Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: Ricardo Menares **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Teoría de Números **Sigla:** MAT2814
Fecha: 3 de octubre de 2025

Caracteres primitivos y la función Gamma

1. La función Gamma

1. *a*) Pruebe que el siguiente producto infinito

$$\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}$$

define una función entera (i.e., holomorfa en todo $\mathbb{C}$).

b) Defina la función de Weierstrass

$$\Delta_\xi(z) := ze^{\xi z}\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n},$$

donde $\xi\in\mathbb{C}$ es una constante a elección. Pruebe que $\Delta_\xi(z+1)=\frac{1}{z}\Delta_\xi(z)$ para exactamente un único número complejo ξ; tal valor es la *constante de Euler-Mascheroni*

$$\gamma = \lim_n\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}-\log n\right).$$

c) Pruebe que $\Gamma(z) := 1/\Delta_\gamma(z)$ es una función meromorfa que tiene polos exclusivamente en los enteros negativos

$$0,\qquad -1,\qquad -2,\qquad -3,\qquad \dots$$

y sus polos son simples.

Para el siguiente problema, será útil el siguiente criterio de unicidad:

Teorema 1.1 (Wielandt): Sea f una función holomorfa en el semiplano derecho $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ tal que $f(z+1)=zf(z)$, entonces admite extensión meromorfa a todo $\mathbb{C}$ con polos posiblemente en los enteros negativos $\mathbb{Z}_{\leq 0}$. Si además, f es acotada en la franja $\{z\in\mathbb{C} : 1\leq \operatorname{Re} z\leq 2\}$, entonces $f(z)=f(1)\Gamma(z)$.

2. **Fórmula de duplicación de Legendre:** Pruebe que la función Γ satisface

$$\Gamma(2z)\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\tfrac{1}{2}\right).$$

◉◉ 3. **Aproximación de Stirling:**

a) Pruebe que

$$\log(n!) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + 1 + \int_1^n \frac{P_1(t)}{t}\,\mathrm{d}t,$$

donde $P_1(t) := t-\lfloor t\rfloor + 1/2$ es la «función serrucho». Esta función es 1-periódica y toma valores en $[-1/2, 1/2)$.

b) Pruebe que

$$\int_1^n \frac{P_1(t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_1^n \frac{P_1(t)^2}{t(\lfloor t\rfloor + 1/2)}\,\mathrm{d}t.$$

c) Concluya que

$$n! \sim \sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}.$$

Pista: Defina
$$C_n := \frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}$$
y pruebe que $C_\infty := \lim_n C_n$ existe y es un real estrictamente positivo. Luego considere el límite de $C_n^4/(C_{2n}C_{2n+1})$. $\square$

2. Caracteres

4. Sea $\chi\colon (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ un caracter. Pruebe que existe un mínimo entero $f \geq 0$ tal que $f \mid m$ y existe un caracter $\bar{\chi}$ de modo que el siguiente diagrama conmuta
$$\begin{tikzcd} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \arrow[rr, "\chi"] \arrow[dr, two heads] & & \mathbb{C}^\times \\ & (\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times \arrow[ur, "\bar{\chi}"'] & \end{tikzcd}$$
Dicho f se conoce como el ***conductor*** de χ. Se dice que χ es ***primitivo*** si $f = m$.
5. Pruebe que si $\chi\colon (\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ es primitivo y $f \mid m$, entonces el caracter $\chi^* := \rho \circ \chi\colon (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ satisface
$$L(\chi^*, s) = L(\chi, s)\prod_{p \mid m}(1 - p^{-s}).$$

A. Comentarios adicionales

La función Γ tiene una larga y fascinante historia, sus propiedades fueron estudiados por varios de los matemáticos más importantes incluyendo (pero no limitado) a L. Euler, C.F. Gauss, K. Weierstrass y A.-M. Legendre.

Hay varios resultados que apuntan a la naturalidad y/o unicidad de la función Γ, incluyendo:

Teorema A.1 (Bohr-Mollerup): Si $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ es una función continua tal que:
(a) $f(z+1) = zf(z)$.
(b) Es log-convexa, es decir,
$$\forall x, y \in (0,\infty),\ t \in [0,1], \qquad f(tx + (1-t)y) \leq f(x)^t \cdot f(y)^{1-t}.$$
Entonces $f(z) = f(1)\Gamma(z)$.

Teorema A.2: Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$, que manda $(0,\infty) \to (0,\infty)$ y tal que
$$f(z+1) = zf(z), \qquad \sqrt{\pi} f(2z) = 2^{2z-1} f(z) f\left(z + \tfrac{1}{2}\right).$$
Entonces $f(z) = \Gamma(z)$.

Puede leer pruebas de estos datos en **[3],** §2.2.

El tratamiento de la función Γ es sumamente clásico. Puede leer al respecto en **[4], [2]** y en el conciso libro de Artin **[1].**

Los caracteres no primitivos (y sus funciones L) tienen usos en la teoría de números. Debido a que el factor de corrección es sumamente sencillo, podemos calcular residuos y otros invariantes en caracteres no primitivos. Vea Washington **[5].**

Referencias y lecturas adicionales

1. Artin, E. *The Gamma function* (Holt, Rinehart y Winston, 1964).
2. Lang, S. *Complex Analysis* (Springer-Verlag, 1999).
3. Remmert, R. *Classical topics in complex function theory* (Springer-Verlag, New York, 1998).
4. Simon, B. *Basic Complex Analysis* (American Mathematical Society, 2015).
5. Washington, L. C. *Introduction to Cyclotomic Fields Graduate Texts in Mathematics* **83** (Springer-Verlag New York, 1982).

Correo electrónico: josecuevasbtos@uc.cl
URL: https://josecuevas.xyz/teach/2025-2-num/