Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: Héctor Pastén **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Teoría de Números **Sigla:** MAT2225
Fecha: 1 de septiembre de 2023

Aproximaciones diofantinas

Números irracionales y la abundancia de números de Liouville

1. Aproximación y el teorema de Dirichlet

El típico argumento de las cajitas se generaliza a lo siguiente:

1. **Aproximación multidimensional de Dirichlet:** Sean $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{m,r}$ números reales donde $m, r > 0$ son enteros fijos, y sean $M > 0$ otro entero. Demuestre que existen m enteros $u_1, \dots, u_m$ y r enteros $v_1, \dots, v_r$ (no todos nulos) con cada $|v_j| < M^{m/r}$ tales que
$$\forall 1 \le j \le m \quad \left| \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk} v_k - u_j \right| < \frac{1}{M}.$$

La teoría de aproximación diofantina permite encontrar varios ejemplos directos de números irracionales:[1]

2. Demuestre que un número real α es irracional syss para todo $\epsilon > 0$ existen enteros u, v tales que $0 < |\alpha u - v| < \epsilon$.
3. Sea $2 \le g_1 \le g_2 \le g_3 \le \cdots$ una sucesión creciente de naturales tales que $\lim_n g_n = \infty$ y sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de 0s y 1s, donde $z_n = 1$ infinitas veces. Demuestre que el número real
$$\alpha := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g_1 g_2 \cdots g_n} = \frac{z_1}{g_1} + \frac{z_2}{g_1 g_2} + \cdots,$$
es irracional (¿por qué siempre está bien definido?).
Nótese que esto da una generalización del típico argumento de que e es irracional. También argumente porque las hipótesis ($2 \le g_1$; $g_n \to \infty$; $z_n \ne 0$ infinitas veces) son necesarias.
4. (Fermat) Sea $d > 0$ un natural libre de cuadrados. Demuestre que la ecuación de Pell $x^2 - dy^2 = 1$ posee al menos una solución $(x, y) \ne (\pm 1, 0)$ con coeficientes enteros.
Pista: Conviértalo en un problema de aproximar $\sqrt{d}$. □

2. El teorema de Liouville y sus consecuencias

Teorema 2.1 (Liouville): Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ un número algebraico de grado d.[2] Entonces existen finitas fracciones reducidas $u/v \in \mathbb{Q}$ tales que $|\alpha - u/v| < 1/v^d$.

Definición 2.2: Se dice que un número real α es ***de Liouville*** si para cada $k \ge 1$ entero existe una fracción reducida u/v tal que $|\alpha - u/v| < 1/v^k$. Se denota por $\mathcal{L}$ el conjunto de los números de Liouville.

5. Demuestre que los números de Liouville son trascendentes.
6. Demuestre que $\mathcal{L}$ es un conjunto denso y no numerable de $\mathbb{R}$.
7. Demuestre lo siguiente:
   a) $\mathbb{Q} + \mathcal{L} = \mathcal{L}$ (donde la suma de conjuntos significa el conjunto de elementos $\alpha + \beta$, con $\alpha \in \mathbb{Q}, \beta \in \mathcal{L}$).

[1] Sin recurrir, por supuesto, al típico argumento de que los irracionales existen por que $|\mathbb{R}| > |\mathbb{Q}|$.
[2] Vale decir, que existe un polinomio irreducible $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado d tal que $f(\alpha) = 0$.

b) $\mathbb{Q}^\times \cdot \mathcal{L} = \mathcal{L}$.

c) (Erdős [**2**]) $\mathcal{L} + \mathcal{L} = \mathbb{R}$.

Pista: Por los incisos anteriores redúzcase a probar que todo $\alpha \in (0,1)$ está en $\mathcal{L} + \mathcal{L}$. Este caso sale escribiendo α de manera conveniente y generalizando el ejemplo prototípico de un número de Liouville (vale decir, 0,110001000000000000000001...) □

3. Comentarios adicionales

- Con $m = r = 1$ en el ejercicio 1, uno obtiene que

$$\left|\alpha - \frac{u}{v}\right| = \frac{1}{Mv} < \frac{1}{v^2}.$$

Si exigimos que α sea irracional, entonces un teorema de Hurwitz demuestra que existen infinitas fracciones reducidas u/v tales que

$$\left|\alpha - \frac{u}{v}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}v^2},$$

y, además, está aproximación es aguda en el sentido de que cambiando $\sqrt{5}$ por un denominador más grande uno pierde la infinitud.

Éstas fracciones pueden obtenerse mediante convergentes de la expansión en fracción continua simple (cfr. [**4,** págs. 256-257]).

- El problema 7 demuestra que el conjunto $\mathcal{L}$ es bastante curioso. Uno puede demostrar que $\mathcal{L}$ tiene medida (de Lebesgue) 0, de modo que acrecenta el interés. Se dice que un subconjunto $W \subseteq \mathcal{L}$ es un ***conjunto de Erdős-Liouville*** si $W + W = \mathbb{R}$; el artículo reciente de Chalebgwa y Morris [**1**] prueba que hay $2^{\mathfrak{c}}$ conjuntos de Erdős-Liouville, en otras palabras, que hay tantos subconjuntos de $\mathbb{R}$ como conjuntos de Erdős-Liouville.

Referencias y lecturas adicionales

1. Chalebgwa, T. P. y Morris, S. A. Erdős-Liouville sets. *Bull. Aust. Math. Soc.* **107,** 284-289. doi:`10.1017/S0004972722001009` (2023).
2. Erdős, P. Representations of real numbers as sums and products of Liouville numbers. *Michigan Math. J.* **9,** 59-60. `https://old.renyi.hu/~p_erdos/1962-18.pdf` (1962).
3. Hlawka, E., Schoissengeier, J. y Taschner, R. *Geometric and Analytic Number Theory* (Springer-Verlag, 1991).
4. Hua, L. K. *Introduction to Number Theory* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1982).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`