



Profesor: José Samper

Ayudante: José Cuevas Barrientos

Curso: Álgebra II

Sigla: MPG3201

Fecha: 24 de septiembre de 2025

Representaciones

1. EJERCICIOS

A lo largo de esta sección, G denotará un grupo finito posiblemente no conmutativo y K denotará un cuerpo (puede suponer $K = \mathbb{C}$ si prefiere). Al hablar de anillos en esta ayudantía, los asumiremos *unitarios* (con neutro multiplicativo), *asociativos* y posiblemente *no conmutativos*.

1. (Representaciones como módulos) Denotaremos por $K[G]$ al grupo abeliano de sumas formales $\sum_{g \in G} a_g g$, donde cada $a_g \in K$. Entonces $K[G]$ es un anillo con el producto

$$\left(\sum_{h \in G} a_h h \right) \left(\sum_{j \in G} b_j j \right) = \sum_{g \in G} \left(\sum_{hj=g} a_h b_j \right) g.$$

- a) Sea $\rho: G \rightarrow \text{GL}_K(V)$ una representación, es decir, un homomorfismo de grupos, donde V es un K -espacio vectorial; denotaremos $\rho_g := \rho(g) \in \text{Aut}(V)$ para un $g \in G$. Pruebe que V es naturalmente un $K[G]$ -módulo (izquierdo) con la operación escalar sobre $v \in V$ dada por

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \cdot v := \sum_{g \in G} a_g \rho_g(v).$$

Recíprocamente, pruebe que todo $K[G]$ -módulo M da lugar a una única representación $G \rightarrow \text{GL}_K(M)$. Más aún, una subrepresentación corresponde a un submódulo mediante esta construcción.

En lenguaje sofisticado, diríamos que la categoría de representaciones y la de $K[G]$ -módulos son equivalentes.

- b) Describa qué representación corresponde al $K[G]$ -módulo libre $K[G]$. A ésta le llamaremos la **representación regular** de G .
2. Sea $\varphi: H \rightarrow G$ un homomorfismo de grupos.
 - a) Pruebe que induce un homomorfismo de K -álgebras $K[H] \rightarrow K[G]$. Mediante este, toda representación de G se restringe a una representación de H .
 - b) También mediante $K[H] \rightarrow K[G]$ note que toda representación de H induce una representación de G dada por asociarle al $K[H]$ -módulo izquierdo V el tensor $K[G] \otimes_{K[H]} V$. A esta le llamamos la **representación inducida**.
 - c) ¿Bajo qué hipótesis $K[G]$ es un $K[H]$ -módulo libre (es decir, cuando su representación es suma directa de las regulares)? En cuyo caso, ¿qué rango tiene?

3. **Representaciones del grupo diedral:** Sea

$$D_{2n} = \langle r, s : r^n = s^2 = 1, srs = r^{-1} \rangle$$

el grupo diedral de cardinalidad $2n$.

- a) Pruebe que las únicas representaciones lineales se factorizan por $\chi: D_{2n} \rightarrow \{\pm 1\} \leq \mathbb{C}^\times$.
Acto seguido, calcule cuáles hay.
- b) Mediante la inclusión $C_n \cong \langle r \rangle \leq D_{2n}$, describa las representaciones inducidas en D_{2n} .
¿Cuáles de ellas son irreducibles? ¿Cuántas de ellas hay salvo isomorfismo?
- c) Concluya cuáles son todas las representaciones irreducibles de D_{2n} cuando n es par.



4. Sea G un grupo finito. En clases vio que toda representación compleja de G se descompone como suma de subrepresentaciones irreducibles; el lector atento podrá leer la demostración y verificar que de hecho esto también es cierto si trabajamos con representaciones sobre \mathbb{Q} o incluso sobre cuerpos K de $\text{car } K \nmid |G|$.

Pruebe, sin embargo, que si $p \mid G$ y K tiene $\text{car } K = p$, entonces existe una representación de G en K que no admite dicha descomposición.

5. Considere el grupo simétrico S_3 . Se vio en clases que hay tres representaciones simples salvo isomorfismo: la trivial \mathbb{C}_0 , el signo \mathbb{C}_{sign} y la representación estándar V_{st} .

a) Pruebe que, dada una representación lineal \mathbb{C}_χ y una representación simple W , el tensor $\mathbb{C}_\chi \otimes W$ es también simple.

b) Pruebe que

$$V_{\text{st}} \otimes V_{\text{st}} \cong \mathbb{C}_0 \oplus \mathbb{C}_{\text{sign}} \oplus V_{\text{st}}.$$

c) Calcule las potencias tensoriales $V_{\text{st}}^{\otimes n}$.

d) Sea $R \cong \mathbb{C}_0 \otimes V_{\text{st}}$ la representación de permutación. Con lo anterior, pruebe que $\text{Sym}^{n+6}(V_{\text{st}}) \cong \text{Sym}^n(V) \oplus R$.

A. COMENTARIOS ADICIONALES

El lector notará que exigirle al grupo que sea *finito* es, en cierto modo, una condición de pequeñez y una de sus ventajas es que equivale a que el anillo sea noetheriano. Así, uno está tentado a preguntarse si podemos admitir una teoría de representaciones –bajo hipótesis adicionales– en grupos de otra índole (ejemplos de interés podrían ser subgrupos y/o cocientes de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, y grupos de Galois infinitos). En muchos casos sí, pero para ello debemos dotar al cuerpo y al grupo de estructura adicional (tradicionalmente, una topología como mínimo) y restringirnos a trabajar con representaciones compatibles (en nuestro ejemplo, continuas); suele ser el caso que los grupos *compactos* jueguen el rol ahora de los grupos finitos.

REFERENCIAS

- SERRE, J.-P. *Linear Representations of Finite Groups* (Springer-Verlag, 1977).

Correo electrónico: josecuevasbtos@uc.cl

URL: <https://josecuevas.xyz/teach/2025-2-alg/>