Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: Héctor Pastén **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Teoría de Números **Sigla:** MAT2225
Fecha: 25 de agosto de 2023

O grande, o chica

1. Órdenes de magnitud

1. (Ejemplo iluminador) Demuestre que
$$\sum_{n\le x}\frac{1}{2^n}=1+O\left(\frac{1}{2^x}\right).$$
2. Empleando sumas parciales, demuestre que:
   a) $H(x):=\sum_{n\le x}\frac{1}{n}=\log x+\gamma+O\left(\frac{1}{x}\right)$, donde γ es una constante llamada la *constante de Euler-Mascheroni*.
   b) $T(x):=\sum_{n\le x}\log n=x\log x-x+O(\log x)$.
3. **Problema del círculo de Gauss:** Sea $r(n)$ la cantidad de formas de escribir n como suma de dos cuadrados (e.g., para $n=5$ tenemos que $r(5)=8$ pues $(\pm1)^2+(\pm4)^2=5$ nos da cuatro formas e intercambiar los factores nos da cuatro más). Demuestre que:
$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x}r(n)=\pi+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$
PISTA: El nombre *problema del círculo* es sugerente. □
4. Demuestre que, para $s>1$ se tiene la siguiente identidad:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\frac{1}{\zeta(s)}.$$

Teorema 1.1 (cotas de Chebyshev): Para x suficientemente grande se tiene
$$c_1\le\frac{\pi(x)}{x/\log x}\le c_2,$$
para algunos $0<c_1<c_2$.[1] En consecuencia, $\pi(x)\asymp x/\log x$.[2]

Las cotas de Chebyshev tienen la facultad de ser «elementales» (en el sentido de que no requieren métodos complejos, por ejemplo) y ser una buena versión preliminar del teorema de los números primos. Como consecuencia:

5. **Primer teorema de Mertens:** Demuestre que
$$\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}=\log x+O(1),$$
(donde el subíndice p siempre recorre los números primos.)
Para facilitar el ejercicio realice los siguientes pasos:

[1] HUA [**1,** pág. 82] lo demuestra con $c_1=1/8$ y $c_2=12$. Dependiendo del autor, las cotas varían, pero lo interesante es que varias aplicaciones no dependen del valor exacto.
[2] Recuérdese que $\log x$ *siempre* denota el logaritmo natural.

(i) Demuestre que cuando n es entero

$$T(n) = \log(n!) = \sum_{p \leq x} \left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots \right) \log p.$$

(ii) Demuestre que

$$\frac{x}{p} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots < \frac{x}{p} + \frac{x}{p(p-1)}.$$

(iii) Demuestre que $\sum_{p \leq x} \log p \leq c_2 x$.

(iv) Concluya el enunciado.

6. **Segundo teorema de Mertens:** Demuestre que

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + M + O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

donde M es una constante llamada la *constante de Mertens*.

2. Aplicaciones del teorema de los números primos

Las cotas de Chebyshev nos dan un acercamiento al siguiente resultado:

Teorema 2.1 (de los números primos): $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}$.

Hay varias demostraciones del resultado anterior. Las primeras, originales de J. Hadamard y C. J. de la Vallée Poussin, siguen la línea de B. Riemann empleando métodos de análisis complejo. Años más tarde, A. Selberg y P. Erdős dieron una demostración *elemental* (sin análisis complejo), pero que se considera mucho menos ilustrativa. Una exposición breve y elemental del teorema se encuentra en Richter [**2**].

Veamos algunas aplicaciones:

7. Sea p_n la sucesión de los números primos en orden creciente. Demuestre que $p_n \sim n \log n$.
8. Para todo $\epsilon > 0$ existe $x_0 > 0$ tal que para todo $x \geq x_0$ siempre existe un primo p tal que $x < p \leq (1+\epsilon)x$.
9. Para cada natural N existe un primo tal que (en base decimal) sus primeras cifras coinciden con (todas) las de N.

3. Comentarios adicionales y problemas abiertos

- Los números $H(x)$ se conocen como *números harmónicos*.
- La constante de Euler-Mascheroni vale $\gamma \approx 0{,}5772156649...$ Se cree que γ es trascendente y, por tanto, irracional; pero ambas afirmaciones están sin demostrar.
- La constante de Mertens $M \approx 0{,}261497212847642...$ sufre de la misma suerte: también se desconoce si es irracional o trascendente.
- Existen grandes carreras por optimizar aproximaciones en la teoría analítica de números. Vamos a dar el ejemplo con el problema del círculo de Gauss. Se cree que

$$\sum_{n \leq x} r(n) = \pi x + O\left(x^{\frac{1}{4}+\epsilon}\right).$$

- Más aún, se cree que la cota anterior es lo más aguda posible, es decir, se cree que es falso:

$$\sum_{n \leq x} r(n) \neq \pi x + O\left(x^{\frac{1}{4}-\epsilon}\right).$$

- El problema 8 puede considerarse una especie de refinamiento del postulado de Bertrand:

Teorema 3.1 (postulado de Bertrand): Para todo $n \geq 2$ existe un primo p tal que $n \leq p < 2n$.

Este resultado se puede demostrar mediante técnicas desarrolladas a estas alturas del curso. Una demostración sencilla se encuentra por ejemplo en Hua [**1,** págs. 82-85].

4. Comentarios ayudantía previa

3. Además de ocupar que $17 \mid q_8$ uno puede ocupar más sencillamente que $31 \mid q_1$. En efecto, el procedimiento siguiente es el mismo ya que
$$q_{1+30k} = 1 + \frac{10}{3}(10^{1+30k} - 1) \equiv 1 + \frac{10}{3}(10^1 - 1) \equiv 0 \pmod{31},$$
y como q_{1+30k} con $k \geq 1$ es mayor estricto de 31, concluimos que es compuesto.
4. El tiempo no dió en la sesión original, reproduzco mi solución.

La idea es proceder por inducción. El caso base es $f(1) = 1 + 17 = 9 \cdot 2$ por lo que $9 \parallel f(1)$. Para $n > 2$ sea x tal que $3^{n-1} \parallel f(x)$, es decir, $f(x) = 3^{n-1}a$ con $3 \nmid a$. Buscamos y tal que $3^n \parallel f(y)$, o lo que es lo mismo, podemos mirar módulo 3^{n+1}: Nótese que
$$\begin{aligned} f(x + b3^{n-2}) &= 17 + x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot b3^{n-2} + 3 \cdot x \cdot b^2 3^{2(n-2)} + b^3 3^{3(n-2)} \\ &\equiv 3^{n-1}(a + bx^2) \pmod{3^{n+1}}, \end{aligned}$$
ahora buscamos manipular $a + bx^2$ de modo que sea divisible por 3, pero no por 9. Primero, observe que como $0 \equiv f(x) \equiv x^3 - 1 \pmod 3$ entonces $3 \nmid x$. Así que, x puede ser $1, 2, 4, 5, 7, 8 \pmod 9$ y, su cuadrado puede ser $1, 4, 7 \ (9)$.

Como x^2 es coprimo con 9, entonces x^2 tiene inversa en $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ y, por tanto, $b = \frac{3-a}{x^2}$ funciona (¡donde «$/x^2$» significa multiplicar por una inversa módulo 9!).

Para hacer la cancelación de $3^{2(n-2)}$ necesitamos las cotas $1 + 2(n-2) \geq n + 1$ y $3(n-2) \geq n + 1$, las cuales se satisfacen para $n \geq 4$, no obstante la técnica igual funciona (aunque no incondicionalmente) Los casos restantes se cubren por $3^4 = 81 \parallel 81 = f(1+3)$ y $3^3 = 27 \parallel -108 = f(4-9)$.

Referencias y lecturas adicionales

1. Hua, L.-K. *Introduction to Number Theory* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1982).
2. Richter, F. K. A new elementary proof of the Prime Number Theorem. *Bull. London Math. Soc.* **53,** 1365-1375. doi:10.1112/blms.12503 (2021).

Correo electrónico: josecuevasbtos@uc.cl