Topología y Análisis

José Cuevas Barrientos

14 de febrero de 2021

Índice general

Preámbulo

Pre requisitos. Este libro supone que el lector está familiarizado con la teoría de conjuntos (ultra) básica que es lo que comprende los primeros diez capítulos del libro "Naïve Set Theory" de Paul Halmos o equivalentemente el primer capítulo de mis apuntes de teoría de conjuntos. Algunos ejemplos asumen conocimientos básicos sobre la teoría de ordinales y cardinales, y se recomienda unas lecturas sobre el axioma de elección.

Métodos y objetivos. En mi lectura de textos matemáticos he caído en la conclusión de que hay dos factores inversamente proporcionales: el contenido y la explicación, por ende, si he de elegir, prefiero siempre el primero ante el segundo. Esto no quiere decir que el texto no se explaye bien, sino que en lugar de explicar una definición varias veces asumo que el lector la releerá hasta comprenderla; esto puede dificultar la lectura, pero hace el progreso en ella más placentero. También estoy consciente de que un lector prefiera un libro con hartos ejercicios, en su lugar mi libro sólo otorga demostraciones explícitas para resultados complejos, mientras que para los que no poseen demostración (que son la mayoría por cierto) se asume que el lector tomará cartas en el asunto.

Orden y propósitos. En esta sección se explica a grandes rasgos cuales son los objetivos de cada capítulo así como sus relaciones entre sí:

1. **Números reales** Se introduce el concepto de los números reales a partir de dos propiedades fundamentales: el orden y la métrica. Orden refiere a su cualidad de corresponder a los números que conforman la recta numérica. Métrica refiere a distancia y a la cualidad de cercanía entre conjuntos de números. En ambos casos, $\mathbb{R}$ es una forma reducida de "espacio completo" respecto a ciertos requísitos nuestros, además su

estructura es única en varios sentidos. El capítulo termina estudiando algunas propiedades de límites y series que ayudan a su construcción rigurosa.

2. **Topología:** Dado que el concepto de límite, y el de continuidad de funciones se traducen en conceptos de "cercanía entre puntos" se define la topología de un conjunto cualquiera que formaliza la noción de estar o no cerca. Se discuten las topologías estándares a espacios métricos y ordenados, así como algunas de sus propiedades. Se discuten los axiomas de separación que hablan acerca de los grados de separabilidad entre dos puntos del espacio. Se termina el capítulo analizando propiedades que se heredan a subespacios (espacios contenidos en otros) y a espacios producto (multiplicación estándar de espacios).

3. **Compacidad:** Motivados por los intervalos cerrados y acotados de los reales, se generalizan en la noción de *compacidad* en espacios topológicos. Para ello se definen los conceptos de filtros y ultrafiltros que serán útiles en ciertas equivalencias a la cualidad de *ser compacto*. Se presentan los resultados del teorema de Tychonoff, así como versiones más débiles y equivalencias al axioma de elección. Luego se revisan los espacios de funciones y teoremas aplicando compacidad. El capítulo finaliza analizando teoremas de metrización y las compactificaciones usuales.

4. **Conexión y espacios vectoriales:** Se comienza por la definición y propiedades básicas de los espacios vectoriales topológicos, así como que los espacios normados son vectoriales. Se continua con la definición de espacio dual, polares, representación y más. Luego, motivados por una idea de separación del espacio se define la cualidad de ser conexo. Se estudian tipos de conexión y se termina por tipos de desconexión.

5. **Derivadas:** Se define el concepto de derivada, la mejor analogía es que la derivada de una función es lo que la velocidad es a la posición. Se estudian reglas usuales de las derivadas, así como la noción de función conexa y convexa. Se estudian aplicaciones usuales de las derivadas: la regla de L'Hôpital para límites y el teorema de Taylor que permite aproximar funciones derivables por polinomios. Se aplica el teorema de Taylor para calcular funciones (trigonométricas y el logaritmo), también se ve una aplicación para definir π. Se termina por ver una serie de desigualdades clásicas e importantes en matemáticas que son facilmente deducibles a partir de las nociones de diferenciabilidad.

6. **Teoría de medida e integración:** Se define el concepto de medida, una función que generaliza las nociones geométricas de longitud, área y volumen. Se enseñan métodos teóricos para construir medidas. Luego, basándose en la intuición se construye la medida de Jordan que luego se generaliza a la medida de Lebesgue. Pasando al segundo tema, se estudia el concepto de integración presentando tres ejemplos y sus correlaciones: la integral de Riemann, de Lebesgue y de Henstock-Kurzweil.

Introducción

Uno de los temas que más atrae a los jóvenes en matemáticas es el del análisis matemático, aquí apliamos el término para poder referirnos a un análisis que no se restringe exclusivamente a los números reales ni a espacios vectoriales reales, sino que puede generalizarse, y para ello, la topología tiene un rol fundamental. No obstante, hay que cuidarse de que ella es un arma de doble filo, pues si bien está hecha con claros fines analíticos y geométricos, utiliza una base fuerte sobre teoría de conjuntos, que suele criticarse por su abstracción; asimismo, un mal acercamiento a la topología puede generar confusión y tedio debido a que en gran medida suele sentirse como cualquier cosa menos el cálculo del que uno suele estar familiarizado.

El análisis en general busca características en funciones reales –antes de explicarlos quiero que el lector piense en las funciones no como en el gráfico sino una operación que "mueve" puntos–, que se sintetizan en lo siguiente: puntos que están cerca los unos a los otros luego de moverse se mantienen cerca (continuidad), la "cercanía" vista como una proporción implica que cerca de un punto la función asemeja una línea (diferenciabilidad), si la función es vista como un gráfico, la región inferior puede ser medida (integrabilidad). Cabe destacar que no sólo se espera una intuición tras estas nociones, sino que se busca una interacción entre ellas, eso nos obliga a tomar ciertas restricciones para que todas coexistan.

Uno de los objetivos de éste libro sera tomar estas ideas que conforman un curso inicial de cálculo y generalizarlas. Es claro que la continuidad es un concepto que sólo depende de que se define como "cerca", para lo cual se dedican los capítulos en topología que cumplen dicha finalidad. Sin embargo, la segunda y tercera son definiciones más complicadas, que dependen de propiedades intrínsecas a $\mathbb{R}$, para la diferenciabilidad veremos que se puede generalizar a espacios vectoriales y que en particular funciona en cosas que en regiones pequeñas parecen espacios vectoriales.

Sobre la forma de pensar topológicamente. (Este ejercicio asume familiaridad con la noción real de límite.) Sabemos que algo del estilo de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ se describe analíticamente como

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ (0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon).$$

Que se lee como que cerca de a la función toma valores cerca de L. El ϵ es indispensable, por que subjetivamente podríamos decir que si las imágenes están cerca de 1 también lo están de 1,1 o de 1,01, pero queremos darnos el lujo de hablar con unicidad; el ϵ nos dice que las imágenes se acercan lo más posible a L.

Si utilizamos una función distancia de la forma $d(x, y) := |x-y|$, entonces podemos describir el límite como

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ (0 < d(x, a) < \delta \implies d(f(x), L) < \epsilon).$$

Esta definición es mejor porque ahora sólo se requiere que exista una función distancia como la que propusimos. Pero se puede mejorar aún más: considere que

$$B_r(p) := \{x : d(x, p) < r\}.$$

Lo que se lee como "bola de radio r y centro p". Mediante este objeto nos queda la definición de límite como

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ (x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \implies f(x) \in B_\epsilon(L)).$$

Donde aquí la definición sólo requiere de definir que significa $B_r(p)$ en un espacio. De hecho podemos erradicar una implicancia escribiendo el enredo como

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ (B_\delta(a) \setminus \{a\} \subseteq f^{-1}[B_\epsilon(L)]).$$

Pero notemos por última y final vez que podemos eliminar los cuantificadores, el uso del ϵ y el δ, y decir que lo de arriba se aplica para U_a, V_L donde U_a, V_L es cualquier conjunto formado a partir de uniones de bolas. Y aquí es donde podemos incluso prescindir de las bolas, pues podríamos definir de antemano una familia de conjuntos convenientemente llamados *básicos* y decir que se aplica para uniones de básicos. Podemos llamar *abiertos* a los conjuntos formados a partir de uniones de básicos, y entonces decimos que $f(a)$ está cerca de L diciendo que para todo abierto V_L que contiene a L, existe un abierto U_a que contiene a a tal que

$$U_a \setminus \{a\} \subseteq f^{-1}[V_L].$$

Esta es la magia de la topología. Y aquí sólo basta definir una familia de básicos para que podamos pensar en continuidad en dicho espacio.

Usualmente las definiciones topológicas suelen ser bastante más abstractas y más difíciles de visualizar, pero son más potentes y permiten generalizar bastantes resultados del cálculo real. Un ejemplo es ver como, en contexto de los espacios conexos, un resultado como el teorema de los valores intermedios resulta casi trivial.

Sobre el axioma de elección (AE)

¿Por qué es un axioma? Es difícil entender por qué debemos introducir un axioma para emplear un argumento tan común. ¿Acaso no se nos permite elegir elementos cuando un conjunto es no vacío? Pues en verdad no es tan simple como eso. Al elegir un elemento aleatorio, lo que estamos haciendo lógicamente es algo así:

$$A \neq \varnothing \implies \exists x \; (x \in A \land \dots)$$

Lo cual se identifica por la introducción de un cuantificador del cual eventualmente se concluye algo como $\exists x \; (x \in A \land \phi(x))$ (existe un elemento de A que cumple $\phi(x)$). Podemos seguir empleando y metiendo cuantificadores tantas (finitas) veces como se quiera, y matemáticamente el argumento sigue siendo válido, no obstante que ocurre si tenemos una familia infinita de conjuntos $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, entonces el argumento se vería algo así:

$$\exists x_0 \in A_0 \; (\exists x_1 \in A_1 \; (\exists x_2 \in A_2 \; (\dots)))$$

Lo cuál tiene toda la pinta de no ser válido, pues en esencia utilizaría infinitos signos. Otro detalle es que tampoco podemos usar un argumento inductivo para concluir que se puede extraer una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de términos correspondientes a cada conjunto. En dicho caso, la inducción sólo nos permite concluir que se puede extraer una sucesión finita que lo satisfaga, no infinita, y es que las elecciones infinitas son la parte que se asume en el AE.

¿Cuándo es válido tomar infinitas elecciones? Otra forma de verlo es que un par (x_0, x_1) de A_0 y A_1 resp. es, en efecto, un par ordenado que es un elemento del conjunto. Con esto es fácil concluir que el problemas de las infinitas (en particular numerables) elecciones se reduce a buscar un elemento:

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) \in \prod_{i=0}^{\infty} A_i$$

Y esto ***debe*** ser válido, ¿no? Nuevamente no lo es. Y eso es porque, de ser posible, podríamos extraer una sucesión de términos distintos dos a dos en un conjunto infinito cualquiera. ¿Y eso qué tiene de malo? Esto es equivalente a considerar que existe un elemento **primero**, un elemento **segundo**, un elemento **tercero** y así dentro de un conjunto arbitrario. Aquí es importante tomar en cuenta una de las descripciones más honestas sobre la teoría de conjuntos: "los conjuntos son objetos amorfos". Lo que significa que, al referirse a *un conjunto arbitrario*, la frase es tan completa como suena: los conjuntos arbitrarios no poseen ninguna característica distintiva, y mucho menos un *buen orden*.

No obstante, hay conjuntos que no son amorfos del todo y los cuales conocemos muy bien, especialmente por su orden: los naturales. Los naturales poseen esta característica, luego expresiones como *extraer inductivamente elementos de un subconjunto natural* están justificadas. Asimismo, conjuntos equipotentes a los naturales también tienen éstas facultades como lo son: los enteros y los racionales.

Distintos tipos de elecciones. Como vimos el axioma de elección está fuertemente ligado a la característica de un conjunto de estar bien ordenado, pero en general, la proposición es ***muy*** fuerte, en el sentido de que al aceptar el axioma de elección de forma general ocurren cosas muy extrañas como la conocida paradoja de Banach-Tarski. Por ello varios matemáticos rechazan su uso, sin embargo, pueden aceptar el uso de versiones más débiles que el axioma de elección para demostrar alguna proposición. La versión más conocida de esto es el **axioma de elecciones numerables** (AEN) que nos dice que entre numerables conjuntos no vacíos podemos extraer una sucesión de elementos de ellos. Como se detalla en el libro, los usos más comunes de AEN es en los temas que involucran sucesiones. También hay otras versiones más débiles del axioma de elección, pero no voy a entrar en tanto detalle, y cuando lo haga siempre pondré énfasis en su uso y se hará de manera opcional respecto de la lectura general.

Parte I.

Introducción a la Topología

1

Números reales y sucesiones

En este capítulo pretendemos construir los números reales, pero debido a una multiplicidad de formas vamos a intentar tratar el problema desde sus variadas formulaciones, pues en ciertos contextos sirve más uno que el otro.

1.1. Construcción basada en el orden

Para esto recordamos ciertas definiciones que teníamos sobre conjuntos ordenados:

Definición 1.1 – *Intervalos y conjunto denso*: Se definen los intervalos sobre un conjunto linealmente ordenado $(X, \leq)$ dado como:

$$\begin{aligned} (a,b) &:= \{x : a < x < b\} & [a,b] &:= \{x : a \leq x \leq b\} \\ [a,b) &:= \{x : a \leq x < b\} & (a,b] &:= \{x : a < x \leq b\} \\ (a,\infty) &:= \{x : a < x\} & [a,\infty) &:= \{x : a \leq x\} \\ (-\infty,b) &:= \{x : x < b\} & (-\infty,b] &:= \{x : x \leq b\} \end{aligned}$$

Los intervalos $(a,b), (a,\infty)$ y $(-\infty,b)$ se dicen *abiertos*; los intervalos $[a,b], [a,\infty)$ y $(-\infty,b]$ se dicen *cerrados*. Los símbolos "$\pm\infty$" son puramente de notación, a menos que el conjunto posea máximo y mínimo, en cuyo caso $\pm\infty$ les representa. En general si denotamos un intervalo

(a, b) se asume de antemano que $a < b$, así que nos permitiremos obviar ese detalle, por ende, cosas como (a, a) o $[a, a]$ se dicen intervalos triviales.

Se dice también que es denso si todo intervalo abierto no-trivial es no vacío. Decimos que D es un subconjunto denso (en orden) de X si todo intervalo abierto posee elementos de D. X se dice no acotado (a secas) si no posee máximo ni mínimo.

Como los conjuntos son linealmente ordenados podemos dibujarles como rectas y los intervalos vendrían a ser secciones de dichas rectas. Si un intervalo incluye a un extremo, tal será pintado con un punto coloreado, si le excluye, se pintará con un punto blanco.

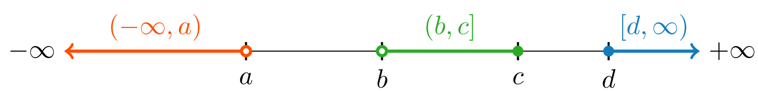

Figura 1.1. Diagramas de intervalos.

Los morfismos entre conjuntos ordenados son los que preservan orden inclusivo (i.e., $x \leq y$ implica $f(x) \leq f(y)$). También se dice que una estructura es única bajo isomorfismos, si cualesquiera dos estructuras que comparten dichas propiedades son isomorfas.

Para los teoremas posteriores llamaremos a un par ordenado (A, B) un *corte de Dedekind* si resulta ser una partición estricta[1] de X y A es una sección inicial no-trivial[2] de X.

Teorema 1.2: En un conjunto linealmente ordenado X son equivalentes:

1. Todo subconjunto no vacío acotado superiormente posee supremo (axioma del supremo).
2. Todo subconjunto no vacío acotado inferiormente posee ínfimo.
3. Un subconjunto $I \subseteq X$ cumple que
$$\forall a, b \in I; x \in X \ (a < x < b \implies x \in I)$$
syss es un intervalo.

[1]Esto es, si $A \cup B = X$ y $A \cap B = \varnothing$.
[2]Esto es, si para todo $a \in A$ y $b < a$ entonces $b \in A$. Y $A \notin \{\varnothing, X\}$.

4. Si (A, B) es un corte de Dedekind, entonces A o B posee máximo o mínimo resp.

DEMOSTRACIÓN: 1) $\iff$ 2). Sea A no vacío y acotado inferiormente. Entonces definimos B como el conjunto de cotas inferiores de A, el que por definición es no vacío y está acotado superiormente por cualquier elemento de A. Luego basta probar que $\sup B = \inf A$. Notemos que $\sup B$ es cota inferior de A por ser la mínima cota superior de B, y es obvio que es la mayor de las cotas inferiores (pues es mayor o igual que todo elemento de B). La otra implicancia es análoga.

1) $\implies$ 3). Es claro que todo intervalo cumple con lo pedido. Notemos que si $I = X$ o $I = \varnothing$ entonces es trivialmente un intervalo. Si sólo está acotado superiormente, entonces posee supremo b, luego probaremos que $(-\infty, b) \subseteq I \subseteq (-\infty, b]$.

Si $x \in (-\infty, b)$, como I no posee cota inferior, entonces existe $a \in I$ tal que $a < x$, y como $x < b$ entonces no puede ser cota superior de I, ergo existe $c \in I$ tal que $a < x < c$, por lo que $x \in I$. La otra inclusión es análoga ya que sólo cambia que $b \in I$. El resto de casos también.

3) $\implies$ 4). Es fácil ver que A, B satisfacen las condiciones de la propiedad 3), ergo son intervalos, y como A es una sección inicial no-vacía se cumple que no es acotado inferiormente, pero como no es X entonces debe ser un intervalo de la forma $(-\infty, m)$ o $(-\infty, m]$ (pues algún elemento de B ha de ser cota superior). Algo análogo pasa con B que ha de ser $(m, +\infty)$ o $[m, +\infty)$. $m \in X$ así que $m \in A$ o $m \in B$, que resulta ser máximo de A o mínimo de B.

4) $\implies$ 1). Sea S no vacío acotado superiormente, entonces llamemos B al conjunto de sus cotas superiores y $A := B^c$, luego (A, B) resulta ser un corte de Dedekind, por lo que alguno posee máximo o mínimo m. Sabemos que $m = \inf B$. Probaremos que m es cota superior de S. Sea $x \in S$, como $b \in B$ es cota superior, entonces $x \leq b$ para todo $b \in B$, ergo, x es cota inferior de B, luego por maximalidad del ínfimo, se cumple que $x \leq m$, luego m es cota superior de S y pertenece a B, por lo que es el mínimo de B, y el mínimo de las cotas superiores de S es, por definición, su supremo. $\square$

Decimos que un conjunto linealmente ordenado es *completo* si satisface cualquiera (y por ende todas) de las propiedades del teorema anterior.

Teorema 1.3: Se cumple:

1. Hay un único conjunto linealmente ordenado, numerable, denso y no acotado bajo isomorfismos.

2. Hay un único conjunto linealmente ordenado completo que contiene un subconjunto denso numerable bajo isomorfismos.

Demostración: 1. Sean $P_1 := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $P_2 := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ conjuntos que satisfagan dichas propiedades. <++>

□

Este teorema es muy importante, pues $(\mathbb{Q}, \leq)$ es un conjunto conocido que satisface la primera propiedad, es decir, cualquier otra estructura que cumpla dichas características es equivalente a $\mathbb{Q}$; y la segunda propiedad describe a $\mathbb{R}$, y también señala equivalencia. Esto es otra forma de decir que la recta numérica real es completa para lo que necesitamos, o que con $\mathbb{R}$ ya no nos "faltan" números en la recta.

Teorema 1.4: Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado denso y no acotado. Entonces existe $(C, \preceq)$ totalmente ordenado no acotado completo tal que posee un subconjunto D orden-isomorfo a X que es denso en C.

Demostración: Sea C el conjunto de los cortes de Dedekind de X, donde si $(A, B) \in C$ se cumple que A no posee máximo, entonces definimos $(A_1, B_1) \preceq (A_2, B_2)$ syss $A_1 \subseteq A_2$. Probemos ahora que es completo: Sea Y un conjunto de elementos de C, entonces definimos

$$S := \left(\bigcup_{(A,B)\in Y} A, \bigcap_{(A,B)\in Y} B \right).$$

Sabemos que $\bigcup_{(A,B)\in Y} A$ es el supremo de $\pi_1[Y]$, sólo basta ver que $S \in C$, lo cuál se hereda del hecho de que la unión de secciones iniciales es una sección inicial. Finalmente notemos que $\iota : X \to C$ definido como $\iota(x) = \big(\{y : y < x\}, \{y : x \leq y\}\big)$ es evidentemente un monomorfismo de orden (por cualidad de ser denso), luego $D := \iota[X]$ satisface ser el conjunto del enunciado; sólo basta notar que sea denso en C. □

Definición 1.5: Definimos $\mathbb{R}$, también llamado conjunto de los "números reales", como la extensión de $\mathbb{Q}$ basada en el teorema anterior.

Notemos que esto es equivalente a decir que $\mathbb{R}$ es la mínima extensión de $\mathbb{Q}$ que cumple el axioma del supremo, que es como varios otros libros lo definen.

1.2. Construcción analítica

El método anterior define el conjunto de los reales respecto al orden y esto es particularmente placentero visualmente pues equivale a ver que $\mathbb{R}$ es el conjunto de todos los números que representan puntos de la recta numérica; no obstante, no es muy sencillo probar que la estructura algebraica de $\mathbb{Q}$ (las propiedades de *cuerpo*) se conservan. Para esto debemos introducir un par de nuevos conceptos propios del análisis matemático.

Definición 1.6 – *Anillo ordenado arquimediano*: Un anillo unitario ordenado $(R, +, \cdot, \leq)$ se dice *arquimediano* si satisface con la propiedad de arquímedes: Para todo $r \in R$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r < \phi(n)$ donde $\phi(n) := \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n}$ donde 1 es el neutro multiplicativo de R.

En general obviaremos la parte de ordenado y unitario (en caso de ser anillo) ya que están implícitas en la definición de arquimediano.

Es claro que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo arquimediano, la idea es poder definir $\mathbb{R}$ de modo que sea también un cuerpo arquimediano. Desde aquí en adelante R representará un anillo arquimediano.

Definición 1.7 – *Función valor absoluto*: En R se define el *valor absoluto* $|\,| : R \to R^+ \cup \{0\}$ así:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Teorema 1.8: Sean $x, a \in R$, son equivalentes:

1. $-a \leq x \leq a$.
2. $x \leq a \wedge -x \leq a$.
3. $|x| \leq a$.

Proposición 1.9: Sean $x, y \in R$, se cumple:

a) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

b) $|xy| = |x|\,|y|$.

Definición 1.10 – *Norma y distancia*: Sea un espacio vectorial V de un anillo arquimediano A. Una norma $\| \, \| : V \to R$ es una aplicación que satisface los siguientes axiomas para $u, v \in V$ y $\alpha \in A$:

(1) $\|u\| = 0$ syss $u = 0$.

(2) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualdad triangular).

(3) $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$.

Dado un espacio M, una aplicación $d : M \times M \to [0, +\infty)$ es una *pseudo-métrica* si satisface los siguientes axiomas para $x, y \in M$:

(1) $d(x, x) = 0$.

(2) $d(x, y) = d(y, x)$.

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad triangular).

Diremos que x, y distintos son *distinguibles* si $d(x, y) \neq 0$. Si x, y no son distinguibles entonces se dice que son *indistinguibles*. Un par (M, d) se dice un *espacio pseudo-métrico*. Si M es pseudo-métrico y no posee puntos indistinguibles, entonces d se dice una *métrica* y M un *espacio métrico*.

Un espacio vectorial dotado de una norma se dice un *espacio normado*. Notemos que en un espacio normado podemos definir la distancia como $d(x, y) = \|x - y\|$ la cual llamamos distancia inducida por la norma.

También denotamos las *bolas abiertas* y *cerradas* como

$$B_r(x) := \{y : d(x, y) < r\}, \quad B'_r(x) := \{y : d(x, y) \leq r\}$$

respectivamente.

Decimos que una aplicación $f : M \to M'$ entre dos espacios métricos es una *isometría*[a] o es *isométrica* si conserva las distancias, i.e:

$$d(x, y) = d'(f(x), f(y)).$$

Dos espacios métricos se dicen *isométricos* si existe una isometría biyectiva entre ambos.

[a] gr. ἴσος: igual, μέτρον: medida.

Desde ahora en adelante convenimos que $\mathbb{M}$ representa un espacio pseudo-métrico, $\overline{\mathbb{M}}$ un espacio métrico y $\mathbb{K}$ un cuerpo normado.

Ejemplo (norma L_p). Es usual, al tomar $\mathbb{R}^n$ considerar la norma

$$\|\vec{v}\|_2 := \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + \cdots + |v_n|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}$$

donde $v_i = \pi_i(\vec{v})$. Y por otro lado, es también conocida la norma taxi[3] definida por

$$\|\vec{v}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

Así se generaliza a que la norma L_p sea

$$\|\vec{v}\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p}$$

Que efectivamente cumple ser una norma con $p > 1$, la desigualdad triangular en la norma L_p se le dice *desigualdad de Minkowski* y se demuestra en la sección §5.4, no obstante, los casos enteros son perfectamente demostrables y quedan de ejercicios para el lector. Asimismo, se define la norma L_∞

$$\|\vec{v}\|_\infty := \text{máx}\{v_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

La norma L_2 se le suele decir euclídea, y a $\mathbb{R}^n$ con la norma L_2 se le dice un *espacio euclídeo*.

Proposición 1.11: En $\mathbb{K}$:

a) $\|x\| - \|y\| \leq \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$.

b) $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$.

Además, la función valor absoluto en todo anillo arquimediano es una norma; ergo todo anillo arquimediano puede ser un espacio normado y métrico.

Hint: Usar desigualdad triangular.

Proposición 1.12: Dos puntos u, v de $\mathbb{M}$ son indistinguibles syss $d(u, x) = d(v, x)$ para todo $x \in \mathbb{M}$.

[3] El nombre se le da pues aquí las distancias se miden de la misma manera que lo hacen las "cuadras" en una ciudad.

Teorema 1.13: Todo espacio pseudo-métrico $\mathbb{M}$ puede restringirse a un espacio métrico $\overline{\mathbb{M}}$. Esto es, existe $\overline{\mathbb{M}}$ tal que existe una isometría suprayectiva $\pi : \mathbb{M} \to \overline{\mathbb{M}}$.

Demostración: Se define $\sim$ una relación sobre $\mathbb{M}$ tal que $x \sim y$ si son indistinguibles. Se cumple que $\sim$ es de equivalencia (¿por qué?). Luego se define $\overline{\mathbb{M}} := \mathbb{M}/\sim$. Finalmente se define la aplicación d' sobre $\overline{\mathbb{M}}$ como $d'([x],[y]) = d(x,y)$ que resulta ser una métrica sobre $\overline{\mathbb{M}}$. Es claro que $\pi(x) = [x]$ es una isometría suprayectiva. □

Definición 1.14 – *Sucesiones, límites y etc.*: Una sucesión es una función $s : \mathbb{N} \to X$ donde en lugar de denotar $s(n)$ convenimos a denotar s_n. Usualmente se abrevian como $(s_n)_{n=0}^{\infty}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o $(s_n)_n$ cuando no haya ambigüedad.

Decimos que una sucesión sobre $\mathbb{M}$ es *convergente* a un límite L si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ natural se cumple que $s_n \in B_\epsilon(L)$, en cuyo caso denotamos $s_n \to L$. Si una sucesión es convergente y su límite es único le denotamos $\lim_n s_n$. Si una sucesión no es convergente se dice divergente.

Se dice que una sucesión sobre R "converge a infinito" (pese a ser un tipo de divergencia) si para todo $C > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ natural se cumple que $C < s_n$, en cuyo caso denotamos $\lim_n s_n = +\infty$. Así mismo decimos que s_n converge a $-\infty$ si $-s_n \to \infty$. Algunos textos admiten que se escriba $\lim_n s_n = \infty$ si $(s_n)_n$ no está acotado.

Decimos que una sucesión sobre $\mathbb{M}$ es de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$ naturales se cumple que $s_m \in B_\epsilon(s_n)$. Una sucesión en R es *creciente* (resp. *decreciente*) si para todo $i < j$ naturales se da que $s_i \leq s_j$ (resp. $s_i \geq s_j$). Se le añade el prefijo *estricto* si es inyectiva como función (i.e., si todos sus términos son distintos). Una sucesión es *monótona* si es creciente o decreciente.

A ver, vamos a re analizar los conceptos definidos: una sucesión es *convergente* a un número L llamado límite si sus términos están eventual y arbitrariamente cerca de dicho límite. Una sucesión es de Cauchy si sus términos están eventual y arbitrariamente cerca los unos de los otros.

En general una sucesión sobre un anillo arquimediano usara la métrica inducida por la norma dada por la función valor absoluto.

Definición 1.15 – *Conjunto acotado*: En $\mathbb{M}$ se dice que un conjunto A es *acotado* si las distancias entre sus puntos lo son. Se define el diámetro de dicho conjunto

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}.$$

Además se define la distancia entre conjuntos como

$$d(A,B) := \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\},$$

y la distancia punto-conjunto como

$$d(x,A) := d(\{x\}, A).$$

Proposición 1.16: En $\mathbb{M}$ están acotados:

1. Los conjuntos finitos.
2. Las bolas, tanto abiertas como cerradas.
3. La unión finita de acotados.
4. La intersección arbitraria (pero no vacía) de acotados.

Teorema 1.17: Se cumple que:

1. El límite de una sucesión convergente en $\overline{\mathbb{M}}$ es único.
2. Toda sucesión convergente en $\mathbb{M}$ está acotada.

Demostración: 1. Supongamos, por contradicción, que tuviese dos límites L_1, L_2 distintos, luego $\epsilon := d(L_1, L_2) > 0$, por definición existen N_1, N_2 desde los cuales los términos están a menos de $\epsilon/2$ de distancia de los límites, luego para todo $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ se cumple que:

$$\epsilon = d(L_1, L_2) \leq d(L_1, s_n) + d(L_2, s_n) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

2. Sea $\epsilon > 0$. Por definición existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $s_n \in B_\epsilon(L)$. Definamos $\delta := \operatorname{diam}(\{s_0, s_1, \dots, s_{n_0-1}, L\})$. Si $i \leq n_0$ entonces $d(s_i, L) \leq \delta$ y si $i \geq n_0$ entonces $d(s_i, L) < \epsilon$, luego si

definimos $\eta := \text{máx}\{\delta, \epsilon\}$ entonces $d(s_i, s_j) \leq d(s_i, L) + d(L, s_j) \leq 2\eta$. Ergo $\text{Img}\, s_n$ está acotado por 2η.

□

Teorema 1.18 – *Álgebra de límites*: En $\mathbb{K}$ con $v \in \mathbb{K}$, $s_n \to x$ y $r_n \to y$:

1. $\text{lím}_n\, v = v$.
2. La suma de convergentes también converge y $(s_n + r_n) \to x + y$.
3. La resta de convergentes también converge y $(s_n - r_n) \to x - y$.

En R:

4. El producto de convergentes también converge y $(s_n \cdot r_n) \to xy$.
5. La división de convergentes en un cuerpo con $y \neq 0$, también converge y $s_n/t_n \to x/y$.
6. Si $s_n \to 0$ y r_n está acotada, entonces $(s_n \cdot t_n) \to 0$.
7. Si $|r_n| \to \infty$ entonces $1/r_n \to 0$.

Demostración: Sólo probaremos la división dejando el resto como ejercicios para el lector: Como $y \neq 0$ entonces $|y/2| > 0$, por lo cuál, por definición existe N_1 tal que para todo $n \geq N_1$ se cumple $d(r_n, y) < |y/2|$, por lo cual, es fácil ver que $|y/2| < |r_n| < |3y/2|$. Veamos que

$$\left|\frac{s_n}{r_n} - \frac{x}{y}\right| = \left|\frac{s_n y - r_n x}{r_n y}\right| = \left|\frac{s_n y - xy + xy - r_n x}{r_n y}\right| \leq \frac{|x_n - x|\,|y|}{|r_n|\,|y|} + \frac{|r_n - y|\,|x|}{|r_n|\,|y|}.$$

Al igual que con las anteriores, el truco se basa en acotar los términos por un $\epsilon/2$. El primero es sencillo, para el cual decimos que $|s_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{|y|}{2}$ para $n \geq N_2$. Para el segundo decimos que $|r_n - y| < \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{|y^2|}{2\,\text{máx}\{|x|,1\}}$, ese término con máximo es para evitar problemas en caso de que $|x|$ fuese nulo. Un razonamiento similar basta en el resto de expresiones. □

Teorema 1.19: En R, dada una sucesión convergente $(s_n)_n$ tal que $m \leq s_n$ (resp. $s_n \leq M$) para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $m \leq \text{lím}_n\, s_n$ (resp. $\text{lím}_n\, s_n \leq M$).

Demostración: Supongamos, por contradicción, que $L := \lim_n s_n < m$, entonces definimos $\epsilon := m - L > 0$ y por definición de convergencia, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $|L - s_n| < \epsilon$, i.e., $s_n < L + \epsilon = m$ lo que es absurdo por construcción. □

Teorema 1.20: Dadas dos sucesiones convergentes $(s_n)_n, (t_n)_n$ tales que $s_n \leq t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_n s_n \leq \lim_n t_n$.

Teorema 1.21 (Teorema del sandwich): En R dado $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ y $(c_n)_n$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumpla que $a_n \leq b_n \leq c_n$ tales que a_n y c_n converjan a L, entonces $\lim_n c_n = L$.

Un ejercicio para el lector es comprobar que todos estos resultados también se mantienen si ocurren *eventualmente*, i.e., que hay un n para el cual, desde él en adelante las desigualdades de los enunciados se cumplen.

Proposición 1.22 (Ejemplos de límites): En R:

- $s_n = n \to \infty$ y $\frac{1}{n+1} \to 0$.
- $\lim_n r^n = \begin{cases} \infty, & r > 1 \\ 1, & r = 1 \\ 0, & |r| < 1 \\ \text{ind}, & r \leq -1 \end{cases}$
- Si $\lim_n s_n = L$ entonces $\lim_n \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k = L$.

Hint: Para la segunda se recomienda utilizar la desigualdad de Bernoulli deducida en la sección sobre números naturales, enteros y racionales. Es fácil ver que dicha propiedad y el binomio de Newton son generalizables a R.

Definición 1.23 – *Subsucesiones*: Dadas, $(s_n)_n, (t_n)_n$ sucesiones se dice que $(t_n)_n$ es *subsucesión* de $(s_n)_n$ si existe una función estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $t = \sigma \circ s$, i.e., si $t_n = s_{\sigma(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.24: En $\mathbb{M}$ si $(s_n)_n$ converge a L entonces toda subsucesión suya lo hace. Conversamente si toda subsucesión de $(s_n)_n$ converge a L, entonces $(s_n)_n$ también converge a L.

1. $(s_n)_n$ es convergente a L syss todas sus subsucesiones también.

2. $(s_n)_n$ es acotada syss todas sus subsucesiones lo son.

3. $(s_n)_n$ es de Cauchy syss todas sus subsucesiones lo son.

Como ejercicio puede plantearse ciertos criterios (y demostrarlos) bajo los cuales uno puede corroborar la convergencia de una sucesión en base a la de sus subsucesiones.

Teorema 1.25: Toda sucesión en un conjunto linealmente ordenado admite una subsucesión monótona.

Demostración: Sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera y denotemos S a su conjunto imagen. Si S es finito entonces algún elemento se repite infinitas veces con el cual se puede formar una subsucesión constante que resulta trivialmente monótona.

Si S es infinito, pero está bien ordenado, entonces comienzas por considerar el mínimo para construir a s_{n_0}, luego defines s_{n_1} como el mínimo de $(s_n)_{n=n_0+1}^{\infty}$. Y así inductivamente debido al buen orden de S.

Si S no está bien ordenado entonces admite un subconjunto S' que es infinito y no posee mínimo. Luego sea s_{n_0} un término cualquiera de S', como $\{s_0, \dots, s_{n_0}\}$ es finito entonces su complemento es infinito y sin mínimo, así que se elige[4] s_{n_1} como el primer término posterior que es menor que s_{n_0} y que está contenido en S', y así se procede inductivamente para formar una subsucesión decreciente. □

Teorema 1.26 – *Criterio de convergencia de Cauchy*: Se cumple:

1. Toda sucesión convergente en $\mathbb{M}$ es de Cauchy.

2. Toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{M}$ está acotada.

3. Toda sucesión monótona acotada en R es de Cauchy.

Proposición 1.27: Se cumple:

1. Las subsucesiones de una sucesión de Cauchy son también de Cauchy.

[4]Aquí no hacemos uso del AEN, puesto que este método está fundamentado por el buen orden de los índices de s_n, que son naturales.

2. Conversamente si todas las subsucesiones de una son de Cauchy, entonces la original también lo es.
3. Si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge a L, entonces la original también lo hace.

De esta forma las sucesiones de Cauchy evidencian tener varias cosas en común con las sucesiones convergentes, es por ello que se define:

Definición 1.28: Decimos que $\mathbb{M}$ es completo según Cauchy o Cauchy-completo si toda sucesión de Cauchy converge.

Desde inicio se hace esta distinción pues podemos considerar la siguiente sucesión (informal) en $\mathbb{Q}$:

$$3; \quad 3{,}1; \quad 3{,}14; \quad 3{,}141; \quad \dots$$

La cuál tiene toda la *apariencia* de converger, no obstante, podemos ver que se "acerca" a π, que es irracional, por ende no puede ser convergente o contradiciría la unicidad del límite en $\mathbb{R}$; pese a ello, como es creciente y acotada es de Cauchy. Esto evidencia un *punto vacío* en la recta numérica racional, que es lo que $\mathbb{R}$ vendría a completar.

Lema (AEN) 1.29: Si un espacio métrico admite un subconjunto denso Cauchy-completo, entonces dicho espacio es Cauchy-completo.

Teorema (AEN) 1.30: Para todo espacio métrico $(\mathbb{M}, d)$, existe otro $(\mathbb{M}^*, d^*)$ que es Cauchy-completo tal que posee un subconjunto isométrico a $\mathbb{M}$.

Demostración: Denotaremos $C_{\mathbb{M}}$ como el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{M}$ y la relación $\sim$ sobre $C_{\mathbb{M}}$ tal que $(s_n)_n \sim (t_n)_n$ syss $\lim d(s_n, t_n) = 0$. Esta relación resulta ser de equivalencia (¿por qué?), de manera que se define $\mathbb{M}^* := C_{\mathbb{M}}/\sim$. La métrica se define como:

$$d^*([(s_n)_n], [(t_n)_n]) := \lim_n d(s_n, t_n)$$

La cuál está bien definida puesto que si $(s_n)_n \sim (x_n)_n$ y $(t_n)_n \sim (y_n)_n$, entonces, por desigualdad triangular:

$$d(s_n, t_n) \leq d(s_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, t_n)$$

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, s_n) + d(s_n, t_n) + d(t_n, y_n).$$

Por lo que, despejando se obtiene que

$$|d(s_n, t_n) - d(x_n, y_n)| \leq d(s_n, x_n) + d(t_n, y_n) \to 0.$$

Ergo, $\lim_n d(s_n, t_n) = \lim_n d(x_n, y_n)$. Además cumple ser una métrica (¿por qué?).

Se define $\hat{x} := [(x)_{n\in\mathbb{N}}]$ y $\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{M}^*$ es $\varphi(x) := \hat{x}$ que es trivialmente isométrica. Un dato importante es que si $x^* := [(x_n)_n]$ y $x'_n := \hat{x}_n$, entonces $\lim_n x'_n = x^*$. Finalmente, para ver que $\mathbb{M}^*$ es completo basta ver que $\mathbb{M}$ es denso. Las observaciones de éste párrafo quedan al lector. □

Esto ya nos permite definir $\mathbb{R}$, no obstante, hay otras propiedades que no se conservan trivialmente, para ello hay un teorema similar para cuerpos métricos.

Lema 1.31: Si $(s_n)_n$ es de Cauchy en R, entonces se cumple alguna de las siguientes:

1. $s_n \to 0$.
2. Existe algún $k > 0$ y N natural para el cuál para todo $n \geq N$ se cumple que $k < s_n$.
3. Existe algún $k < 0$ y N natural para el cuál para todo $n \geq N$ se cumple que $k > s_n$.

Demostración: Supongamos que s_n no converge a 0, probaremos la que cumple 2) o 3). Por definición existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ existe un $n \geq N$ tal que $|s_n| \geq \epsilon$. Además como por definición de sucesión de Cauchy, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i, j \geq n_0$ se da que $|s_i - s_j| < \epsilon/2$. Luego, existe un $N \geq n_0$ tal que $|s_N| \geq \epsilon$. Finalmente para todo $j \geq n_0$ se cumple que $s_N - \epsilon/2 < s_j < s_N + \epsilon/2$. Si $s_N > 0$ entonces $\epsilon/2 \leq s_N - \epsilon/2 < s_j$. Si $s_N < 0$ entonces $s_j < s_N + \epsilon/2 \leq -\epsilon/2$. En cualquier caso se cumple lo esperado y basta reemplazar k por $\pm\epsilon/2$ (que es no nulo). □

Proposición 1.32: Si $(s_n)_n$, $(t_n)_n$ son de Cauchy en R, entonces $(s_n + t_n)_n$, $(s_n \cdot t_n)_n$ son de Cauchy. Además, si t_n no converge a 0 y es no nulo para todos los términos entonces $(s_n/t_n)_n$ es de Cauchy.

Teorema (AEN) 1.33: Dado un **cuerpo** arquimediano R existe una extensión R' que resulta ser Cauchy-completa y para la cual existe un monomorfismo de R a R' y que conserva las propiedades algebraicas, las propiedades de orden y la propiedad arquimediana.

A las extensiones propuestas en los teoremas 1.30 y 1.33 les decimos *extensiones de Cauchy*. Luego definimos los números reales $\mathbb{R}$ como la extensión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ bajo el teorema anterior.

Teorema 1.34: El límite de una sucesión creciente (resp. decreciente) convergente en R es el supremo de su conjunto imagen.

Definición 1.35 – *Sucesión de intervalos encajados*: Decimos que una sucesión $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de *intervalos encajados* si $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ y $\lim_n(a_n - b_n) = 0$.

Teorema 1.36: En R son equivalentes:

1. R es Cauchy-completo.
2. Dada una sucesión de intervalos encajados $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se cumple que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$ (teorema de los intervalos encajados).
3. Todo subconjunto no vacío acotado superiormente de R posee supremo (axioma del supremo).

DEMOSTRACIÓN: 1) $\implies$ 2). Observemos que para que $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea una sucesión de intervalos encajados debe darse que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sean crecientes y decrecientes resp. Es claro también que serían acotadas (pues $a_1 \le a_n \le b_n \le b_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$), por lo que serían de Cauchy y por ende serían convergentes. Como $\lim_n b_n - a_n = 0$, entonces se concluye que $L := \lim_n a_n = \lim_n b_n$ y queda al lector comprobar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{L\}$.

2) $\implies$ 3). Sea A no vacío y acotado superiormente, de manera que $a \in A$ y b es cota superior de A. Si a fuese cota superior, entonces sería el máximo y, en particular, el supremo de A, así que demostraremos el caso contrario. Como b es cota superior y a no, entonces necesariamente $a < b$, por lo que construimos una sucesión $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pares ordenados en R^2 de forma que $a_0 := a$ y $b_0 := b$, también se define $c_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}$, de tal modo que si $c_n \in A$ entonces $a_{n+1} := c_n$ y $b_{n+1} := b_n$, y de caso contrario,

entonces $a_{n+1} := a_n$ y $b_{n+1} := c_n$. De esta forma se puede ver que

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0.$$

Por lo que, se cumple que $\big([a_n, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de intervalos encajados, de modo que se cumple que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = \{x\}$. Luego se cumple que este x es una cota superior de a_n y cota inferior de b_n. Queda al lector probar que x es efectivamente el supremo e ínfimo de $a[\mathbb{N}]$ y $b[\mathbb{N}]$ resp., y que corresponde con el supremo de A.

3) $\implies$ 1). Sea $(s_n)_n$ de Cauchy. Sabemos que $(s_n)_n$ está acotada y que admite una subsucesión monótona. Si dicha subsucesión es creciente, entonces por axioma del supremo su imágen admite supremo la que sabemos que resulta ser su límite, y también sabemos que si una subsucesión de Cauchy converge, entonces todas lo hacen y al mismo límite, ergo $(s_n)_n$ es convergente. Si posee una subsucesión decreciente $(s_{\sigma(n)})_n$ entonces $(-s_{\sigma(n)})_n$ es creciente y por el razonamiento anterior se da que $(-s_n)_n$ es convergente, luego por álgebra de límites, $(s_n)_n$ lo es. □

De esta forma podemos ver la unicidad de $\mathbb{R}$ de manera que el lector puede interpretar que $\mathbb{R}$ representa un cuerpo arquimediano completo. Asimismo, el teorema anterior nos permite la formalización de $\mathbb{R}$ independiente del AEN como sugería nuestros teoremas sobre extensión de Cauchy, pues le construimos mediante el método de Dedekind y llegamos al mismo conjunto.

Proposición 1.37 (Teorema de Bolzano-Weierstrass): En $\mathbb{R}$ toda sucesión acotada posee una subsucesión convergente.

Definición 1.38 – *Conjunto denso*: Se dice que un subconjunto D de $\mathbb{M}$ es *denso* según la métrica o M-denso si para todo punto $x \in \mathbb{M}$ y todo $\epsilon > 0$ existe $d \in D$ tal que $d \in B_\epsilon(x)$.

Se dice que D es denso según límites de sucesiones, o L-denso, si para todo punto $x \in \mathbb{M}$ existe una sucesión en D de límite x.

Teorema (AEN) 1.39: Todo conjunto en $\mathbb{M}$ es L-denso syss es M-denso.

Definición 1.40 – *Raíz n-ésima*: Sea $x > 0$ se define su raíz n-ésima con $n \in \mathbb{N}_{\leq 0}$ como

$$\sqrt[n]{x} := \sup\{y : y \geq 0 \wedge y^n \leq x\}.$$

Vemos que todo real positivo posee n-ésima raíz pues $\mathbb{R}$ es completo, dicho conjunto contiene al 0 y está acotado por $\max\{x, 1\}$ (¿por qué?).

Se define $\sqrt[n]{0} = 0$. Y si $x < 0$ y n es impar, entonces se define $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$. Tradicionalmente se opta por escribir $\sqrt{x} := \sqrt[2]{x}$.

Proposición 1.41: Siendo $x, y > 0$ reales positivos y $n, m \geq 1$ naturales, se cumple:

1. $y = \sqrt[n]{x}$ syss $y^n = x$.
2. $x < y$ syss $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$.
3. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$.
4. $\sqrt[n]{(\sqrt[m]{x})} = \sqrt[nm]{x}$.

Proposición 1.42 (Series geométricas): Sea $r \in \mathbb{R}$, entonces

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

En particular, si $|r| < 1$ se cumple que

$$\lim_n \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1}{1 - r}.$$

Demostración: Vamos a llamar $S := \sum_{i=0}^{n} r^i$, entonces

$$rS = r + \cdots + r^{n+1} \implies (1 - r)S = 1 - r^{n+1}.$$

Si $|r| < 1$ entonces $\lim_n r^{n+1} = 0$ y el resto es álgebra de límites. □

Proposición 1.43: Todo intervalo no-trivial de $\mathbb{R}$ es equipotente a $\mathbb{R}$.

Teorema 1.44:

$$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}.$$

Demostración: Este teorema utilizara el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein. $|\mathbb{R}| \leq 2^{\aleph_0}$. Esto es trivial, dado que definimos $\mathbb{R}$ como el conjunto cociente de sucesiones de Cauchy bajo una equivalencia, ergo, el cardinal de $\mathbb{R}$ está acotado por el de las sucesiones de Cauchy, el cual está acotado por el total de sucesiones que es $|\mathbb{Q}|^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0}$.

$2^{\aleph_0} \leq |\mathbb{R}|$. Este es verdaderamente el punto interesante, y para esto basta construir una aplicación biyectiva desde algún conjunto de cardinal $2^{\aleph_0}$ a $\mathbb{R}$. Dicho conjunto es el conjunto de sucesiones binarias y para realizar la aplicación inyectiva se utilizará el llamado *conjunto de Cantor* que resulta ser, además, un ejemplo de "fractal": comenzamos por considerar el intervalo $[0, 1)$ al cual en la primera iteración le quitamos el intervalo central $[1/3, 2/3)$; luego procedemos a quitarle los intervalos centrales a los que nos quedan que son los trozos $[1/9, 2/9)$ y $[7/9, 8/9)$. Los puntos de nuestra sucesión son los extremos izquierdos de nuestro conjunto tras las iteraciones.

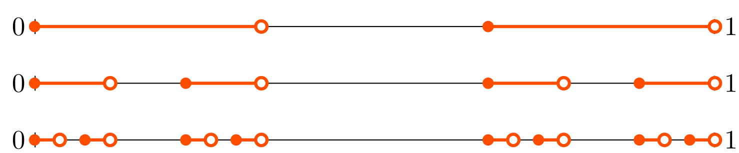

Figura 1.2. Conjunto y función de Cantor.

Para esto consideramos $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \operatorname{Func}(\{0, 1\}; \mathbb{N})$ y llamamos f a la aplicación tal que

$$f(s_i)_{i\in\mathbb{N}} = \lim_n \sum_{i=0}^{n} s_i \cdot \frac{2}{3^{i+1}}.$$

Queda al lector probar que la función está bien definida para toda sucesión binaria, y para notar que dicha función es inyectiva se recomienda usar buen orden para buscar el primer índice para el cual dos sucesiones distintas difieren y usar desigualdades para probar que sus imágenes son efectivamente distintas. El dibujo en este caso sirve como un hint bastante sugestivo. □

En virtud del resultado anterior se denota $\mathfrak{c} := 2^{\aleph_0}$ denominado cardinal del continuo.

Definición 1.45 – *Número algebraico*: Se dice que $x_0 \in \mathbb{R}$ es *algebraico* si existe algún polinomio de coeficientes racionales $p \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $p(x_0) = 0$. De lo contrario x_0 se dice *trascendental*.

Proposición 1.46: El conjunto de números algebraicos es numerable. Por ende, los trascendentales tienen cardinal $\mathfrak{c}$.

1.3. Series infinitas

En esta sección, de no especificarse, se asume que el resultado se aplica para $\mathbb{K}$.

Definición 1.47 – *Serie*: Dada una sucesión $(a_n)_n$ sobre $\mathbb{K}$, se le dice *serie derivada* a la sucesión $(S_n)_n$ tal que

$$S_n := \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Si la serie derivada de una sucesión converge a L, entonces nos daremos el lujo de escribir

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = L.$$

Decimos que S_n converge absolutamente syss la serie derivada de $\|a_n\|$ converge.

Ojo que la última notación no tiene sentido si la serie diverge.

Proposición 1.48: La serie de $(a_n)_n$ converge syss para todo $\epsilon > 0$ existe un N natural tal que para todo $n_0 \leq p < q$ se cumple que

$$\left\| \sum_{i=p}^{q} a_i \right\| < \epsilon.$$

Corolario 1.49: Toda serie absolutamente convergente es convergente.

El recíproco de este enunciado es falso, lo que veremos luego, de momento considere que llamaremos *condicionalmente convergente* a una serie convergente pero no absolutamente convergente.

Teorema 1.50: Si la serie de $(a_n)_n$ converge, entonces $\lim_n a_n = 0$.

Demostración: Sea L el límite de la serie. Entonces por definición, existe

n_0 tal que para todo $n \geq n_0$

$$\left\| L - \sum_{i=0}^{n} a_i \right\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego, existe $n_0 + 1$ tal que para todo $n + 1 \geq n_0 + 1$ se cumple que

$$\|a_{n+1}\| = \left\| \sum_{i=0}^{n+1} a_i - \sum_{i=0}^{n} a_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=0}^{n+1} a_i - L \right\| + \left\| L - \sum_{i=0}^{n} a_i \right\| < \epsilon.$$

□

Corolario 1.51 (Criterio de comparación): Sean a_n, b_n sucesiones reales de términos no-negativas. Si la serie de b_n converge y se cumple que existen $c > 0$ y n_0 tales que para todo $n \geq n_0$ se cumpla que $a_n \leq cb_n$, entonces la serie de a_n también converge.

Teorema 1.52 (Criterio de condensación de Cauchy): La serie de una sucesión a_n decreciente y de términos no-negativos es convergente syss la serie de $2^n a_{2^n}$.

Corolario 1.53: La serie harmónica

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

y la serie

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}.$$

divergen.

Ahora, se sabe que la serie harmónica diverge, pero por el mismo procedimiento se puede ver que otras similares convergen:

Corolario 1.54 (Series p-harmónicas): Se le dice serie p-harmónica a la de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}.$$

Nótese que las series p-harmónicas convergen para $p > 1$.

De hecho, se define la función dseta de Riemann (por ahora) $\zeta : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ como $\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$. Más adelante veremos ejemplos icónicos de valores de ζ.

Definición 1.55 – *Límite superior e inferior*: Dada una sucesión real acotada a_n se define

$$\begin{aligned}\limsup_n a_n &:= \lim_n(\sup\{a_k : k \geq n\}),\\ \liminf_n a_n &:= \lim_n(\inf\{a_k : k \geq n\}).\end{aligned}$$

Nótese que sólo basta que la sucesión sea acotada para que existan sus límites superiores e inferiores. Además, si a_n converge, entonces $\limsup a_n = \liminf a_n = \lim_n a_n$ (¿por qué?).

Teorema 1.56 – *Criterio de d'Alembert*: Dada una sucesión a_n real de términos estrictamente positivos:

a) Si $\limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, entonces su serie converge.

b) Si $\liminf_n \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, entonces su serie diverge.

Demostración: *a*) Sea $L := \limsup_n a_{n+1}/a_n$, luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{k \geq N} \frac{a_{k+1}}{a_k} < L + \frac{1-L}{2} = \frac{L+1}{2} =: M < 1$$

Luego, como es el supremo, entonces

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \leq \sup_{k \geq N} \frac{a_{k+1}}{a_k} < M \implies a_{N+1} < M a_N$$

Y así se puede iterar para probar que $a_{N+k} < M^k a_N$ con $M < 1$, luego definamos $R := \max\{a_0, a_1, \dots, a_N\}$, por lo que se comprueba que $a_k \leq \frac{R}{M^N} M^k$, donde la serie de la última converge por ser geométrica.

b) El razonamiento es análogo y queda de ejercicio para el lector.

□

Corolario 1.57: La serie

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

es absolutamente convergente para todo x. Y se define el *número de Euler*, o la *constante exponencial* como $e := \exp(1) \approx 2{,}718281828459$.

También como consecuencia de esto se cumple que

$$\lim_n \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Esta última serie es muy importante, y la retomaremos en capítulos posteriores.

Teorema 1.58 – *Criterio de la raíz de Cauchy*: Sea a_n una sucesión real de términos estrictamente positivos, entonces:

1. Si $\limsup_n \sqrt[n]{a_n} < 1$, entonces su serie converge.
2. Si $\liminf_n \sqrt[n]{a_n} > 1$, entonces su serie diverge.

Demostración:

1. Sea $L := \limsup_n \sqrt[n]{a_n} < 1$, luego existe un $N \in \mathbb{N}$ para el que $\sup_{k \geq N} \sqrt[k]{a_k} < L + \frac{1-L}{2} = \frac{L+1}{2} =: M < 1$. Para todo $n \geq N$ se cumple que $\sqrt[n]{a_n} \leq M < 1$, es decir, $a_n \leq M^n < 1$. Luego la comparamos convenientemente con la geométrica de M^n y converge.
2. Análogo.

□

Teorema 1.59 (Criterio de Kummer): Sea a_n una sucesión real de términos estrictamente positivos y D_n otra sucesión real de términos estrictamente positivos arbitraria. Si

$$\liminf_n D_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - D_{n+1} > 0,$$

entonces la serie de a_n converge. Si existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumpla

$$D_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - D_{n+1} \leq 0,$$

y la serie de $1/D_n$ diverge, entonces la serie de a_n diverge.

Demostración: Si el límite inferior es positivo, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple que $0 < M < D_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - D_{n+1}$, ergo,

$$M a_{n+1} < D_n a_n - D_{n+1} a_{n+1}.$$

Luego, para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$a_{N+1} + \cdots + a_{N+k+1} < \frac{1}{M}(D_N a_N - D_{N+k+1} a_{N+k+1}) < \frac{D_N a_N}{M}.$$

Como entonces la serie está acotada, y su sucesión es monótona, entonces converge.

En el otro caso, se cumple que $D_n a_n \leq D_{n+1} a_{n+1}$, i.e., la sucesión $D_n a_n$ es creciente a partir de $n \geq N$. Definamos $M := D_N a_N$, luego para $n \geq N$ se cumple que $M \leq D_n a_n$, es decir, $a_n \geq M/D_n$, y como esta última diverge, por criterio de comparación, la de a_n también. □

Notemos que usando $D_n := 1$ se obtiene que el criterio de Kummer implica el criterio de d'Alembert.

Corolario 1.60 (Criterio de Raabe): Sea a_n una sucesión real de términos estrictamente positivos con

$$L := \lim_k k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right)$$

se cumple que:

1. Si $L > 1$ entonces la serie de a_n converge.
2. Si $L < 1$ entonces la serie de a_n diverge.

Teorema 1.61 – *Criterio de Leibniz*: Sea $a_n \to 0$ una sucesión real decreciente, entonces $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ converge.

Demostración: Como es costumbre llamemos $S_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Intuitivamente la sucesión S_n parece oscilar, y esto lo formalizaremos de la siguiente manera. Como a_n decrece, entonces $a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$, por ende $S_{2(n+1)} = S_{2n} + (-a_{2n+1} + a_{2n+2}) \leq S_{2n}$, i.e., la subsucesión S_{2n} decrece. Por el mismo argumento, se cumple que $a_{2n+2} \geq a_{2n+3}$, por ende, $S_{2(n+1)+1} = S_{2n+1} + (a_{2n+2} - a_{2n+3}) \geq S_{2n+1}$, i.e., la subsucesión S_{2n+1} crece.

Finalmente, veamos que a_n decrece y converge a 0, ergo, 0 es el ínfimo de su conjunto imágen, por lo que los términos de a_n son no-negativos, por lo que $S_{2n+1} \leq S_{2n}$. Con ello están todas las herramientas listas para encontrar el límite de los S_n por intervalos encajados $\{[S_{2n+1}, S_{2n}]\}_{n=0}^{\infty}$. □

Mediante el criterio de Leibniz se comprueba que la serie derivada de $\dfrac{(-1)^k}{k+1}$ es condicionalmente convergente, pues la harmónica diverge.

Teorema 1.62 (Criterio de Dirichlet): Si a_n es una sucesión real decreciente que converge a 0 y $b_n : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tal que $\sum_{k=0}^{n} b_n$ está acotada, entonces la serie de $a_n b_n$ converge.

DEMOSTRACIÓN: Definamos $s_n := \sum_{k=0}^{n} b_n$ y $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|s_n\| < M$ para todo n. Por construcción existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple que $a_n < \epsilon/2M$, entonces vamos a probar que la serie es de Cauchy. Usando que $s_n - s_{n-1} = b_n$, sean $N \leq n < m$ arbitrarios:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=n}^{m} a_k b_k \right\| &= \|a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1} + \cdots + a_m b_m\| \\
&= \|a_n(s_n - s_{n-1}) + a_{n+1}(s_{n+1} - s_n) + \cdots + a_m(s_m - s_{m-1})\| \\
&\leq a_n \|s_{n-1}\| + (a_n - a_{n+1})\|s_n\| + \cdots + (a_{m-1} - a_m)\|s_{m-1}\| + a_m \|s_m\| \\
&\leq M \left(a_n + \sum_{k=n}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) + a_m \right) = 2a_n M < \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Uno de los própositos del criterio de Dirichlet es generalizar el criterio de Leibniz. Por ejemplo, mediante el criterio de Leibniz sabemos que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

converge, pero no sabemos si la misma serie pero siguiendo el patrón de signos

$$+ - + - - + - + - - + \cdots$$

converge. Mediante el criterio de Dirichlet podemos responder afirmativamente.

Esta última parte se dedica al reordenamiento y producto de series:

Teorema 1.63: Si la serie de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es absolutamente convergente y $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una biyección, entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\epsilon > 0$. Existe n_0 tal que

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n_0} a_k \right\| \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \|a_k\| = \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| - \sum_{k=0}^{n_0} \|a_k\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego sea $m_0 := \max \sigma^{-1}[0, \dots, n_0]$, entonces para todo $n \geq m_0$ se cumple que

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right\| \leq \left\| \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n_0} a_k \right\| + \left\| \sum_{k=0}^{n_0} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right\|$$
$$< \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \|a_k\| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

□

Teorema 1.64 (Teorema de reordenamiento de Riemann): Si la serie de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es condicionalmente convergente, entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ existe una biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = x.$$

Demostración: Si a_n es condicionalmente convergente, entonces ha de poseer infinitos términos positivos e infinitos términos negativos (¿por qué?). Además, se debe dar que la serie de los términos positivos de a_n converja a $+\infty$ y la de los negativos a $-\infty$ (¿por qué?).

Luego, sin perdida de generalidad, supongamos que $c > 0$. Como la suma de términos positivos no está acotada, entonces consideramos los términos positivos hasta que sobrepasan c y luego sumamos negativos de forma que lo sobrepasa por debajo y así sucesivamente. Como los términos van convergiendo a 0, eventualmente nuestra sucesión formada se "estabiliza" y converge a c. □

Como problema propuesto se le pide al lector formalizar la demostración anterior, llenar los detalles y describir por qué podemos construir dicha biyección sin utilizar AEN.

Uno de los primeros indicios del teorema del reordenamiento de Riemann surge de la sucesión

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

La cual converge por criterio de Leibniz, y analizando la subsucesión de la serie de a pares se nota que posee límite estrictamente positivo. No obstante, si se reordena a

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \cdots$$

al analizar la subsucesión de a múltiplos de 3, se observa que posee términos estrictamente negativos, ergo, su límite (¿por qué converge?) lo es.

Definición 1.65 – *Producto de Cauchy*: Sean $(a_n)_n, (b_n)_n$ series en K, llamamos *producto de Cauchy* a la serie derivada de $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$.

Teorema 1.66: Si las series de a_n y b_n convergen, y alguna lo hace absolutamente, entonces el producto de Cauchy entre las dos también y

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Demostración: Sin perdida de generalidad supongamos que a_n converge absolutamente y definamos:

$$A := \sum_{k=0}^{\infty} a_k,\ B := \sum_{k=0}^{\infty} b_k,\ c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k},$$
$$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k,\ B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k,\ C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k,\ \beta_n := B_n - B.$$

Luego, notemos que

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + \cdots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + \cdots + a_n B_0 = a_0(B + \beta_n) + \cdots + a_n(B + \beta_0) \\ &= A_n B + (a_0 \beta_n + \cdots a_n \beta_0). \end{aligned}$$

Basta probar que $\sum_{k=0}^{n} a_k \beta_{n-k} \to 0$.

Sea $\epsilon > 0$. Como $\beta_n \to 0$, entonces $M_b := \sup\{\|\beta_n\| : n \in \mathbb{N}\}$. Asímismo, como la serie de a_n converge absolutamente, entonces $M_a := \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|$. Por definición, existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$\sum_{k=n_0}^{n} \|a_k\| < \frac{\epsilon}{2M_b}.$$

Y existe un n_1 tal que para todo $n \geq n_1$ se cumple que

$$\|\beta_n\| < \frac{\epsilon}{2M_a}.$$

Luego consideramos $n \geq 2\,\text{máx}\{n_0, n_1\}$ para ver que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=0}^{n} a_k\beta_{n-k}\right\| &\leq \sum_{k=0}^{n_0}\|a_k\beta_{n-k}\| + \sum_{k=n_0+1}^{n}\|a_k\beta_{n-k}\| \\ &< \frac{\epsilon}{2M_a}\sum_{k=0}^{n_0}\|a_k\| + M_b\sum_{k=n_0+1}^{n}\|a_k\| < \epsilon.\end{aligned}$$

$\square$

2

Topología y continuidad

2.1. Espacios topológicos

La topología es una sub-rama de las matemáticas relativamente nueva que surge de una abstracción de la geometría para el análisis matemático; en general suele ser bastante confusa y poco concisa para los estudiantes, pero confío que en contexto de este libro no resultará repulsiva la primera impresión, y espero que el lector pueda ver la potencia y generalidad de ella tanto como herramienta, como un bien en sí mismo. Igual que el álgebra define una serie de conceptos y estructuras basados en operaciones binarias, la topología hace lo mismo con subconjuntos de un espacio fijado, permitiendo responder a preguntas sobre la clasificación general de figuras, y debido a las libertades generales que nos damos la topología permite dar una mirada general a un análisis que puede ser real, pero con otras definiciones fácilmente puede ser complejo o funcional, he ahí su fama.

Definición 2.1 – *Topología*: Dado un conjunto X usualmente llamado el "espacio", definimos una topología $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ como un conjunto que satisface:

1. $\varnothing, X \in \tau$.
2. $S \subseteq \tau \implies \bigcup S \in \tau$.

3. $U, V \in \tau \implies U \cap V \in \tau$.

A un par (X, τ) le diremos un "espacio topológico" o así llamaremos a X cuando no haya ambigüedad en los signos. A los elementos de la topología de un espacio les diremos "abiertos".

Dadas dos topologías sobre un espacio común X tales que $\tau_1 \subseteq \tau_2$, entonces se dice que τ_1 es más débil que τ_2, o que τ_2 es más fuerte que τ_1.

U es un entorno de un subconjunto C de un espacio topológico X si existe un abierto A tal que $C \subseteq A \subseteq U$. El entorno de un punto $x \in X$ es un entorno de $\{x\}$. Notemos que un entorno de un punto no es más que un abierto que le contiene. Decimos que un punto x de un espacio topológico está *aislado* si $\{x\}$ es un abierto.

Usualmente las propiedades 2) y 3) se dicen como que una topología es cerrada bajo uniones posiblemente-infinitas e intersecciones finitas. El uso de la palabra *espacio* es meramente para permitirnos llamar a los elementos del conjunto *puntos*.

Dado un espacio X cualquiera, $\{\varnothing, X\}$ y $\mathcal{P}(X)$ resultan ser topologías sobre X. A la primera le diremos *indiscreta* (o *trivial* en ciertos textos) y a la segunda *discreta*. Notemos que un espacio topológico es discreto syss todos sus puntos están aislados. Otra observación es que la topología indiscreta es la más débil, y la discreta la más fuerte en cualquier espacio dado.

En este capítulo (X, τ) siempre representará un espacio topológico.

Proposición 2.2: Un conjunto es abierto syss es un entorno de todos sus puntos.

Demostración: Una implicancia es trivial, mientras que si es entorno de todos sus puntos se tiene que $A = \bigcup\{U \in \tau : U \subseteq A\}$ (¿por qué?) y la unión de abiertos es abierta. $\square$

Definición 2.3 – *Base, subbase*: Decimos que una familia de abiertos $\mathcal{B}$ es una *base* de la topología si todo abierto puede expresarse como una unión de una subfamilia de $\mathcal{B}$. Fijada una base $\mathcal{B}$ de un espacio topológico diremos que los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos básicos.

Se dice que $\mathcal{B}_x$ es una *base de entornos de* x si para todo entorno U de x existe otro entorno B de x en $\mathcal{B}_x$ tal que $B \subseteq U$. Una familia de abiertos $\mathcal{S}$ es una *subbase* si las intersecciones finitas de sus elementos forman una base.

Al igual que en el álgebra lineal, las bases topológicas tienen como objetivo generar todos los objetos de una topología, veamos un criterio simple:

Proposición 2.4: Toda base $\mathcal{B}$ cumple las siguientes propiedades:

(1) $\bigcup \mathcal{B} = X$.

(2) Si $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ tales que $x \in U_1 \cap U_2$ entonces existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Teorema 2.5: Una familia de conjuntos $\mathcal{B}$ que cumple con las siguientes propiedades:

(1) $\bigcup \mathcal{B} = X$.

(2) Si $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ tales que $x \in U_1 \cap U_2$ entonces existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Define una única topología en X para la cual es base, la cual se dice *topología inducida por la base*. Esta topología además es la mínima (respecto a la inclusión) para la cuál los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos.

Demostración: Definimos $\tau := \{\bigcup \mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}\}$. Notemos que $\bigcup \varnothing = \varnothing$ y $\bigcup \mathcal{B} = X$, por lo que cumple (1).

Sea $\mathscr{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{B}))$ (de forma que sus elementos sean subconjuntos de $\mathcal{B}$, que sabemos, su unión define elemenetos de τ). Luego como para todo $S \in \mathscr{F}$ se cumple que $S \subseteq \mathcal{B}$ entonces $\bigcup \mathscr{F} \subseteq \mathcal{B}$, luego se concluye que $\bigcup \bigcup \mathscr{F} \in \tau$, demostrando (2).

Para demostrar (3) sean $A, B \in \tau$. Luego sea $\mathcal{F} := \{U \in \mathcal{B} : U \subseteq A \cap B\}$, probaremos que $A \cap B = \bigcup \mathcal{F}$. Está claro que $\bigcup \mathcal{F} \subseteq A \cap B$. Por definición existen $\mathscr{A}, \mathscr{B} \subseteq \mathcal{B}$ tales que $A = \bigcup \mathscr{A}$ y $B = \bigcup \mathscr{B}$, luego si $x \in A \cap B$ entonces $x \in \bigcup \mathscr{A}$ y $x \in \bigcup \mathscr{B}$, luego $x \in U_1 \in \mathscr{A}$ y $x \in U_2 \in \mathscr{B}$ con $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$, por lo que usando la propiedad (2) de $\mathcal{B}$ existe $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2 \subseteq A \cap B$, luego $U \in \mathcal{F}$, por lo que $x \in \bigcup \mathcal{F}$, i.e., $A \cap B \subseteq \mathcal{F}$.

La unicidad y minimalidad yacen de que si τ' es tal que los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos, entonces $\tau \subset \tau'$, por lo que $\mathcal{B}$ no es base de τ'. □

Ejemplo (espacio pseudo-métrico). En $\mathbb{M}$ podemos definir la topología inducida por la (pseudo-)métrica como aquella inducida por una base formada por todas las bolas abiertas de dicho espacio. En este sentido, por definición, las bolas abiertas son abiertos básicos.

Notemos que si definimos la métrica discreta como:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

en cualquier espacio induce la topología discreta (pues $B_{1/2}(x) = \{x\}$).

Ejemplo (espacio ordenado). Dado un conjunto linealmente ordenado X, definimos la *topología inducida por el orden* como aquella que tiene por base los conjuntos de la forma $(-\infty, x)$ y $(x, +\infty)$ con $x \in X$. Luego es fácil ver que todo intervalo abierto es efectivamente abierto en dicha topología.

Notemos que tanto la topología inducida por la métrica, como la topología inducida por el orden en $\mathbb{Q}$, y en $\mathbb{R}$ por separado, son las mismas. No obstante, la topología del orden nos permite definir cosas más interesantes como la topología de orden sobre el conjunto de ordinales, o sobre el conjunto de cardinales de von Neumann. Para los que han leído acerca de ambos, es fácil comprobar que los ordinales y los cardinales límite son efectivamente puntos límite o de acumulación en dichos espacios, además de que los conjuntos "cerrados" también lo son.

Teorema 2.6: Cualquier familia de subconjuntos $\mathcal{S}$ de un espacio define una única topología para la cual es subbase. Esta topología es además la mínima (respecto de la inclusión) para la cuál los elementos de $\mathcal{S}$ son abiertos.

Definición 2.7 – *Clausura, interior*: Decimos que un conjunto C es cerrado si $X \setminus C$ (o C^c si no hay ambigüedad sobre los signos) es abierto. Dado un subconjunto $A \subseteq X$ definimos su *clausura* como

$$\overline{A} := \bigcap \{C : A \subseteq C \land C \text{ es cerrado}\}.$$

Asimismo definimos el *interior* de A como $\operatorname{Int}(A) := (\overline{A^c})^c$. Los puntos de $\overline{A}$ se dicen *adherentes* a A, mientras que los de $\operatorname{Int} A$ se dicen *interiores* de A.

Dado un conjunto A, definimos su *frontera* (o borde) como

$$\partial A := \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A = \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

Observación: Cerrado no implica no-abierto, es fácil comprobar que $\varnothing, X$ son siempre cerrados y abiertos, así como que todo conjunto distinto del vacío y del espacio no es ni cerrado ni abierto en la topología indiscreta.

La clausura representa el mínimo cerrado que contiene a dicho conjunto. Conversamente se puede ver que el interior de un conjunto es el máximo abierto que dicho conjunto contiene.

Por definición podemos ver que un conjunto cerrado contiene a toda su frontera, uno abierto no contiene nada de su frontera; y un conjunto ni abierto ni cerrado contiene sólo parte de su frontera. Si el conjunto es una forma de dos dimensiones (e.g. un polinomio, una elipse, etc.) dibujaremos la frontera faltante con un borde punteado como lo muestra la figura.

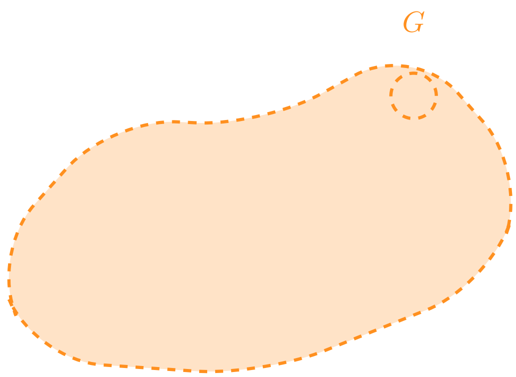

Figura 2.1. Diagrama de conjunto abierto.

Teorema 2.8: Un punto es adherente a A syss todos sus entornos intersecan a A.

Demostración: Lo haremos por contrarrecíproca en ambas: $\Longrightarrow$. Si existe U entorno de x que no interseca a A, entonces $U \subseteq A^c$ y $A \subseteq U^c$, ergo, $\overline{A} \subseteq U^c$ y como $x \notin U^c$ se cumple que $x \notin \overline{A}$.

$\Longleftarrow$. Si $x \notin \overline{A}$, entonces $x \in \overline{A}^c$ que es abierto pues $\overline{A}$ es cerrado, luego es un entorno de x que no interseca a A. □

Proposición 2.9: Las bolas cerradas de $\mathbb{M}$ son cerradas.

Demostración: Para ello basta probar que $B'_r(x)$ para todo $x \in \mathbb{M}$ y $r > 0$ sea tal que su complemento sea abierto. Para ello probaremos que

$$[B'_r(x)]^c = \underbrace{\bigcup_{p>r} \bigcup_{y \notin B_p(x)} B_{p-r}(y)}_{S}.$$

Sea $z \in \mathbb{M}$ tal que $d(x,z) > r$ (i.e., tal que $z \notin B'_r(x)$), entonces si $q := d(x,z)$, luego $z \notin B_q(x)$ y $z \in B_{q-r}(z)$, lo que prueba una contención.

Sea $z \in S$, por definición, existe un $p > r$ tal que existe un y de distancia $\geq p$ de x tal que $d(y,z) < p - r$. Por desigualdad triangular se cumple que

$$p \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \iff d(x,z) \geq p - d(y,z) > r.$$

Lo que demuestra la otra contención. Como la unión de abiertos es abierta se cumple que S es abierto, y por definición $B'_r(x)$ es cerrado. $\square$

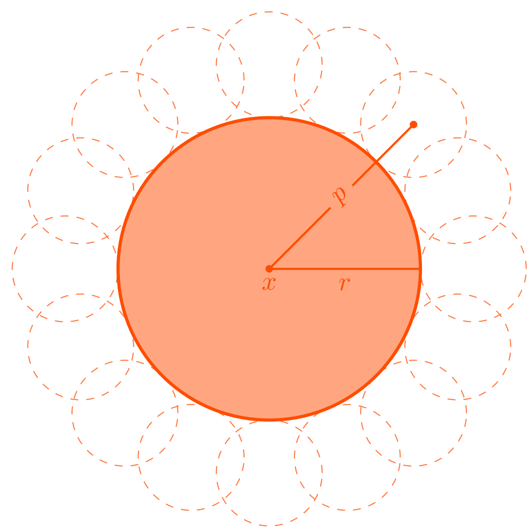

Figura 2.2. Demostración de la proposición 2.9.

De esto se concluye que la frontera de una bola (abierta o cerrada) centrada en x de radio r es el conjunto $\{y : d(x,y) = r\}$.

Proposición 2.10: En $\mathbb{M}$:

1. Los puntos adherentes de A son aquellos a distancia cero de A.
2. La clausura de un acotado es acotado y de hecho comparte el diámetro.

Teorema 2.11: Sea A un conjunto, entonces:

1. $\operatorname{Int} A \subseteq A \subseteq \overline{A}$.
2. $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$ y $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

3. $A \subseteq B \subseteq X$ implica que $\operatorname{Int} A \subseteq \operatorname{Int} B$ y $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
4. A es abierto syss $A = \operatorname{Int} A$ y A es cerrado syss $A = \overline{A}$.
5. $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$ y $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
6. $\overline{A} = \operatorname{Int} A \cup \partial A = A \cup \partial A$.
7. $\partial A = \partial A^c$ y $\operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} A^c \cup \partial A = X$.
8. $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$ y $\partial(A \cap B) \subseteq \partial A \cap \partial B$.

Demostración: La 5) se deduce de que $A \subseteq A \cup B \subseteq \overline{A \cup B}$ y $B \subseteq \overline{A \cup B}$, por ende las clausuras también están acotadas por $\overline{A \cup B}$, luego,

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}.$$

Finalmente nos basta ver la contención complementaria, para lo cual basa aplicar la segunda propiedad para notar que $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ siendo el segundo un cerrado, por lo que $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ por definición. □

Proposición 2.12 (Clausura de Kuratowski): Sea X un conjunto dotado de una operación $c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tal que satisface los siguientes axiomas:

1. $c(\varnothing) = \varnothing$.
2. $A \subseteq c(A)$.
3. $c(c(A)) = c(A)$.
4. $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$.

Entonces existe una única topología tal que c es la clausura en dicho espacio, y dicha topología está formada por los complementos de los puntos fijos de c.

Demostración: Es fácil ver que $X, \varnothing \in \tau$ mediante los axiomas (1) y (2) de c. Las intersecciones finitas también son directas del axioma (4).

El gran problema es la unión de abiertos, que equivale a ver que la intersección de cerrados es cerrada: Sea $C := \bigcap_{i \in I} C_i$ con C_i punto fijo de c. En primer lugar combinando los axiomas (2) y (4) se concluye que $A \subseteq B$ implica $c(A) \subseteq c(B)$ y C es el ínfimo de los C_i, luego

$$c(C) \subseteq c(C_i) = C_i, \quad \forall i \in I.$$

Luego $c(C)$ es una cota inferior de $\{C_i\}_{i\in I}$, ergo, $c(C) \subseteq C$, con lo que $C = c(C)$.

Ya probamos que c induce una topología, ahora veamos que es efectivamente la clausura de dicha topología, para ello sólo basta probar que $c(A)$ es el mínimo cerrado que incluye a A. Sea B otro cerrado que incluye a A, entonces $A \subseteq B$ implica $c(A) \subseteq c(B) = B$.

Si hubiése otra topología para la cual c fuese el operador clausura, entonces compartirían cerrados, ergo, los abiertos en una topología serían los de la otra, probando así que son las mismas, i.e., que la topología inducida es única. □

Definición 2.13 – *Familia discreta, localmente finita*: Se dice que una familia de subconjuntos de un espacio topológico es *discreta* si para todo $x \in X$ se cumple que posee un entorno tal que interseca a lo más a un conjunto de la familia. Se dice que una familia de subconjuntos de un espacio topológico es *localmente finita* si para todo $x \in X$ se cumple que posee un entorno tal que interseca a lo más a finitos conjuntos de la familia.

Proposición 2.14: Toda familia finita y toda familia discreta son localmente finitas.

Teorema 2.15: Para toda familia localmente finita $\{A_i\}_{i\in I}$ se cumple que $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$.

Demostración: Como $\overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$, entonces es claro que $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$, por lo que sólo queda probar la otra inclusión.

Si $x \in \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$ entonces x es de adherencia, luego todos sus entornos intersecan a la unión, luego, por definición de ser localmente finita, ha de haber algún entorno que interseque finitos elementos conjuntos, en particular, digamos que interseca a $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$, por lo que es fácil probar que $x \in \overline{\bigcup_{k=1}^n A_{i_k}} = \bigcup_{k=1}^n \overline{A_{i_k}}$, lo cuál está contenido en $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$, como se quería probar. □

Corolario 2.16: La unión (arbitraria) de localmente finitos cerrados es cerrada.

Definición 2.17 – *Puntos de acumulación*: Dado un subconjunto A del espacio diremos que $x \in A$ es un *punto de acumulación* o *punto límite* si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Al conjunto de puntos de acumulación de A le llamaremos *conjunto derivado* de A y denotaremos por A^{d} (o A'). Los puntos de A que no son de acumulación (y que pertenecen a $A \setminus A^{\mathrm{d}}$) se dicen *aislados*.

Notemos que los puntos aislados de un espacio lo son en todo subconjunto de él, pues si $\{x\}$ es abierto, entonces $\{x\} = \operatorname{Int}\{x\} = (\overline{\{x\}^c})^c = X \setminus \overline{X \setminus \{x\}}$. Además, en un espacio discreto ningún conjunto posee puntos de acumulación; mientras que en uno indiscreto, todos los puntos de un conjunto no-singular son de acumulación, si el conjunto es singular, todos los puntos menos el del conjunto son de acumulación.

Teorema 2.18: Se cumple:

1. x es de acumulación de A syss todo entorno de x interseca a $A_{\neq x}$.
2. $\overline{A} = A \cup A^{\mathrm{d}}$.
3. $A \subseteq B$ implica $A^{\mathrm{d}} \subseteq B^{\mathrm{d}}$.
4. $(A \cup B)^{\mathrm{d}} = A^{\mathrm{d}} \cup B^{\mathrm{d}}$.
5. $\bigcup_{i \in I} A_i^{\mathrm{d}} \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^{\mathrm{d}}$.

Un corolario de la propiedad 2) del teorema anterior es que un conjunto es cerrado syss contiene a todos sus puntos de acumulación.

Definición 2.19 – *Continuidad*: Dada una aplicación entre espacios topológicos $f : X \to Y$, se dice que f converge a L cerca de un punto de acumulación a si para todo entorno U_L de L se cumple que $f^{-1}[L] \cup \{a\}$ es un entorno de a. Si f converge de forma única a L cerca de a, entonces escribiremos $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ entonces se dice que es *continua* en a. f se dice *continua* (a secas) si lo es en todos los puntos de acumulación del dominio. El conjunto de aplicaciones continuas desde X a Y se denota como $C(X, Y)$. Si $Y = \mathbb{R}$ entonces nos permitimos escribir $C(X)$.

Diremos que una aplicación $f : X \to Y$ es un *homeomorfismo* si es biyectiva y f, f^{-1} son continuas. Dos espacios se dicen *homeomorfos* o *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo entre ellos, en cuyo caso escribiremos $X \cong Y$.

Trivialmente todo espacio es homeomorfo a sí mismo por la identidad.

Un ejercicio para el lector es notar que dos espacios discretos son homeomorfos syss poseen el mismo cardinal, debido a lo cual denotaremos $D(\kappa)$ a un representante[1] de espacio discreto de cardinal κ.

Teorema 2.20: Sea $f : X \to Y$, entonces son equivalentes:

1. f es continua.
2. Todo abierto en el codominio posee preimagen abierta.
3. Todo cerrado en el codominio posee preimagen cerrada.
4. Para todo $A \subseteq X$ se cumple que $f[\,\overline{A}\,] \subseteq \overline{f[A]}$.
5. Para todo $B \subseteq Y$ se cumple que $\overline{f^{-1}[B]} \subseteq f^{-1}[\,\overline{B}\,]$.
6. Para todo $B \subseteq Y$ se cumple que $f^{-1}[\operatorname{Int} B] \subseteq \operatorname{Int} f^{-1}[B]$.

Una conclusión del teorema anterior es que dos espacios son homeomorfos si "sus abiertos coinciden", esto da una mejor mirada al por qué de que se le diga *equivalencia topológica*.

Proposición 2.21: Son funciones continuas:

1. Aquellas de dominio discreto.
2. Aquellas de codominio indiscreto.
3. La función identidad.
4. Las funciones constante.
5. La composición de continuas.

Definición 2.22 – *Topología inicial*: Dado un conjunto X y una familia $\mathcal{F} := \{(X_i, \tau_i, f_i) : i \in I\}$ donde (X_i, τ_i) son espacios topológicos y $f_i : X \to X_i$, se define la *topología inicial sobre X por $\mathcal{F}$* como la topología más débil tal que las f_i son continuas. Nótese que la topología

[1] Formalmente este representante es el conjunto de los ordinales estrictamente menores que κ.

discreta hace cumplir la propiedad, así que esta bien definida.

Proposición 2.23: La topología inicial sobre X inducida por $\{(X_i, \tau_i, f_i) : i \in I\}$ es la topología que tiene por subbase a $f_i^{-1}[U_i]$ donde $U_i \in \tau_i$.

Definición 2.24 – *Denso*: Decimos que un subconjunto D es *topológicamente denso* o T-denso si su clausura es el espacio. Se le dice la *densidad* de un espacio, al mínimo cardinal de sus subconjuntos densos, y se denota por $d(X)$.

Si $d(X) \leq \aleph_0$ entonces se dice que el espacio es *separable*.

El espacio indiscreto siempre tiene densidad 1, mientras que el discreto tiene densidad $|X|$. $\mathbb{R}$ como espacio métrico es separable, pues $\mathbb{Q}$ es denso. Trivialmente ningún conjunto cerrado distinto del espacio es denso.

Teorema 2.25: Se cumple que:

1. D es denso syss todo abierto contiene puntos de D.
2. Si D es denso entonces para todo abierto U se cumple que $\overline{U} = \overline{U \cap D}$.
3. Un conjunto que contiene a otro denso es también denso.
4. Si D_1 y D_2 son conjuntos densos, entonces dado cualquier conjunto $S \subseteq X$ se cumple que $(D_1 \setminus S) \cup (D_2 \cap S)$ es denso.

Demostración: La primera deriva de otro teorema, por lo que demostraremos la 2 por doble contención: Es inmediato que $\overline{U \cap D} \subseteq \overline{U}$. Sea $x \in \overline{U}$, luego para todo V entorno de x debe darse que $U \cap V \neq \varnothing$, y $U \cap V$ es abierto, luego por la propiedad 1, se obtiene que $(U \cap V) \cap D \neq \varnothing$, por ende, todo entorno de x interseca $U \cap D$, ergo, $x \in \overline{U \cap D}$. □

Sabemos que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}^c$ son densos en $\mathbb{R}$, luego la última propiedad nos sirve para formar nuevos conjuntos densos que puede verse como agarrar $\mathbb{Q}$, sacarle, por ejemplo, el intervalo $[0, 1]$ y reemplazarlo por $[0, 1]_{\mathbb{Q}^c}$ y así obtener otro conjunto denso nuevo.

Proposición 2.26: Sea $f : X \to Y$ suprayectiva continua, entonces $d(Y) \leq d(X)$.

Corolario 2.27: La imagen continua de espacios separables es separable.

Definición 2.28 – *Característica, peso*: Se le dice *peso* de un espacio al mínimo cardinal que posee alguna de sus bases y se denota por $w(X)$.

Se le llama *característica* de x, y lo denotamos por $\chi(x)$, al mínimo cardinal de una base de entornos de x. Se le llama la *característica* de un espacio al supremo del conjunto de las características de sus elementos, i.e., $\chi(X) := \sup \chi[X]$.

Se dice que un espacio cumple el *primer axioma de numerabilidad* (1AN) si $\chi(X) \leq \aleph_0$. Se dice que cumple el *segundo axioma de numerabilidad* (2AN) si $w(X) \leq \aleph_0$.

Proposición 2.29: Todo espacio pseudo-métrico es 1AN.

Teorema 2.30: Todo espacio 1AN separable es 2AN. En consecuencia, todo espacio pseudo-métrico separable es 2AN.

Proposición 2.31: Para todo espacio se cumple que:

$$\chi(x) \leq \chi(X) \leq w(X) \leq 2^{|X|}.$$

Corolario 2.32: Se cumple:

1. Todo espacio 2AN es 1AN.
2. Todo espacio numerable 1AN es 2AN.
3. Todo espacio finito es 2AN.

Teorema (AE) 2.33: Se cumple que $d(X) \leq w(X)$.

Demostración: Sea $\mathcal{B} = \{B_s\}_{s\in S}$ una base de cardinal $w(X)$, luego se define $D := \{a_s : s \in S\}$ donde a_s es un elemento elegido de B_s. Vemos que D es denso sobre X (¿por qué?), y con AE es fácil ver que $d(X) \leq |D| \leq |S| = w(X)$. □

Corolario (AEN) 2.34: Todo espacio 2AN es separable.

2.2. Axiomas de separación

Definición 2.35 – *Axiomas de separación I*: Una topología puede cumplir con algunas de las siguientes propiedades:

T_0 **(Kolmogorov)** Para todo par de puntos distintos uno admite un entorno que no contiene al otro.

T_1 Para todo par de puntos distintos ambos admiten entornos que no contienen al otro.

T_2 **(Hausdorff)** Todo par de puntos distintos poseen entornos disjuntos.

$T_{2,5}$ **(Completamente Hausdorff)** Todo par de puntos distintos poseen entornos cerrados disjuntos.

T_3 Un conjunto cerrado y un punto fuera de él admiten entornos disjuntos.

T_4 Un par de conjuntos cerrados disjuntos admiten entornos disjuntos.

Un espacio que cumple $T_0 + T_3$ se dice *regular* y otro que cumple $T_1 + T_4$ se dice *normal*.

Como pequeño ejercicio, la definición de los axiomas de separación utiliza entornos abiertos, reflexione por qué dicha distinción es irrelevante. Además, algunos libros definen regular como $T_1 + T_3$, esta definición es equivalente a decir que es $T_0 + T_3$ (¿por qué?). Cabe destacar que estaremos utilizando fuertemente a los axiomas de separación a lo largo del libro, por lo que es importante que el lector se acostumbre a ellos, y se recomienda anotar las definiciones en alguna nota o algún material de acceso rápido.

Ejemplo (espacio de Sierpiński). Se le llama *topología del punto excluido* p a

$$\tau = \{A \subseteq X : p \notin A \vee A = X\}.$$

La topología del punto excluido sobre un espacio no singular es siempre T_0 pero no T_1, pues el único entorno de p es X mismo. Además es T_4, pues todo par de cerrados no vacíos no son disjuntos ya que contienen a p. El ejemplo más básico es el *espacio de Sierpiński* el cual es una topología sobre $\{0, 1\}$ que que excluye al 0; i.e., $\{\varnothing, \{1\}, \{0, 1\}\}$

Ejemplo (topología cofinita). Dado un espacio X infinito (¿qué ocurre si fuese finito?), se define la topología cofinita como aquella que posee por abiertos los conjuntos cuyo complemento es finito (¿por qué es una topología?). Es claro que es T_1 pues dados x, y distintos se cumple que $X_{\neq x}$ es entorno de y que no contiene a x y viceversa. No obstante, no es de Hausdorff, pues siendo F_1, F_2 finitos se cumple que $X \setminus F_1 \cap X \setminus F_2 = X \setminus (F_1 \cup F_2)$ y la unión de finitos es finita, luego la intersección finita de abiertos no vacíos es nunca vacía y en particular los entornos de cualquier par de puntos siempre se intersecan.

Teorema 2.36: Se cumple:

1. Todo espacio pseudo-métrico T_0 es métrico.
2. Todo espacio métrico es de Hausdorff.
3. Un espacio es T_0 syss para todo $x \neq y$ se cumple que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. De hecho $\{x, y\} \not\subseteq \overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$.
4. Un espacio es T_1 syss sus subconjuntos finitos son cerrados.
5. Un espacio X es de Hausdorff syss la diagonal $\Delta := \{(x, x) : x \in X\}$ es cerrada en X^2.
6. Un espacio T_1 es regular syss para todo entorno sub-básico V de x existe un entorno U tal que $U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.
7. Para espacios se cumple:

$$\text{Normal} \implies \text{Regular} \implies T_{2,5} \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0.$$

Demostración: 5. $\Longleftarrow$. Si Δ es cerrado, entonces para todo $p \notin \Delta$ se cumple que $p \notin \overline{\Delta}$. Los puntos fuera de Δ son pares de coordenadas distintas, y hemos probado que un punto es adherente a Δ syss todo entorno interseca a Δ, ergo, hay un entorno de (x, y) disjunto de Δ. Dicho entorno contiene a un entorno básico $U_{(x,y)}$, los que sabemos son un producto de abiertos V_x, V_y en X. Como son disjuntos, podemos concluir que los pares (x, x) e (y, y) no pertenecen a $V_x \times V_y$. No obstante sabemos que $x \in V_x$ e $y \in V_y$, luego $y \notin V_x$ y $x \notin V_y$, que es la propiedad de Hausdorff.

El caso restante queda al rector.

6. $\implies$. Notemos inmediatamente que $x \notin V^c \subseteq \overline{V^c}$ el cual es cerrado, luego admiten entornos abiertos $x \in U$ y $\overline{V^c} \subseteq W$ disjuntos. Luego $U \subseteq W^c$ y se cumple que $\overline{U} \subseteq W^c \subseteq \operatorname{Int} V \subseteq V$.

$\Longleftarrow$. Sea C un cerrado que no contenga a x, luego por definición de sub-base existen $V_1, \dots, V_n$ sub-básicos tales que $x \in \bigcap_{i=1}^n V_i \subseteq C^c$.

Por enunciado, existen entornos W_i de x tales que $\overline{W}_i \subseteq V_i$. Luego $x \in U_1 := \bigcap_{i=1}^n W_i$ y

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i^c \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{W}_i^c =: U_2.$$

Donde U_1 y U_2 son disjuntos.

7. Probaremos que regular $\implies$ $T_{2,5}$, y para ello demostraremos que regular $\implies$ T_2: Sea x, y distintos, como el espacio es T_0 existe un entorno abierto S de alguno, que sin perdida de generalidad supondremos que es x, que no contiene al otro. Luego S^c es un cerrado que no contiene a x, ergo, admiten entornos abiertos disjuntos U_x e U_s por T_3. Pero $y \in S^c \subseteq U_s$ y $x \in U_x$ con $U_x \cap U_s$ disjuntos.

   Por la propiedad anterior sabemos que dichos entornos admiten subentornos cerrados y que son disjuntos, lo que es la definición de $T_{2,5}$.

□

Las siguientes son comparaciones interesantes de cardinales, opcionales por cierto:

Lema 2.37: En un espacio T_1:

Densidad finita $\iff$ cardinal finito $\implies$ carac. fínita $\implies$ discreto.

DEMOSTRACIÓN: Probaremos que característica finita implica discreto: Esto significa que todo x posee una base de entornos finito $\mathcal{B}(x)$, como los elementos de dicha base son abiertos y la intersección finita de abiertos es abierta, entonces $\bigcap \mathcal{B}(x) = \{x\} \in \tau$. □

Teorema 2.38: Se cumple:

1. Si X es T_0 entonces $|X| \leq 2^{w(X)}$.
2. Si X es de Hausdorff entonces $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$.
3. (AE) Si X es de Hausdorff entonces $|X| \leq d(X)^{\chi(X)}$.
4. Si X es regular entonces $w(X) \leq 2^{d(X)}$.

DEMOSTRACIÓN:

1. Sea $\mathcal{B}$ una base de cardinal $w(X)$. Luego definimos $\mathcal{B}(x) := \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$ y la propiedad T_0 equivale a que para

todo $x \neq y$ se cumpla $\mathcal{B}(x) \neq \mathcal{B}(y)$, luego el conjunto de los $\mathcal{B}(x)$ es equipotente a X y hay a lo más $2^{w(X)}$ de dichos conjuntos, por lo que $|X| \leq 2^{w(X)}$.

2. Sea D un conjunto denso de cardinal $d(X)$ y $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ una familia de bases de entornos de x, entonces se define $\mathcal{D}(x) := \{U \cap D : U \in \mathcal{B}(x)\}$. Luego, queda al lector probar que

$$\bigcap_{A\in\mathcal{D}(x)} \overline{A} = \{x\}$$

por lo que $\mathcal{D}(x) \neq \mathcal{D}(y)$ para $x \neq y$. Notemos que todo $\mathcal{D}(x) \subseteq \mathcal{P}(D)$, por lo que hay $2^{2^{d(X)}}$ familias $\{\mathcal{D}(x)\}_{x\in X}$.

3. Sea $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ una familia de bases de entornos de x, resp. de cardinal $\leq \chi(X)$. Entonces se define $\mathcal{D}_0$ como el conjunto $[D]^{\leq\chi(X)}$ el cual hemos probado posee cardinal $d(X)^{\chi(X)}$ (para $d(X)$ infinito, de lo contrario $|X| = d(X)$ y el resultado es trivial). Definimos $c : \tau \to D$ una función de elección tal que $c(U) \in U$, luego definimos $D(x) := \{c(U) : U \in \mathcal{B}(x)\}$ que evidentemente cumple que $|D(x)| \leq \chi(X)$ por lo que $D(x) \in \mathcal{D}_0$. Seguido definimos $\mathcal{D}_0(x) := \{U \cap D(x) : U \in \mathcal{B}(x)\} \subseteq \mathcal{D}_0$. Como $x \in \overline{U \cap D(x)} \subseteq \overline{U}$, se cumple que la intersección de la clausura de $\mathcal{D}_0(x)$ es $\{x\}$ para todo punto del espacio, ergo, dichos conjuntos son distintos respecto a todo punto. Como son subconjuntos de $\mathcal{D}_0$ y son a lo más de tamaño $\chi(X)$ se cumple que

$$|X| \leq |\mathcal{D}_0|^{\chi(X)} = \left(d(X)^{\chi(X)}\right)^{\chi(X)} = d(X)^{\chi(X)}.$$

(Si $\chi(X)$ es infinito, en caso contrario, el espacio es discreto y es trivial.)

4. Sea D denso en X y de cardinal $d(X)$, luego se define $\mathcal{B} := \{\operatorname{Int}\overline{U} : U \subseteq D\}$. Basta ver que $\mathcal{B}$ sea base de X. Lo que se da por la propiedad que ya probamos. Como $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(D)$ se da que $w(X) \leq 2^{d(X)}$.

□

Teorema 2.39 – *Unicidad del límite*: El límite (si existe) de una sucesión en un espacio de Hausdorff es único. También si $f(x_0) \to L$ donde $f : X \to Y$ con Y de Hausdorff, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

Teorema (DE) 2.40 – *Lema de Urysohn*: En un espacio normal se cumple que dados dos conjuntos A, B cerrados disjuntos, existe una función $f : X \to [0, 1]$ tal que es continua y que $f[A] = \{0\}$, y $f[B] = \{1\}$.

DEMOSTRACIÓN: Vamos a construir una sucesión de abiertos $(V_{r_i})_{i\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\overline{V}_r \subseteq V_s \iff r \leq s$$

y donde los $r_i \in \mathbb{Q}$. Notemos que como los racionales son numerables y hay infinitos de ellos en cada intervalo no-trivial (¿por qué?) hay una sucesión $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que es una biyección con $r_i : \mathbb{N} \to [0, 1]_{\mathbb{Q}}$. Ésto nos permitirá construir nuestra sucesión de abiertos de forma inductiva. Además reordenaremos la sucesión de forma que $r_0 = 0$ y $r_1 = 1$.

En primer lugar, sea V_0 (pues todo espacio normal es regular) cualquier abierto que satisfaga

$$A \subseteq V_0 \subseteq \overline{V}_0 \subseteq B^c$$

y sea $V_1 := B^c$. Así, proseguimos para que se cumpla que

$$\phi(n) \equiv \forall i, j \leq n \ (\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j} \iff r_i \leq r_j).$$

Si $\phi(n)$ se cumple para n, entonces se elige r_i, r_d con $i, d \leq n$ como los términos más cercanos a r_{n+1} por la izquierda y por la derecha resp. y se elige $V_{r_{n+1}}$ como cualquiera que hace cumplir que

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_{n+1}} \subseteq \overline{V}_{r_{n+1}} \subseteq V_{r_d}.$$

Finalmente se construye f como

$$f(x) := \begin{cases} \inf\{r : x \in V_r\} & x \in V_1 \\ 1 & x \notin V_1 \end{cases}$$

Y probaremos que es efectivamente continua: por definición basta probar que las preimágenes de abiertos básicos son abiertos. Los abiertos básicos de $[0, 1]$ son de la forma $[0, a)$ y $(b, 1]$ con $a, b \in (0, 1)$. Veamos que $f(x) < a$ syss existe algún $r < a$ tal que $x \in V_r$, ergo:

$$f^{-1}\big[[0, a)\big] = \bigcup\{V_r : r < a\},$$

la cual es abierta por ser la unión de abiertos. Mientras que $f(x) > b$ syss existe algún $r > b$ tal que $x \notin V_r$, lo que implica que existe algún $r' > b$ tal que $x \notin \overline{V}_{r'}$, por ende:

$$f^{-1}\big[(b, 1]\big] = \bigcap\{(\overline{V}_r)^c : r > b\} = X \setminus \bigcap\{\overline{V}_r : r > b\},$$

la cual es abierta pues es el complemento de un cerrado. Por lo tanto, es una aplicación continua. □

En virtud del resultado anterior llamamos a ese tipo de funciones como de Urysohn entre A y B. También se utiliza la expresión *completamente separados*.

Lema 2.41: Si un espacio X que sea T_1 cumple que para todo cerrado C contenido en un abierto U, existe una sucesión de abiertos $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $C \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i$ y $\overline{U}_i \subseteq U$ para todo $i \in \mathbb{N}$; entonces X es normal.

Demostración: Sean A, B cerrados disjuntos. Considerando $C := A$ y $U := B^c$ entonces existe una sucesión de abiertos $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i, \quad \forall i \in \mathbb{N},\ B \cap \overline{U}_i = \varnothing.$$

Análogamente, con $C' := B$ y $U' := A^c$ se obtiene una sucesión de abiertos $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tales que

$$B \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i, \quad \forall i \in \mathbb{N},\ A \cap \overline{V}_i = \varnothing.$$

Luego, definamos

$$G_i := U_i \setminus \bigcap_{j\leq i} V_j, \quad H_i := V_i \setminus \bigcap_{j\leq i} U_j.$$

que resultan formar sucesiones de abiertos (¿por qué?), tales que

$$A \subseteq G := \bigcup_{i=0}^{\infty} G_i, \quad B \subseteq H := \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i.$$

(¿por qué?).

Sólo basta probar que G y H son disjuntos. Si no lo fueran habría algún $x \in G_i$ y $x \in H_j$ para algunos $i, j \in \mathbb{N}$, no obstante, notemos que por definición de G_i, se cumple que $G_i \cap H_j = \varnothing$ para $j \leq i$; y viceversa, por lo que no existen tales "x". Por ende, el espacio es T_4, y por definición es normal. □

Teorema 2.42: Todo espacio regular 2AN es normal.

Demostración: Sea C un cerrado y V un abierto que le contiene. Todo $x \in C$ posee un entorno básico tal que $U_x \subseteq \overline{U}_x \subseteq V$ y evidentemente $C \subseteq \bigcup_{x \in C} U_x$. Pero como la base es numerable, entonces los U_x lo son, lo que forma una sucesión de abiertos que cumple con la condición del lema anterior, ergo, el espacio es normal. □

Teorema 2.43: Todo espacio regular numerable es normal.

Hint: Vea la prueba anterior.

Los teoremas relacionados a Urysohn otorgan una nueva perspectiva para lo que significa la separación topológica, de ello se introducen nuevos axiomas, para los cuales debemos probar el siguiente teorema de antemano. Para ello, introducimos las siguientes definiciones:

Definición 2.44: Decimos que un conjunto A es un *conjunto cero* si existe alguna función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f^{-1}(0) = A$. Un conjunto es un *cocero* si su complemento es un cero.

Decimos que un conjunto es un[a] F_σ si es la unión numerable de cerrados, y un[b] G_δ si es la intersección numerable de abiertos.

[a]fr. *fermé*: cerrado, *somme*: suma.
[b]de. *gebiet*: abierto, *durchschnitt*: intersección.

Trivialmente todo cerrado (resp. abierto) es un conjunto F_σ (resp. G_δ).

Ejemplo (¿los conjuntos F_σ son cerrados?). Trabajaremos sobre la topología usual sobre $\mathbb{R}$ y probaremos tres casos distintos para F_σ. $\{[k, k+1]\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una familia numerable de cerrados, y por propiedad arquimediana se cumple que su unión es $[0, +\infty)$ que es cerrado. $\{[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]\}_{k>0}$ es una familia numerable de cerrados, cuya unión es $(-1, 1)$ que es abierto. $\{\{x\} : x \in \mathbb{Q}\}$ es también una familia numerable de cerrados y su unión es $\mathbb{Q}$ que no es ni cerrado ni abierto.

Proposición 2.45: Se cumple:

1. Todo conjunto cero (resp. cocero) es cerrado (resp. abierto).

2. La unión e intersección de finitos conjuntos ceros (resp. coceros) es un cero (resp. cocero).

3. La intersección (resp. unión) de numerables conjuntos cero (resp. cocero) es un cero (resp. cocero).

4. La preimagen continua de un conjunto F_σ (resp. G_δ) es un conjunto F_σ (resp. G_δ).

Demostración: Probaremos la 2 y la 3 solo para ceros (pues luego es trivial ver que se cumple para coceros): Si C_1, C_2 son ceros por las funciones f_1, f_2, entonces se cumple que

$$f(x) := \frac{1}{2}(f_1(x) + f_2(x))$$

demuestra que $C_1 \cap C_2$ es un cero. Para ver que $C_1 \cup C_2$ lo es, la siguiente función:

$$g(x) := f_1(x) \cdot f_2(x),$$

lo comprueba.

Sean $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de ceros por las funciones $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$, entonces

$$f(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i(x)}{2^{i+1}}$$

es continua y prueba que la intersección lo es. □

Proposición 2.46: Se cumple:

1. Todo conjunto cero (resp. cocero) es G_δ (resp. F_σ).

2. (DE) En un espacio normal todo cerrado G_δ (resp. abierto F_σ) es cero (resp. cocero).

Demostración:
1. Es claro que $\{0\}$ es cerrado en $[0,1]$, y basta notar que $\{[0,1/k)\}_{k>0}$ es una familia de abiertos cuya intersección es $\{0\}$ para ver que dicho punto es un conjunto G_δ. Luego ambas se preservan mediante preimágenes continuas.

2. Sea A un cerrado G_δ, por ende, A^c es un conjunto F_σ, i.e., $A^c = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$ donde C_i es cerrado. Mediante el lema de Urysohn se cumple que existen funciones continuas $f_i : X \to [0,1]$ tales que $f_i[A] = \{0\}$ y $f_i[C_i] = \{1\}$. Luego se define $g : X \to [0,1]$ como

$$g(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i(x)}{2^{i+1}}$$

luego es continua, $g[A] = \{0\}$, pero falta probar que si $x \notin A$ entonces $g(x) \neq 0$. Por definición, $x \in A^c$, luego $x \in C_i$, para algún $i \in \mathbb{N}$, luego $g(x) \geq \frac{f_i(x)}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^{i+1}} > 0$, como se quería probar.

□

Teorema 2.47: Para todo par de ceros disjuntos A, B existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f^{-1}[0] = A$ y $f^{-1}[1] = B$.

Demostración: Como A, B son ceros existen funciones $g, h : X \to [0, 1]$ continuas tales que $g^{-1}[0] = A$ y $h^{-1}[0] = B$. Luego

$$f(x) := \frac{g(x)}{g(x) + h(x)},$$

cumple lo pedido. □

La última se asemeja mucho a la cualidad de estar completamente separados, mas ésta es una propiedad más fuerte, pues dice que f toma valor 0 **sólo** en A y 1 **sólo** en B.

Teorema 2.48 (Vedenissoff): En un X espacio T_1 son equivalentes:

1. (DE) Todo cerrado es G_δ, o equivalentemente, todo abierto es F_σ.
2. Todo cerrado es un cero.
3. Para todo par de cerrados disjuntos A, B existe $f : X \to [0, 1]$ continua tal que $f^{-1}(0) = A$ y $f^{-1}(1) = B$.

Demostración: (1) $\implies$ (2). Por la proposición 2.41 se cumple que todo P-espacio T_1 es normal, luego, por la proposición anterior, todo cerrado G_δ es un cero.

(2) $\implies$ (3). Basta ver el teorema anterior.

(3) $\implies$ (1). Sea C un cerrado no vacío y propio, como es propio existe un punto fuera de él $\{x\}$, y como ambos conjuntos son cerrados disjuntos, entonces por (3) existe una función continua f tal que $f^{-1}(0) = C$ y $f^{-1}(1) = \{x\}$, luego C es por definición un cero. Y como todo cero es G_δ, entonces queda demostrado. □

Definición 2.49 – *Axiomas de separación II*: Además de los axiomas de separación conocidos se unen los espacios:

Urysohn Todo par de puntos distintos están completamente separados.

$T_{3,5}$ **o** T_{Π} Un punto y un conjunto cerrado que le excluye están completamente separados.

T_5 Todo par de conjuntos separados admiten entornos disjuntos.

T_6 Un espacio que cumple cualquier condición del teorema de Vedenissoff.

Si un espacio es $T_0 + T_{3,5}$ se dice *de Tychonoff*, uno $T_1 + T_5$ se dice *completamente normal*, y otro $T_1 + T_6$ se dice *perfectamente normal*.

Ejemplo (topología de partición). Sea X un espacio y $\{A_i\}_{i\in I}$ una partición estricta de él, luego todas las posibles uniones forman una topología la que llamamos *topología de partición*, un tipo de ella muy sencilla es la topología en $\mathbb{N}$ tal que los abiertos son $\varnothing, \mathbb{N}$, el conjunto de pares y el de los impares. La cualidad de la topología de partición es que todo conjunto es abierto syss es cerrado, en particular, toda topología de partición es T_i con $i \geq 3$, pero si alguno de los A_i no es singular, entonces la topología de partición no es T_0, y por ende, no es T_1 ni T_2 ni $T_{2,5}$.

2.3. Construcción de espacios

§2.3.1 Subespacios.

Proposición 2.50: Sea $A \subseteq X$, el conjunto $\tau_A := \{U \cap A : U \in \tau\}$ es una topología en A.

Definición 2.51 – *Subespacio*: Dado un subconjunto A no vacío de X, el conjunto τ_A definido por la proposición anterior se dice *topología relativa en A* y el par (A, τ_A) se dice un *subespacio* de X. Cabe destacar que denotaremos $\operatorname{Int}_A B$, $\partial_A B$ y $\overline{B}_A$ al interior, la frontera y la clausura de B respecto de A.

Se dice que $f : X \to Y$ es una *inmersión* o *encaje* si $f : X \to f[X]$ es un homeomorfismo. De existir una inmersión de X a Y se dice que

X está inmerso en Y. Notemos que un espacio está inmerso en otro syss es homeomorfo a un subespacio del segundo.

Se dice que una propiedad de un espacio es *hereditaria* si todo subespacio también la posee. Si una propiedad no es generalmente hereditaria, pero se quiere especificar que en un caso particular lo es, entonces añadiremos el prefijo "hereditariamente", e.g., espacio hereditariamente normal.

Proposición 2.52: Sea A un subespacio de X. Un conjunto $B \subseteq A$ es cerrado en A syss existe un cerrado C en X tal que $B = A \cap C$. Se cumple también que $\overline{B}_A = \overline{B} \cap A$.

Demostración: Está claro que si $B := A \cap C$ con C cerrado en X entonces B es cerrado en A. Si B es cerrado en A entonces $A \setminus B$ es abierto, ergo, $A \cap B^c = A \cap U$ con U abierto. Por el contrario, si B es cerrado en A, entonces $B^c \cap A$ es abierto en A, ergo, existe U abierto en X tal que $A \cap B^c = A \cap U$. Probaremos que $F := U^c \cap A = B \cap A = B$: Es claro que

$$(A \cap U) \cup (A \cap U^c) = A \cap (U \cup U^c) = A = (A \cap B^c) \cup (A \cap F) = A \cap (B^c \cup F).$$

Luego $B^c \cup F \supseteq A$, veamos que la desigualdad se mantiene tras considerar la intersección con B:

$$B \subseteq (B^c \cup F) \cap B = (B \cap B^c) \cup (B \cap F) = B \cap F \subseteq B$$

Finalmente es claro que $B \cap F = B$, luego $F \supseteq B$. □

Proposición 2.53: Todo subespacio está inmerso en su espacio original. La inclusión es dicha inmersión. $X \cong Y$ syss X está inmerso en Y y Y inmerso en X.

Teorema 2.54: Son hereditarios:

1. Los axiomas de separación T_i con $i \leq 3{,}5$.
2. La cualidad de ser perfectamente normal.
3. Los axiomas de numerabilidad (1AN, 2AN).
4. La cualidad de ser separable.

Demostración: Probaremos que los axiomas de separación indicados son hereditarios. $T_2, T_{2,5}$, T_3 y $T_{3,5}$ salen por definición. T_0 y T_1 de propiedades básicas vistas en el teorema 2.36. La cualidad de ser perfectamente normal sale de que todo cerrado es funcionalmente cerrado. Los axiomas de numerabilidad y separabilidad son triviales. □

Teorema 2.55: En un espacio T_1 son equivalentes:

1. El espacio es hereditariamente normal.
2. Todo subespacio abierto es normal.
3. El espacio es completamente normal.

Demostración: Es claro que (1) $\implies$ (2).

(2) $\implies$ (3). Sean A, B conjuntos separados, es decir, tales que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$. Definimos $S := (\overline{A} \cap \overline{B})^c$, notemos que $\overline{A}_S$ y $\overline{B}_S$ son cerrados disjuntos en S, luego admiten entornos abiertos disjuntos U, V en S que es abierto. Y también como A, B están separados, entonces $A, B \subseteq S$, luego U, V les separan en X.

(3) $\implies$ (1). Sea $S \subseteq X$ cualquiera y sean $A, B \subseteq S$ cerrados disjuntos en S, vamos a probar que están separados en X. En efecto, si A cerrado en S entonces $A = C_A \cap S$ con C_A cerrado en X, lo mismo con B, luego

$$\overline{A} \cap B = \overline{C_A \cap S} \cap (C_B \cap S) \subseteq (C_A \cap C_B) \cap S = \varnothing,$$

la otra igualdad es análoga, de modo que admiten entornos disjuntos, luego se les intersecan en S para ver que son entornos disjuntos en S, lo que es la definición de ser espacio normal. □

Teorema 2.56: Entre espacios se cumple la siguiente cadena de implicancias:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathrm{PN} & \Rightarrow & \mathrm{CN} & \Rightarrow & \mathrm{N} & \overset{\text{(DE)}}{\Rightarrow} & \mathrm{Tyc} & \Rightarrow & \mathrm{Ury} & & & & \\
& & & & & & \Downarrow & & \Downarrow & & & & \\
& & & & & & \mathrm{Reg} & \Rightarrow & T_{2,5} & \Rightarrow & T_2 \Rightarrow & T_1 \Rightarrow & T_0
\end{array}$$

§2.3.2 Suma y producto de espacios.

Definición 2.57 – *Suma de espacios*: Siendo $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos disjuntos dos a dos se denota $\bigoplus_{i\in I} X_i$ al espacio topológico dado por $\bigcup_{i\in I} X_i$, cuyos abiertos U son aquellos tales que $U \cap X_i$ es abierto en X_i. Si los espacios no son disjuntos, pero I está bien ordenado, entonces se puede usar la unión disjunta.

Proposición 2.58: C es cerrado en $\bigoplus_{i\in I} X_i$ syss $C \cap X_i$ lo es para todo $i \in I$.

Corolario 2.59: Cualquier unión de X_j's es cerrada y abierta en $\bigoplus_{i\in I} X_i$.

Proposición 2.60: Si un espacio X puede expresarse como la unión de una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ de subespacios abiertos disjuntos dos a dos, entonces $X = \bigoplus_{i\in I} X_i$.

Definición 2.61 – *Producto de espacios*: Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, se le llama *topología por cajas* a aquella inducida por la base:

$$\left\{ \prod_{i\in I} U_i : \forall i \in I \; (U_i \in \tau_i) \right\}$$

y se denota $\prod_{i\in I}^{\text{Box}} X_i$. Se le llama *topología producto* a la topología inicial inducida por $\{(X_i, \pi_i)\}_{i\in I}$ donde π_i es la proyección, y se denota $\prod_{i\in I} X_i$.

Se dice que una propiedad es κ-multiplicativa si toda topología producto $\prod_{i\in I} X_i$ en donde todo factor posee dicha propiedad e $|I| \leq \kappa$ conserva dicha propiedad. Si no se especifica, entonces se asume que se aplica para todo cardinal.

Para productos de finitos espacios topológicos, la topología por cajas y producto coinciden; no obstante la diferencia se da cuando se consideran productos infinitos. En cuyo caso, en la topología por cajas los básicos son productos de abiertos, mientras que en la producto los básicos son productos de espacios con finitos abiertos; esa distinción es fundamental. Por definición, la topología por cajas es más fuerte que la producto.

Proposición 2.62: Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia tal que $A_i \subseteq X_i$ para todo

$i \in I$, entonces en la topología producto se tiene que

$$\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}. \tag{2.1}$$

Hint: Utilice el hecho de que el entorno de todo punto adherente interseca al conjunto.

Corolario 2.63: Un producto es cerrado en la topología producto syss todos los factores lo son en sus respectivos espacios.

Corolario 2.64: Un producto es denso en la topología producto syss todos los factores lo son en sus respectivos espacios.

> **Teorema 2.65:** Una aplicación f entre un espacio topológico y un producto es continua syss las aplicaciones $f \circ \pi_i$ son continuas para todo $i \in I$.

Enfatizo el como un resultado así de fuerte resulta ser meramente un corolario de la proposición 2.62. Una aplicación trivial es considerar una función desde $\mathbb{R}$ a cualquier espacio euclídeo.

> **Teorema 2.66:** Los axiomas de separación T_i son multiplicativos para $i \leq 3{,}5$. Si un producto es no vacío y T_i entonces los factores son T_i para $i \leq 6$.

Teorema 2.67: Sea $|I| \leq \kappa \geq \aleph_0$. Si $w(X_i) \leq \kappa$ entonces $w\left(\prod_{i\in I} X_i\right) \leq \kappa$. Si $\chi(X_i) \leq \kappa$ entonces $\chi\left(\prod_{i\in I} X_i\right) \leq \kappa$.

Teorema (AE) 2.68 (Hewitt-Marczewski-Pondiczery): El producto de a lo más 2^κ espacios de densidad menor o igual que $\kappa \geq \aleph_0$ tiene densidad menor o igual que κ.

Demostración: Sean X_i los espacios con $i \in I$ donde $|I| = \kappa$, cada uno con un subconjunto denso D_i, luego se cumple que $\mathcal{D} := \prod_{i\in I} D_i$ es denso en el espacio producto, por lo que la prueba se reduce a mostrar que $\mathcal{D}$ es de densidad menor o igual que κ. Para ello, construyamos unas funciones suprayectivas $f_i : D(\kappa) \to D_i$ que resultan ser continuas, luego $f := \prod_{i\in I} f_i : [D(\kappa)]^{2^\kappa} \to \mathcal{D}$ es una aplicación continua suprayectiva, de modo que basta con probar que $d\left([D(\kappa)]^{2^\kappa}\right) \leq \kappa$.

Sea $T := [D(2)]^\kappa$, luego $[D(\kappa)]^{2^\kappa} \cong \operatorname{Func}(T; D(\kappa)) =: X$. Sea $\mathcal{B}$ una base de T de cardinal $\leq \kappa$, luego sea $\mathcal{T}$ la familia de tuplas finitas de $\mathcal{B}$ formada por básicos disjuntos dos a dos. Sea A la familia de X formada por las funciones f para las cuales existe $\{B_1, \dots, B_n\} \in \mathcal{T}$ tal que f es constante en B_i y $T \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_n)$, luego como $|\mathcal{T}| \leq \kappa$, entonces $|A| \leq \kappa$, probaremos que A es denso.

Sea U un abierto no vacío, hemos de probar que corta a A. Sean $t_1, \dots, t_k \in T$ distintos dos a dos, y sea $y_1, \dots, y_k \in D(\kappa)$ tales que $\bigcap_{i=1}^k \pi_{t_i}^{-1}[y_i] \subseteq U$ (lo que se cumple pues las preimágenes de puntos forman una subbase), es decir, U contiene funciones f tales que $f(t_i) = y_i$. Como T es de Hausdorff, existe $\{U_1, \dots, U_k\} \in \mathcal{T}$ tal que $t_i \in U_i$ con $i = 1, \dots, k$, luego la función

$$f(x) := \begin{cases} y_i, & x \in U_i \text{ con } i = 1, \dots, k; \\ y_1, & x \in T \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_k). \end{cases}$$

pertenece tanto a A como a U. $\square$

Corolario 2.69: Los axiomas de numerabilidad son $\aleph_0$-multiplicativos. La separabilidad es $\mathfrak{c}$-multiplicativa.

Ejemplo. Sea $X := \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$, recuerde que $f \in X$ es una aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ y que la proyección $\pi_\alpha(f) := f(\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Como los axiomas de separación son multiplicativos, X es de Tychonoff.
- X es separable, sin embargo no es 1AN ni 2AN, es más para todo $x \in X$ se cumple que $\chi(x) > \aleph_0$: Supongamos que x tuviera una base de entornos numerable $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, entonces para todo $i \in \mathbb{N}$ se cumple que $\pi_\alpha[B_i] = \mathbb{N}$ para todo α excepto tal vez finitos de ellos. Como $\mathbb{R}$ es no numerable, existe un β tal que $\pi_\beta[B_i] = \mathbb{N}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, pero entonces $\pi_\beta^{-1}[x]$ es un entorno básico de x que no contiene a ningún B_i, contradicción.
- X no es normal: Sea P_i el conjunto de puntos tales que todo entero exceptuando i no se repite entre coordenadas, probaremos que P_0 y P_1 son cerrados disjuntos sin entornos disjuntos. Nótese P_i^c es el conjunto que posee alguna coordenada distinta de i repetida, luego $P_i^c = \bigcup_{\substack{\alpha \neq \beta \\ n \neq i}} \pi_\alpha^{-1}[n] \cap \pi_\beta^{-1}[n]$ por lo que es abierto.

  Sean U, V entornos de P_0 y P_1, resp. En primer lugar notemos que si $F \subseteq \mathbb{R}$ es finito, entonces para todo $x \in X$ se cumple que $F(x) :=$

$\bigcap_{\alpha\in F}\pi_\alpha^{-1}[x_\alpha]$ es un entorno básico de x. Definiremos inductivamente una sucesión de subconjuntos finitos encajados $F_k := \{\alpha_i\}_{i=0}^k$ junto a una sucesión $x^n \in P_0$. Sea $x_\alpha^0 := 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, dados x^n y F_{n-1} se define $F_n \supseteq F_{n-1}$ tal que $F_n(x^n) \subseteq U$ y sea x^{n+1} definido como aquél tal que $x_{\alpha_i}^{n+1} = i$ y $x_\alpha^{n+1} = 0$ si $\alpha \notin F_n$. Sea $y \in P_1$ tal que $y_{\alpha_i} = i$ y $y_\alpha = 0$ si $\alpha \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Sea $G \subseteq \mathbb{R}$ finito tal que $G(y) \subseteq V$, luego ha de existir un natural m tal que $G \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = G \cap F_m$. Sea $z \in \mathbb{R}$ definido como que $z_{\alpha_i} = i$ si $\alpha_i \in F_m$, $z_{\alpha_i} = 0$ si $\alpha_i \in F_{m+1} \setminus F_m$ y $z_\alpha = 0$ en otro caso. Notemos que $z_\alpha = y_\alpha$ si $\alpha \in G \cap F_m$ y $z_\alpha = 0 = y_\alpha$ si $\alpha \in G \setminus F_m$, por ende $z \in G(y) \subseteq V$. Además, $z_{\alpha_i} = x_{\alpha_i}^{m+1}$ si $\alpha_i \in F_m$ y $z_\alpha = 0 = x_\alpha^{m+1}$ si $\alpha \in F_{m+1} \setminus F_m$, por lo que

$$z \in \bigcap_{\alpha\in F_{m+1}} \pi_\alpha^{-1}[x^{m+1}] = F_{m+1}(x^{m+1}) \subseteq U;$$

por ende, $z \in U \cap V$ como se quería probar.

2.4. Sobre continuidad

Definición 2.70 – *Función abierta*: Se dice que una aplicación $f : X \to Y$ continua es abierta (resp. cerrada) si la imagen de todo conjunto abierto (resp. cerrado) es abierta (resp. cerrado).

Como hemos probado, todo homeomorfismo es una función abierta y cerrada. Si $\{y\}$ es un cerrado en Y, entonces $f : X \to Y$ dado por $f(x) = y$ es cerrado.

Proposición 2.71: Una función $f : X \to Y$ es abierta syss existe una base de X tal que la imagen de los abiertos básicos es abierta.

Teorema 2.72: Si $f : X \to Y$ es una biyección, entonces las siguientes son equivalentes:

1. f es un homeomorfismo.
2. f es cerrada.
3. f es abierta.

Proposición 2.73: Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una partición (no necesariamente estricta) de X por abiertos, y $f_i : U_i \to Y$ son una familia de funciones continuas compatibles, entonces $f := \bigcup_{i\in I} f_i$ es continua.

Demostración: Sea V un abierto de Y, luego se cumple que

$$f^{-1}[V] = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}[V]$$

como la unión arbitraria de abiertos es abierta comprobamos que f es continua. □

Proposición 2.74: Sea $\{C_i\}_{i \in I}$ una partición (no necesariamente estricta) de X localmente finita por cerrados, y $f_i : U_i \to Y$ son una familia de funciones continuas compatibles, entonces $f := \bigcup_{i \in I} f_i$ es continua.

Hint: Análoga a la versión con abiertos. En particular la proposición vale para finitos cerrados.

Teorema (DE) 2.75 – *Teorema de extensión de Tietze-Urysohn*: Toda función continua $f : C \to \mathbb{R}$ (o a $[0, 1]$) con C cerrado en X es continuamente extensible a X.

Demostración: ... □

Teorema 2.76: Si $f, g : X \to Y$ son continuas e Y es de Hausdorff, entonces $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

Demostración: Probaremos que $A := \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ es abierto. Si $f(x) \neq g(x)$, entonces como Y es de Hausdorff, por definición existen U_1, U_2 tales que $f(x) \in U_1$ y $g(x) \in U_2$ pero $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, luego $f^{-1}[U_1] \cap g^{-1}[U_2]$ es un entorno de x contenido en A, luego x es interior a A. □

Corolario 2.77: Si $f : D \to Y$ es continuamente extensible con $D \subseteq X$ denso, entonces dicha extensión es única.

Corolario 2.78:

$$|\operatorname{Cont}(\mathbb{R}, \mathbb{R})| = \mathfrak{c}.$$

§2.4.1 Continuidad en espacios métricos. Por el momento sólo hemos definido los límites y la noción de forma general mediante topología, pero suele ser común que la forma de enseñar es particular a $\mathbb{R}$. Las definiciones se desprenden automáticamente del que $\mathbb{R}$ es un espacio métrico:

Definición 2.79 – *Límites y continuidad (espacio métrico)*: Dada una aplicación $f : X \to Y$, donde X, Y son subconjuntos de M, se escribe $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ donde $x_0 \in X^{\mathrm{d}}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $x \in B_\delta(x_0; X_{\neq x_0})$ (o $d(x, x_0) < \delta$ y $x \in X_{\neq x_0}$) implica $f(x) \in B_\epsilon(L; Y)$ (o $d(f(x), L) < \epsilon$). Igualmente se dice que f es continua en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Y f se dice continua en general si lo es en todo punto de X^{d}.

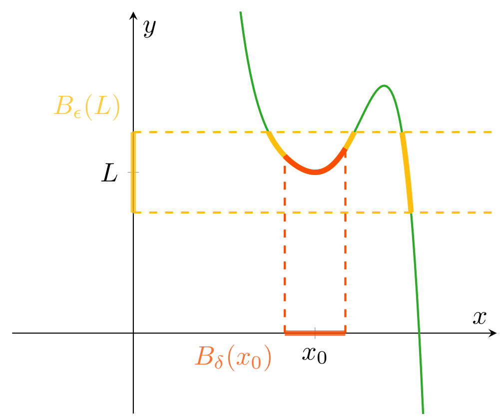

Figura 2.3. Continuidad en funciones entre espacios métricos.

Como $\mathbb{R}$ es métrico, entonces es de Hausdorff y ya probamos la unicidad del límite. Pero también hay otras definiciones importantes:

Proposición 2.80: Se cumple:

1. Si $f : X \to \overline{\mathbb{M}}$ converge en $x_0 \in X^{\mathrm{d}}$, entonces está acotada cerca de x_0.
2. La imagen de un conjunto acotado, bajo una función continua, está acotada.

Proposición 2.81: En $\overline{\mathbb{M}}$:

1. Un punto está a distancia nula de un conjunto syss es adherente a él.
2. Dos conjuntos están a distancia nula syss no están separados.

Teorema 2.82: Todo espacio métrico completo es perfectamente normal.

Demostración: Sea A, B cerrados en M, luego definimos

$$f(x) := \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Es claro que $f[A] = \{0\}$ y $f[B] = \{1\}$. Por la proposición anterior la función está bien definida y ya hemos visto que la aritmética sobre continuas en continua. Luego f es de Urysohn. □

Esta es un propiedad muy importante, pues hemos visto que los distintos niveles de separación de un espacio lo dotan de más propiedades, y mediante el teorema anterior hemos probado que un espacio métrico admite la mayor clasificación.

Definición 2.83 – *Propiedad de Lipschitz*: Se dice que una función $f : M_1 \to M_2$ donde M_1, M_2 son pseudo-métricos tiene la *propiedad de Lipschitz* si existe un $\lambda > 0$ tal que para todo $x, y \in M$ se cumple que

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

Teorema 2.84: Toda función entre espacios métricos con la propiedad de Lipschitz es continua.

Corolario 2.85: La norma de un espacio normado es continua.

§2.4.2 Cálculo de límites.

Teorema 2.86: Si $\mathbb{k}$ es un cuerpo métrico, entonces la aplicación $f : \mathbb{k}_{\neq 0} \to \mathbb{k}$ definida como $f(x) := x^{-1}$ es continua.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$ y $x \in \mathbb{k}_{\neq 0}$, como $\mathbb{k}$ es métrico y no pseudo-métrico, podemos afirmar que $|x| > 0$, luego sea

$$\delta := \frac{|x|}{2} \min\{1, |x|\epsilon\},$$

si $|x-y| < \delta$, entonces por desigualdad triangular $|x| < |x-y|+|y| < \frac{|x|}{2}+|y|$, luego $|y| > |x|/2$, lo que equivale a que $1/|y| < 2/|x|$.

Finalmente
$$\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right| = \frac{|x-y|}{|x|\,|y|} < \frac{|x|\epsilon}{2|y|} < \epsilon.$$
□

Finalmente por composición de continuas podemos confirmar que, por ejemplo, sobre cualquier cuerpo métrico (en particular sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$) se cumple que todo polinomio es continuo.

Proposición 2.87: En $\mathbb{R}$ dado un $n \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ cualquiera se cumple que $\sqrt[n]{\ } : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es continua.

Demostración: Ya vimos que $f(x) := x^n$ es continua y es una biyección sobre $[0,\infty)$ pues $\sqrt[n]{\ }$ es su inversa. Ahora veremos que es una función abierta, sean $0 \le a < b$, luego si $x \in (a,b)$ entonces $a < x < b$, por lo que, $a^n < x^n < b^n$, ergo $f(x) \in \big(f(a), f(b)\big)$, es decir, $f\big[(a,b)\big] = \big(f(a), f(b)\big)$. Asimismo se comprueba que $f\big[[0,b)\big] = \big[0, f(b)\big)$. Como la imagen de los básicos es abierta, la función es abierta, luego tanto f como su inversa, la raíz n-ésima, son homeomorfismos. □

A continuación, un ejemplo de límites sobre $\mathbb{R}$ mediante métodos clásicos:
Ejemplo (Función de Thomae). Se define dicha función como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 1/q, & x = p/q \in \mathbb{Q}_{\neq 0} \wedge \operatorname{mcd}(p,q) = 1 \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Y hemos de probar que $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.
Para ello, primero admitiremos los siguientes criterios de notación:

$$\mathbb{Q}_n := \left\{\frac{p}{n} : p \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \mathbb{Q}_{\le n} := \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{Q}_i.$$

Y probaremos que $0 < |\mathbb{Q}_n \cap [x, x+1)| \le n$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

Si $x \in \mathbb{Z}$ entonces $x = \frac{nx}{n} \in \mathbb{Q}_n \cap [x, x+1)$, de lo contrario, $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1 < x+1$, por lo que $\lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{Q}_n \cap [x, x+1)$ (es decir, la intersección es no vacía). Notemos también que el elemento $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ es el mínimo de dicha intersección (¿por qué?), y está claro que $\frac{\lfloor nx+n+1 \rfloor}{n} = \frac{\lfloor nx \rfloor}{x} + 1 + \frac{1}{n} \ge x + 1 + \frac{1}{n}$, por lo que no puede haber más de n elementos. □

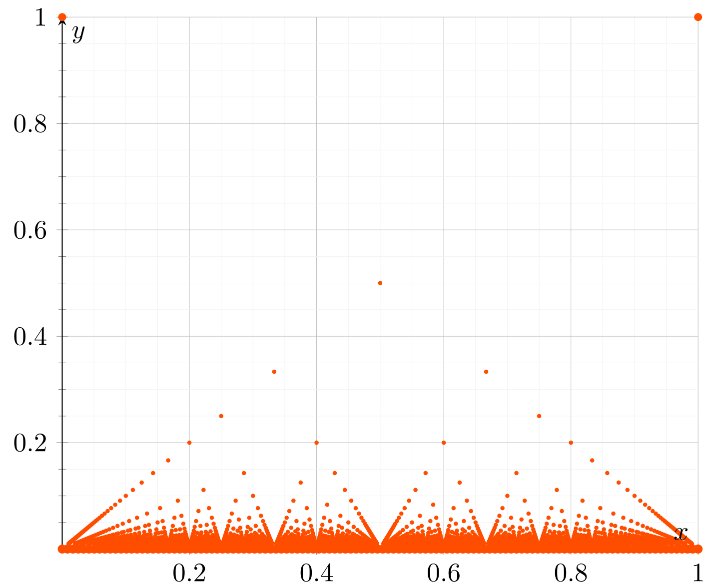

Figura 2.4. Función de Thomae entre 0 y 1.

Usando ello, también se prueba que

$$0 < |\mathbb{Q}_{\leq n} \cap [x, x+1)| = \left| \bigcup_{i=1}^{n} (\mathbb{Q}_i \cap [x, x+1)) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Es decir, que dicho conjunto es finito y no vacío, por lo que, tenemos todos nuestros elementos para probar lo del límite.

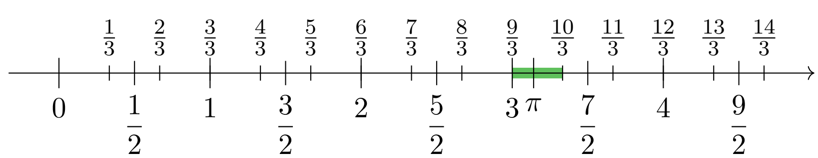

Figura 2.5. Ejemplo del procedimiento con π y $\mathbb{Q}_{\leq 3}$.

Sea $\epsilon > 0$. Por propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \epsilon$. La idea será acortar la bola abierta entorno a x_0 de manera que sólo posea racionales de denominador mayor que n. Por ello definimos $m := \max\big(\mathbb{Q}_{\leq n} \cap [x_0 - 1, x_0)\big)$ y $M := \min\big(\mathbb{Q}_{\leq n} \cap (x_0, x_0 + 1]\big)$ pues dichos conjuntos son no vacíos y finitos, de esta forma, en el intervalo $(m, M) \setminus \{x_0\}$ sólo caben racionales de denominador mayor que n (pues si hubiera uno de denominador menor o igual que n este elemento contradiría la maximalidad o la minimalidad de M o m resp.). Definimos $\delta := \text{mín}\{x_0 - m, M - x_0\}$ de forma que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (m, M)$. Luego si x es irracional entonces $f(x) = 0 < \epsilon$. Y si es racional, entonces su denominador es mayor que n, ergo, $f(x) < 1/n < \epsilon$. $\square$

3

Filtros, compacidad y conexión

Uno de los principales y más fuertes resultados de la topología general es el teorema de Tychonoff presentado en la sección sobre espacios compactos, no obstante, es indispensable mencionar su relación al AE, el cual está ligado al tópico (opcional por cierto) de los filtros. Por eso, se advierte que esta sección tendrá un fuerte enfoque a equivalencias y versiones débiles del AE.

3.1. Álgebras booleanas y filtros

Definición 3.1 – *Álgebra booleana*: Es una cuádrupla $(\mathbb{B}, \wedge, \vee, \neg)$ donde $\wedge, \vee : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ y $\neg : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ tales que para todo $p, q, r \in \mathbb{B}$:

1. $\neg(\neg p) = p$ (doble negación).
2. $p \wedge q = q \wedge p$ (conmutatividad).
3. $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$ (asociatividad).
4. $p \wedge p = p$ (idempotencia).
5. $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (distributividad).
6. $p \vee (p \wedge q) = p$ (absorción).
7. $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ (ley de De Morgan).

8. $p \vee \neg p = q \vee \neg q =: 1$.

También definimos $0 := \neg 1$. Se dice que un subconjunto es una *subálgebra* de $\mathbb{B}$ si es no vacío y cumple ser un álgebra booleana.

Se definen las operaciones:

$$(p \to q) := \neg p \vee q, \quad (p \leftrightarrow q) := (p \to q) \wedge (q \to p).$$

Para aclarar $\neg p \vee q = (\neg p) \vee q$. Cuando apliquemos el operador $\neg$ sin paréntesis se aplica al elemento más cercano, si se quiere aplicar a una operación pondremos paréntesis a la operación. En general $\mathbb{B}$ representará un álgebra booleana.

Proposición 3.2 (Criterio del subálgebra): Un subconjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{B}$ es un subálgebra si para todo $a, b \in A$ se cumple que $a \vee \neg b \in A$.

Corolario 3.3: La intersección arbitraria de subálgebras es un subálgebra.

Dado $S \subseteq \mathbb{B}$ denotamos

$$\langle S \rangle := \bigcap \{B : S \subseteq B \wedge B \text{ es subálgebra}\}.$$

Proposición 3.4: Para todo $p, q, r \in \mathbb{B}$:

1. $p \vee q = q \vee p$ (conmutatividad).
2. $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$ (asociatividad).
3. $p \vee p = p$ (idempotencia).
4. $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributividad).
5. $p \wedge (p \vee q) = p$ (absorción).
6. $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$ (ley de De Morgan).
7. $0 = p \wedge \neg p = p \wedge 0$.
8. $p \vee 0 = p \wedge 1 = p$ y $p \vee 1 = 1$.
9. $p \vee q = p$ syss $p \wedge q = q$.

Es fácil notar que un álgebra booleana modela un sistema lógico proposicional y que dado un conjunto S entonces $(\mathcal{P}(S), \cap, \cup, (\,)^c)$ con $0 = \varnothing$ y $1 = S$ es un álgebra booleana, que llamaremos álgebra conjuntista sobre S.

Teorema 3.5: Definamos la relación $\leq$ como $p \leq q$ syss $p \vee q = p$ sobre $\mathbb{B}$ entonces:

1. $\leq$ es de orden parcial.
2. Bajo $\leq$, 0 es el mínimo y 1 el máximo de B.
3. $p \wedge q = \inf\{p, q\}$ y $p \vee q = \sup\{p, q\}$.
4. $p \leq q$ syss $\neg q \leq \neg p$.
5. $p \leq q$ syss $p \to q = 1$.
6. $p \leftrightarrow q$ syss $p = q$.
7. $p = \neg q$ syss $p \vee q = 1$ y $p \wedge q = 0$.

Demostración: Voy a demostrar las que considero más difíciles:

3. Probaremos que $p \wedge q = \inf\{p, q\}$ y la otra es análoga. Primero veamos que $(p \wedge q) \leq p$ por definición, lo mismo para q; por lo que basta probar que es la máxima cota inferior. Sea $r \leq p$ y $r \leq q$. Luego
$$r \vee (p \wedge q) = (r \vee p) \wedge (r \vee q) = r \wedge r = r$$
ergo $r \leq (p \wedge q)$ como se quería probar.

5. $\Longrightarrow$. $p \to q = \neg p \vee q = \neg p \vee (p \vee q) = 1 \vee q = 1$.
$\Longleftarrow$. Basta ver que
$$p = p \wedge 1 = p \wedge (\neg p \vee q) = (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) = p \wedge q.$$

7. $\Longrightarrow$. Trivial.
$\Longleftarrow$. Basta ver que $p \leq \neg q$ y que $\neg q \leq p$. Para el primero, por la propiedad anterior, basta ver que
$$p \to (\neg q) = \neg p \vee \neg q = \neg(p \wedge q) = \neg 0 = 1.$$
Para el segundo hacemos lo mismo y $\neg q \to p = \neg(\neg q) \vee p = q \vee p = 1$.

$\square$

Definición 3.6 – *Morfismos, ideales y filtros*: Un morfismo entre álgebras booleanas es una aplicación f que respeta las operaciones, es decir,

$$f(\neg a) = \neg f(a),\ f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b),\ f(a \vee b) = f(a) \vee f(b);$$

por leyes de De Morgan, se pueden reducir a que $f(a \wedge \neg b) = f(a) \wedge \neg f(b)$.

Se dice que un ideal I sobre un álgebra booleana $\mathbb{B}$ si se cumple que:

1. $0 \in I, 1 \notin I$.
2. $p, q \in I \implies p \vee q \in I$.
3. $p \leq q$ y $q \in I$ implica $p \in I$.

Por otro lado, F es un filtro si $I := \{\neg p : p \in F\}$ es un ideal, en cuyo caso I y F se dicen *duales*. Un ideal se dice *primo* si para todo $p \in \mathbb{B}$ se cumple que $p \in I$ o $\neg p \in I$. El dual de un ideal primo se dice un *ultrafiltro*.

Proposición 3.7: Dado un álgebra booleana, un conjunto I es un ideal primo syss es $I = f^{-1}(0)$ donde $f : \mathbb{B} \to \{0, 1\}$ es un morfismo de álgebras.

Así podemos caracterizar los ideales primos y los ultrafiltros, esto nos será útil más adelante.

Lema 3.8: Un ideal sobre $\mathbb{B}$ es primo syss es maximal respecto de la inclusión.

Demostración: $\implies$. Es trivial.

$\impliedby$. Lo probaremos por contrarrecíproca. Si I no es primo, entonces hay algún $p \in \mathbb{B}$ tal que $p \notin I$ y $\neg p \notin I$. Notemos que $p \vee q = 1$ syss $\neg p \leq q$, y como $\neg p \notin I$ entonces $p \vee q \neq 1$ para todo $q \in I$. Luego sea

$$I' := \{r \in \mathbb{B} : r \leq \vee_{i=1}^{n} q_i, \quad q_i \in I \cup \{p\}\}$$

es decir, el conjunto de los elementos menores a la disyunción de elementos de $I \cup \{p\}$ que es siempre distinta de 1 por el argumento ya explicado. Es fácil notar que I' es un ideal y que incluye a I; ergo I no es maximal. $\square$

Teorema (AE) 3.9 – *Teorema de los ideales primos (TIP)*: Todo ideal sobre un álgebra booleana está contenido en un ideal primo.

Demostración: Basta aplicar el lema anterior con el lema de Zorn que es equivalente a AE. □

Definición 3.10: En general, llamaremos *filtro* sobre S a cualquier filtro del álgebra conjuntista de S.

Diremos que una familia de conjuntos tiene la *propiedad de intersecciones finitas* si toda intersección de finitos conjuntos de la familia es no vacía.

Ejemplos:

1. $\{S\}$ es un filtro, usualmente llamado el trivial.
2. Dado $\varnothing \subset X_0 \subset S$ se cumple que
$$\{X : X_0 \subseteq X\}$$
es un filtro, usualmente llamado principal. Si en su lugar consideramos la inclusión estricta le llamamos principal estricto.
3. Para todo $x \in S$ se cumple que
$$\{A : x \in A\}$$
es un ultrafiltro, el cual llamaremos principal centrado en x.
4. Si S es infinito, entonces[1] $[S]^{<\omega}$ es un ideal, cuyo dual es llamado el *filtro de Fréchet*.

Proposición 3.11: Se cumple que:

1. Todo filtro tiene la PIF.
2. Dada una familia $\mathcal{F}$ de filtros sobre S, entonces $\bigcap \mathcal{F}$ es un filtro sobre S.
3. Dada una $\subseteq$-cadena $\mathcal{F}$ de filtros sobre S, entonces $\bigcup \mathcal{F}$ es un filtro sobre S.

[1]Esto denota la familia de todos los subconjuntos finitos de S.

4. Dado $G \subseteq \mathcal{P}(S)$ con PIF, entonces existe un filtro que le contiene.

Demostración: Probaremos la última. Definimos F como el subconjunto de $\mathcal{P}(S)$ tal que sus elementos contienen a alguna intersección finita de elementos de G y es fácil probar que F es un filtro y de hecho el mínimo que contiene a G. □

La importancia del 1 y el 2 es que los filtros tienen mínimo y máximo respecto de la inclusión.

Teorema (AE) 3.12 – *Teorema del ultrafiltro (TUF)*: Todo filtro está contenido en un ultrafiltro.

§3.1.1 Convergencia de filtros en espacios. Para poder asociar la continuidad entre funciones con la de sucesiones hay un vacío que llenar, y es el AEN el que suele completar el agujero; sin embargo, ya se ha hecho hincapié de que es recomendable prescindir del axioma de elección y todas sus formas débiles, los filtros nos son útiles pues pueden servir como un sustituto a las sucesiones sin emplear elecciones.

Definición 3.13: $\mathcal{B}$ es una *base de filtro* si:

1. $\varnothing \notin \mathcal{B}$.
2. Para todo $A, B \in \mathcal{B}$ existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subseteq A \cap B$.

Como toda base de filtro posee la PIF, entonces se extiende a un filtro en cualquier espacio prefijado (que contenga todos los conjuntos de $\mathcal{B}$, claro).

Se dice que un filtro sobre un espacio topológico converge a x si todo entorno de x está contenido en el filtro. Una base de filtro converge a x si su mínima extensión converge a x. La misma notación de límites para las redes se aplica.

Se dice que un punto x es adherente a un filtro F si se cumple que

$$x \in \bigcap_{A \in F} \overline{A}.$$

Es decir, si todo entorno de x corta a todo elemento del filtro.

Por definición podemos decir que una base de filtro converge a x syss todo entorno de x contiene un elemento de la base.

Proposición 3.14: Dada una base de filtro $\mathcal{B}$, entonces $\lim \mathcal{B}$ es cerrado.

Demostración: Sea x de adherencia a $\lim \mathcal{B}$, eso quiere decir que todo entorno de x corta a $\lim \mathcal{B}$, en particular todo entorno abierto U_x lo hace. Supongamos que $y \in U_x \cap \lim \mathcal{B}$, como $\mathcal{B}$ converge a y, entonces todo entorno abierto V tiene algún elemento de la base. Pero U_v es abierto, luego es entorno de y, luego contiene a algún elemento de $\mathcal{B}$, luego $x \in \lim \mathcal{B}$. □

Teorema 3.15: Un espacio es de Hausdorff syss toda base de filtro tiene a lo más un punto límite.

Proposición 3.16: Un punto x es adherente a A syss existe una base de filtro en A que converge a x.

Sean F_1, F_2 filtros tales que $F_1 \subseteq F_2$ entonces se dice que F_2 es un *refinamiento* de F_1.

Proposición 3.17: Se cumple:

1. Un punto adherente al refinamiento de un filtro es adherente al original.
2. Un punto límite de un filtro lo es de todo refinamiento suyo.
3. Un punto adherente a un filtro es límite de un refinamiento suyo.

Definición 3.18 – *Imagen de un filtro*: Sea $f : X \to Y$ y F un filtro sobre X, entonces llamamos imagen del filtro $f[F] := \{A \subseteq Y : f^{-1}[A] \in F\}$.

Esta definición "extraña" se debe a que de esta forma la imagen de un filtro es también un filtro, y porque:

Teorema 3.19: Una aplicación es continua en $x \in X$ syss para todo filtro F tal que $x \in \lim F$ entonces $f(x) \in \lim f[F]$. Asimismo, f es continua si para todo filtro se cumple

$$f[\lim F] \subseteq \lim f[F].$$

Demostración: $\implies$. Como f es continua, entonces si U es un entorno de $f(x)$ entonces $f^{-1}[U]$ lo es de x, ergo $U \in f[F]$, por ende $f(x) \in \lim f[F]$.

$\Longleftarrow$. Lo haremos por contrarrecíproca. Sea f discontinua en x, ergo, hay algún entorno U de $f(x)$ tal que $f^{-1}[U]$ no es un entorno de x. Entonces sea F el filtro de todos los entornos de x, claramente F converge a x, no obstante $f[F]$ no converge a $f(x)$ pues U en un entorno de $f(x)$ que no pertenece a $f[F]$. □

3.2. Espacios compactos

Definición 3.20 – *Espacio compacto*: Dado un subconjunto $A \subseteq X$ decimos que un *cubrimiento abierto* es un subconjunto de la topología $\mathcal{S} \subseteq \tau$ tal que

$$A \subseteq \bigcup \mathcal{S}.$$

Un subcubrimiento abierto es un subconjunto de $\mathcal{S}$ que también satisface ser un cubrimiento abierto. Decimos que A es compacto si todo cubrimiento abierto de A admite un sub-cubrimiento finito.

Ejemplos de espacios compactos lo son el vacío, todo espacio finito y todo espacio indiscreto. Pruebe que todo espacio discreto es compacto syss es finito.

Teorema 3.21: Un espacio es compacto syss toda familia de cerrados con PIF tiene intersección total no vacía.

Demostración: $\Longrightarrow$. Se hace por contradicción. Supongamos que el espacio es compacto y la intersección de dicha familia $\{F_i\}_{i\in I}$ es vacía, luego definiendo $U_i := F_i^c$ se consigue una familia de abiertos tal que

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} F_i^c = \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)^c = \varnothing^c = X.$$

Es decir, $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de X, ergo, admite un subcubrimiento finito $\{U_{n_i}\}_{i=0}^N$ tal que $\bigcap_{i=0}^N F_{n_i} = \varnothing$, contradiciendo el que la familia poseía la PIF.

$\Longleftarrow$. Es análogo. □

Teorema 3.22: Todo espacio es compacto syss todo filtro tiene un punto adherente.

Teorema 3.23: Se cumple:

1. Todo subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.
2. Todo subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.

Demostración: 1. Basta aplicar la equivalencia con la PIF.

2. Sea $K \subseteq X$ compacto en X de Hausdorff. Luego basta probar que K^c es abierto y sabemos que eso se da syss es entorno de todos sus puntos. Sea $x \in K^c$, luego sean $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos tales que son disjuntos a algún entorno abierto de x; notemos que $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de K por definición de T_2, ergo, admite un subcubrimiento abierto. Por definición de los U_i existen V_i entornos de x disjuntos a los U_i resp. Luego $x \in \bigcap_{i=0}^{N} V_i \subseteq K^c$, ergo, K^c es entorno de x.

□

Corolario 3.24: La unión finita de cerrados es compacta syss todos los sumandos lo son.

Definición 3.25 – *Relativamente compacto*: Decimos que un conjunto A es relativamente compacto si $\overline{A}$ es compacto.

Teorema 3.26: La imagen continua de un compacto es compacta.

Corolario 3.27: Toda función continua desde un espacio compacto hacia un espacio de Hausdorff es cerrada. En consecuencia, si la función es además biyectiva, entonces es un homeomorfismo.

Proposición 3.28: En un espacio métrico todo subespacio compacto es cerrado y acotado.

El recíproco no es cierto. Recordemos que un espacio discreto puede inducir su topología por la métrica discreta, bajo la cual todo conjunto es cerrado y acotado, no obstante, si el conjunto es infinito es fácil probar que no es compacto.

Ejemplo. Sea $E \subseteq \operatorname{Func}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ el espacio de sucesiones acotadas con la métrica d tal que

$$d((x_i), (y_i)) := \sup\{|x_i - y_i| : i \in \mathbb{N}\}$$

de forma que E es métrico. Notemos que $[0,1]^{\mathbb{N}}$ es cerrado y es acotado (pues posee diámetro 1), sin embargo, no es compacto. Para ello basta notar que el producto de los $C_{i,j}$ con j fijo donde

$$C_{i,j} := \begin{cases} [0,1], & i = j \\ (1/3, 2/3), & i \neq j \end{cases}$$

forman un cubrimiento abierto sin subcubrimientos finitos.

Teorema 3.29 – *Teorema de Heine-Borel*: En $\mathbb{R}$ todo subespacio cerrado y acotado es compacto.

Demostración: Todo subespacio cerrado y acotado está contenido en un intervalo cerrado y acotado, así que probaremos que éstos son compactos, y de hecho como todos son homeomorfos basta con $[0,1]$: Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de $[0,1]$, luego sea

$$t := \sup\{x \in [0,1] : [0,x] \text{ tiene subcubrimiento finito de } \mathcal{U}\}.$$

Si $t \neq 1$, entonces para todo $\epsilon > 0$ se cumpliría que $[0, t + \epsilon]$ no tiene subcubrimiento finito. Como $t \in \bigcup \mathcal{U}$, existe $U_t \in \mathcal{U}$ y un $\epsilon > 0$ tal que $(t - 2\epsilon, t + 2\epsilon) \subseteq U_t$, luego, por definición existe un subcubrimiento finito $\{U_1, \dots, U_n\} \subseteq \mathcal{U}$ que cubre a $[0, t-\epsilon]$ y claramente $[0, t+\epsilon] \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_k \cup U_t$; en conclusión $t = 1$ como se quería probar. □

Después veremos que el teorema se extiende a subespacios cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$.

Lema 3.30: Sea A un subespacio compacto de un espacio regular y B un cerrado disjunto de él, entonces ambos conjuntos admiten entornos disjuntos. Si el espacio es de Hausdorff y B es compacto, entonces también se cumple.

Demostración: Para todo $x \in A$ elijamos U_x y V_x de tal forma que son entornos abiertos disjuntos de x y B resp. Luego, $A \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x$, i.e., $\{U_x\}_{x \in A}$ es un cubrimiento abierto. Por compacidad de A se cumple que admite un subcubrimiento finito tal que $A \subseteq \bigcup_{i=0}^n U_i =: U$ donde U es abierto por definición. Por otro lado, $B \subseteq \bigcap_{i=0}^n V_i =: V$ que también es abierto.

Para demostrar el caso cuando es de Hausdorff se comienza por considerar B un conjunto singular para obtener el caso particular de que un compacto y un punto fuera de él admiten entornos disjuntos para luego generalizar al enunciado. □

Observación. En la demostración evidentemente se utiliza AE, pero puede ser erradicado de la siguiente manera: Se considera primero el conjunto de los entornos de puntos de A y mediante él extraemos el subconjunto de entornos que son disjuntos a algún entorno de B, con él formamos un cubrimiento abierto y extraemos el subcubrimiento finito, luego la aplicación de elección para elegir los entornos de B disjuntos es válida pues basta aplicar finitas elecciones.

Teorema 3.31: Todo espacio de Hausdorff compacto es normal.

Teorema 3.32: $\bigoplus_{i\in I} X_i$ es compacto con $X_i \neq \varnothing$ syss los X_i son compactos e I es finito.

Demostración: $\Longrightarrow$. Basta notar que los X_i son cerrados, luego compactos. I es finito pues de lo contrario $\{X_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto sin subcubrimiento finito contradiciendo la compacidad de la suma.

$\Longleftarrow$. La unión finita de compactos es compacta. □

§3.2.1 Compacidad y elección. El AE tiene muchísimas equivalencias comprobadas, dentro de las cuales hay varias "selectas", como el Lema de Zorn, el teorema del buen orden y el teorema de Tychonoff. Esto no debe de ser sorpresa para el lector pues usualmente teoremas relacionados con productos infinitos y sucesiones suelen estar estrictamente relacionados al AE o a una de sus equivalencias. Si usted asume AE puede evitar esta subsección, de lo contrario la recomiendo pues me parece igualmente interesante.

Definición 3.33 – *Cubos*: Se le llama κ-cubo de Tychonoff, Cantor y Alexandroff a los espacios producto $[0,1]^\kappa$, $D(2)^\kappa$ y F^κ resp., donde F es el espacio de Sierpiński. Al $\aleph_0$-cubo de Tychonoff y de Cantor se le dicen cubo de Hilbert y conjunto de Cantor resp.

Definición 3.34: Se dice que un espacio topológico es:

Ultrafiltro-compacto o UF-compacto si todo ultrafiltro en él converge.

Tychonoff-compacto o T-compacto si es homeomorfo a un subespacio cerrado de un cubo de Tychonoff.

Está claro que los cubos de Cantor son T-compactos, y en general, cualquier producto de espacios finitos es T-compacto, pero ni siquiera sabemos si los cubos de Tychonoff son compactos sin AE.

Proposición 3.35: Todo espacio compacto es UF-compacto.

Lema 3.36: El producto de espacios de Hausdorff UF-compactos es UF-compacto.

Demostración: Sean $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios de Hausdorff UF-compactos. Luego sea U un ultrafiltro sobre $\prod_{i\in I} X_i$, notemos que $\pi_i[U]$ es un ultrafiltro, luego converge y como los X_i son de Hausdorff posee un único límite. Finalmente definamos $\vec{x} := (\lim \pi_i[U])_{i\in I}$, es fácil comprobar que U converge a $\vec{x}$. □

Teorema 3.37: Son equivalentes:

1. **Teorema de los ideales primos**.
2. **TUF**.
3. Todo espacio UF-compacto es compacto.
4. Producto de compactos de Hausdorff es compacto.
5. Producto de espacios discretos finitos es compacto.
6. Producto de espacios finitos es compacto.
7. Los cubos de Tychonoff son compactos.
8. Los cubos de Cantor son compactos.

Demostración: Las implicaciones triviales son (1) $\implies$ (2) y (3) $\implies$ (4) $\implies$ (7) $\implies$ (6) $\implies$ (5) $\implies$ (8).

(2) $\implies$ (3). Sea X UF-compacto, sabemos que es compacto syss todo filtro posee un punto adherente, sea F un filtro, por TUF está contenido en un ultrafiltro U que converge por ser UF-compacto, luego un punto límite de U es adherente a F.

(5) $\implies$ (1). Notemos que probar que todo ideal está contenido en un ideal primo es equivalente a probar que todo filtro está contenido en un ultrafiltro, así que probaremos la segunda.

Sea $\mathbb{B}$ un álgebra booleana, y llamemos $\mathcal{F}$ al conjunto de todas las subálgebras booleanas finitas de $\mathbb{B}$. Para todo $A \in \mathcal{F}$, denotaremos X_A el conjunto de morfismos de Boole de A a $D(2) := \{0,1\}$; X_A es siempre no vacío, pues todo álgebra finita admite ultrafiltros, ergo, podemos formar un morfismo considerando a los elementos que pertenecen y los que no a tal. Luego podemos considerar los X_A como espacios discretos, de manera que $\prod_{A\in\mathcal{F}} X_A$ es no vacío y compacto. Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$, entonces definimos

$$C(A,B) := \{(x_C)_{C\in\mathcal{F}} \in X : x_A = x_B|_A\},$$

es decir, es el conjunto de morfismos cualesquiera en donde sólo se requiere que el morfismo de A a $D(2)$ sea la restricción del de B. Se cumple que todos los $C(A,B)$ son cerrados y el conjunto de todos ellos tiene la PIF. Como X es compacto, la intersección de ellos es no vacía y contiene a algún $\vec{x} := (x_C)_{C\in\mathcal{F}}$ (recuerde, cada coordenada es un morfismo), que cumple que para todo $A \subseteq B \in \mathcal{F}$ se da que $\vec{x}_A = \vec{x}_B|_A$. Finalmente definimos $f : \mathbb{B} \to D(2)$ como $f(a) := \vec{x}_{\langle a\rangle}(a)$, y se puede notar que es un morfismo de álgebras (¿por qué?), luego $f^{-1}(0)$ es un ideal primo.

(8) $\implies$ (5). En primer lugar queremos ver si cualquier espacio discreto finito está inmerso en un cubo de Cantor de forma canónica (sin uso de elecciones me refiero), para ello éste será el método, definamos $f_i : X_i \to D(2)^{\operatorname{Func}(X_i;D(2))}$ de la siguiente manera, la imagen de todo $f_i(y)$ con $y \in X_i$ es una función de dominio $\operatorname{Func}(X_i; D(2))$ y codominio $D(2)$, por ende, para todo $F \in \operatorname{Func}(X_i; D(2))$ se define

$$(f_i(y))(F) := F(y) \in D(2)$$

Luego, es claro que f_i es una inmersión, por ende,

$$\prod_i f_i : \prod_{i\in I} X_i \to \prod_i D(2)^{\operatorname{Func}(X_i;D(2))} \cong D(2)^{\coprod_i \operatorname{Func}(X_i;D(2))}.$$

Es decir, todo producto de espacios discretos finitos está inmerso en un cubo de Cantor, luego si éstos últimos son compactos, el producto de espacios discretos finitos también. □

Teorema 3.38: Son equivalentes:

Axioma de Elección

Teorema de Tychonoff El producto de espacios no vacíos es compacto syss los factores lo son.

Demostración: AE $\implies$ TT. Por AE el producto es no vacío y como AE $\implies$ TUF lo que equivale a que todo espacio UF-compacto es compacto, así que basta probar que el producto de UF-compactos es UF-compacto. Sea U un ultrafiltro del producto, ya hemos probado que $\pi_i[U]$ es también un ultrafiltro y como los factores son UF-compactos, entonces $\operatorname{lím} \pi_i[U]$ es no vacío, luego sea $x_i \in \operatorname{lím} \pi_i[U]$. Finalmente $\vec{x} := (x_i)_{i\in I}$ es un punto de adherencia de U, donde usamos AE para armar $\vec{x}$.

TT $\implies$ AE. Sean $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos no vacíos. Sea ∞ un punto cualquiera que no pertenezca a $\bigcup_{i\in I} X_i$, entonces definimos el espacio topológico $Y_i := X_i \cup \{\infty\}$ con la topología $\{\varnothing, \{\infty\}, Y_i\}$, de manera que todo Y_i es compacto. Definamos $Y := \prod_{i\in I} Y_i$ que es compacto por el teorema de Tychonoff y no vacío pues $(\infty)_{i\in I}$ es un elemento de Y. Como X_i es cerrado en Y_i por definición, entonces $Z_i := \pi_i^{-1}[X_i]$ es cerrado en Y y $\{Z_i : i \in I\}$ es una familia de cerrados de Y con la PIF, luego $\bigcap_{i\in I}\{Z_i : i \in I\} = \prod_{i\in I} X_i$ es no vacío. □

Teorema 3.39: El producto finito de espacios es compacto syss los factores lo son.

Demostración: Una implicancia es trivial, para la otra la haremos por inducción probando que el producto de dos espacios compactos es compacto. □

Una consecuencia que hemos visto es que basta con el TUF para probar que los cubos de Tychonoff son compactos, pero notemos que cubos finitos ya lo son sin necesidad de elección y de hecho:

Teorema 3.40: El cubo de Hilbert es compacto. En consecuencia, el conjunto de Cantor también.

Demostración: Basta probar que todo filtro tiene un punto adherente. Sea F un filtro de $[0,1]^{\mathbb{N}}$, luego construiremos una sucesión de puntos y de filtros por recursión como prosigue:

x_0 es el mínimo punto de acumulación del filtro $\{G : \pi_0^{-1}[G] \in F\}$ sobre $[0,1]$ (pues el conjunto de puntos de acumulación es cerrado, y como $[0,1]$ es compacto, entonces está acotado). Se define $F_0 := F \cup \{\pi_0^{-1}[U] : U \in \mathcal{B}(x_0)\}$.

x_{n+1} es el mínimo punto de acumulación del filtro $\{G : \pi_{n+1}^{-1}[G] \in F_n\}$ sobre $[0,1]$. Se define $F_{n+1} := F_n \cup \{\pi_{n+1}^{-1}[U] : U \in \mathcal{B}(x_{n+1})\}$.

Luego $\vec{x} := (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es de acumulación en $\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$ □

3.3. Otros tipos de compacidad

Definición 3.41 – *Espacios localmente compactos*: Se dice que un espacio es *localmente compacto* si todo punto tiene una base de entornos compactos. Se dice *débil-localmente compacto* si todo punto admite un entorno compacto.

Proposición 3.42: Se cumple:

1. Todo espacio localmente compacto es débil-localmente compacto.
2. Todo espacio débil-localmente compacto de Hausdorff es localmente compacto.

Corolario 3.43: Todo espacio de Hausdorff compacto es localmente compacto.

Ejemplo. $\mathbb{R}$ es un espacio localmente compacto de Hausdorff que no es compacto.

Teorema 3.44: Todo espacio localmente compacto de Hausdorff es de Tychonoff.

Demostración: Sea C un cerrado y $x \notin C$. Como el espacio es localmente compacto, x posee un entorno abierto U cuya clausura $\overline{U}$ es compacta. Luego definimos $D := (\overline{U} \setminus U) \cup (\overline{U} \cap C)$ y D resulta ser cerrado en $\overline{U}$ y ser disjunto a $\{x\}$ también cerrado. Como todo espacio compacto de Hausdorff es normal, entonces existe $f_1 : \overline{U} \to [0,1]$ tal que $f_1(x) = 0$ y $f_1[C] = \{1\}$. Notemos que la función constante $f_2 : U^c \to [0,1]$ dada por $f_2(x) = 1$ también es continua en X. Finalmente, como f_1 y f_2 son compatibles (¿por qué?), entonces $f_1 \cup f_2$ es función y hemos probado que es continua por que sus sumandos lo son, que es lo que se quería probar. □

Teorema 3.45: Si X es localmente compacto:

1. Todo subespacio de la forma $A \cap C$ con A abierto y C cerrado es localmente compacto.

2. Si X es de Hausdorff, entonces todo subespacio localmente compacto es de la forma $A \cap C$ con A abierto y C cerrado.

Demostración: 1. Basta probar que ser localmente compacto es hereditario a conjuntos abiertos y cerrados...

2. Sea Y un subespacio localmente compacto, entonces con $C := \overline{Y}$ basta probar que existe A abierto tal que $Y = A \cap C$. Para ello, nos basta probar que todo subespacio localmente compacto denso es abierto.

   Sea Y localmente compacto y denso en X y sea $y \in Y$. Por definición, existe un entorno U abierto de y tal que $Y \cap \overline{U}$ es compacto en Y, luego en X, luego es cerrada. Por ende, $\overline{U} \subseteq \overline{U} \cap Y = Y$. Como U es abierto en Y, existe un abierto V en X tal que $U = V \cap Y$, luego

$$y \in V \subseteq \overline{V} = \overline{U} \cap Y \subseteq Y,$$

   ergo, Y es entorno de y, luego Y es abierto.

□

Definición 3.46: Se dice que un espacio es *numerablemente compacto* si todo cubrimiento abierto numerable posee un subcubrimiento finito.

Teorema 3.47: Se cumple:

1. Un espacio es numerablemente compacto syss toda familia numerable de cerrados con la PIF tiene intersección total no vacía.
2. Todo cerrado en un espacio numerablemente compacto es numerablemente compacto.
3. La imagen continua de un espacio numerablemente compacto es numerablemente compacto.

Definición 3.48: Un punto x es de ω-acumulación de un conjunto infinito S si todo entorno de x corta a $S \setminus \{x\}$ en infinitos puntos.

Se dice que un espacio es:

Weierstrass compacto Si todo conjunto infinito posee un punto de ω-acumulación.

Débil-Weierstrass compacto Si todo conjunto infinito posee un punto de acumulación.

Proposición 3.49: Dado un espacio T_1 y un subconjunto infinito A se cumple que todo punto es de acumulación de A syss es de ω-acumulación. En consecuente todo espacio T_1 débil-Weierstrass compacto es Weierstrass compacto.

Demostración: Sea x de acumulación de A, por definición todo entorno U de x interseca a A, supongamos que lo hace en finitos puntos $F := \{x_1, \dots, x_n\}$, luego como los puntos son cerrados se concluye que F es cerrado, luego $U \cap F^c$ es un entorno de x que no interseca a A, lo que es absurdo. □

Definición 3.50: Se dice que un espacio es:

Débil-secuencialmente compacto Si toda sucesión posee un punto de acumulación.

Secuencialmente compacto Si toda sucesión posee una subsucesión convergente.

Totalmente acotado Si es pseudo-métrico y para todo $r > 0$ existe un conjunto finito F tal que para todo $x \in X$ existe $y \in F$ tal que $d(x, y) < r$.

Proposición 3.51: Un espacio 1AN es débil-secuencialmente compacto syss es secuencialmente compacto.

Proposición 3.52: Entre espacios se cumple que:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Weierstrass} \arrow[dr] & \\
\text{Compacto} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{Débil-secuencialmente} \\
 & \text{Numerablemente} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Entre espacios métricos:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Compacto} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\text{Numerablemente} \arrow[dr] & \text{Weierstrass} \arrow[d] & \text{Tot. acotado y completo} \arrow[dl] \\
 & \text{Secuencialmente} \arrow[r] & \text{Completo}
\end{tikzcd}$$

Demostración: Compacto $\implies$ Weierstras compacto. Sea A infinito, entonces $\{\overline{A \setminus F} : F \subseteq A \wedge F \text{ finito}\}$ es una familia de cerrados con la PIF, luego x es un elemento de la intersección, lo que quiere decir que x es de adherencia a cada $A \setminus F$, luego todo entorno de x les interseca, pero no puede ser en finitos puntos, de lo contrario $A \setminus (A \setminus F \cap U)$ no interseca a un entorno de x lo que sería contradictorio.

Compacto $\implies$ totalmente acotado y completo. Dado $r > 0$ es claro que $\{B_r(x)\}_{x \in X}$ es un cubrimiento abierto, luego posee un subcubrimiento finito cuyos centros conforman F. Para ver que es completo, basta notar que todo compacto es débil-secuencialmente compacto, como todo espacio pseudométrico es 1AN, entonces es secuencialmente compacto, y si una sucesión de Cauchy posee una subsucesión convergente entonces la original también lo es. □

Notemos que como $\mathbb{Q}$ y todo subespacio infinito de él no es completo, entonces todo subespacio infinito de $\mathbb{Q}$ no es compacto.

Ejemplo. Sea $X := [0,1]^{[0,1]}$, es decir, el $\mathfrak{c}$-cubo de Tychonoff.

1. X es de Hausdorff y si admitimos TUF entonces cumple ser compacto.

2. X no es secuencialmente compacto: Sea $\alpha_n : [0,1] \to [0,1]$ la función que mapea al n-ésimo dígito de la expansión binaria de x, si tuviera una subsucesión convergente α_{n_k} tendría que darse que convergiése puntualmente, pero es fácil notar que siempre existe un punto $p \in [0,1]$ tal que $\alpha_{n_k}(p) = k \mod 2$ y dicha sucesión diverge, por lo tanto, X no es secuencialmente compacto.

3. Como X es compacto pero no secuencialmente compacto se concluye que no es 1AN, luego tampoco es 2AN, pero sí es separable.

4. Como X es de Hausdorff compacto, entonces es normal. Sin embargo, X no es completamente normal: Sea $A := \{1/n : n \in \mathbb{N}_{\neq 0}\}$, luego $A^{[0,1]}$ es subespacio de X que es homeomorfo a $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ que hemos probado que no es normal.

Teorema (AEN) 3.53: Un espacio es numerablemente compacto syss Weierstrass compacto.

Demostración: Por AEN todo conjunto infinito contiene un conjunto numerable, luego es fácil adaptar la demostración previa para ver que el subconjunto numerable posee un punto de ω-acumulación.

Weierstrass $\implies$ numerablementecompacto. Lo haremos por contrarrecíproca. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de cerrados con la PIF pero con intersección total vacía, luego podemos definir $B_k := \bigcap_{i=0}^k F_i$ que comparte las mismas propiedades. Sea x_i un elemento elegido de B_i, y $C := \{x_i\}_{i=0}^\infty$, veremos que C no posee un punto de ω-acumulación. En efecto, supongamos que y lo fuera en C, luego todo entorno de y contiene infinitos puntos de C, en particular, todo entorno de y corta a todo B_k, pues B_k contiene a toda la subsucesión $\{x_i\}_{i=k}^\infty$, luego y es adherente a todo B_k, en sintesis, $y \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k$, lo que es absurdo. □

Teorema (AEN) 3.54: Si X es un espacio pseudo-métrico, entonces son equivalentes:

1. X es compacto.
2. X es numerablemente compacto.
3. X es Weierstrass compacto.
4. X es totalmente acotado y completo.
5. X es secuencialmente compacto.

Demostración: Por la proposición anterior basta probar que ser secuencialmente compacto implica ser compacto. Para ello primero probaremos que

Secuencialmente compacto $\implies$ totalmente acotado y completo. Sólo basta probar que es totalmente acotado, lo que haremos por contrarrecíproca. Si X no fuera totalmente acotado, existiría un real $r > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ se cumple que

$$X_n := \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : \forall i \neq j\ (d(x_i, x_j) \geq r)\}$$

es no vacío, luego por AEN se cumple que existe un $\vec{x} \in \prod_{n=1}^\infty X_n$. Definamos $(y_i)_{i=1}^\infty$ como la sucesión dada por la unión de cada sucesión finita de $\vec{x}$. Después, definimos una subsucesión y_{n_i} por recursión de modo que $y_{n_1} := y_1$ y $y_{n_{i+1}}$ sea el primer y_k con $k > n_i$ tal que esté a distancia mayor o igual a

$r/2$ de los y_{n_i}. Este $y_{n_{i+1}}$ siempre existe, pues de lo contrario, bastaría con considerar una parte de la sucesión de $i+1$ términos todos a distancia mayor que r de si mismos y ver que por principio del palomar habrían al menos dos términos a menos de $r/2$ de un mismo y_{n_k}, luego

$$r < d(y_i, y_j) \leq d(y_i, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y_j) \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

lo que sería absurdo.

Finalmente, dado que $(y_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que todos sus términos están a distancia $\geq r/2$, entonces no posee subsucesiones de Cauchy, luego todas divergen. Luego X no es secuencialmente compacto.

Totalmente acotado y completo $\implies$ compacto. Lo haremos por contradicción. Sea X totalmente acotado, completo, pero no compacto, de modo que existe un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ sin subcubrimiento finito. Luego, si definimos

$$X_n := \{(x_1, \dots, x_m) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} X^k : X = \bigcup_{i=1}^{m} B_{1/n}(x_i)\}$$

podemos ver que cada X_n es no vacío, por ser totalmente acotado, luego por AEN existe $(y_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, donde cada y_n es una sucesión finita $(x_{n,1}; \dots; x_{n,m})$.

Defina $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ por recursión como prosigue:
z_1 es el $x_{1,i}$ donde i es el primer índice tal que ningún subcubrimiento finito de $\mathcal{U}$ cubre a $B_1(x_{1,i})$.
z_{n+1} es el $x_{n+1,i}$ donde i es el primer índice tal que ningún subcubrimiento finito de $\mathcal{U}$ cubre a $B_{1/(n+1)}(x_{n+1,i}) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{1/j}(z_j)$.

De este modo, z_i resulta ser de Cauchy, luego converge a algún z. Como $z \in X = \bigcup \mathcal{U}$, entonces $z \in U \in \mathcal{U}$, luego como U es entorno de z, existe $n \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ tal que $B_{1/n}(z) \subseteq U$ lo que es absurdo. □

Definición 3.55: Dado un espacio X llamaremos su *número de Lindelöf*, denotado $L(X)$, como el mínimo cardinal κ tal que todo cubrimiento abierto de X posee un subcubrimiento de cardinal $\leq \kappa$.

Un espacio X tal que $L(X) = \aleph_0$ (es decir, tal que todo cubrimiento abierto posea un subcubrimiento numerable) se le dice un *espacio de Lindelöf*.

Proposición 3.56: Un espacio es compacto syss es de Lindelöf y numerablemente compacto.

Proposición 3.57: Si F es un cerrado en X, entonces $L(F) \leq L(X)$. En particular, todo subespacio cerrado de un espacio de Lindelöf es de Lindelöf.

Teorema (AE) 3.58: Entre espacios topológicos se cumple que $L(X) \leq w(X)$.

Demostración: Sea $\mathcal{B}$ una base X de cardinal $w(X)$ y sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos que cubre a X. Definamos

$$\mathcal{B}_0 := \{B \in \mathcal{B} : \exists i \in I \ (B \subseteq U_i)\}.$$

Sea $s : \mathcal{B}_0 \to I$ una función de elección tal que para todo $B \in \mathcal{B}_0$ cumpla que $B \subseteq U_{s(B)}$ y definamos $I_0 := \operatorname{Img} s$.

En primer lugar notemos que $|I_0| \leq |\mathcal{B}_0| \leq |\mathcal{B}| = w(X)$, y en segundo lugar veamos que $\bigcup_{i\in I_0} U_i = X$. Para ello, sea $x \in X$, luego existe $i \in I$ tal que $x \in U_i$, como U_i es abierto existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U_i$, luego $B \in \mathcal{B}_0$ y por ende

$$x \in B \subseteq U_{s(B)} \subseteq \bigcup_{i\in I_0} U_i,$$

como se quería probar. □

Corolario (AEN) 3.59: Todo espacio 2AN es de Lindelöf. Es más, todo espacio 2AN es hereditariamente de Lindelöf.

El siguiente teorema utiliza varios conceptos de la aritmética cardinal:

Teorema (AE) 3.60 (Arkhangel'skiĭ): Si X es de Hausdorff y $\kappa := L(X) + \chi(X) \geq \aleph_0$, entonces $|X| \leq 2^\kappa$.

Demostración: Para todo x sea $\mathcal{B}(x)$ una base de entornos de cardinal $\leq \kappa$ y sea $F : \kappa^+ \to \mathcal{P}(X)$ una sucesión definida por recursión transfinita como prosigue:
$F_0 := \{x\}$ para algún $x \in X$ cualquiera.
Si F_α está definido, sea $\mathcal{B}_\alpha := \bigcup_{x\in F_\alpha} \mathcal{B}(x)$, claramente $\mathcal{B}_\alpha$ es un cubrimiento abierto de F_α, luego posee un subcubrimiento abierto $\mathcal{U}$ y si tal subcubrimiento no cubre a X, entonces denotamos por $x_\mathcal{U}$ a un elemento cualquiera de $X \setminus \bigcup \mathcal{U}$. Finalmente $F_{\alpha+1}$ es la clausura de F_α unido a los $x_\mathcal{U}$ para todo subcubrimiento $\mathcal{U}$ de cardinal κ.
Si λ es límite, entonces $F_\lambda := \overline{\bigcup_{\delta<\lambda} F_\delta}$.

Por recursión transfinita se prueba que todo F_α tiene cardinal $\leq 2^\kappa$: F_0 es trivial. Si $|F_\alpha| \leq 2^\kappa$, por construcción para todo x se cumple que $|\mathcal{B}(x)| \leq \kappa$, luego $|\mathcal{B}_\alpha| \leq \sum_{x\in F_\alpha} \kappa \leq \kappa \cdot 2^\kappa = 2^\kappa$. Por aritmética cardinal $|[\mathcal{B}_\alpha]^\kappa| = |\mathcal{B}_\alpha|^\kappa \leq 2^\kappa$ luego $F_{\alpha+1}$ es la clausura de la unión de dos conjuntos de cardinal $\leq 2^\kappa$, luego tiene cardinal $\leq 2^\kappa$ Si $|F_\delta| \leq 2^\kappa$ con $\delta < \lambda$, entonces $|F_\lambda| \leq |\lambda| \cdot 2^\kappa \leq \kappa^+ \cdot 2^\kappa = 2^\kappa$. Sea $F := \bigcup_{\alpha<\kappa^+} F_\alpha$, entonces también tiene cardinal a lo más 2^κ.

F **es cerrado:** Sea $x \notin F$, entonces sea $\mathcal{B}(x) := \{U_\gamma : \gamma < \kappa\}$ (pues $\kappa \geq \chi(X)$), luego para todo $\alpha < \kappa^+$ sea $n(\alpha) := \min\{\gamma < \kappa : U_\gamma \cap F_\alpha = \varnothing\}$. Notemos que el codominio de n es κ y el dominio es κ^+, luego debe haber algún subconjunto S de κ^+ de cardinal κ^+ tal que $n[S] = \{\eta\}$, probaremos que U_η no corta a F. Sea $\alpha < \kappa^+$, luego hay a lo más κ ordinales bajo α, ergo, existe $\gamma \in S$ tal que $\alpha \leq \gamma$ y $F_\alpha \cap U_\eta \subseteq F_\gamma \cap U_\eta = \varnothing$. Ergo $x \in U_\eta \subseteq F^c$, lo que es la definición de F cerrado.

Como F es cerrado, entonces existe $\mathcal{V} \subseteq \bigcup_{x\in X} \mathcal{B}(x)$ tal que $|\mathcal{V}| \leq \kappa$ (pues $\kappa \geq L(X)$) y que cubre a F. $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}_\alpha$ **para algún** $\alpha < \kappa^+$**:** Para todo $V_\gamma \in \mathcal{V}$ sea $\nu(\gamma)$ el mínimo ordinal tal que $V_\gamma \in \mathcal{B}_{\nu(\gamma)}$. Luego, sea $\nu := \lim_{\gamma\to\kappa} \nu(\gamma)$ que de hecho cumple que $\nu < \kappa^+$ pues todo cardinal sucesor es regular. Ergo $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}_\nu$.

$\mathcal{V}$ **es un cubrimiento de** X**:** Notemos que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}_\nu$ cubre a F_ν, tiene cardinal $\leq \kappa$ y no cubre a X, luego agregamos $x_\mathcal{V} \in F_{\nu+1} \subseteq F$, pero luego, por definición, $x \in F \setminus \bigcup \mathcal{V}$ lo que contradice la construcción de $\mathcal{V}$.

$X = F$**:** En particular hemos probado algo más fuerte antes, que todo subcubrimiento de $\mathcal{B}$ que cubre a F también cubre a X. Por contradicción, sea $p \notin F$, luego como X es de Hausdorff existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $p \notin B$ para todo $x \neq p$, luego sea $\mathcal{U}$ el cubrimiento formado por todos los entornos de puntos de F que no incluyen a p, luego $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de F que no cubre a X, lo que es absurdo.

Como $X = F$ y $|F| \leq 2^\kappa$, entonces se cumple el enunciado. □

Corolario (AEN) 3.61: Si X es de Hausdorff, de Lindelöf y 1AN, entonces $|X| \leq \mathfrak{c}$.

Teorema (AEN) 3.62: La suma de espacios no vacíos es de Lindelöf syss todos los espacios lo son y la suma es a lo más numerable.

Teorema (AEN) 3.63: Todo espacio métrico de Lindelöf es 2AN.

Demostración: Para todo $n \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ llamemos $\mathcal{B}_n$ el subcubrimiento numerable de las bolas de radio $1/n$, luego $\mathcal{B} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_{\neq 0}} \mathcal{B}_n$ es numerable, basta notar que es base. En efecto sea U un abierto, luego como $\mathcal{B}$ incluye básicos de radios arbitrariamente pequeños existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $\operatorname{diam} B < d(x, U^c)$ de modo que $x \in B \subseteq U$. □

Teorema 3.64: Todo espacio regular de Lindelöf es normal.

Demostración: Para ello aplicaremos el lema 2.41 que dice que basta probar que si C es cerrado contenido en un abierto U basta probar que existe una sucesión numerable de abiertos que cubren a C y cuya clausura está contenida en U. Para demostrarlo usaremos una propiedad del teorema 2.36 que dice que para todo $x \in C$ existe U_x abierto tal que $U_x \subseteq \overline{U}_x \subseteq U$. De este modo $\{U_x\}_{x\in C} \cup \{C^c\}$ es un cubrimiento del espacio, ergo posee un subcubrimiento numerable $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}} \cup \{C^c\}$ y es claro que los U_i's cumplen lo pedido. □

La demostración mostrada usa elección, pero queda al lector erradicar el uso de elección.

3.4. Espacios de funciones

Definición 3.65 – *Convergencia puntual*: Sean X un conjunto arbitrario e Y un espacio topológico, entonces se dice que una sucesión de funciones $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $f_i \in \operatorname{Func}(X, Y)$ converge puntualmente a otra f si para todo $x \in X$ se cumple que $\lim_n f_n(x) = f(x)$, en cuyo caso simplemente escribiremos $f = \lim_n f_n$.

En particular, este comportamiento se replica en la topología producto $\prod_{x\in X} Y = Y^X$, por a éste último le decimos la *topología de convergencia puntual*.

Ejemplo. Consideremos $[0,1]^{\mathbb{R}}$ donde $f_n(x) = x^n$, es fácil probar que el límite puntual $f = \lim_n f_n$ es la función $f(x) = \lfloor x \rfloor$ que es discontinua, es decir, el límite puntual de continuas puede no ser continua. Por éste y muchos otros ejemplos se puede notar que la topología de convergencia puntual otorga poca información en términos de funciones.

Definición 3.66 – *Convergencia uniforme*: Sean X un conjunto arbitrario y M un espacio métrico, entonces se dice que una sucesión de funciones $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge *uniformemente* a otra f si para todo $\epsilon > 0$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ y todo $x \in X$ se cumple que $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$.

Teorema 3.67: Sea $A \subseteq M^X$, entonces definimos $c(A)$ como el conjunto de las funciones $f \in M^X$ tales que existe una sucesión $(f_i)_i$ en A tal que $f = \lim_n f_n$.

La función c cumple las propiedades de una clausura de Kuratowski, luego podemos definir la topología inducida por c como la *topología de la continuidad uniforme en M^X*.

Demostración: Por la definición los dos primeros axiomas de la clausura de Kuratowski se cumplen. También notemos que por definición de c es fácil notar que $A \subseteq B$ implica $c(A) \subseteq c(B)$.

$c(A) = c(c(A))$. Como $A \subseteq c(A)$, es claro que $c(A) \subseteq c(c(A))$, luego basta probar la otra contención. Sea $f \in c(c(A))$, por definición, existe $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $c(A)$ tal que $f = \lim_k f_k$. Vamos a construir una sub-sucesión f_{n_k} tal que para todo $k \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ se cumple que n_k es el primer índice tal que

$$\forall x \in X \ \left(d(f(x), f_{n_k}(x)) < \frac{1}{2k} \right)$$

(que se permite por buen orden de $\mathbb{N}$).

Análogamente, cada $f_j = \lim_k g_{j,k}$ con $g_{j,k} \in A$ y definimos τ_j como la sucesión tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\forall x \in X \ \left(d(f_j(x), g_{j,\tau_j(k)}(x)) < \frac{1}{2k} \right).$$

Finalmente definimos la sucesión $h_k := g_{n_k,\tau_{n_k}(k)}$ sobre A y notamos que

$$\forall x \in X \ \left(d(f(x), h_k(x)) \leq d(f(x), f_{n_k}(x)) + d(f_{n_k}(x), g_{n_k,\tau_{n_k}(k)}(x)) < \frac{1}{k} \right),$$

y por propiedad arquimediana se cumple que $f = \lim_k h_k$.

$c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$. Por contención es claro que $c(A) \cup c(B) \subseteq c(A \cup B)$, luego basta probar la otra contención. Sea $f \in c(A \cup B)$, luego existe una sucesión $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $A \cup B$ tal que $f = \lim_i f_i$, luego esta sucesión debe tener infinitos términos en A o B, digamos que es en A, luego sea f_{n_i} la subsucesión de funciones sobre A. como $f = \lim_i f_{n_i}$, entonces $f \in c(A)$. $\square$

Como la clausura cumple los criterios de Kuratowski, entonces determina una única topología la que le decimos la *de continuidad uniforme en M^X*.

Cabe destacar que la topología de convergencia uniforme es más débil que la topología de convergencia puntual.

Teorema 3.68: El conjunto de funciones continuas $C(X, M)$ es cerrado en la topología de convergencia uniforme, luego toda sucesión continua es uniformemente convergente a una continua.

Demostración: En concreto se demostrará que toda función adherente a $C(X, M)$ es continua. En efecto sea g adherente a $C(X, M)$, para ver que es continua hemos de probar que para todo $x \in X$ y $\epsilon > 0$ se cumple que $f^{-1}[B_\epsilon(x)]$ es entorno de x. Sea f una función continua perteneciente al entorno $B_{\epsilon/3}(g)$ de g, luego por definición, $U_x \subseteq f^{-1}[B_{\epsilon/3}(x)]$, probaremos que $U_x \subseteq g^{-1}[B_\epsilon(x)]$, para lo cual, sea $y \in U_x$, luego

$$d(g(x), g(y)) \leq d(g(x), f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(f(y), g(y)) < \epsilon,$$

que es lo que se quería probar. □

Proposición 3.69: Si Y es métrico, entonces el conjunto de funciones acotadas $(Y^X)^*$ es métrico con

$$d(f, g) := \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\} = \operatorname{diam}(\operatorname{Img} f \cup \operatorname{Img} g),$$

a la que llamamos *métrica de Cebyshev*. En consecuente si Y es de completo, $(Y^X)^*$ también.

Notemos que si X es compacto e Y es métrico, entonces $C(X, Y)^* = C(X, Y)$. Si Y es normado, entonces $(Y^X)^*$ también con $\|f\|_p := \sup(\operatorname{Img}(\|f\|))$, a la que usualmente se le dice *norma de Chebyshev*.

Proposición 3.70 (Teorema de Dini): Sea X compacto y $(f_i)_{i \in I}$ una sucesión de $C(X, \mathbb{R})$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ se cumpla que $f_i(x) \leq f_{i+1}(x)$. Si existe $f \in \operatorname{Func}(X, \mathbb{R})$ tal que para todo $x \in X$ se da que $f(x) = \lim_i f_i(x)$, entonces $f = \lim_i f_i$.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$. Definamos $F_i := \{x : |f(x) - f_i(x)| \geq \epsilon\}$, luego F_i son cerrados pues F_i^c son abiertos (¿por qué?), además $F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$. Por construcción se cumple que $\bigcap_{i=0}^n F_i = \varnothing$, luego no pueden tener la PIF, por ende hay algún F_i que es vacío, que es lo que se quería probar. □

En esta sección usaremos la noción de polinomios funcionales, éstos se asemejan a los comunes pero sus variables son funciones continuas, e.g. $\frac{1}{2}f(x)^3 + g(x)\cdot h(x) + 5$. En general obviaremos el "(x)", por comodidad.

Lema 3.71: Sea $f \in C\big(X, [0,1]\big)$, entonces existe una sucesión de polinomios funcionales tal que convergen uniformemente a $\sqrt{f}$.

Demostración: Vamos a definir recursivamente la sucesión como

$$g_0 := 0, \quad g_{i+1} := g_i + \frac{1}{2}(f - g_i^2).$$

Ahora queremos probar convergencia por teorema de Dini, así que hemos de probar que $g_i(x) \le \sqrt{f}(x)$ para todo i y x, lo haremos por inducción, el caso $i = 0$ es trivial y

$$\sqrt{f} - g_{i+1} = \sqrt{f} - g_i - \frac{1}{2}(f - g_i^2) = (\sqrt{f} - g_i)\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{f} + g_i)\right)$$

dado que $g_i \le \sqrt{f} \le 1$, se da que

$$\sqrt{f} - g_{i+1} \ge (\sqrt{f} - g_i)\left(1 - \frac{1}{2}2\sqrt{f}\right) \ge 0$$

lo que completa la demostración de la desigualdad. Usando que $g_i \le \sqrt{f}$ y la definición de g_i se comprueba que son uniformemente crecientes, luego queda al lector probar que en el límite los g_i se van a $\sqrt{f}$. $\square$

Vemos que el teorema se aplica para el intervalo $[0,1]$, pero si $f \in C(X, \mathbb{R})$ como X es compacto, la imagen ha de ser compacta, luego posee un máximo global M y $\frac{1}{M}f(x)$ está en el intervalo $[0,1]$ y así podemos conseguir la raíz en casos generales.

Definición 3.72: Se dice que una familia $\{f_i\}_{i\in I}$ de funciones de dominio X *separa puntos* si para todo par de puntos distintos $x, y \in X$ existe alguna f_i tal que $f_i(x) \ne f_i(y)$.

Teorema 3.73 – *Teorema de Stone-Weierstrass*: Todo anillo de funciones continuas A que separan puntos y que contiene a las constantes sobre un compacto X es denso en $C(X, \mathbb{R})$.

Demostración: Probaremos que $\overline{A} = C(X, \mathbb{R})$.

Primero notemos que $\text{mín}(f, g)(x) := \text{mín}(f(x), g(x))$ pertenece a $\overline{A}$, pues

$$\text{mín}(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|), \quad \text{máx}(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|),$$

donde $|f| = \sqrt{f^2}$ y vimos que la raíz de toda función positiva-valorada de A pertenece a $\overline{A}$.

Sea $f \in \text{Cont}(X, \mathbb{R})$, queremos probar que para todo $\epsilon > 0$ existe $f_\epsilon \in \overline{A}$ tal que para todo $x \in X$ se cumple que

$$|f(x) - f_\epsilon(x)| < \epsilon.$$

Por construcción para todo $a, b \in X$ existe $h_{a,b} \in A$ tal que $h_{a,b}(a) \neq h_{a,b}(b)$, luego se define $g_{a,b}(x) := \frac{h(x)-h(a)}{h(b)-h(a)} \in A$ tal que $g_{a,b}(a) = 0$ y $g_{a,b}(b) = 1$. Luego, definimos

$$f_{a,b}(x) := (f(b) - f(a))g_{a,b}(x) + f(a) \in A,$$

que cumple que $f_{a,b}(a) = f(a)$ y $f_{a,b}(b) = f(b)$. Luego, definimos

$$U_{a,b} := \{x : f_{a,b}(x) < f(x) + \epsilon\}, \quad V_{a,b} := \{x : f_{a,b}(x) > f(x) - \epsilon\},$$

los cuales resultan ser entornos de a y de b. Luego $(U_{a,b})_{a \in X}$ es un cubrimiento abierto de X, por ende, posee un subcubrimiento abierto finito $(U_{a_i,b})_{i=1}^n$. Notemos que $f_b := \text{mín}(f_{a_i,b})_{i=1}^n \in \overline{A}$ que cumple que $f_b(x) < f(x) + \epsilon$ para todo $x \in X$ y que $f_b(x) > f(x) - \epsilon$ para todo $x \in V_b := \bigcap_{i=1}^n V_{a_i,b}$ donde V_b es entorno de b. Por lo tanto $(V_b)_{b \in X}$ es un cubrimiento abierto de X, por ende, posee un subcubrimiento abierto finito $(V_{b_i})_{i=1}^m$. Finalmente, $f_\epsilon := \text{máx}(f_{b_i})_{i=1}^m$ cumple lo pedido y pertenece a $\overline{A}$.

Como $\overline{A}$ es cerrado y todo entorno de toda función continua corta a A, luego toda función continua es adherente a $\overline{A}$, en conclusión $\overline{A} = C(X, \mathbb{R})$ como se quería probar. □

Algunos le agregan a X la condición de ser de Hausdorff, de modo que sea un espacio normal y, en consecuencia de Urysohn. Sin embargo, en el enunciado admitimos que simplemente basta que sepamos que A contiene tales funciones. La condición de ser de Hausdorff (sumado a DE) simplemente probaría que tal subanillo propio siempre existe, sin embargo, si nosotros proponemos, por ejemplo, el anillo de polinomios no haría falta elección para aplicar el resultado anterior.

Corolario 3.74: Toda función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ puede ser uniformemente aproximada por polinomios.

Otro ejemplo interesante es aproximar mediante polinomios de la función exponencial, pues $\exp(x)^n = \exp(nx)$, esto en algún momento se puede generalizar mucho más y en el cuerpo de los números complejos en un resultado conocido como el teorema de Fourier.

Definición 3.75 – *Equicontinuidad*: Se dice que un conjunto $A \subseteq M^X$ es equicontinuo, con M métrico, si para todo $\epsilon > 0$ y todo $x \in X$ existe un entorno U de x tal que para todo $f \in A$ se cumple que $f[U_x] \subseteq B_\epsilon(f(x))$.

Teorema (AEN) 3.76 (Teorema de Ascoli-Arzelà): Sea X métrico compacto e Y métrico completo. F es relativamente compacto en la topología de convergencia uniforme syss cumple las siguientes condiciones:

- F es equicontinuo, i.e., para todo $\epsilon > 0$ y $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $f \in F$ e $y \in X$ se cumple $d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \epsilon$.
- Para todo $x \in X$ el conjunto $\{f(x) : f \in F\}$ es relativamente compacto.

Demostración: $\Longleftarrow$. Si X es compacto, entonces es totalmente acotado, por lo que para todo $n \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ se puede definir D_n como un conjunto finito $\{x_1, \dots, x_k\}$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^k B_{1/n}(x_i)$, y por ende, $D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\neq 0}} D_n$. Sea F equicontinuo y uniformemente acotado, vamos a probar que es secuencialmente compacto.

Sea $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión en A, de él se puede extraer una sucesión como $(f_i(d_0))_{i \in \mathbb{N}}$ está contenido en un compacto, entonces posee una subsucesión convergente, sea $(f_{\sigma(0,i)})_{i \in \mathbb{N}}$ dicha subsucesión. Asimismo, de ésta se puede extraer la subsucesión $(f_{\sigma(1,i)})_{i \in \mathbb{N}}$ de modo que $(f_{\sigma(1,i)}(d_1))_{i \in \mathbb{N}}$ converja y así. Defínase $g_i := f_{\sigma(i,i)}$.

Sea $\epsilon > 0$. Por la equicontinuidad existe $\delta > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $d(x, y) < \delta$ implica $d(g_n(x), g_n(y)) < \epsilon/3$. Sea $m > 1/\delta$ un natural, por construcción existe $n_0 \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ tal que para todo $p, q \geq n_0$ y todo $d \in D_m$ se cumple que $d(g_p(d), g_q(d)) < \epsilon/3$. Finalmente, para todo $x \in X$ existe $d \in D_m$ tal que $d(x, d) < 1/m < \delta$ que cumple que para todo $p, q \geq n_0$ pasa

$$d(g_p(x), g_q(x)) \leq d(g_p(x), g_p(d)) + d(g_p(d), g_q(d)) + d(g_q(d), g_q(x)) < \epsilon.$$

Como se quería probar.

$\Longrightarrow$. Si F es relativamente compacto, entonces es totalmente acotado, por ende, dado $\epsilon > 0$ existen $f_1, \dots, f_k \in F$ tales que $F \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_{\epsilon/3}(f_i)$. Luego, dado $x \in X$ se cumple que

$$F(x) := \{f(x) : f \in F\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_{\epsilon/3}(f_i(x))$$

luego $F(x)$ es totalmente acotado, y su clasurura también y es cerrado, ergo es completa, en conclusión $\overline{F(x)}$ ha de ser compacto.

Sea $\epsilon > 0$, hemos de probar que F es equicontinuo, como X es compacto, los f_is son uniformemente continuos, por ende existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in X$ se cumple $d(x, y) < \delta$ implica $d(f_i(x), f_i(y)) < \epsilon/3$. Por el cubrimiento para todo $f \in F$ existe f_i tal que $d(f, f_i) < \epsilon/3$, por lo que

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(y)) + d(f_i(y), f(y)) < \epsilon.$$

□

3.5. Compactificaciones

El objetivo principal es el de formalizar la noción de la compactificación de Čech-Stone. Sin embargo, pese a ser una parte fundamental de la topología, la mayoría la deja para el último debido a su complejidad; comenzaremos en primer lugar por ver dos teoremas de cubos universales para *ablandar* la construcción posterior.

§3.5.1 Cubos universales. El concepto de "espacio universal" está estrictamente relacionado al de la *representación matemática* que es la noción de identificar una clase o categoría de objetos con un representante general. En particular veremos que el cubo de Tychonoff y el cubo de Alexandroff representan a los espacios de Tychonoff y los T_0 resp.

> **Definición 3.77:** Siendo $\{f_i : X \to Y_i\}_{i \in I}$ una familia de funciones, denotamos por $f := \Delta_{i \in I} f_i : X \to \prod_{i \in I} Y_i$ a la función tal que $f(x) := (f_i(x))_{i \in I}$, a la que también le decimos la *función diagonal*.
>
> También se dice que la familia *separa puntos y cerrados* si para todo F cerrado y $x \notin F$ existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \notin \overline{f_i[F]}$.

Lema 3.78: Toda aplicación continua, inyectiva y que separa puntos y cerrados es una inmersión.

Hint: Basta probar que tales funciones son cerradas.

Teorema 3.79 (Teorema de la diagonal): Si $\mathcal{F} := \{f_i : X \to Y_i\}_{i\in I}$ es una familia de aplicaciones continuas que separan puntos, entonces la función diagonal es inyectiva. Si, además, $\mathcal{F}$ separa puntos y cerrados, entonces la función diagonal es una inmersión. En particular, si alguna función en $\mathcal{F}$ es una inmersión, entonces la diagonal también.

Demostración: Es fácil probar que la función diagonal es inyectiva si la familia separa puntos. Para probar que la diagonal es una inmersión simplemente probaremos que separa puntos y cerrados: Si $x \notin F$, entonces existe $i \in I$ tal que $\pi_i(f(x)) = f_i(x) \notin \overline{f_i[F]} \subseteq \overline{\pi_i\big[f[F]\big]} \supseteq \pi_i\left[\overline{f[X]}\right]$. □

Lema 3.80: Un espacio es de Tychonoff syss el conjunto de coceros es base.

Demostración: $\Longrightarrow$. Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de los coceros de X, hay que probar que para todo U entorno de x existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subseteq U$. Para ello, sea $f \in C(X, [0,1])$ tal que $f[U^c] = \{0\}$ y $f(x) = 1$, luego $U^c \subseteq Z := f^{-1}(0)$, donde por definición Z es un cero, luego $Z^c \subseteq U$ y como $f(x) \neq 0$, entonces $x \in Z^c$ como se quería probar.

$\Longleftarrow$. Sea $x \in X$ y F un cerrado que no contiene a x, luego F^c es entorno de x y por construcción existe un cocero C tal que $x \in C \subseteq F^c$. Sea $f \in C(X, [0,1])$ tal que $g^{-1}\big[(0,1]\big] = C$, de modo que $g[F] = \{0\}$ y sabemos que $g(x) \neq 0$. Como $[0,1]$ es de Tychonoff en particular es de Urysohn y existe $h \in C([0,1],[0,1])$ tal que $h(0) = 0$ y que $h(g(x)) = 1$. Finalmente $f := g \circ h$ cumple lo pedido. □

Teorema 3.81: Se cumple:

1. Todo espacio de Tychonoff está inmerso en un cubo de Tychonoff.
2. (AE) Si X es de Tychonoff, entonces está inmerso en el $w(X)$-cubo de Tychonoff.
3. (AEN) Todo espacio de Tychonoff 2AN está inmerso el cubo de Hilbert.

Demostración: Como X es de Tychonoff los coceros forman una base, luego como $L(X) \leq w(X)$, entonces hay una base de coceros de cardinal

$w(X)$, que denotaremos por $\mathcal{B}$. Para todo $C \in \mathcal{B}$ sea f_C la función tal que $f_C^{-1}\big((0,1]\big) = C$, entonces $\mathcal{F} := \{f_C \in C(X,[0,1]) : C \in \mathcal{B}\}$ separa puntos y cerrados, por ende su función diagonal es una inmersión. □

Nótese que el AE es sólo empleado para “elegir un cubo más pequeño”. Sin AE, también todo espacio de Tychonoff está inmerso en un cubo de Tychonoff.

Teorema (DE) 3.82 – *Teorema de metrización de Urysohn*: Todo espacio regular 2AN es metrizable.

Demostración: Basta notar que el cubo de Hilbert es metrizable. □

§3.5.2 Compactificaciones (de Alexandroff, de Čech-Stone).

Definición 3.83 – *Compactificación*: Dado un espacio X, se dice que un par (K, c) es una *compactificación* de X si K es compacto y $c : X \to K$ es una inmersión y $\overline{c[X]} = K$.

Teorema 3.84: Se cumple:

1. Todo espacio de Hausdorff que tiene una compactificación es de Tychonoff.
2. (TUF) Todo espacio de Tychonoff tiene una compactificación.
3. (AE) Todo espacio de Tychonoff tiene una compactificación que comparte su peso.

4

Espacios vectoriales y conexos

4.1. Espacios vectoriales topológicos

Teorema 4.1: Si $\| \|_1$ y $\| \|_2$ son normas sobre X, éstas son equivalentes syss existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in X$ se cumple que

$$\|x\|_1 \leq \lambda \|x\|_2, \quad \|x\|_2 \leq \mu \|x\|_1.$$

DEMOSTRACIÓN: $\Longleftarrow$. Queda al lector.

$\Longrightarrow$. La demostración es por contradicción. Si las normas son equivalentes, pero las constantes no existen entonces sin perdida de generalidad supondremos que

$$\inf_{x \neq 0} \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} = 0$$

de esta forma, definiremos $f : X \to X$ como

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x}{\|x\|_1}, & x \neq \vec{0} \\ \vec{0}, & x = \vec{0} \end{cases}$$

notemos que f no es continua en $(X, \| \|_1)$ pues si aplicamos f primero y luego $\| \|_1$, entonces la función es discontinua en 0, la norma es continua y la composición de continuas es continua. Pero f es continua en $(X, \| \|_2)$, pues lo es en todo $x \neq \vec{0}$ por ser cociente entre continuas, y en $x = \vec{0}$ también ya que de no serlo, entonces $f[B_\epsilon(\vec{0})]$ no sería entorno de $\vec{0}$, luego al aplicarle $\| \|_2$ $\square$

Teorema 4.2: Las normas sobre un espacio de dimensión finita son equivalentes.

Demostración: En particular probaremos que son todas equivalentes a $\|\vec{x}\|_\infty := \text{máx}\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$. Sea $\| \ \|$ una norma cualquiera, luego como E es de dimensión finita posee una base canónica $e_1, \dots, e_n$ de modo que

$$\|\vec{x}\| = |x_1| \, \|e_1\| + \cdots + |x_n| \, \|e_n\| \leq \lambda \|\vec{x}\|_\infty$$

donde $\lambda := \|e_1\| + \cdots + \|e_n\|$.

Para ver la otra desigualdad probaremos por inducción que para todo n y todo $i \leq n$ existe $\mu_i > 0$ tal que $|x_i| < \mu_i \|\vec{x}\|$ con $\vec{x} \in \Bbbk^n$, pues, luego $\mu := \text{máx}\{\mu_i : i \leq n\}$ satisface que $\|\vec{x}\|_\infty \leq \mu \|\vec{x}\|$.
Para $n = 1$ veamos que $\mu := 1/\|1\|$ cumple lo pedido.
El caso $E := \Bbbk^{n+1}$, se demostrará que e_{n+1} es adherente a $F := \Bbbk^n \times \{0\}$ que es cerrado (por hipótesis inductiva), lo que sería absurdo. Supongamos que hay un índice que no cumple la hipótesis, sin perdida de generalidad podemos suponer que uno de ellos es el $(n+1)$-ésimo (de lo contrario reordenamos índices), es decir que para todo $\mu > 0$ existe $\vec{x} \in E$ tal que $|x_{n+1}| > \mu \|\vec{x}\|$. Podemos asumir que $x_{n+1} = 1$ pues basta dividir por tal $\vec{x}$ por x_{n+1}. Para probar que e_{n+1} es adherente, sea $\epsilon > 0$, luego $\mu := 1/\epsilon > 0$ y existe $\vec{y} \in F$ tal que $d(-\vec{y}, e_{n+1}) = \|\vec{y} + e_{n+1}\| < 1/\mu = \epsilon$. Pero esto es absurdo, lo que completa la demostración. □

Definición 4.3 – *Espacio vectorial topológico*: Se dice que (V, τ) es un $\Bbbk$-espacio vectorial topológico si V es un $\Bbbk$-espacio vectorial y τ una topología sobre V tal que la suma $+ : V^2 \to V$ y el producto por escalar $\cdot : \Bbbk \times V \to V$ sean funciones continuas.

Teorema 4.4: Todo espacio normado es un EVT.

Demostración: Denotaremos E al espacio.
La suma es continua. Consideremos E^2 con la norma L_1, luego, sean $(a, b), (c, d) \in E^2$

$$\|(a+b) - (c+d)\| \leq \|a - c\| + \|b - d\| = \|(a - c, b - d)\|_1 = \|(a, b) - (c, d)\|_1,$$

ergo, $+$ tiene la propiedad de Lipschitz, por ende es continua.
El producto escalar es continuo. Consideremos $\mathbb{K} \times E$ con la norma L_∞, luego sean $(\lambda, x), (\lambda', y) \in \mathbb{K} \times E$, sea $\epsilon > 0$, entonces consideremos

$$\delta := \frac{\epsilon}{|\lambda| + \|x\| + 1} > 0,$$

y digamos que (λ', y) está a menos de $\min(\delta, 1)$ de distancia de (λ, x), por lo que

$$\|(\lambda, x) - (\lambda', y)\|_\infty = \max\{|\lambda - \lambda'|, \|x - y\|\} < \min(\delta, 1).$$

Luego, veamos que

$$\|\lambda x - \lambda' y\| = \|\lambda(x - y) + (\lambda - \lambda')y\| \leq |\lambda| \, \|x - y\| + |\lambda - \lambda'| \, \|y\|$$

ahora estamos casi listos, el único factor extraño es $\|y\| \leq \|x - y\| + \|x\| \leq 1 + \|x\|$. Ahora acotando los factores convenientes por δ se obtiene:

$$\|\lambda x - \lambda' y\| < |\lambda|\delta + \delta(1 + \|x\|) = \epsilon.$$

□

Proposición 4.5: Un EVT es de Hausdorff syss $\{0\}$ es cerrado.

Demostración: Basta notar que el gráfico de la diagonal es preimagen del $\{0\}$ bajo la función $f : V^2 \to V$ dada por $f(x, y) := x - y$. □

Definición 4.6: Un conjunto A de un $\Bbbk$-EVT se dice *(linealmente) acotado* si para todo entorno U de $\vec{0}$ existe $\lambda \in \Bbbk$ tal que $A \subseteq \lambda U$.

Un abierto U de un $\mathbb{K}$-EVT (donde $\mathbb{K}$ es métrico) V se dice:

Absorvente Si para todo $\vec{x} \in V$ existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $|\alpha| \leq \epsilon$ se cumple que $\alpha\vec{x} \in U$.

Equilibrado Si para todo $|\alpha| \leq 1$ se cumple que $\alpha U \subseteq U$.

Si A es conjunto cualquiera de un $\mathbb{K}$-EVT V, donde $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}$ se cumple:

Convexo Si para todo $\vec{x}, \vec{y} \in A$ y todo $\lambda \in [0, 1]$ se cumple que $\lambda\vec{u} + (1 - \lambda)\vec{v} \in A$.

Absolutamente convexo Si es convexo y equilibrado.

Localmente convexo Si posee una base de entornos convexos.

Proposición 4.7: Si V es normado, entonces:

1. Las bolas son absorventes y equilibradas.

2. La intersección finita de conjuntos absorventes es absorvente.

3. La intersección de equilibrados es equilibrado.

Si $\mathbb{K}$ contiene a $\mathbb{R}$:

4. Las bolas son convexas, en consecuente, son absolutamente convexas.

5. La intersección de convexos es convexo, en consecuente, la intersección de absolutamente convexos es absolutamente convexo.

Definición 4.8: Si $A \subseteq V$ donde V es un $\mathbb{K}$-EVT que contiene a $\mathbb{R}$, entonces se definen la envoltura (absolutamente) convexa como

$$\operatorname{conv} A := \bigcap \{C : A \subseteq C \wedge C \text{ convexo}\},$$
$$\operatorname{aco} A := \bigcap \{C : A \subseteq C \wedge C \text{ abs. convexo}\};$$

resp.

Proposición 4.9: Si A es convexo, entonces $\operatorname{Int} A$ y $\overline{A}$ son convexos.

Demostración: Sea $\vec{u} \in A$ y $\vec{v} \in \operatorname{Int} A$, luego para todo $0 < \lambda < 1$ se cumple que $\lambda\vec{u} + (1-\lambda)\vec{v} \in \lambda\vec{u} + (1-\lambda)\operatorname{Int} A$ donde el último es un subconjunto abierto de A, es decir, A es entorno de $\lambda\vec{u} + (1-\lambda)\vec{v}$, luego pertenece a $\operatorname{Int} A$, ergo es convexo.

Sea $f : \mathbb{R} \times V^2 \to V$ la aplicación tal que $f(\lambda, \vec{u}, \vec{v}) := \lambda\vec{u} + (1-\lambda)\vec{v}$ la cual es continua pues V es un EVT, luego, un conjunto A es convexo syss $f\big[[0,1] \times A^2\big] \subseteq A$, luego

$$f\left[[0,1] \times \overline{A}^2\right] = f\left[\overline{[0,1] \times A^2}\right] \subseteq \overline{f\big[[0,1] \times A^2\big]} \subseteq \overline{A}.$$

□

Teorema 4.10: Si U es entorno de 0 en un $\Bbbk$-EVT, entonces:

1. Si $\alpha \in \Bbbk$ no nulo, entonces αU es entorno de 0.

Si $\Bbbk$ es normado:

2. U es absorvente.

3. U contiene un entorno de 0 equilibrado.

Demostración: 1. Queda al lector.

2. Por continuidad del producto externo $f(\alpha, \vec{v}) := \alpha\vec{v}$ se cumple que $f^{-1}[U]$ es entorno de $(0, \vec{v})$, luego contiene a un abierto de la forma $B_{2\epsilon}(0) \times W$ con W entorno de 0, por ende, para todo $|\alpha| \leq \epsilon$ se cumple que $\alpha\vec{u} \in U$ con $\vec{u} \in U$ y para un cierto $\epsilon > 0$.

3. Siguiendo la construcción anterior, consideremos $W' := W \cap U$ que es entorno de 0 contenido en U tal que para todo $|\alpha| < 2\epsilon$ se cumple que $\alpha W \subseteq U$. Luego existe $|\alpha_0| < \epsilon$, de forma que
$$U_0 := \bigcup_{|\alpha| \leq 1} \alpha\alpha_0 W' \subseteq U$$
y U_0 es equilibrado.

□

Teorema 4.11: Todo subespacio vectorial U con interior no vacío de un EVT V cumple que $U = V$. En consecuente, toda aplicación lineal abierta entre EVTs debe ser suprayectiva.

Demostración: Como U posee interior no vacío, entonces contiene a un abierto de la forma $\vec{u} + W$ donde W es un entorno de 0 y $\vec{u} \in U$, como W es vectorial entonces $W \subseteq U$. Como W es absorvente, para todo $\vec{v} \in V$ existe $\alpha \in \mathbb{K}_{\neq 0}$ tal que $\alpha\vec{v} \in W \subseteq U$, luego $\alpha^{-1}(\alpha\vec{v}) = \vec{v} \in U$, ergo $U = V$. □

Los siguientes teoremas se demuestran usando el axioma de elección, pero está probado que basta con asumir el teorema del ultrafiltro.

Teorema (AE) 4.12 – *Teorema de Hahn-Banach*: Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, W un subespacio vectorial, $f \in L(W, \mathbb{R})$ un funcional y $p : V \to \mathbb{R}$ tal que
$$p(\vec{u} + \vec{v}) \leq p(\vec{u}) + p(\vec{v}), \quad p(\lambda\vec{u}) = \lambda p(\vec{u}), \quad f(x) \leq p(x)$$
entonces existe $\bar{f} : V \to \mathbb{R}$ tal que $\bar{f}|_W = f$ y que $\bar{f}(\vec{u}) \leq p(\vec{u})$ para todo $\vec{u} \in V$.

Demostración: Sea $W \subseteq W_1 \subset V$ un subespacio vectorial y $f_1 : W_1 \to \mathbb{R}$ cumpliendo las condiciones del enunciado, luego si $\vec{w} \in V \setminus W_1$, entonces sea

$W_2 := W_1 \oplus \langle \vec{w} \rangle$, veremos que existe $f_2 : W_2 \to \mathbb{R}$ que cumple las condiciones también.

Sean $\vec{u}_1, \vec{v}_1 \in W_1$, entonces

$$\begin{aligned} f_1(\vec{u}_1) - f_1(\vec{v}_1) &= f_1(\vec{u}_1 - \vec{v}_1) \leq p(\vec{u}_1 - \vec{v}_1) \\ &= p(\vec{u}_1 + \vec{w} - (\vec{v}_1 + \vec{w})) \leq p(\vec{u}_1 + \vec{w}) + p(-\vec{v}_1 - \vec{w}), \end{aligned}$$

reordenando nos queda que

$$-p(-\vec{v}_1 - \vec{w}) - f(\vec{v}_1) \leq p(\vec{u}_1 + \vec{w}) - f_1(\vec{u}_1)$$

como desigualdad real, luego, se concluye facilmente que

$$\sup_{\vec{v}_1 \in W_1} \left(-p(-\vec{v}_1 - \vec{w}) - f(\vec{v}_1)\right) \leq \operatorname*{ínf}_{\vec{u}_1 \in W_1} \left(p(\vec{u}_1 + \vec{w}) - f_1(\vec{u}_1)\right).$$

Sea k un real cualquiera entre los dos valores de la desigualdad superior y definamos $f_2(\vec{v} + \alpha\vec{w}) := f_1(\vec{v}) + \alpha k$ donde $\vec{v} \in W_1$. Claramente f_2 es un funcional y por definición

$$\gamma \leq p\left(\frac{\vec{v}}{\alpha} + \vec{w}\right) - f_1\left(\frac{\vec{v}}{\alpha}\right)$$

luego se concluye facilmente que $f_2(\vec{v} + \alpha\vec{w}) \leq p(\vec{v} + \alpha\vec{w})$ como se quería probar.

Ahora invocamos el AE en forma del lema de Zorn construyendo la familia de funcionales que cumplen lo del enunciado para encontrar un funcional maximal que sería el que buscamos. $\square$

Nótese que el AE o TUF sólo se requiere si V es de dimensión infinita.

Teorema (AE) 4.13 – *Teorema de Hahn-Banach*: Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial (con $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$), W un subespacio vectorial, $f \in L(W, \mathbb{K})$ un funcional y $p : V \to \mathbb{R}$ una seminorma tal que para todo $\vec{w} \in W$ se cumple que $|f(\vec{w})| \leq p(\vec{w})$, entonces existe $\bar{f} : V \to \mathbb{K}$ tal que $\bar{f}|_W = f$ y que $|\bar{f}(\vec{u})| \leq p(\vec{u})$ para todo $\vec{u} \in V$.

Demostración: Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, toda seminorma cumple los requisitos de la versión anterior del teorema de Hahn-Banach, luego f admite una extensión $\bar{f}$, pero $\bar{f}(-\vec{v}) \leq p(-\vec{v}) = p(\vec{v})$, luego $|f(\vec{v})| \leq p(\vec{v})$ como se quería probar.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces comenzamos por considerar a V como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, de modo que $g := \operatorname{Re}(f) \in L(W, \mathbb{R})$ por lo que admite una extensión $\bar{g}$ por el inciso anterior, de modo que probaremos que $\bar{f}(\vec{v}) := \bar{g}(\vec{v}) - i\bar{g}(i\vec{v})$ cumple lo pedido. En primer lugar nótese que $\operatorname{Re} f(i\vec{v}) = \operatorname{Re}(if(\vec{v})) = -\operatorname{Im} f(\vec{v})$, por lo que $\bar{f}|_W = f$. $\square$

§4.1.1 Espacios prehilbertianos.

Definición 4.14 – *Espacio prehilbertiano*: Sea H un $\Bbbk$-espacio vectorial (con $\Bbbk \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) donde $\overline{\alpha}$ es el conjugado[a], entonces $(H, \langle , \rangle)$ donde $\langle , \rangle : H^2 \to \Bbbk$ es un espacio prehilbertiano (o de producto interno) si para todo $x, y, z \in H$ y $\alpha \in \Bbbk$:

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.
4. $\langle x, x \rangle \in [0, \infty)$ y $\langle x, x \rangle = 0$ syss $x = 0$.

Si $(H, \langle , \rangle)$ es un espacio prehilbertiano, entonces diremos que $\langle , \rangle$ es el producto interno, escribiremos "H es prehilbertiano" si no hay ambigüedad sobre los signos. Si H es prehilbertiano, entonces se define

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

[a] El conjugado es tal que hace cumplir que $\alpha \cdot \overline{\alpha} = |\alpha|^2$.

En esta subsección H siempre representará un espacio prehilbertiano. Notemos también que

$$\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\langle \alpha y, x \rangle} = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle .$$

Teorema 4.15 – *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*: Para todo $x, y \in H$:

$$| \langle x, y \rangle | \leq \|x\| \, \|y\|$$

Demostración: Supongamos que $y \neq 0$ (pues $y = 0$ es trivial), entonces notemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle - \alpha \langle y, x \rangle - \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + |\alpha|^2 \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 - 2 \operatorname{Re}(\alpha \langle y, x \rangle) + |\alpha|^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \Bbbk$, luego sea $\alpha := \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$ y despejemos un poco:

$$0 \leq \|x\|^2 - 2 \frac{\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle}{\|y^2\|} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} = \|x\|^2 - \frac{| \langle x, y \rangle |^2}{\|y\|^2},$$

de lo que se concluye el resultado. □

Teorema 4.16: Para todo $x, y \in H$ se cumple que

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

luego, $\| \, \| : H^2 \to \mathbb{R}$ es una norma.

Demostración: Basta aplicar el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

□

Definimos la topología estándar sobre un espacio prehilbertiano como la inducida por su norma, ergo, son EVTs. Llamaremos *unitarios* a los vectores de norma 1.

Teorema 4.17: La aplicación $\langle , \rangle : H^2 \to \mathbb{K}$ es continua.

Hint: Basta notar que poseen la propiedad de Lipschitz.

Definición 4.18 – *Ortogonalidad*: Un par $x, y \in H$ se dicen *ortogonales* si $\langle x, y\rangle = 0$, en cuyo caso se escribe $x \perp y$. Más aún, dado un subconjunto $A \subseteq H$, le llamamos *complemento ortogonal* a

$$A^\perp := \{x \in H : \forall a \in A \ (x \perp a)\}.$$

Diremos que una sucesión (finita o infinita) de vectores es *ortogonal*, si los vectores lo son dos a dos. Diremos que una sucesión es *ortonormal*, si los vectores son unitarios y la sucesión es ortogonal.

Teorema 4.19: Se cumple:

1. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (ley del paralelogramo).
2. $x \perp y$ syss $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (teorema de Pitágoras I).
3. Si $\{x_i\}_{i=1}^n$ es una sucesión ortonormal, entonces para todo $i \leq n$ se cumple $x_i \perp \sum_{j \neq i} x_j$.

4. Si $\{x_i\}_{i=1}^n$ es una sucesión ortonormal, entonces para todo $x \in H$ se cumple

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 + \left\| x - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\|^2,$$

donde $\alpha_i := \langle x, x_i \rangle$ (teorema de Pitágoras II).

5. El complemento ortogonal de cualquier subespacio es cerrado.

Demostración: 4. Obsérvese que

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \left(x - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right).$$

Donde hay $n+1$ vectores, hemos de probar que todos son ortogonales entre sí para aplicar el teorema de Pitágoras. Es claro que $x_i \perp x_j$ con $i \neq j$, por ende, basta notar que

$$\begin{aligned} \left\langle x_k, x - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\rangle &= \langle x_k, x \rangle - \sum_{i=1}^n \langle x_k, \alpha_i x_i \rangle \\ &= \langle x_k, x \rangle - \overline{\alpha_k} \cancelto{1}{\langle x_k, x_k \rangle} = 0. \end{aligned}$$

5. Sea $a \in H$, entonces notemos que $\{a\}^\perp$ es igual a $f^{-1}[0]$ con $f(x) := \langle a, x \rangle$, luego es cerrado, y luego

$$A^\perp := \bigcap_{a \in A} \{a\}^\perp$$

por lo que $A^\perp$ es cerrado.

□

Corolario 4.20 (Desigualdad de Bessel): Sea $\{x_i\}$ una sucesión[1] ortonormal, entonces para todo $x \in H$ se cumple

$$\sum_i |\alpha_i|^2 \leq \|x\|^2,$$

donde $\alpha_i := \langle x, x_i \rangle$.

[1] Aquí se obvian los límites de los índices pues el resultado es válido tanto para sucesiones finitas como infinitas.

Hint: Para probar el caso de un conjunto ortonormal infinito, basta notar que para todo n se cumple por el teorema de Pitágoras, por ende, la sucesión dada por las sumas parciales es creciente y acotada, ergo, converge.

Teorema 4.21: Sea $\{x_i\}_{i=0}^n$ una sucesión finita ortonormal y $x \in H$. Entonces, los escalares $\lambda_i \in \mathbb{k}$ que minimizan el valor de

$$\left\| x - \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i \right\|$$

son únicos y son $\lambda_i = \langle x, x_i \rangle$.

Demostración: Observe que

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i \right\|^2 &= \|x\|^2 - \sum_{i=0}^n (\overline{\lambda_i} \langle x, x_i \rangle + \lambda_i \overline{\langle x, x_i \rangle}) + \left\| \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i \right\|^2 \\
&= \|x\|^2 + \sum_{i=0}^n |\lambda_i|^2 - \sum_{i=0}^n (\overline{\lambda_i} \langle x, x_i \rangle + \lambda_i \overline{\langle x, x_i \rangle}) \\
&\qquad + \sum_{i=0}^n | \langle x, x_i \rangle |^2 - \sum_{i=0}^n | \langle x, x_i \rangle |^2 \\
&= \|x\|^2 + \sum_{i=0}^n |\lambda - \langle x, x_i \rangle |^2 - \sum_{i=0}^n | \langle x, x_i \rangle |^2,
\end{aligned}$$

de aquí es fácil deducir el enunciado. □

Corolario 4.22: Si una sucesión ortonormal $\{x_i\}$ genera un subespacio V de H, entonces todo $x \in V$ se escribe de forma única como combinación lineal con

$$x = \sum_i \langle x, x_i \rangle x_i.$$

Proposición 4.23 (Identidad de Parseval): Una sucesión ortonormal $\{x_i\}$ es base de H syss para todo $x \in H$ se cumple

$$\|x\|^2 = \sum_i | \langle x, x_i \rangle x_i|^2.$$

Definición 4.24 – *Espacio de Banach*: Un espacio X es de Banach si está normado y es completo bajo esa norma. Un espacio H es de Hilbert si es prehilbertiano y de Banach.

Teorema (AEN) 4.25: Sea H de Hilbert y C un subespacio cerrado convexo, entonces C posee un único elemento con norma mínima.

Demostración: Sea δ el ínfimo de las normas de C, entonces es claro que el ser de Banach implica que existe un elemento de norma δ, probaremos su unicidad.

Sean $x, y \in C$, por ley del paralelogramo sobre sus mitades se obtiene

$$\frac{1}{4}\|x-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2$$

como $\frac{x+y}{2} \in C$ entonces se reordenan los términos en

$$\|x-y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\delta^2,$$

en consecuente si $\|x\| = \|y\| = \delta$ es obvio que $x = y$. $\square$

Proposición (AEN) 4.26: Si V es subespacio lineal cerrado en H de Hilbert, entonces todo $x \in H$ admite descomposición única como $x = P(x) + Q(x)$ donde $P : H \to V$ y $Q : H \to V^\perp$, que además cumplen ser funcionales, osea, $H = V \oplus V^\perp$. También, $P(x)$ y $Q(x)$ son los puntos más próximos de V y $V^\perp$ a x; y $\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2$.

Demostración: Como V es lineal, entonces es conexo, luego $x + V$ lo es y definimos $Q(x)$ como el elemento de norma mínima en $x + V$ (que está bien definido por el teorema anterior). Luego $P(x) := x - Q(x) \in V$, hay que probar que $Q(x) \in V^\perp$. Como V es lineal no perdemos generalidad si probamos que $y \in V$ unitario cumple $Q(x) \perp y$, para ello recordemos que $Q(x)$ es de norma mínima, luego

$$\|Q(x)\|^2 \leq \|Q(x) - \alpha y\|^2 = \|Q(x)\|^2 + |\alpha|^2 - \left(\overline{\alpha}\,\langle Q(x), y\rangle + \alpha\overline{\langle Q(x), y\rangle}\right)$$

para todo $\alpha \in \mathbb{k}$. Tomemos $\alpha = \langle Q(x), y\rangle$, con lo que nos queda que

$$0 \leq -|\,\langle Q(x), y\rangle\,|^2;$$

en definitiva, $\langle Q(x), y\rangle = 0$.

La unicidad se deduce de que $V \cap V^\perp = \{0\}$.
Nótese que para todo $y \in V$

$$\|x-y\|^2 = \|Q(x) + (P(x)-y)\|^2 = \|Q(x)\|^2 + \|P(x)-y\|^2,$$

luego la proximidad es obvia, y el resultado es análogo para $y \in V^\perp$. □

Teorema (AEN) 4.27 – *Teorema de Riesz-Fréchet*: Sea H de Hilbert y $f : H \to \mathbb{K}$ una transformación lineal continua, entonces existe un único $y \in H$ tal que $f(x) = \langle x, y\rangle$.

Demostración: Si f es nula, entonces $y = 0$. Si f es no nula, sea $V := \ker f$, como $V \neq H$, entonces existe $z \in V^\perp$ con $\|z\| = 1$, luego si $u := f(x)z - f(z)x$ para algún x prefijado, entonces $f(u) = 0$, ergo $u \in V$ y $u \perp z$, por lo que:

$$\langle u, z\rangle = \langle f(x)z - f(z)x, z\rangle = f(x)\langle z, z\rangle - f(z)\langle x, z\rangle \implies f(x) = f(z)\langle x, z\rangle,$$

por lo tanto, $y := \overline{f(z)}z$ cumple lo pedido.
La unicidad queda al lector. □

4.2. Espacios duales

Proposición 4.28: Si N, M son normados y $f \in L(N, M)$ es lineal, entonces son equivalentes:

1. f es continua.
2. f es continua en $\vec{0}$.
3. f tiene la propiedad de Lipschitz.
4. $f[\overline{B}_1(\vec{0})]$ es acotado en M.

Demostración: Basta notar que $3 \implies 1 \implies 2 \implies 4 \implies 3$ (donde $2 \implies 4$ deriva que ser continua en $\vec{0}$ implica estar acotada cerca de $\vec{0}$, luego se multiplica por un escalar). □

Definición 4.29: Dado un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, denotamos por V^* su *dual algebraíco* $L(V, \mathbb{K})$, el espacio vectorial conformado por las funcionales. Si V es un EVT, entonces denotamos por V' su *dual topológico* $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$, el subespacio vectorial conformado por las funcionales continuas.

Un par dual $(V, W, \langle , \rangle)$ es un par donde V y W son $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y en donde $\langle , \rangle : V \times W \to \mathbb{K}$ es una forma bilineal, esto es:

1. Para todo $v_1, v_2 \in V$ y $w \in W$ se cumple $\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$.
2. Para todo $v \in V$ y $w_1, w_2 \in W$ se cumple $\langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle$.
3. Para todo $v \in V$, $w \in W$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumple $\langle \alpha v, w\rangle = \langle v, \alpha w\rangle = \alpha \langle v, w\rangle$.
4. Para todo $w \in W$ se cumple que $\forall v \in V\ (\langle v, w\rangle = 0 \implies w = 0)$.
5. Para todo $v \in V$ se cumple que $\forall w \in W\ (\langle v, w\rangle = 0 \implies v = 0)$.

En general obviaremos la forma bilineal de no haber ambigüedad en los signos. Si (V, W) es un par dual entonces la forma bilineal determina un par de monomorfismos vectoriales $\phi_V : V \to W^*$ y $\phi_W : W \to V^*$ como $[\phi_V(v)](w) := \langle v, w\rangle$ y $[\phi_W(w)](v) := \langle v, w\rangle$ (recordemos que $\phi_V(v)$ y $\phi_W(w)$ son funcionales).

El par dual más simple es claramente $(V, V*)$ en donde la forma bilineal canónica es $\langle v, f\rangle := f(v)$.

Teorema 4.30: Si V es normado, entonces V' también con

$$\|f\|_\infty := \sup_{\vec{u}\neq 0} \frac{|f(\vec{u})|}{\|\vec{u}\|}.$$

Más aún, si V es de Banach, entonces V' también.

Demostración: El que la norma este bien definida es consecuencia del lema, y el que cumpla con el resto de propiedades de una norma queda al lector.

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy, lo que significa, por definición que para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i, j \geq n_0$ se cumple que

$$d(f_i, f_j) = \|f_i - f_j\| = \sup_{\vec{u}\neq 0} \frac{|f_i(\vec{u}) - f_j(\vec{u})|}{\|\vec{u}\|} < \epsilon.$$

Luego, es fácil comprobar que para todo $\vec{u} \in V$ se cumple que $(f_n(\vec{u}))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, luego como N es de Banach dichas sucesiones convergen, con lo que definimos

$$f(\vec{u}) := \lim_n f_n(\vec{u}),$$

luego es fácil comprobar que f está bien definida, que es lineal, y para comprobar que es continua veamos que

$$|f(\vec{u})| = \lim_n |f_n(\vec{u})| \leq \left(\lim_n \|f_n\|_\infty\right) \|\vec{u}\|$$

y notemos que el término en paréntesis corresponde al límite de una sucesión de Cauchy, luego converge, por ende, $f[B_1(\vec{0})]$ está acotado. □

Esto nos permite definir una topología apropiada sobre el dual topológico, pero veremos que no es sencillo si V no es normado.

Corolario (AEN) 4.31: Si H es de Hilbert, entonces H' también y, más fuerte aún, $H \cong H'$.

Tratemos de visualizar a V^{**}, un elemento sería un funcional $\Phi : L(V, \Bbbk) \to \Bbbk$, luego $\Phi(\phi) \in \Bbbk$. Un ejemplo canónico de elementos de V^{**} es el *mapa de evaluación* Φ_x tal que $\Phi_x(\phi) = \phi(x) \in \Bbbk$. Es fácil notar que todo mapa de evaluación depende estrictamente del subíndice, luego determina un monomorfismo de $\Bbbk$-espacios vectoriales desde V a V^{**}, con lo que nos gustaría que V estuviese inmerso en V'', pero si los mapas de evaluación son continuos o no depende de la topología sobre V', con lo que se define:

Definición 4.32 – *Topología débil*: Sea (V, W) un par dual entre $\Bbbk$-espacios vectoriales, luego se define la *topología* $\sigma(V, W)$ sobre V, como la topología inicial inducida por la familia $\{(\Bbbk, \Phi_w) : w \in W\}$ (recordemos que $\Phi_w \in V^*$).

Se define la topología débil sobre V como la $\sigma(V, V')$, y la topología débil* sobre V' como la $\sigma(V', V)$.

Teorema 4.33: La topología débil* sobre V' es la subespacio de $\mathbb{K}^V$.

Hint: Basta notar que la topología débil* viene inducida por proyecciones.

Teorema 4.34: Si V, W son EVTs sobre un mismo campo escalar y $E \subseteq \mathcal{L}(V, W)$ es equicontinuo, entonces la clausura de E en W^V está contenida en $\mathcal{L}(V, W)$ y es equicontinua.

Demostración: Sean $\vec{u}, \vec{v} \in V$ y $\alpha, \beta \in \Bbbk$ cualesquiera, luego $\phi : W^V \to W$ dada por $\phi(f) := f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) - \alpha f(\vec{u}) - \beta f(\vec{v})$ es continua (¿por qué?), luego $\phi[E] = \{0\}$, de lo que se concluye que $E \subseteq L(V, W)$.

Ahora probaremos que $\overline{E}$ es equicontinuo. Basta ver que lo es en $\vec{0}$, luego sea U_1 un entorno cerrado de $\vec{0}$ en W y U_2 un entorno de $\vec{0}$ en V tal que para todo $f \in E$ se cumpla que $f[U_2] \subseteq U_1$. Como la proyección $\pi_x : W^V \to W$ en x, dada por $\pi_x(f) = f(x)$ es continua por definción, entonces para todo $x \in U_2$ se cumple que $\pi_x[\overline{E}] \subseteq \overline{\pi_x[E]} \subseteq U_1$, ergo $\overline{E}$ es equicontinuo, luego está contenido en $\mathcal{L}(V, W)$. □

Teorema (TUF) 4.35 – *Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki*: Si V es un $\mathbb{K}$-EVT, todo conjunto equicontinuo en $\sigma(V', V)$ es relativamente compacto.

Demostración: Dado que $\mathbb{K}$ es métrico y E es equicontinuo, existe un entorno U de 0 en V tal que para todo $f \in E$ se cumple que $f[U] \subseteq B_1(0)$. Como U es absorvente, para todo $\vec{v} \in V$ existe $\lambda_v > 0$ tal que para todo $|\alpha| < \lambda_v$ en $\mathbb{K}$ se cumple que $\alpha\vec{v} \in U$, por ende, $|f(\alpha\vec{v})| = \lambda_v |f(\vec{v})| < 1$, osea, $|f(\vec{v})| \le \lambda_v^{-1}$, con lo que $E \subseteq \prod_{\vec{v} \in V} \overline{B_{\lambda_v^{-1}}(0)}$, donde el conjunto de la derecha es un compacto por el teorema de Tychonoff; por lo que $\overline{E}$ es compacto. Por el teorema anterior $\overline{E}$ es $\sigma(V', V)$-cerrado y sabemos que la topología sobre $\sigma(V', V)$ es la subespacio del producto. □

(El uso del TUF yace en la compacidad del conjunto construido, debido a que los factores son de Hausdorffi, para erradicar la elección en el λ_v puedes tomar el ínfimo de los valores y sumarle 1.)

§4.2.1 Polares.

Definición 4.36 – *Polar*: Si (V, W) es un par dual, y $A \subseteq V$, llamaremos *polar* de A a

$$A^\circ := \{y \in W : \forall x \in A\ (|\langle x, y\rangle| \le 1)\},$$

de no especificarse se asume $W = V'$.

Proposición 4.37: Si A, B son subconjuntos de un $\mathbb{K}$-EVT V, se cumple:

1. $\{\vec{0}\}^\circ = V'$ y $V^\circ = \{0\}$.
2. Si $A \subseteq B$ entonces $A^\circ \supseteq B^\circ$.

3. $A \subseteq A^{\circ\circ}$.
4. Si $\lambda \in \mathbb{K}_{\neq 0}$ entonces $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda}(A^\circ)$.
5. Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de V, entonces

$$\left(\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \right)^\circ = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A^\circ.$$

Proposición 4.38: Si (V, W) es un par dual y $A \subseteq V$, entonces:

1. A° es absolutamente convexo y $\sigma(W, V)$-cerrado.
2. A° es absorvente syss es $\sigma(V, W)$-acotado.

Demostración: 1. Basta notar que

$$A^\circ = \bigcap_{a \in A} \{x \in W : |\langle a, x \rangle| \leq 1\}$$

donde es claro que los componentes son absolutamente convexos y cerrados.

2. ...

<++> □

§4.2.2 Teoremas del punto fijo.

Definición 4.39: Si f tiene la propiedad de Lipschitz, entonces denotamos por $L(f)$ a la *constante de Lipschitz* definida como el mínimo λ que hace cumplir lo anterior. Se dice que f es una *contracción* si $L(f) < 1$, y que es *no-expansiva* si $L(f) \leq 1$.

Como las funciones con propiedad de Lipschitz son continuas, entonces las contracciones y las funciones no-expansivas también lo son.

Teorema 4.40 (Teorema del punto fijo de Banach): Una contracción sobre un espacio métrico completo posee exactamente un punto fijo.

Demostración: Sea f la contracción sobre M con constante de Lipschitz $\alpha \in (0, 1)$. Sea $x \in M$ cualquiera, luego definamos por recursión:

$$y_0 := x, \quad y_{n+1} := f(y_n),$$

probaremos que y_i es de Cauchy. En efecto, notemos que

$$\begin{aligned}
d(y_n, y_{n+k}) &\leq d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_{n+2}) + \cdots + d(y_{n+k-1}, y_{n+k}) \\
&\leq d(y_n, Y_{n+1}) + \alpha d(y_n, y_{n+1}) + \cdots + \alpha^{k-1} d(y_n, y_{n+1}) \\
&= \frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(y_n, y_{n+1}) \leq \frac{\alpha^{n+k}}{1-\alpha} d(y_0, y_1).
\end{aligned}$$

Por ende, basta definir $k := d(y_0, y_1)$, para notar que

$$d(y_n, y_{n+k}) \leq \alpha^n \frac{k}{1-\alpha}.$$

A partir del término de la derecha podemos formar una sucesión que converja a cero, luego es fácil probar que y_i es de Cauchy con lo que converge a algún z, veamos que z es punto fijo. Basta notar que

$$f(z) = f\left(\lim_n y_n\right) = \lim_n f(y_n) = \lim_n y_{n+1} = z.$$

Queda al lector probar la unicidad de los puntos fijos. □

Corolario 4.41 (Teorema del punto fijo de Edelstein): Si X es un compacto métrico y $f : X \to X$ satisface que para todo par $x \neq y$:

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

entonces f posee un único punto fijo.

4.3. Espacios conexos

Proposición 4.42: Son equivalentes:

1. X no puede expresarse como $X_1 \oplus X_2$ con X_1, X_2 subespacios de X.
2. $\varnothing, X$ son los únicos conjuntos cerrados y abiertos de X.
3. Si $X = X_1 \cup X_2$ con X_1, X_2 separados; entonces algunos es vacío.
4. Para toda aplicación continua $f : X \to D(2)$ se cumple que $f[X] = \{0\}$ o $f[X] = \{1\}$.

Definición 4.43 – *Espacio conexo*: Se le dice *conexo*[a] a cualquier espacio que cumple alguna condición del teorema anterior. De lo contrario se dice que un espacio es *disconexo*.

[a]Del inglés, *connected*, conectado.

Ejemplos triviales de conjuntos conexos lo son $\varnothing$ y los conjuntos singulares. Como ejercicio vea por qué $[0,1] \cup [2,3]$ y $\mathbb{Q}$ son subespacios disconexos de $\mathbb{R}$.

Teorema 4.44: Todo subespacio de $\overline{\mathbb{R}}$ (bajo la topología del orden) es conexo syss es un intervalo.

Demostración: $\Longrightarrow$. En $\overline{\mathbb{R}}$ todo subespacio S posee ínfimo y supremo a, b; luego para probar que es un intervalo basta probar que para todo $a < x < b$ se cumple que $x \in S$. De lo contrario $S \cap [-\infty, x)$ y $S \cap (x, \infty]$ son abiertos disjuntos cuya unión es S.

$\Longleftarrow$. Supongamos por contradicción que un intervalo puede representarse como la suma de dos subespacios abiertos no vacíos U, V de tal forma que $x \in U$, $y \in V$ y $x < y$. Sea $U' := U \cap [x, y]$, $V' := V \cap [x, y]$ tal que $U' \cup V' = [x, y]$. Notemos que U, V son abiertos-cerrados en el subespacio I, de forma que U', V' son cerrados. Sea $s := \sup(U')$, luego se puede comprobar que $s \in \overline{U}' \subseteq U$ y que $s \in \overline{V}' \subseteq V$; lo que contradice a la cualidad de subespacios disjuntos. $\square$

Es fácil notar que la topología del orden sobre $\overline{\mathbb{R}}$ genera la topología usual sobre $\mathbb{R}$ como subespacio. Ergo, se concluye el mismo resultado para $\mathbb{R}$.

Teorema 4.45: La imagen continua de conexos es conexa.

Teorema 4.46 – *Teorema del valor intermedio de Weierstrass*: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, donde $f(a) < f(b)$, entonces para todo $y \in (f(a), f(b))$ existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = y$.

Corolario 4.47: Si $f : A \to \mathbb{R}$ es inyectiva y continua con $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, entonces f es estrictamente monótona.

Corolario 4.48 (Bolzano): Sea $f[a, b] \to \mathbb{R}$, donde $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

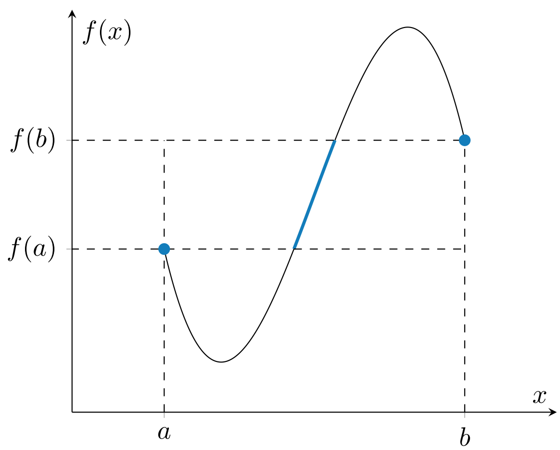

Figura 4.1. Teorema del valor intermedio de Weierstrass.

Corolario 4.49: Toda función continua de la forma $f : [a,b] \to [a,b]$ posee un punto fijo.

Teorema 4.50: Sean $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios conexos de X, tal que existe algún $i_0 \in I$ tal que C_{i_0} no está separado del resto de C_i, entonces $\bigcup_{i\in I} C_i$ es conexo.

Demostración: Sea $C := \bigcup_{i\in I} C_i = X_1 \cup X_2$ donde X_1, X_2 están separados. □

Corolario 4.51: Sean $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios conexos de X, tal que su intersección es no-vacía, entonces $\bigcup_{i\in I} C_i$ es conexo.

Corolario 4.52: Sea A un conjunto cualquiera tal que $C \subseteq A \subseteq \overline{C}$ con C conexo. Entonces A es conexo. En particular la clausura de un conexo es conexa.

Demostración: Notemos que para todo $x \in A$ se cumple que C y $\{x\}$ no están separados. Luego el conjunto $\{C\} \cup \{\{x\} : x \in A\}$ es una familia de conexos tal que uno no está separado del resto. □

Corolario 4.53: Si X posee un subconjunto denso conexo, entonces X es conexo.

Corolario 4.54: Si todo par de puntos en X están contenidos en un subconjunto conexo de X, entonces X es conexo.

Teorema 4.55: La topología producto de espacios no vacíos es conexa syss lo son los factores.

Demostración: Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ tal que $X := \prod_{i\in I} X_i$.

$\Longrightarrow$. Si X es conexo entonces $\pi_j(X) = X_j$ lo es pues la proyección es continua y la imagen de conexos es conexa.

$\Longleftarrow$. Para $I = \{0, 1\}$ basta notar que $X = (X_1 \times \{x_2\}) \cup (\{x_1\} \times X_2)$ donde ambos son conexos no-disjuntos, por ende, X es conexo. Luego se puede aplicar inducción para notar que el producto finitos de conexos es conexo.

Si los X_i son conexos y no vacíos, entonces basta considerar un $\vec{u} \in X$, y notar que dado[2] $J \in [I]^{<\omega}_{\neq\varnothing}$ se define

$$\prod_{j\in J} X_j \cong C_J := \prod_{i\in I} A_i, \quad A_i := \begin{cases} \{\vec{u}_i\} & i \notin J \\ X_i & i \in J \end{cases}$$

Luego la unión de los C_J es un conjunto denso (¿por qué?) de X que es conexo pues es la intersección de conexos cuya intersección contiene a $\vec{u}$, i.e., es no vacía. $\square$

Nótese que aquí se puede criticar de que hace falta AE para extraer el $\vec{u} \in X$, pero de darse que el producto sea nulo entonces es también trivialmente conexo.

Corolario 4.56: Los espacios euclídeos, los cubos de Tychonoff y los cubos de Alexandroff son conexos. Los cubos de Cantor son siempre disconexos.

Ejemplo (la topología por cajas puede no ser conexa). Sea $\prod^{\text{Box}}_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$. Sea A el conjunto de las sucesiones acotadas y $B := A^c$ es el conjunto de las sucesiones no-acotadas. Para probar que A y B son abiertos, basta notar que son entornos de todos sus puntos, para ello si $\vec{x} := (x_i)_{i=0}^{\infty} \in A$, entonces $\vec{x} \in \prod_{i=0}^{\infty} B_1(x_i) \subseteq A$, y de manera similar si $\vec{y} := (y_i)_{i=0}^{\infty} \in B$ entonces $\vec{y} \in \prod_{i=0}^{\infty} B_1(y_i) \subseteq B$, en donde, el producto de abiertos es abierto por lo que se prueba que A y B lo son.

[2] Un subconjunto finito de I.

Definición 4.57 – *Componente conexa y cuasi-componentes*: Se dice que la componente conexa $C(x)$ de un punto x es la unión de todos los subespacios conexos que le contienen. La cuasi-componente $Q(x)$ de un punto x es la intersección de los entornos abiertos cerrados de x.

Proposición 4.58: Se cumple que:

1. $C(x)$ es cerrado y es el máximo subespacio conexo que contiene a x.
2. Para todo par de puntos sus componentes conexas (y cuasi-componentes) son iguales o disjuntas.
3. $Q(x)$ es cerrado y el conjunto de las cuasi-componentes forma una partición estricta del espacio.
4. Si $x \sim y$ syss x, y están contenidos en un subespacio conexo, entonces $\sim$ es de equivalencia, cuyas clases de equivalencia son las componentes conexas del espacio.
5. $C(x) \subseteq Q(x)$.

Demostración: Probaremos la última: Sea F un entorno abierto-cerrado de x, de modo que está separado de F^c. Luego $C(x) \cap F$ y $C(x) \cap F^c$ están separados, pero como $C(x)$ es conexo, entonces o $C(x) \cap F$ o $C(x) \cap F^c$ es disjunto. Pero $x \in C(x) \cap F$, luego $C(x) \cap F^c = \varnothing$, ergo $C(x) \subseteq F$. Como $C(x)$ es una cota inferior y $Q(x)$ es el ínfimo, se cumple que $C(x) \subseteq Q(x)$ como se quería probar. □

Un ejemplo es que si consideramos el subespacio $[0, 1] \cup [2, 3]$ de $\mathbb{R}$ es claro que es disconexo, pero sus componentes conexas son $[0, 1]$ y $[2, 3]$ que vendrían a ser las partes conexas del conjunto. Algo interesante es que las componentes conexas de $\mathbb{Q}$ son todos los conjuntos singulares, luego es fácil notar que es homeomorfo $D(\aleph_0)$.

Definición 4.59: Se le llama un *arco* entre a y b a una función continua $f : [0, 1] \to X$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$. Un espacio se dice *arco-conexo* si entre todo par de puntos existe un arco.

En un EVT se le dice un *segmento* entre a y b al conjunto $\{\lambda a + (1 - \lambda)b : \lambda \in [0, 1]\}$. Un subconjunto se dice *convexo* si contiene todo segmento entre sus puntos.

Es claro que todo segmento es un tipo de arco.

Proposición 4.60: Se cumple:

1. Todo espacio convexo es arco-conexo.
2. La imagen continua de un arco-conexo es arco-conexa.
3. La unión de una familia no disjunta de arco-conexos es arco-conexa.
4. La intersección de convexos es convexa.
5. Todo espacio arco-conexo es conexo.

Demostración: En particular probaremos la última: Llamemos $\operatorname{Img}(\operatorname{Cont}([0,1],X))$ a la familia de las imágenes de todas las funciones continuas de dominio $[0,1]$ y codominio X. Luego si X es no vacío entonces posee un elemento x, luego basta considerar el subconjunto S de $\operatorname{Cont}([0,1],X)$ que contiene a las funciones que pasan por x, como $[0,1]$ es conexo, entonces $\operatorname{Img}(S)$ es una familia de conexos que contienen x, y por definición, para todo $y \in X$ existe $f \in \operatorname{Cont}([0,1],X)$ tal que $x, y \in \operatorname{Img} f$, luego $\bigcup \operatorname{Img}(S) = X$, luego X es conexo. □

Definición 4.61 – *Envolvente convexa*: Dado un subconjunto A de un espacio vectorial V, se le llama *envolvente convexa* de A, al mínimo conjunto convexo que le contiene, i.e.,

$$\operatorname{conv} A := \bigcap \{C : A \subseteq C \wedge C \text{ convexo}\}.$$

Proposición 4.62: Dado A subconjunto de un $\mathbb{k}$-espacio vectorial, entonces

$$\operatorname{conv} A = \left\{ \sum_i \alpha_i x_i : \sum_i \alpha_i = 1 \wedge \forall i \ (x_i \in A \wedge \alpha_i > 0) \right\}$$

Definición 4.63: Se dice que un espacio es localmente conexo (resp. arco-conexo, convexo) si todo punto posee una base de entornos conexos (resp. arco-conexos, convexos).

4.4. Espacios disconexos

Definición 4.64 – *Espacio cerodimensional*: Se dice que un espacio es

Hereditariamente disconexo Si todo subespacio de cardinal > 1 es disconexo.

Extremadamente disconexo Si es de Hausdorff y la clausura de todo abierto es abierta.

Cerodimensional Si es T_1 y todo punto posee una base de entornos abiertos-cerrados.

Fuertemente cerodimensional Si es no vacío, de Tychonoff y si para todo par de conjuntos A, B completamente separados existe un abierto-cerrado C tal que $A \subseteq C$ y $B \subseteq C^c$.

Todo espacio discreto es fuertemente cerodimensional y extremadamente disconexo. Como ejercicio, demuestre que $\mathbb{Q}$ también lo es.

Teorema 4.65: Se cumple que:

1. Un espacio es hereditariamente disconexo syss sus componentes conexas son singulares.
2. En un espacio cerodimensional las cuasi-componentes son singulares, luego es hereditariamente disconexo.
3. Todo espacio fuertemente cerodimensional es cerodimensional.
4. Todo espacio extremadamente disconexo es hereditariamente disconexo.

Parte II.

Análisis real

5

Funciones derivadas

5.1. Derivada

Definición 5.1 – *Derivada*: Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y sea $a \in A$ interior a A. Decimos que f es diferenciable o derivable en a si existe

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{5.1}$$

En cuyo caso le decimos a $f'(a)$ la derivada de f en a. f' es la *función derivada* de f que representa la derivada de f en todos los puntos donde dicho valor existe. Si $\operatorname{Dom} f' = \operatorname{Int} A$ entonces decimos que f es derivable (a secas).

También denotaremos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(a) = f'(a)$$

en ciertos casos.

Otra forma de comprender la derivada es que la función, cerca de $f(a)$ se parece a algo de la forma $f(a) + kh$ donde k es constante (y sabemos que es de hecho $f'(a)$). Esta interpretación es útil para generalizar más adelante la noción de derivada.

Teorema 5.2: Si f es diferenciable en a entonces es continua en a.

Demostración: Como f es derivable, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = f'(a)(\lim_{x\to a} x - a) = 0.$$

Por ende $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, por lo que es continua en a. □

Por contrarrecíproca, entonces si f no es continua en a no puede ser diferenciable en a.

Ejemplo (valor absoluto). Notemos que trivialmente $f(x) = |x|$ es continua en todo su dominio, no obstante notemos que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1, \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

Por ende $f(x)$ no es diferenciable en 0, pese a que es continua en 0. Esto también nos otorga una buena intuición acerca de que la cualidad de ser diferenciable implica cierto nivel de "suavidad" en el gráfico de una función.

Teorema 5.3 – *Álgebra de derivadas*: Sean f, g aplicaciones entre subespacios de $\mathbb{R}$ tales que son diferenciables en a, luego:

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
2. $(\lambda f)(a) = \lambda f'(a)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
4. Si $g(a) \neq 0$ entonces f/g es diferenciable en a y
$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Demostración: Probaremos el producto, pues el resto son análogas:

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} g(a+h) + f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h} \\
&= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).
\end{aligned}$$

□

Ejemplo. Es fácil probar que la derivada de $f(x) = x$ es 1 y aplicando la derivada del producto se puede probar por inducción que

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\neq 0} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1} \tag{5.2}$$

Luego también sigue que toda función polinómica es diferenciable.

Teorema 5.4 – *Regla de la cadena*: Sean $f : X \to Y$ diferenciable en a y $g : Y \to \mathbb{R}$ diferenciable en $b := f(a)$, luego $f \circ g$ es diferenciable en a y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \circ g)(a) = g'(b)f'(a) = (f \circ g')(a) \cdot f'(a). \tag{5.3}$$

Demostración: Definamos

$$G(k) := \frac{g(b+k) - g(b)}{k} - g'(b).$$

Sobre todos los $k \neq 0$ tales que $b + k \in Y$. Podemos extender continuamente G para que tome el valor 0 en 0, de forma que se cumple

$$g(b+k) - g(b) = (g'(b) + G(k))k$$

Sea $h \neq 0$, entonces $a + h \in X$ y se define $k := f(a+h) - f(a)$, por lo que

$$(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a) = \big(g'(b) + G(f(a+h) - f(a))\big) \cdot (f(a+h) - f(a))$$

Luego dividiendo por h y considerando que $G(0) \to 0$ se deduce el enunciado. □

Definición 5.5 – *Monotonía*: Se dice que f es creciente (resp. estrictamente creciente, decreciente, estrictamente decreciente) si para todos $x, y \in \operatorname{Dom} f$ se cumple que $x < y$ implica $f(x) \leq f(y)$ (resp. $<$, $\geq$, $>$). Si f es alguna de las anteriores se dice que es monótona. Se dice que f es monótona de algún tipo en torno a a si existe un entorno U de a tal que $f|_U$ es monótona de dicho tipo.

Se dice que $a \in (\operatorname{Dom} f)^{\mathrm{d}}$ es un máximo (resp. mínimo) local si existe algún entorno U de a tal que $f(a)$ es el máximo (resp. mínimo) de $f|_U$. En dichos casos, diremos que a es un extremo local.

Teorema 5.6: Una aplicación real f diferenciable es creciente (resp. decreciente) si su derivada en todo punto es ≥ 0 (resp. ≤ 0). Si la derivada de f es ≥ 0 (resp. > 0, ≤ 0, < 0) entonces es creciente (resp. estrictamente creciente, decreciente, estrictamente decreciente).

Ejemplo. Consideremos $f(x) = x^3$. f es estrictamente creciente, sin embargo, posee derivada $f'(x) = 3x^2$ la cuál es nula en el punto 0, ergo, no toda función estrictamente creciente posee derivada estrictamente positiva.

Teorema 5.7 – *Teorema de la función inversa*: Sea A un intervalo abierto, $f : A \to \mathbb{R}$ inyectiva y diferenciable, entonces $B := f[A]$ es un intervalo abierto y f es el homeomorfismo que prueba $A \cong B$, y $g := f' : B \to A$ es diferenciable tal que para todo $b = f(a) \in B$ se cumple que

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}. \tag{5.4}$$

Demostración: Notemos que basta probar que g sea diferenciable (y existe pues si restringimos el codominio a B entonces prueba ser biyectiva). Para ello, como sabemos que su dominio es conexo y es inyectiva, entonces es estrictamente monótona, por ende es fácil probar que B es efectivamente un intervalo abierto. Así mismo puedes considerar la restricción de f a cualquier intervalo abierto para ver que su imagen es otro intervalo abierto, ergo, g es continua (en el sentido topológico, que implica el sentido analítico).

Sea $b \in B$, entonces definimos $k(h) := g(b + h) - g(b)$, luego si $h \neq 0$ entonces $k(h) \neq 0$ por monotonía estricta y luego $a+k = g(b+h)$, por ende, $f(a + k) - b = h$, finalmente se cumple que

$$\frac{g(b+h) - g(b)}{h} = \frac{1}{\frac{f(a+k)-f(a)}{k}}. \tag{5.5}$$

Finalmente por continuidad de g se cumple que $k(0) \to 0$, luego es fácil concluir que el término de la derecha converge a $1/f'(a)$. □

Nótese que si hubiésemos demostrado que g es diferenciable sin calcular su derivada por regla de la cadena habríamos llegado a la misma conclusión.

Teorema 5.8 (Fermat): Todo extremo local de una función diferenciable en dicho punto tiene derivada nula.

Lema 5.9 (Teorema de Rolle): Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que es continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b) y que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración: Como $[a, b]$ es compacto y f es continua entonces la imagen es compacta, ergo, está acotada y como es cerrada posee máximo M y

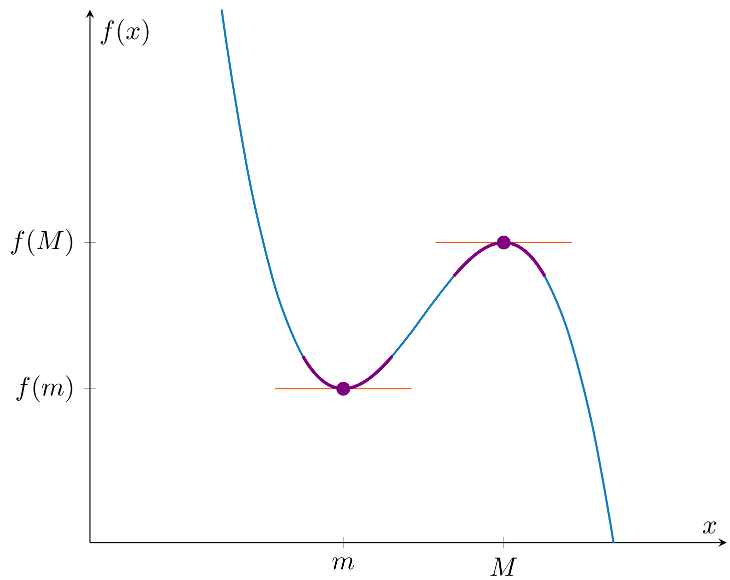

Figura 5.1. Teorema de Fermat.

mínimo m. Si $M = m = f(a) = f(b)$, entonces la función es constante, ergo todo punto tiene derivada nula. Si $f(a) < M$, entonces M es máximo local y es la imagen de algún punto distinto de a, b; ergo, la función es diferenciable en dicho punto y por ende posee derivada nula. El caso es análogo si $M = f(a) > m$. □

Teorema 5.10 – *Teorema de Cauchy*: Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$ y diferenciables en (a, b). Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

Demostración: Basta considerar la función

$$h(x) := f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)).$$

La cuál cumple con la hipótesis del teorema de Rolle, de la cual se deduce el enunciado. □

Utilizando $g(x) = x$ se obtiene:

Teorema 5.11 – *Teorema del valor medio*: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

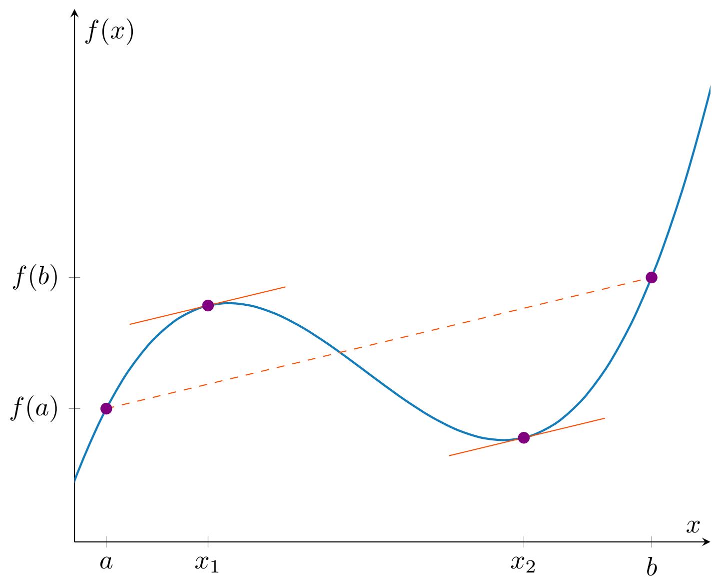

Figura 5.2. Teorema del valor medio.

Teorema 5.12 (Darboux): Si f es real y diferenciable en $[a, b]$ entonces para todo d entre $f'(a)$ y $f'(b)$ existe c entre a y b tal que $f'(c) = d$.

Demostración: Para esto vamos a seguir similar a como lo hicimos con el teorema del valor medio, i.e., consideraremos caso base $f'(a) \cdot f'(b) < 0$ y probaremos que $f'(c) = 0$ para $c \in (a, b)$.

Sin perdida de generalidad, supongamos que $f'(a) < 0 < f'(b)$ y $f(a) < f(b)$. Como $f'(a) < 0$ existe un punto p cerca de a tal que $f(p) < f(a)$. Como $[a, b]$ es un intervalo cerrado y f es continua en $[a, b]$ (por ser diferenciable), entonces $f[a, b]$ es un intervalo cerrado, y vimos que hay un punto bajo $f(a)$, i.e., $f(a)$ no es el mínimo de $f[a, b]$ y $f(b)$ tampoco, por lo que existe un mínimo local, por ende, posee derivada nula. El resto de casos son análogos o se demuestran de teoremas anteriores.

Para el caso general sea d entre $f'(a)$ y $f'(b)$, luego definamos

$$g(x) := f(x) - d \cdot x.$$

Si $f'(a) < f'(b)$ entonces $g'(a) < 0 < g'(b)$ por lo que existe c tal que $g'(c) = 0$, y finalmente $f'(c) = g'(c) + d = d$. □

Corolario 5.13: Sea $f : I \to \mathbb{R}$, con I un intervalo, una función real y diferenciable, si su derivada es nunca nula, entonces f es inyectiva.

Lema 5.14: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) tal que $f'(c) = 0$, entonces es constante.

Demostración: Tomemos $u < v \in (a, b)$, luego por teorema del valor medio existe $x_0 \in (u, v)$ tal que

$$f'(x_0) = 0 = \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \implies f(u) = f(v)$$

luego, se comprueba para todo par en (a, b) y por continuidad también para a y b. □

Teorema 5.15: Sean $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciables en un intervalo I. $f' = g'$ syss $f = g + k$ con $k \in \mathbb{R}$.

Definición 5.16 – *Concavidad y convexidad*: Se dice que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es convexa o cóncava resp. si para todo $a < x < y < b$ y todo $0 < \lambda < 1$ se cumple que

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

o

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

respectivamente.

Nótese que dado $z := (1 - \lambda)x + \lambda y = x + \lambda(y - x)$, la condición de convexidad se puede reescribir como que

$$f(z) \leq \frac{y - z}{y - x} f(x) + \frac{z - x}{y - x} f(y)$$

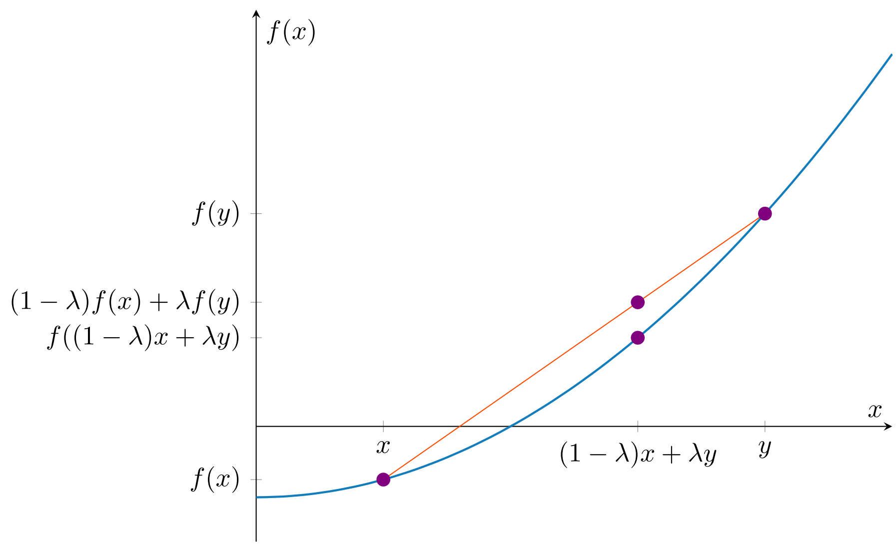

Figura 5.3. Función convexa.

Proposición 5.17: Una función es convexa si cumple cualquiera (y por ende todas) de las tres desigualdades siguientes:

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

Es cóncava si cumple cualquiera de las desigualdades anteriores cambiando $\leq$ por $\geq$.

Teorema 5.18: Si una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es diferenciable y su derivada es creciente (resp. decreciente), entonces la función es convexa (resp. cóncava).

Demostración: Como f es diferenciable, por el teorema del valor medio existen a,b tales que para todo $x<a<z<b<y$ se cumple, por monotonía de la derivada:

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(a) \leq f'(b) = \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

□

Corolario 5.19: Dada una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ tal que es diferenciable y su derivada es diferenciable (que denotaremos f''). f es convexa (resp. cóncava) syss la derivada de su derivada es positiva (resp. negativa).

Por ejemplo una función cuadrática $ax^2 + bx + c$ es convexa si $a > 0$ y cóncava si $a < 0$.

5.2. Aplicaciones de la derivada

§5.2.1 Regla de L'Hôpital. La regla de L'Hôpital es una de las técnicas más comunes de cálculo de límites, sin embargo, cabe notar que en realidad no es una sino varias reglas las cuales requieren demostraciones individuales según el caso:

Teorema 5.20: Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferenciables tales que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ y que g, g' sean no nulas en todo el dominio. Se cumple que

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Demostración: Extendamos f, g a $[a, b)$ con $f(a) = g(a) := 0$ para conservar continuidad. Por teorema de Cauchy, para todo $x \in (a, b)$ se cumple que existe $c \in (a, x)$ tal que

$$(f(x) - f(a))g'(c) = f(x)g'(c) = g(x)f'(c) = (g(x) - g(a))f'(c).$$

Y como $g(x) \neq 0 \neq g'(c)$, entonces se reescribe como

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Por definición de límite real se cumple que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $a < c < a + \delta$ implica

$$\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - L\right| < \epsilon.$$

Luego para todo $a < x < a + \delta$ existe un $a < c < x < a + \delta$ tal que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - L\right| < \epsilon.$$

Lo que es la definición de límite. □

Nótese que los métodos utilizados nos permiten fácilmente adaptar el teorema si $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0$. Utilizando ambas calculamos los límites laterales, por ende, el método también funciona si consideramos $a \in A$ un intervalo abierto.

Algo común es que la regla de L'Hôpital se suele aplicar recursivamente, es decir, cuando el límite no se facilita al derivar una vez, se suele aplicar varias veces la regla de L'Hôpital hasta que el límite queda lo suficientemente sencillo.

Teorema 5.21: Sean $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ con $a > 0$ funciones diferenciables tales que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ y que g, g' sean no nulas en todo el dominio. Se cumple que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Demostración: Definamos $F, G : (0, 1/a) \to \mathbb{R}$ como $F(x) := f(1/x)$ y $G(x) := g(1/x)$, luego, claramente F, G son diferenciables y cumplen que $\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} G(x) = 0$. Notemos que

$$\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)}.$$

Luego, se cumple que

$$\lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = L,$$

por la regla de L'Hôpital ya demostrada, se cumple que

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{G(x)} = L = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

□

Una técnica similar se utiliza para probar el caso en que $x \to -\infty$.

Teorema 5.22: Sean $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ con $a > 0$ funciones diferenciables tales que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ y que g, g' sean no nulas en todo el dominio. Se cumple que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Demostración: Sea $\epsilon > 0$, entonces por definición de límite existe $M > 0$ tal que para todo $x > M$ se cumple que

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \epsilon.$$

Notemos que como g' nunca se anula y $g(+\infty) \to +\infty$, entonces g es estrictamente creciente. Luego, por teorema de Cauchy existe $y \in (M, x)$ tal que
$$\frac{f(x) - f(M)}{g(x) - g(M)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$
De modo que, para todo $x > M$ se cumple que
$$\left| \frac{f(x) - f(M)}{g(x) - g(M)} - L \right| < \epsilon.$$
Finalmente, notemos que
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(M)}{g(x) - g(M)} \cdot \frac{f(x)}{f(x) - f(M)} \cdot \frac{g(x) - g(M)}{g(x)}.$$
donde los dos últimos factores convergen a 1, luego los detalles a completar quedan al lector para comprobar que se cumple el enunciado. □

Nuevamente, casos con alteraciones a los signos derivan fácilmente de lo probado hasta ahora.

Teorema 5.23: Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ con $a > 0$ funciones diferenciables tales que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ y que g, g' sean no nulas en todo el dominio. Se cumple que
$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

En síntesis podemos decir que la regla de L'Hôpital nos permite aplicar derivadas cuando hayan límites de la forma $0/0$ o ∞/∞.

Ejemplo sencillo. Mediante la regla de L'Hôpital es fácil probar que
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

§5.2.2 Expansión de Taylor. Tal como con la derivada vimos que se podía aproximar localmente una función por una recta, la expansión de Taylor va más allá y dice que la función se puede aproximar con más precisión mediante polinomios (dado que la función sea varias veces diferenciable).

Definición 5.24 – *n-ésima derivada*: Sea f una función real diferenciable, se define recursivamente su n-ésima derivada (si existe) como $f^{(n)}(x)$, donde

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n)}(x),$$

además, la solemos anotar como

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x).$$

Una función f se dice de clase C^n (también denotado como $f \in C^n(\mathrm{Dom}\, f)$) cuando posee n-ésima derivada y $f^{(n)}$ es continua. Diremos que f es de clase C^∞ si f es de clase C^n para todo n natural.

Es fácil notar que para todo $k \leq n$ naturales se cumple que una función de clase C^n es C^k. Toda función que posee $n+1$-ésima derivada es de clase C^n. Otra propiedad que ya hemos probado es que la suma y producto de funciones de clase C^n es C^n, luego $C^n(A)$ es un dominio (como estructura algebraica). Notemos que hasta ahora podemos comprobar que las funciones polinómicas, las exponenciales y los logaritmos son de clase C^∞.

Ejemplo. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Luego se puede probar que es diferenciable y que su derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

No obstante, $f'(x)$ es discontinua en 0, luego no toda derivada es continua.

Una observación es que el teorema de Darboux nos indica que las discontinuidades de una función derivada no puede ser de cualquier tipo, por ejemplo, es imposible que una función posea derivada algo como 0 en todo $\mathbb{R}_{\neq 0}$ y 1 en 0, en su lugar, la discontinuidad anterior corresponde a algo que se le dice una discontinuidad oscilante, en este sentido vemos que la derivada podría tener derivada en cualquier punto entre -1 y 1.

Definición 5.25 – *Expansión de Taylor*: Sea A un intervalo y $f : A \to \mathbb{R}$ una función n-veces diferenciable en un punto $a \in A$, definimos la expansión o el polinomio de Taylor de f de grado a lo más n como

$$\begin{aligned} T_a^n f(x) &:= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots \end{aligned} \tag{5.6}$$

La expansión de Taylor nos otorga una aproximación de f cerca de a, en general se admite que

$$R_f(x) := f(x) - T_a^n f(x).$$

A cuya función le decimos el *error*. Notemos que el error es siempre continuo cerca de a.

Teorema 5.26: Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase C^n y $a \in D$, nótese que para todo k entero tal que $0 \leq k \leq n$ se cumple

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[T_a^n f(a)] = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(a).$$

Demostración: Construyamos la función polinómica

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k,$$

veamos que $g(a) = c_0$, para las derivadas tenemos que

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot c_k (x-a)^{k-1},$$

es decir, que $g'(a) = c_1$. Luego

$$g''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)c_k(x-a)^{k-2},$$

es decir, que $g''(a) = 2c_2$. Luego

$$g^{(3)}(x) = \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)c_k(x-a)^{k-3},$$

por lo tanto, $g^{(3)}(a) = 3 \cdot 2c_3 = 3!c_3$. Por inducción para todo $k \leq n$ se cumple que $g^{(k)}(a) = k!c_k$, para lo cual consideramos $c_k = f^{(k)}(a)/k!$ de forma que se cumple que $g^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$. □

En particular puede ver porque a los matemáticos nos gusta está expansión, pues las funciones polinómicas son siempre más fáciles de trabajar o son más *familiares* para nosotros. Nótese que si f es una función polinómica de grado k, para todo $r \in \mathbb{R}$ $T_r^k f(x) = f(x)$.

Teorema 5.27 – *Teorema de Taylor*: Sea $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase C^{k+1}. Sea $u \in I$, entonces para todo $v \in I$ existe c entre u y v tal que

$$f(v) = T_u^k f(v) + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(v-u)^{k+1}.$$

Demostración: No perdemos generalidad suponiendo que $u < v$. Luego definimos $g : [u,v] \to \mathbb{R}$ como

$$g(x) = f(v) - T_x^k f(v),$$

tal que su derivada es

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x) = -\frac{(v-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x).$$

Además, definamos $h : [u,v] \to \mathbb{R}$ como

$$h(x) = g(x) - \left(\frac{v-x}{v-u}\right)^{k+1} g(u).$$

Tal que $h(u) = h(v) = 0$, por teorema de Rolle existe un $c \in (u,v)$ tal que $h'(c) = 0$, es decir:

$$h'(c) = g'(c) + (k+1)\frac{(v-c)^k}{(v-u)^{k+1}} g(u) = 0$$

Despejando $g(u)$:

$$\begin{aligned} g(u) &= -\frac{1}{k+1}\frac{(v-u)^{k+1}}{(v-c)^k} g'(c) \\ &= \frac{1}{k+1}\frac{(v-u)^{k+1}}{\cancel{(v-c)^k}}\frac{\cancel{(v-c)^k}}{k!} f^{(k+1)}(c) \end{aligned}$$

$$= \frac{(v-u)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c).$$

Finalmente:

$$g(u) = f(v) - T_u^k f(v) = \frac{(v-u)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c)$$
$$\implies f(v) = T_u^k f(v) + \frac{(v-u)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c).$$

Que es lo que se quería demostrar. □

Notemos que el término final viene a representar el grado de error en la expansión de Taylor, pero puede ser nulo. Para ello basta ver lo siguiente:

Ejemplo. Consideremos la restricción de $\ln|_{[1,2]}$, basta probar que

$$\lim_n \frac{\ln^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$

para todo $x \in (1,2)$ para poder aproximar $\ln 2$ mediante la expansión de Taylor. Notemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x}, \; \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln x = (-1)\frac{1}{x^2}, \; \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} \ln x = (-2)(-1)\frac{1}{x^3} = \frac{2!}{x^3}.$$

Luego una simple inducción prueba que

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} \ln x = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

Por lo cuál se cumple que

$$\lim_n \frac{\ln^{(n)}(x)}{n!} = \lim_n (-1)^{n-1} \frac{n}{x^n}.$$

Y dado que $1 < x < 2$ es fácil probar que ese límite converge a 0. Cómo eso se cumple entonces podemos ver que

$$\ln 2 = T_1^\infty \ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{1^k} \frac{1^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

Que era la serie alternada de la harmónica.

Sin embargo, el proceso es extremadamente lento, pues si probaremos el proceso para $N = 1000$ y $N = 1001$ se obtiene 0,6926474 y 0,6936464, por lo que tenemos certeza sobre sólo los dos primeros decimales.

Teorema 5.28: Sea $f : A \to \mathbb{R}$ donde $a \in A$ es un intervalo abierto. Luego si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in A$ se cumple que

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)\right| \leq M^n$$

Entonces se cumple que

$$T_a^\infty f(x) = f(x).$$

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}_{\neq 1} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) := \frac{1}{1-x}.$$

Notemos que

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

Por lo que, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Notemos que el término de la derecha converge a 0 para todo $|x| < 1$, por ende,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1$$

Luego la expansión de Taylor de f cerca de 0 es esa. Ésta fórmula nos será útil más adelante.

Teorema 5.29: Sea f una función real tal que es n-veces diferenciable en a con $f^{(n)}(a)$ siendo la primera derivada no nula de a:

1. Si n es par y $f^{(n)}(a)$ es positivo (resp. negativo) entonces a es un mínimo (resp. máximo) local.

2. Si n es impar entonces a no es ni máximo ni mínimo local.

Hint: Es una aplicación de la expansión de Taylor aplicando la continuidad del error.

5.3. Cálculo de derivadas

§5.3.1 Exponencial y logaritmos. Como definimos en la sección sobre series denotaremos

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

La cual pretende ayudarnos a definir formalmente la noción de exponencial. En primer lugar:

Proposición 5.30: Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y). \tag{5.7}$$

Hint: Aplicar el producto de Cauchy, pues vimos que la serie exponencial es absolutamente convergente.

De esto se concluyen varias cosas muy importantes:

Proposición 5.31: Se cumple que:

1. exp es siempre no-nula y positiva.
2. exp es estrictamente creciente.
3. Se cumple que

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0.$$

Teorema 5.32: $\exp(x)$ es diferenciable en $\mathbb{R}$ y se cumple que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp(x) = \exp(x). \tag{5.8}$$

Corolario 5.33: $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ es una biyección continua. Luego posee inversa $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ llamada *logaritmo natural*. Además su inversa es diferenciable en todo su dominio y tiene derivada

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x}. \tag{5.9}$$

Por ende, exp es un homeomorfismo.

Definición 5.34 – *Funciones exponenciales*: Sea $a > 0$ denotaremos

$$a^x := \exp(x \cdot \ln a).$$

Proposición 5.35: Para todo $a > 0$ se cumple que

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad a^1 = a.$$

Además, $a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ es siempre diferenciable y para todo $a \neq 1$ se cumple que es un homeomorfismo cuya inversa denotamos por $\log_a(x)$ y llamamos *logaritmo en base a*.

Proposición 5.36 (Propiedades de los logaritmos): Para todo $1 \neq a > 0$:

1. $a^0 = 1$ y $\log_a 1 = 0$.
2. $(a^x)^y = a^{xy}$.
3. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ con $x, y > 0$.
4. $\log_a(x^y) = y \log_a x$ con $x > 0$.
5. $$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$
   con $x, b > 0$ y $b \neq 1$. En particular,
   $$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$
6. Si $a, b > 0$ tales que $a^n = b$, entonces $a = \sqrt[n]{b}$ y $n = \log_a(b)$.

Mediante las exponenciales podemos probar que para todo $r \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^r) = rx^{r-1}, \tag{5.10}$$

para $x > 0$.

Cálculo de los logaritmos. Por una de las propiedades vista pudimos notar que basta con poder encontrar una forma de calcular $\ln x$ y podremos tener una forma de calcular $\log_a x$. Se sabe que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x} \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(1+x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}.$$

Luego, podemos calcular la derivada de $\ln(x)$ cuando $0 < x \leq 2$. Notemos que la siguiente función:

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

Cumple que $f'(x) = \ln'(x+1)$ para $|x| < 1$. Luego, como vimos, $f(x) = k + \ln(x+1)$ por compartir derivadas. En este caso, $k = 0$ pues para $x = 0$ se comprueba la igualdad, es decir, que

$$\ln(x+1) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad |x| < 1.$$

Notemos que como $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$, entonces por regla de la cadena se cumple que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2^x) = 2^x \cdot \ln 2$. Ya hemos visto que $\ln 2 > 0$, por ende, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2^x) > 0$, ergo, 2^x es creciente. Además hemos probado que $\lim_n 2^n$, por ende, para todo $x > 1$ positivo existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$2^n \leq x < 2^{n+1} \implies 1 \leq \frac{x}{2^n} < 2.$$

Y por propiedades de los logaritmos naturales se cumple que $\ln(x/2^n) = \ln x - n \ln 2$. Así que mediante ese método se puede calcular siempre el logaritmo natural de cualquier real. Nótese que el 2 no tiene nada de especial y se puede iterar el procedimiento utilizando cualquier real entre 1 y 2.

Usando esa formula podemos intentar calcular el logaritmo natural de $3/2$ para el cual sólo sumando los primeros 40 y 41 términos se obtiene 0,405465108108157 y 0,405465108108168 resp., es decir, tenemos certeza sobre los primeros 13 decimales. Luego $3/2 < 2 < 9/4$, por ende $\ln 2 = \ln(4/3) + \ln(3/2)$, y $\ln(4/3) \approx 0{,}2876820724517808458564616$ (25 decimales de precisión con sólo 30 sumando), por lo tanto,

$$\ln 2 \approx 0{,}6931471805599451752044615...$$

§5.3.2 Funciones trigonométricas. En geometría se definen las funciones $\sin, \cos, \tan$ en base a una construcción con el círculo unitario. Por ende nos gustaría saber si son diferenciables y cuál sería su derivada.

En primer lugar asumiremos que son diferenciables[1] en 0, notemos que $\cos$ toma un valor máximo local de 1 en dicho punto, luego por el teorema

[1] Usualmente se suele calcular a mano el límite de la derivada de seno, pero esto es tan informal como asumir de antemano que es diferenciable, pues asume, de forma incluso peor, que se conoce la fórmula del área de un sector circular, lo que es paradójico, pues esos mismos libros suelen hacer el cálculo *a posteriori*.

de Fermat ha de tener derivada nula. Por ende, el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0. \tag{5.11}$$

Notemos que sin es creciente al rededor de 0, luego si posee derivada no nula entonces vale $\sin'(0) = k > 0$, pero notemos que por regla de la cadena, entonces debería de cumplirse que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(x/k)\bigg|_{x=0} = 1.$$

Luego, se redefinen las funciones trigonométricas para que la derivada en 0 de seno valga 1, es decir, que el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1. \tag{5.12}$$

Finalmente, resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} = \cos x. \qquad (5.13) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + (-\sin x) \cdot \frac{\sin h}{h} = -\sin x. \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

Para el resto de límites trigonométricos basta aplicar el álgebra de derivadas:

$$\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x. \qquad (5.15) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cot x) = -\frac{\tan' x}{\tan^2 x} = -1 - \cot^2 x = -\csc^2 x. \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec x) = \tan x \cdot \sec x, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\csc x) = -\cot x \cdot \csc x.
\end{gathered}$$

Esto nos permite deducir por ejemplo en qué puntos las funciones trigonométricas son (o no son) continuas.

Veamos que se cumple que

$$\sin 0 = 0, \quad \sin'(0) = \cos 0 = 1, \quad \sin''(0) = -\sin 0 = 0,$$

$$\sin^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1, \quad \sin^{(4)}(0) = \sin 0 = 0.$$

De aquí es obvia la periocidad de las derivadas en 0 de la función seno, luego podemos describir la función mediante la expansión de Taylor. Pero eso no es todo, sino que como las derivadas de sin y cos son alguna de ellas con un posible cambio de signo entonces su valor absoluto está siempre acotado por $M = 1$, por lo cual, son iguales a su expansión de Taylor en todo el dominio, en particular:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \sin^{(k)}(0) \cdot \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sin^{(2k+1)}(0) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad (5.16) \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \cos^{(k)}(0) \cdot \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \cos^{(2k)}(0) \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad (5.17) \end{aligned}$$

Cálculo de π. En primer lugar vamos a definir a π como el valor tal que su mitad es la primera raíz de la función coseno. Nótese que como, por definición $\cos(\pi/2) = 0$, entonces en particular $\sin(\pi/2) = 1$ (por identidad trigonométrica y la cualidad de ser la primera raíz). Por suma de ángulos se tiene que

$$\sin \frac{\pi}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{4} = 0.$$

De ambas se concluye que $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, por ende se cumple que $\tan(\pi/4) = 1$.

La función tan es bastante interesante, notemos que su derivada es siempre mayor o igual que 1, por ende es una función estrictamente creciente. También como se sabe que el primer cero de la función cos se da en $\pi/2$, se puede concluir fácilmente que $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ es una biyección, y como es también diferenciable, por teorema de la función inversa se cumple que su inversa $f(x)$ ha de satisfacer:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{1}{\tan'(f(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(f(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Usualmente se acostumbra escribir las inversas de las funciones trigonométricas con el prefijo *arc-*, i.e., $\arctan x := f(x)$, esto se hace sobretodo para evitar confusiones sobre si $\tan^{-1}$ representa la función inversa o la inversa multiplicativa de la función tan.

Notemos que ya demostramos que la derivada de $\arctan x$ es $\frac{1}{1+x^2}$, pero también:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k},$$

cuando $x \in (-1,1]$. Luego se cumple que

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

posee la misma derivada que $\arctan(x)$ en $(-1,1]$ y comparten valores en 0, luego son iguales en ese dominio. Finalmente, sabemos que arctan es inyectiva y $\tan(\pi/4) = 1$, por ende se concluye que

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right).$$

Esta se conoce como la *fórmula de Leibniz*, no obstante, al igual que con la fórmula para $\ln 2$ es extremadamente lenta e ineficaz; por lo que vamos a recurrir a las llamadas fórmulas de Machin[2]:

Nótese que

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}\right) = \frac{1/2+1/3}{1-1/2\cdot 1/3} = \frac{5/6}{1-1/6} = 1.$$

Luego $\pi = 4(\arctan(1/2) + \arctan(1/3))$, donde esta fórmula es más fácil de evaluar pues los valores son menores. Similarmente podemos notar que

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{1}{3}\right) = \frac{1/7+1/3}{1-1/3\cdot 1/7} = \frac{10/21}{1-1/21} = \frac{1}{2}.$$

Luego nos queda que

$$\pi = 4\left(2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}\right).$$

[2]Originalmente, Machin propone que $\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)$. En su honor, todas las fórmulas que describen $\pi/4$ como la suma de arco-tangentes de ángulos pequeños llevan su nombre, en ésta página se describen varias fórmulas de tipo Machin.

1	3.1354425368030809373	9	3.1415926535567266775
2	3.1420744981576116395	10	3.1415926535931451014
3	3.1415512358677064597	11	3.1415926535894507232
4	3.1415964071156099457	12	3.1415926535898281990
5	3.1415923014558742032	13	3.1415926535897895633
6	3.1415926874439574767	14	3.1415926535897935601
7	3.1415926502749842442	15	3.1415926535897931160
8	3.1415926539189968913	16	3.1415926535897931160

Figura 5.4. Cálculo de π.

5.4. Desigualdades

Definición 5.37 – *Medias*: Dada una sucesión $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ finita de reales positivos, y unos valores $\lambda_i \in [0,1]$ tales que $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = 1$, entonces se define:

Media geométrica $a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_n^{\lambda_n}$.

Media aritmética $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$.

Usualmente se les señala como "medias ponderadas" y a los λ_i como las respectivas ponderaciones. Varios libros se referirán a ellas sin el término *ponderadas* cuando $\lambda_i = 1/n$.

Teorema 5.38 (Desigualdad de Jensen): Sea f una aplicación real es convexa en un intervalo I syss dada una sucesión $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in I^n$ y unas ponderaciones λ_i, entonces

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i).$$

Hint: Una implicancia es trivial mientras que la otra sale por inducción.

Teorema 5.39 – *Desigualdad MG-MA*: Dada una sucesión de reales estrictamente positivos $(a_1, \dots, a_n)$ y unas ponderaciones λ_i, entonces

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$$

Demostración: Como los a_i son no nulos y positivos, y como $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, entonces definamos $t_i := \ln a_i$. Luego, por el criterio de convexidad de la segunda derivada es fácil notar que la función exponencial es convexa, por lo que, por la desigualdad de Jensen se obtiene que

$$\begin{aligned} a_1^{\lambda_1}\cdots a_n^{\lambda_n} &= \exp(\lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_n t_n) \\ &\leq \lambda_1 \exp(t_1) + \cdots + \lambda_n \exp(t_n) = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n. \end{aligned}$$

□

Definición 5.40 – *p-medias*: Dada una sucesión de números positivos $(a_1, \ldots, a_n)$, entonces dado p real no nulo, se le dice la p-media a

$$\sqrt[p]{\frac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}{n}}$$

Al caso $p = -1$ y $p = 2$ les llamamos media harmónica y cuadrática resp.

Teorema 5.41 (Desigualdad de la media general): Dada una sucesión de números estrictamente positivos $(a_1, \ldots, a_n)$ y unas ponderaciones λ_i de forma que se define $f : \mathbb{R}_{\neq 0} \to (0, \infty)$ como $f(p) := \sqrt[p]{\lambda_1 a_1^p + \cdots + \lambda_n a_n^p}$, entonces f es creciente.

DEMOSTRACIÓN: Si $p = 1 < q$, entonces vemos que la monotonía de f se reduce a probar que

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n)^q \leq \lambda_1 a_1^q + \lambda_2 a_2^q + \cdots + \lambda_n a_n^q,$$

lo que se deduce de la desigualdad de Jensen sobre $g(q) := x^q$ que es convexa (¿por qué?).

Si $0 < p < q$, entonces basta reescribir la desigualdad como

$$(\lambda_1(a_1^p) + \lambda_2(a_2^p) + \cdots + \lambda_n(a_n^p))^{q/p} \leq \lambda_1(a_1^p)^{q/p} + \lambda_2(a_2^p)^{q/p} + \cdots + \lambda_n(a_n^p)^{q/p},$$

con lo que lo hemos reducido al caso anterior. Los casos involucrando argumentos negativos quedan al lector. □

Notemos que si $\vec{x} := (a_1, \ldots, a_n)$, entonces la p-media es

$$\frac{\|\vec{x}\|_p}{\sqrt[p]{n}}.$$

Teorema 5.42 – *Desigualdad MH-MG-MA-MC*: Sea $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ una secuencia finita de reales positivos, entonces

$$\begin{aligned} \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} &\le \frac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}} \\ &\le \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \\ &\le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \\ &\le \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \\ &\le \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Donde las desigualdades son iguales syss los a_i lo son.

Demostración: Aunque no lo parezca, éste límite se reduce a probar que la $(-\infty)$-media es el mínimo, la 0-media es la MG y la ∞-media es el máximo mediante límites, haremos la 0-media que es, en mi opinión la más difícil:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{1/x} = \lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)}$$

donde $f(x) \to 1$ y $g(x) \to \infty$, por ende, dicho límite se acerca a (si existe)

$$\exp\left(\lim_{x\to 0} (f(x) - 1) g(x) \right) = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{a_1^x + \cdots + a_n^x - n}{nx} \right)$$

veamos que el límite de adentro es de la forma $0/0$, luego conviene aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a_1^x + \cdots + a_n^x - n}{nx} = \lim_{x\to 0} \frac{a_1^x \ln a_1 + \cdots + a_n^x \ln a_n}{n} = \frac{\ln a_1 + \cdots + \ln a_n}{n}.$$

Finalmente basta reemplazar y usar propiedades de la exponencial y los logaritmos para comprobar que el límite daba $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ como se quería probar.

Finalmente el enunciado se deduce de la monotonía de las p-medias. $\square$

Teorema 5.43 (Desigualdad de Minkowski): Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y $p \ge 1$, entonces

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|_p \le \|\vec{u}\|_p + \|\vec{v}\|_p.$$

Demostración: El caso $p = 1$ ya está probado. Para $p > 1$, se cumple que $f(x) := |x|^p$ es convexa, luego

$$\begin{aligned}\|(1-\lambda)\vec{u} + \lambda\vec{v}\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |(1-\lambda)u_i + \lambda v_i|^p \leq \sum_{i=1}^n ((1-\lambda)|u_i| + \lambda|v_i|)^p \\ &\leq \sum_{i=1}^n (1-\lambda)|u_i|^p + \lambda|v_i|^p = (1-\lambda)\|\vec{u}\|_p^p + \lambda\|\vec{v}\|_p^p.\end{aligned}$$

En particular si $\|\vec{u}\|_p = \|\vec{v}\|_p = 1$, esto prueba que para todo $\lambda \in [0,1]$ se cumple que $\|(1-\lambda)\vec{u} + \lambda\vec{v}\|_p \leq 1$.

Luego, si $\vec{u} \neq 0 \neq \vec{v}$, entonces $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|_p}$ y $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|_p}$ son vectores unitarios, finalmente se demuestra el enunciado pues

$$\frac{\|\vec{u}+\vec{v}\|_p}{\|\vec{u}\|_p + \|\vec{v}\|_p} = \left\| \underbrace{\frac{\|\vec{u}\|_p}{\|\vec{u}\|_p + \|\vec{v}\|_p}}_{1-\lambda} \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|_p} + \underbrace{\frac{\|\vec{v}\|_p}{\|\vec{u}\|_p + \|\vec{v}\|_p}}_{\lambda} \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|_p} \right\|_p \leq 1.$$

□

La desigualdad de Minkowski es esencial para que las normas L_p que habíamos definido comprueben ser, en efecto, normas sobre $\mathbb{R}^n$.

Lema 5.44 (Desigualdad de Young): Si $x, y \geq 0$ y $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Demostración: Basta aplicar la desigualdad ponderada MG-MA sobre x^p e y^q con ponderaciones $(1/p, 1/q)$:

$$xy = (x^p)^{1/p}(y^q)^{1/q} \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

□

Teorema 5.45 (Desigualdad de Hölder): Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|_p \, \|\vec{v}\|_q$$

Demostración: Por la desigualdad de Young se cumple que

$$\begin{aligned}|\vec{u}\cdot\vec{v}| &\leq \sum_{i=1}^{n}|u_iv_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\frac{|u_i|^p}{p}+\frac{|v_i|^q}{q}=\frac{\|\vec{u}\|_p^p}{p}+\frac{\|\vec{v}\|_q^q}{q}.\end{aligned}$$

Nuevamente, si $\|\vec{u}\|_p = \|\vec{v}\|_q = 1$, entonces vemos que la desigualdad de Hölder se cumple. Si $\vec{u} \neq 0 \neq \vec{v}$, entonces

$$\left|\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|_p}\cdot\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|_q}\right|\leq 1$$

luego, multiplicando a ambos lados por $\|\vec{u}\|_p\,\|\vec{v}\|_q$ se obtiene el resultado buscado. □

De la desigualdad de Hölder se deduce el siguiente conocido resultado:

Teorema 5.46 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz): Dados $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$, entonces

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|_2\,\|\vec{v}\|_2.$$

6

Derivadas en varias variables

6.1. Derivada en espacios vectoriales

Nuestro objetivo en está sección será tratar de generalizar el concepto de derivada, para ello notemos que en $\mathbb{R}$ una función es derivable en a si

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = k,$$

otra forma sería notar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-kh}{h} = 0.$$

donde notemos que $g(h) := kh$ es una función lineal.

> **Definición 6.1 – *Derivada en espacios vectoriales*:** Sean V, W un par de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales normados y sea $f : A \subseteq V \to W$. Se dice que f es *diferenciable* en $a \in \operatorname{Int} A$ si existe una transformación lineal $T : V \to W$ tal que
>
> $$\lim_{h\to \vec{0}} \frac{\|f(a+h)-f(a)-T(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Teorema 6.2: Si $f : A \subseteq V \to W$ es diferenciable en $a \in \operatorname{Int} A$, entonces es continua en a.

Teorema 6.3: Si $f : A \subseteq V \to W$ es diferenciable en $a \in \operatorname{Int} A$, entonces existe una **única** transformación lineal $T : V \to W$ tal que

$$\lim_{h\to\vec{0}} \frac{\|f(a+h) - f(a) - T(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Demostración: Sean T, S lineales que cumplan con el enunciado. Si $d(h) := f(a+h) - f(a)$, entonces vemos que se cumple que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to\vec{0}} \frac{\|T(h) - S(h)\|}{\|h\|} &= \lim_{h\to\vec{0}} \frac{\|T(h) - d(h) + d(h) - S(h)\|}{\|h\|} \\ &\leq \lim_{h\to\vec{0}} \frac{\|T(h) - d(h)\|}{\|h\|} + \lim_{h\to\vec{0}} \frac{\|d(h) - S(h)\|}{\|h\|} = 0.\end{aligned}$$

Si $\vec{v} \in V_{\neq\vec{0}}$, entonces vemos que $\lim_{t\to 0} t\vec{v} = \vec{0}$, luego

$$\frac{\|T(\vec{v}) - S(\vec{v})\|}{\|\vec{v}\|} = \lim_{t\to 0} \frac{\|T(t\vec{v}) - S(t\vec{v})\|}{\|t\vec{v}\|} = 0.$$

es decir, para todo $\vec{v} \in V$ se cumple que $T(\vec{v}) = S(\vec{v})$, ergo $T = S$. □

Así ampliamos la definición de "derivable", pero aún no tenemos un valor para la derivada, para ello se define:

Definición 6.4 – *Matriz jacobiana*: Si $f : A \subseteq V \to W$ es diferenciable en $a \in \operatorname{Int} A$, se le llama *matriz jacobiana* de f en a, denotada por $Df(a)$, a la matriz determinada por la única transformación lineal que hace a la función diferenciable en dicho punto.

Se le llama la *derivada direccional* de f en a respecto de $\vec{u} \neq \vec{0}$ al siguiente límite (si existe):

$$f'(a; \vec{u}) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\vec{u}) - f(a)}{t}.$$

Teorema 6.5: Sea $f : A \subseteq V \to W$ con $a \in \operatorname{Int} A$. f es diferenciable en a syss para todo $\vec{u} \neq \vec{0}$ existe la derivada direccional de f en a respecto a $\vec{u}$. En cuyo caso se cumple que

$$f'(a; \vec{u}) = Df(a) \cdot \vec{u}. \tag{6.1}$$

Esto último nos permite calcular la jacobiana de la función.

7

Integración y Teoría de la Medida

7.1. Teoría de la Medida

La medida pretende ser un método para cálcular una generalización de la longitud, el área y el volúmen; en principio es fácil construir medidas sobre conjuntos simples como segmentos, rectángulos y paralelepípedos, pero también nos gustaría medir cosas que no estén formadas a partir de finitas cajas, como esferas o conos, por ejemplo. La medida es una definición general de un objeto, sin embargo, hay unas medidas en particular que nos gustaría construir que corresponden a la medida de Jordan y la medida de Lebesgue, para lo cual, definiremos objetos más sencillos (como las medidas finitamente aditivas, y luego la medida externa) para poder extenderlos progresivamente. Para lograr nuestro objetivo hacen falta muchas definiciones y conceptos nuevos, no obstante prometo que no ha de ser demasiado distinto de las complicaciones que podría haber tenido la introducción a topología.

Definición 7.1 – *Espacio de medida*: Sea Ω un conjunto que, al igual que en topología llamaremos *espacio*, se dice que $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-*álgebra* si:

1. $\varnothing \in \Sigma$.
2. $A \in \Sigma \implies A^c \in \Sigma$.

3. $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma \implies \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \Sigma$.

Una función $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ se dice una *medida finitamente aditiva* si:

1. $\mu(\varnothing) = 0$.
2. Si $A_1, \cdots, A_n \in \Sigma$ son disjuntos dos a dos, entonces $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$.

Si además, cumple:

3. Si $A_{i i\in\mathbb{N}} \in \Sigma$ son disjuntos dos a dos, entonces $\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$.

entonces μ se dice una *medida* (a secas).

Una terna (Ω, B, μ) donde B es un álgebra booleana sobre Ω y μ finitamente aditiva, se dice un *espacio de medida booleana*. Una terna (Ω, Σ, μ) donde Σ es una σ-álgebra en Ω y μ una medida sobre Σ se dice un *espacio de medida*. Un elemento de Σ se dice un *conjunto medible*.

Ejemplos. Se cumple:

- $\{\varnothing, \Omega\}$ y $\mathcal{P}(\Omega)$ son σ-álgebras, usualmente llamadas *impropias*.
- Si $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$, entonces
$$\mu(A) := \begin{cases} |A|, & A \text{ finito} \\ +\infty, & A \text{ infinito} \end{cases}$$
es una medida, llamada la *medida de contabilidad*.
- Si $x \in \Omega$ arbitrario y $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$, entonces:
$$\delta_x(A) := \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$$
es una medida, llamada la *medida de Dirac*.

Proposición 7.2: Se cumple que:

1. La intersección de σ-álgebras sobre un mismo conjunto Ω da otra σ-álgebra sobre Ω.
2. Dada una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω, existe una mínima σ-álgebra tal que $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$, en ese caso se le dice a Σ la σ-álgebra inducida por $\mathcal{F}$.

Llamamos σ-álgebra de Borel a aquella inducida por la topología de un espacio topológico. Los conjuntos de la σ-álgebra de Borel se dicen conjuntos de Borel. Es fácil notar que los abiertos, cerrados, F_σ y G_δ son conjuntos de Borel.

Proposición 7.3: Si Ω es un espacio de medida booleana, entonces, para todo A, B medibles:

1. Si A, B son disjuntos, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
2. Si $A \subseteq B$ y $\mu(A) < +\infty$; entonces $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
3. Si $A \subseteq B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.
4. $\mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
5. Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es medibles y su unión también, entonces
$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i).$$
6. Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es medibles, su unión también y $A_i \subseteq A_{i+1}$, entonces
$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sup_n \mu(A_n).$$
7. Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es medibles, su unión también, $A_i \supseteq A_{i+1}$ y $\mu(A_0) < +\infty$, entonces
$$\mu\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \inf_n \mu(A_n).$$

Definición 7.4: Un subconjunto de un espacio de medida se dice *nulo* si posee medida nula. Un espacio de medida es *completo* si todo subconjunto de un conjunto nulo es medible (y por lo tanto, es nulo también).

Proposición 7.5: Si (Ω, Σ, μ) es de medida, entonces posee una extensión mínima tal que

$$\bar{\Sigma} := \{M \cup S : M \in \Sigma \land S \subseteq N \land \mu(N) = 0\}$$

es un σ-álgebra que extiende a Σ y $\bar{\mu}$ es una medida sobre $\bar{\Sigma}$ tal que

$$\bar{\mu}(M \cup S) = \mu(M)$$

si S es subconjunto de un nulo y M es μ-medible.

Definición 7.6: Una función $\varphi : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ se dice una *medida externa* si:

1. $\varphi(\varnothing) = 0$.
2. $\varphi\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(A_i)$.

Un subconjunto $M \subseteq \Omega$ se dice φ-medible si para todo $A \subseteq \Omega$ se cumple

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap M) + \varphi(A \cap M^c).$$

Claramente toda medida finitamente aditiva sobre $\mathcal{P}(A)$ es externa, sin embargo, no toda medida finitamente aditiva está definida en $\mathcal{P}(A)$, pero veremos cómo hacerlo luego. En lo sucesivo φ siempre representará una medida externa.

Proposición 7.7: Se cumple:

1. Si $A \subseteq B$, entonces $\varphi(A) \leq \varphi(B)$.
2. Si N es tal que $\varphi(N) = 0$, entonces N es φ-medible. En particular, $\varnothing$ es φ-medible.
3. Si M es φ-medible, M^c también lo es.
4. Si M, N son φ-medibles, $M \cup N$ también lo es.

Demostración: Probaremos la última, si A es un conjunto cualquiera, como M es φ-medible entonces

$$\varphi(A \cap N^c) = \varphi(A \cap N^c \cap M) + \varphi(A \cap N^c \cap M^c).$$

Definamos $U := M \cap N$, nótese que $U^c = M^c \cap N^c$ y que $A \cap U = (A \cap N) \cup (A \cap N^c \cap M)$, luego

$$\varphi(A \cap U) \leq \varphi(A \cap N) + \varphi(A \cap M \cap N^c).$$

Observe el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned}\varphi(A\cap U)+\varphi(A\cap U^c) &\le \varphi(A\cap N)+\varphi(A\cap M\cap N^c)+\varphi(A\cap U^c)\\ &= \varphi(A\cap N)+\varphi(A\cap N^c)=\varphi(A),\end{aligned}$$

como se quería probar. □

Lema 7.8: Si $M_1,\dots,M_n$ son una secuencia finita de conjunto φ-medibles dos a dos y A es arbitrario, entonces

$$\varphi\left(A\cap\bigcup_{i=1}^n M_i\right)=\sum_{i=1}^n\varphi(A\cap M_i).$$

Hint: Usar inducción.

> ***Teorema 7.9 – Teorema de extensión de Carathéodory:*** Si φ es una medida externa, entonces si Σ_φ es la familia de subconjuntos φ-medibles se cumple que $\mu:=\varphi\restriction\Sigma_\varphi$ es una medida completa y Σ_φ un σ-álgebra.

Demostración: **Los φ-medibles forman un σ-álgebra.** De la proposición anterior se deduce la completitud y que el conjunto de medibles es un álgebra booleana, de lo cuál simplemente desprenderemos que la resta de medibles es medible; ahora veremos que los medibles también son cerrados bajo uniones numerables. Sean $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de φ-medibles, sea

$$E_k:=\bigcup_{i=0}^k M_i,\quad M:=\bigcup_{i=0}^\infty M_i.$$

Por definición $E_k\subseteq M$, ergo, $E_k^c\supseteq M^c$; es claro que los E_k son φ-medibles, luego, para A arbitrario:

$$\varphi(A)=\varphi(A\cap E_k)+\varphi(A\cap E_k^c)\ge\varphi(A\cap E_k)+\varphi(A\cap M^c).$$

Aquí nos permitiremos definir $F_0:=M_0$ y $F_{n+1}:=M_{n+1}\setminus E_n$, de modo que $E_k=\bigcup_{i=0}^k F_i$ y los F_i son disjuntos dos a dos, luego por el lema anterior

$$\varphi(A)\ge\sum_{i=0}^k\varphi(A\cap F_i)+\varphi(A\cap M^c),$$

con lo que se concluye que

$$\varphi(A) \geq \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(A \cap F_i) + \varphi(A \cap M^c) \geq \varphi(A \cap M) + \varphi(A \cap M^c).$$

φ **es medida.** Se sabe que $\varphi(\varnothing) = 0$ y de que sólo toma valores positivos. En primer lugar veamos un dato sencillo, que si A, B son φ-medibles disjuntos entonces:

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B),$$

esto se deduce porque A es φ-medible, luego con $U := A \cap B$ se concluye que

$$\varphi(U) = \varphi(U \cap A) + \varphi(U \cap A^c).$$

Sea $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de φ-medibles disjuntos dos a dos, sea $E_k := \bigcup_{i=0}^{k} M_i$ y $M := \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$. Por definición de medida externa tenemos una desigualdad, probaremos la contraria, para ello usaremos el dato anterior y el que $E_k \subseteq M$ para notar que

$$\sum_{i=0}^{k} \varphi(M_i) = \varphi(E_k) \leq \varphi(M),$$

luego como es cota superior se cumple que $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi(M_i) \leq \varphi(M)$, que es lo que se quería probar. □

Definición 7.10 – *Pre-medida*: Si $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \to [0, +\infty]$ es una medida finitamente aditiva que cumple que: Si $E_{i i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}_0$ son disjuntos dos a dos, tales que $E := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \mathcal{B}_0$, entonces

$$\mu_0\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_0(E_i).$$

Entonces se dice que μ_0 es una *pre-medida*.

Teorema 7.11 – *Teorema de extensión de Hahn-Kolmogorov*: Toda pre-medida está contenida en una medida completa.

Demostración: Sea μ_0 una pre-medida sobre $\mathcal{B}_0$, definimos $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ como

$$\mu_e(S) := \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_0(A_i) : S \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \wedge \forall i \in \mathbb{N}\ (A_i \in \mathcal{B}_0)\right\}.$$

Es fácil notar que μ_e es un medida externa, pero basta probar dos cosas más:

Todo μ_0-medible es μ_e-medible. Sea $M \in \mathcal{B}_0$ y A arbitrario, hemos de probar que

$$\mu_e(A) \geq \mu_e(A \cap M) + \mu_e(A \cap M^c).$$

Si $\mu_e(A) = +\infty$ entonces es trivial, así que supondremos lo contrario. Sea $\epsilon > 0$, por definición de μ_e se cumple que existe una sucesión $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}_0$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i$ y que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_0(M_i) \leq \mu_e(A) + \epsilon,$$

luego la sucesión $\{M_i \cap M\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}_0$ cubre a $A \cap M$ y análogamente se cumple que

$$\mu_e(A \cap M) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_0(M_i \cap M), \quad \mu_e(A \cap M^c) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_0(M_i \cap M^c).$$

Como μ_0 es una pre-medida, entonces $\mu_0(M_i \cap M) + \mu_0(M_i \cap M^c) = \mu_0(M_i)$, por lo que

$$\mu_e(A \cap M) + \mu_e(A \cap M^c) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_0(M_i) \leq \mu_e(A) + \epsilon,$$

y como se cumple para cualquier $\epsilon > 0$, en particular, se da lo que se quería probar.

μ_e concuerda con μ_0. Es inmediato que si $M \in \mathcal{B}_0$, entonces $\mu_e(M) \leq \mu_0(M)$. Sea $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}_0$ tal que cubre a M, entonces definimos

$$F_k := E_k \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} E_i$$

que es una sucesión de μ_0-medibles disjuntos dos a dos que cubren a M, luego $G_k := F_k \cap M$ es también una sucesión de μ_0-medibles disjuntos dos a dos, pero que cumplen que su unión (que es M) pertenece a $\mathcal{B}_0$, luego, por definición de pre-medida, la suma de sus medidas ha de ser $\mu_0(M)$ probando así que $\mu_0(M) \leq \mu_e(M)$. □

La extensión construida en la demostración le llamaremos la extensión de Hahn-Kolmogorov, y análogamente con la extensión de Carathéodory.

Las dos siguientes subsecciones presentan ejemplos clásicos de como aplicar las construcciones que hemos realizado:

§7.1.1 Medida de Jordan y de Lebesgue. La medida de Jordan es un ejemplo de una (casi) medida intuitiva, su estudio es opcional, sin embargo otorga la intuición de cómo conseguir construir la medida de Lebesgue.

Definición 7.12: Llamamos una *celda* a un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que resuta el producto de intervalos acotados. Denotamos por $\mathcal{C}^n$ al conjunto de las celdas de $\mathbb{R}^n$. Otro subconjunto es *elemental* si es la unión de finitas celdas. Denotamos por $\mathcal{E}^n$ al conjunto de las figuras elementales de $\mathbb{R}^n$.

Se define $m_c : \mathcal{C}^n \to [0, +\infty)$ como prosigue, si $(I_i)_{i=1}^n$ es una sucesión de intervalos tales que $a_k := \inf I_k$ y $b_k := \sup I_k$, entonces

$$m_c\left(\prod_{i=1}^n I_i\right) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

De momento, m_c no resulta ser ni siquiera una medida finitamente aditiva, pero pretendemos extenderla a una.

Proposición 7.13: Si $A, B \in \mathcal{E}^n$, entonces:

1. $A \cup B \in \mathcal{E}^n$.
2. $A \cap B \in \mathcal{E}^n$.
3. $A \setminus B \in \mathcal{E}^n$.
4. $\vec{v} + A \in \mathcal{E}^n$, donde $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Demostración: Supongamos que $A = \bigcup_{k=1}^p C_k$ y $B = \bigcup_{k=1}^q D_k$ con $C_k, D_k \in \mathcal{C}^n$.

1. Trivial.
2. Basta notar que
$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^p \bigcup_{j=1}^q (C_i \cap D_j),$$
y queda al lector ver que la intersección de celdas es una celda.
3. Basta probar que si B está contenido en una celda C, entonces $C \setminus B \in \mathcal{E}^n$ (pues en cuyo caso $A \setminus B = A \cap (C \setminus B)$ con $A \cup B \subseteq C$).
4. Ejercicio para el lector.

□

Lema 7.14: Si $E \in \mathcal{E}^n$, entonces:

1. E es la unión de cajas disjuntas dos a dos.
2. Si $A_1, \dots, A_p$ y $B_1, \dots, B_q$ son sucesiones finitas de cajas disjuntas dos a dos tales que $\bigcup_{i=1}^p A_i = \bigcup_{i=1}^q B_i$, entonces $\sum_{i=1}^p \mu_c(A_i) = \sum_{i=1}^q \mu_c(B_i)$.

Demostración: 1. Supongamos que $n = 1$, en cuyo caso $E = I_1 \cup \dots \cup I_k$, luego hay a lo más $2k$ puntos que representan los extremos de los intervalos, luego bastaría una simple inducción para notar que para k intervalos se pueden reemplazar por una familia finita disjunta de ellos. Si $n > 1$, entonces $E = C_1 \cup \dots \cup C_k$ donde para todo $i = 1, \dots, k$ se cumple que $C_i := \prod_{j=1}^n I_{i,j}$ ...

2. Para ello veremos que si I es un intervalo, entonces

$$m_c(I) = \lim_n \frac{1}{n} \left| I \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z} \right|,$$

en efecto supongamos que $I = [a, b]$, entonces

$$\left| [a, b] \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z} \right| = |\{m \in \mathbb{Z} : na \leq m \leq nb\}|$$

notemos que $\{\lfloor na \rfloor + 1, \dots, \lfloor nb \rfloor\} \subseteq \{m \in \mathbb{Z} : na \leq m \leq nb\} \subseteq \{\lfloor na \rfloor, \dots, \lfloor nb \rfloor + 1\}$. Luego se cumple que el conjunto tiene un cardinal entre $\lfloor nb \rfloor - \lfloor na \rfloor$ y $\lfloor nb \rfloor - \lfloor na \rfloor + 2$, y se sabe que

$$\lim_n \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$$

(¿por qué?), por ende se cumple lo deseado.

Luego, si $C := \prod_{i=1}^d I_i \in \mathcal{C}^d$, entonces

$$m_c(C) = \lim_n \frac{1}{n^d} \left| C \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^d \right|;$$

con lo cual es fácil probar que si $E := \bigcup_{i=1}^p A_i$ donde A_i son cajas disjuntas dos a dos, entonces

$$\sum_{i=1}^p m_c(A_i) = \lim_n \frac{1}{n^d} \left| E \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^d \right|$$

donde la expresión de la derecha no depende de la partición elegida.

□

La medida finitamente aditiva definida en el último inciso la llamaremos *medida elemental*.

Teorema 7.15: Existe una única medida finitamente aditiva $m : \mathcal{E}^n \to [0, +\infty)$ tal que:

1. $m([0,1]^n) = 1$.
2. $m(\vec{v} + E) = m(E)$ para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y $E \in \mathcal{E}^n$.

Definición 7.16 – *Medida de Jordan*: Dado $A \subseteq \mathbb{R}^d$, denotamos

$$J_*(A) := \sup\{m_e(E) : A \supseteq E \in \mathcal{E}^d\}, \; J^*(A) := \inf\{m_e(E) : A \subseteq E \in \mathcal{E}^d\};$$

donde m_e es la medida elemental.

Diremos que un conjunto A es Jordan-medible si $J_*(A) = J^*(A) =: m_J(A)$ donde m_J denota la *medida de Jordan* (conste que aún no hemos comprobado que sea una medida). La clase de los conjuntos Jordan-medibles de $\mathbb{R}^d$ se denota $\mathcal{J}^d$.

Proposición 7.17: Un conjunto acotado $A \subseteq \mathbb{R}^d$ es Jordan-medible syss para todo $\epsilon > 0$ existen E_1, E_2 elementales tales que $E_1 \subseteq A \subseteq E_2$ y que $m_e(E_2 \setminus E_1) < \epsilon$.

Demostración: $\Longrightarrow$. Si A es Jordan-medible, entonces por definición de supremo e ínfimo para todo $\epsilon > 0$ existen E_1, E_2 elementales tales que $E_1 \subseteq A \subseteq E_2$ y que $m_e(E_2) - m_J(A) < \epsilon/2$ y $m_J(A) - m_e(E_2) < \epsilon/2$, luego

$$m_e(E_2 \setminus E_1) = m_e(E_2) - m_e(E_1) < \epsilon.$$

$\Longleftarrow$. Por definición se cumple que

$$0 \leq J^*(A) - J_*(A) \leq m_e(E_2) - m_e(E_1) = m_e(E_2 \setminus E_1) < \epsilon,$$

para todo $\epsilon > 0$, luego $J_*(A) = J^*(A)$, es decir, A es Jordan-medible. □

Teorema 7.18: $\mathcal{J}^d$ es un álgebra que contiene a $\mathcal{E}^d$ y la medida de Jordan es una medida finitamente aditiva que extiende a la medida elemental.

Demostración: Es claro que las figuras elementales son Jordan-medibles y que conservan su medida.

Sea $\epsilon > 0$ y sean A, B son Jordan-medibles, entonces la propiedad anterior comprueba que existen A_1, A_2, B_1, B_2 elementales tales que $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$, $m_e(A_2 \setminus A_1) < \epsilon/2$ y análogamente para B.
Unión de finitos Jordan-medibles es Jordan-medible: Sea $C_1 := A_1 \cup B_1 \subseteq A \cup B \subseteq C_2 := A_2 \cup B_2$ y vemos que se cumple que

$$m_e(C_2 \setminus C_1) = m_e\big((A_2 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus B_1)\big) \leq m_e(A_2 \setminus A_1) + m_e(B_2 \setminus B_1) < \epsilon.$$

Queda al lector probar que la propiedad aditiva se da.
Resta de Jordan-medibles es Jordan-medible: Sea $D_1 := A_1 \setminus B_2 \subseteq A \setminus B \subseteq D_2 := B_2 \setminus A_1$, entonces

$$m_e(D_2 \setminus D_1) = m_e\big((A_2 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus B_1)\big) < \epsilon.$$

□

Teorema 7.19: La medida de Jordan es una pre-medida, i.e., si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{J}^d$ son tales que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{J}^d$, entonces

$$m_J\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} m_J(A_i).$$

Demostración: Sea $A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\sum_{i=0}^{n} m_J(A_i) = m_J\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right) \leq m_J(A),$$

luego $\sum_{i=0}^{\infty} m_J(A_i) \leq m_J(A)$.

Sea $\epsilon > 0$, para la otra implicancia utilizaremos la proposición anterior para conseguir un K elemental y compacto tal que $K \subseteq A$ y para el cuál $m_J(A \setminus K) < \epsilon/2$. Por otro lado, para todo A_i existe un elemental y abierto U_i tal que $A_i \subseteq U_i$ y $m_J(U_i \setminus A_i) < \epsilon/2^{i+2}$. Como $K \subseteq A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ y K es compacto, entonces existe $U_{k_1}, \dots, U_{k_n}$ que cubren a K, luego

$$\begin{aligned} m_J(A) = m_J(A \setminus K) + m_J(K) &\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} m_J(U_{k_i}) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} m_J(A_{k_i}) + \sum_{i=1}^{n} m_J(U_{k_i} \setminus A_{k_i}) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i\in\mathbb{N}} m_J(A_i) + \sum_{i\in\mathbb{N}} m_J(U_i \setminus A_i) \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} m_J(A_i) + \epsilon,$$

para todo $\epsilon > 0$, luego se sostiene la igualdad. □

Como es costumbre queda al lector encontrar y erradicar el uso de elección.

Definición 7.20: Se le llama *medida de Lebesgue* a la extensión de Hahn-Kolmogorov de la medida de Jordan. Los clase de los conjuntos Lebesgue-medibles se denota por $\mathcal{M}^d$. En lo sucesivo denotaremos μ a la medida de Lebesgue de no haber ambigüedad, y a los conjuntos Lebesgue-medibles les llamaremos medibles a secas.

Como ejercicio para el lector pruebe que los conjuntos de Borel son Lebesgue-medibles.

Pero la segunda es un conocido uso de AE:

Teorema (AE) 7.21: Hay conjuntos que no son Lebesgue-medibles.

Demostración: Consideremos a $\mathbb{Q}$ como subcuerpo de $\mathbb{R}$, luego $\mathbb{R}/\mathbb{Q} := \{S \subseteq \mathbb{R} : x, y \in S \iff x - y \in \mathbb{Q}\}$. Invocando el AE para toda clase de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ elegimos un elemento en el intervalo $[0, 1]$ y con ella conformamos a E.

Probaremos que E es no Lebesgue-medible: En primer lugar, notemos que para todo $x \in [0, 1]$ existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x + q \in E$ y es fácil probar que $-1 \leq q \leq q$, por ende

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (E + q).$$

Y también, es fácil notar que para todo $y \in E \subseteq [0, 1]$ se cumple que $y + q \in [-1, 2]$, ergo

$$\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (E + q) \subseteq [-1, 2].$$

Notemos finalmente que los $E + q$'s son disjuntos dos a dos. Ahora supongamos que E fuese Lebesgue-medible, entonces por definición de medida se cumple que

$$\mu\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (E + q)\right) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \mu(E + q).$$

Como μ es invariante a traslaciones se cumple que $\mu(E+q) = \mu(E)$, luego sucede que

$$\mu([0,1]) = 1 \leq \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \mu(E) \leq 3 = \mu([-1,2]),$$

pero esto es imposible, luego E no puede ser Lebesgue-medible. □

Curiosamente, Solovay probó que hay un modelo de ZF consistente, donde AE falla y no hay conjuntos no Lebesgue-medibles.

Esto induce a preguntarse si tal vez podemos reiterar el proceso desde cero y construir una medida no-trivial que pueda medir todos los conjuntos de $\mathbb{R}$. A lo cual, Ulam ofrece una respuesta:

Teorema 7.22 (Ulam): Sea $X := [0, \aleph_1)$ y sea μ una medida definida sobre todo subconjunto de X tal que $\mu(X) < +\infty$ y $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in X$, entonces μ es la medida nula.

Demostración: Por definición, para todo $x \in X$ se cumple que $A_x := \{y \in X : y < x\}$ es a lo más numerable, luego existe una inyección a $\mathbb{N}$, en particular sea

$$f(*, x) : A_x \to \mathbb{N}$$

dicha inyección.

Se define

$$B(x,n) := \{y \in X : x < y \wedge f(x,y) = n\},$$

luego para un $n \in \mathbb{N}$ fijo se cumple que $B(x_1, n)$ y $B(x_2, n)$ son disjuntos si $x_1 \neq x_2$. Como $\mu(X) < +\infty$, debe darse que $\mu(B(x,n)) > 0$ en a lo más numerables x, luego ha de existir un $z \in X$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mu(B(z,n)) = 0$. Definamos $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(z,n)$, luego $\mu(B) = 0$ y para todo $y > z$ se cumple que $y \in B(z, f(z,y)) \subseteq B$, por ende, $X = B \cup A_z$, luego $\mu(X) \leq \mu(B) + \mu(A_z) = 0$, por lo que μ es la medida nula. □

Si se asume la hipótesis del continuo, el teorema de Ulam indica que no hay tal cosa como una medida absolutamente completa sobre $\mathbb{R}$. Hay una forma, un poco más larga de aplicar el resultado de Ulam para probar que basta asumir AE para concluir el resultado para $\mathbb{R}$.

7.2. Integración

Vamos a comenzar con un mito: no existe tal cosa como *la* integral, sino *muchas* integrales. Una verdad sobre la integral es que en esencia es una forma de "medir el área bajo una curva", sin embargo hay varias formas de lograr dicho objetivo, en esta sección aplicaremos algunas y las relacionaremos a los conceptos de medida.

§7.2.1 Integral de Newton. Newton fue el primero en concebir las ideas de la integral como una *antiderivada*, sin embargo, esta definición no nos permite hacer el nexo con lo de "área (o medida) bajo la curva" mas sirve como preparación para unos teoremas importantes de la teoría de la integración.

> **Definición 7.23:** Si una función continua real f es tal que existe g tal que $g' = f$, entonces llamamos a g una *primitiva* de f. Por teorema vimos que si f posee dos primitivas g, h, entonces $g-h$ es una constante. Se denota por $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ al conjunto de primitivas de f (que puede ser vacío). Si f posee primitiva g entonces se denota
>
> $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := [g]_a^b = g(b) - g(a),$$
>
> que está bien definido pues si h es también primitiva, entonces la constante se cancela.

Proposición 7.24: Si f, g son funciones con primitiva, entonces para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple:

1. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. Para todo $c \in \mathbb{R}$

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. $$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. Si $a < b$ y $f \leq g$ en todo el dominio, entonces

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demostración: Sólo probaremos la última, si $f \leq g$, entonces $0 \leq h := g - f$ y basta probar que $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$. Como h tiene una primitiva η, por el teorema del valor medio se cumple que

$$\frac{\eta(b) - \eta(a)}{b - a} = h(x)$$

para algún $x \in (a, b)$, luego $h(x) \geq 0$ por construcción y $b - a > 0$, por ende, queda probado. □

Éstas propiedades básicas que se cumplen con la integral de Newton son las que queremos que se conserven entre cualquier definición de integración.

§7.2.2 Integral de Riemann. Ésta es la "integral clásica" y su descripción básica, bastante popular por cierto, consiste en aproximar el área por rectángulos de largo infinitesimal. Para ello, al igual que con la medida de Jordan, vamos a dar una aproximación "por abajo" y otra "por arriba" y luego hemos de comparar ambas.

Definición 7.25: Si f es una función real, $P = \{a_1, \dots, a_n\}$ donde $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, entonces se define

$$s(f, P) := \sum_{i=1}^{n-1} \inf\big(f[a_i, a_{i+1}]\big)(a_{i+1} - a_i),$$
$$S(f, P) := \sum_{i=1}^{n-1} \sup\big(f[a_i, a_{i+1}]\big)(a_{i+1} - a_i).$$

Denotamos $\|P\| := \max\{a_{i+1} - a_i : i = 1, 2, \dots, n-1\}$. Se escribe $P \in \Pi(a, b)$ si P es finito y $\min P = a$ y $\max P = b$.

Proposición 7.26: Si f es una función real y $P \in \Pi(a, b)$, entonces:

1. $s(f, P) \leq S(f, P)$.
2. Si $P \subseteq Q \in \Pi(a, b)$, entonces

$$s(f, P) \leq s(f, Q) \quad S(f, Q) \leq S(f, P).$$

3. Si $Q \in \Pi(a,b)$, entonces $s(f,P) \leq S(f,Q)$.

DEMOSTRACIÓN: Para la última simplemente basta considerar $R := P \cup Q$ y ver que $P, Q \subseteq R$ tal que $s(f,P) \leq s(f,R) \leq S(f,R) \leq s(f,Q)$. $\square$

Definición 7.27 – *Integral de Riemann*: Si f es una función real acotada en $[a,b]$, entonces se define:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{s(f,P) : P \in \Pi([a,b])\},$$
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \text{ínf}\{S(f,P) : P \in \Pi(a,b)\}.$$

f se dice Riemann-integrable en $[a,b]$ si los valores de arriba concuerdan, en cuyo caso se denota

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

denotamos por $\mathcal{R}(a,b)$ al conjunto de funciones Riemann-integrables en $[a,b]$.

Proposición 7.28: Si f es una función real acotada en $[a,b]$, entonces siempre se cumple que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ejemplo (función de Dirichlet). Sea

$$f(x) := \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

entonces $f(x)$ es discontinua en todo punto de su dominio (de hecho, no existen límites en ningún punto de su dominio tampoco) y no es Riemann-integrable en ningún intervalo pues

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \overline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Una observación es que si bien la función se comporta de manera extraña, los 1s suceden exclusivamente en un conjunto “pequeño” para la medida de Lebesgue, luego lo normal sería esperar que de hecho su “aporte” sea nulo y que, por ende la medida bajo el gráfico sea nula. Ese pensamiento lo expandiremos con la integral de Lebesgue más tarde.

Teorema 7.29: Si f es una función real, entonces es $f \in \mathcal{R}(a,b)$ syss para todo $\epsilon > 0$ existe $P \in \Pi(a,b)$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$.

Demostración: $\Longrightarrow$. Sea $\epsilon > 0$ y llamemos $I := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Luego, por definición existe $Q \in \Pi(a,b)$ tal que $I - \epsilon/3 \leq s(f,Q)$ y existe $R \in \Pi(a,b)$ tal que $S(f,R) \leq I + \epsilon/3$. Sea $P := Q \cup R \in \Pi(a,b)$, luego $I - \epsilon/3 \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq I + \epsilon/3$, ergo, $S(f,P) - s(f,P) \leq \frac{2}{3}\epsilon < \epsilon$.

$\Longleftarrow$. Para que sea Riemann-integrable basta probar que

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Y nótese que $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S(f,P)$ y $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq s(f,P)$ para todo $P \in \Pi(a,b)$, luego

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S(f,P) - s(f,P).$$

Y dado que la diferencia es menor que cualquier epsilon positivo, y sabemos que la diferencia no puede ser estrictamente negativa, sólo puede ser cero. □

Teorema 7.30: Si f es continua en $[a,b]$, entonces es Riemann-integrable en $[a,b]$.

Hint: Usar la continuidad uniforme.

Teorema 7.31: Si $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$ entonces:

1. $f + g \in \mathcal{R}(a,b)$ y

$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que $\lambda f \in \mathcal{R}(a,b)$ y
$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. Si $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Teorema 7.32: Si $a < b < c$ reales, entonces $f \in \mathcal{R}(a,c)$ syss $f \in \mathcal{R}(a,b)$ y $f \in \mathcal{R}(b,c)$.

Demostración: $\implies$. Si $f \in \mathcal{R}(a,c)$, entonces existe $P \in \Pi(a,c)$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$ por el teorema 7.29, luego $P \subseteq P' := P \cup \{b\}$, luego P' también satisface la condición y luego se define $Q := P' \cap [a,b]$ y $R := P' \cap [b,c]$ de modo que $Q \cup R = P'$ y es fácil probar que $S(f,P') = S(f,Q) + S(f,R)$ y análogo con la función s, de modo que
$$S(f,P') - s(f,P') = (S(f,Q) - s(f,Q)) + (S(f,R) - s(f,R)) < \epsilon.$$
Y como los sumandos son positivos, se concluye que cada uno es estrictamente menor que ϵ.

$\impliedby$. Es análogo. □

Teorema 7.33 – *Teorema fundamental del cálculo*: Se cumple:

1. Sea f continua en $[a,b]$. Definamos $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ como
$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$
entonces F es diferenciable en (a,b) y de hecho para todo $x \in (a,b)$ se cumple
$$F'(x) = f(x).$$
2. Si f es continua en $[a,b]$ y tiene primitiva F, entonces
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

(regla de Barrow).

Demostración:

1. Veamos por definición que

$$F'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ahora, nótese que $\inf f[x,x+h] \le f|_{[x,x+h]} \le \sup f[x,x+h]$ donde las funciones son constantes, de modo que su integral es la constante por h y:

$$\lim_{h\to 0} \inf f[x,x+h] \le F'(x) \le \lim_{h\to 0} \sup f[x,x+h],$$

pero como f es continua, los límites de la izquierda y derecha convergen a $f(x)$, por lo que, por el teorema del sandwich, el límite existe y es $f(x)$ como se quería probar.

2. Es corolario de la propiedad 1.

□

§7.2.3 Integral de Lebesgue. Además de las particiones o disecciones, otra forma de interpretar la integral de Riemann es que las funciones en un intervalo se aproximan por "funciones escalón" que son constantes en intervalos abiertos, y que sabemos integrar pues conocemos la medida de los intervalos. Pero del mismo modo podemos intercambiar los intervalos por cualquier conjunto (Lebesgue-)medible y obtener una integral que es mucho mejor:

Definición 7.34 – *Función simple*: Se dice que una función $s : \Omega \to [0,+\infty)$ con Ω de medida μ es *simple* si existen $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in [0,+\infty)$ y $E_1,\dots,E_n$ medibles disjuntos dos a dos tales que

$$s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{E_i}(x),$$

es decir, $s(x)$ toma el valor λ_i si $x \in E_i$ y 0 si x no está en ningún E_i.

Se le llama la *integral* de una función simple a

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{E_i}\,\mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu(E_i),$$

con el convenio de que $0\cdot\infty = \infty\cdot 0 = 0$. Se define también la integral de una función simple s en un conjunto medible E como

$$\int_E s\,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega s\chi_E\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i\mu(E_i \cap E).$$

En este sentido la función de Dirichlet no es más que una función simple según la medida de Lebesgue, luego su integral debería ser 0.

Proposición 7.35: Si s, t son funciones simples sobre un espacio de medida Ω, entonces:

1. $\nu(E) := \int_E s\,\mathrm{d}\mu$ es una medida sobre Ω.
2. Se cumple que
$$\int_\Omega (s+t)\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega t\,\mathrm{d}\mu.$$
3. Si $\lambda \geq 0$, entonces
$$\int_\Omega (\lambda s)\,\mathrm{d}\mu = \lambda\int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu.$$
4. Si $s \leq t$ en todo el dominio, entonces
$$\int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega t\,\mathrm{d}\mu.$$

Definición 7.36: Si $f : \Omega \to [0, +\infty)$ es una función medible, entonces se define su *integral de Lebesgue* como

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{\int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu : s \text{ simple} \land s \leq f\right\}.$$

Si E es un conjunto medible, entonces se define

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega f\chi_E\,\mathrm{d}\mu.$$

Proposición 7.37: Si f es Riemann-integrable en $[a, b]$, entonces

$$\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\mu = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hint: Basta notar que las funciones escalón son simples.

Apéndice

Índice alfabético

Índice de notación

$\vee, \wedge$	Disyuntor, "o lógico" y conjuntor, "y lógico" respectivamente.
$\implies$	Implica, entonces.
$\iff$	Si y sólo si.
$\forall, \exists$	Para todo, existe respectivamente.
$\in$	Pertenencia.
$\subseteq, \subset$	Subconjunto, subconjunto propio resp.
$\cup, \cap$	Unión e intersección binaria respectivamente.
$A \setminus B$	Resta conjuntista, A menos B.
A^c	Complemento de A (respecto a un universo relativo).
$A \times B$	Producto cartesiano de A por B.
$A_{\neq x}$	Abreviación de $A \setminus \{x\}$.
$f : A \to B$	Función f de dominio A y codominio B.
$f \circ g$	Composición de f con g. $(f \circ g)(x) = g(f(x))$.
$\mathcal{P}(A)$	Conjunto potencia de A.
resp.	Respectivamente.

syss	Si y sólo si.
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$	Conjuntos de números naturales, enteros y racionales resp.
$\aleph_0$	Cardinal numerable, cardinalidad de $\mathbb{N}$.
AE	Axioma de elección.
DE, AEN	Axioma de elecciones dependientes, y de elecciones numerables resp.
ZF(C)	Teoría de Zermelo-Fraenkel. La C representa el axioma de elección.
$(a, b]$	Intervalo de extremos a y b. La combinación de paréntesis y corchete determina si está abierto o cerrado, p. 4.
$\mathbb{R}$	Conjunto de números reales, p. 6.
$d(x, y)$	Distancia entre x e y, p. 8.
$B_r(x), B'_r(x)$	Bola abierta y cerrada resp. de radio r centrada en x, p. 8.
$\mathbb{M}, \overline{\mathbb{M}}, \mathbb{K}$	Un espacio pseudo-métrico, métrico y un cuerpo normado arbitrarios, resp, p. 9.
$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Sucesión de términos s_n. Se erradica el "$\in \mathbb{N}$" cuando no haya ambigüedad, p. 10.
$s_n \to L$	$(s_n)_n$ converge a L, p. 10.
$\lim_n s_n$	El límite de una sucesión, p. 10.
$\operatorname{diam}(A)$	Diámetro del conjunto A, p. 11.
$d(A, B);\ d(x, A)$	Distancia entre A y B, y entre A y x resp., p. 11.
$\sqrt[n]{x}$	Raíz n-ésima de x, p. 19.
$\zeta(s)$	Función dseta de Riemann. $\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$, p. 23.
$\limsup_n a_n, \liminf_n a_n$	Límite superior e inferior de a_n resp., p. 23.
$\exp(x)$	Función exponencial de x, p. 24.
$\overline{A}$, $\operatorname{Int} A$	Clausura e interior resp. de A, p. 34.

∂A	Frontera de A, p. 34.
A^{d}	Conjunto derivado (topológicamente) de A, p. 39.
$\lim_{x\to a} f(x) = L$	El límite único de f cerca de a es L, p. 39.
$C(X,Y), C(\mathbb{R})$	El conjunto de funciones continuas desde X a Y, y desde X a $\mathbb{R}$ resp., p. 39.
$X \cong Y$	X e Y son espacios homeomorfos, p. 40.
$D(\kappa)$	Un espacio discreto de cardinal κ, p. 40.
$d(X)$	Densidad de X, i.e., mínimo cardinal de sus subconjuntos densos, p. 41.
$w(X)$	Peso de X, i.e., el mínimo cardinal de sus bases, p. 42.
$\chi(x), \chi(X)$	Característica de x y del espacio resp, p. 42.
$\bigoplus_{i\in I} X_i$	Suma de espacios topológicos, p. 55.
$\mathbb{B}$	Álgebra booleana, p. 66.
$L(X)$	Número de Lindelöf de un espacio X, p. 84.
$x \perp y$	x e y son ortogonales, p. 104.
$A^{\perp}$	Complemento ortogonal de A, p. 104.
V'	Dual topológico del EVT V, i.e., el conjunto de los funcionales continuos de V, p. 109.
$L(f)$	Constante de Lipschitz, p. 112.
$C(x), Q(x)$	La componente conexa, cuasi-componente de x resp., p. 117.
$f', \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f$	Función derivada de f, p. 123.
$C^n(A)$	Clase de funciones de dominio A cuya n-ésima derivada existe y es continua. Si $n = \infty$ entonces se interpreta como que la función es diferenciable para todo natural, p. 134.
$T_a^n f(x)$	Expansión de Taylor de f en torno al punto a, p. 135.
$\ln x$	Logaritmo natural de x, p. 139.

$\Pi(a,b)$	Conjunto de los $P \subseteq \mathbb{R}$ finitos de mínimo a y máximo b, p. 167.
$\mathcal{R}(a,b)$	El conjunto de funciones Riemann-integrables en $[a,b]$, p. 168.

Bibliografía

Análisis real

1. CASTILLO, C. I. *Análisis matemático* `https://www.uv.es/ivorra/Libros/An.pdf` (2020).
2. ROYDEN, H. L. *Real Analysis* (Macmillan Publishing Company, 1963).
3. SIMON, B. *Real Analysis. A Comprehensive Course in Analysis* (American Mathematical Society, 1946).
4. TAO, T. *An Introduction to Measure Theory* (American Mathematical Society, 2011).
6. THOMSON, B. S., BRUCKNER, J. B. y BRUCKNER, A. M. *Elementary Real Analysis* `http://www.classicalrealanalysis.info/com/` (2001).
7. ZIEMER, W. P. y TORRES, M. *Modern Real Analysis* (Springer, 2017).

Topología

8. CASTILLO, C. I. *Topología* `https://www.uv.es/ivorra/Libros/T.pdf` (2020).
9. ENGELKING, R. *General Topology* La referencia más completa sobre este tópico, aunque no la más fácil de leer. (Heldermann Verlag, 1989).
10. HERRLICH, H. *Axiom of Choice* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006).

11. HOWES, N. R. *Modern Analysis and Topology* (Springer-Verlag New York, 1995).
12. STEEN, L. A. y SEEBACH, J. A. *Counterexamples in Topology* (Springer-Verlag New York, 1970).
13. VOIGT, J. *A Course on Topological Vector Spaces* (Birkhäuser, 2020).

Artículos

0. BRANDSMA, H. Arhangel'skiĭ's Theorem, A Proof. *Topology Explained.* `http://at.yorku.ca/p/a/c/a/14.htm` (2003).