Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: Héctor Pastén Vásquez **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra abstracta II **Sigla:** MAT2244
Fecha: 22 de mayo de 2025

Más acerca de módulos

1. Sobre módulos

1. (Exámen de lucidez) Pruebe que todo grupo abeliano G posee una única estructura como $\mathbb{Z}$-módulo.
2. Sea A un anillo y M un A-módulo. Para una indeterminada x definimos el conjunto $M[x]$ como aquel formado por las sumas formales $\sum_{j=0}^{n} m_j x^j$, donde los coeficientes $m_j \in M$.
   a) Pruebe que $M[x]$ es un $A[x]$-módulo con la suma coordenada a coordenada y el producto escalar:
   $$\left(\sum_{i=0}^{p} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} m_j x^j\right) = \sum_{\ell=0}^{p+n}\left(\sum_{i+j=\ell} a_i m_j\right) x^j.$$
   b) Pruebe que si $N \leq M$, entonces $N[x] \leq M[x]$ de forma canónica. En particular, si $\mathfrak{a}$ es un ideal de A, entonces $\mathfrak{a}[x]$ es un ideal de $A[x]$.
   c) Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A. ¿Es cierto que $\mathfrak{p}[x]$ es primo en $A[x]$? ¿Y si $\mathfrak{m}$ es maximal, será que $\mathfrak{m}[x]$ también?
3. Sea
   $$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0 \tag{Σ}$$
   una sucesión exacta de A-módulos. Pruebe que son equivalentes:
   a) Existe $h\colon M_3 \to M_2$ tal que $g \circ h = \mathrm{Id}_{M_3}$ (esta h es ocasionalmente descrita como una «sección de g»).
   b) Existe $j\colon M_2 \to M_1$ tal que $j \circ f = \mathrm{Id}_{M_1}$ (este j es ocasionalmente descrito como una «cosección» o «retracción de f»).
   c) Existe un isomorfismo $\phi\colon M_1 \otimes M_3 \to M_2$, de modo que $g \circ \phi\colon M_1 \times M_3 \to M_3$ es la proyección y $\phi^{-1} \circ f\colon M_1 \to M_1 \times M_3$ es la inclusión.
   En cuyo caso, se dice que (Σ) ***se escinde*** o que es una *sucesión escindida*.
4. Sea M un A-módulo, diremos que es ***noetheriano*** si todos sus A-submódulos son finitamente generados.
   a) Pruebe que sobre un anillo noetheriano A, un A-módulo es noetheriano syss es finitamente generado.
   b) Pruebe que sobre *todo* anillo (noetheriano o no) existe un módulo noetheriano no nulo.
   Pista: Note que, por ejemplo, un A-módulo sería noetheriano si fuese ***simple***, i.e., si sus únicos submódulos fueran 0 y M; así que puede tratar de buscar un A-módulo simple. □
5. Sea $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos.
   a) Pruebe que si M_1 y M_3 son finitamente generados, entonces M_2 también.
   b) Pruebe que M_2 es noetheriano syss M_1 y M_3 también lo son.

2. Las serpientes y sus amigos

6. **Lema de la serpiente:** Considere un diagrama conmutativo de A-módulos
$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\psi'"'] & B' \arrow[r, "\phi'"'] & C' & \end{tikzcd}$$

donde ambas filas son exactas, pruebe que existe un homomorfismo de A-módulos $\omega\colon \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha$ tal que se induce la siguiente sucesión exacta:

$$\ker\alpha \longrightarrow \ker\beta \longrightarrow \ker\gamma \xrightarrow{\omega} \operatorname{coker}\alpha \longrightarrow \operatorname{coker}\beta \longrightarrow \operatorname{coker}\gamma.$$

7. **Lema de los cinco:** Dado un diagrama conmutativo de A-módulos

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

con filas exactas. Pruebe que si f_1, f_2, f_4, f_5 son isomorfismos, entonces f_3 también.

Pista: Emplee el lema de la serpiente. □

A. Ejercicios propuestos

1. Describa qué debe satisfacer un grupo abeliano para tener estructura natural[1] de $\mathbb{Q}$-módulo.
2. Dé un contraejemplo de un A-módulo finitamente generado M que no sea noetheriano, i.e., que posea un submódulo que no es finitamente generado. (Note que, en virtud del ejercicio $4a$, el anillo debe no ser noetheriano.)
3. Sea A un dominio íntegro que contiene a un subcuerpo $k \subseteq A$ y tal que A es un k-espacio vectorial de dimensión finita. Pruebe que A es un cuerpo.
4. Se dice que un A-módulo M es ***indescomponible*** si no posee dos submódulos propios N_1, N_2 tales que $M \cong N_1 \oplus N_2$. Claramente todo módulo simple es indescomponible, pero el recíproco no es cierto.
   a) Pruebe que un módulo no nulo M es indescomponible syss existe un endomorfismo $\varphi\colon M \to M$ tal que $\varphi^2 = \varphi$.
   b) ¿Para exactamente qué enteros $n > 1$ se cumple que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es ($\mathbb{Z}$-)indescomponible? ¿Para cuáles es simple?
5. **Lema de los cuatro:** Considere el diagrama conmutativo de A-módulos

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, two heads, "f_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[d, hook, "f_4"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4
\end{tikzcd}$$

   con filas exactas. Supongamos que f_1 es sobreyectivo y f_4 es inyectivo. Se cumplen:
   a) Si f_2 es inyectivo, entonces f_3 también
   b) Si f_3 es sobreyectivo, entonces f_2 también

B. Comentarios adicionales

Las técnicas que involucran construir diagramas con filas/columnas exactas y aplicar lemas similares al de la serpiente se conocen como «cazando diagramas» (eng. *diagram chasing*). Hay varios libros dedicados a explotar esta técnica, un ejemplo es **[3]**. Las primeras dos ediciones de Lang [**2**] incluían este famoso y desventurado ejercicio:

> Coja cualquier texto de álgebra homológica y pruebe todos los teoremas que contenga sin ver las demostraciones.

La traducción al ruso del libro fue incluyendo una serie de pies de página y anotaciones por el traductor. En este punto añade «Sugerimos saltarse éste ejercicio en una primera lectura.»[2]

[1] Si bien el adjetivo «natural» es un tanto ambiguo en matemáticas, aquí tiene una connotación precisa. El lector puede probar que si un grupo abeliano G admite estructura de $\mathbb{Q}$-módulo, esta es única.

[2] Vid. `https://mathoverflow.net/a/10909`

El álgebra homológica fue inventada y explorada principalmente por topológos algebristas al inicio del siglo XX como Samuel Eilenberg, Norman Steenrod y Jean Leray.[3] En un comienzo pretendía tener aplicaciones específicas a la topología, pero probó ser de gran utilidad en el álgebra también, principalmente en el estudio de módulos con la aparición de los funtores Ext y Tor. Esta revolución fue llevada a cabo por varios matemáticos de renombre, por nombrar algunos: Eduard Čech, Henri Cartan, Nobuo Yoneda, Hyman Bass y Jean-Pierre Serre.

Referencias

1. Atiyah, M. F. y MacDonald, I. G. *Introduction to Commutative Algebra* (Addison-Wesley, 1969).
2. Lang, S. *Algebra* (Springer-Verlag New York, 2002).
3. Mac Lane, S. *Homology* (Springer-Verlag Berlin, 1967).

Correo electrónico: josecuevasbtos@uc.cl
URL: https://josecuevas.xyz/teach/2025-1-ayud/

[3]Si quiere puede rastrear influencias más antiguas a David Hilbert y Henri Poincaré.