Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: Héctor Pastén **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Teoría de Números **Sigla:** MAT2225
Fecha: 18 de agosto de 2023

Congruencias y funciones multiplicativas

1. Congruencias

Primero un par de problemas de práctica:

1. (Gersónides) Las únicas potencias consecutivas de 2 y 3 son $1, 2, 3, 4, 8$ y 9.
2. Demuestre que la ecuación diofantina $x^2 + y^2 = 4z + 3$ no tiene soluciones enteras.

Ahora subamos de nivel:

3. Considere la sucesión

$$q_n := \underbrace{33\dots 33}_{n \text{ veces}}1.$$

Demuestre que contiene infinitos números compuestos.

Lo divertido de la sucesión es que $q_1, q_2, \dots, q_7$ son todos primos y $q_8 = 17 \cdot 19607843$ es el primer número compuesto en ella.

4. (Japón 1999) Sea $f(x) := x^3 + 17$. Demuestre que para todo natural $n \geq 2$ existe un entero x tal que $3^n \mid f(x)$ pero $3^{n+1} \nmid f(x)$.

2. Funciones aritméticas y multiplicativas

Recuérdese:

Definición 2.1: Una ***función aritmética*** es una función $f \colon \mathbb{N}_{\neq 0} \to \mathbb{C}$. Una función aritmética no nula se dice:

Completamente multiplicativa: Si para todo $n, m \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ se cumple que $f(nm) = f(n)f(m)$.
Multiplicativa: Si para todo par de naturales $n, m \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ coprimos se cumple que $f(nm) = f(n)f(m)$.

5. (Prueba de sanidad) Sea f una función aritmética. Demuestre:
   a) Si f es multiplicativa, entonces $f(1) = 1$.
   b) Si f es multiplicativa, entonces está totalmente determinado por los valores que toma $f(p^\alpha)$ para todo primo p y todo exponente $\alpha > 1$. En cuyo caso, dados $p_1, \dots, p_m$ primos distintos y $\alpha_i \in \mathbb{N}$ se tiene
   $$f(p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}) = f(p_1^{\alpha_1}) \cdot f(p_2^{\alpha_2}) \cdots f(p_m^{\alpha_m}).$$
   c) Si f es completamente multiplicativa, entonces está totalmente determinado por los valores que toma $f(p)$ para todo primo p. En cuyo caso, dados $p_1, \dots, p_m$ primos distintos y $\alpha_i \in \mathbb{N}$ se tiene
   $$f(p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}) = f(p_1)^{\alpha_1} \cdot f(p_2)^{\alpha_2} \cdots f(p_m)^{\alpha_m}.$$
6. Demuestre que las siguientes son funciones multiplicativas:
   a) La función de Möbius, dada por
   $$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^r, & \text{si } n = p_1 \cdots p_r, \text{ con } p_i \text{ primos distintos,} \\ 0, & \text{si existe un primo } p \text{ tal que } p^2 \mid n. \end{cases}$$
   b) Las funciones de la forma:
   $$\sigma_s(n) := \sum_{d \mid n} d^s, \qquad s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

En particular, denotamos $\tau(n) := \sigma_0(n)$ la función que cuenta la cantidad de divisores de n; y $\sigma(n) := \sigma_1(n)$ la función que suma los divisores de n.

7. (Corolario) Sea $n \in \mathbb{N}$ con factorización prima $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$. Concluya lo siguiente:
   a) La cantidad de divisores que posee es
   $$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_m + 1).$$
   b) La suma de sus divisores es
   $$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_m^{\alpha_m+1} - 1}{p_m - 1}.$$

Definición 2.2: Se dice que un número natural n es ***perfecto*** si es igual a la suma de los divisores menores que él, o equivalentemente, si $\sigma(n) = 2n$.

Un ejemplo de un número perfecto es el 6 pues $6 = 1 + 2 + 3$.

8. (Euclides-Euler) Demuestre que un número par es perfecto syss es de la forma $2^{n-1}(2^n - 1)$, donde $p := 2^n - 1$ es un número primo. (Los primos de la forma $2^n - 1$ se dicen *primos de Mersenne*.)
9. (Euler) Demuestre que un número impar perfecto es de la forma $p^r m^2$ donde $p \nmid m$ y $p \equiv r \equiv 1 \pmod 4$.

Problemas abiertos

- ¿Habrán infinitos primos de Mersenne?
- ¿Existen números impares perfectos? Por computación sabemos que, de existir, han de ser mayores que 10^{1500} (cfr. Ochem y Rao [**4**]).

  La expresión del enunciado 9 puede refinarse, uno puede demostrar (sin tanto esfuerzo) que $r = 1$ (cfr. de Souza [**3**]).
- ¿Existen números n tales que $\sigma(n) = 2n + 1$?

Referencias y lecturas adicionales

1. Andreescu, T. y Andrica, D. *Number Theory* (Birkäuser Boston, 2009).
2. Burton, D. M. *Elementary Number Theory* (McGraw-Hill, 1991).
3. De Souza, A. N. *Where do odd perfect numbers live?* 2018. arXiv: `1801.06182 [math.NT]`.
4. Ochem, P. y Rao, M. Odd perfect numbers are greater than 10^{1500}. *Math. Comp.* **81,** 1869-1877. doi:`10.1090/S0025-5718-2012-02563-4` (2012).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`