



**Profesor:** José Samper

**Ayudante:** José Cuevas Barrientos

**Curso:** Álgebra II

**Sigla:** MPG3201

**Fecha:** 20 de agosto de 2025

## Teoría de Galois

### 1. GRUPOS DE GALOIS

1. Pruebe que para todo grupo *abeliano* finito  $G$  existe una extensión  $K/\mathbb{Q}$  de Galois tal que  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong G$ .

*PISTA:* Para la prueba puede ser útil emplear el **teorema de Dirichlet** que dice que dado  $n > 1$  entero y  $a$  coprimo con  $n$ , existen infinitos primos  $p$  tales que  $p \equiv a \pmod{n}$ .  $\square$

2. Sea  $L/k$  una extensión normal y definamos el subconjunto:

$$L_{\text{sep}} := \{\alpha \in L : \alpha \text{ es separable sobre } k\}.$$

- Pruebe que  $L_{\text{sep}}$  es un subcuerpo de  $L$ .
- Pruebe que la extensión  $L_{\text{sep}}/k$  es de Galois y  $L/L_{\text{sep}}$  es puramente inseparable.
- Pruebe que la siguiente aplicación

$$\rho: \text{Gal}(L/k) \longrightarrow \text{Gal}(L_{\text{sep}}/k), \quad \sigma \longmapsto \sigma|_{L_{\text{sep}}}$$

está bien definida y es un isomorfismo de grupos.

3. Sea  $K/k$  una extensión simple de cuerpos de grado  $n := [K : k] < \infty$ . Pruebe que  $K/k$  tiene a lo sumo  $2^n$  subextensiones (incluyendo a  $K$  y  $k$  mismos).

**Problema:** ¿Se puede alcanzar dicha cota? Dicho de otro modo, ¿cuán óptima es?

4. Considere la extensión  $\mathbb{Q}(\sqrt{(2 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{3})}) \supseteq \mathbb{Q}$  y determine:

- Si es de Galois.
- El grupo de Galois de su cuerpo de escisión.

### A. EJERCICIOS ADICIONALES:

#### LA CORRESPONDENCIA DE JACOBSON-BOURBAKI

En la siguiente serie de ejercicios, pretendemos probar un resultado un tanto técnico. En la sección,  $\text{Hom}_k$  denota homomorfismos de  $k$ -espacios vectoriales.

5. Sea  $k \subseteq K \subseteq L$  una torre de extensiones, posiblemente infinitas. Pruebe que  $K/k$  es una extensión finita si y sólo si  $\text{Hom}_k(K, L)$  es un  $L$ -espacio vectorial de dimensión finita (la suma y producto escalar son coordenada a coordenada) y, en cuyo caso, que

$$[K : k] = [\text{Hom}_k(K, L) : L].$$

6. Sea  $L$  un cuerpo. Note que el conjunto  $\text{End}_{\text{Ab}}(L)$  de endomorfismos de  $L$  como grupo abeliano es un anillo (no conmutativo) con la suma coordenada a coordenada, y la composición como producto; más aún, hay una inyección de anillos  $\mu: L \hookrightarrow \text{End}_{\text{Ab}}(L)$  que a un elemento  $\alpha \in L$  le asigna el endomorfismo  $\mu(\alpha)(x) := \alpha \cdot x$ . Sea  $A \subseteq \text{End}_{\text{Ab}}(L)$  una  $L$ -subálgebra (i.e., un subanillo que contiene a la imagen de  $L$  mediante  $\mu$ ) tal que  $n := \dim_L(A) < \infty$ .

- Pruebe que existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$  y  $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in A$  tales que  $\sigma_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$ , donde  $\delta$  es la delta de Kronecker.

*PISTA:* Hay un emparejamiento  $L$ - $\mathbb{Z}$ -bilineal  $A \times L \rightarrow L$  (donde  $A$  tiene estructura de módulo por la derecha como  $(\sigma \cdot x)(y) = \sigma(y) \cdot x$ ) dado por la evaluación mediante el cual usted querrá extraer un emparejamiento  $L$ -bilineal no degenerado.  $\square$

b) Pruebe que

$$k := \{\alpha \in L : \forall \sigma \in A \quad \alpha \cdot \sigma = \sigma \cdot \alpha\} \subseteq L$$

es un subcuerpo de  $L$  y que cada  $\sigma_j \in A$  manda  $\sigma_j: L \rightarrow k$ .

c) Pruebe que  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$  (dados por el primer inciso) forman una  $k$ -base.

d) **Correspondencia de Jacobson-Bourbaki** ([2], Th. I.2):

Concluya que  $[L : k] = n$  y que  $A = \text{End}_k(L)$ .

La razón de la inclusión de la *correspondencia de Jacobson-Bourbaki* está en que, en cierto modo, generaliza la correspondencia clásica de Galois: incluye tanto al caso finito, como ciertos casos de extensiones inseparables; vid. [2].

## B. TEORÍA DE GALOIS PROFINITA

●● Hay, asimismo, una generalización de la teoría de Galois al caso infinito, para la cual se requiere de la noción categorial de «límite inverso» (vid. [1, pág. 490]); daremos primero un contraejemplo ilustrativo y opcional:

A. Sea  $K/k$  una extensión algebraica de Galois posiblemente infinita. Vamos a considerar el *conjunto dirigido* (o «categoría de índices»)  $\mathcal{J}$  cuyos objetos son subextensiones  $k \subseteq F \subseteq K$  de Galois finitas, donde  $F \leq F'$  (o donde hay una única flecha  $F \rightarrow F'$ ) si y sólo si  $F \subseteq F'$ . Tenemos el sistema inverso (o «functor contravariante») donde  $\rho_F^{F'}: \text{Gal}(F'/k) \rightarrow \text{Gal}(F/k)$  es la restricción para  $F \leq F' \in \mathcal{J}$ . Pruebe que

$$\text{Gal}(K/k) = \varprojlim_{F \in \mathcal{J}} \text{Gal}(F/k),$$

B. Definamos  $\mathbb{Z}_\ell$ , el anillo de enteros  $\ell$ -ádicos, como el límite inverso del diagrama  $\rho_{n-1}^n: \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/\ell^{n-1}\mathbb{Z}$  (dado por  $n \bmod \ell^n \mapsto n \bmod \ell^{n-1}$ ) con el conjunto dirigido  $(\mathbb{N}, \leq)$ . Pruebe que

$$\text{Gal}(\mathbb{F}_p^{\text{alg}}/\mathbb{F}_p) \cong \prod_{\ell} \mathbb{Z}_\ell =: \hat{\mathbb{Z}},$$

donde  $\ell$  recorre todos los números primos.

C. Pruebe, mediante un simil del argumento diagonal de Cantor, que  $\mathbb{Z}_\ell$  es no numerable y, por tanto, concluya que existe  $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{F}_p^{\text{alg}}/\mathbb{F}_p)$  que no está en el grupo generado por el automorfismo de Frobenius  $\text{Frob}_p$ . No obstante, el cuerpo fijo por  $\langle \text{Frob}_p \rangle$  es  $\mathbb{F}_p$ , pese a que  $\langle \text{Frob}_p \rangle \neq \text{Gal}(\mathbb{F}_p^{\text{alg}}/\mathbb{F}_p)$ .

Esto prueba que la biyección entre subgrupos y subextensiones se rompe en el caso infinito. ¿Cómo se arregla? Mediante el ejercicio A, vemos que el grupo de Galois es el límite inverso de grupos finitos,<sup>1</sup> con lo que lo podemos dotar de la topología del límite inverso (a veces llamada *topología de Krull*). Ahora, habrá una biyección entre subextensiones y subgrupos *cerrados* del grupo de Galois. El ejercicio C muestra entonces que  $\langle \text{Frob}_p \rangle$  es denso en  $\text{Gal}(\mathbb{F}_p^{\text{alg}}/\mathbb{F}_p)$  con dicha topología. Una referencia del tema es NEUKIRCH [4], §§IV.1-3.

## REFERENCIAS

1. ALUFFI, P. *Algebra. Chapter 0* (American Mathematical Society, 1960).
2. JACOBSON, N. *Lectures in Abstract Algebra. 3: Theory of Fields and Galois Theory* (Van Nostrand, 1964).
3. LANG, S. *Algebra* (Springer-Verlag New York, 2002).
4. NEUKIRCH, J. *Algebraic Number Theory* trad. del alemán por SCHAPPACHER, N. (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999). Trad. de *Algebraische Zahlentheorie* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992).

Correo electrónico: josecuevasbtos@uc.cl

URL: <https://josecuevas.xyz/teach/2025-2-alg/>

<sup>1</sup>De ahí el nombre «profinito.»