Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: Héctor Pastén Vásquez **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra abstracta II **Sigla:** MAT2244
Fecha: 19 de junio de 2025

Representaciones, álgebras y módulos

1. Reinterpretación como anillos

A lo largo de esta sección, G denotará un grupo finito posiblemente no conmutativo y K denotará un cuerpo (puede suponer $K = \mathbb{C}$ si prefiere). Al hablar de anillos en esta ayudantía, los asumiremos *unitarios* (con neutro multiplicativo), *asociativos* y posiblemente *no conmutativos*.

1. (Representaciones como módulos)
   a) Denotaremos por $K[G]$ al grupo abeliano de sumas formales $\sum_{g\in G} a_g g$, donde cada $a_g \in K$. Pruebe que $K[G]$ es un anillo con el producto
   $$\left(\sum_{h\in G} a_h h\right)\left(\sum_{j\in G} b_j j\right) = \sum_{g\in G}\left(\sum_{hj=g} a_h b_j\right) g.$$
   b) Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_K(V)$ una representación, es decir, un homomorfismo de grupos, donde V es un K-espacio vectorial; denotaremos $\rho_g := \rho(g) \in \mathrm{Aut}(V)$ para un $g \in G$. Pruebe que V es naturalmente un $K[G]$-módulo con la operación escalar sobre $\boldsymbol{v} \in V$ dada por
   $$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\cdot \boldsymbol{v} := \sum_{g\in G} a_g \rho_g(\boldsymbol{v}).$$
   Recíprocamente, pruebe que todo $K[G]$-módulo M da lugar a una única representación $G \to \mathrm{GL}_K(M)$.
   En lenguaje sofisticado, diríamos que la categoría de representaciones y la de $K[G]$-módulos son equivalentes.

   Problema: Convénzase de que la noción de subrepresentación corresponde, mediante esta equivalencia, a la noción de $K[G]$-submódulo.

   c) Describa qué representación corresponde al $K[G]$-módulo libre $K[G]$. A ésta le llamaremos la ***representación regular*** de G.
2. Sea Λ un anillo.
   a) Pruebe que hay una biyección entre Λ-módulos izquierdos M ***simples*** (i.e., que no poseen submódulos distintos del 0 y M) e ideales maximales izquierdos $\mathfrak{m} \lhd \Lambda$ dada por $\mathfrak{m} \mapsto \Lambda/\mathfrak{m}$.
   b) Un Λ-módulo izquierdo se dice ***semisimple*** si es suma directa de simples. Pruebe que si Λ es semisimple (como módulo izquierdo), entonces todo módulo (izquierdo) también lo es.
   Pista: Recuerde que todo módulo es cociente de uno libre. □
   c) Pruebe que $K[G]$ satisface la condición de las cadenas *descendentes* y que, si $\operatorname{car} K = 0$, entonces semisimple izquierdo, mediante la siguiente forma del teorema de Maschke:

   Teorema 1.1 (Maschke): Toda representación *irreducible* (i.e., que no es suma directa de subrepresentaciones) es simple.

   d) Concluya que toda representación de G se escribe, de manera única, como suma directa de las subrepresentaciones irreducibles de la representación regular.

3. Sea $\varphi\colon G \to H$ un homomorfismo de grupos.
   a) Pruebe que induce un homomorfismo de K-álgebras $K[G] \to K[H]$. Mediante este, toda representación de H se restringe a una representación de G.
   b) También mediante $K[G] \to K[H]$ note que toda representación de G induce una representación de H dada por asociarle al $K[G]$-módulo izquierdo M el tensor $K[H] \otimes_{K[G]} M$.
   c) ¿Qué condición debe satisfacer φ para que $K[H]$ sea un $K[G]$-módulo libre?
4. En este ejercicio calcularemos todas las representaciones irreducibles de un grupo abeliano finito.
   a) Pruebe que $K[G \times H] \cong K[G] \times K[H]$, y describa una asociación entre $K[G \times H]$-módulos (izquierdos) y pares de $K[G]$ y $K[H]$-módulos.
   b) Pruebe que $\mathrm{Hom}(C_n, \mathbb{C}^\times) \cong C_n$ (el isomorfismo *no* es canónico, aunque pueda aparentarlo).
   c) Concluya que toda representación irreducible de un grupo abeliano finito tiene dimensión 1 y clasifique de qué tipo es.

A. Ejercicios propuestos

1. Coja el apunte de clases –o su libro favorito de representaciones–, vea la prueba de Maschke para $K = \mathbb{C}$ y argumente por qué sigue siendo válido cuando $\operatorname{car} K \nmid |G|$.
2. Pruebe que si $\operatorname{car} K$ divide al orden de G, entonces el resultado anterior es falso.

   Pista: Sea $p := \operatorname{car} K$. Por Cauchy, G contiene un elemento de orden p, de modo que $K[C_p]$ es un subanillo de $K[G]$. Luego estudie el ideal de $K[C_p]$ generado por el elemento $\sum_{g \in C_p} g$. □

B. Comentarios adicionales

En general, el mundo de los anillos no conmutativos puede ser bastante salvaje. Un ejemplo de los desastres que pueden ocurrir es que dos módulos libres de rangos distintos sean isomorfos (!). Así, en definitiva, la «clasificación» de anillos conmutativos no suele tener buenos análogos no conmutativos, pero las técnicas en la teoría de módulos sí, y esa es la razón del enfoque detrás de esta ayudantía.

El libro [**1**] trata con cuidado a los anillos no conmutativos. Una larga y exhaustiva referencia es [**2**].

Referencias

1. Jacobson, N. *Basic Algebra* 2 vols. (Freeman y Company, 1910).
2. Rowen, L. H. *Graduate Algebra. Noncommutative View* (American Mathematical Society, 2008).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`
URL: `https://josecuevas.xyz/teach/2025-1-ayud/`