



**Pontificia Universidad Católica de Chile**  
Facultad de Matemáticas

**Profesor:** Ricardo Menares

**Ayudante:** José Cuevas Barrientos

**Curso:** Teoría de Números

**Sigla:** MAT2814

**Fecha:** 14 de noviembre de 2025

## Curvas elípticas

### 1. EJERCICIOS

1. Pruebe que la curva proyectiva  $X^3 + Y^3 = Z^3$  es una curva elíptica sobre un cuerpo  $k$  de característica  $\text{car } k \neq 3$  y dé una ecuación de Weierstrass corta (i.e., de la forma  $y^2 = x^3 + ax + b$ ) cuando  $\text{car } k \nmid 6$ .  
¿Qué falla exactamente en  $\text{car } k = 3$ ?
2. Sea  $C: y^2 = f(x) := x^3 + b_2x^2 + b_4x + b_6$  una curva afín con clausura proyectiva  $\bar{C}$ .
  - a) Pruebe que posee un único punto  $o \in \bar{C}(k) \setminus C(k)$  «al infinito».
  - b) Calcule cuales son los posibles puntos singulares y dé un ejemplo concreto donde efectivamente los puntos que satisfagan esta propiedad sean los singulares.
  - c) Concluya que, si  $f$  no tiene raíces repetidas, entonces  $C$  es suave.
3. Sea  $C: y^2 = f(x)$  una curva elíptica como antes.
  - a) Pruebe que si  $P = (x, y)$ , entonces tenemos la siguiente fórmula de duplicación
$$x(2P) = \frac{x^4 - 2bx^2 - 8cx + b^2 - 4ac}{4x^3 + 4ax^2 + 4bx + 4c}.$$

*PISTA:* Recuerde que las relaciones de Viète dicen que si un polinomio cúbico  $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  tiene raíces  $r_1, r_2, r_3$ , entonces  $\alpha = -r_1 - r_2 - r_3$ .  $\square$

- b) Concluya que los polinomios  $x^4 - 2bx^2 - 8cx + b^2 - 4ac$  y  $f(x)$  no tienen raíces comunes (en  $k^{\text{alg}}$ ).
4. Más en general, la cúbica  $E: X^3 + Y^3 = \alpha Z^3$  (con  $\alpha \neq 0$ ) tiene un punto racional  $o := [1 : -1 : 0] \in E(k)$  al infinito.
  - a) Calcule una fórmula para la suma (con neutro  $o$ )  $P + Q$  de dos puntos afines distintos  $P = (u_1, v_1)$  y  $Q = (u_2, v_2)$ .
  - b) Encuentre una fórmula de duplicación para el punto afín  $P = (u, v)$ .
5. Sea  $C: y^2 = f(x)$  una curva afín con clausura proyectiva  $\bar{C}$ , donde  $f$  es un polinomio mónico de  $\deg f \geq 3$ .
  - a) Pruebe que, en el cuerpo finito  $\mathbb{F}_p$ , tenemos la fórmula

$$|C(\mathbb{F}_p)| = p + 1 + \sum_{j=0}^{p-1} \left( \frac{f(j)}{p} \right),$$

donde  $(a/p)$  es el símbolo de Legendre.

- b) Muestre que si  $f(x) = x^3 + d$ ; entonces para  $p \equiv 2 \pmod{3}$ , se cumple que  $|C(\mathbb{F}_p)| = p + 1$ .  
*PISTA:* Muestre que  $x \mapsto x^3$  es un automorfismo de  $\mathbb{F}_p^\times$ .  $\square$

### REFERENCIAS

1. SILVERMAN, J. H. y TATE, J. *Rational points on elliptic curves* doi:[10.1007/978-1-4757-4252-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4252-7) (Springer-Verlag, New York, 1992).

Correo electrónico: [josecuevasbtos@uc.cl](mailto:josecuevasbtos@uc.cl)