



Pontificia Universidad Católica de Chile y Universidad de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: José Samper

Ayudante: José Cuevas Barrientos

Curso: Álgebra II

Sigla: MPG3201

Fecha: 12 de noviembre de 2025

Eliminación e ideales radicales

1. ORDENES MONOMIALES

1. Sea $\mathfrak{a} \triangleleft k[\mathbf{x}]$ el ideal generado por los polinomios simétricos elementales en n variables. Para un orden monomial \prec calcule $\text{in}_\prec(\mathfrak{a})$.
2. **Implicitación racional:** Sea K un cuerpo infinito y considere el morfismo racional $F: \mathbb{A}_K^m \setminus W \rightarrow \mathbb{A}_K^n$ dado por

$$x_1 = \frac{f_1(t_1, \dots, t_m)}{g_1(t_1, \dots, t_m)}, \\ \vdots \\ x_n = \frac{f_n(t_1, \dots, t_m)}{g_n(t_1, \dots, t_m)}.$$

Sea $\mathfrak{b} := (g_1x_1 - f_1, \dots, g_nx_n - f_n, 1 - gy) \trianglelefteq k[y, \mathbf{t}, \mathbf{x}]$, donde $g = g_1g_2 \cdots g_n$ y $W = \mathbf{V}(g)$. Entonces $\mathbf{V}(\mathfrak{b} \cap k[\mathbf{x}]) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ es la clausura de Zariski de $\text{Img } F$.

2. RADICALIDAD

Sea $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ un ideal en un anillo, se define su radical como

$$\text{Rad } \mathfrak{a} := \{\alpha \in A : \exists n \geq 1 \quad \alpha^n \in \mathfrak{a}\}.$$

Se dice que \mathfrak{a} es radical si $\text{Rad } \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

1. Sean $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ un par de ideales. Pruebe que se tienen las siguientes inclusiones

$$\text{Rad}(\mathfrak{a}) \text{Rad}(\mathfrak{b}) \subseteq \text{Rad}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}), \quad \text{in}_\prec(\text{Rad } \mathfrak{a}) \subseteq \text{Rad}(\text{in}_\prec \mathfrak{a}),$$

donde \prec es un orden monomial. Muestre ejemplos donde las inclusiones sean estrictas.

2. Pruebe que si \mathfrak{a} es tal que $\text{in}_\prec(\mathfrak{a})$ es radical, entonces \mathfrak{a} también. ¿El recíproco es cierto?
3. Considere el morfismo $f: \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^2$ dado por $t \mapsto (t^2, t^3)$. Calcule el ideal $\mathfrak{a} \triangleleft k[x, y]$ tal que $\mathbf{V}(\mathfrak{a}) = \overline{\text{Img } f}$. ¿Es \mathfrak{a} radical?

Correo electrónico: josecuevasbtos@uc.cl

URL: <https://josecuevas.xyz/teach/2025-2-alg/>