Pontificia Universidad Católica de Chile y Universidad de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: José Samper **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra II **Sigla:** MPG3201
Fecha: 22 de octubre de 2025

Caracteres III: Repaso

1. Ejercicios

En esta ayudantía, G es un grupo finito y las representaciones son complejas.

1. Sea R un anillo (posiblemente no conmutativo) que admita descomposición $R = R_1 \times \cdots \times R_r$ con R_j anillos no nulos. Pruebe que si R tiene n distintos módulos simples (izquierdos o derechos), entonces $n \geq r$.
2. Sea $g \neq 1 \in G$. Pruebe que existe una representación irreducible cuyo caracter χ satisface que $\operatorname{Re} \chi(g) < 0$.
3. *a)* Sea ψ el caracter de una representación V tal que $\psi(g) = 0$ para todo $g \neq 1$. Pruebe que $|G| \mid \dim V$ y que, de hecho, $V \cong \mathbb{C}[G]^n$ para algún n.
   b) Pruebe que dada una representación W arbitraria, entonces $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}} W \cong \mathbb{C}[G]^{\dim W}$.
4. Pruebe que en G todo elemento es conjugado a su inversa syss todos sus caracteres simples tienen valores en $\mathbb{R}$.
5. Pruebe que un elemento $z \in G$ está en el centro syss $|\chi(z)| = |\chi(1)|$ para todo caracter χ.
6. Encuentre la tabla de caracteres del producto semidirecto
$$G = C_7 \rtimes C_3 = \langle x, y : x^7 = y^3 = 1,\ yxy^{-1} = x^2 \rangle.$$
7. Sea $H \leq G$ un subgrupo de un grupo finito y sea χ un caracter de H. Para $g \in G$ y $h \in H$ definamos $h^g := g^{-1}hg$, $h_g := ghg^{-1}$ y $\chi^g(h^g) := \chi(h)$. Es decir, si $h \in H \cap H^g$, entonces $\chi^g(h) = \chi(h_g)$.
   a) Pruebe que
$$\operatorname{Ind}_H^G(\chi)(h) = \sum_{\substack{g \in G \\ h \in H \cap H_g}} \chi(h^g)$$
   b) Pruebe que
$$\operatorname{Res}_H^G \operatorname{Ind}_H^G(V) = \bigoplus_{g \in G} \operatorname{Ind}_{gHg^{-1} \cap H}^H (g^{-1}Vg)$$

Referencias

1. Webb, P. *A course in finite group representation theory* (Cambridge University Press, 2016).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`
URL: `https://josecuevas.xyz/teach/2025-2-alg/`