Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: Ricardo Menares | **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Teoría de Números | **Sigla:** MAT2814
Fecha: 24 de octubre de 2025

Teorema de números primos

1. La función dseta

1. Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}_{\neq 0}$, se cumple que $\zeta(-2n) = 0$. Más aún, pruebe que si $\operatorname{Re} s \notin (0,1)$ y $\zeta(s) = 0$, entonces $s = -2n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

   Pista: Podría necesitar la fórmula que expresa el valor de $\zeta(1-s)$ dada en la ayudantía pasada. □

2. Pruebe que si $s \in \mathbb{C}$ es tal que $\zeta(s) = 0$, entonces $\zeta(\overline{s}) = 0$.

2. Aplicaciones del teorema de los números primos

3. Sea p_n la sucesión de los números primos en orden creciente. Demuestre que $p_n \sim n \log n$.
4. *a*) Para todo $\epsilon > 0$ existe $x_0 > 0$ tal que para todo $x \geq x_0$ siempre existe un primo p tal que $x < p \leq (1+\epsilon)x$.
   b) Deduzca que los puntos límite de $\{p/q : p, q \text{ primos}\}$ es todo el intervalo $[0, \infty)$.
5. Para cada natural N existe un primo tal que (en base decimal) sus primeras cifras coinciden con (todas) las de N.
6. ◉◉ Definamos

$$a(n) := \begin{cases} 0, & n \text{ no es potencia de un primo}, \\ 1/k, & n = p^k. \end{cases}$$

   Pruebe que $\sum_{n \leq x} a(n) = \pi(x) + O(\sqrt{x} \log\log x)$.

   Pista: Expanda

$$\sum_{n \leq x} a(n) = \sum_{p \leq x} \sum_{k=1}^{\log x/\log p} \frac{1}{k},$$

   y trate de desarrollar la sumatoria con $\pi(x)$. □

Referencias

1. Granville, A. *Number Theory Revealed. A Masterclass* (American Mathematical Society, 2020).
2. Hlawka, E., Schoissengeier, J. y Taschner, R. *Geometric and Analytic Number Theory* (Springer-Verlag, 1991).

Correo electrónico: josecuevasbtos@uc.cl