Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: Héctor Pastén Vásquez
Ayudante: José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra abstracta II
Sigla: MAT2244
Fecha: 20 de marzo de 2025

Extensiones algebraicas

1. Extensiones finitas

1. Sea $L = K(\alpha)$ una extensión finita de grado impar. Pruebe que $L = K(\alpha^2)$.
2. Sea Ω/k una extensión de cuerpos con extensiones intermedias $k \subseteq K, L \subseteq \Omega$. Pruebe que
$$[KL : k] \leq [K : k]\,[L : k],$$
y que se alcanza igualdad cuando $[K : k]$ y $[L : k]$ son coprimos.
3. Sea k un cuerpo arbitrario, sea $k(t) := \operatorname{Frac} k[t]$ el cuerpo de fracciones del anillo de polinomios.
   a) Pruebe que la extensión $k(t)/k$ no es algebraica.
   b) Sea $f \in k(t)$ una función racional (i.e., una fracción formal de polinomios) no constante, pruebe que la extensión $k(t)/k(f)$ es finita.

Problema: En el ejercicio anterior, calcule $[k(t) : k(f)]$.

2. Cuerpos algebraicamente cerrados

4. a) Pruebe que, para un cuerpo k, son equivalentes:
      (i) Toda extensión algebraica K/k es tal que $K = k$.
      (ii) Todo polinomio no constante de k posee una raíz en k.
      (iii) Los únicos polinomios irreducibles son los lineales.
   En cuyo caso, k se dice ***algebraicamente cerrado***.
   b) Pruebe que un cuerpo finito no puede ser algebraicamente cerrado.
5. Una extensión algebraica C/k, donde C es algebraicamente cerrado, se dice una ***clausura algebraica*** de k. Pruebe que, si existen, las clausuras algebraicas son únicas salvo k-isomorfismo.
   Pista: Para esto necesitará hacer uso del **lema de Zorn** o equivalente.

A. Ejercicios propuestos

1. Encuentre todas las extensiones intermedias de $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.
2. Sea L/k una extensión algebraica (no necesariamente finita). Pruebe que todo subanillo $k \subseteq A \subseteq L$ es, de hecho, una extensión intermedia de cuerpos.
   ¿Es esto cierto si L no es algebraica?
3. En clases se vio que en una extensión finita $k/\mathbb{F}_p$ de característica p todo elemento es una potencia p-ésima. ¿Es esto cierto aún cuando la extensión es algebraica infinita? ¿Y cuándo no es algebraica?

Referencias

1. Lang, S. *Algebra* (Springer-Verlag New York, 2002).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`
URL: `https://josecuevas.xyz/teach/2025-1-ayud/`