Pontificia Universidad Católica de Chile y Universidad de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: José Samper — **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra II — **Sigla:** MPG3201
Fecha: 24 de septiembre de 2025

Representaciones

1. Ejercicios

A lo largo de esta sección, G denotará un grupo finito posiblemente no conmutativo y K denotará un cuerpo (puede suponer $K = \mathbb{C}$ si prefiere). Al hablar de anillos en esta ayudantía, los asumiremos *unitarios* (con neutro multiplicativo), *asociativos* y posiblemente *no conmutativos*.

1. (Representaciones como módulos) Denotaremos por $K[G]$ al grupo abeliano de sumas formales $\sum_{g\in G} a_g g$, donde cada $a_g \in K$. Entonces $K[G]$ es un anillo con el producto
$$\left(\sum_{h\in G} a_h h\right)\left(\sum_{j\in G} b_j j\right) = \sum_{g\in G}\left(\sum_{hj=g} a_h b_j\right) g.$$
   a) Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_K(V)$ una representación, es decir, un homomorfismo de grupos, donde V es un K-espacio vectorial; denotaremos $\rho_g := \rho(g) \in \mathrm{Aut}(V)$ para un $g \in G$. Pruebe que V es naturalmente un $K[G]$-módulo (izquierdo) con la operación escalar sobre $\boldsymbol{v} \in V$ dada por
$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\cdot \boldsymbol{v} := \sum_{g\in G} a_g \rho_g(\boldsymbol{v}).$$
   Recíprocamente, pruebe que todo $K[G]$-módulo M da lugar a una única representación $G \to \mathrm{GL}_K(M)$. Más aún, una subrepresentación corresponde a un submódulo mediante esta construcción.
   En lenguaje sofisticado, diríamos que la categoría de representaciones y la de $K[G]$-módulos son equivalentes.
   b) Describa qué representación corresponde al $K[G]$-módulo libre $K[G]$. A ésta le llamaremos la ***representación regular*** de G.
2. Sea $\varphi\colon H \to G$ un homomorfismo de grupos.
   a) Pruebe que induce un homomorfismo de K-álgebras $K[H] \to K[G]$. Mediante este, toda representación de G se restringe a una representación de H.
   b) ¿Bajo qué hipótesis $K[G]$ es un $K[H]$-módulo libre (es decir, cuando su representación es suma directa de las regulares)? En cuyo caso, ¿qué rango tiene?
   c) También mediante $K[H] \to K[G]$ note que toda representación de H induce una representación de G dada por asociarle al $K[H]$-módulo izquierdo V el tensor $K[G] \otimes_{K[H]} M$. A esta le llamamos la ***representación inducida***.
   Describa la restricción en H de la inducida cuando $H \lhd G$ es un subgrupo normal y existe $L < G$ tales que $G = N \rtimes L$.
3. **Representaciones del grupo diedral:** Sea
$$D_{2n} = \langle r, s : r^n = s^2 = 1,\ srs = r^{-1}\rangle$$
   el grupo diedral de cardinalidad $2n$.
   a) Pruebe que las únicas representaciones lineales se factorizan por $\chi\colon D_{2n} \to \{\pm 1\} \le \mathbb{C}^\times$. Acto seguido, calcule cuáles hay.
   b) Mediante la inclusión $C_n \cong \langle r\rangle \le D_{2n}$, describa las representaciones inducidas en D_{2n}. ¿Cuáles de ellas son irreducibles? ¿Cuántas de ellas hay salvo isomorfismo?
   c) Concluya cuáles son todas las representaciones irreducibles de D_{2n} cuando n es par.

4. Sea G un grupo finito. En clases vio que toda representación compleja de G se descompone como suma de subrepresentaciones irreducibles; el lector atento podrá leer la demostración y verificar que de hecho esto también es cierto si trabajamos con representaciones sobre $\mathbb{Q}$ o incluso sobre cuerpos K de $\operatorname{car} K \nmid |G|$.

   Pruebe, sin embargo, que si $p \mid G$ y K tiene $\operatorname{car} K = p$, entonces existe una representación de G en K que no admite dicha descomposición.
5. Considere el grupo simétrico S_3. Se vio en clases que hay tres representaciones simples salvo isomorfismo: la trivial $\mathbb{C}_0$, el signo $\mathbb{C}_{\text{sign}}$ y la representación estándar V_{st}.
   a) Pruebe que, dada una representación lineal $\mathbb{C}_\chi$ y una representación simple W de un grupo finito arbitrario G, el tensor $\mathbb{C}_\chi \otimes W$ es también simple.
   b) Pruebe que
   $$V_{\text{st}} \otimes V_{\text{st}} \cong \mathbb{C}_0 \oplus \mathbb{C}_{\text{sign}} \oplus V_{\text{st}}.$$
   c) Calcule las potencias tensoriales $V_{\text{st}}^{\otimes n}$.
   d) Sea $R \cong \mathbb{C}_0 \otimes V_{\text{st}}$ la representación de permutación. Con lo anterior, pruebe que $\operatorname{Sym}^{n+6}(V_{\text{st}}) \cong \operatorname{Sym}^n(V) \oplus R$.

A. Comentarios adicionales

El lector notará que exigirle al grupo que sea *finito* es, en cierto modo, una condición de pequeñez y una de sus ventajas es que equivale a que el anillo sea noetheriano. Así, uno está tentado a preguntarse si podemos admitir una teoría de representaciones –bajo hipótesis adicionales– en grupos de otra índole (ejemplos de interés podrían ser subgrupos y/o cocientes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, y grupos de Galois infinitos). En muchos casos sí, pero para ello debemos dotar al cuerpo y al grupo de estructura adicional (tradicionalmente, una topología como mínimo) y restringirnos a trabajar con representaciones compatibles (en nuestro ejemplo, continuas); suele ser el caso que los grupos *compactos* jueguen el rol ahora de los grupos finitos.

Referencias

1. Serre, J.-P. *Linear Representations of Finite Groups* (Springer-Verlag, 1977).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`
URL: `https://josecuevas.xyz/teach/2025-2-alg/`