Pontificia Universidad Católica de Chile y Universidad de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: José Samper | **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra II | **Sigla:** MPG3201
Fecha: 19 de noviembre de 2025

Dimensión y polinomios de Hilbert

1. Ejercicios

1. Calcule el polinomio de Hilbert afín de los siguientes ideales:
   a) $(x^3 - y^2) \lhd k[x, y]$.
   b) $(x^3y^2 + 3x^2y^2 + y^3 + 1) \lhd k[x, y]$.
   c) $(x^3yz^5, xy^3z^2) \lhd k[x, y, z]$.
   d) $(x^3 - yz^2, y^4 - x^2yz) \lhd k[x, y, z]$.
2. Decimos que un polinomio $f(t) \in \mathbb{Q}[t]$ es *numérico* si para todo entero $n \in \mathbb{Z}$, su evaluación $f(n) \in \mathbb{Z}$ es también entera. Pruebe que todo polinomio numérico es de la forma
$$f(t) = \sum_{j=0}^{d} a_j \binom{t}{j}, \qquad a_j \in \mathbb{Z}$$
donde $\displaystyle\binom{t}{j} = \frac{t(t-1)\cdots(t-j+1)}{j!}$.
3. Pruebe que si $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \lhd k[\boldsymbol{x}]$ son ideales, entonces $\dim \mathbf{V}(\mathfrak{a}) \geq \dim \mathbf{V}(\mathfrak{b})$. Teniendo inclusión estricta $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ muestre ejemplos donde las dimensiones coinciden o no.
4. *a*) Sea $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n(k)$ un punto en el espacio afín. Pruebe que $\dim\{(a_1, \dots, a_n)\} = 0$.
   b) Dado un polinomio $f(x, y)$ no constante pruebe que la dimensión de $\mathbf{V}(f)$ es 1. (Eslógan: «las hipersuperficies en el plano son curvas (posiblemente reducibles).»)
   c) Más generalmente, pruebe que si $f(\boldsymbol{x}) \in k[x_1, \dots, x_n]$ es no constante, entonces la dimensión de la hipersuperficie $\mathbf{V}(f)$ es $n - 1$.
5. Un polinomio f en $R := k[\boldsymbol{x}]$ se dice *homogéneo* si todos sus monomios no nulos tienen el mismo grado (total). Un ideal $\mathfrak{a}$ en $k[\boldsymbol{x}]$ se dice ***homogéneo*** si está generado por polinomios homogéneos.
   a) Defina la *función de Hilbert proyectiva* de un ideal homogéneo $\mathfrak{a}$ como
   $$\mathrm{HF}_{R/\mathfrak{a}}(s) := \dim_k R_s - \dim_k \mathfrak{a}_s,$$
   donde el subíndice $\mathfrak{b}_s$ denota el k-subespacio vectorial de los polinomios homogéneos en $\mathfrak{b}$ de grado (total) s.
   Pruebe que $\mathrm{HF}_{R/\mathfrak{a}}(s) = \mathrm{HF}^{\mathrm{af}}_{R/\mathfrak{a}}(s) - \mathrm{HF}^{\mathrm{af}}_{R/\mathfrak{a}}(s-1)$.
   b) Sea $f \in R$ un polinomio no necesariamente homogéneo. Definamos su «homogenización en la nueva indeterminada t» como
   $$f^{\mathrm{hom}}(\boldsymbol{x}, t) := t^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{t}, \dots, \frac{x_n}{t}\right).$$
   Pruebe que la función de Hilbert afín del ideal $(f) \lhd R$ es igual a la función de Hilbert proyectiva del ideal $(f^{\mathrm{hom}}) \lhd R[t] = k[\boldsymbol{x}, t]$.

2. Comentarios adicionales

El ejercicio 4c es un caso particular del «teorema de ideales principales de Krull» (vea Eisenbud [**2**]) o también conocido por su nombre en alemán, *Hauptidealsatz*.

Referencias

1. Cox, D. A., Little, J. y O'Shea, D. *Ideals, Varieties, and Algorithms. An introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra* 5.ª ed. (Springer-Verlag, 2020).
2. Eisenbud, D. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry* (Springer Science+Business Media, 1994).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`
URL: `https://josecuevas.xyz/teach/2025-2-alg/`