0 \in T$ tales que las restricciones de $\mathscr{L}$ en $\{x\} \times_S Y \times_S T$, $X \times_S \{y\} \times_S T$ y $X \times_S Y \times_S \{t_0\}$ sean triviales. Entonces existe un entorno abierto y cerrado $W \subseteq T$ de t_0 tal que $\mathscr{L}|_{X\times_S Y\times_S W}$ es trivial.

12

Esquemas en grupos

12.1 Propiedades generales

Definición 12.1: Sea S un esquema base. Un ***esquema en grupos***[1] G sobre S es una cuádrupla (G, m, i, e), donde G es un S-esquema y $m\colon G \times_S G \to G, i\colon G \to G, e\colon S \to G$ son S-morfismos tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} G \times_S G \times_S G \arrow[r, "m \times_S \mathrm{Id}_G"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_G \times_S m"'] & G \times_S G \arrow[d, "m"] \\ G \times_S G \arrow[r, "m"'] & G \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G \times_S S \arrow[r, "\mathrm{Id}_G \times_S e"] \arrow[d, "\wr"] & G \times_S G \arrow[d, "m"] \\ G \arrow[r, equal] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "(\mathrm{Id}_G, i)"] \arrow[d] & G \times_S G \arrow[d, "m"] \\ S \arrow[r, "e"'] & G \end{tikzcd}$$

Aquí, al morfismo m se le llama ***multiplicación***, a i se le llama ***inversa*** y a e se le llama el ***neutro***. Los diagramas se interpretan como la condición de asociatividad, neutro y existencia de inversas resp.

Sea $U\colon \mathsf{Grp} \to \mathsf{Set}$ el funtor olvidadizo. Por el lema de Yoneda, un esquema en grupos G sobre S es un S-esquema G dotado de un funtor $\mathfrak{G}\colon (\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to$

[1] Fr. *(pré)schémas en groupes*, eng. *group schemes.*

Grp tal que el siguiente diagrama conmuta (en Cat):

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \arrow[rr, "よG"] \arrow[dr, "\mathfrak{G}"'] & & \mathsf{Set} \\
& \mathsf{Grp} \arrow[ur, "U"'] &
\end{tikzcd}$$

Desde esta perspectiva, un S-esquema en grupos es un prehaz sobre la categoría Sch/S; si a esta la dotamos de una topología subcanónica como $\tau \in \{\mathrm{Zar}, \text{ét}, \mathrm{fppf}, \mathrm{fpqc}\}$, entonces es un haz sobre S_τ representable. Esta última perspectiva es importante, ya que varias propiedades dependen más de la naturaleza del haz, que la del esquema subyacente.

Proposición 12.2: Sea S un esquema base y (G, m) un esquema en grupos sobre S. Dado un S-esquema T, se cumple que (G_T, m_T) es un esquema en grupos sobre T.

Hay que notar que este «cambio de base», como funtor, no hace nada más que restringirse a la subcategoría de T-esquemas.

Ejemplo. Ahora daremos varios ejemplos de esquemas en grupos sobre $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ que, por cambio de base, induce una familia de esquemas en grupos relativos.

1. El ***esquema en grupos aditivo*** $\mathbb{G}_a$ es aquel que representa al funtor $\mathbb{G}_a(X) := \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$. Su esquema subyacente es $\mathbb{G}_a = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[t])$. Por cambio de base definimos $\mathbb{G}_{a,S} := \mathbb{G}_a \times_{\mathbb{Z}} S$.

2. Los ***esquemas en grupos general lineales*** GL_n son aquellos que representan al funtor $\mathrm{GL}_n(X) := \mathrm{GL}_n(\Gamma(X, \mathscr{O}_X))$ de matrices de $n \times n$ invertibles. Su esquema subyacente es el espectro del anillo

   $$A := \mathbb{Z}[\{z_{ij} : 1 \le i, j \le n\}][\det{}^{-1}],$$

   donde $\det(\boldsymbol{z}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) z_{1,\sigma(1)} \cdots z_{n,\sigma(n)} \in \mathbb{Z}[\{z_{ij}\}_{i,j}]$ es el polinomio determinante. Por cambio de base definimos $\mathrm{GL}_{n,S} := \mathrm{GL}_n \times_{\mathbb{Z}} S$.

   El ***esquema en grupos multiplicativo*** es $\mathbb{G}_{m,S} := \mathrm{GL}_{1,S}$, y sobre S-esquemas evalúa $\mathbb{G}_{m,S}(T) = \Gamma(T, \mathscr{O}_T)^\times$. El esquema subyacente de $\mathbb{G}_m = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$.

3. Dado un grupo Γ, el ***esquema en grupos constante*** $G := \underline{\Gamma}_S$ es aquel que representa al funtor

$$\underline{\Gamma}_S(T) := \{T \to \Gamma \text{ función localmente constante}\}.$$

Su esquema subyacente es la unión disjunta $\coprod_\Gamma S$.

Un caso particular sucede cuando $\Gamma = \{1\}$ es el grupo trivial, entonces $\underline{1}_S$ se dice el ***esquema en grupos trivial*** y $\underline{1}_S(T) = \{1\}$.

4. El esquema en grupos dado por las ***raíces n-ésimas de la unidad*** es el que representa al funtor

$$\mu_n(X) := \{u \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X) : u^n = 1\}.$$

Su esquema subyacente es $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[t]/(t^n - 1))$ y, por cambio de base, definimos $\mu_{n,S} := \mu_n \times_{\mathbb{Z}} S$.

Es un ejercicio típico de álgebra probar que el polinomio determinante es irreducible, de modo que GL_1 es un esquema íntegro.

Ejemplo. Sea k un cuerpo de $\operatorname{car} k =: p$. Vamos a analizar el comportamiento de $\mu_{n,k}$, el cual es finito sobre k (o equivalentemente, es propio y afín sobre k).

1. Si $p \nmid n$, entonces factorizamos $t^n - 1 = (t-1)f_1(t) \cdots f_r(t)$, donde cada $f_i(t) \in k[t]$ es irreducible y notamos que, en particular, no es conexo.

2. Si $p \mid n$, entonces $n = p^a m$ y $t^n - 1 = (t^m - 1)^a$, por lo que μ_n no es reducido y, por tanto, no es suave. No obstante, cuando $n = p$ sí es conexo.

Proposición 12.3: Sea G un esquema en grupos sobre un esquema S. Entonces G es separado (resp. cuasiseparado) sobre S syss el neutro $e\colon S \to G$ es un encaje cerrado (resp. morfismo compacto).

Demostración: $\Longrightarrow$. Basta aplicar el inciso 6 de la proposición 4.41 mirando a S como G-esquema con morfismo estructural $e\colon S \to G$ al morfismo canónico entre productos fibrados $S = G \times_G S \to G \times_S S = G$.

$\Longleftarrow$. Considere el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\Delta_{G/S}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & G \times_S G \arrow[d, "(g,h)\mapsto g^{-1}h"] \\
S \arrow[r, "e"] & G
\end{tikzcd}
$$

Aquí, denotamos $(g,h) \mapsto g^{-1}h$ al morfismo dado por $(i, \mathrm{Id}_G) \circ m \colon G \times_S G \to G$; de aquí en adelante emplearemos la notación sobre puntos. Es directo que el diagrama conmuta y es un ejercicio para el lector verificar que es un producto fibrado, de modo que si e es compacto o un encaje cerrado, entonces $\Delta_{G/S}$ lo es. □

La proposición anterior se puede generalizar a esquemas en grupos sobre esquemas artinianos (ejercicio).

Empleando la segunda perspectiva sobre la definición de esquema en grupos, obtenemos:

Definición 12.4: Sea S un esquema. Un ***homomorfismo de S-esquemas en grupos*** G, H es un morfismo $f \colon G \to H$ tal que para todo S-esquema T, la función inducida $f(T) \colon G(T) \to H(T)$ sea un homomorfismo de grupos.

En la primera perspectiva, esto se reduce a la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
G \times_S G \arrow[r, "f \times_S f"] \arrow[d, "m_G"'] & H \times_S H \arrow[d, "m_H"] \\
G \arrow[r, "f"'] & H
\end{tikzcd}
$$

Definición 12.5: Sea S un esquema, G un esquema en grupos sobre S y X otro S-esquema. Un morfismo $a \colon G \times_S X \to X$ se dice una ***acción*** de G sobre X (denotado, $G \curvearrowright X$) si para todo S-esquema T, la función $a(T) \colon G(T) \times_S X(T) \to X(T)$ determina una acción de conjuntos $G(T) \curvearrowright X(T)$.

En la primera perspectiva, se reduce a la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} G \times_S G \times_S X \arrow[r, "\mathrm{Id}_G \times_S a"] \arrow[d, "m \times_S \mathrm{Id}_X"'] & G \times_S X \arrow[d, "a"] \\ G \times_S X \arrow[r, "a"'] & X \end{tikzcd} \tag{12.1}$$

$$\begin{tikzcd} & S \times_S X \arrow[dl, "e \times_S \mathrm{Id}_X"'] \arrow[dr, equal] & \\ G \times_S X \arrow[rr, "a"'] & & X \end{tikzcd}$$

Hay una tercera opción y es que podemos definir el funtor

$$\mathfrak{A}_X : (\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Grp}, \qquad T \mapsto \mathrm{Aut}_T(X_T).$$

Entonces una acción derecha de G sobre X es lo mismo que darse una transformación natural $\mathfrak{G} \to \mathfrak{A}_X$. Esto es similar a cómo una acción (derecha) de un grupo G sobre un conjunto X es lo mismo que un homomorfismo de grupos $G \to \mathrm{Aut}_{\mathsf{Set}}(X)$.

Ejemplo 12.6 (acción trivial)**:** Sea S un esquema, G un S-esquema en grupos y X un S-esquema arbitrarios. La proyección $\pi_2 : G \times_S X \to X$ determina una acción de G sobre X, llamada la ***trivial***. Es fácil notar que, evaluando sobre un S-esquema T, determina una acción trivial de conjuntos sobre puntos T-valuados $G(T) \curvearrowright X(T)$. ⌟

Definición 12.7: Sea k un cuerpo. Un ***grupo (localmente) algebraico*** sobre k es un esquema en grupos, el cual es (localmente) de tipo finito sobre k.

Proposición 12.8: Sea G un grupo localmente algebraico sobre un cuerpo k. Entonces G es suave sobre k syss es geométricamente reducido.

Demostración: $\Longleftarrow$. Trivial.

$\Longrightarrow$. Como la propiedad de ser suave se preserva y refleja salvo cambio de base, podemos suponer que k es algebraicamente cerrado. Por el teorema 6.40 existe un punto cerrado $x \in G^0$ que es regular en G y, la multiplicación $m : G \times_k G \to G$ determina una acción $G \curvearrowright G$ (dicha *por traslación*). Esta acción es claramente transitiva, de modo que cada punto cerrado de G es suave y aplicando la proposición 6.35 vemos que esto es suficiente. □

Definición 12.9: Sea G un esquema en grupo sobre un esquema S. Un ***subesquema en grupos*** H de G, denotado $H \leq G$, es un esquema en grupos H sobre G con un homomorfismo $j\colon H \hookrightarrow G$ que es también un encaje; o equivalentemente, mediante el encaje j para todo S-esquema T se cumple que $H(T)$ es subgrupo de $G(T)$. Se dice que $H \leq G$ es un subesquema en grupos ***cerrado*** (resp. ***abierto***) si j es un encaje cerrado (resp. abierto).

Dado un homomorfismo de esquemas en grupos $\varphi\colon G \to H$, definimos su ***núcleo*** como el producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} \ker\varphi \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & S \arrow[d, "e"] \\ G \arrow[r, "\varphi"'] & H \end{tikzcd}$$

Proposición 12.10: Sea G un esquema en grupo sobre un cuerpo perfecto k. Entonces G_{red} es un k-subesquema en grupo cerrado de G y es suave sobre k.

Demostración: Como k es perfecto, vemos que G_{red} es geométricamente reducido y, como $G_{\text{red}} \times_k G_{\text{red}}$ es reducido, vemos que la multiplicación induce funtorialmente un morfismo $m_{\text{red}}\colon G_{\text{red}} \times_k G_{\text{red}} \to G_{\text{red}}$ puesto que $G_{\text{red}} \times_k G_{\text{red}}$ es reducido (inciso 2, prop. 4.23). Similarmente, la inversión y el neutro inducen funtorialmente los morfismos $i_{\text{red}}\colon G_{\text{red}} \to G_{\text{red}}$ y $e_{\text{red}}\colon S \to G_{\text{red}}$; de modo que $(G_{\text{red}}, m_{\text{red}}, i_{\text{red}}, e_{\text{red}})$ es un esquema en grupos sobre k y es geométricamente reducido (corolario 4.24.1), por lo que es suave. $\square$

Este resultado falla si asumimos que el cuerpo base no es perfecto.

Corolario 12.10.1: Sea G un grupo localmente algebraico sobre un cuerpo k. Entonces G es geométricamente irreducible syss es conexo.

Demostración: $\Longrightarrow$. Trivial.

$\Longleftarrow$. Como G es conexo y localmente de tipo finito, $G(k) \neq \varnothing$, por lo que es geométricamente conexo. Así, podemos suponer que k es algebraicamente cerrado y basta ver que G es irreducible. Podemos sustituir G por G_{red} (pues son homeomorfos) y, por tanto, G es suave; luego sus anillos locales son dominios íntegros y, por el corolario 3.79.1 vemos que G es íntegro. En consecuente, G es irreducible. $\square$

En consecuencia, si $\varphi\colon G \to H$ es un homomorfismo de esquemas en grupos y H es separado, entonces $\ker\varphi$ es un subesquema en grupos cerrado de G.

Ejemplo. Sea A un anillo arbitrario. El homomorfismo de grupos del determinante $\det\colon \mathrm{GL}_n(A) \to A^\times$ induce un homomorfismo de esquemas en grupos

$$\det\colon \mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathbb{G}_m.$$

Más aún, como $\mathbb{G}_m$ es afín, es separado y, por lo tanto, el núcleo $\mathrm{SL}_n := \ker\det$ es un subesquema en grupos cerrado de GL_n, llamado el ***especial lineal***. Como GL_n es afín y de tipo finito, entonces SL_n también es afín de tipo finito.

Lema 12.11.A: Sea (G, m) un esquema en grupos sobre un cuerpo k. Entonces el morfismo de multiplicación $m\colon G \times_k G \to G$ es abierto.

DEMOSTRACIÓN: Basta notar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
G \times_k G \arrow[r, "(g,h)\mapsto(gh,h)", "\sim"'] \arrow[d, "m"'] & G \times_k G \arrow[d, "(g,h)\mapsto g"] \\
G \arrow[r, "\mathrm{Id}_G", "\sim"'] & G
\end{tikzcd}$$

donde la flecha de arriba es un isomorfismo, puesto que su inversa es el morfismo $(g, h) \mapsto (gh^{-1}, h)$; y basta notar que la proyección es abierta. $\square$

Lema 12.11.B: Sea (G, m) un esquema en grupos sobre un cuerpo k. Dado un abierto $j\colon U \hookrightarrow G$ y un morfismo de esquemas $T \to G$, se satisface que la composición $(f, j) \circ m\colon T \times_k U \to G$ es un morfismo abierto.

DEMOSTRACIÓN: Para toda extensión de cuerpos K/k se satisface que el morfismo $G_K \to G$ es abierto. Todo punto $x \in T \times_k U$ es la imagen de algún $(t, u)\colon \operatorname{Spec} K \to T \times_k U$ (tómese $K = \Bbbk(x)$), luego la imagen de $T_K \times_K U_K = (T \times_k U)_K \to G_K$ contiene a la traslación $t \cdot U_K$ la cual es abierta, de modo que la imagen de $T \times_k U \to G$ contiene un entorno de la imagen de x; que es lo que se quería probar. $\square$

Lema 12.11.C: Sea $\varphi\colon G \to H$ un homomorfismo de esquemas en grupos sobre un cuerpo k. Si $\varphi[G] \subseteq H$ es un subconjunto abierto, entonces también es cerrado.

Demostración: Sea $U := \varphi[G] \subseteq H$ y sea $Z := (H \setminus U)_{\mathrm{red}}$. Por el lema anterior, la imagen de $Z \times_k G \to Z \times_k U \to H$ es abierta. Por otro lado, como φ es un homomorfismo de esquemas en grupos, la imagen de $Z \times_k G \to H$ está contenida en Z (porque la traslación $\varphi(g) \cdot U = U$ para todo $g \in G$), así pues, Z es un abierto (¡aunque no necesariamente un subesquema abierto!) y, por tanto, U es cerrado. □

Proposición 12.11: Sea G un esquema en grupos sobre un cuerpo k. Todo subesquema en grupos H de G es cerrado. En consecuencia, G es separado sobre k.

Demostración: Denotemos por $j \colon H \hookrightarrow G$ el encaje, basta probar que $j[H] \subseteq G$ es cerrado. Sea $K := k^{\mathrm{perf}}$, entonces como $G_K \to G$ es plano, compacto y suprayectivo, vemos que si $j_K[H_K] \subseteq G_K$ es cerrado, entonces $j[H] \subseteq G$ también. Así podemos suponer que k es perfecto y, por tanto, ser geométricamente reducido es lo mismo que ser reducido, por lo que el producto de esquemas reducidos es reducido (inciso 2, prop. 4.23). Como G_{red} es un subesquema en grupos cerrado de G (prop. 12.10), podemos sustituir G por G_{red} y reducirse al caso en que H, G sean reducidos.

Sea $\overline{H} \subseteq G$ la clausura de $j[H]$ visto como subesquema cerrado reducido de G. Así, $\overline{H \times_k H} = \overline{H} \times_k \overline{H} \subseteq G \times_k G$, de modo que $m[\overline{H} \times_k \overline{H}] \subseteq \overline{H}$ por continuidad, de modo que $\overline{H}$ es un subesquema en grupos de G. Así $j[H] \subseteq \overline{H}$ es un abierto, por lo que del lema anterior se sigue que $j[H] = \overline{H}$. □

Proposición 12.12: Sea G un grupo localmente algebraico sobre un cuerpo k.

1. La componente conexa $G^\circ \subseteq G$ del neutro e es un subesquema abierto y cerrado, geométricamente irreducible. En consecuencia, para toda extensión de cuerpos K/k se cumple que $(G_K)^\circ = (G^\circ)_K$.

2. Toda componente conexa de G es un subgrupo algebraico irreducible sobre k.

Demostración: En primer lugar, como G es localmente algebraico, entonces todo punto $g \in G$ posee un entorno U que es un esquema algebraico sobre k, luego U posee finitas componentes conexas, las cuales son abiertas. Así, concluimos que las componentes conexas de G son subesquemas abiertos (siempre son cerrados).

Como la operación de grupo $m \colon G \times_k G \to G$ es continua entre espacios topológicos, entonces la imagen de conexos es conexa, de modo que

G° demuestra ser un subgrupo (localmente) algebraico cerrado de G. Por el corolario 12.10.1, vemos que G° es geométricamente irreducible, luego en particular es compacto y, por tanto, un grupo algebraico. Finalmente, basta notar que $(G^\circ)_K$ siempre será un subgrupo algebraico de G_K conexo que contenga al neutro e para verificar que su formación conmuta con cambio de base. □

Más generalmente, la proposición anterior es cierta para *todos* los esquemas en grupos sobre un cuerpo (cfr. **[Stacks], `Tag 0B7R`**).

Proposición 12.13: Sea $f\colon G \to H$ un homomorfismo compacto entre grupos localmente algebraicos sobre un cuerpo k. Entonces:

1. $f[G]$ es un subgrupo algebraico de H.
2. Si H es suave y f es sobreyectivo, entonces f es fielmente plano.
3. $\dim G = \dim f[G] + \dim \ker f$.

Demostración: Sea $\pi\colon H_{k^{\mathrm{alg}}} \to H$ el morfismo canónico inducido por una inclusión $k \subseteq k^{\mathrm{alg}}$. Por cambio de base, π es sobreyectivo y entero, de modo que es una función cerrada y $\dim H = \dim \pi[H_{k^{\mathrm{alg}}}]$. Así pues, podemos suponer que k es algebraicamente cerrado.

1. Sea $X := \overline{f[G]}_{\mathrm{red}}$ visto como subesquema cerrado de H. Es claro que X es estable bajo el morfismo inversa $i\colon H \to H$. Ahora bien, $f\colon G \to X$ es compacto y dominante, por lo que $f \times_k f\colon G \times_k G \to X \times_k X$ también y, por lo tanto, vemos que X es estable bajo el morfismo de multiplicación; es decir, X es un subgrupo algebraico de H.

   Sustituyendo $X = H$, podemos suponer que f es dominante y queremos probar que es sobreyectivo. Por el teorema de Chevalley, $f[G]$ es constructible y, por tanto, contiene a un abierto denso $U \subseteq H$ (teorema 4.64). Pero es fácil ver que $U \cdot U = H$ (como los puntos cerrados coinciden con los puntos k-racionales, se convierte en una afirmación topológica), y como $U \cdot U \subseteq f[G]$, concluimos que $f[G] = H$.

2. Como H es reducido, entonces H° es íntegro. Así, por planitud genérica, existe un abierto denso $V \subseteq H^\circ$ tal que la restricción $f^{-1}[V] \to V$ es plana. Como f es un homomorfismo de grupos algebraicos, basta trasladar V para probar que es plano sobre todo punto en H.

3. Podemos sustituir H con $f[G]_{\mathrm{red}}$, así que $f\colon G \to H$ es fielmente plano y H es suave. Así $f[G^\circ]$ es abierto (puesto que f es plano) y también cerrado por el inciso 1, así que cae en H°. En consecuente, $f^\circ\colon G^\circ \to H^\circ$ es fielmente plano entre esquemas íntegros, y como G° es equidimensional concluimos la igualdad de dimensiones por el corolario 6.53.1. □

Proposición 12.14: Sea (G, m, e, i) un esquema en grupos sobre un esquema S. Denotando por $f\colon G \to S$ el morfismo estructural, existe un isomorfismo canónico:

$$\Omega_{G/S} \simeq f^* e^* \Omega_{G/S}.$$

En particular, si S es el espectro de un cuerpo, entonces $\Omega_{G/S}$ es un $\mathscr{O}_G$-módulo libre.

Demostración: Denotemos por π_1, π_2 las proyecciones de $G \times_S G \to G$. Consideremos a $G \times_S G$ como un esquema sobre G con morfismo estructural π_2, entonces por cambio de base (prop. 6.66):

$$\Omega_{G\times_S G/G} \simeq \pi_1^* \Omega_{G/S}.$$

Sea $\tau\colon G \times_S G \to G \times_S G$ el morfismo $(g, h) \mapsto (gh, h)$ sobre puntos, el cual es un automorfismo; entonces tenemos que

$$m^* \Omega_{G/S} = \tau^* \pi_1^* \Omega_{G/S} \simeq \pi_1^* \Omega^1_{G/S}$$

puesto que $\tau \circ \pi_1 = m$. Luego aplicamos c^* a ambos lados, donde $c := (f \circ e, \mathrm{Id}_G)\colon G \times_S G \to G \times_S G$, y notamos que $(c \circ m)(g, h) = e \cdot h = h$ y que $c \circ \pi_1 = f \circ e$, y concluimos que $\Omega_{G/S} \simeq f^* e^* \Omega^1_{G/S}$ como se quería probar. □

Teorema 12.15 (Cartier): Sea k un cuerpo de $\operatorname{car} k = 0$. Todo esquema localmente algebraico sobre k es suave (o equivalentemente, es reducido).

Demostración: Esto es un corolario de la proposición anterior y del criterio 6.76.1. □

Nótese que esto es falso en $\operatorname{car} k =: p > 0$, inclusive cuando k es perfecto (e.g. $k = \mathbb{F}_p$). Basta considerar al grupo de raíces de la unidad $\mu_{p,k}$ el cual siempre es no reducido. En cambio, en $\operatorname{car} k = 0$, se puede incluso remover la hipótesis de ser «localmente algebraico» (vid. Perrin [**28**]).

Lema 12.16.A: Sea G un grupo localmente algebraico sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. Para todo conjunto finito $g_1, \dots, g_n \in G(k)$ de puntos k-racionales existe un abierto afín $U \subseteq G$ que les contiene.

Teorema 12.16: Todo grupo algebraico sobre un cuerpo k es cuasiproyectivo.

12.2 Acciones de esquemas en grupos

Definición 12.17: Sea S un esquema, G un S-esquema en grupos y X un S-esquema. El par (X, a), donde $a\colon G \times_S X \to X$ determina una acción, se dice un ***S-esquema con G-acción***. De no haber ambigüedad obviaremos la acción.

Dados un par de S-esquemas con G-acciones X, Y, se dice que un S-morfismo $f\colon X \to Y$ es un morfismo ***G-equivariante*** si para todo S-esquema T determina un morfismo de $G(T)$-conjuntos $f(T)\colon X(T) \to Y(T)$. Diremos que el S-morfismo $f\colon X \to Y$ es ***G-invariante*** si es G-equivariante, donde la acción $G \curvearrowright Y$ es la trivial. Denotaremos por $\operatorname{Hom}_G(X, Y)$ al conjunto de morfismos G-equivariantes.

En la primera perspectiva, se reduce a la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G \times_S X & \xrightarrow{\operatorname{Id}_G \times_S f} & G \times_S Y \\ {\scriptstyle a_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a_Y} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

Ejemplo 12.18: Considere el grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m$. Éste actúa sobre el espacio afín agujereado $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$ donde, sobre puntos A-valuados, corresponde al producto escalar $u \cdot \boldsymbol{v}$ para $u \in A^\times$ y $\boldsymbol{v} \in A^{n+1}$ visto como un vector. Entonces el morfismo canónico $\pi\colon \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{P}^n$ es $\mathbb{G}_m$-invariante. ⌟

Teorema 12.19: Sea S un esquema, G un S-esquema en grupos separado y X un S-esquema separado con $G \curvearrowright X$. Defínase el siguiente funtor

$$\text{よ}X^G\colon (\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}, \qquad T \mapsto \operatorname{Hom}_G(T, X),$$

donde el S-esquema T está dotado de la acción trivial $G \curvearrowright T$. Entonces $\text{よ}X^G$ es representable por un subesquema cerrado $X^G \subseteq X$ llamado el ***esquema de puntos fijos***.

Demostración: Sea Y un S-esquema con acción $G \curvearrowright Y$ trivial. Si $f\colon Y \to X$ es un morfismo G-equivariante, entonces $f[Y] \subseteq X$ es un conjunto donde la acción de G es trivial. En consecuencia, ya que tanto G como X son separados, la acción de G es trivial sobre la imagen esquemática $\operatorname{Img} f \subseteq X$, el cual es un subesquema cerrado.

Así pues, sean $Y_j = \mathbf{V}_X(\mathscr{I}_j) \subseteq X$ la familia de subesquemas cerrados de X donde la acción de G es trivial, y sea $T := \overline{\bigcup_{j\in I} Y_j} = \mathbf{V}_X(\bigcap_{j\in I} \mathscr{I}_j) \subseteq X$ la unión esquemática. Ahora, para todo S-morfismo G-equivariante $f\colon Z \to X$, donde Z tiene acción $G \curvearrowright Z$ trivial, se cumple que su imagen esquemática $\operatorname{Img} f$ es uno de los Y_j's, por lo que se factoriza a través de T de manera única. Esto prueba que T representa al funtor よX^G como se quería ver. □

Corolario 12.19.1: Sea G un grupo algebraico sobre un cuerpo k. Supongamos que existe un esquema algebraico conexo X sobre k y una acción $G \curvearrowright X$ que fija a un punto cerrado $x \in X$. Entonces G es afín.

Definición 12.20: Sea S un esquema, X un S-esquema con una acción $G \curvearrowright X$ de un S-esquema en grupos G. Dado un S-esquema T y un punto T-valuado $t \in X(T)$, llamamos el ***estabilizador*** de t, denotado por Stab_t, a la fibra de t por el morfismo

$$\varphi_t\colon G_T \to X_T, \qquad g \mapsto g \cdot t.$$

La imagen de φ_t le llamamos la ***órbita*** de t y la denotamos por Orb_t.

Si agrandamos la situación descrita, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Stab}_t \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner" very near start] & T \arrow[d, "{(t,\operatorname{Id}_T)}"] & \\
G_T \arrow[r, "\varphi_t"'] & X_T \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner" very near start] & T \arrow[d] \arrow[dl, "t"'] \\
& X \arrow[r] & S
\end{tikzcd} \tag{12.2}$$

Proposición 12.21: Sea G un grupo algebraico sobre un cuerpo k, y sea X un k-esquema algebraico con acción $G \curvearrowright X$. La función $x \mapsto \dim \operatorname{Orb}_x$ es semicontinua inferior.

Demostración: Basta probar que la función $x \mapsto \dim \operatorname{Stab}_x$ es semicontinua superior.

Para ello, considere la identidad $c := \mathrm{Id}_X \in X(X)$ como un punto X-valuado de X. Entonces el estabilizador viene con un morfismo $f\colon \mathrm{Stab}_c \to X$ tal y como indica el diagrama (12.2); nótese que $\varphi_c(g, x) = (g \cdot x, x)$ por lo que la fibra de un punto esquemático $x \in X$ bajo f es precisamente el estabilizador Stab_x del punto. Así, la función $x \mapsto \dim \mathrm{Stab}_x$ es semicontinua superior. □

Definición 12.22 (Mumford): Sea S un esquema, G un S-esquema en grupos y X un S-esquema con acción $G \curvearrowright X$. Se dice que un S-morfismo $\pi\colon X \to Y$ es un ***cociente categorial*** si:

1. El morfismo π es G-equivariante, donde Y está dotado de la acción trivial.
2. Todo S-morfismo G-equivariante $p\colon X \to Z$, donde Z está dotado de la acción trivial, se factoriza en:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "\exists!"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Equivalentemente, un cociente categorial es un esquema que representa al funtor

$$(\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}, \qquad T \mapsto \mathrm{Hom}_G(X, T).$$

Se dice que $\pi\colon X \to Y$ es un ***cociente geométrico*** si:

CG1 El morfismo π es G-equivariante, donde Y está dotado de la acción trivial.

CG2 El morfismo π es sobreyectivo y para cada $x \in X$, la fibra de la imagen $X_{f(x)}$ es la órbita Orb_x.

CG3 El morfismo π es una identificación (topológica); vale decir, un subconjunto de Y es abierto syss su preimagen lo es en X.

CG4 Para todo abierto $U \subseteq Y$ se satisface que

$$\Gamma(U, \mathscr{O}_Y) = \Gamma(\pi^{-1}[U], \mathscr{O}_X)^G.$$

Proposición 12.23: Todo cociente geométrico es también un cociente categorial. En particular, si existe un cociente geométrico, entonces es único salvo isomorfismo.

Demostración: Sea $\pi\colon X \to Y$ un cociente geométrico y sea $p\colon X \to Z$ un S-morfismo G-equivariante, donde Z está dotado de la acción trivial. Por el axioma CG2, existe una única función $g\colon Y \to Z$ tal que $p = \pi \circ g$ y, por el axioma CG3, dicha h es continua. Como Z tiene acción trivial, entonces la imagen de $\mathscr{O}_Z \to p_*\mathscr{O}_X$ cae en

$$(p_*\mathscr{O}_X)^G = (g_*\pi_*\mathscr{O}_X)^G = g_*(\pi_*\mathscr{O}_X)^G = g_*\mathscr{O}_Y,$$

de modo que obtenemos un morfismo de haces $g^\sharp\colon \mathscr{O}_Z \to g_*\mathscr{O}_Y$. Así $(g, g^\sharp)\colon Y \to Z$ es un morfismo de esquemas que satisface que $p = \pi \circ g$. $\square$

Proposición 12.24: Sea S un esquema y X un S-esquema con acción $G \curvearrowright X$ del S-esquema en grupos G. Si X posee un cociente geométrico por G, entonces las órbitas de sus puntos cerrados son también cerradas. Además, si X es conexo, entonces las órbitas comparten dimensión.

Demostración: Sea $\pi\colon X \to Y$ un cociente geométrico por G, entonces la órbita de un punto cerrado $x \in X$ es la fibra $X_{f(x)}$, la cual es un subesquema cerrado. Así mismo, por semicontinuidad de dimensión en fibras, se obtiene que la función $x \mapsto \dim(X_{f(x)}) = \dim \operatorname{Stab}_x$ es semicontinua superior, pero también que es semicontinua inferior por la proposición 12.21, por lo que es localmente constante. Si X es conexo, entonces localmente constante es lo mismo que constante. $\square$

Ejemplo. Sea k un cuerpo arbitrario. Para todo $n \geq 1$ existe una acción canónica $\mathrm{GL}_{n,k} \curvearrowright \mathbb{A}^n_k$ que, sobre puntos, está dada por $(B, \boldsymbol{v}) \mapsto B \cdot \boldsymbol{v}$, pensando en los elementos de $\mathrm{GL}_n(k)$ como matrices y los de $\mathbb{A}^n(k)$ como vectores columna. En este caso, no existe el cociente geométrico $\mathbb{A}^n_k / \mathrm{GL}_{n,k}$ no existe, ya que la órbita de cualquier vector no nulo es todo $\mathbb{A}^n_k \setminus \{\vec{0}\}$, el cual es un esquema de dimensión n, mientras que la órbita de $\vec{0}$ es siempre $\{\vec{0}\}$ de dimensión 0.

Así parece que el problema con el contraejemplo anterior es exclusivamente la órbita del $\vec{0}$, que no está considerada en el ejemplo 12.18; por lo que uno podría insistir, ¿será éste un ejemplo de un cociente geométrico? La respuesta es que sí:

Teorema 12.25: Sea A un dominio íntegro y $B := \bigoplus_{d\geq 0} B_d$ una A-álgebra graduada. Supongamos que B es un anillo noetheriano, entonces el B-morfismo

$$X := \operatorname{Spec} B \setminus \mathbf{V}(B_+) \longrightarrow \operatorname{Proj} B$$

es $\mathbb{G}_{m,A}$-equivariante y es, de hecho, un cociente geométrico.

Definición 12.26: Sea S un esquema y G un S-esquema en grupos. Dado un S-esquema Y, un ***G-torsor sobre Y en la topología*** $\tau \in \{\mathrm{Zar}, \text{ét}, \mathrm{fppf}, \mathrm{fpqc}\}$ (o que es τ-trivial) es un S-morfismo G-invariante $f\colon X \to Y$, donde X posee una acción $G \curvearrowright X$ tales que:

Tor1 La acción de G sobre X es libre y transitiva: vale decir, el morfismo $G \times_S X \to X \times_S X$ dado por $(g, x) \mapsto (g \cdot x, x)$ es un isomorfismo.

Tor2 Existe un τ-cubrimiento $\{U_i \to Y\}_i$ de modo que $X \times_Y U_i \cong G \times_Y U_i$ (como U_i-esquemas).

De no especificarse, siempre supondremos que un G-torsor es fpqc-trivial.

El axioma Tor1 puede reescribirse como en que el siguiente diagrama sea cartesiano:

$$\begin{tikzcd} G \times_S X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\pi_2"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & X \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Ejemplo. Sea Y un esquema arbitrario y G un esquema en grupos. Entonces la proyección $\pi_2\colon G \times_{\mathbb{Z}} Y \to Y$ determina que un G-torsor sobre Y llamado el ***torsor trivial***. El G-torsor trivial es Zariski-trivial y el axioma Tor2 se traduce en que exista un cubrimiento para el cual los torsores dados por cambio de base sean triviales.

Proposición 12.27: Sea k un cuerpo, G un grupo algebraico e Y un esquema algebraico sobre k. Todo G-torsor $f\colon X \to Y$ es un cociente categorial.

Ejemplo. El siguiente ejemplo es de interés para teoristas de números: sea L/k una extensión finita de Galois. Denotando por $G := \overline{\mathrm{Gal}(L/k)}_{\operatorname{Spec} k}$ el k-esquema en grupos constante a valores en $\mathrm{Gal}(L/k)$, entonces existe una k-acción canónica $G \curvearrowright \operatorname{Spec} L$, de modo que $\operatorname{Spec} L$ es un $\mathrm{Gal}(L/k)$-torsor. Si $L \neq k$, entonces $\operatorname{Spec} L$ no posee puntos k-racionales, lo que considero ilustrador. Como toda extensión de Galois es separable, éste torsor es étale-trivial.

Definición 12.28: Sea A un anillo y M un A-módulo libre. Una ***representación lineal*** de un A-esquema en grupos G es un homomorfismo de A-esquemas en grupos $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_M$. En éste caso, decimos que M es un ***G-módulo***.

Proposición 12.29: Sean G un grupo algebraico y X un esquema algebraico sobre un cuerpo k con una acción $G \curvearrowright X$. El G-módulo $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ es la unión de sus G-submódulos de dimensión finita.

Demostración: La acción $a\colon G \times_k X \to X$ induce un homomorfismo

$$a^\sharp\colon \mathscr{O}_X(X) \longrightarrow \mathscr{O}(G \times_k X) \cong \mathscr{O}_G(G) \otimes_k \mathscr{O}_X(X).$$

Sea $\{e_i\}_{i\in I}$ una k-base de $\Gamma(G, \mathscr{O}_G)$, Para todo $f \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$, existen $f_i \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ donde todos salvo finitos son nulos tales que

$$a^\sharp(f) = \sum_{i\in I} e_i \otimes f_i.$$

Consideremos, en particular, $a = m$ el morfismo de multiplicación; entonces tenmos que

$$m^\sharp(\varphi_j) = \sum_{i,\ell} r_{ij\ell} e_i \otimes e_\ell$$

donde $r_{ij\ell} = 0$ para todos salvo finitos (i, ℓ)'s. Ahora, mirando el diagrama (12.1) que representa una acción mediante k-morfismos y tomamos secciones globales obtenemos que

$$a^\sharp \circ (m^\sharp \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{O}(X)}) = a^\sharp \circ (\mathrm{Id}_{\mathscr{O}(G)} \otimes a^\sharp)$$

aplicando ello a $f \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ vemos que

$$\sum_{i,j,\ell} r_{ij\ell}(e_j \otimes e_\ell \otimes f_i) = \sum_j e_j \otimes a^\sharp(f_j)$$

por lo que, comparando coeficientes de $e_j \otimes 1 \otimes 1$ se obtiene que

$$a^\sharp(f_j) = \sum_{i,\ell} r_{ij\ell} e_\ell \otimes f_i.$$

Así pues, sea V el k-subespacio vectorial generado por f y los f_i's (de los cuales, finitos son no nulos); vemos que conforma un G-submódulo de $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$. $\square$

Ejemplo 12.30: Sea k un cuerpo, G un grupo algebraico afín sobre k y V un k-espacio vectorial. Si V es un G-módulo, entonces una acción derecha de $G(k)$ sobre V induce una acción izquierda $G(k)$ sobre $V^\vee = \operatorname{Hom}_k(V, k)$, y también sobre $\operatorname{Sym}^n(V^\vee)$, de modo que induce una acción sobre el fibrado vectorial $\mathbf{V}_k(V^\vee)$. ⌟

Proposición 12.31: Sea G un grupo algebraico sobre un cuerpo k y sea X un esquema algebraico afín sobre k con acción $G \curvearrowright X$. Existe un G-módulo V de dimensión finita y un encaje cerrado G-equivariante $X \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbf{V}_k(V^\vee)$

Demostración: Basta notar que las secciones globales $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ son una k-álgebra de tipo finito, por lo que un sistema generador (como álgebra) está contenido en un k-subespacio vectorial $V \leq \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ de dimensión finita que sea también un G-módulo. Así la transformación k-lineal G-equivariante $V \hookrightarrow \mathscr{O}_X(X)$ se extiende, de forma única, a un homomorfismo G-equivariante de k-álgebras $\operatorname{Sym}(V) \twoheadrightarrow \mathscr{O}_X(X)$, el cual es necesariamente sobreyectivo, por tanto, induce a nivel de esquemas un encaje cerrado G-equivariante $X \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbf{V}_k(V^\vee)$ □

Corolario 12.31.1: Todo grupo algebraico afín es lineal.

12.3 Variedades y esquemas abelianos

Las variedades abelianas constituyen uno de los espacios más importantes en la geometría algebraica. Su principal exponente son las curvas elípticas, y la regla del pulgar es que «todo aquello que es cierto para curvas elípticas, admite una generalización a variedades abelianas».

> **Definición 12.32:** Sea k un cuerpo. Una ***variedad abeliana*** sobre k es un esquema en grupos, el cual es conexo, geométricamente reducido y propio sobre k.

De las proposiciones anteriores, se sigue que hay $2\times 4\times 2 = 16$ definiciones equivalentes de «variedad abeliana»:

Proposición 12.33: Tome un término de cada uno de los siguientes tres conjuntos de propiedades:

- Propio, proyectivo.

- Geométricamente irreducible, irreducible, geométricamente conexo, conexo.
- Suave, geométricamente reducido.

Entonces una variedad abeliana sobre un cuerpo k es equivalente a un esquema en grupos sobre k con dichas propiedades (e.g. «proyectivo, conexo y suave» es una definición equivalente).

Definición 12.34: Un esquema en grupos G sobre un esquema S se dice ***conmutativo*** si para todo S-esquema T se cumple que $A(T)$ es conmutativo; esto equivale a que, denotando por m la multiplicación de G y por $s\colon G \times_k G \to G$ al morfismo dado por $(g, h) \mapsto (h, g)$, tenemos que $s \circ m = m$.

En general no se emplea la expresión «esquema en grupos abeliano» para reservar el último adjetivo para las variedades abelianas.

Proposición 12.35 (lema de rigidez): Sea X un esquema geométricamente reducido, geométricamente conexo y propio sobre un cuerpo k tal que $X(k) \neq \varnothing$. Sea Y un k-esquema íntegro y Z un esquema separado sobre k. Dado un morfismo $f\colon X \times_k Y \to Z$ tal que para algún $y \in Y(k)$, se tiene que $f|_{X \times_k \operatorname{Spec} \Bbbk(y)}$ se factoriza a través de un punto k-racional $z \in Z(k)$; entonces f se factoriza por la proyección $X \times_k Y \to Y$.

Demostración: Sea $(x\colon \operatorname{Spec} k \to X) \in X(k)$ visto como un morfismo y considere a los morfismos $f, g := \pi_2 \circ (x \times_k \mathrm{Id}_Y) \circ f\colon X \times_k Y \to Z$. Queremos verificar que $f = g$ o, equivalentemente, que el subconjunto $\ker(f, g) \subseteq X \times_k Y$ es todo.

Sea $U \subseteq Z$ un entorno afín de z. Como X es propio, entonces $\pi_2\colon Y_X \to Y$ es cerrado. Por hipótesis, $\pi_2^{-1}[\{y\}] \subseteq f^{-1}[U]$ y, por lo tanto, existe un entorno afín $V \subseteq Y$ de y tal que $\pi_2^{-1}[V] \subseteq f^{-1}[U]$. Sea $y' \in Y$, la restricción $X \times_k \operatorname{Spec} \Bbbk(y') \to U \times_k \operatorname{Spec} \Bbbk(y') \subseteq Z$ se factoriza por un punto $\Bbbk(y')$-valuado por el corolario **??**. Así que $\ker(f, g)$ contiene a todo $X \times_k V$, el cual es un abierto denso de $X \times_k Y$. Además, $\ker(f, g)$ es cerrado puesto que Z es separado sobre k y, como $X \times_k Y$ es reducido, concluimos que $X \times_k Y = \ker(f, g)$. □

Corolario 12.35.1: Sea k un cuerpo. Se cumplen:

1. Todo k-morfismo de esquemas $f\colon A \to B$ entre variedades abelianas tal que $f(e_A) = e_B$ es un homomorfismo de esquemas en grupos sobre

k.

2. Toda variedad abeliana sobre k es un esquema en grupos conmutativo.

Demostración:

1. Considere la composición

$$g\colon A \times_k A \xrightarrow{\quad h \quad} B \times_k B \xrightarrow{\quad m_B \quad} B,$$

donde $h = (m_A \circ f, (f \times_k f) \circ m_B \circ i_B)$; sobre puntos S-valuados, $g\colon (a,b) \mapsto f(ab)(f(a)f(b))^{-1}$. Basta probar que g es constante y, por axiomas de grupos, es fácil notar que g es constante en $A \times_k \{e_A\}$ y $\{e_A\} \times_k A$. Por el lema de la rigidez, g se factoriza por la primera y segunda proyección, por lo que es fácil comprobar que es constante.

2. Basta aplicar el inciso 1 a la inversión $i_A\colon A \to A$, pues nos da que $a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$. □

En vistas del resultado anterior, ahora denotaremos por $+ = m$ y $- = i$ los morfismos de multiplicación y de inversa dentro de una variedad abeliana.

Ahora querremos llegar a describir los morfismos de multiplicación, para lo que necesitaremos los siguientes resultados, maravillosamente presentados en Mumford [**16**].

Proposición 12.36: Sea X una variedad completa sobre un cuerpo k, sea Y un esquema sobre k y $\mathscr{L}$ un haz inversible en $X \times_k Y$. Existe un único subesquema cerrado $Y_1 \hookrightarrow Y$ que satisface la siguiente propiedad universal:

1. Si $\mathscr{L}_1 := \mathscr{L}|_{X \times_k Y_1}$, entonces hay un haz inversible $\mathscr{M}_1$ sobre Y_1 tal que $\mathscr{L}_1 \simeq \pi_2^* \mathscr{M}_1$ (donde $\pi_2\colon X \times_k Y_1 \to Y_1$ es la proyección).

2. Si $f\colon Z \to Y$ es un k-morfismo tal que existe otro haz inversible $\mathscr{M}$ sobre Z tal que $\pi_2^* \mathscr{M} \simeq (\mathrm{Id}_X \times_k f)^* \mathscr{L}$, entonces f se factoriza:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\exists!"'] & & Y \\ & Y_1 \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Demostración: De la propiedad universal es claro que si existe es único. Si $Y_1 \hookrightarrow Y$ es un cerrado elegido con $\mathscr{L}_1 := \mathscr{L}|_{X \times_k Y_1}$, entonces basta probar que $\mathscr{M}_1 := (\pi_2)_*(\mathscr{L}_1)$ es un haz inversible y satisface que el homomorfismo natural $\pi_2^*\mathscr{M}_1 \to \mathscr{L}_1$ sea un isomorfismo.

Sea $\{V_i \subseteq Y\}_i$ un cubrimiento por abiertos tal que para cada i existe un $Z_i \hookrightarrow\!\!\!\to V_i$ con la propiedad universal para $\mathscr{L}|_{V_i}$. Nótese que $Z_i \cap (V_i \cap V_j)$ y $Z_j \cap (V_i \cap V_j)$ ambos satisfacen la propiedad universal, luego son el mismo cerrado y, por tanto, $Z_i = Y_1 \cap V_i$. □

Definición 12.37: Sea X un esquema en grupos sobre un esquema base S. Se dice que X es un ***esquema abeliano*** si:

AB1. El morfismo estructural $X \to S$ es propio, plano y localmente de presentación finita.

AB2. Las fibras del morfismo estructural son conexas y geométricamente reducidas.

Nótese que si $S = \operatorname{Spec} k$ es el espectro de un cuerpo, entonces la condición AB1. se reduce a que simplemente X sea un grupo algebraico completo, suave (equivalente a ser geométricamente reducido) y conexo.

El objetivo de esta generalización recae en la observación de que las fibras (respecto a S) de un esquema abeliano, son variedades abelianas clásicas y que, al exigir que el morfismo estructural sea plano, vemos que un esquema abeliano es una familia de deformaciones de variedades abelianas, con una estructura de grupo adicional. Un objetivo alternativo es que los esquemas abelianos son módelos de Néron de su fibra genérica.

El teorema del cubo usual toma la siguiente forma:

Teorema 12.38 (del cubo): Sea S un esquema localmente noetheriano y A un esquema abeliano sobre S. Para todo haz inversible $\mathscr{L}$ sobre A, denotando por $\pi_i \colon A \times_S A \times_S A \to A$ las proyecciones, se satisface que el haz

$$\begin{multline}(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)^*\mathscr{L} \otimes (\pi_1 + \pi_2)\mathscr{L}^{-1} \otimes (\pi_2 + \pi_3)^*\mathscr{L}^{-1} \\ \otimes (\pi_1 + \pi_3)^*\mathscr{L}^{-1} \otimes \pi_1^*\mathscr{L} \otimes \pi_2^*\mathscr{L} \otimes \pi_3\mathscr{L} \quad (12.3)\end{multline}$$

es trivial en $A \times_S A \times_S A$.

Corolario 12.38.1: Sea A un esquema abeliano sobre un esquema localmente noetheriano S. Sea $\mathscr{L}$ un haz inversible sobre A, entonces:

1. Para todo $n \in \mathbb{Z}$ se satisface que

$$[n]_A^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}^{\frac{1}{2}(n^2+n)} \otimes [-1]_A^*\mathscr{L}^{\frac{1}{2}(n^2-n)}. \quad (12.4)$$

2. **Teorema del cuadrado:** Dados $x, y \in A(S)$, entonces denotando por $t_x \colon A \to A$ el morfismo de traslación $a \mapsto a + x$ (sobre puntos S-valuados), se satisface que
$$t_{x+y}^* \mathscr{L} \otimes \mathscr{L} \cong t_x^* \mathscr{L} \otimes t_y^* \mathscr{L}.$$
3. La aplicación
$$\varphi_{\mathscr{L}} \colon A(S) \to \operatorname{Pic}(A), \qquad x \mapsto t_x^* \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^{-1},$$
es un homomorfismo de grupos. Más aún, para todo $x \in A(S)$ se cumple que $\varphi_{t_x^* \mathscr{L}} = \varphi_{\mathscr{L}}$.

DEMOSTRACIÓN: Como las preguntas son salvo isomorfismo de haces, podemos trabajar directamente con la clase $L := [\mathscr{L}] \in \operatorname{Pic} A$. Así, empleamos notación aditiva (e.g. $L_1 + L_2 := [\mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2]$).

1. Considere el morfismo $f := ([n]_A, \mathrm{Id}_A, [-1]_A) \colon A \to A \times_S A \times_S A$ que, sobre puntos S-valuados, se ve como $a \mapsto (n \cdot a, a, -a)$. Aplique el pullback f^* a (12.3) lo que da:
$$[n]^* L + [n]^* L + L + [-1]^* L = [n+1]^* L + [n-1]^* L.$$
Podemos proceder de manera inductiva, empleando que los casos base $n \in \{0, \pm 1\}$ son triviales. Así, por hipótesis inductiva:
$$\begin{aligned} [n+1]^* L = (n^2 + n) \cdot L + (n^2 - n) \cdot [-1]^* L + L + [-1]^* L \\ + \frac{(n^2 - n)}{2} \cdot L + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot [-1]^* L. \end{aligned}$$
Y un despeje sencillo nos da lo deseado.
2. Esto se obtiene aplicando el pullback $(t_0, t_x, t_y) \colon A \to A \times_S A \times_S A$ a (12.3), notando que $t_x + t_y = t_{x+y}$.
3. Aplicando el teorema del cuadrado, tenemos
$$\begin{aligned} \varphi_L(x+y) &= t_{x+y}^* L - L = t_{x+y}^* L + L - 2L \\ &= t_x^* L - L + t_y^* L - L = \varphi_L(x) + \varphi_L(y). \end{aligned}$$
Por lo que, en efecto, se trata de un homomorfismo de grupos. Para verificar el «más aún», basta ver que:
$$\varphi_{t_x^* L}(y) = t_y^*(t_x^* L) - L + L - t_x^* L = \varphi_L(x+y) - \varphi_L(x) = \varphi_L(y). \qquad \square$$

Es claro, de la definición de $\varphi_{\mathscr{L}}$, que la función solo depende de la clase de $\mathscr{L}$ en $\operatorname{Pic} A/\operatorname{Pic} S = \mathbf{Pic}_{A/S}(S)$.

Definición 12.39: Sea A un esquema abeliano sobre un esquema localmente noetheriano S. Denotaremos por $\operatorname{Pic}^0(A)$ a las clases $L \in \operatorname{Pic} A$ tales que $\varphi_L = 0$, el homomorfismo nulo.

La notación se justificará más adelante. El «más aún» del inciso 3 se traduce en que el codominio es, de hecho, $\operatorname{Pic}^0(A)$.

Corolario 12.39.1: Sea A un esquema abeliano sobre un esquema localmente noetheriano S, entonces:

1. $\varphi_{\mathscr{O}_A}$ es el homomorfismo nulo.
2. Dados $D_1, D_2 \in \operatorname{Div} A$ se cumple que $\varphi_{D_1} + \varphi_{D_2} = \varphi_{D_1+D_2}$.
3. Si $D_1 \equiv D_2$, entonces $\varphi_{D_1} = \varphi_{D_2}$.
4. Dado $x \in A$ se cumple $\varphi_{t_x^* D} = \varphi_D$.

Lema 12.40.A: Sea $f\colon A \to B$ un homomorfismo de S-esquemas abelianos. Son equivalentes:

1. f es un morfismo cuasifinito, de presentación finita y plano.
2. f es sobreyectivo y $\ker f \to S$ es cuasifinito.
3. Para todo $s \in S$ se cumple que $\dim(A_s) = \dim(B_s)$ y $\ker(f_s)$ es un $\Bbbk(s)$-esquema finito.
4. Para todo $s \in S$ se cumple que $f_s\colon A_s \to B_s$ es un morfismo sobreyectivo y finito.

Demostración: Es claro que f es un morfismo de tipo finito. La equivalencia «$2 \iff 4$» se deduce de que un morfismo $X \to \operatorname{Spec} k$ es cuasifinito syss es finito.

$2 \implies 1$. ... □

Definición 12.40: Sea $f\colon A \to B$ un homomorfismo de S-esquemas abelianos. Se dice que f es una ***isogenia*** si satisface las condiciones del lema anterior.

Proposición 12.41: Sea A un esquema abeliano sobre un esquema localmente noetheriano S. Un haz inversible $\mathscr{L}$ sobre A es amplio syss el homomorfismo $\varphi_{\mathscr{L}}\colon A(S) \to \operatorname{Pic}^0(A)$ es sobreyectivo.

Definición 12.42: Sea A un esquema abeliano sobre un esquema S. Un haz inversible $\mathscr{L}$ sobre A se dice ***simétrico*** si, denotando $L := [\mathscr{L}] \in \operatorname{Pic}(A)/\operatorname{Pic}(S)$, se cumple que $[-1]^*L = L$.

La fórmula (12.4) para haces simétricos implica que $[n]^*L = n^2 \cdot L$.

Ejemplo. Si $A = E$ es una curva elíptica sobre un cuerpo k, entonces podemos identificar clases $L \in \operatorname{Pic}(E)/\operatorname{Pic}(k) = \operatorname{Pic}(E)$ con clases de divisores de Weil. Así pues, sea $D = \sum_{i=1}^n a_i \cdot [x_i]$ un divisor de Weil sobre E_k, donde $a_i \in \mathbb{Z}$ son coeficientes enteros y los x_i's son puntos cerrados de E. Recuérdese que aquí, la suma es formal y no tiene que ver con la operación de suma de E. El pullback es

$$[-1]^*D = \sum_{i=1}^n a_i \cdot [-x_i].$$

Los divisores de Weil simétricos forman un subgrupo generado por $[0]$ (que es el punto neutro, no el divisor nulo), y los de la forma $[x] + [-x]$, donde $x \in E$ es un punto cerrado.

Corolario 12.42.1: En una variedad abeliana A sobre un cuerpo k siempre existe un haz inversible simétrico $\mathscr{L}$ muy amplio.

Demostración: Sabemos que las variedades abelianas son proyectivas, por lo que existe un haz muy amplio $\mathscr{A}$. Como $[-1]_A\colon A \to A$ es un automorfismo, entonces $[-1]^*\mathscr{A}$ también es muy amplio y, por tanto, $\mathscr{L} := \mathscr{A} \otimes [-1]^*\mathscr{A}$ funciona. □

Proposición 12.43: Sea A un esquema abeliano sobre un esquema S de dimensión relativa g, y sea $n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ un entero.

1. El endomorfismo de multiplicación $[n]_A\colon A \to A$ es una isogenia de grado n^{2g}. En particular, su subesquema en grupos de torsión $A[n]$ es un S-esquema en grupos finito localmente libre.
2. Si n es inversible en $\Gamma(S, \mathscr{O}_S)$, entonces $[n]_A\colon A \to A$ es un morfismo étale finito. En particular, $A[n]$ es étale finito.

3. Si n es inversible en $\Gamma(S, \mathscr{O}_S)$, entonces existe un recubrimiento étale finito $T \to S$ de modo que $A_T[n] \cong \underline{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}}_T$ (el esquema en grupos constante).

Demostración:

1. Como ser una isogenia se verifica en fibras, supondremos que $S = \operatorname{Spec} k$ donde k es un cuerpo. Por el corolario anterior, sea $\mathscr{L}$ inversible simétrico y muy amplio en A; tomando la restricción de $[n]^*\mathscr{L} \cong \mathscr{L}^{\otimes n^2}$ en el núcleo $A[n]$ de $[n]_A$, vemos que $\mathscr{L}^{\otimes n^2}|_{A[n]}$ es trivial y muy amplio. Así pues, $A[n]$ es cuasiafín y propio, es decir, es un k-esquema finito.

   Para ver que $\deg([n]) = n^{2g}$ basta calcular
   $$\deg([n]) \deg \mathscr{L} = \deg([n]^*\mathscr{L}) = \deg(\mathscr{L}^{\otimes n^2}) = n^{2g} \deg \mathscr{L},$$
   como $\mathscr{L}$ es amplio, se cumple que $\deg \mathscr{L} > 0$ y, por tanto, $\deg([n]) = n^{2g}$ como se quería ver.

Justificar mejor, vid. [**0,** pág. 675].

2. Por cohomología étale, podemos suponer que $S = \operatorname{Spec} k$ donde k es un cuerpo algebraicamente cerrado por descenso fpqc. Para ver que $[n]$ sea un morfismo étale basta verificar que induce un isomorfismo en espacios tangente. Pero en el espacio tangente del neutro $0 \in A(S)$, el morfismo $[n]$ se ve como multiplicación por n, el cual es un isomorfismo de k-espacios vectoriales syss $n \in k^\times$.

3. Como $A[n]$ es un S-esquema en grupos finito étale, por lo que existe un recubrimiento étale finito $T \to S$ de modo que $A_T[n] = (A[n])_T \cong \underline{G}_T$ para algún grupo abeliano finito G de orden n^{2g} y de pura n-torsión. Ahora bien, para todo $d \mid n$ el subgrupo de d-torsión $G[d]$ también es de orden d^{2g}, de modo que por clasificación de grupos abelianos finitos, debe cumplirse que $G \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$. □

Proposición 12.44: Sea S un esquema y sea $f\colon A \to B$ una isogenia entre esquemas abelianos sobre S de grado n. Entonces existe un único homomorfismo $g\colon B \to A$ de esquemas abelianos tal que $f \circ g = [n]_A$. Además, g es una isogenia y $g \circ f = [n]_B$. En consecuencia, la relación «ser esquemas abelianos isógenos» es de equivalencia.

Demostración: Como $\ker f$ es un S-esquema en grupos finito localmente libre de rango n, entonces el endomorfismo $[n]$ es nulo. Así pues, como $B \cong A/\ker f$, vemos que $[n]_A$ se factoriza $[n]_A = f \circ g$, donde g es un único homomorfismo de esquemas en grupos. Como $[n]_A$ es una isogenia, es sobreyectivo, y por tanto g también; como además A y B tienen misma dimensión relativa sobre S, g es necesariamente una isogenia. Finalmente

$$[n]_B \circ g = g \circ [n]_A = g \circ (f \circ g),$$

donde la primera igualdad aplica para cualquier homomorfismo de esquemas en grupos; concluimos que $g \circ f = [n]_B$. $\square$

Notas históricas

El teorema de Cartier 12.15 fue demostrado en **[30]** (1962) con las restricciones de que el cuerpo k tenga característica 0 y para grupos algebraicos.

13

Curvas algebraicas

13.1 La fórmula de Hurwitz

Lema 13.1: Sea A un dominio de Dedekind, entonces todo subesquema abierto de $\operatorname{Spec} A$ es afín.

DEMOSTRACIÓN: Sea $X := \operatorname{Spec} A$. Por inducción basta probar que para todo punto cerrado $x \in X$ se cumple que $U := X \setminus \{x\}$ es afín. Sea $\mathfrak{m} := \mathfrak{p}_x$, y sea $s \in A$ tal que $s\mathscr{O}_{X,x} = \mathfrak{m}_{X,x}\mathscr{O}_{X,x}$ y sea $\mathbf{V}(s) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, donde $x = x_1$. Sean $\mathfrak{m}_i := \mathfrak{p}_{x_i}$ y, para todo $i \neq 2$, elíjase $s_i \in \mathfrak{m}_i \setminus \mathfrak{m}$.

Para d_i suficientemente grande, el elemento:

$$t := s^{-1} \prod_{i=2}^{n} s_i^{d_i} \in \bigcap_{u \in U} \mathscr{O}_{X,u} = \mathscr{O}_X(U) \subseteq \operatorname{Frac} A,$$

pero $t \notin A$.

El A-submódulo de $\operatorname{Frac} A$ generado por $\{1, t^{-1}\}$ es un A-módulo localmente libre de rango 1, y por tanto es de la forma $\Gamma(X, \mathscr{L})$. Las secciones globales $1, t^{-1}$ inducen un morfismo $i \colon X \to \operatorname{Proj}(A[x_0, x_1]) = \mathbb{P}^1_X$ de X-esquemas, es decir, i es una sección de Id_X y, por lo tanto, es un encaje cerrado e $i^{-1}[\mathbf{D}_+(x_1)] = \mathbf{D}_+(t^{-1}) = U$, de modo que $U \cong \mathbb{A}^1_X$ el cual es afín. $\square$

Teorema 13.2: Sea C una curva separada sobre un cuerpo k. Entonces es cuasiproyectiva. En consecuencia, toda curva propia es proyectiva.

Teorema 13.3: Sea C una curva separada normal sobre un cuerpo k. Entonces existe una curva proyectiva normal $\hat{C}$ y un encaje abierto dominante $j\colon C \hookrightarrow \hat{C}$ tal que para todo k-morfismo $f\colon C \to X$ hacia un esquema propio X sobre k existe un único k-morfismo $\bar{f}\colon \hat{C} \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, hook, "j"'] & & X \\ & \hat{C} \arrow[ur, "\exists! \bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

El morfismo $j\colon C \hookrightarrow \hat{C}$ se dice una ***compactificación normal***.

Demostración: Podemos suponer que C es conexo y (como es regular), entonces es irreducible. Identifiquemos a C como subesquema de algún $\mathbb{P}^n_k$, y sea $\overline{C}$ la clausura de C visto como subesquema cerrado de $\mathbb{P}^n_k$ con la estructura reducida. Así tenemos un encaje abierto esquemáticamente dominante $i\colon C \hookrightarrow \overline{C}$ hacia una curva proyectiva, y sea $\pi\colon \hat{C} \to C$ la normalización en k. Nótese que π es un morfismo birracional finito, de modo que $\hat{C}$ es una curva proyectiva normal y, así tenemos una k-aplicación birracional $C \hookrightarrow \overline{C}$ plana (luego dominante) y, por las proposiciones 6.19 y 8.51. La propiedad universal sale de la proposición 6.19 □

Teorema 13.4: Sea k un cuerpo fijo. Existe una equivalencia contravariante (o *antiequivalencia*) entre las siguientes categorías:

1. Las curvas íntegras, propias y normales sobre k con k-morfismos no constantes.
2. Extensiones de cuerpo K/k de tipo finito y de grado de trascendencia 1.

Donde la equivalencia está dada por mandar un k-morfismo $f\colon C_1 \to C_2$ al homomorfismo inducido sobre el punto genérico $f^\sharp_\xi\colon K(C_2) \to K(C_1)$.

Demostración: Es claro que ver un k-morfismo en los anillos locales sobre el punto genérico determina un funtor; construyamos su cuasi-inversa. Sea K/k una extensión de cuerpo de tipo finito de $\operatorname{trdeg}_k K = 1$; así, sea $t \in K$ tal que $K/k(t)$ es una extensión finitao. Sea C la normalización de la recta proyectiva $\mathbb{P}^1_k$ (donde identificamos $K(\mathbb{P}^1_k) = k(t)$) en K. Entonces C es un esquema íntegro, normal y finito sobre $\mathbb{P}^1_k$, luego es una curva íntegra, propia y normal de $K(C) = K$.

Dado un k-homomorfismo $\alpha\colon K(C_2) \to K(C_1)$, donde C_1, C_2 son curvas íntegras, propias y normales sobre k, esto determina un k-morfismo $C_1 \to \operatorname{Spec} K(C_2)$ no constante, que luego componemos con la compactificación normal para obtener un k-morfismo $C_1 \to C_2$ como se buscaba. Como la compactificación normal es un encaje abierto dominante sobre k, entonces es claro que el homomorfismo sobre cuerpos de funciones es α; así que el hecho de que los funtores son cuasi-inversas se induce de la propiedad universal de la compactificación normal. $\square$

Corolario 13.4.1: Sea C una curva normal conexa sobre un cuerpo k y sea $\hat{C}$ su compactificación normal. Existen biyecciones canónicas entre los siguientes tres conjuntos:

1. $\{u \in K(C) : u \text{ trascendente sobre } k\}$.
2. $\{f\colon C \to \mathbb{P}^1_k \text{ dominante}\}$.
3. $\{f\colon \hat{C} \to \mathbb{P}^1_k \text{ dominante}\}$.

Teorema 13.5: Sea C una curva suave proyectiva sobre un cuerpo infinito k. Entonces existe un encaje cerrado $C \hookrightarrow \mathbb{P}^3_k$.

§13.1.1 Clasificación para géneros pequeños.

Definición 13.6: Una ***cónica*** sobre un cuerpo k es una curva de la forma $C = \mathbf{V}_+(f) \subseteq \mathbb{P}^2_k$, donde $f(x_0, x_1, x_2) \in k[\boldsymbol{x}]$ es un polinomio homogéneo de grado 2.

Proposición 13.7: Sea X una curva geométricamente íntegra, proyectiva sobre un cuerpo k, de género aritmético $p_a(X) \leq 0$. Entonces:

1. X es una cónica suave sobre k.
2. $X \cong \mathbb{P}^1_k$ syss $X(k) \neq 0$.

14

Superficies regulares

14.1 Teoría de intersección

Definición 14.1: Sea X un esquema localmente noetheriano, conexo y factorial de dimensión 2. Sean C, D dos divisores de Cartier efectivos sin componentes irreducibles en común y sea $x \in X$ un punto cerrado. En un entorno de x se tiene que $\operatorname{Supp} C \cap \operatorname{Supp} D \in \{\varnothing, \{x\}\}$, por lo tanto se tiene que

$$\mathfrak{m}_{X,x} \subseteq \operatorname{Rad}\big(\mathscr{O}_X(-C)_x + \mathscr{O}_X(-D)_x\big),$$

así pues, $A := \mathscr{O}_{X,x}/\big(\mathscr{O}_X(-C)_x + \mathscr{O}_X(-D)_x\big)$ es un anillo artiniano. Definimos la ***multiplicidad de intersección*** de C, D en x:

$$i_x(C, D) := \ell_{\mathscr{O}_{X,x}}\left(\frac{\mathscr{O}_{X,x}}{\mathscr{O}_X(-C)_x + \mathscr{O}_X(-D)_x}\right).$$

Así, $i_x(C, D) = 0$ syss $x \notin \operatorname{Supp} C \cap \operatorname{Supp} D$.

Lema 14.2: Sea X un esquema localmente noetheriano, conexo y factorial de dimensión 2. Sean D, E, F una terna de divisores efectivos sin ciclos primos en común dos a dos, entonces:

1. $i_x(D, E) = i_x(E, D)$.

2. Sea $j\colon E \hookrightarrow X$ un encaje cerrado. Luego, el divisor $D|_E := j^*D$ es un

divisor efectivo de Cartier en E y se tienen:

$$\mathscr{O}_E(D|_E) \simeq \mathscr{O}_X(D)|_E, \qquad i_x(D,E) = \nu_x(D|_E),$$

para todo punto cerrado $x \in E$.

3. $i_x(D+F,E) = i_x(D,E) + i_x(F,E)$.

Demostración:

1. Trivial.
2. Basta emplear que los anillos locales son DFUs y el tercer teorema de isomorfismos para ver que
$$\frac{\mathscr{O}_{X,x}}{\mathscr{O}_X(-D)_x + \mathscr{O}_X(-E)_x} \cong \frac{\mathscr{O}_{E,x}}{\mathscr{O}_E(-D|_E)_x},$$
y luego recordar que
$$\nu_x(D|_E) = \ell_{\mathscr{O}_{X,x}}\left(\frac{\mathscr{O}_{E,x}}{\mathscr{O}_E(-D|_E)_x}\right) = i_x(D,E).$$
3. Empleando el inciso anterior, se reduce a aplicar propiedades de las valuaciones. □

Definición 14.3: Sea X un esquema localmente noetheriano, conexo y factorial de dimensión 2. Sean D, E un par de divisores arbitrarios y escribamos $D = D_1 - D_2, E = E_1 - E_2$ con D_i, E_i's efectivos. Luego la multiplicidad

$$i_x(D,E) := i_x(D_1,E_1) - i_x(D_2,E_1) - i_x(D_1,E_2) + i_x(D_2,E_2)$$

es independiente de la elección de D_i, E_i.

Estaríamos tentados a decir que la multiplicidad ahora determina una forma bilineal simétrica, pero $i_x(D,D)$ no está definido, por ejemplo.

Definición 14.4: Sea Y un esquema localmente noetheriano y regular, y sea D un divisor efectivo de Y. Decimos que D tiene ***cruces normales estrictos*** en un punto $y \in Y$ si existe un sistema de parámetros $a_1, \dots, a_n$ de $\mathscr{O}_{Y,y}$ y exponentes $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tales que $\mathscr{O}_Y(-D)_y = (a_1^{\nu_1}, \dots, a_n^{\nu_n})\mathscr{O}_{Y,y}$. Se dice que D tiene ***cruces normales estrictos*** si los tiene en todo punto de Y. Decimos que divisores primos $D_1, \dots, D_\ell$ se ***cruzan transversalmente*** en un punto $y \in Y$ si son distintos y el divisor $D_1 + \cdots + D_\ell$ tiene cruces normales estrictos en y.

Proposición 14.5: Sea X un esquema localmente noetheriano, conexo y regular de dimensión 2. Sean D, E un par de divisores primos y sea $x \in \operatorname{Supp} D$, entonces:

1. D tiene cruces normales estrictos en x syss D es regular en x.
2. Sea $x \in \operatorname{Supp} D \cap \operatorname{Supp} E$, son equivalentes:
   a) D y E se cruzan transversalmente en x.
   b) $\mathfrak{m}_{X,x} = \mathscr{O}_X(-D)_x + \mathscr{O}_X(-E)_x$.
   c) $i_x(D, E) = 1$.
   d) D y E son regulares en x, y $T_{D,x} \oplus T_{E,x} = T_{X,x}$.

Proposición 14.6: Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y X una superficie suave proyectiva sobre k. Sean D, E un par de divisores primos, con D suave, que se cruzan transversalmente, entonces

$$|C \cap D| = \deg_C(\mathscr{O}_X(D)|_C).$$

Definición 14.7: Sea S un esquema de Dedekind. Una ***superficie fibrada sobre*** S es un S-esquema $\pi\colon X \to S$ íntegro, proyectivo y plano de dimensión 2.

Teorema 14.8: Sea $X \to S$ una superficie fibrada regular y $s \in S$ un punto cerrado. Existe una única forma ($\mathbb{Z}$-)bilineal

$$i_s\colon \operatorname{Div} X \times \operatorname{Div}_s X \to \mathbb{Z},$$

tal que:

1. Si $C \in \operatorname{Div} X, D \in \operatorname{Div}_s X$ no tienen componentes irreducibles comunes, entonces
$$i_s(C, D) = \sum_{x \in X_s^0} i_x(C, D) \deg x,$$
donde x recorre los puntos cerrados de la fibra X_s.
2. La restricción $i_s\colon \operatorname{Div}_s(X) \times \operatorname{Div}_s(X) \to \mathbb{Z}$ da una forma $\mathbb{Z}$-bilineal simétrica.

3. i_s se preserva salvo equivalencia lineal, es decir, si $C_1 \sim C_2$ entonces $i_s(C_1, D) = i_s(C_2, D)$.

4. Si $0 \leq D \leq X_s$, entonces
$$i_s(C, D) = \deg_{\Bbbk(s)}(\mathscr{O}_X(D)|_E).$$

Teorema 14.9: Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y X una superficie suave proyectiva sobre k. Existe una única forma ($\mathbb{Z}$-)bilineal
$$(-.-)\colon \operatorname{Div} X \times \operatorname{Div} X \to \mathbb{Z},$$
tal que:

1. Si C, D son ciclos primos que se intersectan transversalmente, entonces $(C.D) = |C \cap D|$.

2. $(-.-)$ es una forma $\mathbb{Z}$-bilineal simétrica.

3. $(-.-)$ se preserva salvo equivalencia lineal, es decir, si $C_1 \sim C_2$ entonces $C_1.D = C_2.D$.

Definición 14.10: Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y X una superficie suave proyectiva sobre k. Un par de divisores $D_1, D_2 \in \operatorname{Div} X$ se dicen ***numéricamente equivalentes*** (denotado «$D_1 \equiv D_2$») si para todo divisor $E \in \operatorname{Div} X$ se cumple que $D_1.E = D_2.E$.

Como la multiplicidad de intersección se preserva salvo equivalencia lineal es claro que $D_1 \sim D_2$ implica que $D_1 \equiv D_2$. Así, denotamos por $\operatorname{Num} X$ al cociente del grupo de Picard $\operatorname{Pic} X$ sobre el subgrupo de divisores numéricamente equivalentes a cero.

Nótese que la multiplicidad de intersección induce una forma bilineal no degenerada sobre $\operatorname{Num}(X)$.

Teorema 14.11 (del índice de Hodge): Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y X una superficie suave proyectiva sobre k. Entonces:

1. Sea $H \in \operatorname{Div} X$ un divisor amplio y sea $D \in \operatorname{Div} X$ tal que $D \not\equiv 0$ pero $D.H = 0$. Entonces $D^2 < 0$.

2. $\operatorname{Num}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$-espacio de forma bilineal (con la multiplicidad de intersección) que, al diagonalizar, tiene un único $+1$ en la diagonal.

3. $\operatorname{Num}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Q}$-espacio de forma bilineal con descomposición ortogonal $V \otimes W$, donde V es $\mathbb{Q}$-subespacio invariante de $\dim_{\mathbb{Q}} V = 1$ donde la forma es definida positiva y en W es definida negativa.

§14.1.1 Aplicación: Hipótesis de Riemann sobre curvas II. En la sección 8.5 vimos una demostración de las conjeturas de Weil, donde seguimos la prueba de Bombieri-Stepanov para las hipótesis de Riemann. Aquí veremos una demostración alternativa de la hipótesis de Riemann empleando teoría de intersección, la cual es una adaptación de la demostración de Weil **[38]** (1948).

Nuevamente, fijemos $k := \mathbb{F}_q$ un cuerpo finito, X una curva suave proyectiva geométricamente irreducible sobre k y $\overline{X} := X_{k^{\text{alg}}}$. Sobre $\overline{X}$ tenemos dos endomorfismos de Frobenius:

$$\operatorname{Frob}_{\overline{X}/k} := \operatorname{Frob}_{X/k} \times_{k^{\text{alg}}} \operatorname{Id}_{k^{\text{alg}}}, \qquad \psi := \operatorname{Id}_X \times_{k^{\text{alg}}} \operatorname{Frob}_{k^{\text{alg}}/k}.$$

Sea $Y := \overline{X} \times_{k^{\text{alg}}} \overline{X}$. Denótese $\Delta := \operatorname{Img} \Delta_{\overline{X}/k^{\text{alg}}}$ y F_n la imagen del gráfico de $\operatorname{Frob}^n_{\overline{X}/k}$; ambos son ciclos primos de Y (¿por qué?).

Lema 14.12: Se tiene que $[F_n] = ((\operatorname{Frob}_{\overline{X}/k} \times \operatorname{Id}_{\overline{X}})^*)^n[\Delta]$.

Demostración: Es claro que $((\operatorname{Frob}_{\overline{X}/k} \times \operatorname{Id}_{\overline{X}})^*)^n = (\operatorname{Frob}_{\overline{X}/k} \times \operatorname{Id}_{\overline{X}})^*$, así que bastará probar en general que para todo endomorfismo $g \colon \overline{X} \to \overline{X}$ se cumple que $[\operatorname{Img}(\Gamma_g)] = (g \times \operatorname{Id}_{\overline{X}})^*[\Delta]$. □

Lema 14.13: Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $|X(\mathbb{F}_{q^n})| = ([F_n].[\Delta])$.

Demostración: Nótese que F_n, Δ se cruzan transversalmente. Más aún, Revisar conclusión.
como F_n, Δ son irreducibles de dimensión 1, solo deben cortarse en puntos cerrados. Ahora bien, por el teorema de ceros de Hilbert, dado que $\overline{X}$ es un esquema de tipo finito sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, tenemos que los puntos cerrados de Y están en correspondencia con pares ordenados en $\overline{X}$. Finalmente, $\operatorname{Frob}^n_{\overline{X}}(x) = x$ (es decir, x es un punto $\mathbb{F}_{q^n}$-valuado) syss está fijado por $\operatorname{Id}_{\overline{X}} \times \operatorname{Frob}^n_{k^{\text{alg}}/k}$. □

Finalmente, estamos listos para probar la hipótesis de Riemann:

Demostración: Sea $W := \operatorname{Num}(Y) \otimes \mathbb{Q}$. Sean H, V las curvas horizontal y vertical en $Y = \overline{X} \times \overline{X}$. Nótese que $[H], [V]$ son distintos en $\operatorname{Num}(Y)$, puesto que $[H].[V] = 1$ y $[H].[H] = 0$. Sean $U := [H]\mathbb{Q} \oplus [V]\mathbb{Q} \leq W$, y sea U' el complemento ortogonal de U, de modo que $W = U \oplus U'$. La matriz de la forma bilineal sobre U, respecto a la base $[H], [V]$ es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

y ésta matriz posee un valor propio positivo, luego el subespacio definido positivo está contenido en U y, como tiene dimensión 1, no está en U'. Luego la forma es definida negativa en U'.

Sea $\Gamma_F := \operatorname{Frob}_{\overline{X}} \times \operatorname{Id}_{\overline{X}} \colon \overline{X} \to Y$, y sea $T \colon W \to W$ la transformación lineal dada por $T(D) := (\Gamma_F)^* D$. Nótese que $\deg(\Gamma_F) = q$, luego, para divisores $D, E \in \operatorname{Num}(Y)$ se da

$$\big((\Gamma_F)^* D, (\Gamma_F)^* E\big) = \big(D, (\Gamma_F)_* (\Gamma_F)^* E\big) = (D, qE) = q(D, E).$$

Así, para $u, v \in W$, vemos que $(Tu, Tv) = q(u, v)$.

Ahora bien, por el lema 14.12, sabemos que $T^n[\Delta] = [F_n]$ Finalmente, es fácil verificar que $T[H] = q[H], T[V] = [V]$ y descomponer $[\Delta] = [H] + [V] + [w]$ donde $w \in U'$, luego calculamos:

$$\begin{aligned} |X(\mathbb{F}_{q^n})| &= ([F_n], [\Delta]) = (T^n[\Delta], [\Delta]) \\ &= \big(T^n([H] + [V] + w), ([H] + [V] + w)\big) = q^n + 1 + (T^n w, w). \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz sobre U', donde la forma es definida negativa, vemos que

$$|(T^n w, w)| \le \sqrt{|(T^n w, T^n w)|\, |(w, w)|} = \sqrt{q^n\, |u, v|} = O(q^{n/2}).$$

La hipótesis de Riemann queda probada por la equivalencia 8.81. □

A

Preliminares algebraicos

En éste apéndice presentamos todos los resultados de mi apunte de álgebra [**39**] que se citen dentro del libro. Las citas incluyen el número de proposición en el paréntesis.

A.1 Anillos y cuerpos

Teorema A.1 (sueño del aprendiz, 2.39): Si A es un anillo de $\operatorname{car} A = p > 0$ prima (e.g., un dominio íntegro), entonces para todo $a, b \in A$ se cumple que $(a+b)^p = a^p + b^p$.

Proposición A.2 (2.27): Un anillo es noetheriano syss todo ideal es finitamente generado.

Teorema A.3 (2.49, 2.50): Un ideal $\mathfrak{p} \lhd A$ es primo syss $A/\mathfrak{p}$ es un dominio íntegro. Un ideal $\mathfrak{m} \lhd A$ es maximal syss $A/\mathfrak{m}$ es un cuerpo.

Proposición A.4 («evitamiento de primos», 2.59): Se cumplen:

1. Sean $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ ideales primos de A y $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$. Luego si $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$, entonces $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_j$ para algún j.
2. Sean $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ ideales de A y $\mathfrak{p} \trianglelefteq A$ primo. Si $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{a}_j \subseteq \mathfrak{p}$ para algún j. Más aún, si $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{a}_j = \mathfrak{p}$ para algún j.

Teorema A.5 (chino del resto, 2.59): Si A es un anillo y $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n \trianglelefteq A$ son ideales coprimos dos a dos (i.e., $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = A$ para $i = j$), entonces el homomorfismo

$$\varphi \colon A \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} A/\mathfrak{a}_i$$

es suprayectivo y $\ker \varphi = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$.

Teorema A.6 (de las bases de Hilbert, 2.77): Si A es un anillo noetheriano, entonces $A[x_1, \dots, x_n]$ también.

Teorema A.7 (2.91): Si A es un DFU, entonces $A[x_1, \dots, x_n]$ también.

Teorema A.8 (criterio de irreducibilidad de Gauss, 2.86): Sea A un DFU, $K := \operatorname{Frac} A$ y $f(x) \in A[x]$ primitivo no constante. Entonces $f(x)$ es irreducible en $A[x]$ syss lo es en $K[x]$.

Teorema A.9 (criterio de irreducibilidad de Eisenstein, 2.92): Sea A un DFU, $K := \operatorname{Frac} A$ y $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in A[x]$ no constante con $a_n \neq 0$. Si existe un primo $p \in A$ tal que

$$p \nmid a_n, \qquad \forall j < n \quad p \mid a_j, \qquad p^2 \nmid a_0.$$

entonces $f(x)$ es irreducible en $K[x]$.

A.2 Teoría de cuerpos

Teorema A.10 (4.58, 4.59): Sea k un cuerpo. Entonces existe una única extensión algebraica k^{alg} que es algebraicamente cerrada (salvo k-isomorfismo).

Teorema A.11 (fundamental del álgebra, 2.113, 4.63): $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado.

Definición A.12: Sea L/k una extensión algebraica de cuerpos. Sea $\alpha \in L$ un elemento con polinomio minimal $f(x)$. Se dice que α es un elemento ***separable*** si todas las raíces de $f(x)$ (en un cuerpo de escisión) son distintas, y que α es ***puramente inseparable*** si es la única raíz de $f(x)$. La extensión L/k se dice ***separable*** (resp. ***puramente inseparable***) si todos sus elementos lo son.

Teorema A.13 (4.34): Se cumple:

1. Todo cuerpo de característica nula es perfecto.
2. Si $\operatorname{car} k = p > 0$, entonces k es perfecto syss $k^{1/p} = k$.
3. Todo cuerpo finito es perfecto.

Teorema A.14 (del elemento primitivo, 4.45): Toda extensión finita separable de cuerpos es simple.

Teorema A.15 (4.39): Sea k un cuerpo de $\operatorname{car} k =: p > 0$ y sea L/k una extensión finita puramente inseparable. Entonces $q := [L : k] = p^r$ es una potencia de p y, además, para todo $\alpha \in L$ se cumple que $\alpha^q \in k$.

Teorema A.16 (lema de Zariski, 9.16, 9.73, 11.44): Sea L/k una extensión de cuerpos de modo que L sea una k-álgebra de tipo finito. Entonces L/k es una extensión finita de cuerpos.

Teorema A.17 (débil de ceros de Hilbert, 9.17): Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Un ideal $\mathfrak{m} \lhd k[x_1, \dots, x_n]$ es maximal syss es de la forma $\mathfrak{m} = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$ para algunos $\alpha_i \in k$.

Definición A.18: Se dice que un anillo es ***de Jacobson*** si todo ideal primo es una intersección de ideales maximales.

Esto ofrece un refinamiento al lema de Zariski:

Teorema A.19 (9.96): Sea A un anillo de Jacobson. Si B es una A-álgebra de tipo finito, entonces es de Jacobson. Además, si $\mathfrak{n} \subseteq B$ es maximal, entonces $\mathfrak{m} := \mathfrak{n} \cap A$ es maximal en A y $B/\mathfrak{n}$ es una extensión finita de $A/\mathfrak{m}$.

A.3 Álgebra conmutativa elemental

Proposición A.20 (6.27): Sea A un anillo. El radical de un ideal $\mathfrak{a}$ es:

$$\operatorname{Rad} \mathfrak{a} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{a} \\ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A}} \mathfrak{p}.$$

Proposición A.21 (6.33): Para todo par de ideales $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ en A se cumple:

1. $\operatorname{Rad}(\operatorname{Rad}(\mathfrak{a})) = \operatorname{Rad}(\mathfrak{a})$, es decir, todo radical de un ideal es un ideal radical.

2. $\operatorname{Rad}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = \operatorname{Rad}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \operatorname{Rad}(\mathfrak{a}) \cap \operatorname{Rad}(\mathfrak{b})$.

3. $\operatorname{Rad}(\mathfrak{a}) = (1)$ syss $\mathfrak{a} = (1)$.

4. $\operatorname{Rad}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \operatorname{Rad}(\operatorname{Rad}(\mathfrak{a}) + \operatorname{Rad}(\mathfrak{b}))$.

5. $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$ syss $\operatorname{Rad}(\mathfrak{a}) + \operatorname{Rad}(\mathfrak{b}) = (1)$.

Teorema A.22 (lema de Nakayama, 6.45): Sea M un A-módulo finitamente generado y sea $\mathfrak{a} \lhd A$ un ideal tal que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{J}(A)$ (i.e., $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ para todo $\mathfrak{m}$ maximal). Si $\mathfrak{a}M = M$, entonces $M = 0$.

Proposición A.23 (6.18): Sea M un A-módulo. Son equivalentes:

1. $M = 0$.

2. $M_{\mathfrak{p}} = 0$ para todo $\mathfrak{p} \lhd A$ primo.

3. $M_{\mathfrak{m}} = 0$ para todo $\mathfrak{m} \lhd A$ maximal.

Definición A.24: Sea A un anillo. Su dimensión de Krull, denotada $k.\dim A$, es el supremo n tal que existe

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n \subset A$$

una cadena de ideales primos de A.

Proposición A.25 (6.87): Un anillo artiniano posee finitos ideales maximales.

Teorema A.26 (Akizuki, 6.91, 6.94): Un anillo es artiniano syss es noetheriano y tiene dimensión de Krull 0 (i.e., todo primo es maximal). En particular, todo anillo artiniano es noetheriano.

Proposición A.27 (6.88): Un dominio íntegro es artiniano syss es un cuerpo.

Proposición A.28 (6.65): Un anillo noetheriano A posee solo finitos primos minimales $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$. Más aún, si A es reducido, entonces el homomorfismo canónico

$$A \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} A/\mathfrak{p}_i$$

es inyectivo.

Corolario A.28.1 (6.97): Todo anillo artiniano reducido es un producto de cuerpos.

A.4 Dependencia entera y dimensión algebraica

Definición A.29: Sea B una A-álgebra. Un elemento $b \in B$ se dice ***entero*** si es raíz de un polinomio mónico con coeficientes en A. La álgebra B se dice ***entera*** si todo elemento de B es entero sobre A.

Proposición A.30 (9.73): Sea B una A-álgebra. El conjunto $\mathcal{O}_{B/A}$ de elementos de B que son enteros sobre A es un anillo, llamado la ***clausura íntegra*** de A en B.

Definición A.31: Un dominio íntegro A con $K := \operatorname{Frac} A$ se dice ***íntegramente cerrado*** si $\mathcal{O}_{K/A} = A$.

Proposición A.32 (9.75): Un dominio íntegro que es DFU es íntegramente cerrado.

Definición A.33: Se dice que un anillo A es ***normal*** si para cada $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ se cumple que $A_\mathfrak{p}$ es un dominio íntegramente cerrado.

Proposición A.34 (9.87): Un dominio íntegro es íntegramente cerrado syss es normal.

Proposición A.35 (9.81): Si A es un anillo normal, entonces $A[x]$ también.

Teorema A.36 (9.84): Sea B/A una extensión entera de anillos. Para todo primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ existe un primo $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ tal que $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.

Teorema A.37 (del ascenso, 10.88): Sea B/A una extensión entera de anillos, y sean

$$\begin{aligned} &\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_m \subseteq \mathfrak{p}_{m+1} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_n \lhd A, \\ &\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_m \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \lhd B, \end{aligned}$$

dos cadenas de ideales primos, tales que $m < n$ y $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ para todo $1 \le i \le m$. Luego se puede extender la segunda cadena a

$$\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_m \subseteq \mathfrak{q}_{m+1} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_n \lhd B$$

con $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ para todo $1 \le i \le n$.

Teorema A.38 (10.93): Sea B/A una extensión entera de anillos. Entonces $k.\dim B = k.\dim A$.

Definición A.39: La ***altura*** de un ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$, denotado $\operatorname{alt}\mathfrak{a}$, es el supremo n tal que existe

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n \subseteq \mathfrak{a}$$

una cadena de primos de A.

Teorema A.40 (9.94): Sea B/A una extensión entera de anillos, donde B es un dominio íntegro y A es normal. Para todo ideal $\mathfrak{b} \trianglelefteq B$ se cumple que $\operatorname{alt}\mathfrak{b} = \operatorname{alt}(\mathfrak{b} \cap A)$.

Proposición A.41 (12.29): Sea A un dominio noetheriano íntegramente cerrado con $K := \operatorname{Frac} A$. Para toda extensión finita separable L/K, se cumple que $B := \mathcal{O}_{L/A}$ es un A-módulo finitamente generado.

Teorema A.42 (de normalización de Noether, 9.98, 12.30): Sea A una k-álgebra conmutativa de tipo finito. Entonces existen $x_1, \dots, x_n \in A$ elementos k-algebraicamente independientes tales que $A/k[\boldsymbol{x}]$ es una extensión entera.

Teorema A.43 (9.104, 9.105): Sea A un dominio íntegro que es una k-álgebra de tipo finito para algún cuerpo. Entonces:

1. $k.\dim A = \operatorname{trdeg}_k(\operatorname{Frac} A)$.
2. Toda cadena maximal de primos de A tiene la misma longitud.

3. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ es primo, entonces

$$k.\dim A = \operatorname{alt}\mathfrak{p} + k.\dim(A/\mathfrak{p}) = k.\dim(A_{\mathfrak{p}}) + k.\dim(A/\mathfrak{p}).$$

A.5 Separabilidad

Definición A.44: Se dice que una k-álgebra A es ***separable*** si para toda extensión de cuerpos L/k se cumple que la álgebra $A \otimes_k L$ es reducida.

Definición A.45 (13.23): Si k es un cuerpo perfecto entonces toda extensión de cuerpos K/k es separable y toda k-álgebra A es separable syss es reducida.

Definición A.46: Dada una extensión de cuerpos K/k, se le llama una ***base de trascendencia separable*** $\Gamma \subseteq K$ a una base de trascendencia tal que $K/k(\Gamma)$ es una extensión algebraica separable. De existir, se dice que K/k está ***separablemente generada***.

Teorema A.47 (13.22): Sea k un cuerpo de $\operatorname{car} k =: p > 0$ y sea K/k una extensión de cuerpos de tipo finito. Son equivalentes:

1. K es separable sobre k.
2. La álgebra $K \otimes_k k^{1/p}$ es reducida.
3. K está separablemente generado sobre k.

Teorema A.48 (criterio de Mac Lane, 13.28): Sea K/k una extensión de cuerpos y sea $L := K^{\mathrm{alg}}$.

1. Si K/k es separable, entonces K y $k^{p^{-\infty}}$ son linealmente disjuntos.
2. Si K y $k^{p^{-n}}$ son linealmente disjuntos para algún $n > 0$, entonces K/k es separable.
3. En resumen, K/k es separable syss K y $k^{p^{-\infty}}$ son linealmente disjuntos.

A.6 Teoría de la valuación algebraica

Teorema A.49 (de las intersecciones de Krull, 11.30, 11.31): Sea A noetheriano, $\mathfrak{a} \lhd A$ un ideal propio tal que alguna se cumple:

(a) A es un dominio íntegro.

(b) $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{J}(A)$.

Entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}^n = (0)$.

Definición A.50: Sea A un anillo noetheriano y sea $\mathfrak{a} \lhd A$ un ideal propio. Definimos la valuación $\mathfrak{a}$-ádica a la función $\nu_{\mathfrak{a}} \colon A \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tal que $\nu_{\mathfrak{a}}(a)$ es el mínimo n tal que $a \in \mathfrak{a}^n \setminus \mathfrak{a}^{n+1}$ o bien $\nu_{\mathfrak{a}}(a) = \infty$ si no existe tal n.

El teorema de las intersecciones de Krull nos dice que, bajo ciertas hipótesis débiles, $\nu_{\mathfrak{a}}$ solo alcanza el valor ∞ en el (0). Para que ν_a sea una valuación (en sentido de Krull) es necesario exigir que $\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. En general, trabajaremos en el contexto de un anillo local $(A, \mathfrak{m})$ donde $\nu := \nu_m$.

Proposición A.51: Sea $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anillo noetheriano local, entonces:

$$k.\dim A \le \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2).$$

Teorema A.52 (de los ideales principales de Krull, 10.72): Sea A un anillo noetheriano y sea $a \in A$ tal que no es ni divisor de cero, ni inversible. Entonces todo ideal primo minimal $\mathfrak{p}$ que contiene a a tiene $\operatorname{alt} \mathfrak{p} = 1$.

Teorema A.53 (10.73): Sea A un dominio íntegro noetheriano. Entonces, A es un DFU syss todo ideal primo de altura 1 es principal.

Teorema A.54 (11.23): Sea A un dominio íntegro normal noetheriano. Entonces:

$$A = \bigcap_{\substack{\operatorname{alt} \mathfrak{p}=1 \\ \mathfrak{p}\in\operatorname{Spec} A}} A_{\mathfrak{p}}.$$

Vakil [**11**] llama al teorema anterior «lema de Hartogs» realizando el paralelo con un teorema de análisis complejo; la relación se vislumbra en la sección sobre esquemas normales.

A.7 Regularidad y homología

Definición A.55: Se dice que un anillo $(A, \mathfrak{m}, k)$ es ***local regular*** si es local, noetheriano, y $k.\dim A = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

Teorema A.56: Todo anillo local regular es un dominio íntegro.

Proposición A.57: Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local regular y sea $a \in \mathfrak{m}_{\neq 0}$. Entonces A/aA es regular syss $a \notin \mathfrak{m}^2$.

Teorema A.58 (de regularidad de Serre): Sea A un anillo local noetheriano. Son equivalentes:

1. A es regular.
2. $\operatorname{gl}\dim A = k.\dim A$.
3. $\operatorname{gl}\dim A < \infty$.

Además, para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, se tiene que $A_{\mathfrak{p}}$ es regular.

Definición A.59: Se dice que un anillo A es ***regular*** si para todo primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ se cumple que $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local regular.

Como consecuencia de regularidad de Serre, tenemos que todo anillo local regular es regular.

Teorema A.60 (Auslander-Buchsbaum): Todo anillo local regular es un DFU.

A.8 Diferenciales de Kähler y suavidad formal

Proposición A.61 (5.8): Se cumplen:

1. El módulo de diferenciales de Kähler $\Omega_{B/A}$ está generado por $\{\mathrm{d}b : b \in B\}$.
2. Más aún, si $A = k$ es un cuerpo y B es una k-álgebra de tipo finito, entonces $\Omega_{B/k}$ está generado por a lo más $\operatorname{trdeg}_k B$ elementos.
3. Si $B = k[x_1, \dots, x_n]$ es la k-álgebra polinomial, entonces $\Omega_{B/k} \cong B^n$ con base $\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_n$.

Teorema A.62 (primera sucesión exacta): Sean $C/B/A$ una torre de álgebras. Existe una sucesión exacta de C-módulos:

$$\Omega_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega_{C/A} \longrightarrow \Omega_{C/B} \longrightarrow 0$$

Proposición A.63: Dado el siguiente diagrama conmutativo de anillos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & A' \\ k \arrow[u] \arrow[r] & k' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Entonces:

1. Existe un homomorfismo canónico de A-módulos $\Omega_{A/k} \to \Omega_{A'/k'}$ y un homomorfismo canónico de A'-módulos $\Omega_{A/k} \otimes_A A' \to \Omega_{A'/k'}$.

2. Si $A' = A \otimes_k k'$, entonces el último homomorfismo del inciso anterior es un isomorfismo:
$$\Omega_{A'/k'} \cong \Omega_{A/k} \otimes_k k' \cong \Omega_{A/k} \otimes_A A'.$$

3. Si $S \subseteq A$ es un sistema multiplicativo, entonces $\Omega_{S^{-1}A/k} \cong S^{-1}\Omega_{A/k}$. En particular, si $\mathfrak{p} \lhd A$ es un primo, entonces $\Omega_{A_\mathfrak{p}/k} \cong (\Omega_{A/k})_\mathfrak{p}$.

Teorema A.64 (segunda sucesión exacta): Sea B/A una álgebra, $\mathfrak{b} \trianglelefteq B$ un ideal y $C := B/\mathfrak{b}$. Existe una sucesión exacta de C-módulos:

$$\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2 \xrightarrow{\ \delta\ } \Omega_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega_{C/A} \longrightarrow 0$$

Corolario A.64.1: Sea A un anillo y B una A-álgebra de tipo finito o la localización de una álgebra de tipo finito. Entonces $\Omega^1_{B/A}$ es un B-módulo finitamente generado.

Teorema A.65: Sea K/k una extensión de cuerpos de tipo finito. Entonces:

1. $\dim_K \Omega^1_{K/k} \geq \operatorname{trdeg}_k K$.

2. $\dim_K \Omega^1_{K/k} = \operatorname{trdeg}_k K$ syss la extensión K/k es separable.

A.9 Sucesiones regulares y anillos de Cohen-Macaulay

Definición A.66: Sea M un A-módulo. Se dice que un elemento $a \in A$ es ***M-regular*** si $au \neq 0$ cuando $u \in M_{\neq 0}$. Una tupla de elementos $a_1, a_2, \dots, a_n$ conforma una ***sucesión débilmente M-regular*** si a_1 es M-regular y cada a_r es $M/(a_1, \dots, a_{r-1})M$-regular.

Lema A.67: Sea M un A-módulo. Si $a_1, \dots, a_n$ es una sucesión M-regular y existen $u_i \in M$ tales que

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n = 0,$$

entonces cada $u_i \in (a_1, \dots, a_n)M$.

Proposición A.68: Sea A un dominio noetheriano, M un A-módulo y $a_1, \dots, a_n$ una sucesión M-regular. Si se satisface alguna de las siguientes:

(α) Si A es noetheriano, M es finitamente generado y $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{J}(A)$.

(β) Si A es graduado, M es un A-módulo graduado y cada a_i es homogéneo de grado > 0.

Entonces toda permutación de $a_1, \dots, a_n$ también es M-regular.

Proposición A.69: Sea A un anillo, M un A-módulo, $\varphi\colon A \to B$ una A-álgebra y N un B-módulo que es plano sobre A. Dada $\boldsymbol{a} := (a_1, \dots, a_n)$ una sucesión débilmente M-regular se cumplen:

1. $\boldsymbol{a}$ y $\varphi(\boldsymbol{a})$ son débilmente $(M \otimes_A N)$-regulares.
2. Si $\boldsymbol{a}$ es $(M \otimes_A N)$-regular, entonces $\varphi(\boldsymbol{a})$ también.

Proposición A.70: Sean $(A, \mathfrak{m}, k), (B, \mathfrak{n}, l)$ un par de anillos locales noetherianos y $\varphi\colon A \to B$ un homomorfismo. Sean M_A, N_B módulos finitamente generados con N plano sobre A. Si $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n)$ es $(N/\mathfrak{m}N)$-regular (en B), entonces es $(M \otimes_A N)$-regular y $N/(b_1, \dots, b_n)N$ es plano sobre A.

A.10 Primos asociados

Para las demostraciones ver la sección §6.2.

Teorema A.71 (6.59, 6.60): Sea A un anillo y M un A-módulo. Fijemos el monomorfismo $A \hookrightarrow A_\mathfrak{p}$. Se cumplen:

1. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{As}_A(M)$, entonces $\mathfrak{p}^e = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \in \operatorname{As}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$.
2. Si $\mathfrak{p}$ es finitamente generado (e.g., si A es noetheriano) y $\mathfrak{p}^e \in \operatorname{As}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$, entonces $\mathfrak{p} \in \operatorname{As}_A(M)$.

B

Ejemplos y contraejemplos

B.1 La tesis de Hochster

En la primera parte veremos la tesis de HOCHSTER [**25**] (1969), la cual nos da un criterio sencillo para identificar espacios topológicos que suceden como espacios de esquemas, lo que se convertirá en una máquina de elaborar contraejemplos a definiciones más topológicas. Éste capítulo también sigue la exposición de la sección §12.6 de DICKMANN *et al.* [**23**].

§B.1.1 Espacios espectrales y topología de parches.

Definición B.1: Sea X un espacio topológico y sean x, y un par de puntos. Se dice que y es una ***especialización*** de x, o que x es una ***generización*** de y, denotado $x \rightsquigarrow y$, si $y \in \overline{\{x\}}$.

A priori, la especialización determina un preorden sobre un espacio, pero:

Proposición B.2: Un espacio topológico es T_0 syss la especialización es un orden parcial.

Ejemplo. Sea A un anillo, $X := \operatorname{Spec} A$. Se cumple que $x \rightsquigarrow y$ syss $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$.

Proposición B.3: En un espacio T_0, un punto es $\rightsquigarrow$-maximal syss es cerrado, y un punto es $\rightsquigarrow$-minimal syss es genérico.

Definición B.4: Sea X un espacio topológico y sea $S \subseteq X$ un subconjunto. Entonces se denota

$$\begin{aligned} \operatorname{Spez}(S) &:= \{y \in X : \exists x \in S : x \rightsquigarrow y\} = \bigcup_{x \in S} \overline{\{x\}}, \\ \operatorname{Gen}(S) &:= \{y \in X : \exists x \in S : y \rightsquigarrow x\}. \end{aligned}$$

Se dice que S es ***cerrado bajo especialización*** (resp. ***cerrado bajo generización***) si $\operatorname{Spez}(S) = S$ (resp. $\operatorname{Gen}(S) = S$).

Proposición B.5: En un espacio T_0 los conjuntos cerrados bajo especialización (resp. cerrados bajo generización) son las uniones de cerrados (resp. intersecciones de abiertos).

Corolario B.5.1: Sea $f : X \to Y$ una función continua, entonces preserva especialización, vale decir, para todo $a, b \in X$ tales que $a \rightsquigarrow b$ se cumple que $f(a) \rightsquigarrow f(b)$.

Definición B.6: Un espacio topológico es ***sobrio*** si todo cerrado irreducible posee un único punto denso.

Se dice que un espacio topológico X es ***espectral*** si:

EE1. Es T_0 y compacto.

EE2. Los abiertos compactos forman una base de X.

EE3. X es cuasiseparado, i.e., la intersección de abiertos compactos es compacta.

EE4. X es sobrio.

Ejemplo. Todos los espectros de anillos son espacios espectrales.

Proposición B.7: Los espacios T_2 son sobrios.

Proposición B.8: Un espacio finito es espectral syss es T_0.

Demostración: Claramente $\implies$, veamos $\impliedby$: Todo espacio finito es compacto, luego tenemos EE1-EE3, falta ver que es sobrio. Sea $C \subseteq X$ un cerrado irreducible, claramente

$$C = \bigcup_{x \in C} \overline{\{x\}},$$

donde a la derecha tenemos una unión finita de cerrados, luego, como C es irreducible, es igual a alguno de los sumandos, es decir, $C = \overline{\{\xi\}}$ para algún $\xi \in C$. □

Definición B.9: Una función $f : X \to Y$ entre espacios espectrales se dice ***espectral*** si la preimagen de abiertos compactos es abierto compacto.

Esto es lo que corresponde a morfismos compactos en la teoría de esquemas.

Proposición B.10: Sean X, Y, Z espacios espectrales. Se cumplen:

1. La identidad $\mathrm{Id}_X : X \to X$ es espectral.
2. La composición de funciones espectrales es espectral.
3. Toda función espectral es continua.

En resumen, los espacios espectrales (como objetos) y las funciones espectrales (como flechas) conforman una categoría denotada Spec, la cual es una subcategoría de Top.

Proposición B.11: Sean X, Y un par de espacios espectrales con X finito. Para una función $f : X \to Y$ son equivalentes:

1. f es continua.
2. f es espectral.
3. f preserva especialización.

Demostración: Son triviales $2 \implies 1$ y $1 \implies 3$.

$3 \implies 2$. Sea V un abierto compacto en Y, entonces es cerrado bajo generización y $f^{-1}[V]$ también, luego es intersección de abiertos; pero como X es finito, solo hay finitos abiertos y son todos compactos, así que $f^{-1}[V]$ es abierto y, *a posteriori*, compacto. □

Definición B.12: Sea X un espacio espectral. Llamamos la ***topología de parches*** a aquella que tiene por subbase a los abiertos compactos y a los cerrados de X; denotamos por X_{con} al conjunto X con la topología de parches.

Un conjunto $S \subseteq X_{\text{con}}$ cerrado en la topología de parches se dice un ***parche***.[1]

Proposición B.13: Sea X un espacio espectral. Se cumplen:

1. El espacio de parches X_{con} es Hausdorff y es más fuerte que la topología original.

2. Los conjuntos de la forma $F \cap G \subseteq X_{\text{con}}$, donde $F \subseteq X$ es cerrado y $G \subseteq X$ es abierto compacto, son abiertos y cerrados en la topología de parches y forman una subbase.

3. Un conjunto C es un parche syss es la intersección de conjuntos de la forma $F \cup G$ donde $F \subseteq X$ es cerrado y $G \subseteq X$ es abierto compacto.

Demostración:

1. Que sea más fuerte es por el axioma EE2. Que el espacio de parches sea Hausdorff se deduce de que dado un par de puntos distintos $x, y \in X_{\text{con}}$ entonces, como X es T_0, existe un abierto compacto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$; luego $U, U^c \subseteq X_{\text{con}}$ son abiertos en el espacio de parches y separan a ambos puntos.

2. Trivial.

3. C es un parche syss C^c es abierto y se sigue de que los elementos de la forma $(F \cup G)^c = F^c \cap G^c$ son base. □

Teorema B.14: Para todo espacio espectral X, el espacio de parches X_{con} es compacto y totalmente disconexo.

Demostración: Para probar que X es compacto, basta ver que toda familia de cerrados con la p.i.f.[2] tiene intersección total no vacía. Por la proposición anterior, inciso 3, sabemos que podemos restringirnos a subfamilias

[1] Hochster **[25]** emplea *parche* (eng. *patch*), mientras que Dickmann *et al.* **[23]** emplean *proconstructible*.

[2] Propiedad de intersecciones finitas. Se dice que $\mathcal{F}$ tiene la p.i.f. si para todo subconjunto finito de elementos $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{F}$ es tal que $X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n \neq \varnothing$.

de

$$\mathcal{P} := \{F \cup G : F \subseteq X \text{ cerrado}, \ G \subseteq X \text{ abierto compacto}\}$$

es decir, $\mathcal{F} := \{F_i \cup G_i\}_{i \in I}$ con F_i cerrados y G_i abiertos compactos.

Empleando el lema de Zorn, podemos suponer que $\mathcal{F}$ es una subfamilia $\subseteq$-maximal de $\mathcal{P}$ con la p.i.f., y definamos $\mathcal{C}$ el subconjunto de cerrados en X en $\mathcal{F}$ y sea $I := \bigcap \mathcal{C}$.

(i) <u>Si $A, B \in \mathcal{P}$ son tales que $A \cup B \in \mathcal{F}$, entonces $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$</u>: Si $A, B \notin \mathcal{F}$, entonces por maximalidad de $\mathcal{F}$ sean $A_1, \dots, A_n; B_1, \dots, B_m \in \mathcal{F}$ tales que

$$A \cap A_1 \cap \cdots A_n = B \cap B_1 \cap \cdots \cap B_m = \varnothing,$$

luego $(A \cup B) \cap \bigcap_{i=1}^n A_i \cap \bigcap_{j=1}^m B_j = \varnothing$, lo que es absurdo.

(ii) <u>Un abierto U en X está en $\mathcal{F}$ syss $U \cap I \neq \varnothing$:</u>

$\Longrightarrow$. Si U está en $\mathcal{F}$, entonces $U \cap F \neq \varnothing$ pues $\mathcal{F}$ tiene la p.i.f., así que $\{U \cap F\}_{F \cap C}$ es una familia de cerrado en U con la p.i.f., luego $U \cap I \neq \varnothing$ pues U es compacto.

$\Longleftarrow$. Si $U \notin \mathcal{F}$, entonces $U^c \in \mathcal{F}$ por maximalidad y U^c es cerrado, luego $I \subseteq U^c$ y $U \cap I \subseteq U \cap U^c = \varnothing$.

(iii) <u>I es irreducible:</u> Sean U_1, U_2 dos abiertos en X tales que $U_1 \cap I \neq \varnothing \neq U_2 \cap I$. Por el paso (iii) se ve que $U_1, U_2 \in \mathcal{F}$, luego $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{F}$ y es abierto, luego por (iii) se cumple que $I \cap U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$; así todos los abiertos en I se cortan.

(iv) Como I es cerrado, irreducible y no vacío, y dado que X es sobrio, entonces posee un punto genérico $I = \overline{\{\xi\}}$. Veremos que $\xi \in \bigcap \mathcal{F}$. Sea $F \cap G \in \mathcal{F}$ con F cerrado y G abierto compacto; por (i) vemos que o bien $F \in \mathcal{F}$ y claramente $\xi \in F$, o bien $G \in \mathcal{F}$, en cuyo caso, $G \cap I \neq \varnothing$ y como ξ es denso en I, entonces $\xi \in G$. □

Nótese que en la demostración hemos empleado el lema de Zorn, y no es gran sorpresa ya que suele suceder que en álgebra conmutativa varios resultados dependan del axioma de elección, pero Banaschewski [**20**] dio una demostración de la tesis de Hochster sin emplear elección mediante *topología sin puntos* (marcos coherentes).

Corolario B.14.1: Sea X un espacio espectral y sea Y un parche. Un punto $x \in X$ es adherente a Y syss $x \in \operatorname{Spez}(Y)$. En consecuencia, un parche es cerrado syss es cerrado bajo especialización.

Corolario B.14.2: Dados dos puntos de X, o bien tienen entornos disjuntos, o bien se generizan a uno común.

Lema B.15: Sea X un espacio espectral. Para un conjunto $C \subseteq X$ son equivalentes:

1. C es abierto compacto en X_{con}.
2. C es abierto y cerrado en X_{con}.
3. C es unión finita de constructibles básicos (de la forma $F \cap G$, donde F es cerrado y G es abierto compacto en X).
4. C es intersección finita de conjuntos de la forma $F \cup G$, donde F es cerrado y G es abierto compacto en X.

En cuyo caso, se dice que C es ***constructible***.

Demostración: $1 \iff 2$. Basta notar que X_{con} es Hausdorff y compacto.

$1 \implies 3$. Basta recordar que los conjuntos de la forma $F \cap G$ son base, y emplear que C es compacto.

$3 \implies 2$. Los conjuntos de la forma F, G, donde F es cerrado y G es abierto compacto en X, son abiertos y cerrados en X_{con}, luego uniones finitas de tales intersecciones son abiertas y cerradas.

$3 \iff 4$. Basta aplicar complementos. □

Corolario B.15.1: Un abierto en un espacio espectral es compacto syss es constructible.

Teorema B.16: Sean X, Y un par de espacios espectrales y sea $f : X \to Y$ una función. Entonces f es espectral syss es continua para las topologías espectrales y de parches.

Corolario B.16.1: Sean X, Y un par de espacios espectrales y sea $f : X \to Y$ una función espectral. Entonces la imagen y la preimagen de parches son parches.

Pista: Basta emplear que X_{con} es Hausdorff y compacto para ver que $f : X_{\text{con}} \to Y_{\text{con}}$ es una aplicación cerrada. □

§B.1.2 Resortes.

Definición B.17: Un ***resorte***[3] es una terna $(X, A, (A^x)_{x\in X})$ donde X es un espacio espectral, A es un anillo y cada A^x es un dominio íntegro tal que:

R1. El anillo A es un subanillo de $\prod_{x\in X} A^x$. La componente de un elemento $a \in A$ en la x-ésima coordenada se denota $a(x)$.

R2. Todas las proyecciones $\pi_x\colon A \twoheadrightarrow A_x$ son suprayectivas.

R3. Para todo $a \in A$, el conjunto

$$d(a) := \{x \in X : a(x) \neq 0\}$$

es abierto en X.

R4. Los conjuntos de la forma $d(a)$ son una subbase de X y, por tanto, forman una base, pues $d(a) \cap d(b) = d(a \cdot b)$. Denotamos $z(a) := X \setminus d(a)$.

De no haber ambigüedad diremos que el par (X, A) es un resorte.

Proposición B.18: Sea (X, A) un resorte. La aplicación

$$\begin{aligned} \Phi_A\colon X &\longrightarrow \operatorname{Spec} A \\ x &\longmapsto \ker(\pi_x) = (\pi_x)^a(\xi) \end{aligned}$$

determina un homeomorfismo con un parche denso de $\operatorname{Spec} A$.

DEMOSTRACIÓN: Es claro que $\Phi^{-1}[\mathbf{D}(a)] = d(a)$, así que Φ es una función espectral. Como Φ es espectral, entonces $\operatorname{Img}\Phi$ es un parche de $\operatorname{Spec} A$ y también es claramente denso (por R1), y como X es T_0, entonces Φ es inyectivo por R4. Falta ver que Φ refleja especialización: si $x \not\rightsquigarrow y$, entonces $y \notin \overline{\{x\}}$, luego existe $d(a)$ tal que $y \in d(a)$, pero $x \notin d(a)$. Asi, $a \in \Phi(x) \setminus \Phi(y)$ y así se ve que $x \not\rightsquigarrow y$. □

Definición B.19: Un resorte (X, A) se dice ***afín*** si la función Φ_A es suprayectiva y, por lo tanto, $X \simeq \operatorname{Spec} A$.

Teorema B.20: Para un resorte $(X; A)$ son equivalentes:

[3] Del eng. *spring*, abrev. de *spectral space and ring*: espacio espectral y anillo.

1. A es afín.

2. Para todo subconjunto $B \subseteq A$ finito, se cumple

$$\forall a \in A \quad \bigcap_{b \in B} z(b) \subseteq z(a) \implies a \in \operatorname{Rad}(B).$$

Demostración: $1 \implies 2$. Trivial.

$2 \implies 1$. Por contrarrecíproca, si $\operatorname{Img}\Phi_A \neq \operatorname{Spec} A$, entonces sería un parche, luego es intersección de cerrados y abiertos compactos, así que existe $a \in A$ y un subconjunto $B \subseteq A$ finito tal que $\operatorname{Img}\Phi \subseteq \mathbf{V}(a) \cup \big(\bigcup_{b \in B} \mathbf{D}(b)\big) =: U_{a,B}$ y $U_{a,B} \neq \operatorname{Spec} A$. Pero que $\operatorname{Img}\Phi \subseteq U_{a,B}$ se traduce en que $\bigcap_{b \in B} z(b) \subseteq z(a)$ y si $a \in \operatorname{Rad}(B)$, entonces necesariamente $U_{a,B} = \operatorname{Spec} A$ lo que es absurdo. □

Definición B.21: Sea (X, A) un resorte. Un ***índice*** v es una función tal que a puntos $x \rightsquigarrow y$ en X les asigna una valuación (de Krull) $v_{x,y} \colon \operatorname{Frac}(A_y)^\times \to \mathbb{Z}$ con las siguientes propiedades:

RI1. Para todo $x \rightsquigarrow y$ y todo $a \in A$ tal que $x \in d(a)$, se cumple que $v_{x,y}(a) \geq 0$ y $v_{x,y}(a) = 0$ syss $a(y) \neq 0$.

RI2. Para todo $a \in A$ existe un $N > 0$ tal que para todo $x \rightsquigarrow y$ con $x \in d(a)$ se cumple que $v_{x,y}(a) \leq N$.

Una terna (X, A, v) se dice un ***resorte indexado***.

Definición B.22: Sea (X, A) un resorte. Una ***extensión*** de A es un resorte (X, B), donde $A \subseteq B \subseteq \prod_{x \in X} \operatorname{Frac}(A^x)$ y donde las proyecciones son las canónicas. Sea v un índice sobre A, una ***v-extensión*** B es una extensión del resorte, tal que los axiomas RI1-2 se siguen cumpliendo con las mismas valuaciones $v_{x,y}$.

La estrategia será la siguiente: sea X un espacio espectral fijado, deberemos encontrar algún anillo A tal que $X \hookrightarrow \operatorname{Spec} A$; luego el criterio B.20 nos dará si es que Φ_A es un homeomorfismo, pero probablemente no. Así, como X es un parche dentro de $\operatorname{Spec} A$, podremos encontrar agujeros en $\operatorname{Spec} A \setminus X$, y buscaremos extensiones B de A, tal que $X \subseteq \operatorname{Spec} B \subseteq \operatorname{Spec} A$, pero $\operatorname{Spec} B$ evita dicho adujero. El uso de índices nos ayudará a encontrar dichos B's.

Definición B.23: Sea (X, A) un resorte y sean $a, b \in A$ tales que $z(b) \subseteq z(a)$. Denotamos

$$a \div b := \begin{cases} 0, & x \in z(b), \\ a(x)/b(x), & x \in d(b). \end{cases}$$

Teorema B.24: Sea (X, A, v) un resorte indexado, y sean $a, b \in A$ tales que $z(b) \subseteq z(a)$. Son equivalentes:

1. Para todo par de puntos $x \rightsquigarrow y$ en X con $x \in d(a)$ se cumple que $v_{x,y}(a) \geq v_{x,y}(b)$, y se cumple que $v_{x,y}(a) = v_{x,y}(b)$ syss $y \in d(b)$.

2. $B := A[a \div b]$ es una v-extensión de A.

Demostración: $2 \implies 1$. Trivial.

$1 \implies 2$. Sea $A[t]$ un anillo de polinomios sobre A. Definamos $q(t) := \sum_{i=1}^m c_i t^i \in A[t]$, $r := q(a \div b) \in B$ y sea $s := b^m r = \sum_{i=0}^m c_i a^i b^{m-i} \in A$. Nótese que $d(r)$ es un parche en X, puesto que

$$d(r) = \big(d(s) \cap d(a)\big) \cup \big(d(c_0) \cap z(a)\big).$$

Por otra parte, $z(r)$ también es un parche, puesto que podemos expresarlo como

(a) $z(r) = \big(z(s) \cap d(a)\big) \cup \big(z(c_0) \cap z(a)\big)$.

(b) $z(r) = \big(z(s) \cap d(b)\big) \cup \big(z(c_0) \cap z(b)\big)$.

Como $z(r)$ es un parche, basta probar que es cerrado bajo especialización para ver que es cerrado. Sea $x \in z(r)$, por (a) y como $z(c_0) \cap z(a)$ es cerrado, supongamos que $x \in z(s) \cap d(a)$. Por (b), supongamos que $x \in z(s) \cap d(b)$, el cual es cerrado en $d(b)$; así sea $x \rightsquigarrow y$ (i.e., $y \in \overline{\{x\}}$) y podemos suponer que $y \in z(b)$. Por 1, sabemos que $v_{x,y}(a) > v_{x,y}(b)$ y, por RI1 tenemos que $r(y) = 0$, o equivalentemente,

$$-b(y)^m c_0(y) = \sum_{i=1}^m a(y)^i b(y)^{m-i} c_i(y).$$

Pero $v_{x,y}(-b^m c_0) = m v_{x,y}(b) + v_{x,y}(c_0)$ al mismo tiempo que $v_{x,y}\left(\sum_{i=1}^m c_i a^i b^{m-i}\right) > m v_{x,y}(b)$ (¿por qué?), por lo que $v_{x,y}(c_0) > 0$, es decir, $c_0(y) = 0$ (RI1) y así $y \in z(c_0)$ como se quería probar. □

Definición B.25: Sea (X, A, v) un resorte indexado. Denotamos por $G(A, v)$ el conjunto de pares $(a, b) \in A \times A$ tales que $A[a \div b]$ es una v-extensión de A.

La ventaja del teorema anterior, es que la cualidad de estar en $G(A, v)$ no depende del anillo base A, de modo que si A' fuese una v-extensión de A, entonces $G(A', v) \cap (A \times A) = G(A, v)$. Así pues, $G(A, v)$ induce una v-extensión B_1 de A (dada por adjuntar todos los $a \div b$), y a su vez, $G(B_1, v)$ induce una v-extensión B_2 de A y así, donde

$$G(A, v) \subseteq G(B_1, v) \subseteq G(B_2, v) \subseteq \cdots$$

Se llama el ***anillo de Hochster***, denotado $M(A, v) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Proposición B.26: Sea (X, A, v) un resorte indexado. El anillo de Hochster $M(A, v)$ tiene la siguiente propiedad: para todos $a, b \in M(a)$ tales que $z(b) \subseteq z(a)$ se cumple que $a \in \operatorname{Rad}_{M(A)}(b)$.

Demostración: Elijamos n suficientemente grande de modo que $a, b \in B_n$. Sea $N > 0$ tal que para todos $x \rightsquigarrow y$ puntos de X tales que $x \in d(b)$ se cumpla que $v_{x,y}(b) \leq N$, luego claramente $a^{N+1} \div b$ determina una v-extensión de B_n por el teorema anterior, así que $(a^{N+1}, b) \in G(B_n, v)$ y así se comprueba el enunciado. □

Esto prueba que el anillo de Hochster casi alcanza a evitar todos los agujeros, pero podría darse que el resorte $(X, M(A))$ todavía no sea afín. Introducimos una nueva herramienta:

Definición B.27: Un ***morfismo*** de resortes $(f, \varphi) \colon (X, A) \to (Y, B)$ es un par, donde $f \colon X \to Y$ es una función espectral y $\varphi \colon B \to A$ es un homomorfismo de anillos tal que el siguiente diagrama conmuta (en Top):

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} A \arrow[r, "\varphi^a"] & \operatorname{Spec} B \\ X \arrow[u, hook, "\Phi_A"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, hook, "\Phi_B"'] \end{tikzcd}$$

Es decir, $f = \varphi^a|_X$. Los resortes conforman una categoría, denotada Spring.

Un ***morfismo*** de resortes indexados $(f, \varphi) \colon (X, A, v) \to (Y, B, w)$ es un morfismo de resortes tal que $v_{x,y}(\varphi(b)) = v_{f(x),f(y)}(b)$ para todo $b \in B$ y todo $x \rightsquigarrow y$ en X. Los resortes indexados conforman categoría denotada $\mathsf{ISpring}$.

Trivialmente existe un funtor semiolvidadizo $\mathsf{Spring} \to \mathsf{Spec}$. Más importante aún, existe un funtor semiolvidadizo $V\colon \mathsf{Spring} \to \mathsf{CRing}^{\mathrm{op}}$.

Proposición B.28: Sea $(f, \varphi)\colon (X, A, v) \to (Y, B, w)$ un morfismo de resortes indexados.

1. Si $(a, b) \in G(B, w)$, entonces $(\varphi(a), \varphi(b)) \in G(A, v)$.
2. Existe una única extensión de $\varphi\colon B \to A$ a $\varphi^*\colon B[a \div b] \to A[\varphi(a) \div \varphi(b)]$. Más aún, (f, φ^*) también es un morfismo de resortes indexados.
3. Si A' es v-extensión de A, B' es w-extensión de $B[a \div b]$, $\psi\colon B' \to A'$ es un homomorfismo de anillos que extiende a φ y tal que $(f, \psi)\colon (X, A') \to (Y, B')$ es un morfismo de resortes indexados. Entonces $\varphi(a) \div \varphi(b) \in A'$ y $\psi(a \div b) = \varphi(a) \div \varphi(b)$.

En resumen, el anillo de Hochster $M(-)\colon \mathsf{ISpring} \to \mathsf{ISpring}$ induce un morfismo de resortes indexados $(f, \bar{\varphi})\colon (X, M(A)) \to (Y, M(B))$, la cual es una construcción funtorial, pero que preserva la función continua entre espacios espectrales.

Definición B.29: Sea $\mathscr{C} \subseteq \mathsf{Spring}$ una subcategoría. Se dice que un funtor $\mathscr{C} \to \mathsf{Spring}$ ***preserva espacios*** si el siguiente diagrama de funtores conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Spring} \arrow[d] \\
\mathsf{Spec} \arrow[r, equal] & \mathsf{Spec}
\end{tikzcd}$$

Así el anillo de Hochster determina un funtor que preserva espacios.

Definición B.30: Se dice que un resorte indexado (X, A, v) es ***simple*** si además satisface que exista un cuerpo K que contenga a todos los dominios íntegros A^x y tal que $a[X] \subseteq K$ es finito para todo $a \in A$.

Teorema B.31: Sea (X, A, v) un resorte indexado simple, se cumplen:

1. El anillo de Hochster $M(A)$ también es simple.
2. Si A satisface que para todo $a, b \in A$:
$$z(b) \subseteq z(a) \implies a \in \mathrm{Rad}(b),$$
entonces A es afín.

3. $M(A)$ es afín.

Demostración: Basta probar la 2: Sea $B \subseteq A$ un subconjunto finito, queremos ver que existe $c \in A$ tal que $z(c) = \bigcap_{b\in B} z(b)$; esto lo haremos por inducción por lo que basta ver que existe c cuando $B = \{b_1, b_2\}$. Tomando complementos, queremos $c \in b_1A + b_2A$ tal que $d(c) = d(b_1) \cup d(b_2)$. Como el índice es simple, entonces existen finitos conjuntos $W_j(1), \dots, W_j(m_j) \subseteq d(b_j)$, donde b_j es constante. Luego, para cada W elíjase $y_W \in W$ un punto, y sea $y(W_1, W_2) \in W_1 \cap W_2$ si es que la intersección es no vacía; denotemos $Y \subseteq d(b_1) \cup d(b_2)$ al conjunto de todos los puntos elegidos. Es claro que para todo elemento de A, la imagen de sus coordenadas en $d(b_1) \cup d(b_2)$ son las mismas que de Y. Definamos:

$$\mathfrak{b} := \bigcap_{x \in d(b_1)\cup d(b_2)} \Phi(x),$$

es decir, $c \in \mathfrak{b}$ syss $c(x) = 0$ para todo $x \in d(b_1) \cup d(b_2)$. Es claro que $\mathfrak{b}$ es un ideal, así basta encontrar $c \in (b_1, b_2)A \cap \mathfrak{b} =: \mathfrak{a}$ tal que no se anula en Y, lo cual se traduce en que $c \notin \Phi(y)$ para ningún $y \in Y$, pero esto se puede puesto que ningun $\Phi(y) \supseteq \mathfrak{a}$ y por evitamiento de primos. $\square$

Así, nótese que lo único que falta es asociar a cada espacio espectral un resorte simple. Eso lo lograremos en la siguiente subsección.

§B.1.3 Espacios con indeterminadas y la demostración.

Definición B.32: Dado un espacio espectral X, denotaremos por $\mathring{\mathcal{K}}(X)$ al conjunto de abiertos compactos de X. En ésta notación, toda función espectral $f\colon X \to Y$ induce una aplicación $\mathring{\mathcal{K}}(f)\colon \mathring{\mathcal{K}}(Y) \to \mathring{\mathcal{K}}(X)$.

Un ***espacio con indeterminadas*** es una terna (X, E, g), donde X es un espacio espectral, E es un conjunto y $g\colon E \to \mathring{\mathcal{K}}(X)$ tal que $g[E]$ es una subbase de X. Un ***morfismo*** entre espacios con indeterminadas $(f, r)\colon (X, E, g) \to (Y, F, h)$ es un par, donde $f\colon X \to Y$ es una función espectral y $r\colon F \to E$ es una función inyectiva tal que el siguiente diagrama conmuta (en Set):

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook, "r"] \arrow[d, hook, "h"'] & E \arrow[d, hook, "g"] \\ \mathring{\mathcal{K}}(Y) \arrow[r, hook, "\mathring{\mathcal{K}}(f)"'] & \mathring{\mathcal{K}}(X). \end{tikzcd}$$

La categoría de espacios con indeterminadas se denota U en ésta sección.

Podemos construir un resorte asociado a un espacio con indeterminadas como prosigue:

(i) Sea k un cuerpo fijado. Denotemos $k[E] := k[\{t_e : e \in E\}]$, donde t_e son indeterminadas formales. Denótese $\chi_e \colon X \to k[E]$ la función característica sobre el abierto $g(e)$.

(ii) Considere el producto $k[E]^X := \prod_{x \in X} k[E]$ y denótese $\Delta \colon k[E] \to k[E]^X$ la aplicación diagonal. Defínase

$$A := k[\{(t_e \cdot \chi_e(x))_{x \in X} : e \in E\}] \subseteq k[E]^X.$$

(iii) Como $k[E]^X$ es un producto, admite proyecciones $\pi_x \colon k[E]^X \to k[E]$, entonces definimos

$$A^x := \operatorname{Img}(\pi_x|_A) = k[\{t_e : e \in E, x \in g(e)\}] \subseteq k[E],$$

así que A^x es, efectivamente, un dominio íntegro.

Es relativamente sencillo notar que esta construcción determina un funtor $\mathsf{U} \to \mathsf{Spring}$, pero también podemos asignarle un índice:

(iv) Dados $x \rightsquigarrow y$ puntos de X, definimos $v_{x,y} \colon \operatorname{Frac}(A_x)^\times \to \mathbb{Z}$ dado por $v_{x,y}(t_e) := \chi_e(y)$. Así, la definición se extiende a monomios y si $s_1, \dots, s_n$ son monomios distintos y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k^\times$, entonces

$$v_{x,y}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i\right) := \min_i \{v_{x,y}(\lambda_i s_i)\}.$$

(v) (X, A, v) es un resorte simple, pues cada A^x se mete en $k[E]$ y luego en $k(E)$. La finitud de las imágenes es clara y, de hecho, definiendo $T_e := (t_e \cdot \chi_e(x))_{x \in X} \in A$ entonces $d\left(\prod_i T_{e_i}\right) = \bigcap_i g(e_i)$.

Así construimos el funtor $H \colon \mathsf{U} \to \mathsf{ISpring}$.

Finalmente, nótese que la aplicación $X \mapsto (X, \mathring{\mathcal{K}}(X), \operatorname{Id}_{\mathring{\mathcal{K}}(X)})$ determina un funtor $F \colon \mathsf{Spec} \to \mathsf{U}$ que preserva espacios, así que concluimos:

Teorema B.33 – *Tesis de Hochster*. Todo espacio espectral es el espectro de algún anillo.

Demostración: Para cualquier espacio espectral, sea $\mathscr{C} \subseteq \mathsf{Spec}$ la subcategoría que solo le incluye a él y a la identidad. Basta notar que la composición de los funtores

$$\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathsf{U} \xrightarrow{H} \mathsf{lSpring} \xrightarrow{M} \mathsf{lSpring} \xrightarrow{V} \mathsf{CRing}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{Spec}(-)} \mathsf{Spec}$$

preserva espacios, es decir, es la inclusión canónica. □

La tesis de Hochster es parcialmente más fuerte, pero el lector estará quizá extrañado la elección de restringirnos a una subcategoría en medio de la demostración.

Definición B.34: Se dice que el funtor $\mathrm{Spec}\colon \mathsf{CRing}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Spec}$ es ***invertible*** en una subcategoría $\mathscr{C} \subseteq \mathsf{Spec}$ si existe $F\colon \mathscr{C} \to \mathsf{CRing}^{\mathrm{op}}$ con $F \circ \mathrm{Spec} = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$.

Veamos primero un ejemplo:

Ejemplo B.35: Sea $\mathscr{C} \subseteq \mathsf{Spec}$ la subcategoría plena que incluye al objeto $\mathbf{1} = \{0\}$, el espacio discreto con un elemento y a $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ el espacio de Sierpiński, con $0 \rightsquigarrow 1$. Sea $f\colon \mathbf{1} \to \mathbf{2}$ la función que $f(0) = 0$ y $g\colon \mathbf{2} \to \mathbf{1}$ la función constante; nótese que ambas son funciones espectrales.

Si Spec fuese invertible en $\mathscr{C}$, mediante $F\colon \mathscr{C} \to \mathsf{CRing}^{\mathrm{op}}$ y, definiendo, $A := F(\mathbf{1}), B := F(\mathbf{2}), \varphi := F(f), \psi := F(g)$, tenemos que:

$$\mathrm{Id}_A = F(\mathrm{Id}_{\mathbf{1}}) = F(f \circ g) = F(g) \circ F(f) = \psi \circ \varphi,$$

de modo que φ es suprayectivo, luego $\mathrm{Spec}(\varphi) = f$ debe ser una aplicación cerrada. Así $f(0)$ debe ser un punto cerrado, lo cual es absurdo. ⌟

Para ver otros ejemplos, véase [**25,** pág. 52], prop. 3.

Lo que nosotros probamos es que las subcategorías de la forma $\{\bullet, \mathrm{Id}_\bullet\} \hookrightarrow \mathsf{Spec}$ son invertibles. La tesis de Hochster realmente es que los funtores H, M, V preservan espacios; pero podemos refinar sus resultados:

Teorema B.36: El funtor $\mathrm{Spec}(-)$ es invertible en las siguientes subcategorías $\mathscr{C} \subseteq \mathsf{Spec}$:

1. $\mathscr{C}$ dado por todos los espacios espectrales y con flechas los epimorfismos espectrales.

2. $\mathscr{C}$ dado por un espacio espectral y todos sus subespacios espectrales.[4]

[4]¡Ojo que no los monomorfismos!

DEMOSTRACIÓN:

1. Sea $F\colon \mathscr{C} \to \mathsf{U}$ el funtor $X \mapsto (X, \mathring{\mathcal{K}}(X), \mathrm{Id}_{\mathring{\mathcal{K}}(X)})$. Así, dado un epimorfismo $f\colon X \twoheadrightarrow Y$, vemos que $F(f) = (f, r)$ donde $g\colon X \to Y$ es la misma función y $r := \mathring{\mathcal{K}}(f)\colon \mathring{\mathcal{K}}(Y) \to \mathring{\mathcal{K}}(X)$. Como f es epimorfismo, entonces r es inyectivo, así que sí llega a U.

2. Para todo $Y \subseteq X$ definamos $F\colon \mathscr{C} \to \mathsf{U}$ dado por $Y \mapsto (Y, \mathring{\mathcal{K}}(X), U \mapsto U \cap X)$. □

Podemos mejorar un poco la tesis de Hochster:

Definición B.37: Se dice que un espacio topológico X es ***localmente espectral*** si todo punto posee un entorno espectral.

Teorema B.38: Un espacio topológico es subyacente a algún esquema syss es localmente espectral.

B.2 Contraejemplos topológicos

Aquí construiremos contraejemplos invocando la tesis de Hochster que dice que todo espacio espectral sucede como el espectro de un anillo y, *a posteriori*, que un espacio topológico es el subyacente a un esquema syss es localmente espectral. Le recomendamos al lector general no mirar la demostración, pero igualmente lo incluímos como una buena herramienta para construir contraejemplos.

Ejemplo B.39 (Un esquema sin puntos cerrados)**:** Considere el ordinal $S := \omega + 1$, es decir, el conjunto bien ordenado cuyos elementos son

$$0 < 1 < 2 < 3 < \cdots < \omega.$$

Luego sea X el espacio topológico que tiene por conjunto subyacente al ordinal S con los abiertos de la forma

$$O_<(\beta) := \{\alpha \in S : \beta < \alpha\},$$

o todo X. A X le llamaremos la ***cadena de Sierpiński***.

Éste espacio es trivialmente T_0 y es compacto pues ω es el único punto cerrado, solo contenido en el abierto X. Todos los abiertos, salvo $O_<(\omega)$ son compactos, luego tiene una base de abiertos compactos y es claro que la intersección de abiertos compactos es compacta. Finalmente, es fácil verificar que el espacio es sobrio, así que X es espectral y sucede como el espectro de un anillo. Pero $U := O_<(\omega)$ es un abierto de X, luego es el espacio topológico de algún esquema, y es claro que U no contiene puntos cerrados. ⌟

Uno puede explicitar la construcción de un anillo cuyo espectro sea la cadena de Sierpiński. La siguiente construcción, que forma parte de un ejercicio de Liu [**9,** págs. 113-114] ofrece una construcción explícita:

Ejemplo B.40: En este ejemplo construiremos un esquema sin puntos cerrados, para ello querremos construir un anillo A donde los primos formen una única cadena $(0) \subseteq \mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{m}$ tras lo cual el esquema $\operatorname{Spec} A \setminus \{x_\mathfrak{m}\}$ no tendrá puntos cerrados.

Para comprobar la existencia de dicho anillo A nótese que debe ser local. Comencemos por construir un grupo abeliano ordenado $(G, \leq)$ donde $G := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z} \cdot \boldsymbol{e}_n$, con el orden lexicográfico, es decir, $\boldsymbol{e}_0 \geq \boldsymbol{e}_1 \geq \boldsymbol{e}_2 \geq \cdots \geq 0$. Ahora, considere $B := k[x_1, x_2, \dots]$ y considere la aplicación $v\colon B^\times \to G$ dada por $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ y tal que

$$v\left(\sum_\beta a_\beta \boldsymbol{x}^\beta\right) := \text{máx}\left\{v\big(\boldsymbol{x}^\beta\big) : a_\beta \neq 0\right\},$$

donde β recorre multi-índices. Queda al lector verificar que v se extiende a una valuación y es claro que es suprayectiva. Luego $A := \{f \in \operatorname{Frac} B : v(f) \geq 0\}$ es un anillo de valuación con grupo de valores G. La correspondencia entre ideales de A con ideales[5] de G hace que los ideales de A tengan la estructura deseada. ⌟

Ejemplo B.41 (Un esquema compacto, pero no cuasiseparado)**:** Éste es un refinamiento del anterior. Considere el conjunto parcialmente ordenado $S := \mathbb{N} \cup \{\omega, \bar{\omega}\}$, donde el orden en $\mathbb{N}$ es el canónico, ω y $\bar{\omega}$ son mayores que todo $n \in \mathbb{N}$, pero no son comparables.

Nuevamente, si consideramos Y como el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es S y con la topología que tiene por base a los conjuntos de la forma

$$O_<(y) := \{x \in S : x < y\},$$

entonces es fácil verificar que Y es localmente espectral. Otra manera de ver a Y es que resulta de pegar el esquema afín $X_1 := \mathbb{N} \cup \{\omega\}$, dado por la $(\omega + 1)$-cadena de Sierpiński del ejemplo anterior, con $X_2 := \mathbb{N} \cup \{\bar{\omega}\}$ mediante el abierto $U := \mathbb{N}$, resultando en «duplicar» al punto ω.

[5] Aquí hablamos de ideales en el sentido de un subgrupo que es un ideal en el orden $\leq$, es decir, si $g \in I$ y $g \leq h$, entonces $h \in I$.

Así Y es el espacio topológico de algún esquema, pero X_1, X_2 son abiertos compactos de Y tales que $X_1 \cap X_2 = O_<(\omega)$ no es compacto. Así Y es compacto, pero no cuasiseparado. ⌟

Notas históricas

Los espacios espectrales fueron introducidos por vez primera por **Marshall H. Stone** en [**37**] (1937) en relación a sus teoremas de representabilidad, específicamente trazando el vínculo entre álgebras booleanas y espacios de Stone,[6] específicamente mediante el espectro primo de anillos booleanos. La idea de asociar a anillos, un espacio topológico llamado un *espectro* parece también ser original de Stone; luego fue retomado por N. Jacobson quien emplea ideales primarios en anillos no conmutativos y finalmente, deriva en el espectro de Zariski; no obstante, hay quienes indican que la idea le fue sugerida a Zariski por uno de sus oyentes en un seminario.

En la tesis de **Melvin Hochster** [**25**] (1967; publ. 1969), él acuña el término *espacio espectral* y, gracias a la creciente popularidad de la revolución de Grothendieck en geometría algebraica, su tesis también recibieron gran atención. Efectivamente, desde la tesis de Hochster se ha expandido toda una rama activa de investigación entorno a los espacios espectrales. En su libro, Hartshorne [**8,** págs. 93-94], ex. II.3.17, introduce la noción de *espacio de Zariski* que, en nuestro lenguaje, corresponde a un espacio espectral noetheriano y así, por ejemplo, ilustra el puesto que unánimamente se les da a los espacios espectrales.

Quizá una de las disciplinas más profundamente afectadas por los espacios espectrales, es la *geometría algebraica real* con el funtor conocido como el *espectro real* de Coste-Roy.

Existe un determinado, aunque débil, hilo conductor entre la tesis de Hochster y el siguiente resultado de Krull [**33**] (1932):

> **Teorema:** Para todo grupo abeliano ordenado $(G, \leq)$ existe un anillo de valuación cuyo grupo de valuación es G.

Éste resultado, también puede emplearse para demostrar la existencia de un esquema sin puntos cerrados (vid., [**Stacks**], `tag 01IY`). Fontana [**31**] (1980) también da una demostración independiente de (aunque inspirado en) la tesis de Hochster de que todo espacio espectral finito sucede como el espectro de algún anillo.

[6] A veces también llamados *espacios de Boole*. Nosotros seguimos la nomenclatura de P. Johnstone.

Bibliografía

Las fechas empleadas son aquellas de la primera publicación o del primer registro de Copyright.

Geometría algebraica clásica

1. Castillo, C. I. *Geometría Algebraica* `https://www.uv.es/ivorra/Libros/GA.pdf` (2020).
2. Cutkosky, S. D. *Introduction to Algebraic Geometry* (American Mathematical Society, 2018).
3. Fulton, W. *Algebraic Curves. An Introduction to Algebraic Geometry* `http://www.math.lsa.umich.edu/~wfulton/CurveBook.pdf` (W. A. Benjamin, Inc., 1969).
4. Milne, J. S. *Algebraic Geometry* ver. 6.02. `https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ag.html`.
5. Smith, K. E., Kahanpää, L., Kekäläinen, P. y Traves, W. *An Invitation to Algebraic Geometry* (Springer-Verlag New York, 2000).

Geometría algebraica moderna

6. Castillo, C. I. *Esquemas* `https://www.uv.es/ivorra/Libros/Esquemas.pdf` (2022).

Stacks. De Jong, A. J. *et al. Stacks project* `https://stacks.math.columbia.edu/`.

7. Görtz, U. y Wedhorn, T. *Schemes. With Examples and Exercises* 2.ª ed. (Springer Spektrum Wiesbaden, 2010).

8. HARTSHORNE, R. *Algebraic Geometry Graduate Texts in Mathematics* **52** (Springer-Verlag New York, 1977).

9. LIU, Q. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves* (Oxford University Press, 2002).

10. MUMFORD, D. *The Red Book of Varieties and Schemes* 2.ª ed. (Springer-Verlag, 1974).

11. VAKIL, R. *The Rising Sea. Foundations of Algebraic Geometry* (15 de mayo de 2023).

Tópicos en la teoría de esquemas

12. ALTMAN, A. y KLEIMAN, S. L. *Introduction to Grothendieck duality theory* (Springer-Verlag, 1970).

13. HARTSHORNE, R. *Ample Subvarieties of Algebraic Varieties* (Springer-Verlag, 1970).

14. JOUANOLOU, J.-P. *Théorèmes de Bertini et applications* (Birkhäuser, 1983).

15. KOLLÁR, J. *Rational curves on algebraic varieties* (Springer-Verlag, 2001).

16. MUMFORD, D. *Abelian Varieties* (Oxford University Press, 1970).

17. SERNESI, E. *Deformations of Algebraic Schemes Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* **334** (Springer-Verlag, 2006).

Escritos de Grothendieck

EGA III_1. GROTHENDIECK, A. y DIEUDONNÉ, J. *Éléments de Géométrie Algébrique.* III.1: *Étude cohomologique des faisceaux cohérents* **11** (Publ. Math. IHÉS, 1961).

EGA II. GROTHENDIECK, A. y DIEUDONNÉ, J. *Éléments de Géométrie Algébrique.* II: *Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes* **8** (Publ. Math. IHÉS, 1961).

EGA III_2. GROTHENDIECK, A. y DIEUDONNÉ, J. *Éléments de Géométrie Algébrique.* III.2: *Étude cohomologique des faisceaux cohérents* **17** (Publ. Math. IHÉS, 1963).

EGA IV_2. GROTHENDIECK, A. y DIEUDONNÉ, J. *Éléments de Géométrie Algébrique.* IV.2: *Étude locale des schémas et des morphismes de schémas* **24** (Publ. Math. IHÉS, 1965).

EGA IV_3. GROTHENDIECK, A. y DIEUDONNÉ, J. *Éléments de Géométrie Algébrique.* IV.3: *Étude locale des schémas et des morphismes de schémas* **28** (Publ. Math. IHÉS, 1966).

EGA IV_4. GROTHENDIECK, A. y DIEUDONNÉ, J. *Éléments de Géométrie Algébrique.* IV.4: *Étude locale des schémas et des morphismes de schémas* **32** (Publ. Math. IHÉS, 1967).

EGA I. GROTHENDIECK, A. y DIEUDONNÉ, J. *Éléments de Géométrie Algébrique.* I: *Le langage des schémas* (Springer Berlin, Heidelberg, 1971).

Cohomología étale

18. FREITAG, E. y KEIHL, R. *Étale Cohomology and the Weil Conjecture* (Springer-Verlag, 1988).

19. POONEN, B. *Rational Points on Varieties* (American Mathematical Society, 2017).

Otros recursos

20. BANASCHEWSKI, B. Radical ideals and coherent frames. *Math. Univ. Carolinae* **37,** 349-370. `https://eudml.org/doc/247876` (1996).

21. BOMBIERI, E. *Counting points on curves over finite fields (d'après S. A. Stepanov)* en *Seminaire Bourbaki. Vol 1972/73, Exposés 418-435* (ed. BOURBAKI, N.) (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1973). `http://www.numdam.org/item/SB_1972-1973__15__234_0/`.

22. CONRAD, B. Deligne's notes on Nagata compactifications. *J. Ramanujan Math. Soc.* **22,** 205-257. `http://math.stanford.edu/~conrad/papers/nagatafinal.pdf` (2007).

23. DICKMANN, M., SCHWARTZ, N. y TRESSL, M. *Spectral Spaces New Mathematical Monographs* **35** (Cambridge University Press, 2019).

24. DIEUDONNÉ, J. Fondements de la géométrie algébrique moderne. *Adv. Math.* **3,** 322-413. doi:`10.1016/0001-8708(69)90007-3` (1969).

25. HOCHSTER, M. Prime Ideal Structure in Commutative Rings. *Trans. Amer. Math. Soc.* **142,** 43-60. doi:`10.2307/1995344` (1969).

26. KUNZ, E. *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry* (Birkhäuser, 1933).

27. MATSUMURA, H. *Commutative Ring Theory* trad. por REID, M. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* **8** (Cambridge University Press, 1986).

28. PERRIN, D. Approximation des schémas en groupes, quasi compacts sur un corps. *Bull. Soc. Math. France* **104,** 323-335. doi:10.24033/bsmf.1830 (1976).

29. SERRE, J.-P. Faisceaux Algébriques Cohérents. *Ann. Math.* **61,** 197-278. doi:10.2307/1969915 (1954).

Documentos históricos

30. CARTIER, P. *Groupes algébriques et groupes formels* en *Colloq. Théorie des Groupes Algébriques (Bruxelles, 1962)* (Libraire Universitaire, Louvain, 1962), 87-111.

31. FONTANA, M. Topologically defined classes of commutative rings. *Ann. Mat. Pura Appl.* **123,** 331-355. doi:10.1007/BF01796550 (1980).

32. FULTON, W. y HANSEN, J. A Connectedness Theorem for Projective Varieties, with Applications to Intersections and Singularities of Mappings. *Ann. of Math.* **110,** 159-166. doi:10.2307/1971249 (1979).

33. KRULL, W. Allgemeine Bewertungstheorie. *J. reine angew. Math* **167,** 160-196. https://eudml.org/doc/149803 (1932).

34. NAGATA, M. Imbedding of an abstract variety in a complete variety. *J. Math. Kyoto Univ.* **2,** 1-10. doi:10.1215/kjm/1250524969 (1962).

35. NAGATA, M. A generalization of the imbedding problem of an abstract variety in a complete variety. *J. Math. Kyoto Univ.* **3,** 89-102. doi:10.1215/kjm/1250524859 (1963).

36. STEPANOV, S. A. The number of points of a hyperelliptic curve over a finite prime field. *Math. USSR Izv.* **33,** 1103-1114. doi:10.1070/IM1969v003n05ABEH000834 (1969).

37. STONE, M. H. Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky* **67,** 1-25. doi:10.21136/cpmf.1938.124080 (1937).

38. WEIL, A. *Sur les Courbes Algébriques et les Variétés qui s'en Déduisent* (Hermann, 1948).

Libros de autoría propia

39. CUEVAS, J. *Álgebra* https://github.com/JoseCuevasBtos/apuntes-tex/raw/master/algebra/algebra.pdf (2022).

40. CUEVAS, J. *Teoría de categorías y álgebra homológica* https://github.com/JoseCuevasBtos/apuntes-tex/raw/master/cats/teoria-categorias.pdf (2022).

41. Cuevas, J. *Teoría de Conjuntos* https://github.com/JoseCuevasBtos/apuntes-tex/raw/master/conjuntos/conjuntos.pdf (2022).

42. Cuevas, J. *Topología y Análisis* https://github.com/JoseCuevasBtos/apuntes-tex/raw/master/topologia-analisis/topologia-analisis.pdf (2022).

Índice alfabético

Lista de tareas pendientes