Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: Héctor Pastén Vásquez **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra abstracta II **Sigla:** MAT2244
Fecha: 8 de mayo de 2025

El espectro de un anillo

1. Recordatorios sobre topología

Daremos un breve recuento de las definiciones que se emplearán en la ayudantía.

Una ***topología*** sobre un conjunto X es una familia τ de subconjuntos tales que:

Top1. $\varnothing, X \in \tau$.
Top2. Si $\{U_i\}_i$ es una familia de elementos de τ, entonces $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$.
Top3. Si $U_1, \dots, U_n \in \tau$, entonces $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \in \tau$.

Los elementos de τ se llaman ***abiertos*** de la topología, y el complemento de un abierto se dice un conjunto ***cerrado***. El par (X, τ) se dice un *espacio topológico* (usualmente obviamos a τ), y a los elementos de X les llamamos *puntos* del espacio.

Si U es un abierto que contiene a un punto $x \in X$, decimos que es una *vecindad* de x. Una familia de abiertos $\mathcal{B}$ se dice una ***base de la topología*** si para cada punto x y cada vecindad suya U, existe un abierto $V \in \mathcal{B}$ en la base tal que $x \in V \subseteq U$.

Una familia de abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ tales que $\bigcup_{i\in I} U_i = X$ se dice un *cubrimiento* del espacio X. Un espacio topológico X se dice ***(cuasi)compacto*** si todo cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ admite un subcubrimiento $\{U_{i_j}\}_{j=1}^n$ finito.

Una función entre espacios topológicos $f\colon X \to Y$ se dice ***continua*** si la preimagen de todo abierto (de Y) es abierta (en X). Esto puede verificarse en una base de Y. Un *homeomorfismo* es una biyección entre espacios topológicos que es continua y cuya inversa es también continua. Se dice que $f\colon X \to Y$ es un ***encaje cerrado*** (resp. ***abierto***) si $f\colon X \to f[X]$ es un homeomorfismo y $f[X] \subseteq Y$ es un subconjunto cerrado (resp. abierto).

Podrían ser útil los siguientes criterios:

Proposición 1.1: Para una función $f\colon X \to Y$ entre espacios topológicos son equivalentes:

1. f es un homeomorfismo.
2. f es biyectiva y una *función abierta* (i.e., la imagen de abierto es abierta).
3. f es biyectiva y una *función cerrada* (i.e., la imagen de cerrado es cerrada).

Un espacio topológico X se dice ***disconexo*** si existen dos abiertos $U, V \subseteq X$ disjuntos tales que $U \cup V = X$. Si, por el contrario, X no es disconexo, decimos que es *conexo*.

Dada una familia de espacios topológicos $(X_i)_{i\in I}$ podemos definir la suma disjunta de sus espacios como la unión disjunta $\coprod_{i\in I} X_i$ con la topología en la que los abiertos son de la forma $\coprod_{i\in I} U_i$, donde cada $U_i \subseteq X_i$ es abierto respectivamente.

Un espacio topológico X se dice ***de Hausdorff*** si todo par de puntos distintos $x, y \in X$ admiten vecindades $x \in U$ e $y \in V$ disjuntas.

2. Espectro de Zariski

1. Dado un anillo no nulo A, defina $\operatorname{Spec} A$ como su conjunto de ideales primos. Dado un subconjunto $S \subseteq A$, definiremos su lugar de anulamiento como
$$\mathbf{V}(S) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{p} \supseteq S\}.$$
   a) Pruebe que la familia $\tau := \{\operatorname{Spec} A \setminus \mathbf{V}(S) : S \subseteq A\}$ determina una topología sobre $\operatorname{Spec} A$. A este espacio le llamamos el ***espectro (de Zariski)*** de A.
   b) Describa $\operatorname{Spec} A$ cuando A es DIP (dominio de ideales principales). ¿Es $\operatorname{Spec} A$ un espacio de Hausdorff en general?
   c) Para $f \in A$ defina
$$\mathbf{D}(f) := \operatorname{Spec} A \setminus \mathbf{V}(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : f \notin \mathfrak{p}\}.$$
   Pruebe que la familia $\{\mathbf{D}(f) : f \in A\}$ forma una base de la topología.
   Para $f, g \in A$ pruebe que:
   d) $\mathbf{D}(f) = \operatorname{Spec} A$ syss f es inversible.
   e) $\mathbf{D}(f) = \varnothing$ syss f es nilpotente.
   f) Pruebe que $\operatorname{Spec} A$ es compacto.
2. Sea $\varphi\colon A \to B$ un homomorfismo de anillos, pruebe que
$$\varphi^a\colon \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A, \qquad \mathfrak{q} \longmapsto \varphi^{-1}[\mathfrak{q}]$$
   es una función continua entre espacios topológicos. Además, pruebe que:
   a) Si $\psi\colon B \to C$ es otro homomorfismo de anillos, entonces $(\psi \circ \varphi)^a = \varphi^a \circ \psi^a$. Esto sumado al hecho de que $\operatorname{Id}_A^a = \operatorname{Id}_{\operatorname{Spec} A}$ diría que el espectro de Zariski constituye un *funtor contravariante* desde la categoría de anillos a la de espacios topológicos.
   b) Si φ es un epimorfismo, entonces φ^a es un encaje cerrado que identifica a $\operatorname{Spec} B$ con el cerrado $\mathbf{V}(\ker \varphi)$.
   c) Si φ es la localización $B = A[1/f]$ para $f \in A$, entonces φ^a es un encaje abierto que identifica $\operatorname{Spec} B$ con $\mathbf{D}(f)$.
3. Sean $A_1, \dots, A_n$ una tupla de anillos. Pruebe que los ideales primos del producto $A_1 \times \cdots \times A_n$ son de la forma
$$A_1 \times \cdots \times A_{j-1} \times \mathfrak{p}_j \times A_{j+1} \times \cdots \times A_n,$$
   donde $\mathfrak{p}_j \lhd A_j$ es primo.
   Concluya que $\operatorname{Spec}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \operatorname{Spec} A_1 \amalg \cdots \amalg \operatorname{Spec} A_n$.

   Solución: Sea $\mathfrak{P} \lhd \prod_j A_j$ un primo, y denotemos por
$$e_i := (0, \dots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \dots, 0) \in \prod_j A_j$$
   al elemento tal que $(e_i) \cong A_i$. Nótese que e_i es un idempotente: $e_i^2 = e_i$, es decir, $e_i(e_i - 1) = 0$. Más aún, si $\mathfrak{P}$ contuviera a cada e_i, tendría a $1 = \sum_j e_j$, por lo que hay algún $e_j \notin \mathfrak{P}$, luego $1 - e_j \in \mathfrak{P}$ (pues $0 = e_j(1 - e_j)$).

   Finalmente, nótese que $e_i(1 - e_j) = e_i$ para $i \neq j$, así que $e_i \in \mathfrak{P}$ y, por tanto,
$$\mathfrak{P} = A_1 \times \cdots \times A_{j-1} \times \mathfrak{p} \times A_{j+1} \times \cdots \times A_n.$$
   Ahora, sean $a, b \in A_j$ tales que $ab \in \mathfrak{p}$, es decir, $(ae_j)(be_j) \in \mathfrak{P}$, por lo que $ae_j \in \mathfrak{P}$ o $be_j \in \mathfrak{P}$; se sigue que $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$. Así, $\mathfrak{p} \lhd A_j$ es primo.

   Más aún, así probamos que hay una biyección $\operatorname{Spec} A_j \to \mathbf{V}(1 - e_j)$ que es de hecho un encaje cerrado por el problema 2*b*, y $\mathbf{V}(1 - e_j) = \mathbf{D}(e_j)$, así que es un abierto y cerrado en $X := \operatorname{Spec}(\prod_j A_j)$. En la demostración vimos que $\bigcup_j \mathbf{V}(1 - e_j) = X$ y $\mathbf{D}(e_j) \cap \mathbf{D}(e_k) = \varnothing$ para $j \neq k$. Esto prueba que $X = \coprod_j \operatorname{Spec} A_j$.

4. Pruebe que, para un anillo A, son equivalentes:
   a) $\operatorname{Spec} A$ es disconexo.
   b) A contiene un elemento idempotente e (i.e., tal que $e^2 = e$) distinto del 0 y del 1.
   c) Existen A_1, A_2 no nulos tales que $A \cong A_1 \times A_2$ como anillos.

   Solución: La equivalencia «$b) \iff c)$» es porque $A_1 := (e)$ es un anillo con $1_{A_1} = e$ y $A_2 = (1-e)$ con $1_{A_2} = 1 - e$ (recuerde que $(1-e)^2 = 1-e$). Luego el isomorfismo es

$$A \longrightarrow A_1 \times A_2, \qquad a \longmapsto (ae, a(1-e))$$

   Recíprocamente, si $A \cong A_1 \times A_2$, entonces $e := (1,0)$ es un idempotente.
   La implicancia «$c) \implies a)$» es por el problema anterior.
   $a) \implies b)$. Sean $U = \mathbf{V}(\mathfrak{a})^c$, $V := \mathbf{V}(\mathfrak{b})^c$ abiertos tales que $U \cup V = \operatorname{Spec} A$ y $U \cap V = \varnothing$. Entonces $\mathbf{V}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^c = U \cup V = \operatorname{Spec} A$ equivale a que $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = (1)$; y $\mathbf{V}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^c = U \cap V = \varnothing$ equivale a que $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{N}$. Así, existen $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$ y un entero $n \geq 1$ tales que

$$a + b = 1, \qquad (ab)^n = 0.$$

   La primera condición ahora equivale a que $\mathbf{D}(a) \cup \mathbf{D}(b) = \operatorname{Spec} A$. Ahora, nótese que $\mathbf{D}(x) = \mathbf{D}(x^m)$ para todo $m \geq 1$ pues si $x \notin \mathfrak{p}$, entonces sus potencias tampoco y recíprocamente, por lo que, $\mathbf{D}(a^n) \cup \mathbf{D}(b^n) = \operatorname{Spec} A$. Así, existen $e \in (a^n)$ y $f \in (b^n)$ tales que

$$e + f = 1, \qquad ef \in (a^n b^n) = (0).$$

   Finalmente, $f = 1 - e$ y $e(1-e) = e - e^2 = 0$.

A. Un ejercicio propuesto

Aquí vamos a incluír un resultado importante y fácil. El siguiente es un análogo del teorema de ceros de Hilbert (o *Nullstellensatz*) en una versión muy débil.

Para un subconjunto $Y \subseteq \operatorname{Spec} A$ defina los siguientes conjuntos:

$$\mathbf{I}(Y) := \bigcap_{\mathfrak{p}\in Y} \mathfrak{p} \subseteq A, \qquad \overline{Y} := \bigcap \{\mathbf{V}(\mathfrak{a}) : \mathbf{V}(\mathfrak{a}) \supseteq Y\} \subseteq \operatorname{Spec} A.$$

1. Pruebe que, para un ideal $\mathfrak{a} \lhd A$, se cumple que $\mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathfrak{a})) = \operatorname{Rad} \mathfrak{a}$.
2. Pruebe que, para un subconjunto $Y \subseteq \operatorname{Spec} A$, se cumple que $\mathbf{V}(\mathbf{I}(Y)) = \overline{Y}$.

B. Comentarios adicionales

La topología sobre $\operatorname{Spec} A$ le fue sugerida por un oyente de Zariski en una charla suya. El geómetra bielorruso Oscar Zariski popularizó el uso del álgebra conmutativa en la geometría algebraica con dos notables ventajas: la primera es que le permitió formalizar y extender los límites de la teoría, así como generalizar una serie de resultados ya conocidos, o simplemente *algebrizarlos* (es decir, evitar métodos analíticos para poder demostrarlos).

Inspirado en él, el francés André Weil trabajó para crear un nuevo lenguaje en la geometría algebraica en donde el álgebra conmutativa toma un rol más predominante, lo que culminó en su libro *Foundations of Algebraic Geometry*; mientras que Zariski trabajó para organizar la maquinaria algebraica, culminando en los dos volúmenes *Commutative Algebra* con Pierre Samuel.

Estos programos suyos fueron finalmente completados con la llegada de los *esquemas* por el matemático Alexander Grothendieck, quién también desarrolló otro lenguaje –capital hoy en día– dentro del cual los espectros forman el esqueleto fundamental. No obstante, Grothendieck dota al $\operatorname{Spec} A$ de una «estructura adicional» (un *haz*) que permite recuperar al anillo mismo (vale decir, el espacio $\operatorname{Spec} A$ no es un buen invariante, ya que todo cuerpo tiene por espectro a un punto); con ella, el $\operatorname{Spec} A$ pasa a ser un *esquema afín* en su terminología. Para estudiar esta teoría se recomienda ver, por ejemplo, Hartshorne [**2**] o Vakil [**4**].

Referencias

1. Atiyah, M. F. y MacDonald, I. G. *Introduction to Commutative Algebra* (Addison-Wesley, 1969).
2. Hartshorne, R. *Algebraic Geometry Graduate Texts in Mathematics* **52** (Springer-Verlag New York, 1977).
3. Matsumura, H. *Commutative Ring Theory* trad. por Reid, M. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* **8** (Cambridge University Press, 1986).
4. Vakil, R. *The Rising Sea. Foundations of Algebraic Geometry* (15 de mayo de 2023).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`
URL: `https://josecuevas.xyz/teach/2025-1-ayud/`