Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Profesor: Héctor Pastén Vásquez **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra abstracta II **Sigla:** MAT2244
Fecha: 24 de abril de 2025

Anillos e ideales

En esta ayudantía, entendemos que todo *anillo* es conmutativo y unitario (i.e., con $1 \in A$). El anillo nulo $A = 0$ sí se considera un anillo, aunque no es un cuerpo.

1. (Examen de lucidez) Sea A un anillo y considere el conjunto $R := \mathrm{Func}(\mathbb{N}_{>0}, A)$ de funciones con la suma dada coordenada por coordenada y el producto por *convolución*:

$$(f+g)(n) := f(n) + g(n), \qquad (f * g)(n) = \sum_{ab=n} f(a)g(b).$$

   a) Pruebe que $(R, +, *)$ es un anillo cuya unidad es la función dada por $\varepsilon(1) = 1$ y $\varepsilon(n) = 0$ para $n > 1$.
   b) Una función f se dice ***multiplicativa*** si $f(ab) = f(a)f(b)$ cuando a, b son coprimos. Pruebe que si f, g son multiplicativas, entonces $f * g$ también lo es.

Problema (fórmula de inversión de Möbius): Defina la función de Möbius μ como $\mu(n) = (-1)^m$ cuando $n = p_1 \cdots p_m$ es el producto de primos distintos y $\mu(n) = 0$ cuando $p^2 \mid n$ para algún primo p. Sea «1» la función constante $1(n) = 1$. Pruebe que $\mu * 1 = \varepsilon$.

2. Sea A un anillo y sea $a \in A$ un elemento ***nilpotente*** (i.e., $a^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$). Pruebe que $1 + a$ es inversible.
3. Sea A un anillo en donde cada para cada $a \in A$, existe $n \geq 2$ tal que $x^n = x$. Pruebe que todo ideal primo es maximal.
4. Diremos que un anillo A es ***local***, si posee un único ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq A$. Pruebe que:
   a) Un anillo A es local syss el conjunto $\mathfrak{m} = A \setminus A^\times$ de elementos que no poseen inversa es un ideal; en cuyo caso, $\mathfrak{m}$ es el único ideal maximal.
   b) Pruebe que si $f \colon A \to B$ es un homomorfismo sobreyectivo (o *epimorfismo*) de anillos y A es local. Entonces B es o bien nulo o bien un anillo local.
5. El objetivo de este ejercicio es caracterizar al nilradical de un anillo.
   a) Sea $S \subseteq A$ un sistema multiplicativo tal que $0 \notin S$. Verifique que la familia de ideales

$$\mathcal{F} := \{\mathfrak{a} \trianglelefteq A : S \subseteq A \setminus \mathfrak{a}\}$$

   posee un elemento $\subseteq$-maximal.
   b) Pruebe que un elemento $\subseteq$-maximal de $\mathcal{F}$ es un ideal primo de A.
   c) Concluya que un elemento $a \in A$ es nilpotente syss pertenece a todos los ideales primos de A.

A. Ejercicios propuestos

1. Sea k un cuerpo finito con q elementos, y denotemos por $\psi(d)$ a la cantidad de polinomios irreducibles en $k[x]$ de grado d. Empleando la fórmula de inversión de Möbius, pruebe que

$$n\psi(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) q^{n/d}.$$

2. Sea A un anillo y sea $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{N}(A)$ un ideal de nilpotentes. Pruebe que si $a \in A$ se proyecta en una unidad $a \mod \mathfrak{a} \in (A/\mathfrak{a})^\times$, entonces a es una unidad en A.
3. Un anillo A se dice *booleano* (o *de Boole*) si $a^2 = a$ para todo $a \in A$. Pruebe lo siguiente:
   a) Para todo primo $\mathfrak{p} \lhd A$ se cumple que $A/\mathfrak{p} \cong \mathbb{F}_2$.

b) Todo ideal finitamente generado es principal.

B. Comentarios adicionales

El nombre «anillo local» se debe a que, asociado a ciertos objetos geométricos X (e.g., variedades diferenciales, analíticas o algebraicas), uno puede construir lo que se llaman «haces» que consisten de anillos naturales asociados a los abiertos de X. Por ejemplo, si X es una variedad diferencial (piense en un abierto de $\mathbb{R}^n$), al abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ podemos asociarle el anillo de funciones diferenciables $U \to \mathbb{R}$; un «germen» es una clase de equivalencia de dichas funciones en vecindades de un punto $x \in U$ fijado. El anillo de «gérmenes en x» será un anillo local.

Por lo demás, la teoría de álgebra conmutativa (vid. [**1**]) justifica que los anillos locales son capaces de captar harta información algebraica (por ejemplo, un módulo será nulo si sus localizaciones lo son en analogía a como una función es nula si sus evaluaciones lo son).

El nombre «anillo booleano» se debe a que corresponden, de manera elemental, a las llamadas álgebras booleanas. Una álgebra booleana está dotada de un 0, un 1, una inversa $\neg$ y operadores binarios $\vee$ y $\wedge$ que satisfacen la típica álgebra de proposiciones lógicas. Por un teorema de M. H. Stone,[1] un álgebra booleana corresponde a un subconjunto del conjunto potencia $\mathcal{P}S$ de un conjunto S, que contiene a $\varnothing$ y A, y es cerrado bajo complementos, uniones e intersecciones finitas. Estos objetos tienen su utilidad e interés en la lógica, pero también tienen interacciones con la topología:

Teorema B.1 (dualidad de Stone): Hay una anti-equivalencia («las flechas se dan vuelta») entre la categoría de anillos booleanos y la categoría de espacios topológicos de Hausdorff, compactos y totalmente disconexos.[2]

Para más detalles lea [**2**], en §II.4 aparece el teorema aquí citado.

Referencias

1. Atiyah, M. F. y MacDonald, I. G. *Introduction to Commutative Algebra* (Addison-Wesley, 1969).
2. Johnstone, P. T. *Stone spaces* (Cambridge University Press, 1982).
3. Lang, S. *Algebra* (Springer-Verlag New York, 2002).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`
URL: `https://josecuevas.xyz/teach/2025-1-ayud/`

[1] El mismo del «teorema de Stone-Weierstrass» y de las «compactificaciones de Stone-Čech».

[2] Es decir, espacios en donde todo subconjunto con al menos dos puntos es disconexo. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es totalmente disconexo (pero no es compacto).