Pontificia Universidad Católica de Chile y Universidad de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: José Samper | **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra II | **Sigla:** MPG3201
Fecha: 1 de octubre de 2025

Caracteres

1. Ejercicios

A lo largo de esta ayudantía, siempre consideraremos a $\mathbb{C}$ como cuerpo de coeficientes.

1. Calcule la tabla de caracteres simples del grupo de cuaterniones
$$Q_8 = \langle i, j, k : i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ijk = -1 \rangle.$$
2. Calcule la tabla de caracteres simples de A_4.
3. Recuerde que el grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$ siempre admite la *representación por permutación* $\rho \curvearrowright \mathbb{C}^n$ dada por $\sigma \cdot (v_1, \dots, v_n) = (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$. Esta fija al vector $(1, \dots, 1)$ que genera la subrepresentación trivial, el complemento de ella es la ***representación estándar*** cuyo caracter es
$$\chi_{\mathrm{st}}(\sigma) = \chi_{\mathrm{perm}}(\sigma) - \chi_0(\sigma) = \chi_{\mathrm{perm}}(\sigma) - 1.$$
Pruebe que la representación estándar es siempre simple.

   Pista: Ingénieselas para convertir el problema en contar dimensión del subespacio fijo de la acción por doble permutación $S_n \curvearrowright \mathbb{C}^{n^2}$ dada por $\sigma \cdot (v_{i,j})_{i,j=1}^n := (v_{\sigma(i),\sigma(j)})_{i,j}$. $\square$

A. Comentarios adicionales breves

Parte del objetivo del primer ejercicio está en que tras calcular la tabla de caracteres de Q_8 el lector puede observar que coincide con la del grupo diedral D_8, de modo que dos grupos no isomorfos pueden tener la misma tabla de caracteres. Esto es interesante porque la tabla de caracteres determina completamente a un grupo abeliano finito, por ejemplo; esto es un buen ejercicio para el lector.

Así mismo, hay una serie de observaciones adicionales que el lector podría hacer tras calcular la tabla de un grupo. Por ejemplo, para Q_8 la representación simple de grado 2 es inducida del subgrupo normal $\langle i \rangle$; para A_4 todas las representaciones simples son restricciones, o bien de un cociente, o bien de S_4. Esto ejemplifica la utilidad de tener criterios sencillos para la irreducibilidad de caracteres inducidos, para lo cual recomendamos al lector leer sobre el criterio de Mackey en **[1]**, §7.4.

Referencias

1. Serre, J.-P. *Linear Representations of Finite Groups* (Springer-Verlag, 1977).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`
URL: `https://josecuevas.xyz/teach/2025-2-alg/`