Pontificia Universidad Católica de Chile y Universidad de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: José Samper **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra II **Sigla:** MPG3201
Fecha: 8 de octubre de 2025

Más acerca de caracteres

1. Ejercicios

A lo largo de esta ayudantía, siempre G denotará un grupo finito y $\mathbb{C}$ será el cuerpo de coeficientes para sus representaciones.

1. Pruebe que la multiplicidad de una representación simple en la representación regular es su grado (i.e., la dimensión del espacio vectorial donde actúa).
2. Sean V, W, V', W' un conjunto de representaciones. Recuerde que $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ tiene una representación natural definida por $g \odot \varphi(v) := g\varphi(g^{-1}v)$.
   a) Pruebe que $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \otimes_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V', W') \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V \otimes V', W \otimes W')$.
   b) Denotemos por $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, W)$ al módulo de homomorfismos *de representaciones.* Pruebe que
   $$\dim \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, W) = \langle \chi_V, \chi_W \rangle.$$
   c) Concluya el «lema de Yoneda» para representaciones: Si V, V' son tales que $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, W) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V', W)$, entonces $V \cong V'$.
3. **Reciprocidad de Frobenius:** Sea $\varphi\colon H \to G$ un homomorfismo de grupos finitos.
   a) Pruebe que dado un caracter χ de H y ψ de G, se cumple que
   $$\langle \chi, \operatorname{Res}_H^G(\psi) \rangle_H = \langle \operatorname{Ind}_H^G(\chi), \psi \rangle_G.$$
   b) Pruebe que, dadas representaciones V sobre G y W sobre H, se cumple que
   $$V \otimes_{\mathbb{C}} \operatorname{Ind}_H^G(W) \cong \operatorname{Ind}_H^G(\operatorname{Res}_H^G(V) \otimes_{\mathbb{C}} W).$$
4. Sea $H \le G$ un subgrupo de un grupo finito y sea χ el caracter de una representación $\rho\colon H \curvearrowright V$. Recuerde de la ayudantía anterior (ej. 2c) que asociado a V^ρ tenemos la representación inducida $\operatorname{Ind}_H^G(\rho)$ cuyo caracter denotaremos $\operatorname{Ind}_H^G(\chi)$. Pruebe que tenemos la siguiente fórmula para todo $g \in G$:
   $$\operatorname{Ind}_H^G(\chi)(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{t \in G \\ tgt^{-1} \in H}} \chi(t^{-1}gt).$$
5. Calcule la tabla de caracteres para el grupo de Heisenberg
   $$H(\mathbb{F}_3) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{F}_3 \right\} \le \operatorname{SL}_2(\mathbb{F}_3).$$

A. Ejercicios propuestos

1. Sea $G \curvearrowright V$ una representación compleja simple. Se dice que V es
   De tipo complejo: Si $V \not\cong V^*$.
   De tipo real: Si posee una forma simétrica no degenerada $\langle -, - \rangle$ que es invariante por G (i.e., $\langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle$ para todo $v, w \in V$).
   De tipo cuaterniónico: Si posee una forma hermitiana (i.e., tal que
   $$\forall v, w \in V,\ \lambda \in \mathbb{C}, \qquad \langle \lambda v, w \rangle = \langle v, \overline{\lambda} w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$$
   y que es no degenerada) que es invariante por G.

Pruebe que el anillo de endomorfismos $\mathrm{End}_{\mathbb{R}[G]}(V)$ es $\mathbb{C}$ (resp. $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{H}$) si V es de tipo complejo (resp. de tipo real, de tipo cuaterniónico).

2. Defina el índice de Frobenius-Schur como
$$\mathrm{FS}(V) = \begin{cases} 0, & V \text{ es de tipo complejo,} \\ 1, & V \text{ es de tipo real,} \\ -1, & V \text{ es de tipo cuaterniónico.} \end{cases}$$
   a) Pruebe que $\mathrm{FS}(V) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Sym}^2 V)^G - \dim_{\mathbb{C}}(\bigwedge^2 V)^G$.
   Pista: Para esto, emplee la descomposición de representaciones $V \otimes V = \mathrm{Sym}^2 V \oplus \bigwedge^2 V$ y argumente por qué el subespacio G-invariante de $V^{\otimes 2}$ tiene dimensión 1. $\square$
   b) **Teorema de Frobenius-Schur:** Pruebe que la cantidad de elementos de orden 2 en G es $\sum_V \dim(V)\mathrm{FS}(V)$, donde la sumatoria recorre las representaciones complejas simples de G.

Referencias

1. Serre, J.-P. *Linear Representations of Finite Groups* (Springer-Verlag, 1977).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`
URL: `https://josecuevas.xyz/teach/2025-2-alg/`