**Pontificia Universidad Católica de Chile**
Facultad de Matemáticas

**Profesor:** Ricardo Menares **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
**Curso:** Teoría de Números **Sigla:** MAT2814
**Fecha:** 4 de septiembre de 2025

# Funciones multiplicativas

## 1. Ejercicios

1. (Ejemplo iluminador) Sea $a \in \mathbb{C}$ con $|a| < 1$. Pruebe que
$$\sum_{n \leq x} a^n = \frac{1}{1-a} + O(a^x).$$
2. Empleando sumas parciales, demuestre que:
   *a*) $H(x) := \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)$, donde $\gamma$ es una constante llamada la *constante de Euler-Mascheroni*.
   *b*) $T(x) := \sum_{n \leq x} \log n = x \log x - x + O(\log x)$.
3. **Problema del círculo de Gauss:** Sea $r(n)$ la cantidad de formas de escribir $n$ como suma de dos cuadrados (e.g., para $n = 5$ tenemos que $r(5) = 8$ pues $(\pm 1)^2 + (\pm 4)^2 = 5$ nos da cuatro formas e intercambiar los factores nos da cuatro más). Demuestre que:
$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} r(n) = \pi + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$
   *Pista:* El nombre *problema del círculo* es sugerente. □
4. Sea $f$ una función multiplicativa tal que $\lim_{p^m} f(p^m) = 0$, donde el subíndice recorre todas las potencias de todos los primos. Pruebe que $\lim_n f(n) = 0$.
5. Sea $\tau(n)$ la función que cuenta la cantidad de divisores positivos de un entero $n$.
   *a*) Pruebe que $\tau(n)$ es multiplicativa.
   *b*) Pruebe que $\tau(n) = o(n^{\varepsilon})$ para todo $\varepsilon > 0$.

## Referencias y lecturas adicionales

1. Hua, L.-K. *Introduction to Number Theory* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1982).
2. Tenenbaum, G. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres* 4.ª ed. (Berlin, 2015).

*Correo electrónico*: josecuevasbtos@uc.cl
*URL*: https://josecuevas.xyz/teach/2025-2-num/