Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: Héctor Pastén Vásquez **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra abstracta II **Sigla:** MAT2244
Fecha: 5 de junio de 2025

Módulos planos y otros

1. Planitud

Un A-módulo M se dice ***plano*** si para toda sucesión exacta $0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0$, se cumple que la sucesión

$$0 \to N_1 \otimes_A M \to N_2 \otimes_A M \to N_3 \otimes_A M \to 0 \tag{1}$$

es exacta.

1. Algunos ejemplos de módulos planos:
   a) (Examen de lucidez) Pruebe que todo A-módulo libre es plano. Concluya que sobre un cuerpo todo módulo es libre.
   b) Pruebe que si M, N son un par de módulos planos, entonces $M \otimes_A N$ también es plano.
   c) Pruebe que $M \otimes_A A[x] \cong M[x]$ y concluya que $A[x]$ es un A-módulo plano.
   d) Pruebe que $M \otimes_A S^{-1}A \cong S^{-1}M$ y concluya que $A_{\mathfrak{p}}$ es un A-módulo plano para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.
2. Pruebe que para un A-módulo M son equivalentes:
   a) M es plano.
   b) Para todo monomorfismo $\varphi\colon T \hookrightarrow N$, el homomorfismo $\varphi \otimes \mathrm{Id}_M \colon T \otimes M \to N \otimes M$ es un monomorfismo.
   c) Para todo monomorfismo $\varphi\colon T \hookrightarrow N$ con N finitamente generado, el homomorfismo $\varphi \otimes \mathrm{Id}_M \colon T \otimes M \to N \otimes M$ es un monomorfismo.
   d) Para todo ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ se cumple que el homomorfismo $\mathfrak{a} \otimes M \to \mathfrak{a}M$ dado por $a \otimes m \mapsto am$ es un isomorfismo.
3. a) Pruebe que si B es un A-álgebra plana (i.e., B es plano visto como A-módulo) y N es un B-módulo plano, entonces N es plano visto como A-módulo.
   b) Pruebe que si $A^n \cong A^m$ para algunos $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $n = m$.
   Pista: Trate de tensorizar para reducir a algún caso conocido. □
   c) Más aún, pruebe que si hay un epimorfismo $\varphi\colon A^m \twoheadrightarrow A^n$, entonces $m \geq n$.
4. Sea A un anillo. Construiremos el ***grupo de Grothendieck*** $\mathsf{K}^0(A)$ como el grupo abeliano libre con generadores $[M]$, donde M recorre los A-módulos finitamente generados, bajo la relación de que si existe una sucesión exacta corta $0 \to M \to N \to T \to 0$, entonces

$$[N] = [M] + [T].$$

   En particular, $[M \oplus N] = [M] + [N]$.
   a) Pruebe que si $\varphi\colon A \to B$ es un homomorfismo de anillos, entonces

$$\varphi^*\colon \mathsf{K}^0(A) \longrightarrow \mathsf{K}^0(B), \qquad [M] \longmapsto [M \otimes_A B]$$

   es un homomorfismo de grupos.
   b) Pruebe que si $A = k$ es un cuerpo, entonces $\mathsf{K}^0(k) = \mathbb{Z}$.
   c) Calcule $\mathsf{K}^0(A)$, cuando A es un DIP (puede asumir $A = \mathbb{Z}$ si prefiere).
   d) Pruebe que si A es noetheriano, entonces $\mathsf{K}^0(A)$ está generado por $[A/\mathfrak{p}]$, donde $\mathfrak{p}$ recorre los ideales primos.

A. Ejercicios propuestos

1. Un A-módulo se dice ***proyectivo*** si para todo homomorfismo $f\colon P \to M$ y todo epimorfismo $g\colon N \twoheadrightarrow M$, hay un homomorfismo $h\colon P \to N$ tal que $f = g \circ h$. En diagrama:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, two heads, "g"] \\ P \arrow[ur, dashed, "\exists h"] \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

   Pruebe que son equivalentes:
   a) P es proyectivo.
   b) Toda sucesión exacta $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$ se escinde (recuerde que esto significa que existe $s\colon P \to M$ tal que $f \circ s = \mathrm{Id}_M$ y, *a posteriori,* que $M \cong N \oplus P$).
2. Pruebe que para todo A-módulo proyectivo P (finitamente generado) existe un módulo libre L (finitamente generado) y un módulo N tales que $L \cong N \oplus P$.
3. Pruebe que todo módulo proyectivo es plano.

Referencias

1. Atiyah, M. F. y MacDonald, I. G. *Introduction to Commutative Algebra* (Addison-Wesley, 1969).
2. Jacobson, N. *Basic Algebra* 2 vols. (Freeman y Company, 1910).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`
URL: `https://josecuevas.xyz/teach/2025-1-ayud/`