

**Profesor:** Héctor Pastén Vásquez**Ayudante:** José Cuevas Barrientos**Curso:** Álgebra abstracta II**Sigla:** MAT2244**Fecha:** 3 de abril de 2025

Extensiones resolubles

- Una extensión L/k se dice **abeliana** (resp. **cíclico**) si existe una extensión A/k de Galois con $\text{Gal}(A/k)$ abeliano (resp. cíclico), tal que $k \subseteq L \subseteq A$.
 - Pruebe que si L/k es abeliano (resp. cíclico), entonces L/k es de Galois y $\text{Gal}(L/k)$ es abeliano (resp. cíclico).
 - En la extensión $F/L/k$, pruebe que si F/k es abeliano (resp. cíclico), entonces F/L y L/k son abelianos (resp. cíclicos).

●● **Problema:** Si en la extensión $F/L/k$, se cumple que F/L y L/k son abelianos (resp. cíclicos), entonces ¿ F/k es siempre abeliano (resp. cíclico)?

- Pruebe que si $L_1, \dots, L_n/k$ son extensiones abelianas contenidas en otra extensión Ω/k , entonces el composito $L_1 \cdots L_n$ es abeliano.
- Pruebe, sin usar las fórmulas cuadrática y de Cardano, que todo polinomio (separable) de grado ≤ 3 es resoluble por radicales.
- Sea K/k una extensión finita. Dado $\alpha \in K$, denotemos por $m_\alpha(x) := \alpha \cdot x$ el cual determina un k -endomorfismo $m_\alpha: K \rightarrow K$. Defina la **norma** y **traza** de α como

$$\text{Nm}_{K/k}(\alpha) := \det m_\alpha, \quad \text{Tr}_{K/k}(\alpha) := \text{tr } m_\alpha.$$

(Recuerde, de su curso de álgebra lineal, que el determinante y la traza de un endomorfismo no dependen de la elección de base.)

- Pruebe que, para $\alpha, \beta \in K$ se cumple que

$$\text{Tr}_{K/k}(\alpha + \beta) = \text{Tr}_{K/k}(\alpha) + \text{Tr}_{K/k}(\beta), \quad \text{Nm}_{K/k}(\alpha \cdot \beta) = \text{Nm}_{K/k}(\alpha) \cdot \text{Nm}_{K/k}(\beta).$$

- Sea L/K una extensión finita y sea $\gamma \in L$, pruebe que

$$\text{Tr}_{L/k} = \text{Tr}_{K/k} \circ \text{Tr}_{L/K}, \quad \text{Nm}_{L/k} = \text{Nm}_{K/k} \circ \text{Nm}_{L/K}.$$

- Sea $G = \{\sigma: K \rightarrow k^{\text{alg}}\}$ el conjunto de los homomorfismos de K -álgebras. Pruebe que

$$\text{Tr}_{K/k}(\alpha) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(\alpha), \quad \text{Nm}_{K/k}(\alpha) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(\alpha).$$

- Empleando lo anterior vamos a probar que $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{a}) \neq \mathbb{Q}(\sqrt[n]{b})$ con $a \neq b$ enteros libres de potencias n -ésimas para $n > 1$ entero.

PISTA: Use la traza con $K := \mathbb{Q}(\sqrt[n]{a})$. Pruebe que $\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt[n]{a}) = 0$ y $\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt[n]{a^j b}) = 0$ para $0 \leq j < n$, para llegar a una contradicción. \square

A. EJERCICIOS PROPUESTOS

- Pruebe, sin usar la fórmula de Ferrari, que todo polinomio de grado ≤ 4 es resoluble por radicales.
- Pruebe que si $L_1, \dots, L_n/k$ son extensiones resolubles contenidas en otra extensión Ω/k , entonces el composito $L_1 \cdots L_n$ es resoluble.
- Construya $f \in \mathbb{C}(t)$ no constante de modo que la extensión $\mathbb{C}(t)/\mathbb{C}(f)$ sea de Galois y

$$\text{Gal}(\mathbb{C}(t)/\mathbb{C}(f)) \cong D_6.$$

(Para mí, D_6 es el diedral con 6 elementos.)

PISTA: Primero, construya un subgrupo $G \leq \text{Gal}(\mathbb{C}(t)/\mathbb{C})$ tal que $G \cong D_6$. Para lograrlo, encuentre un elemento σ en G de orden 2 (como $\sigma(t) = 1/t$) y otro τ de orden 3 tales que $\sigma\tau\sigma = \tau^{-1}$. Finalmente, explícite el cuerpo fijo $\mathbb{C}(t)^G$. \square

B. COMENTARIOS ADICIONALES

El ejercicio 3 es generalizable para ver que para todo $n > 1$ existe f tal que $\text{Gal}(\mathbb{C}(t)/\mathbb{C}(f)) \cong D_{2n}$.

REFERENCIAS

1. LANG, S. *Algebra* (Springer-Verlag New York, 2002).
2. NAGATA, M. *Theory of Commutative Fields Translations in Mathematical Monographies* **125** (American Mathematical Society, 1967).

Correo electrónico: josecuevasbtos@uc.cl

URL: <https://josecuevas.xyz/teach/2025-1-ayud/>