



## $O$ grande, $o$ chica

### 1. ÓRDENES DE MAGNITUD

1. (Ejemplo iluminador) Demuestre que

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{2^n} = 1 + O\left(\frac{1}{2^x}\right).$$

2. Empleando sumas parciales, demuestre que:

a)  $H(x) := \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)$ , donde  $\gamma$  es una constante llamada la *constante de Euler-Mascheroni*.

b)  $T(x) := \sum_{n \leq x} \log n = x \log x - x + O(\log x)$ .

3. **Problema del círculo de Gauss:** Sea  $r(n)$  la cantidad de formas de escribir  $n$  como suma de dos cuadrados (e.g., para  $n = 5$  tenemos que  $r(5) = 8$  pues  $(\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 = 5$  nos da cuatro formas e intercambiar los factores nos da cuatro más). Demuestre que:

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} r(n) = \pi + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

*PISTA:* El nombre *problema del círculo* es sugerente. □

4. Demuestre que, para  $s > 1$  se tiene la siguiente identidad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

**Teorema 1.1 (cotas de Chebyshev):** Para  $x$  suficientemente grande se tiene

$$c_1 \leq \frac{\pi(x)}{x/\log x} \leq c_2,$$

para algunos  $0 < c_1 < c_2$ .<sup>1</sup> En consecuencia,  $\pi(x) \asymp x/\log x$ .<sup>2</sup>

Las cotas de Chebyshev tienen la facultad de ser «elementales» (en el sentido de que no requieren métodos complejos, por ejemplo) y ser una buena versión preliminar del teorema de los números primos. Como consecuencia:



5. **Primer teorema de Mertens:** Demuestre que

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1),$$

(donde el subíndice  $p$  siempre recorre los números primos.)

Para facilitar el ejercicio realice los siguientes pasos:

<sup>1</sup>HUA [1, pág. 82] lo demuestra con  $c_1 = 1/8$  y  $c_2 = 12$ . Dependiendo del autor, las cotas varían, pero lo interesante es que varias aplicaciones no dependen del valor exacto.

<sup>2</sup>Recuérdese que  $\log x$  *siempre* denota el logaritmo natural.

(I) Demuestre que cuando  $n$  es entero

$$T(n) = \log(n!) = \sum_{p \leq n} \left( \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots \right) \log p.$$

(II) Demuestre que

$$\frac{x}{p} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots < \frac{x}{p} + \frac{x}{p(p-1)}.$$

(III) Demuestre que  $\sum_{p \leq x} \log p \leq c_2 x$ .

(IV) Concluya el enunciado.



6. **Segundo teorema de Mertens:** Demuestre que

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + M + O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

donde  $M$  es una constante llamada la *constante de Mertens*.

## 2. APLICACIONES DEL TEOREMA DE LOS NÚMEROS PRIMOS

Las cotas de Chebyshev nos dan un acercamiento al siguiente resultado:

**Teorema 2.1 (de los números primos):**  $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ .

Hay varias demostraciones del resultado anterior. Las primeras, originales de J. Hadamard y C. J. de la Vallée Poussin, siguen la línea de B. Riemann empleando métodos de análisis complejo. Años más tarde, A. Selberg y P. Erdős dieron una demostración *elemental* (sin análisis complejo), pero que se considera mucho menos ilustrativa. Una exposición breve y elemental del teorema se encuentra en RICHTER [2].

Veamos algunas aplicaciones:

7. Sea  $p_n$  la sucesión de los números primos en orden creciente. Demuestre que  $p_n \sim n \log n$ .
8. Para todo  $\epsilon > 0$  existe  $x_0 > 0$  tal que para todo  $x \geq x_0$  siempre existe un primo  $p$  tal que  $x < p \leq (1 + \epsilon)x$ .
9. Para cada natural  $N$  existe un primo tal que (en base decimal) sus primeras cifras coinciden con (todas) las de  $N$ .

## 3. COMENTARIOS ADICIONALES Y PROBLEMAS ABIERTOS

- Los números  $H(x)$  se conocen como *números armónicos*.
- La constante de Euler-Mascheroni vale  $\gamma \approx 0,5772156649\dots$ . Se cree que  $\gamma$  es trascendente y, por tanto, irracional; pero ambas afirmaciones están sin demostrar.
- La constante de Mertens  $M \approx 0,261497212847642\dots$  sufre de la misma suerte: también se desconoce si es irracional o trascendente.
- Existen grandes carreras por optimizar aproximaciones en la teoría analítica de números. Vamos a dar el ejemplo con el problema del círculo de Gauss. Se cree que

$$\sum_{n \leq x} r(n) = \pi x + O\left(x^{\frac{1}{4} + \epsilon}\right).$$

- Más aún, se cree que la cota anterior es lo más aguda posible, es decir, se cree que es falso:

$$\sum_{n \leq x} r(n) \neq \pi x + O\left(x^{\frac{1}{4} - \epsilon}\right).$$

- El problema 8 puede considerarse una especie de refinamiento del postulado de Bertrand:

**Teorema 3.1 (postulado de Bertrand):** Para todo  $n \geq 2$  existe un primo  $p$  tal que  $n \leq p < 2n$ .

Este resultado se puede demostrar mediante técnicas desarrolladas a estas alturas del curso. Una demostración sencilla se encuentra por ejemplo en HUA [1, págs. 82-85].

#### 4. COMENTARIOS AYUDANTÍA PREVIA

3. Además de ocupar que  $17 \mid q_8$  uno puede ocupar más sencillamente que  $31 \mid q_1$ . En efecto, el procedimiento siguiente es el mismo ya que

$$q_{1+30k} = 1 + \frac{10}{3}(10^{1+30k} - 1) \equiv 1 + \frac{10}{3}(10^1 - 1) \equiv 0 \pmod{31},$$

y como  $q_{1+30k}$  con  $k \geq 1$  es mayor estricto de 31, concluimos que es compuesto.

4. El tiempo no dió en la sesión original, reproduzco mi solución.

La idea es proceder por inducción. El caso base es  $f(1) = 1 + 17 = 9 \cdot 2$  por lo que  $9 \parallel f(1)$ . Para  $n > 2$  sea  $x$  tal que  $3^{n-1} \parallel f(x)$ , es decir,  $f(x) = 3^{n-1}a$  con  $3 \nmid a$ . Buscamos  $y$  tal que  $3^n \parallel f(y)$ , o lo que es lo mismo, podemos mirar módulo  $3^{n+1}$ : Nótese que

$$\begin{aligned} f(x + b3^{n-2}) &= 17 + x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot b3^{n-2} + 3 \cdot x \cdot b^2 3^{2(n-2)} + b^3 3^{3(n-2)} \\ &\equiv 3^{n-1}(a + bx^2) \pmod{3^{n+1}}, \end{aligned}$$

ahora buscamos manipular  $a + bx^2$  de modo que sea divisible por 3, pero no por 9. Primero, observe que como  $0 \equiv f(x) \equiv x^3 - 1 \pmod{3}$  entonces  $3 \nmid x$ . Así que,  $x$  puede ser 1, 2, 4, 5, 7, 8 (mód 9) y, su cuadrado puede ser 1, 4, 7 (9).

Como  $x^2$  es coprimo con 9, entonces  $x^2$  tiene inversa en  $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$  y, por tanto,  $b = \frac{3-a}{x^2}$  funciona (¡donde « $/x^2$ » significa multiplicar por una inversa módulo 9!).

Para hacer la cancelación de  $3^{2(n-2)}$  necesitamos las cotas  $1 + 2(n-2) \geq n+1$  y  $3(n-2) \geq n+1$ , las cuales se satisfacen para  $n \geq 4$ , no obstante la técnica igual funciona (aunque no incondicionalmente) Los casos restantes se cubren por  $3^4 = 81 \parallel 81 = f(1+3)$  y  $3^3 = 27 \parallel -108 = f(4-9)$ .

#### REFERENCIAS Y LECTURAS ADICIONALES

1. HUA, L. K. *Introduction to Number Theory* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1982).
2. RICHTER, F. K. A new elementary proof of the Prime Number Theorem. *Bull. London Math. Soc.* **53**, 1365-1375. doi:10.1112/blms.12503 (2021).

Correo electrónico: josecuevasbtos@uc.cl