Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: Héctor Pastén Vásquez **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra abstracta II **Sigla:** MAT2244
Fecha: 8 de mayo de 2025

El espectro de un anillo

1. Recordatorios sobre topología

Daremos un breve recuento de las definiciones que se emplearán en la ayudantía.

Una ***topología*** sobre un conjunto X es una familia τ de subconjuntos tales que:

Top1. $\varnothing, X \in \tau$.
Top2. Si $\{U_i\}_i$ es una familia de elementos de τ, entonces $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$.
Top3. Si $U_1, \dots, U_n \in \tau$, entonces $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \in \tau$.

Los elementos de τ se llaman ***abiertos*** de la topología, y el complemento de un abierto se dice un conjunto ***cerrado***. El par (X, τ) se dice un *espacio topológico* (usualmente obviamos a τ), y a los elementos de X les llamamos *puntos* del espacio.

Si U es un abierto que contiene a un punto $x \in X$, decimos que es una *vecindad* de x. Una familia de abiertos $\mathcal{B}$ se dice una ***base de la topología*** si para cada punto x y cada vecindad suya U, existe un abierto $V \in \mathcal{B}$ en la base tal que $x \in V \subseteq U$.

Una familia de abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ tales que $\bigcup_{i\in I} U_i = X$ se dice un *cubrimiento* del espacio X. Un espacio topológico X se dice ***(cuasi)compacto*** si todo cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ admite un subcubrimiento $\{U_{i_j}\}_{j=1}^n$ finito.

Una función entre espacios topológicos $f\colon X \to Y$ se dice ***continua*** si la preimagen de todo abierto (de Y) es abierta (en X). Esto puede verificarse en una base de Y. Un *homeomorfismo* es una biyección entre espacios topológicos que es continua y cuya inversa es también continua. Se dice que $f\colon X \to Y$ es un ***encaje cerrado*** (resp. ***abierto***) si $f\colon X \to f[X]$ es un homeomorfismo y $f[X] \subseteq Y$ es un subconjunto cerrado (resp. abierto).

Un espacio topológico X se dice ***disconexo*** si existen dos abiertos $U, V \subseteq X$ disjuntos tales que $U \cup V = X$. Si, por el contrario, X no es disconexo, decimos que es *conexo*.

Dada una familia de espacios topológicos $(X_i)_{i\in I}$ podemos definir la suma disjunta de sus espacios como la unión disjunta $\coprod_{i\in I} X_i$ con la topología en la que los abiertos son de la forma $\coprod_{i\in I} U_i$, donde cada $U_i \subseteq X_i$ es abierto respectivamente.

Un espacio topológico X se dice ***de Hausdorff*** si todo par de puntos distintos $x, y \in X$ admiten vecindades $x \in U$ e $y \in V$ disjuntas.

2. Espectro de Zariski

1. Dado un anillo no nulo A, defina $\operatorname{Spec} A$ como su conjunto de ideales primos. Dado un subconjunto $S \subseteq A$, definiremos su lugar de anulamiento como

$$\mathbf{V}(S) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{p} \supseteq S\}.$$

   a) Pruebe que la familia $\tau := \{\operatorname{Spec} A \setminus \mathbf{V}(S) : S \subseteq A\}$ determina una topología sobre $\operatorname{Spec} A$. A este espacio le llamamos el ***espectro (de Zariski)*** de A.
   b) Describa $\operatorname{Spec} A$ cuando A es DIP (dominio de ideales principales).
   ¿Es $\operatorname{Spec} A$ un espacio de Hausdorff en general?
   c) Para $f \in A$ defina

$$\mathbf{D}(f) := \operatorname{Spec} A \setminus \mathbf{D}(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : f \notin \mathfrak{p}\}.$$

   Pruebe que la familia $\{\mathbf{D}(f) : f \in A\}$ forma una base de la topología.

   Para $f, g \in A$ pruebe que:
   d) $\mathbf{D}(f) = \operatorname{Spec} A$ syss f es inversible.
   e) $\mathbf{D}(f) = \varnothing$ syss f es nilpotente.
   f) Pruebe que $\operatorname{Spec} A$ es compacto.
2. Sea $\varphi\colon A \to B$ un homomorfismo de anillos, pruebe que

$$\varphi^a\colon \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A, \qquad \mathfrak{q} \longmapsto \varphi^{-1}[\mathfrak{q}]$$

   es una función continua entre espacios topológicos. Además, pruebe que:
   a) Si $\psi\colon B \to C$ es otro homomorfismo de anillos, entonces $(\psi \circ \varphi)^a = \varphi^a \circ \psi^a$.
   Esto sumado al hecho de que $\mathrm{Id}_A^a = \mathrm{Id}_{\operatorname{Spec} A}$ diría que el espectro de Zariski constituye un *funtor contravariante* desde la categoría de anillos a la de espacios topológicos.
   b) Si φ es un epimorfismo, entonces φ^a es un encaje cerrado que identifica a $\operatorname{Spec} B$ con el cerrado $\mathbf{V}(\ker \varphi)$.
   c) Si φ es la localización $B = A[1/f]$ para $f \in A$, entonces φ^a es un encaje abierto que identifica $\operatorname{Spec} B$ con $\mathbf{D}(f)$.
3. Sean $A_1, \dots, A_n$ una tupla de anillos. Pruebe que los ideales primos del producto $A_1 \times \cdots \times A_n$ son de la forma

$$A_1 \times \cdots \times A_{j-1} \times \mathfrak{p}_j \times A_{j+1} \times \cdots \times A_n,$$

   donde $\mathfrak{p}_j \lhd A_j$ es primo.
   Concluya que $\operatorname{Spec}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \operatorname{Spec} A_1 \amalg \cdots \amalg \operatorname{Spec} A_n$.
4. Pruebe que si $\operatorname{Spec} A$ es disconexo, entonces A contiene un elemento idempotente e (i.e., tal que $e^2 = e$) distinto del 0 y del 1.

Referencias

1. Atiyah, M. F. y MacDonald, I. G. *Introduction to Commutative Algebra* (Addison-Wesley, 1969).
2. Matsumura, H. *Commutative Ring Theory* trad. por Reid, M. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* **8** (Cambridge University Press, 1986).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`
URL: `https://josecuevas.xyz/teach/2025-1-ayud/`