Pontificia Universidad Católica de Chile y Universidad de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: José Samper **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra II **Sigla:** MPG3201
Fecha: 12 de noviembre de 2025

Eliminación e ideales radicales

1. Ordenes monomiales

1. Sea $\mathfrak{a} \lhd k[\boldsymbol{x}]$ el ideal generado por los polinomios simétricos elementales en n variables:

$$e_1(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad e_k(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \quad (k \le n).$$

Para un orden monomial $\prec$ calcule una base de Gröbner.

2. **Implicitización racional:** Sea K un cuerpo infinito y considere el morfismo racional $F\colon \mathbb{A}^m_K \setminus W \to \mathbb{A}^n_K$ dado por

$$x_1 = \frac{f_1(t_1, \dots, t_m)}{g_1(t_1, \dots, t_m)}, \qquad \cdots, \qquad x_n = \frac{f_n(t_1, \dots, t_m)}{g_n(t_1, \dots, t_m)};$$

con $F(\boldsymbol{t}) = (x_1, \dots, x_n)$.

Sea $\mathfrak{b} := (g_1 x_1 - f_1, \dots, g_n x_n - f_n, 1 - gy) \trianglelefteq k[y, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}]$, donde $g = g_1 g_2 \cdots g_n$ y $W = \mathbf{V}(g)$. Entonces $\mathbf{V}(\mathfrak{b} \cap k[\boldsymbol{x}]) \subseteq \mathbb{A}^n_K$ es la clausura de Zariski de $\operatorname{Img} F$.

2. Radicalidad

Sea $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ un ideal en un anillo, se define su radical como

$$\operatorname{Rad} \mathfrak{a} := \{\alpha \in A : \exists n \ge 1 \quad \alpha^n \in \mathfrak{a}\}.$$

Se dice que $\mathfrak{a}$ es radical si $\operatorname{Rad} \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

3. Sean $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd k[x_1, \dots, x_n]$ un par de ideales. Pruebe $\operatorname{Rad} \mathfrak{a}$ es un ideal y que se tienen las siguientes inclusiones

$$\operatorname{Rad}(\mathfrak{a}) \operatorname{Rad}(\mathfrak{b}) \subseteq \operatorname{Rad}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}), \qquad \operatorname{in}_\prec(\operatorname{Rad} \mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Rad}(\operatorname{in}_\prec \mathfrak{a}),$$

donde $\prec$ es un orden monomial. Muestre ejemplos donde las inclusiones sean estrictas.

4. Pruebe que si $\mathfrak{a}$ es tal que $\operatorname{in}_\prec(\mathfrak{a})$ es radical, entonces $\mathfrak{a}$ también. ¿El recíproco es cierto?

5. Considere el morfismo $f\colon \mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^2_k$ dado por $t \mapsto (t^2, t^3)$. Calcule el ideal $\mathfrak{a} \lhd k[x, y]$ tal que $\mathbf{V}(\mathfrak{a}) = \overline{\operatorname{Img} f}$. ¿Es $\mathfrak{a}$ radical?

A. Ejercicios propuestos

6. Calcule la(s) ecuacion(es) que determinan la superficie en $\mathbb{A}^3_k$ cuyos puntos (x, y, z) satisfacen

$$x = ts, \qquad y = ts^2, \qquad z = s^2.$$

7. Usando `sagemath`, encuentre la ecuación que define la *superficie de Enneper*

$$\begin{aligned} x &= 3u + 3uv^2 - u^3, \\ y &= 3v + 3u^2 v - v^3, \\ z &= 3u^2 - 3v^2. \end{aligned}$$

(También puede tratar de hacerlo a mano y mandarme su solución, pero le advierto que no trabajo después del 20 de diciembre.)

B. Comentarios y sage

El lector familiarizado con el primer capítulo de Hartshorne [**1**] reconocerá que la respuesta al ejercicio 4 es siempre afirmativa. Mejor aún, $\mathfrak{a}$ siempre es *primo* puesto que la clausura de la imagen es irreducible (debido a que el dominio lo es).

La manera de calcular bases de Gröbner (con el orden lexicográfico) en sagemath es como prosigue (para el ej. 4):

```
from sage.rings.polynomial.toy_buchberger import buchberger
set_verbose(1) # para ver los cálculos

R.<t,x,y> = PolynomialRing(QQ, order='lex')
I = R.ideal([t^2 - x, t^3 - y])
buchberger(I)
```

Referencias

1. Hartshorne, R. *Algebraic Geometry Graduate Texts in Mathematics* **52** (Springer-Verlag New York, 1977).

Correo electrónico: josecuevasbtos@uc.cl
URL: https://josecuevas.xyz/teach/2025-2-alg/