



## Dimensión y polinomios de Hilbert

### 1. EJERCICIOS

1. Calcule el polinomio de Hilbert afín de los siguientes ideales:

- a)  $(x^3 - y^2) \triangleleft k[x, y]$ .
- b)  $(x^3y^2 + 3x^2y^2 + y^3 + 1) \triangleleft k[x, y]$ .
- c)  $(x^3yz^5, xy^3z^2) \triangleleft k[x, y, z]$ .
- d)  $(x^3 - yz^2, y^4 - x^2yz) \triangleleft k[x, y, z]$ .

2. Decimos que un polinomio  $f(t) \in \mathbb{Q}[t]$  es *numérico* si para todo entero  $n \in \mathbb{Z}$ , su evaluación  $f(n) \in \mathbb{Z}$  es también entera. Pruebe que todo polinomio numérico es de la forma

$$f(t) = \sum_{j=0}^d a_j \binom{t}{j}, \quad a_j \in \mathbb{Z}$$

donde  $\binom{t}{j} = \frac{t(t-1)\cdots(t-j+1)}{j!}$ .

- 3. a) Dado un polinomio  $f(x, y)$  no constante pruebe que la dimensión de  $\mathbf{V}(f)$  es 1. (Eslógan: «las hipersuperficies en el plano son curvas (posiblemente reducibles).»)
- b) Más generalmente, pruebe que si  $f(\mathbf{x}) \in k[x_1, \dots, x_n]$  es no constante, entonces la dimensión de la hipersuperficie  $\mathbf{V}(f)$  es  $n - 1$ .
- 4. Pruebe que si  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \triangleleft k[\mathbf{x}]$  son ideales, entonces  $\dim \mathbf{V}(\mathfrak{a}) \geq \dim \mathbf{V}(\mathfrak{b})$ . Teniendo inclusión estricta  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$  muestre ejemplos donde las dimensiones coinciden o no.
- 5. Un polinomio  $f$  en  $R := k[\mathbf{x}]$  se dice *homogéneo* si todos sus monomios no nulos tienen el mismo grado (total). Un ideal  $\mathfrak{a}$  en  $k[\mathbf{x}]$  se dice *homogéneo* si está generado por polinomios homogéneos.

a) Defina la *función de Hilbert proyectiva* de un ideal homogéneo  $\mathfrak{a}$  como

$$\mathrm{HF}_{R/\mathfrak{a}}(s) := \dim_k R_s - \dim_k \mathfrak{a}_s,$$

donde el subíndice  $\mathfrak{b}_s$  denota el  $k$ -subespacio vectorial de los polinomios homogéneos en  $\mathfrak{b}$  de grado (total)  $s$ .

Pruebe que  $\mathrm{HF}_{R/\mathfrak{a}}(s) = \mathrm{HF}_{R/\mathfrak{a}}^{\mathrm{af}}(s) - \mathrm{HF}_{R/\mathfrak{a}}^{\mathrm{af}}(s-1)$ .

b) Sea  $f \in R$  un polinomio no necesariamente homogéneo. Definamos su «homogenización en la nueva indeterminada  $t$ » como

$$f^{\mathrm{hom}}(\mathbf{x}, t) := t^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{t}, \dots, \frac{x_n}{t}\right).$$

Pruebe que la función de Hilbert afín del ideal  $(f) \triangleleft R$  es igual a la función de Hilbert proyectiva del ideal  $(f^{\mathrm{hom}}) \triangleleft R[t] = k[\mathbf{x}, t]$ .

### 2. COMENTARIOS ADICIONALES

El ejercicio **3b** es un caso particular del «teorema de ideales principales de Krull» (vea EISENBUD [2]) o también conocido por su nombre en alemán, *Hauptidealsatz*.

## REFERENCIAS

1. COX, D. A., LITTLE, J. y O'SHEA, D. *Ideals, Varieties, and Algorithms. An introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra* 5.<sup>a</sup> ed. (Springer-Verlag, 2020).
2. EISENBUD, D. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry* (Springer Science+Business Media, 1994).

Correo electrónico: [josecuevasbtos@uc.cl](mailto:josecuevasbtos@uc.cl)

URL: <https://josecuevas.xyz/teach/2025-2-alg/>