



Números algebraicos

A lo largo de las ayudantías trataré de incluir comentarios o problemas especiales. Los problemas difíciles tendrán ojos asustados ●●, los comentarios que son opcionales u omitibles tendrán ojos hastiados ●● y los comentarios **importantes** tendrán ojos interesados ●●.

1. NÚMEROS ALGEBRAICOS

1. (Examen de lucidez)

a) Pruebe que, para toda extensión K/\mathbb{Q} cuadrática, existe un entero $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados (i.e., si un primo $p \mid d$, entonces $p^2 \nmid d$) tal que $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

b) Pruebe que si $d_1 \neq d_2$ son dos enteros libres de cuadrados distintos, entonces $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1}) \neq \mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$.

2. Pruebe que si un número complejo $x + iy \in \mathbb{C}$ con $x, y \in \mathbb{R}$ es (\mathbb{Q}) -algebraico, entonces x e y son algebraicos.

3. Pruebe que para todo racional $r \in \mathbb{Q}$, los números $\sin(r\pi), \cos(r\pi) \in \mathbb{C}$ son algebraicos sobre \mathbb{Q} .

4. Defina $\alpha := \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{C}$.

a) Encuentre un polinomio $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado 4 tal que $f(\alpha) = 0$.

b) Verifique que $f(x)$ no tiene raíces racionales, de modo que si $p(x)$ es un polinomio irreducible tal que $p(\alpha) = 0$, entonces p debe ser cuadrático.

c) Verifique que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{6})$ y, por tanto, $f(x) = p(x)$ ya era irreducible.

●● **Problema:** ¿Toda extensión cúbica K/\mathbb{Q} es de la forma $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{n})$ para algún $n \in \mathbb{Z}$?

2. CUERPOS FINITOS

5. Sea k un cuerpo finito. Pruebe lo siguiente:

a) Su característica $\text{car } k = p$ es un número primo.

b) Su cardinalidad $|k| = p^n$ es una potencia de $p = \text{car } k$ con exponente $n \geq 1$.

c) Cada elemento *siempre* tiene raíz p -ésima.

6. Sea k un cuerpo de característica $p := \text{car } k > 0$. Sea $q := p^n$ con $n \geq 1$ a elección. Pruebe que

$$k^q := \{\alpha^q : \alpha \in k\} \subseteq k$$

es un subcuerpo de k .

●● 7. Pruebe que para todo cuerpo k existen infinitos polinomios irreducibles con coeficientes en k .

REFERENCIAS

1. LANG, S. *Algebra* (Springer-Verlag New York, 2002).

Correo electrónico: josecuevasbtos@uc.cl

URL: <https://josecuevas.xyz/teach/2025-1-ayud/>