



## Extensiones algebraicas

A lo largo de las ayudantías trataré de incluir comentarios o problemas especiales. Los problemas difíciles tendrán ojos asustados ☹☹, los comentarios que son opcionales u omitibles tendrán ojos hastiados ☹☹ y los comentarios **importantes** tendrán ojos interesados ☹☹.

### 1. GENERAL

1. Sea  $k \supseteq \mathbb{F}_p$  una extensión algebraica (posiblemente infinita). Pruebe que todo elemento *siempre* de  $k$  tiene raíz  $p$ -ésima.
2. Sea  $\mathbb{F}_q$  un cuerpo con  $q < \infty$  elementos.
  - a) Sea  $f(x) \in \mathbb{F}_q[x]$  es irreducible. Pruebe que  $f(x) \mid x^{q^n} - x$  syss  $\deg f \mid n$ .
  - b) Sea  $\psi(d)$  la cantidad de polinomios irreducibles de grado  $d$  en  $\mathbb{F}_q[x]$ . Pruebe que

$$n\psi(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) q^{n/d},$$

donde  $\mu(d)$  es la *función de Möbius* que vale 0 si  $p^2 \mid d$  para algún primo  $p$  y vale  $(-1)^m$  si  $d = p_1 \cdot p_m$ , donde  $p_j$  son primos distintos.

*PISTA:* Para el problema podría necesitar de la **fórmula de inversión de Möbius**. □

### 2. GRADOS DE EXTENSIONES

3. Sea  $\Omega/k$  una extensión de cuerpos con extensiones intermedias  $k \subseteq K, L \subseteq \Omega$ . Pruebe que

$$[KL : k] \leq [K : k][L : k],$$

y que se alcanza igualdad cuando  $[K : k]$  y  $[L : k]$  son coprimos.

4. Sea  $f(x) \in k[x]$  un polinomio de grado  $n$ , sea  $K$  su cuerpo de escisión. Pruebe que  $[K : k] \mid n!$

### 3. EXTENSIONES (IN)SEPARABLES

Como se vio en clases, las extensiones en característica cero son todas separables, por lo que en esta sección  $k$  será un cuerpo de  $\text{car } k = p > 0$ .

5. Sea  $K/k$  una extensión algebraica con  $p := \text{car } k > 0$  y sea  $\alpha \in K$ .
  - a) Pruebe que si  $\alpha$  es inseparable, entonces su polinomio minimal  $f(x) \in k[x]$  satisface que  $f(x) = g(x^p)$  para todo  $g(x) \in k[x]$ .
  - b) Pruebe que  $\alpha$  es separable syss  $k(\alpha) = k(\alpha^p)$ .
6. Pruebe que si  $f(x) \in k[x]$  es irreducible, entonces todas sus raíces (en su cuerpo de escisión) tienen la misma multiplicidad y esta es una potencia de  $p$ .
7. Sea  $K/k$  una extensión algebraica de cuerpos. Un elemento  $\alpha \in K$  se dice **puramente inseparable** si su polinomio minimal  $f(x) \in k[x]$  es una potencia del monomio  $x - \alpha$ .
  - a) Empleando el ejercicio anterior pruebe que  $\alpha \in K$  es puramente inseparable syss  $\alpha^{p^e} \in k$  para algún  $e \geq 1$ .
  - b) Pruebe que si  $a \in k \setminus k^p$ , entonces el polinomio  $x^{p^e} - a$  es irreducible para  $e \in \mathbb{N}$ .
  - c) Pruebe que

$$K_{\text{ins}} = \{\alpha \in K : \alpha \text{ es puramente inseparable}\}$$

es un subcuerpo de  $K$ .

## REFERENCIAS

1. LANG, S. *Algebra* (Springer-Verlag New York, 2002).  
*Correo electrónico:* josecuevasbtos@uc.cl