Pontificia Universidad Católica de Chile y Universidad de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: José Samper **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra II **Sigla:** MPG3201
Fecha: 3 de septiembre de 2025

Extensiones resolubles

1. Ejercicios

1. Recuerde que un número real $r \in \mathbb{R}$ se dice ***constructible (con regla y compás)*** si existe $\mathbb{Q}(r) \subseteq \mathbb{Q}(r_1, \dots, r_n)$, donde cada r_j es de la forma $\sqrt{a+1}$ para algún $a \in \mathbb{Q}(r_1, \dots, r_{j-1}) \cap \mathbb{R}_{>0}$. Un número complejo $z \in \mathbb{R}$ se dice *constructible* si $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$ lo son. Una extensión se dice *constructible* si todos sus elementos lo son.

   Pruebe que una extensión ciclotómica $\mathbb{Q}(\zeta_p)$, donde p es primo, es constructible syss p es un *primo de Fermat*, es decir, de la forma $p = 2^{2^n} + 1$.

   Pista: Emplee el calculo que ya ha hecho del grupo de Galois y el dato (que no tiene que probar) que todo primo de la forma $2^a + 1$ es necesariamente un primo de Fermat. $\square$
2. Sean $K \subseteq L_1, \dots, L_n \subseteq \Omega$ un conjunto de n subextensiones abelianas (resp. resolubles). Pruebe que el composito $L_1 \cdots L_n \subseteq \Omega$ es abeliano (resp. resoluble).
3. Sea k un cuerpo de $\operatorname{car} k \neq 2$ y sea $f(x) \in k[x]$ un polinomio separable con raíces

   $$f(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - \alpha_j) \in k^{\text{alg}}[x].$$

   Definimos el discriminante como $\Delta := \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ y sea L el cuerpo de escisión de $f(x)$. Tras identificar $\operatorname{Gal}(L/k) \leq S_n$ mediante la permutación de los α_j's, pruebe que $\operatorname{Gal}(L/k) \cap A_n = \operatorname{Gal}(L/k(\sqrt{\Delta}))$.
4. **Clasificación computacional de cuárticas:** Sea k un cuerpo de $\operatorname{car} k \neq 2$ y sea

   $$f(x) := x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = \prod_{j=1}^{4} (x - \alpha_j).$$

   una cuártica irreducible separable.
   a) Defina el resolvente cúbico como

   $$R_3(x) := (x - (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4))(x - (\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4))(x - (\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3)).$$

   Pruebe que $R_3(x) \in k[x]$ es separable.
   b) Sea L/k el cuerpo de escisión de $f(x)$. Pruebe que

Δ	$R_3(x) \in k[x]$	$\operatorname{Gal}(L/k)$
$\neq \square$	irreducible	S_4
$\neq \square$	reducible	D_8 o C_4
$= \square$	irreducible	A_4
$= \square$	reducible	$C_2 \times C_2$

   c) Sea $k = \mathbb{Q}$ y suponga que $\Delta \neq \square$ y $R_3 \in \mathbb{Q}[x]$ es reducible. Pruebe que si $\operatorname{Gal}(L/k) \cong C_4$, entonces $\Delta > 0$. (O recíprocamente, si $\Delta < 0$, entonces $\operatorname{Gal}(L/k) \cong D_8$.)

A. Comentarios adicionales

Uno puede verificar que el discriminante Δ se puede calcular de manera explícita como el resultante de $f(x)$ y $f'(x)$, que es por definición el determinante de una matriz a coeficientes en k. En general, dicha matriz es bastante grande, pero por ejemplo Sage puede calcular rapidamente dicho número así:

```
R, t = QQ['t'].objgen()
f = t^3 + t^2 + t + 1
f.discriminant()
```

Con ello, podemos determinar fácilmente el grupo de Galois de una extensión de grado 3.

Mediante el teorema de polinomios simétricos uno puede dar fórmulas explícitas para Δ y los coeficientes de $R_3(x)$; esta es

$$R_3(x) := x^3 - bx^2 + (ac - 4d)x - (a^2d + c^2 - 4bd).$$

El discriminante es más largo, puede obtener la fórmula general así:

```
R.<a, b, c, d> = QQ['a', 'b', 'c', 'd']
S.<x> = R[]
(x^4 + a*x^3 + b*x^2 + c*x + d).discriminant()
```

Casos particulares son $\Delta(x^4 + ax + b) = -27a^4 + 256b^3$ y $\Delta(x^4 + ax^2 + b) = 16b(a^2 - 4b)^2$.

Al ser $R_3(x)$ mónico, una sencilla aplicación del teorema de las raíces racionales da un criterio computacional para su irreducibilidad; así, en efecto, el problema 4 arroja un algoritmo para determinar (casi) completamente el grupo de Galois de una cuártica sobre $\mathbb{Q}$.

Referencias

1. Conrad, K. *Galois groups of cubics and quartics (not in characteristic 2)* https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/galoistheory/cubicquartic.pdf.
2. Jacobson, N. *Basic Algebra* 2 vols. (Freeman y Company, 1910).

Correo electrónico: josecuevasbtos@uc.cl
URL: https://josecuevas.xyz/teach/2025-2-alg/