Pontificia Universidad Católica de Chile y Universidad de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: José Samper **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra II **Sigla:** MPG3201
Fecha: 26 de noviembre de 2025

Dimensión II

Recordatorio

Será útil en los ejercicios ocupar la siguiente proposición (Prop. 10 de [**2,** pág. 511], §9.4):

> Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ (resp. $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$) una variedad[1] algebraica. Entonces dado un polinomio (homogéneo) $f \in k[\boldsymbol{x}]$ que no se anula en todo V, se cumple que $\dim(V \cap \mathbf{V}(f)) = \dim V - 1$. Además, si $W \subset V$ es una subvariedad propia, entonces $\dim W < \dim V$.

Como comentamos la semana pasada, este es un caso del teorema de ideales principales de Krull.

1. Ejercicios

1. Considere $\mathfrak{a} := (xz - x^2, yz - xy) \lhd k[x, y, z]$.
   a) Pruebe que $\mathfrak{a} \cap k[z] = 0$. Verifique o contradiga que $\mathfrak{a} \cap k[x_i, x_j] = 0$ donde $\{x_i, x_j\}$ recorre todas las parejas $\{\{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}\}$.
   b) ¿Qué puede decir de $\dim \mathbf{V}(\mathfrak{a})$?
   c) ¿Es $\mathfrak{a}$ un ideal radical?
2. Sea $f \in R := k[x_0, \dots, x_n]$ homogéneo de grado $r > 0$.
   a) Calcule el polinomio de Hilbert (proyectivo) del ideal (f).
   b) Sea $\mathfrak{a}$ un ideal y suponga que f no es un divisor de cero en $R/\mathfrak{a}$. Pruebe que el polinomio de Hilbert $\mathfrak{a} + (f)$ solo depende de $\mathfrak{a}$ y r.
3. Sea $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ una variedad proyectiva.
   a) Pruebe que, si $\dim V > 0$, entonces existe una subvariedad $W \subseteq V$ de $\dim W = \dim V - 1$.
   Pista: Para ello, puede resultar útil el siguiente resultado de álgebra conmutativa:
   > El conjunto de primos ($\subseteq$-)minimales de un anillo noetheriano es finito (Ex. 8 de [**1,** Ch. 6). $\square$

   b) Pruebe que si $\dim V = m$, entonces existe una cadena de $m + 1$ subvariedades distintas:
   $$V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_m = V$$
   y que no hay cadenas más largas.
4. Sea $F\colon \mathbb{A}^m(k) \to \mathbb{A}^n(k)$ un morfismo regular (i.e., dado en coordenadas por polinomios), y sean $V := \mathbf{V}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ y $W := \overline{\operatorname{Img}(F|_V)} \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ subconjuntos algebraicos afines. Así, F se restringe a un morfismo *dominante* (cuya imagen es densa) $F|_V\colon V \to W$. Pruebe que $\dim V \geq \dim W$ y dé ejemplos de cuando hay desigualdad estricta.

   Solución: Por clases ya ha visto que hay $G_1, \dots, G_d\colon W \to \mathbb{A}^1(k)$ morfismos regulares que son algebraicamente independientes. Cada uno de ellos se escribe como una función racional $G_j(y_1, \dots, y_n) = p_j(\boldsymbol{y})/q_j(\boldsymbol{y})$, donde $p_j, q_j \in k[y_1, \dots, y_n] = k[\mathbb{A}^n]$ y donde q_j no se anula en ningún punto de W.

   Luego podemos cambiar G_j por QG_j, donde $Q := q_1 \cdots q_n$, ya que si los nuevos morfismos regulares son algebraicamente dependientes, existe un polinomio homogéneo
   $$0 = \sum_{\boldsymbol{a}} c_{\boldsymbol{a}} (QG_1(\boldsymbol{y}))^{a_1} \cdots (QG_d(\boldsymbol{y}))^{a_d} = Q(\boldsymbol{y})^e \sum_{\boldsymbol{a}} c_{\boldsymbol{a}} G_1(\boldsymbol{y})^{a_1} \cdots G_d(\boldsymbol{y})^{a_d},$$

[1] Para mí, todas las variedades son irreducibles y, para quienes sepan esquemas, *reducidas*.

que se anula en todo $\boldsymbol{y} \in W$. Pero Q no se anula en ningún $\boldsymbol{y} \in W$, lo que nos da una relación polinomial en G_j que es absurda.

Así, suponemos que los G_j's son polinomios en $k[\boldsymbol{y}]$ y son algebraicamente independientes como morfismos de W. Queremos ver que[2] $F \circ G_j \colon V \to \mathbb{A}^1(k)$ también son morfismos algebraicamente independientes. Si no, existe una relación polinomial

$$0 = \sum_{\boldsymbol{a}} c_{\boldsymbol{a}} G_1(F(\boldsymbol{x}))^{a_1} \cdots G_d(F(\boldsymbol{x}))^{a_d},$$

que se anula en todo $\boldsymbol{x} \in V$. Si F fuera sobreyectivo, vemos que es válida para todo $\boldsymbol{y} \in W$, pero no es siempre cierto.

En cualquier caso, nos dice que la imagen de F cae en el cerrado afín $\mathbf{V}(\sum_{\boldsymbol{a}} c_{\boldsymbol{a}} G_1^{a_1} \cdots G_d^{a_d})$ y, como W es la clausura de la imagen, tenemos que

$$W \subseteq \mathbf{V}\left(\sum_{\boldsymbol{a}} c_{\boldsymbol{a}} G_1^{a_1} \cdots G_d^{a_d} \right),$$

es decir, todo punto de W se anula en dicha expresión, lo que significa que debe ser el polinomio nulo; es decir, que los $F \circ G_j$ son algebraicamente independientes. Así, $d \leq \dim V$ (porque la dimensión es la máxima cantidad de morfismos algebraicamente independientes).

A. Comentarios adicionales

El ejercicio 3*b* muestra que la dimensión topológica o combinatórica de V (en sentido de Hartshorne [**3,** pág. 5]) coincide con la «dimensión» que ya hemos definido (mediante polinomios de Hilbert).

Referencias

1. Atiyah, M. F. y MacDonald, I. G. *Introduction to Commutative Algebra* (Addison-Wesley, 1969).
2. Cox, D. A., Little, J. y O'Shea, D. *Ideals, Varieties, and Algorithms. An introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra* 5.ª ed. (Springer-Verlag, 2020).
3. Hartshorne, R. *Algebraic Geometry Graduate Texts in Mathematics* **52** (Springer-Verlag New York, 1977).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`
URL: `https://josecuevas.xyz/teach/2025-2-alg/`

[2] Yo compongo al revés.