Pontificia Universidad Católica de Chile y Universidad de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: José Samper **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra II **Sigla:** MPG3201
Fecha: 15 de octubre de 2025

Más acerca de caracteres

1. Ejercicios

A lo largo de esta ayudantía, siempre G denotará un grupo finito y $\mathbb{C}$ será el cuerpo de coeficientes para sus representaciones.

1. Pruebe que la multiplicidad de una representación simple en la representación regular es su grado (i.e., la dimensión del espacio vectorial donde actúa).
2. Sean V, W, V', W' un conjunto de representaciones. Recuerde que $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ tiene una representación natural definida por $g \odot \varphi(v) := g\varphi(g^{-1}v)$.
   a) Pruebe que $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \otimes_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V', W') \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V \otimes V', W \otimes W')$.
   b) Denotemos por $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, W)$ al módulo de homomorfismos *de representaciones.* Pruebe que
   $$\dim \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, W) = \langle \chi_V, \chi_W \rangle.$$
   c) Concluya el «lema de Yoneda» para representaciones: Si V, V' son tales que $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, W) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V', W)$, entonces $V \cong V'$.
3. Sea $H \leq G$ un subgrupo de un grupo finito y sea χ el caracter de una representación $\rho\colon H \curvearrowright V$. Recuerde de la ayudantía anterior (ej. 2c) que asociado a V^{ρ} tenemos la representación inducida $\operatorname{Ind}_H^G(\rho)$ cuyo caracter denotaremos $\operatorname{Ind}_H^G(\chi)$. Pruebe que tenemos la siguiente fórmula para todo $g \in G$:
   $$\operatorname{Ind}_H^G(\chi)(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{t \in G \\ tgt^{-1} \in H}} \chi(t^{-1}gt).$$
4. Calcule la tabla de caracteres para el grupo de Heisenberg
   $$H(\mathbb{F}_3) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{F}_3 \right\} \leq \operatorname{SL}_2(\mathbb{F}_3).$$
5. Sea $G \curvearrowright V$ una representación compleja simple. Se dice que V es
   De tipo complejo: Si $V \ncong V^*$.
   De tipo real: Si posee una forma simétrica no degenerada $\langle -, - \rangle$ que es invariante por G (i.e., $\langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle$ para todo $v, w \in V$).
   De tipo cuaterniónico: Si posee una forma hermitiana (i.e., tal que
   $$\forall v, w \in V,\ \lambda \in \mathbb{C}, \qquad \langle \lambda v, w \rangle = \langle v, \overline{\lambda} w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$$
   y que es no degenerada) que es invariante por G.
   a) Pruebe que
   $$\operatorname{FS}(V) := \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{Sym}^2 V)^G - \dim_{\mathbb{C}} \Big(\bigwedge^2 V \Big)^G = \begin{cases} 0, & V \text{ es de tipo complejo}, \\ 1, & V \text{ es de tipo real}, \\ -1, & V \text{ es de tipo cuaterniónico}. \end{cases}$$
   Pista: Para esto, emplee la descomposición de representaciones $V \otimes V = \operatorname{Sym}^2 V \oplus \bigwedge^2 V$ y argumente por qué el subespacio G-invariante de $V^{\otimes 2}$ tiene dimensión 1. □

b) Pruebe que para un caracter simple χ se tiene que

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^2) = \mathrm{FS}(V).$$

Pista: Note que para un $g \in G$ fijo podemos simultáneamente diagonalizar las matrices de las potencias de g. Estudie los valores propios. □

c) **Teorema de Frobenius-Schur:** Concluya que la cantidad de elementos de orden 2 (también llamados «involuciones») en G es

$$\frac{1}{|G|}\sum_{V}\dim(V)\mathrm{FS}(V),$$

donde la sumatoria recorre las representaciones complejas simples de G.

Problema: Pruebe que el anillo de endomorfismos $\mathrm{End}_{\mathbb{R}[G]}(V)$ es $\mathbb{C}$ (resp. $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{H}$) si V es de tipo complejo (resp. de tipo real, de tipo cuaterniónico).

A. Implementación en sagemath

El ejercicio 4 ya involucra un grupo un tanto «grande», de orden 3^3, de modo que varios de los calculos pueden resultar tediosos, especialmente las clases de conjugación. Afortunadamente, ya no vivimos en eras arcaicas y hoy día las computadoras pueden ayudarnos en tal tarea: para ello, voy a ocupar la observación de que $H(\mathbb{F}_p)$ está generado por

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Y así, puedo construir el grupo de Heisenberg en sagemath mediante:

```
MS = MatrixSpace(GF(3), 3, 3)
gens = [
        MS([[1, 1, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]]),
        MS([[1, 0, 1], [0, 1, 0], [0, 0, 1]]),
        MS([[1, 0, 0], [0, 1, 1], [0, 0, 1]]),
        ]
Heis = MatrixGroup(gens)
```

(Aquí `GF(3)` denota el cuerpo de orden 3. Perfectamente todo lo siguiente aplica cambiándolo por `GF(p)` con p primo a elección.)

El método `Heis.conjugacy_classes()` nos otorga las clases de conjugación, pero al imprimirlas no lo hace de manera muy legible que digamos. Si queremos ver un representante por clase de conjugación, podemos emplear:

```
Heis.conjugacy_classes_representatives()
```

No obstante, si queremos ver cada clase como una lista, el siguiente código en Python arroja una visualización más amena:

```
def prettyprint(L: list):
    rank = len(L[0].list())
    lines = [ [] for _ in range(rank) ]
    for matrix in L:
        for i in range(rank):
            lines[i].append( ' '.join([ str(a) for a in matrix.list()[i] ]) )
    for l in lines:
        print(l)
    print()
```

```
for cl in H.conjugacy_classes():
    prettyprint(cl.list())
```

Finalmente, de querer verificar que el cálculo de una tabla estuvo correcto, podemos emplear el método

```
Heis.character_table()
```

Referencias

1. Serre, J.-P. *Linear Representations of Finite Groups* (Springer-Verlag, 1977).

Correo electrónico: josecuevasbtos@uc.cl
URL: https://josecuevas.xyz/teach/2025-2-alg/