Geometría

José Cuevas Barrientos

6 de julio de 2021

Índice general

Introducción

La geometría es probablemente la rama de las matemáticas más antiguas de las que el hombre ha tenido conocimiento alguno. Fue aplicada por generación tras generación de grandes civilizaciones y cada cultura respetada tiene indicios de alguna forma primitiva de este lenguaje.

Dicho esto, este libro fue escrito en nuestro periodo, de forma que conlleva las técnicas y terminología moderna que nos caracterizan, sin embargo, aun conserva cierto apego a los primeros trabajos, usualmente hoy descritos como *Geometría Elemental*, con esto me refiero principalmente a la **Geometría Euclideana**, que si bien no posee un capítulo en este libro, está "camuflado" bajo el primer capítulo, debido a ciertos formalismos a los que me siento arraigado. Por otro lado, esto es un puente para recalcarle al lector que, al igual que mi libro sobre análisis matemático, el texto aquí presente está hecho en función de ser leído sin conocimiento previo. A este tipo de teorías usualmente se les describe como *axiomáticas*, sin embargo, esto no significa que el lector no pueda o no deba tener cierto dominio sobre el tema, pues no redundaré en explicaciones que a mi criterio considere triviales, sino que obviaré de estas para lograr una escritura más condensada, pero veloz y eficaz para el preparamiento predominantemente universitario en respecto a lo que nos concierne.

Un pequeño paréntesis es que el libro utilizará terminología conjuntivista, es decir, los puntos serán considerados elementos de un conjunto más grande denominado "espacio", asimismo, las figuras o cuerpos geométricos se definen como subconjuntos del mismo. No redundaré en capítulos introductorios a la teoría lógica matemática ni a una teoría conjuntivista básica, ni me detendré a explicar la noción básica de *número* (de ser requerida) ni mucho menos de su propiedad de ser *real*; pues todas estas explicaciones ya las he dado a detalle en mi libro de análisis, y sino, fácilmente se encuentran en cualquier obra relacionada, por lo que sería tedioso tanto para mis lectores como para mi mismo el adentrarnos en formalismos ya retratados. Pido disculpas para aquellos no tan avanzados, pues sé que con estudio todos se pueden poner a la misma altura.

Para finalizar, el libro consta de varias figuras (hechas por el mismo autor), así como de teoremas (todos con su respectiva demostración) y ecuaciones enumeradas para poder llevar un registro ordenado y facilitar la lectura en general. Doy gracias a mis amigos Bastian Ruay, Camilo Lagos, Gabriel Barría; y a mi profesor José Luis Oyarzo por su ayuda y apoyo durante el desarrollo del texto.

Parte I.

Geometría sintética

1

Geometría Absoluta de Hilbert

La geometría suele dividirse en dos categorías: euclidea y no-euclidiana, lo que corresponde a un desacuerdo en torno al quinto axioma propuesto por el griego Euclides; sin embargo, aún todos los sistemas comparten los cuatro primeros axiomas (y más) que podemos considerar como *absolutos*. A principios del siglo XX, varios matemáticos, entre ellos, Hilbert, Tarski y Coxeter describen sistemas de geometría axiomática absoluta. Este primer capítulo comprenderá una síntesis bastante desarrollada de la teoría propuesta en **hilbert1902foundations** de Hilbert, adaptada para lo que algunos autores denominan *matemática moderna* –al ser más formal que la clásica–.

1.1. Axiomas de Hilbert

Aquí consideraremos un conjunto $\mathbb{E}$ llamado *espacio* y sus elementos llamados *puntos*, que usualmente denotaremos con letras mayúsculas. Toda figura es, entonces, nada más que subconjuntos del espacio.

§1.1.1 Axiomas de conexión (I). Aquí caracterizamos requisitos básicos para las nociones de "rectas" y "planos".

Axioma I, 1: Para todo par de puntos A, B distintos existe una *recta* que los contiene. A una de esas rectas les denotamos AB.

Axioma I, 2: Sean A, B, C puntos tales que $AB = AC = r$ y $B \neq C$, entonces $BC = r$. Dicho de otro modo, la recta que pasa por A y B es única.

Tres puntos serán llamados *colineales* syss son distintos entre sí y pertenecen a una misma recta.

Diremos que dos rectas se intersecan si su intersección como conjuntos no es vacía.

Teorema 1.1: Si dos rectas se intersecan, entonces lo hacen en un solo punto.

Axioma I, 3: Por tres puntos no colineales A, B, C pasa un plano. A uno de ellos le denotamos ABC.

Axioma I, 4: Si A, B, C, D son no-colineales tres a tres de modo que $ABC = ABD = \Pi$, entonces $BCD = \Pi$. El plano que pasa por tres puntos es único.

Se dice de cuatro puntos que son *coplanares* syss son distintos entre sí y pertenecen a un mismo plano.

Axioma I, 5: Si A, B pertenecen a un plano común Π, entonces toda su recta está contenida en el mismo plano, es decir, $AB \subseteq \Pi$.

Axioma I, 6: Si dos planos comparten un punto en común, entonces comparten dos.

Teorema 1.2: Si dos planos se intersecan, entonces lo hacen en exactamente una recta.

Axioma I, 7: Toda recta contiene al menos dos puntos distintos. Toda plano contiene al menos tres no colineales. $\mathbb{E}$ contiene al menos cuatro puntos no coplanares.

Teorema 1.3: Una recta y un punto externo a ella, o dos rectas distintas que se cortan en un sólo punto determinan un único plano (por I2, I4 e I7)

Definición 1.4 – *Geometría de Hilbert*: Se dice que un conjunto $\mathbb{E}$ es una geometría de Hilbert si satisface todos los axiomas de conexión.

Nótese que con éstos axiomas, un conjunto de cuatro puntos es una geometría de Hilbert con las rectas siendo los subconjuntos de dos puntos y los planos los subconjuntos de tres puntos.

§1.1.2 Axiomas de orden (II). Éstos axiomas nos permiten hablar de la ubicación de los puntos sobre una recta, por ejemplo, B está entre A y C; ésto último lo denotaremos como que $A - B - C$. Admitiremos que $A - B - C$ es falso si no son colineales o si se repiten puntos.

Axioma II, 1: Sean A, B, C colineales. Si $A - B - C$, entonces $C - B - A$.

Axioma II, 2: Sean A, B distintos. Existe un C tal que $A - B - C$.

Axioma II, 3: Dados A, B, C distintos y colineales, entonces uno y sólo uno está entre los otros dos.

Axioma II, 4 (de Pasch): Sean A, B, C no colineales y r una recta que no intersecta a ninguno y que pasa entre A y B (osea existe un punto P de r tal que $A - P - B$), entonces r pasa entre A y C o bien entre B y C.

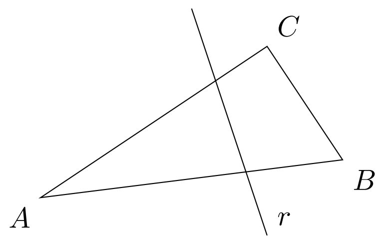


Figura 1.1. Axioma de Pasch.

Definición 1.5: Una geometría de Hilbert $\mathbb{E}$ está *ordenada* si satisface los axiomas de orden.

Pasch, quién en la obra de Hilbert es creditado como el real inventor de los axiomas de orden, afirmaba que el axioma II4 había sido utilizado inconscientemente por Euclides en su obra, a pesar de ser indemostrable con su conjunto original.

Definición 1.6 – *Segmento*: Definimos el segmento[a] $\overline{AB}$ como tal que contiene todos los puntos (de AB) entre A y B (estos últimos incluidos):

$$\overline{AB} := \{P \in \mathbb{E} : A - P - B\} \cup \{A, B\}.$$

Trivialmente se puede construir $\overline{AA} = \{A\}$ al que llamaremos *segmento trivial*. Usualmente llamamos a la recta AB como la *prolongación* de un segmento no-trivial $\overline{AB}$.

[a] la. *segmentum*: sacar una pieza de algo; de *secare*: cortar.

Proposición 1.7: Se cumple:

1. Si $A \neq B$, entonces $\overline{AB} = \overline{BA}$ (por II1).
2. Toda recta posee infinitos puntos (por II2). En particular, todo plano también.
3. Si $A \neq B$, entonces $\overline{AB} \subset AB$ (por II2 y II3).

Teorema 1.8 – *Primer teorema de Pasch*: Dada la situación en II4, entonces r sólo pasa por $\overline{AC}$ o $\overline{BC}$, no por ambos.

Demostración: Demostremos esto por contradicción. Supongamos que r intersecta $\overline{AB}$ en A', intersecta a $\overline{AC}$ en B' y a $\overline{BC}$ en C'. Veamos que A', B', C' deben ser distintos, por ejemplo, si $A' = B'$, entonces $A' = B' = A$ pues dos rectas se cortan en a lo más dos puntos y dijimos que A' estaba entre A y C, lo que sería una contradicción.

Cómo r no pasa por B los puntos B, A', C' no son colineales. La recta AC intersecta a B' que está entre $A'C'$, luego por axioma de Pasch, AC debe pasar entre $\overline{A'B}$ o $\overline{BC'}$. Sin embargo, $A'B = AB$ y $BC' = BC$, luego los únicos puntos por los que puede pasar son A o B, pero por II3 no se cumple ni $A' - A - B$ ni $B - C - C'$, contradicción. □

Teorema 1.9: Entre dos puntos siempre existe un tercero. En consecuencia, todo segmento posee infinitos puntos.

Demostración: Llamemos A, B dos puntos sobre un plano, por I7 existe un punto fuera de la recta X, por II2 existe C tal que $A - X - C$, asimismo, existe Y tal que $B - C - Y$, luego A, B, C son puntos no colineales e YX una recta que pasa por $\overline{AC}$, luego, pasa por $\overline{BC}$ o $\overline{AB}$ (además es claro que XY no pasa por A, B, C, de lo contrario, son colineales). Pero como B, C, Y son colineales, X tendría que estar en la misma recta para satisfacerlo y es evidente que no es así (de lo contrario $XY = BC$ y se llega a que A, B, C son colineales), finalmente, XY corta a $\overline{AB}$ y dicho punto está entre ambos (y no es ni A ni B). □

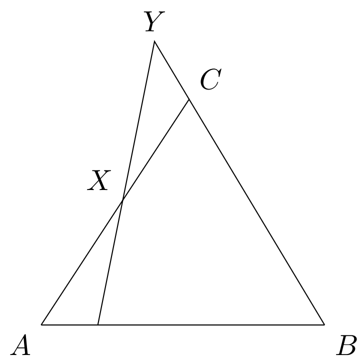


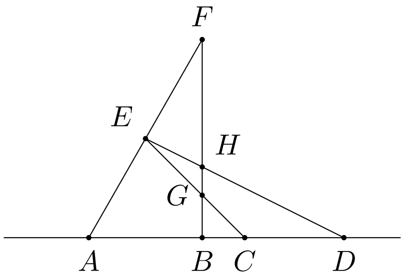
Figura 1.2. Teorema 1.9.

Teorema 1.10 – *Segundo teorema de Pasch*: Si A, B, C, D son distintos y colineales, entonces si cumplen una de las siguientes las cumplen todas:

1. $A - B - C$ y $B - C - D$.
2. $A - B - C$ y $A - C - D$.
3. $A - B - D$ y $B - C - D$.

En consecuencia, todo conjunto de cuatro puntos distintos y colineales pueden ser *etiquetados* de manera que las relaciones anteriores se cumplan.

Demostración: (1) $\implies$ (2)$\wedge$(3). Como $A-B-C$ y $B-C-D$, debemos probar que $A-B-D$ y que $A-C-D$. En particular, probaremos el primero ya que los casos son simétricos. Comenzamos por ver que debe existir $E \notin r$ (I7) y que también existe F tal que $A-E-F$ (II2). Luego, sabemos que FB intersecta a $\overline{AC}$ en B y que no puede intersectar a $\overline{AE}$ puesto que $A-E-F$, por lo que FB intersecta a $\overline{CE}$ en G (II4). Asimismo, sabemos que FB no puede intersectar a $\overline{CD}$ pues $B - C - D$, por lo que intersecta a $\overline{DE}$ en H (II4). Finalmente FB intersecta a $\overline{DE}$, pero no a $\overline{AE}$, por lo que debe intersectar a $\overline{AD}$ en B, osea, $A - B - D$.

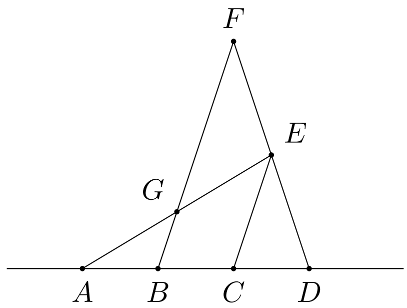


(3) $\implies$ (1) $\implies$ (2). Sabemos que existen puntos que no pertenecen a r, así que llamemos E a uno de ellos, y luego F como un punto tal que $D - E - F$. Luego, sabemos que FB interseca a $\overline{AD}$ en B y que no puede intersecar a $\overline{ED}$ (pues $D - E - F$ y la intersección de rectas es única), por ende, interseca a $\overline{AE}$ en G. Ahora consideremos la recta BG y su relación a los puntos C, D, E. Evidentemente BG no interseca a $\overline{CD}$, puesto que dos rectas sólo se intersecan en punto, que en este caso es B y sabemos que $B - C - D$. BG tampoco interseca a $\overline{DE}$ por el mismo argumento, ya que $F \in BG$. Por ende, BG tampoco interseca a $\overline{CE}$. Finalmente, consideremos BG con A, C, E: interseca a $\overline{AE}$ en G, pero no a $\overline{CE}$, por ende, interseca a $\overline{AC}$ y debe ser en B. Es decir, $A - B - C$.

Finalmente (2) es análogo a (3), basta "voltear" los nombres de los puntos.

□

En contexto del teorema anterior denotamos $A - B - C - D$.



Teorema 1.11: Si $A - B - C$, entonces

$$\overline{AB} \cap \overline{BC} = \{B\}, \quad \overline{AB} \cup \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Semirrectas y semiplanos. Para la confección de las semirrectas y los semiplanos los definiremos como sectores "separados" ya sea por un punto o una recta respectivamente, y para ello empleamos el concepto de relación de equivalencia.

Teorema 1.12: Si r es una recta que contiene al punto X, entonces la relación $\sim_X$ sobre $r \setminus \{X\}$ dada por $P \sim_X Q$ syss no $P - X - Q$ es de equivalencia y determina exactamente dos clases de equivalencia.

Demostración: Claramente es reflexiva y simétrica (por II1), sólo basta probar que es transitiva. Si $P \sim_X Q$ y $Q \sim_X R$ entonces: o se repiten puntos (aplicar reflexividad y simetría) o son todos distintos. Si son todos distintos se puede dar que $P - Q - X$ y $Q - R - X$, (luego $P - Q - R - X$ con lo que $P - R - X$, por Pasch II), o se puede dar que $Q - P - X$ y $Q - R - X$, en cuyo caso puede darse o que $Q - P - R$ o que $Q - R - P$, pero no que $P - Q - R$ (pues entonces $P - Q - R - X$ y $P - Q - X$ por Pasch II); y en cualquier caso $P - R - X$ o $R - P - X$.

Para ver que son dos clases de equivalencia, por I7 existe $A \neq X$ y por II2 existe B tal que $A - X - B$, luego las clases de A y B son distintas y hay al menos dos. Si $P \in r \setminus \{X\}$ es distinto de A y B, entonces o $A - P - X$, o $P - A - X$ (y que P está en la clase de A) o $A - X - P$, luego analizando a P, B, X se da que $X - P - B$, o $X - B - P$ (y P está en la clase de B) pero no $B - X - P$ (pues entonces $A - B - X - P$ por Pasch II y $A - B - X$ lo que es una contradicción). $\square$

Definición 1.13 – *Semirrecta*: Dado un punto O y otro A distinto de O denotamos $\overrightarrow{OA}$ a la clase de equivalencia sobre $OA \setminus \{O\}$ que contiene a A unida al punto $\{O\}$, en este caso O se dice el *origen* de la semirrecta $\overrightarrow{OA}$. Si $B - O - A$, entonces se dice que la semirrecta $\overrightarrow{OB}$ es *complementaria* a $\overrightarrow{OA}$. A la recta OA se le dice la *prolongación* de $\overrightarrow{OA}$.

Teorema 1.14: Si Π es un plano que contiene a una recta r, entonces la relación $\sim$ sobre $\Pi \setminus r$ dada por $P \sim_r Q$ syss $\overline{PQ}$ no corta a r es de equivalencia y determina exactamente dos clases de equivalencia.

Demostración: Claramente es reflexiva y simétrica, sólo basta probar que es transitiva. Si $P \sim_r Q$ y $Q \sim_r R$ se pueden dar varias cosas: que no sean distintos (lo cual correspondería a aplicar reflexividad y simetría), que sean distintos y colineales (ver que alguno, digamos Q está entre P y R y luego $\overline{PR} = \overline{PQ} \cup \overline{QR}$), o que no sean colineales (en cuyo caso basta aplicar el axioma de Pasch).

Sea $A \in \Pi \setminus r$, $X \in r$ y, por II2, B tal que $A - X - B$, por definición $A \nsim_r B$ luego hay al menos dos clases de equivalencia (la de A y la de B). Veremos que todo punto C en $\Pi \setminus r$ cumple que $A \sim_r C$ o $B \sim_r C$: Si C es colineal a A, B, entonces se reduce al segundo teorema de Pasch. Si C no es colineal a A, B, entonces por el primer teorema de Pasch se cumple que r corta exactamente a uno: a $\overline{AC}$ o $\overline{BC}$. Sin perdida de generalidad supongamos que corta a $\overline{BC}$, luego $A \sim_r C$. □

Definición 1.15 – *Semiplano*: Dado un plano Π y una recta r, las dos clases de equivalencia determinadas por el teorema anterior unidas a r se dicen *semiplanos*, y r se dice su *frontera*. Además dado un semiplano de frontera r, el restante se dice su *complementario* y la unión de ambos se dice su *prolongación*.

Definición 1.16: A un conjunto C de puntos se le dice *convexo*[a] syss para todo $P, Q \in C$ se cumple que si $P - X - Q$ entonces $X \in C$. De lo contrario se le dice *cóncavo*[b].

[a]la. *cum*: juntos; *veho*: llevar, cargar; *convexus*: cargar a un lugar.
[b]la. *cavus*: hueco.

Proposición 1.17: El espacio, las rectas, los segmentos, los planos, las semirrectas y los semiplanos son convexos.

§1.1.3 Axioma de las paralelas (III). Éste es el más curioso de nuestro conjunto a tal punto que las geometrías se dividen si se asume o no dicho axioma.

Definición 1.18: Dadas dos rectas r y s se dice que

Se cruzan Si no son coplanares.

Son secantes[a] Si se cortan en un sólo punto.

Son paralelas[b] Si son coplanares y son iguales o no se cortan.

Si r y s son paralelas se denota por $r \parallel s$.

[a] la. *secare*: cortar.
[b] gr. παρά (para): al lado, ἀλλήλων (alelon): una de la otra.

Es claro que dos rectas caen en una y sólo una de las categorías anteriores.

Axioma de las Paralelas (III): Dada una recta r y un punto P, existe una única recta s que pasa por P y es paralela a r.

Teorema 1.19: Son equivalentes:

1. **El axioma de las paralelas**.
2. El paralelismo es transitivo, es decir, si $r \parallel s$ y $s \parallel t$, entonces $r \parallel t$.

Demostración: (1) $\implies$ (2). Lo haremos por contradicción. Sea α el plano que contiene a r y a s, y β el plano que contiene a s y a t.
Si $\alpha = \beta$, entonces r y t, al ser coplanares pero no paralelas se intersecan por P, pero eso contradice al axioma de las paralelas que dice que por P sólo pasa una recta paralela a s.
Si $\alpha \neq \beta$, entonces sea $Q \in t$ cualquiera y sea Π el plano que contiene a r y a Q. Luego sea r' la recta resultante de la intersección entre β y Π, veamos que $r' \parallel s$: si tuvieran un punto R en común entonces claramente $R \notin r$, pues r y s son disjuntos por ser paralelos, y luego $\Pi = \alpha$ pues ambos contienen a r y a R. Como r' es paralela a s y pasa por un punto de t, entonces concluimos que $t = r'$ por axioma de las paralelas, finalmente r y t son coplanares.

(2) $\implies$ (1). Sea r una recta y P un punto tal que s_1, s_2 son rectas distintas pero paralelas a r por P, entonces $s_1 \parallel r$ y $r \parallel s_2$, pero $s_1 \nparallel s_2$. □

§1.1.4 Axiomas de congruencia (IV). En lo sucesivo, se debe interpretar que la congruencia es algo así como la cualidad de ser iguales en medida y forma.

Axioma IV, 1: Todas las congruencias de figuras (denotadas por el signo $\equiv$) son relaciones de equivalencia.

Axioma IV, 2: Dado un par de puntos distintos A, B y una semirrecta s de origen C, existe un único $D \in s$ tal que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

Axioma IV, 3: Sean $A - B - C$ distintos y colineales; y sean $A' - B' - C$ distintos y colineales también, tales que

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \quad \overline{BC} \equiv \overline{B'C'},$$

entonces $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.

Definición 1.20 – *Ángulo*: Sean h, k dos rayos de mismo origen O, cuyas prolongaciones son r_1, r_2 respectivamente sobre un plano α. Definimos el *ángulo*[a] como un conjunto denotado $\angle(h, k)$ tal que corresponde a la intersección del semiplano de frontera r_1 que contiene a k y el semiplano de frontera r_2 que contiene a h. Usualmente a h, k le llamamos *lados* del ángulo, mientras que a O le llamamos el *vértice*[b].
Dados A, O, B no-colineales abreviamos $\angle AOB := \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Finalmente, sean h', k' los complementos de los rayos h, k respectivamente. A $\angle(h', k)$ y $\angle(h, k')$ les llaman *ángulos adyacentes*[c], mientras que a $\angle(h', k')$ le llamamos *ángulo opuesto por el vértice*.

[a] gr. ἀγκύλος: torcido, doblado.
[b] la. *vertere, versus*: girar, cambiar de sentido algo (e.g., un molino).
[c] la. *adiacens, adiacentis*: yacer uno al lado de otro.

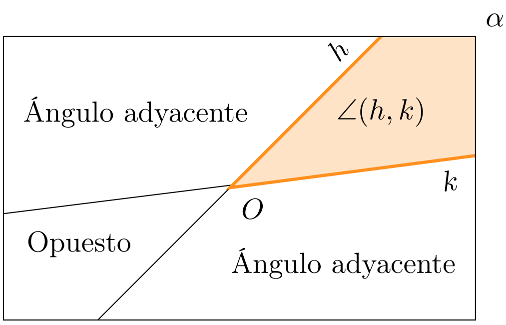
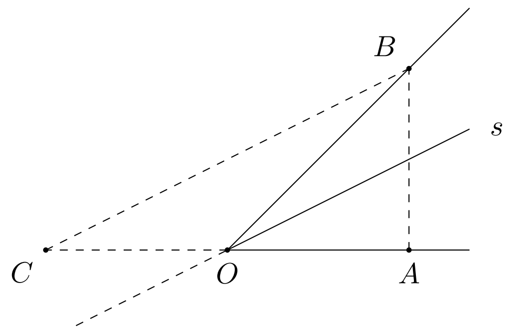


Figura 1.3. Ángulos.

Teorema 1.21 (Teorema de las barras cruzadas): Sea $\angle AOB$ contenido en α, una semirrecta de origen O está contenida en $\angle AOB$ syss intersecta a $\overline{AB}$.

Demostración: $\Longrightarrow$. Por II2 existe C tal que $A - O - C$, luego A, B, C son no colineales y la prolongación de s corta a $\overline{AC}$ en O, por axioma de Pasch, corta a $\overline{BC}$ o $\overline{AB}$. Mas, no puede intersectar a $\overline{BC}$ pues este pertenece al ángulo $\angle BOC$ que es adyacente a $\angle AOB$, esto debido, a que su semirrecta complementaria, como pasa por O, cruza ambos lados quedando así en el



ángulo opuesto. Por ende, cruza a $\overline{AB}$ y debe ser s quién lo haga pues su complemento está en el ángulo opuesto.

$\Longleftarrow$. Supongamos que s intersecta a $\overline{AB}$ en C y sea $D \in s$ distinto de O, entonces la prolongación de $\overline{CD}$ corresponde a la prolongación de s. Como $O \notin \overline{CD}$ entonces está en los mismos semiplanos que los lados del ángulo, por ende, $\overline{CD} \subset \angle AOB$ y, en general, $s \in \angle AOB$ (puesto que todo punto $C \in s$ está en el ángulo). $\square$

Axioma IV, 4: Sea θ_1 un ángulo, y s una semirrecta de prolongación r y α un semiplano de frontera r que contiene a s; existe un único ángulo θ_2 en α tal que uno de sus lados sea s que satisface $\theta_1 \equiv \theta_2$.

Definición 1.22 – *Triángulo*: Sean A, B, C no colineales, entonces se define el *triángulo* denotado $\triangle ABC$ como la intersección entre $\angle ABC$, $\angle BCA$ y $\angle CAB$.

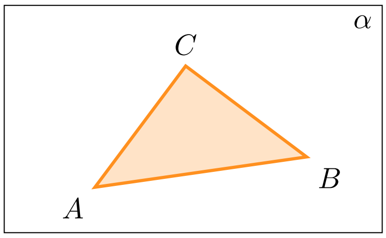


Figura 1.4. Triángulo.

En lo siguiente diremos que un par de triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son congruentes cuando sus lados y ángulos **respectivos** lo son:

$$\begin{array}{cccccccc} \overline{AB} & \equiv & \overline{A'B'} & \overline{BC} & \equiv & \overline{B'C'} & \overline{CA} & \equiv & \overline{C'A'} \\ \angle A & \equiv & \angle A' & \angle B & \equiv & \angle B' & \angle C & \equiv & \angle C' \end{array}$$

Axioma IV, 5: Sea $\triangle ABC$ y A', B' un par de puntos tales que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, entonces dado un semiplano α de frontera $A'B'$, existe un único $C' \in \alpha$ tal que $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Definición 1.23: Se dice una geometría de Hilbert ordenada es *métrica* si satisface los axiomas de congruencia.

§1.1.5 Axioma de continuidad (V). Además de las asociaciones comúnes hay dos relaciones numéricas asociadas a la geometría, la primera es la propiedad de arquímedes que en esencia dice que todo punto está a una cierta distancia finita de otro, sin importar la medida escogida. El segundo axioma, que es una generalización de la propiedad arquimediana dice que los puntos y las posiciones en una recta geométrica corresponden exactamente a los números reales en la recta numérica, sin embargo, por supuesto tendremos que formalizar ciertas nociones antes de introducirlo.

Axioma de Continuidad de Arquímedes (V): Sean A, B, C colineales tales que $A - B - C$, entonces si $A_0 := A$, $A_1 := B$ y A_{n+2} es el primer punto tal que $A_n - A_{n+1} - A_{n+2}$ y $\overline{AB} \equiv \overline{A_{n+1}A_{n+2}}$, entonces existe un n natural tal que $A - C - A_n$.

1.2. Segmentos y triángulos

Ésta sección asume que el espacio es una geometría métrica de Hilbert, dicho de otro modo: no ocupa ni el axioma de las paralelas ni el axioma de Arquímedes.

Teorema 1.24: Dados dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ existen $P - R - Q$ tales que $\overline{AB} \equiv \overline{PR}$ y $\overline{CD} \equiv \overline{RQ}$.

Demostración: Se desprende inmediatamente del axioma IV 2; debido a que primero se elige P y otro punto cualquiera para construir una recta r y elegir de ella una semirrecta. Con ella, construimos R para que satisfaga el enunciado. Luego, construimos la semirrecta de r de origen R que no contiene a P para que apliquemos el axioma IV 2 y construyamos Q. □

Definición 1.25: En condiciones del teorema anterior, escribiremos

$$\overline{PQ} \equiv \overline{AB} + \overline{CD}$$

a lo que referiremos como *suma de segmentos*.

Corolario 1.26: $\overline{PQ} \equiv a+b$ syss existe un único $R \in \overline{PQ}$ tal que $\overline{PR} \equiv a$ y $\overline{RQ} \equiv b$.

Teorema 1.27: Sean a, b, c segmentos tales que $a + b \equiv a + c$, entonces, $b \equiv c$.

Demostración: Sea $a + b \equiv \overline{PQ}$, entonces existe $R \in \overline{PQ}$ tal que $a \equiv \overline{PR}$ y $b \equiv \overline{RQ}$. Por el mismo argumento, existe $R' \in \overline{PQ}$ tal que $a \equiv \overline{PR'}$ y $c \equiv \overline{R'Q}$, pero por unicidad de dicho punto tenemos que $R = R'$ con lo que se demuestra el resultado. $\square$

> **Definición 1.28:** Sean a, b segmentos cualesquiera, denotaremos que $a < b$ (léase "a menor que b") syss existe un segmento c tal que $b \equiv a + c$. También, escribiremos $a \leq b$ syss $a < b$ o $a \equiv b$.

Criterios de congruencia entre triángulos. En lo sucesivo presentaremos tres congruencias que nos serán de vital importancia. Cabe destacar que debido a la extensión de sus nombres, al aplicarlos lo haremos mediante las siglas de sus nombres. Asimismo, conservaremos el hábito de llamar a los ángulos de un triángulo por el punto de origen del mismo, excepto cuando sea absolutamente necesario.

Lema 1.29: Dados $\angle POA \equiv \angle POB$ contenidos en el mismo semiplano de frontera PO, entonces, O, A, B son colineales y pertenecen a la misma semirrecta de origen en O.

Demostración: Por IV4 son el mismo ángulo. Luego, sabemos que uno de los lados es igual ($\overrightarrow{OP}$), luego, el otro también debe serlo $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$, en particular, nuestro resultado. $\square$

Teorema 1.30 (Criterio lado-ángulo-lado): Sean $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ tales que

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \ \angle B \equiv \angle B', \ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'},$$

entonces, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Demostración: Consideremos el $\triangle ABC$, el plano $\alpha = A'B'C'$ y el segmento $\overline{A'B'}$, entonces existe un único punto P tal que $\triangle A'B'P \subset \alpha$ es congruente a $\triangle ABC$ (IV5). Como la congruencia es relación de equivalencia $\overline{B'C'} \equiv \overline{B'P}$ y $\angle A'B'C' \equiv \angle A'B'P$ (IV1), por el lema anterior, B', C', P pertenecen a la misma semirrecta de origen B', por IV2, tenemos que la unicidad del punto P, es decir, $C' = P$. $\square$

Teorema 1.31 (Criterio ángulo-lado-ángulo): Sean $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ tales que

$$\angle A \equiv \angle A', \ \overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \ \angle B \equiv \angle B'$$

entonces, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Demostración: Sea P en el semiplano de frontera $A'B'$ que contiene a C' tal que $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'P$. Por IV4, $\angle C'A'B' = \angle PA'B'$ y $\angle A'B'C' = \angle A'B'P$, por ende, $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'P}$ y $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'P}$. Finalmente, por unicidad de la intersección, $C' = P$. □

Teorema 1.32: Sean s_1, s_2, s_3 semirrectas de origen O que pueden ubicarse en un mismo semiplano cuya frontera incluya a O; s_1', s_2', s_3' semirrectas de origen O' en las mismas condiciones. Si $s_2 \in \angle(s_1, s_3)$, $\angle(s_1, s_2) \equiv \angle(s_1', s_2')$ y $\angle(s_1, s_3) \equiv \angle(s_1', s_3')$, entonces, $s_2' \in \angle(s_1', s_3')$ y $\angle(s_2, s_3) \equiv \angle(s_2', s_3')$.

Demostración: Escójase $A \in s_1$ y $B \in s_3$ cualesquiera (excepto O mismo), por teorema de las barras cruzadas sabemos que s_2 corta a $\overline{AB}$ en C. Luego, sean $A' \in s_1'$ y $B' \in s_3'$ tales que $\overline{OA} \equiv \overline{O'A'}$ y $\overline{OB} \equiv \overline{O'B'}$ (IV). Por LAL, $\triangle AOB \equiv \triangle A'O'B'$, por lo cual, $\angle OAB \equiv \angle O'A'B'$. Digamos que sea C' la intersección entre la prolongación de s_2' y $A'B'$, entonces, como $C' \in \overrightarrow{A'B'}$ se tiene que $\angle O'A'B' = \angle O'A'C'$, con lo que, por ALA $\triangle AOC \equiv \triangle A'O'C'$, de lo que se concluye que $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ que es menor a $\overline{A'B'}$, por lo que, s_2' intersecta a $\overline{A'B'}$.

Por cancelación de la suma de segmentos llegamos a probar que $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, y análogo a la prueba de la equivalencia de ángulos previamente dada vemos que $\angle OBC \equiv \angle O'B'C'$, lo que, por LAL, nos permite ver que $\triangle OBC \equiv \triangle O'B'C'$; con lo que concluimos que $\angle(s_2, s_3) = \angle COB \equiv \angle C'O'B' = \angle(s_2', s_3')$ como se quería probar. □

Teorema 1.33: Sean s_1, s_2, s_3 semirrectas de origen O en el mismo contexto que el teorema anterior. Si $\angle(s_1, s_2) \equiv \angle(s_1', s_2')$ y $\angle(s_2, s_3) \equiv \angle(s_2', s_3')$, entonces $\angle(s_1, s_3) \equiv \angle(s_1', s_3')$.

Demostración: Dada la prolongación de s_1' y el plano que contiene a s_2', construimos s_3'' como aquella semirrecta tal que $\angle(s_1, s_3) \equiv \angle(s_1', s_3'')$. Luego, como $\angle(s_1, s_2) \equiv \angle(s_1', s_2')$, por construcción, por el teorema anterior se comprueba que $\angle(s_2', s_3') \equiv \angle(s_2, s_3) \equiv \angle(s_2', s_3'')$. Y por unicidad de la semirrecta, $s_3' = s_3''$. □

Definición 1.34: En lo sucesivo, diremos que un triángulo es *equilátero*[a] syss todos sus lados son congruentes entre sí; diremos que es *isósceles*[b] syss dos de sus lados son congruentes entre sí (en cuyo caso, llamaremos *base* al lado restante) o diremos que es *escaleno* si todos sus lados no son congruentes dos a dos.

[a]la. *aequus*: iguales, *latus, lateris*: lados, costados.
[b]gr. ἴσος: iguales, σκελή: piernas.

Teorema 1.35 (Criterio de los triángulos isósceles): Un triángulo $\triangle ABC$ es isósceles syss posee dos ángulos congruentes entre sí.

Demostración: $\implies$. Sin perdida de generalidad asumimos que $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$, con lo que aplicando el criterio LAL demostramos que $\triangle ACB \equiv \triangle BCA$, por ende, $\angle A \equiv \angle B$.

$\Longleftarrow$. Sin perdida de generalidad asumimos que $\angle A \equiv \angle B$, con lo que aplicando el criterio ALA demostramos que $\triangle ACB \equiv \triangle BCA$, por ende, $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$. □

Cabe notar que podemos aplicar el mismo argumento para notar que un triángulo es equilátero syss sus tres ángulos son congruentes entre sí.

Cabe destacar una especie de convenio en diagramas geométricos en el que se marcan con n palos ciertos segmentos y ángulos, de forma que todos los segmentos y ángulos en la figura que tienen el mismo número de palos son congruentes entre sí. En ciertos casos, el ángulo tendrá una marca, en otros se dibujaran las líneas las veces necesarias para indicar que son congruentes (como se muestra en la figura adjunta). Cabe notar que esta no es una técnica para formalizar las demostraciones ni nada, simplemente un truco para llevar un inventario de las relaciones conocidas.

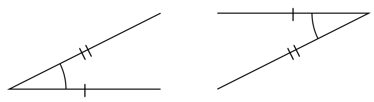


Figura 1.5

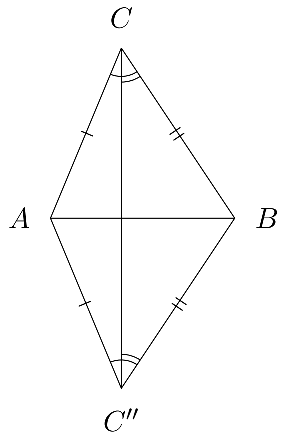
Teorema 1.36 (Criterio lado-lado-lado): Sean $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ tales que

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'},\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'},\ \overline{CA} \equiv \overline{C'A'},$$

entonces, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Demostración: Veamos que dado $\triangle A'B'C'$, el semiplano complementario al de frontera AB que contiene a C y el segmento $\overline{AB}$ existe C'' tal que $\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC''$ (IV5).

Nótese que por teoremas 1.32 y 1.33, los triángulos $\triangle ACC''$ y $\triangle BCC''$ son isósceles de base $\overline{CC''}$, por lo cual, $\angle ACC'' \equiv AC''C$ y $\angle C''CB \equiv \angle CC''B$, con lo que, vemos que $\angle ACB \equiv \angle AC''B \equiv A'C'B'$, por lo que, por criterio LAL queda demostrado. □



Teorema 1.37 (Criterio lado-lado-ángulo): Sean $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ tales que

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'},\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'},\ \angle C \equiv \angle C',$$

entonces, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Demostración: Similar a la prueba anterior construimos C'' tal que $\triangle ABC'' \equiv \triangle A'B'C'$. Por el mismo argumento, $\angle ACC'' \equiv \angle AC''C$, y por construcción, $\angle ACB \equiv \angle AC''B$, por lo que, $\angle C''CB \equiv \angle CC''B$, como los ángulos son iguales, el triángulo es isósceles y $\overline{BC} \equiv \overline{BC''} \equiv \overline{B'C'}$, y por LLL $\triangle ABC \equiv \triangle ABC'' \equiv \triangle A'B'C'$. □

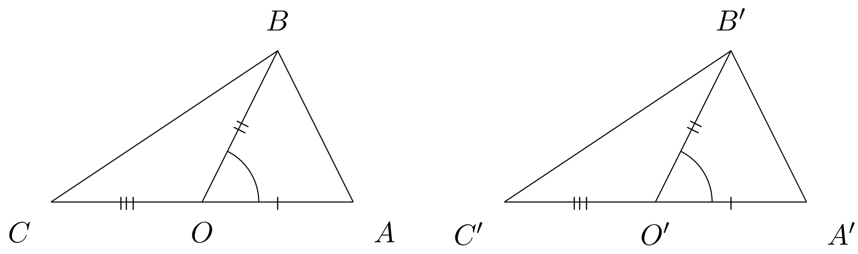
1.3. Ángulos

Teorema 1.38: Sean θ, θ' ángulos congruentes entre sí, entonces, sus ángulos adyacentes son también congruentes.

Demostración: Primero consideremos las semirrectas s_1, s_2 que forman a θ: digamos que se intersectan en O y que $A \in s_1$ como $B \in s_2$ (ambos distintos de O). Luego, sean las semirrectas s_1', s_2' las que forman a θ', O' es su intersección y se definen $A' \in s_1', B' \in s_2'$ tales que $\overline{OA} \equiv \overline{O'A'}, \overline{OB} \equiv \overline{O'B'}$. Sea C tal que $C - O - A$ y se define C' analogamente. Lo que queremos ver es que $\angle BOC \equiv \angle B'O'C'$.

La información nos permite ver que $\triangle AOB \equiv \triangle A'O'B'$ por LAL, con lo que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ y $\angle B \equiv \angle B'$. Por suma de segmentos $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, con lo que, $\triangle BAC \equiv \triangle B'A'C'$ por LAL, de lo que concluimos que $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$. Finalmente $\triangle BOC \equiv \triangle B'O'C'$ por LLL, lo que comprueba el teorema. □

Corolario 1.39: Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

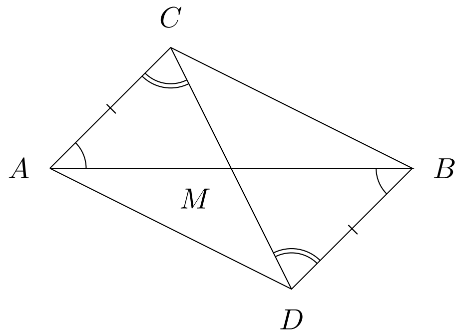


Definición 1.40 – *Ángulos suplementarios*: Decimos que dos ángulos θ, ϕ son suplementarios[a] syss uno es congruente a uno (y, por lo tanto, a ambos) de los ángulos adyacentes del otro.

[a] la. *sub*: por debajo, *pleo*: llenar. *Suppleo*: para completar.

Teorema 1.41: Dado cualquier par distinto de puntos A, B existe un único M (que llamaremos punto medio) colineal a ambos tal que $A - M - B$ y $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.

Demostración: Sea C un punto cualquiera externo a AB, existe D en el semiplano complementario tal que $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$. Por definición del semiplano, $\overline{CD}$ intersecta a AB en M. Por teoremas 1.32 y 1.33 $\angle CAD \equiv \angle CBD$, con lo que, por LAL $\triangle CAD \equiv \triangle DBC$, de lo que se deduce que $\angle ACD \equiv \angle BDC$.



Finalmente, por ALA $\triangle ACM \equiv BDM$, es decir, que $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$. Y debe darse que $A - M - B$, pues de lo contrario, sin perdida de generalidad podemos suponer que $A - B - M$, por ende, $\overline{AM} \equiv \overline{AB} + \overline{BM} \equiv \overline{AB} + \overline{AM}$, lo que sería absurdo. □

Teorema 1.42: En un triángulo el ángulo suplementario de uno es siempre mayor que los otros dos ángulos interiores restantes

Demostración: Vemos que sólo nos basta probarlo para un par de ángulos, por ejemplo, ver que $\angle B$ es menor que el suplementario de $\angle C$. Para ello, primero, consideraremos el punto intermedio D del segmento $\overline{BC}$ y sobre $\overrightarrow{AD}$ construimos E tal que $\overline{AD} \equiv \overline{DE}$. Sabemos que los ángulos opuestos por el vértice son congruentes, es decir, $\angle BDA \equiv \angle CDE$; con ello, $\triangle BDA \equiv \triangle CDE$ por LAL, comprobando así que $\angle B \equiv DCE$ el cuál está contenido en el ángulo adyacente de C. $\square$

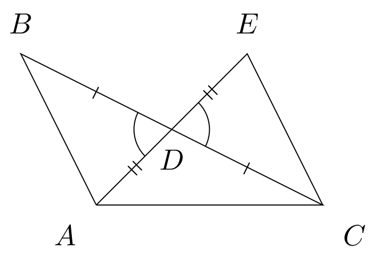


Figura 1.6. Teorema 1.42

Teorema 1.43 (Criterio ángulo-ángulo-lado): Sean $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ tales que

$$\angle A \equiv \angle A',\ \angle B \equiv \angle B',\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'},$$

entonces, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Demostración: Dado el semiplano de frontera $A'B'$ que contiene a C', existe C'' tal que $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C''$, por la unicidad de las congruencias de los ángulos deducimos que B', C' y C'' son colineales. Y no pueden ser distintos, puesto que de lo contrario podríamos formar el triángulo $\triangle A'C'C''$ cuyo ángulo suplementario de C' fuese igual al ángulo interno de C'', lo que es absurdo por el teorema anterior. $\square$

La importancia de los criterios es que, ahora, podemos comprobar que dos triángulos son congruentes siempre que compartan la medida de un segmento y otros dos valores (sean segmentos o ángulos cualesquiera).

Teorema 1.44: Sea $\triangle ABC$, $\overline{BC} < \overline{AC}$ syss $\angle A < \angle B$.

Demostración: $\Longrightarrow$. Esto significa que existe $D \in \overline{BC}$ tal que $\overline{AC} \equiv \overline{DC}$, con lo que se forma $\triangle ACD$ isóceles de base $\overline{AD}$. Nótese que $\angle B < \angle ADC$ pues es un ángulo complementario de D en $\triangle ABD$. Y por ser isóceles

$$\angle B = \angle ABC < \angle ACD \equiv \angle CAD < \angle CAB = \angle A.$$

$\Leftrightarrow$. Es aparente que si $\angle A < \angle B$ podemos realizar la misma construcción y llegar a que no se puede dar que $\overline{AC} \leq \overline{BC}$. $\square$

Perpendicularidad.

Definición 1.45: Diremos que un *ángulo recto* es aquel que es congruente a su suplementario. Diremos que un *ángulo agudo* es aquel que es menor a un recto y un *ángulo obtuso* es mayor a un recto.

Nótese que como el suplementario de un ángulo agudo es obtuso y viceversa, y por el teorema 1.42, entonces un triángulo debe tener siempre al menos dos ángulos agudos. Por lo tanto, los clasificaremos en: *obtusángulo* si posee un ángulo obtuso, *rectángulo* si posee un ángulo recto y *acutángulo* si todos sus ángulos son agudos.

Además, un par de rectas secantes a, b se dicen *perpendiculares*[a] (denotado como $a \perp b$) syss uno de los ángulos que se forman en su intersección es recto (por lo tanto, los cuatro lo son).

[a]la. *per*: atravesar, *pendere*: suspendido.

En los triángulos rectángulos llamamos *hipotenusa* al lado opuesto al ángulo recto y *catetos* al resto. En particular, el teorema 1.44 implica que la hipotenusa es mayor que los catetos.

Teorema 1.46: Existen ángulos rectos.

Demostración: Sea $\angle(s_1, s_2)$ un ángulo cualquiera, con s_1, s_2 semirrectas de origen común O. Sea $A \in s_1$ cualquiera distinto de O, luego existe $B \in s_2$ tal que $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$. Luego, definimos M como el punto medio de $\overline{AB}$ y por criterio LLL se comprueba que $\triangle AMO \equiv \triangle BMO$, probando que $\angle AMO \equiv \angle BMO$, es decir, que es recto. □

En lo sucesivo, dibujaremos los ángulos rectos con forma de cuadrado (pese a no definir formalmente está forma aún, nos permitiremos este lujo, pues es una mera ayuda visual).

Teorema 1.47: Dada una recta a y un punto P contenidos en un plano α, existe una única recta b en α tal que contiene a P y es perpendicular a a.

Demostración: Si P está en a entonces basta crear un ángulo recto en P.

Si P no está en a, entonces construimos primero un punto Q en el semiplano de α opuesto al de P con frontera a tal que el ángulo que genere r con $\overrightarrow{AP}$ sea congruente al que genere con $\overrightarrow{AQ}$ y además que $\overline{AP} \equiv \overline{AQ}$. Si $P - A - Q$ entonces PQ resulta ser la recta buscada. De lo contrario, PQ intersecta a a en B y por criterio LAL probamos que $\triangle PAB \equiv \triangle QAB$, y que, PQ resulta ser la perpendicular buscada.

La unicidad resulta de ser que, si existiése otra perpendicular, podría generarse un triángulo con dos ángulos rectos, lo que es imposible. □

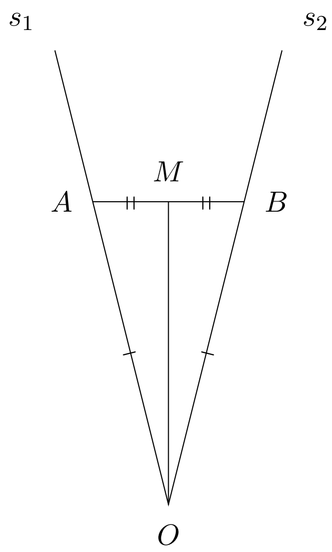


Figura 1.7. Demostración del teorema 1.46.

En lo sucesivo llamaremos **pie** de la perpendicular a r que pasa por A y contenido en el plano, al punto por el cual se intersecta con r.

Pese a sonar contra-intuitivo vamos a redefinir la notación de un triángulo. Dado $\triangle ABC$, los lados opuestos a un ángulo serán denotados por su letra en minúsculas, es decir, $a \equiv \overline{BC}$ por ejemplo.

Teorema 1.48: Dado $\triangle ABC$, tal que $c \leq b$

$$b - c < a < b + c$$

Demostración: Por el teorema anterior consideraremos a r como la recta perpendicular a BC que pasa por A (en el plano ABC) y definiremos P como su intersección, con lo que distinguimos tres casos:

1. $P = B$ o $P = C$. Sin perdida de generalidad supondremos que $P = B$, lo que significa que $\triangle ABC$ es rectángulo en B, por ende, b es la hipotenusa y $a < b < b + c$.

2. $B - P - C$. En cuyo caso se forman dos triángulos rectángulos: $\triangle BAP$ y $\triangle PAC$, ambos en P; por ende, $\overline{BP} < c$ y $\overline{PC} < b$, es decir

$$a = \overline{BP} + \overline{PC} < b + c.$$

3. $P \notin \overline{BC}$. Sin perdida de generalidad, supondremos que $B - C - P$, con lo que se forman los triángulos rectángulos $\triangle APB$ y $\triangle APC$ ambos en P, con lo que $a + \overline{CP} < c$ y $\overline{CP} < b$, es decir

$$a < a + 2\overline{CP} < b + c.$$

La diferencia resulta de que, por las deducciones $b < a + c$, por lo tanto, despejando nos queda que $b - c < a$. $\square$

Lema 1.49: Sea r una recta perpendicular a dos rectas a, b en un plano α por O. Entonces r es perpendicular a toda recta que pase por O y que esté contenida en el plano α.

Demostración: Sea P otro punto de r y P' en la semirrecta complementaria a $\overrightarrow{OA}$ tal que $\overline{OA} \equiv \overline{OA'}$. Luego sean $A \in a$ y $B \in b$ distintos de O. Demostraremos que si una semirrecta s de origen O está contenida en $\angle AOB$ (y, por ende, en α) entonces r es perpendicular a su prolongación. En dicho caso, por teorema de las barras cruzadas, intersectará a $\overline{AB}$ en C.

Nótese que $\triangle POA \equiv \triangle P'OB$ y $\triangle POB \equiv \triangle P'OB$ por LAL. Luego, $\triangle PAB \equiv \triangle P'AB$ por LLL. Procedemos a ver que $\triangle PAC \equiv \triangle P'AC$ por LAL. Por lo que, finalmente, $\triangle POC \equiv \triangle P'OC$ por LLL, lo que significa que $\angle POC$ debe ser recto. $\square$

Definición 1.50: Diremos que una recta es perpendicular a un plano si no está contenido en él, lo intersecta en un solo punto y es perpendicular a todas las rectas de dicho plano que pasan por dicho punto.

Proposición 1.51: Sea r una recta y O un punto de ella, entonces la unión de todas las rectas perpendiculares a r en O es un plano.

Demostración: Sean α, γ dos planos tales que su intersección sea r, entonces, sabemos que por O pasa una única recta perpendicular a r en cada plano. Con ambas, formamos un plano γ, y sabemos que ha de ser subconjunto de la unión de rectas perpendiculares. Sea $s \perp r$ en O, probemos que siempre está contenida en γ. Con r y s podemos formar el plano δ, por lo que sabemos que s debe ser la única perpendicular a r por O en δ, pero δ se intersecta con γ y debe ser en s. Por lo tanto, γ debe ser la unión de perpendiculares por O. $\square$

Teorema 1.52: Dado un plano α y un punto A, existe una única recta perpendicular a α por A.

Demostración: $A \in \alpha$. Podemos elegir dos rectas de α que pasen por A y por ende, los planos que les son perpendiculares por A, los que se intersectan en un r tal que $r \perp \alpha$.

$A \notin \alpha$. Sea $s \subset \alpha$ con $B, C \in s$; además, sea D el pie de la perpendicular a s que pasa por A. Sea $r \perp s$ por D en α, definimos A' el punto en el semiplano complementario al de frontera r con A tal que $\angle(r, \overrightarrow{OA}) \equiv \angle(r, \overrightarrow{OA'})$ y que $\overline{OA} \equiv \overline{OA'}$.

Sea O la intersección entre AA' y r, se comprueba que $\triangle ADO \equiv \triangle A'DO$ (por LAL), $\triangle ADB \equiv \triangle A'DB$ y $\triangle ADC \equiv \triangle A'DC$ (por LAL, pues los ángulos en D son rectos), con lo que $\triangle ABO \equiv \triangle A'BO$ y $\triangle ACO \equiv \triangle A'CO$ (por LLL), con lo que se prueba que AA' es perpendicular a OB, OC y, por ende, a α. □

1.4. Círculos y circunferencias

Definición 1.53 – *Círculos y circunferencias*: Dado un plano Π, un punto en ella $O \in \Pi$ (denominado *centro*[a]) y un segmento r (denominado *radio*) se define el círculo[b] como el conjunto de puntos

$$B_r^{\Pi}(O) := \{P \in \Pi : \overline{OP} \leq r\}$$

y la circunferencia[c] como el conjunto $\varpi := \{P \in \alpha : \overline{OP} \equiv r\}$.

También se le dice radio a cualquier segmento desde el centro a un punto de la circunferencia. Asimismo, se le denomina *cuerda* a un segmento entre dos puntos distintos cualesquiera de la circunferencia. Las cuerdas que pasan por el centro se denominan *diámetros*.

[a] gr. κέντρον: punto, punta.
[b] gr. κίρκος: anillo; κύκλος: círculo.
[c] la. *circum*: al rededor, *fero, ferre*: cargar.

Definición 1.54 – *Tangencia (Euclides)*: Decimos que una recta r es *tangente*[a] a un círculo ω coplanar a él, syss lo intersecta en un único punto de la circunferencia. Similar, diremos que dos círculos (o circunferencias) coplanares son *tangentes* si la intersección de sus circunferencias es un único punto.

[a] la. *tango, tangere*: tocar.

Esta es la definición de Euclides acerca de tangencia de figuras, sin embargo, más adelante generalizaremos este concepto en contextos de teorías modernas. Para que se entienda, la noción de tangencia tendrá más que ver con algo así como "balancear una recta sobre una curva" que intersectarla en un sólo punto.

Teorema 1.55: Una circunferenca ϖ de centro O y una recta r coplanares tales que se intersectan en A son tangentes syss $r \perp OA$.

DEMOSTRACIÓN: $\Longrightarrow$. Sabemos que $r \neq OA$ pues de lo contrario intersectaría a ϖ en el $A' \in \varpi$ tal que $A' - O - A$. Definamos B como el pie de la perpendicular a r por O. Luego, si $B \neq A$ (por contradicción), definimos A'

tal que $A - B - A'$ y $\overline{AB} \equiv \overline{BA'}$. Por ende, $\triangle OBA \equiv \triangle OBA'$ (por LAL), de lo que se desprende que $\overline{OA} \equiv \overline{OA'}$, es decir, $A' \in \overline{\omega}$, contradiciendo el que r es tangente.

$\Longleftarrow$. Sea $B \in r$ distinto de A, el triángulo $\triangle OAB$ es rectángulo con hipotenusa $\overline{OB}$ lo que es mayor a sus catetos, por ende, $B \notin \overline{\omega}$. $\square$

Teorema 1.56: Sea r una recta que corte a una circunferencia $\overline{\omega}$ del mismo plano, pero sin ser tangente a ella, entonces la corta en dos puntos. Por ende, la intersección con ω es una cuerda de la misma.

Demostración: Supongamos que r corta a $\overline{\omega}$ en A, entonces definimos B como el pie de la perpendicular de r por O y a A' como el punto tal que $A - B - A'$ y $\overline{AB} \equiv \overline{BA'}$. Finalmente, $\triangle OBA \equiv \triangle OBA'$ por LAL, es decir, que $\overline{OA} \equiv \overline{OA'}$. $\square$

En este contexto, diremos que r y ω son *secantes*.

Proposición 1.57: Sean ω y Ω círculos coplanares de centros O y O' resp., son tangentes en A syss O, O', A son colineares.

Demostración: $\Longleftarrow$. Demostraremos por contradicción que no pueden intersectarse en un punto B distinto. Sabemos que B no puede ser colineal al resto de puntos, por ende, separaremos los casos en dos:

1. $O - O' - A$. Supondremos que B existe, de forma que $\triangle ABO$ y $\triangle ABO'$ son isósceles de base $\overline{AB}$ y, por ende, $\angle ABO \equiv \angle ABO'$ lo que es contradictorio al axioma IV4.

2. $O - A - O'$. Nuevamente se forman $\triangle ABO$ y $\triangle ABO'$ isósceles de base $\overline{AB}$. Sabemos, además, que $\angle OAB$ y $\angle BAO'$ son suplementarios, por ende, $\angle OBA$ y $\angle ABO'$ también lo son, es decir, O, O', B son colineales, lo que es absurdo.

$\Longrightarrow$. Supongamos que no fuesen colineales, entonces, existe B en el semiplano complementario tal que $\triangle OO'A \equiv \triangle OO'B$, lo que confirma ser también ser un punto de intersección. $\square$

Corolario 1.58: Dos circunferencias coplanares distintas que se intersectan sin ser tangentes, lo hacen en exactamente dos puntos.

Ahora, hay un axioma más que incluir en nuestra lista, puesto que es vital para nuestras construcciones y se ha comprobado como indemostrable:

Axioma sobre la Intersección de Circunferencias (IC): Dadas dos circunferencias coplanares ω y Γ que cumplen la condición de que una pasa por un punto interno y externo de la otra, entonces se intersectan en un punto.

De ahí, podemos ver que, al poseer un punto interno de la otra no pueden ser tangentes y, por ende, su intersección es en dos puntos.

Proposición 1.59 (Propiedad de Intersección Recta-Circunferencia (IRC)): Sean l, ω una recta y una circunferencia de radio r coplanares resp., l contiene un punto interno A de ω syss es secante a ω.

Demostración: $\implies$. Primero, sea B el pie de la perpendicular a l por O (supondremos que $B \neq O$, pues dicho caso es trivial). Luego, definamos O' como el punto tal que $O-B-O'$ y $\overline{OB} \equiv \overline{BO'}$; con él, construimos una circunferencia Γ de radio r. Sean C y D los puntos de Γ en OO' (tales que $O-C-O'$ y $O-O'-D$). Demostraremos que C es interno a ω y D es externo.

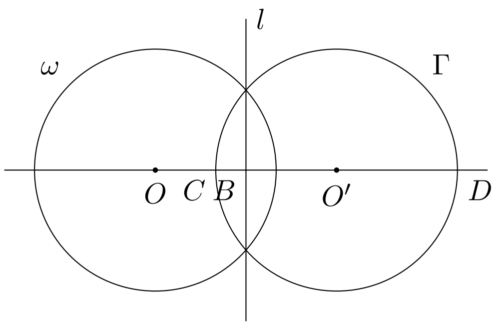


Figura 1.8

Como $\overline{OA} < r$ (construcción) y $\overline{OB} < \overline{OA}$ (la hipotenusa es mayor que sus catetos), $\overline{OB} \equiv \overline{O'B} < r \equiv \overline{O'C}$, por lo que, $C-B-O'$. Como $O-B-O'$, el segundo teorema de Pasch sugiere que:

$O-C-B$. En cuyo caso, $\overline{OC} < \overline{OB} < r$.

$C-O-B$. En cuyo caso, $\overline{OC} < \overline{O'C} \equiv r$.

Asimismo, sabemos que D es externo pues $\overline{OD} > \overline{O'D} \equiv r$. Por ende, por el axioma V poseen dos intersecciones, llamemosle P y Q, de punto medio, M. Se demuestra facilmente que $\triangle OPM \equiv \triangle OQM$ (por LLL, análogo con O' en vez de O) y luego que $\triangle OPM \equiv \triangle O'PM$ (por LLA), lo que comprueba que M ha de ser el punto medio de $\overline{OO'}$, es decir, que $M = B$, por ende P y Q pertenecen a l. $\square$

Teorema 1.60: Dados, un conjunto de segmentos a, b, c tales que $b \leq c$ y que $c-b < a < b+c$ existe un triángulo cuyos lados son congruentes a ellos.

Demostración: Primero consideremos un plano α cualquiera, una semirrecta s (de prolongación r) contenida en él de origen O, existe O' tal que $c \equiv \overline{OO'}$. Como $b \leq c$ sabemos que existe un punto A tal que $O - A - O'$ y $b \equiv \overline{OA}$ y sea A' el otro punto de intersección de r con la circunferencia ϖ de origen O y radio b. Luego construimos B perteneciente a la semirecta de origen O' que contiene a O tal que $a \equiv \overline{O'B}$. Como $c - b < a < b + c$, $B \in \overline{AA'}$, es decir, B es interno a ω. Luego, sea $\overline{\Omega}$ la circunferencia de centro O' y radio a, éstas se intersectan en dos puntos, sea C uno de ellos, entonces $\triangle OO'C$ es un triángulo que satisface las condiciones. $\square$

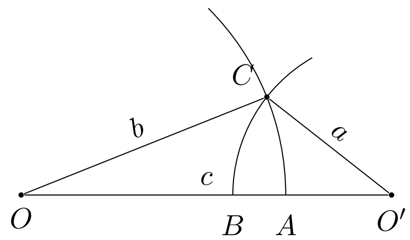


Figura 1.9. Construcción del triángulo en 1.60

Corolario 1.61: Dada una longitud s, existe un triángulo equilatero de lado s.

Cabe destacar que esta última es la primera construcción en **euclides2007elements** de Euclides. Esto ofrece una comparación interesante, pues Euclides se interesaba en el como de las figuras, mientras que nosotros nos interesamos en el que de las mismas, en el si existen o no.

2

Geometría Euclídea

Si hemos de hablar de matemática moderna no podemos dejar de lado a Euclides, quien con *Los Elementos* formalizó por primera vez las matemáticas siendo él el primero en intentar crear un sistema axiomático sobre el cual resolvía problemas principalmente de índole de construcción. Mas es también importante apreciar que la visión que Euclides le da a la geometría difiere bastante de la nuestra, él se interesaba en como manualmente construir una figura (y más adelante, sobre construcciones de regla y compás veremos que clase de figuras se pueden obtener a partir únicamente de estas herramientas básicas), mientras que a nosotros nos interesa la cualidad de existencia, que es mucho más formalista.

Esta distinción es clave para comprender y distinguir entre lo que se denomina *matemática clásica* y *moderna* pues, y como puede ver, va mucho más allá de una simple convención temporal. Asimismo, cabe destacar que eventualmente veremos como poder aplicar otras ramas de las matemáticas (por lo que se recomiendan lecturas de otro tipo de textos), tales como el álgebra y el análisis, para profundizar y obtener nuevos resultados.

Además de ello, este capítulo ofrece algunos axiomas nuevos (el de Arquímedes, el de continuidad y el de Euclides) que ayudaran a obtener más resultados y obtener una visión más concisa sobre que tipo de geometría tratamos.

2.1. Medición de segmentos y ángulos

En la sección 1.2 vimos que podemos definir el concepto de suma de segmentos, de modo que si tenemos un segmento no trivial $\overline{AB}$, nos permitimos, por recursión denotar

$$n\overline{AB} \equiv \underbrace{\overline{AB} + \cdots + \overline{AB}}_{n}.$$

Definición 2.1 – *Proporción de segmentos*: Sean u, v segmentos. Como ya hemos definido la suma de segmentos, podemos denotar $v \equiv nu$ si v resulta de sumar n veces el segmento u. Así mismo, podemos denotar $v \equiv (1/2^n)u$ si v es el segmento que resulta de dividir n veces el segmento u en 2 partes.

Se define

$$\mathbb{Q}_2 := \left\{ \frac{a}{2^b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$$

cuyos elementos llamamos *racionales diádicos*.

Si $0 < r \in \mathbb{Q}_2$, entonces denotamos ru el segmento dado por aplicar las operaciones anteriormente descritas. Así mismo, si $v \equiv ru$, entonces nos permitimos denotar $v/u = r$.

Proposición 2.2: Dados los segmentos u, v no triviales, y $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_2$ estrictamente positivos, se cumple:

1. $1u \equiv u$.
2. $\alpha(\beta u) \equiv (\alpha\beta)u$.
3. $\alpha(u + v) \equiv \alpha u + \alpha v$.
4. $(\alpha + \beta)u \equiv \alpha u + \beta u$.
5. $\alpha u \equiv \alpha v$ implica $u \equiv v$.
6. $\alpha u \equiv \beta u$ implica $\alpha = \beta$.
7. $\alpha < \beta$ implica $\alpha u < \beta u$.
8. $u < v$ implica $\alpha u < \alpha v$.

Aquí en adelante admitimos que (AR) significa axioma de Arquímedes, así vemos que se cumple

Proposición 2.3: Son equivalentes:

1. **El axioma de Arquímedes**.
2. Para todos u, v segmentos no triviales, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $v < nu$.
3. Para todos u, v segmentos no triviales, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(1/2^n)v < u$.

Teorema (AR) 2.4: Dados u, v, w segmentos no-triviales con $u < v$, existe $r \in \mathbb{Q}_2$ tal que $u < rw < v$.

Demostración: Por AR, existe n tal que $\frac{1}{2^n}w < v - u$ y que $\frac{1}{2^n}w < u$. Y también por AR existe m **máximo** tal que $\frac{m}{2^n}w \leq u$. De modo que $u < \frac{m+1}{2^n}u$. Pero claramente

$$u < \frac{m+1}{2^n}w < u + \frac{1}{2^n}w < u + (v - u) = v.$$

□

Definición 2.5: Si u, v son segmentos no-triviales, entonces denotamos

$$\frac{v}{u} := \sup\{r \in \mathbb{Q}_2 : r > 0 \wedge ru < v\} \in \mathbb{R}.$$

Notemos que el conjunto es no vacío y acotado por AR, de modo que la existencia de ésta razón es de hecho una equivalencia a AR.

Teorema (AR) 2.6: Sea $s := \overrightarrow{OP}$ una semirrecta, u un segmento no trivial y $Q, R \in s$ tales que

$$\frac{\overline{OQ}}{u} = \frac{\overline{OR}}{u},$$

entonces $Q = R$.

Definición 2.7 – *Recta graduada*: Si $P_0 \neq P_1$ entonces con $r := P_0P_1$ y con $u := \overline{P_0P_1}$, al que llamamos *unidad* de la recta, llamamos graduación $\mu_u : r \to \mathbb{R}$ la función tal que:

$$\mu(Q) := \begin{cases} 0, & Q = P_0 \\ \frac{\overline{P_0Q}}{u}, & Q \in \overrightarrow{P_0P_1} \\ -\frac{\overline{P_0Q}}{u}, & Q \notin \overrightarrow{P_0P_1} \end{cases}$$

Llamamos *números constructibles* de P_0P_1, denotado $\mathscr{C}_u$, a $\operatorname{Img}\mu$. Nótese que μ es inyectiva (si se asume AR) de manera que también nos permitimos denotar $P_r \in P_0P_1$ para $r \in \mathscr{C}_u$ al punto tal que $\mu(P_r) = r$. Sabemos que

Nótese que la definición es de hecho independiente de AR, pues nos restringimos a los puntos de la recta graduada para los que existe la proporción.

Proposición 2.8: Se cumple:

1. Dos rectas graduadas de unidades congruentes comparten conjuntos de números constructibles.

2. $\mathbb{Q}_2 \subseteq \mathscr{C}_u \subseteq \mathbb{R}$ para toda unidad no-trivial.

Teorema 2.9: Sea μ una aplicación que a cada segmento le aplica un número real positivo tal que para todo u, v no triviales se cumpla:

1. $\mu(u) = \mu(v)$ syss $u \equiv v$.
2. $\mu(u + v) = \mu(u) + \mu(v)$.

entonces se cumple que

$$\frac{\mu(u)}{\mu(v)} = \frac{u}{v}.$$

Demostración: Claramente para todo n se cumple que $\mu(nu) = n\mu(u)$. De modo que para todo n se cumple $\mu((1/2^n)u) = (1/2^n)\mu(u)$ y en conclusión, para todo $r \in \mathbb{Q}_2$ positivo se cumple que $\mu(ru) = r\mu(u)$.

Sean $u < v$, entonces por definición existe w no trivial tal que $u + w \equiv v$, de modo que $\mu(u) < \mu(u) + \mu(w) = \mu(v)$. De modo que si $v \equiv \alpha u$ entonces para todo $r, s \in \mathbb{Q}_2$ positivos tales que $r < \alpha < s$ se cumple

$$r = \frac{\mu(ru)}{\mu(u)} < \frac{\mu(\alpha u)}{\mu(u)} < \frac{\mu(su)}{\mu(u)} = s$$

por lo que

$$\frac{\mu(v)}{\mu(u)} = \frac{\mu(\alpha u)}{\mu(u)} = \alpha = \frac{v}{u}.$$

□

Definición 2.10 – *Medida de segmentos*: Una aplicación que satisface las condiciones anteriores se dice una *medida de segmentos*.

Corolario 2.11: Si μ, ν son medidas de segmentos, entonces la proporción

$$\frac{\mu(u)}{\nu(u)}$$

es invariante para cualquier segmento no trivial u.

Teorema (AR) 2.12 – *Propiedad arquimediana de ángulos*: Para todo par de ángulos θ, ϕ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\theta > \phi$ o $n\theta$ no está definido.

Demostración: Si $\theta \geq \phi$ entonces es trivial, por lo que asumiremos que $\theta < \phi$. Por axiomas de congruencia, $\phi \equiv \angle AOB$ con $\overline{AO} \equiv \overline{OB}$. Sea C el punto medio de $\overline{AB}$, de forma que $\angle AOC \equiv \angle COB$, por ende, $\angle ACO$

es recto y $\angle AOC \equiv (1/2)\phi$, por lo que podemos asegurar que la mitad de cualquier ángulo es agudo y puede pertenecer a un triángulo rectángulo, y que si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\theta > (1/2)\phi$ entonces $2n\theta > \phi$ o $2n\theta$ está indefinido. Así que, de ahora en adelante, ϕ es agudo.

Sea $\triangle ABC$ recto en A y tal que $\angle B \equiv \phi$. Defininiendo $A_0 := A$ y A_1 como un punto en $\overrightarrow{A_0B}$ tal que $\theta \equiv \angle A_0BA_1$, repitiendo el proceso recursivamente de manera que $\theta \equiv \angle A_iBA_{i+1}$ probaremos que $(\overline{A_0A_1}, \overline{A_1A_2}, \dots)$ es una sucesión creciente de segmentos de forma que la negación de la propiedad arquimediana de ángulos implique la negación para segmentos lo que es falso. Para esto utilizaremos múltiples veces el argumento de que un ángulo externo es mayor que los dos internos en un triángulo.

Sea $i \in \mathbb{N}$, llamaremos $\delta := \angle A_iA_{i+1}B$ y η su externo, como $\triangle A_0A_{i+1}B$ es recto en A_0, se da que δ es agudo, η obtuso, luego $\eta > \delta$ (ver fig. 2.1). Por ello, existe $D' \in BC$ tal que $\delta \equiv \angle BA_{i+1}D'$ y luego definimos D como la intersección entre $A_{i+1}D'$ y CA_{i+2} que de hecho cae en el segmento (¿por qué?). Por criterio LAL, se cumple que $\triangle A_iA_{i+1}B \equiv \triangle DA_{i+1}B$, por lo cual, $\gamma := \angle A_{i+2}DA_{i+1} > \delta$ (externo a $\triangle CA_{i+1}D$), mientras que $\delta > \epsilon := \angle A_{i+1}A_{i+2}B$ (externo a $\triangle CA_{i+1}A_{i+2}$), por lo que $\epsilon < \gamma$.

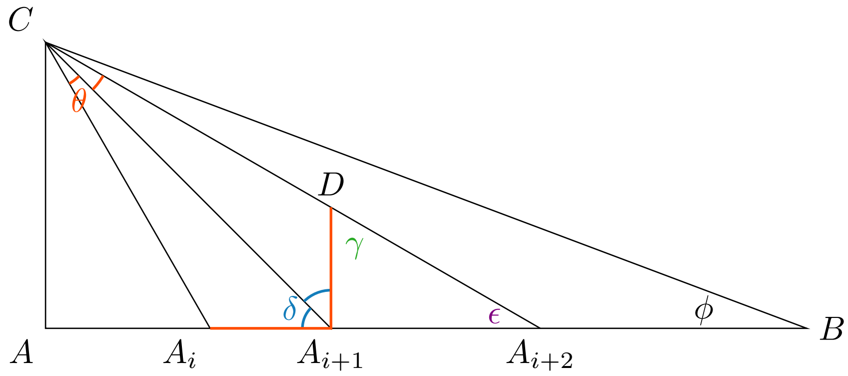


Figura 2.1. Construcción del teorema 2.12.

$\overline{A_{i+1}D} \equiv \overline{A_iA_{i+1}}$ es opuesto a ϵ y $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ es opuesto a γ en $\triangle A_{i+1}DA_{i+2}$, ergo, $\overline{A_iA_{i+1}} < \overline{A_{i+1}A_{i+2}}$. Por ende, si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumpliera que $n\theta < \phi$ entonces $n\overline{A_0A_1} < \overline{A_0A_n} < \overline{AB}$ contradiciendo AR. $\square$

Teorema (AR) 2.13: Dados α, β, γ ángulos con $\alpha < \gamma$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}_2$ tal que $\alpha < r\beta < \gamma$.

HINT: Es análogo a la demostración para segmentos. $\square$

Definición 2.14: Dados dos ángulos θ, ϕ se define:

$$\frac{\theta}{\phi} := \sup\{r \in \mathbb{Q}_2 : r > 0 \wedge r\phi < \theta\}$$

Teorema 2.15: Sea μ una aplicación que a cada ángulo le asigna un número real positivo tal que para todo θ, ϕ ángulos se cumpla que:

1. $\mu(\theta) = \mu(\phi)$ syss $\theta \equiv \phi$.
2. Si $\theta + \phi$ está definido, entonces $\mu(\theta + \phi) = \mu(\theta) + \mu(\phi)$.

entonces

$$\frac{\mu(\theta)}{\mu(\phi)} = \frac{\theta}{\phi}.$$

Definición 2.16: Una aplicación que satisface las condiciones anteriores, se dice una *medida de ángulos*. En particular, considerando π como el número real, entonces llamamos *medida en radianes* a aquella medida que al ángulo recto asigna el número $\pi/2$ y llamamos *medida en grados* a aquella que al ángulo recto asigna el número 90.

En general dado el ángulo $\angle ABC$ denotamos $\measuredangle ABC$ a su medida en radianes y las operaciones aritméticas que hagamos de aquí en adelante, entre ángulos será en radianes.

Teorema 2.17: En un triángulo la suma de dos ángulos es siempre menor a π.

Demostración: Sean α, β ángulos internos de un triángulo, luego hemos visto que el suplementario de α es mayor que β de modo que $\alpha + \beta$ está definido, mientras que sabemos que no existe ángulo de medida mayor que π, por ende $\alpha + \beta < \pi$. □

Teorema (AR) 2.18 – *Teorema de Saccheri-Legendre*: La suma interna de ángulos en un triángulos es a lo más π.

Demostración: Supongamos que existe $\triangle ABC$ cuya suma interna de ángulos es $\pi + \epsilon$ donde $\epsilon > 0$. Sea D el punto medio de $\overline{BC}$, luego elijamos E tal que $A - D - E$ y $\overline{AD} \equiv \overline{DE}$, de modo que, por LAL, se cumple $\triangle ADC \equiv \triangle EDB$. Llamemos $\alpha := \measuredangle BAD$, $\beta := \measuredangle DAC$, $\gamma := \measuredangle ACB$ y $\delta := \measuredangle CBA$, donde notemos que $\measuredangle BAC = \alpha + \beta$ y por ende $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi + \epsilon$.

Nótese que el triángulo $\triangle ABE$ conserva la suma de ángulos internos pero ha de cumplirse que o $\alpha \leq (1/2)\measuredangle BAC$ o $\beta \leq (1/2)\measuredangle BAC$. Es decir, la creación de éste punto crea un ángulo interno menor a la mitad de otro elegido, de modo que podemos repetir el proceso para construir triángulos con la misma suma de ángulos y que poseen un ángulo de $(1/2^n)(\alpha + \beta)$, de modo que eventualmente, se obtiene un triángulo con un ángulo menor a ϵ cuyo suplemento es, por definición, menor a π pero donde la suma de los restantes debe ser mayor a π, lo que es una contradicción. □

Definición 2.19: Se dice que un geometría métrica que satisface AR es una geometría neutra.

Con ésto hemos establecido un gran número de propiedades de una geometría neutra.

2.2. Equivalencias al axioma de las paralelas

Definición 2.20: Dadas dos rectas r_1, r_2 coplanares y otra s secante a ambas por A, B distintos, decimos que satisfacen la *condición de ángulos alternos* si considerando C, D en r_1, r_2 resp. en el mismo semiplano de frontera s se cumple que $\angle CAB$ y $\angle ABD$ son suplementarios (ver fig. 2.11). En cuyo caso se dice que los pares de ángulos $3/6$ y $4/5$ son *alternos internos*, los pares $1/8$ y $2/7$ son *alternos externos* y los pares $1/5$, $2/6$, $3/7$, $4/8$ son *alternos* (a secas). Si se da la condición de los ángulos alternos, todos esos pares son congruencias de ángulos.

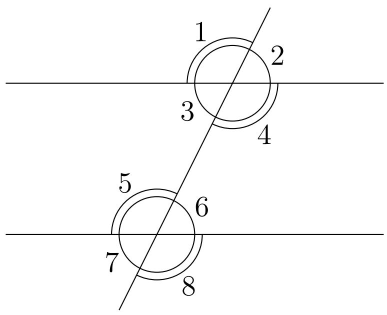


Figura 2.2

Teorema 2.21: Si dos rectas r_1, r_2 coplanares cortadas por s satisfacen la condición de los ángulos alternos, entonces r_1 y r_2 son paralelas.

Demostración: Supongamos que r_1 y r_2 se cortan por s en A, B resp. Si, por contradicción, r_1 y r_2 fueran secantes y se cortasen en C, entonces se formaría el triángulo $\triangle ABC$ que cumple que el ángulo externo en A es congruente al ángulo interno en B lo que es absurdo. □

Corolario 2.22: Dada una recta r_1 secante a otra s que pasa por $P \notin r_1$ existe una única recta r_2 que pasa por P tal que r_1, r_2 y s satisfacen la condición de los ángulos alternos.

Corolario 2.23: Dada una recta r y un punto P externo a ella, siempre existe una paralela s a r que pasa por P.

Notemos que por ende podría pasar más de una paralela a una recta por un mismo punto. En consecuencia, la condición de satisfacer la condición de los ángulos alternos es más fuerte que solo ser paralela.

Teorema 2.24: Son equivalentes:

1. **El axioma de las paralelas**.
2. Dos rectas paralelas distintas cortadas por una tercera siempre cumplen la condición de los ángulos alternos.

Definición 2.25 – *Polígono*: Se dice que una tupla ordenada de segmentos no triviales $(s_1, \dots, s_n)$ forman una *curva poligonal* si cumple que:

1. s_i comparte un solo punto con s_{i+1} que es un extremo de ambos denotado por P_i, donde P_0 es el extremo de s_1 que no comparte con s_2 y P_n el extremo de s_n que no comparte con s_{n-1}.
2. Si $P_0 = P_n$, en cuyo caso decimos que la curva es *cerrada*, o s_1 y s_n no se intersecan, en cuyo caso decimos que la curva es abierta.
3. Y si $s_i \cap s_j$ es vacío en otro caso.

A los puntos P_i les decimos los *vértices* y a los segmentos les decimos los *lados* de la curva. Llamamos *ángulos* de una curva poligonal a los ángulos $\angle P_{i-1}P_iP_{i+1}$ (o $\angle P_i$ para acortar) y si la curva es cerrada admitimos también a $\angle P_{n-1}P_nP_1$ como un ángulo de la curva. Naturalmente, a los pares de puntos P_i, P_{i+1}, a los pares de segmentos s_i, s_{i+1} y a los pares de ángulos $\angle P_i, \angle P_{i+1}$ les decimos *contiguos*.

Un n-gono es una curva poligonal cerrada de n lados contenida en un solo plano. En particular, para $n = 4$ la figura se llama *cuadrilátero*.

Ojo: ésta definición sólo nos da el *contorno* de un n-gono, por ejemplo, nuestra definición de triángulo nos otorgaba los puntos *interiores* del mismo, mientras que un triángulo en ésta definición no es más que la frontera.

Definición 2.26: Un cuadrilátero es *birrecto* si posee dos ángulos rectos contiguos. El lado que comparten aquellos ángulos se llama *base*, el lado opuesto a éste se llama *cumbre*. Siempre que digamos "$ABCD$ es birrecto" se asume que AB es la base. Se le llama media-linea $\overline{MN}$ de un cuadrilátero birrecto al segmento de extremos M el punto medio de la base y N el punto medio de la cumbre.

Un cuadrilátero birrecto cuyos lados adyacentes a la base son congruentes se dice un *cuadrilátero de Khayyam-Saccheri* (o *KS-cuadrilátero*).

Lema 2.27: En un KS-cuadrilátero siempre se cumple que:

1. La media-línea es perpendicular a la base y a la cumbre.
2. La base y la cumbre siempre son parelalas.
3. Los ángulos de la cumbre son congruentes.

DEMOSTRACIÓN: Sea $ABCD$ un KS-cuadrilátero de media-línea $\overline{MN}$. Por criterio LAL $\triangle CAM \equiv \triangle DBM$ con lo que $\overline{CM} \equiv \overline{DM}$ y de manera similar se concluye que $\overline{AN} \equiv \overline{BN}$. Por criterio LLL se cumple que $\triangle CNM \equiv \triangle DNM$ con lo que $\angle CNM \equiv \angle DNM$ y se tiene que ambos han de ser rectos por lo que $MN \perp CD$. Análogamente se concluye que $MN \perp AB$. □

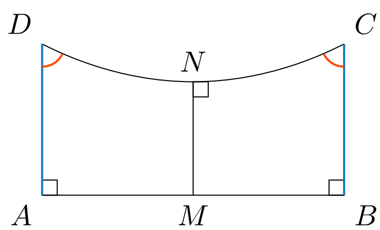


Figura 2.3. Un KS-cuadrilátero.

Definición 2.28: Un KS-cuadrilátero es de uno solo de los siguientes tipos:

Águdo Si los ángulos de la cumbre son águdos.

Recto Si los ángulos de la cumbre son rectos.

Obtuso Si los ángulos de la cumbre son obtusos.

Lema 2.29: Dos KS-cuadriláteros con bases y media-líneas congruentes son congruentes.

Demostración: Sean $ABCD$ y $A'B'C'D'$ dos KS-cuadriláteros de medialíneas $\overline{MN}$ y análogo para $\overline{M'N'}$. Por LAL vemos que $\triangle AMN \equiv A'M'N'$ de modo que por ejemplo sabemos que $\angle NAM \equiv \angle N'A'M'$ y $\angle MNA \equiv \angle M'N'A'$, y como $\angle DAN$ y $\angle DNA$ son complementarios a los ya comparados, entonces se cumple que son correspondientemente congruentes, luego $\triangle AND \equiv \triangle A'N'D'$ por ALA de lo que se concluye que $\angle ADN \equiv A'D'N'$, $\overline{AD} \equiv \overline{A'D'}$ y $\overline{DN} \equiv \overline{D'N'}$ que completa todas las congruencias restantes en un KS-cuadrilátero. □

Teorema 2.30: En un cuadrilátero birrecto, al ángulo de la cumbre más grande se le opone el mayor lado adyacente a la base.

Demostración: Sea $ABCD$ birrecto tal que $\overline{AD} < \overline{BC}$, entonces sea E tal que $ABED$ es un KS-cuadrilátero (ver fig. 2.4). Notemos que $\angle BED$ es opuesto en el vértice E del triángulo $\triangle DCE$, luego $\angle BED > \angle DCE$. Como $ABED$ es KS-cuadrilátero se cumple que $\angle ADE \equiv \angle BED$. Pero $\angle ADC \equiv \angle ADE + \angle EDC > \angle DCE = \angle DCB$, como se quería probar. □

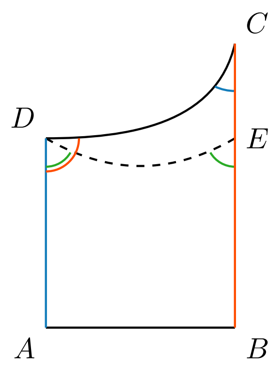


Figura 2.4. Cuadrilátero birrecto (teorema 2.30)

Definición 2.31: Se dice que un cuadrilátero es de *Haytham-Lambert* (o *HL-cuadrilátero*) si posee tres ángulos rectos. Si decimos $ABCD$ es un HL-cuadrilátero se asume que A, B, C son los ángulos internos rectos.

Corolario 2.32: Sea $ABCD$ un HL-cuadrilátero, entonces $\overline{AD} > \overline{BC}$ (resp. $\equiv$, $<$) syss $\angle D$ es agudo (resp. recto, obtuso).

Lema 2.33: Sea $ABCD$ un KS-cuadrilátero, con P un punto de la base (que no sea un extremo), Q un punto de la cumbre tales que $PQ \perp AB$. Entonces $\overline{PQ} < \overline{BC}$ (resp. $\equiv$, $>$) syss $ABCD$ es agudo (resp. recto, obtuso).

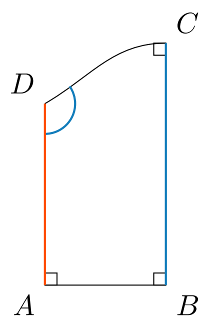


Figura 2.5. Un HL-cuadrilátero obtuso.

Demostración: Sea $\alpha := \measuredangle PQD$ y $\beta := \measuredangle PQC$ que son adyacentes, ergo, $\alpha + \beta = \pi$; y $\theta := \measuredangle ADC$. Luego $AQPD$ y $BQPC$ son birrectos, de modo que si $\overline{PQ} < \overline{BC} \equiv \overline{AD}$ entonces $\alpha > \theta$ y $\beta > \theta$, ergo, $\pi > 2\theta$, es decir, θ es agudo. □

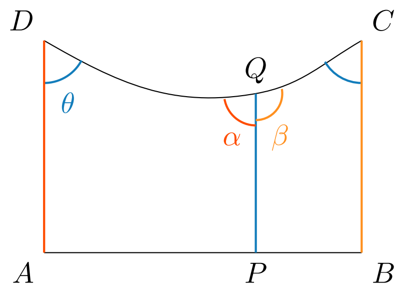


Figura 2.6

Lema 2.34: Sea $ABCD$ un KS-cuadrilátero, con $P \in AB \setminus \overline{AB}$ y $Q \in CD$ tales que $PQ \perp AB$. Entonces $\overline{PQ} > \overline{BC}$ (resp. $\equiv$, $<$) syss $ABCD$ es agudo (resp. recto, obtuso).

Demostración: Llamemos θ a los ángulos de la cumbre de $ABCD$. Supongamos, sin perdida de generalidad, que $A - B - P$ y construyamos $E \in \overrightarrow{PQ}$ de modo que $\overline{AD} \equiv \overline{PE}$. Así vemos que $ABED$ y $BPEC$ son KS-cuadriláteros; sean α y β los ángulos de sus cumbres resp. Si $E \neq Q$, entonces C, D, E no son colineales y $\gamma := \angle ECQ$.

Supongamos que $\overline{PQ} > \overline{BC}$ (ver fig. 2.7), entonces $P - E - Q$ y vemos que $\theta + \beta + \gamma = \pi$. Más aún, notemos que γ es externo a $\triangle CDE$, de modo que es mayor que el ángulo en C: $\theta - \alpha$. Además $\alpha < \beta$ pues $\beta = \measuredangle PEC$ y $\alpha = \measuredangle PED$. De modo que

$$\pi = \theta + \beta + \gamma > \theta + \alpha + (\theta - \alpha) = 2\theta.$$

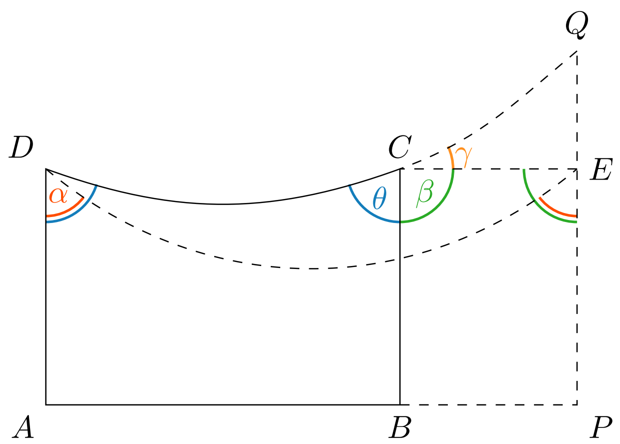


Figura 2.7. Demostración del lema 2.34 (caso agudo).

Si $\overline{PQ} < \overline{BC}$, entonces $P - Q - E$ y vemos que $\theta + (\beta - \gamma) = \pi$, también vemos que $\alpha > \beta$ y $\gamma > \alpha - \theta$ por ser externo a $\triangle CDE$, de modo que

$$\pi = \theta + \beta - \gamma < \theta + \alpha - (\alpha - \theta) <= 2\theta.$$

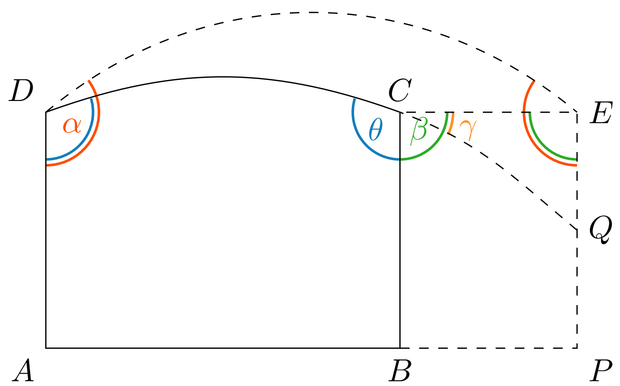


Figura 2.8. Demostración del lema 2.34 (caso obtuso).

El caso $\overline{PQ} \equiv \overline{BC}$ queda al lector. □

Corolario 2.35: Dos KS-cuadriláteros coplanares con misma media-línea son del mismo tipo.

Teorema 2.36 – *Teorema de los tres mosqueteros*: Todos los KS-cuadriláteros de un mismo plano de son del mismo tipo.

Demostración: Sea $ABCD$ un KS-cuadrilátero de media-línea MN. Sea $A'B'C'D'$ otro KS-cuadrilátero en el mismo plano y de media-línea ℓ. Sea Q el punto en $\overrightarrow{MB}$ tal que $\overline{MQ} \equiv \ell$. P se define como el punto en la semirrecta complementaria a $\overrightarrow{MN}$ tal que $\overline{MN} \equiv \overline{MP}$. E es el punto de CD tal que $QE \perp AB$, y se define F como el punto en la semirrecta complementaria a $\overrightarrow{QE}$, tal que $\overline{QE} \equiv \overline{QF}$. Notemos que $QMNE$ es un HL-cuadrilátero del mismo tipo que $ABCD$, y por ende, $PNEF$ es un KS-cuadrilátero del mismo tipo a $ABCD$ y con la misma media-línea de $A'B'C'D'$. $\square$

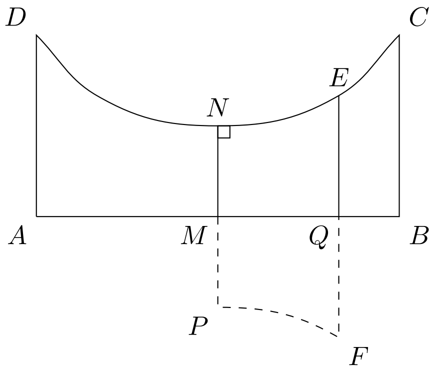


Figura 2.9. Demostración del teorema de los tres mosqueteros.

Definición 2.37: Un triángulo $\triangle ABC$ cuya suma de ángulos internos es σ, se dice:

Hiperbólico Si $\sigma < \pi$.

Euclídeo Si $\sigma = \pi$.

Elíptico Si $\sigma > \pi$.

Lema 2.38: Para todo triángulo existe un KS-cuadrilátero tal que los ángulos de su cumbre sumen lo que los ángulos internos del triángulo.

Demostración: Sea $\triangle ABC$ y definamos D y E como los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ resp. Sean F, G, H los pies de las perpendiculares a DE por A, B y C resp. Con esto se forma el KS-cuadrilátero $GHCB$ cuyos ángulos en la cumbre medirán θ. Luego por AAL se tiene que $\triangle FEA \equiv \triangle HEC$ y $\triangle FDA \equiv GDB$. Con lo que $\angle EAF \equiv \angle ECH$ y $\angle DAF \equiv \angle DBG$ y se concluye que

$$\begin{aligned}\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C &= \measuredangle EAF + \measuredangle FAD + \measuredangle B + \measuredangle C \\ &= \measuredangle ECH + \measuredangle GBD + (\theta - \measuredangle GBD) + (\theta - \measuredangle ECH) = 2\theta.\end{aligned}$$

□

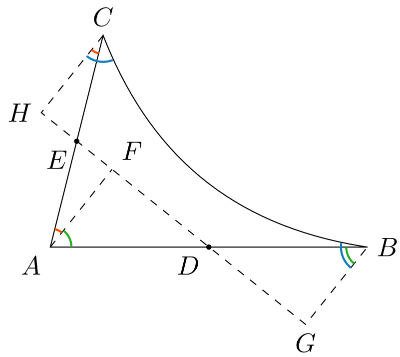


Figura 2.10. Construcción del lema 2.38.

Corolario 2.39: En un mismo plano, todos los triángulos son del mismo tipo. Por ello se dice de un plano que es hiperbólico (resp. euclídeo, elíptico) syss sus triángulos lo son.

Corolario 2.40: Un plano elíptico no es neutro, es decir, no satisface AR.

Teorema 2.41: Son equivalentes:

1. **El axioma de las paralelas**.
2. La existencia de un triángulo euclídeo.
3. Todos los triángulos son euclídeos.
4. La existencia de un rectángulo.
5. Todos los KS-cuadriláteros son rectángulos.

Demostración: Es claro que (2) $\iff$ (3) $\iff$ (4) $\iff$ (5).

(1) $\implies$ (3). Sea $\triangle ABC$ cualquiera entonces construimos la paralela s a AB por C, luego como satisface la condición de los ángulos alternos podemos ver que la suma de ángulos internos mide π.

□

2.3. Paralelismo

Proposición 2.42: Dada una recta (resp. plano), por un punto siempre pasa una recta (resp. plano) paralela a ésta.

DEMOSTRACIÓN: Llamemos r a la recta y P al punto. Primero construimos $s \perp r$ por P (y llamamos Q al pie de ésta) y luego $t \perp s$, también por P. Podemos comprobar que $r \parallel t$, pues de lo contrario se intersectarían en R y $\triangle PQR$ tendría dos ángulos rectos lo que es imposible.

El argumento es análogo para los planos. □

Corolario 2.43: Dado un plano, por un punto siempre pasa un único plano paralelo a este.

DEMOSTRACIÓN: Sea α el plano original y P el punto elegido. Supongamos que β_1 y β_2 son paralelos a α por P, entonces β_1 y β_2 se intersectan en una recta r □

Consideremos dos rectas coplanares distintas r_1, r_2 y otra secante a ambas s (si r_1 y r_2 se intersectan asumiremos que s no les intersecta en ese mismo punto), tal como en la fig. 2.11 acontinuación. Diremos que los pares de ángulos 1 y 5, 2 y 6, 3 y 7, y 4 y 8 son **alternos**; que los pares de ángulos 3 y 6, y 4 y 5 son **alternos internos**; y que los pares de ángulos 1 y 8, y 2 y 7 son **alternos externos**.

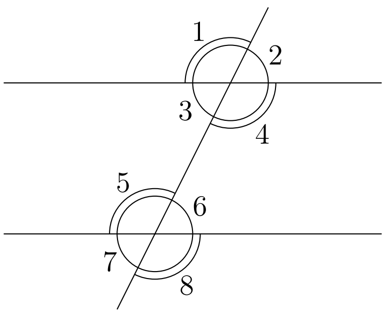


Figura 2.11

Teorema 2.44: Dada un par de rectas r_1, r_2 coplanares distintas cortadas por otra recta s, entonces, los ángulos alternos internos (y, por ende, los alternos externos también) son congruentes entre sí syss $r_1 \parallel r_2$.

DEMOSTRACIÓN: Sean A y B los puntos de intersección entre r_1, y r_2 con s resp.

$\Longrightarrow$. Si r_1 y r_2 fuesen secantes, lo serían en C con lo que formaríamos un triángulo tal que uno de los vértices tendría un ángulo suplementario igual a otro ángulo.

$\Longleftarrow$. Supongamos por contradicción que los ángulos alternos internos son distintos, entonces en el punto A construimos una recta r' tal que si cumple con que los ángulos alternos internos son iguales a los de r_2 con s (esto al prolongar la semirrecta del axioma IV, 4). Luego $r' \parallel r_2$ por la parte ya probada. Finalmente, por el axioma de Euclides, $r_2 = r'$. $\square$

Teorema (AR) 2.45: En un plano hiperbólico, dada una recta r y un punto $P \notin r$ se cumple que existen infinitas paralelas a r por P.

Apéndices

Índice alfabético

Índice de notación

$\vee, \wedge$	Disyuntor, "o lógico" y conjuntor, "y lógico" respectivamente.
$\Longrightarrow$	Implica, entonces.
$\Longleftrightarrow$	Si y sólo si.
$\forall, \exists$	Para todo, existe respectivamente.
$\in$	Pertenencia.
$\subseteq, \subset$	Subconjunto, subconjunto propio resp.
$\cup, \cap$	Unión e intersección binaria respectivamente.
$A \setminus B$	Resta conjuntista, A menos B.
A^c	Complemento de A (respecto a un universo relativo).
$A \times B$	Producto cartesiano de A por B.
$A_{\neq x}$	Abreviación de $A \setminus \{x\}$.
$f : A \to B$	Función f de dominio A y codominio B.
$f \circ g$	Composición de f con g. $(f \circ g)(x) = g(f(x))$.
$\mathcal{P}(A)$	Conjunto potencia de A.
resp.	Respectivamente.
syss	Si y sólo si.
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$	Conjuntos de números naturales, enteros y racionales resp.
$\aleph_0$	Cardinal numerable, cardinalidad de $\mathbb{N}$.

AE	Axioma de elección.
DE, AEN	Axioma de elecciones dependientes, y de elecciones numerables resp.
ZF(C)	Teoría de Zermelo-Fraenkel. La C representa el axioma de elección.
$A - B - C$	El punto B está entre A y C en una misma recta, p. 4.
$\overline{AB}$	Segmento de extremos A y B, p. 5.
$\overrightarrow{OA}$	Semirrecta de origen O que contiene a A, p. 9.
$r \parallel s$	Las rectas r, s son paralelas, p. 10.
$\equiv$	Congruentes, p. 10.
$\angle(h, k), \angle AOB$	Ángulo de lados h, k, y ángulo de lados $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ resp., p. 11.
$\triangle ABC$	Triángulo de vértices A, B y C, p. 12.
$a < b$	Segmento a menor que b., p. 14.
$a \perp b$	a y b son perpendiculares, p. 20.

Referencias

Geometría euclídea

0. Chen, E. *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads* (The Mathematical Association of America, 2016).
0. Dillon, M. I. *Geometry Through History* (Springer, 2018).
0. Euclides y Casey, J. *The First Six Books of the Elements of Euclid. And Propositions I.-XXI. of Book XI., and an Appendix on the Cylinder, Sphere, Cone, etc.* `https://www.gutenberg.org/ebooks/21076` (Project Gutenberg, 2007).
0. Greenberg, M. J. *Euclidean and Non-euclidean Geometries. Development and History* 3.ª ed. (W. H. Freeman y Company, 1993).
0. Hilbert, D. *The Foundations of Geometry* trad. por Townsend, E. J. `http://www.gutenberg.org/ebooks/17384` (Project Gutenberg, 2005).
0. Ivorra Castillo, C. *Geometría* `https://www.uv.es/=ivorra/Libros/Geometria2.pdf` (2018).
0. Moore, E. H. On the Projective Axioms of Geometry. *Transactions of the American Mathematical Society.* `https://www.jstor.org/stable/1986321` (1902).
0. Petrunin, A. *Euclidean plane and its relatives. A minimalist introduction* `https://arxiv.org/abs/1302.1630` (2019).
0. Posamentier, A. S. *Advanced Euclidean Geometry* (2002).
0. Wilkins, D. R. *Euclidean and Non-Euclidean Geometry (MA232A)* `https://www.maths.tcd.ie/~dwilkins/Courses/MA232A/` (2017).
0. Wilkins, D. R. *Selected Circle Theorems* `https://www.maths.tcd.ie/~dwilkins/Courses/ET7246/LocalResources2018/SelectedCircleTheorems.pdf`.

0. WILKINS, D. R. *Trigonometry* https://www.maths.tcd.ie/~dwilkins/Courses/ET7246/LocalResources2018/TrigonometryPresentation.pdf.