



## Más acerca de módulos

### 1. SOBRE MÓDULOS

1. (Exámen de lucidez) Pruebe que todo grupo abeliano  $G$  posee una única estructura como  $\mathbb{Z}$ -módulo.
2. Sea  $A$  un anillo y  $M$  un  $A$ -módulo. Para una indeterminada  $x$  definimos el conjunto  $M[x]$  como aquel formado por las sumas formales  $\sum_{j=0}^n m_j x^j$ , donde los coeficientes  $m_j \in M$ .
- a) Pruebe que  $M[x]$  es un  $A[x]$ -módulo con la suma coordenada a coordenada y el producto escalar:
- $$\left( \sum_{i=0}^p a_i x^i \right) \left( \sum_{j=0}^n m_j x^j \right) = \sum_{\ell=0}^{p+n} \left( \sum_{i+j=\ell} a_i m_j \right) x^\ell.$$
- b) Pruebe que si  $N \leq M$ , entonces  $N[x] \leq M[x]$  de forma canónica. En particular, si  $\mathfrak{a}$  es un ideal de  $A$ , entonces  $\mathfrak{a}[x]$  es un ideal de  $A[x]$ .
- c) Si  $\mathfrak{p}$  es un ideal primo de  $A$ . ¿Es cierto que  $\mathfrak{p}[x]$  es primo en  $A[x]$ ? ¿Y si  $\mathfrak{m}$  es maximal, será que  $\mathfrak{m}[x]$  también?
3. Sea  $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$  una sucesión exacta de  $A$ -módulos.
- a) Pruebe que si  $M_1$  y  $M_3$  son finitamente generados, entonces  $M_2$  también.
- b) Diremos que un  $A$ -módulo es **noetheriano** si todos sus  $A$ -submódulos son finitamente generados. Pruebe que  $M_2$  es noetheriano syss  $M_1$  y  $M_3$  también lo son.
4. Pruebe que sobre un anillo noetheriano  $A$ , un  $A$ -módulo es noetheriano syss es finitamente generado.

### 2. LAS SERPIENTES Y SUS AMIGOS

5. **Lema de la serpiente:** Considere un diagrama conmutativo de  $R$ -módulos

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\psi} & B & \xrightarrow{\phi} & C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\psi'} & B' & \xrightarrow{\phi'} & C' \end{array}$$

donde ambas filas son exactas, pruebe que existe un homomorfismo de  $R$ -módulos  $\omega: \ker \gamma \rightarrow \operatorname{coker} \alpha$  tal que se induce la siguiente sucesión exacta:

$$\ker \psi \rightarrow \ker \alpha \rightarrow \ker \beta \rightarrow \ker \gamma \xrightarrow{\omega} \operatorname{coker} \alpha \rightarrow \operatorname{coker} \beta \rightarrow \operatorname{coker} \gamma \rightarrow \operatorname{coker}(\phi').$$

6. **Lema de los cinco:** Dado un diagrama conmutativo de  $A$ -módulos

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5 \end{array}$$

con filas exactas. Pruebe que si  $f_1, f_2, f_4, f_5$  son isomorfismos, entonces  $f_3$  también.

*PISTA:* Emplee el lema de la serpiente.

□

7. Sea

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \quad (\Sigma)$$

una sucesión exacta de  $R$ -módulos. Pruebe que son equivalentes:

- Existe  $h: C \rightarrow B$  tal que  $g \circ h = \text{Id}_C$  (esta  $h$  es ocasionalmente descrita como una «sección de  $g$ »).
- Existe  $j: B \rightarrow A$  tal que  $j \circ f = \text{Id}_A$  (este  $j$  es ocasionalmente descrito como una «cosección» o «retracción de  $f$ »).
- Existe un isomorfismo  $\phi: A \oplus C \rightarrow B$ , de modo que  $g \circ \phi: A \times C \rightarrow C$  es la proyección y  $\phi^{-1} \circ f: A \rightarrow A \times C$  es la inclusión.

En cuyo caso, se dice que  $(\Sigma)$  **se escinde** o que es una *sucesión escindida*.

#### A. EJERCICIOS PROPUESTOS

- Describa qué debe satisfacer un grupo abeliano para tener estructura natural<sup>1</sup> de  $\mathbb{Q}$ -módulo.
- Sea  $A$  un anillo **NO** noetheriano.
  - Dé un contraejemplo de un  $A$ -módulo finitamente generado  $M$  que no sea noetheriano.
  - Pruebe que siempre existe un  $A$ -módulo noetheriano no nulo.  
*PISTA:* Note que, por ejemplo, un  $A$ -módulo sería noetheriano si fuese **simple**, i.e., si sus únicos submódulos fueran  $0$  y  $M$ ; así que puede tratar de buscar un  $A$ -módulo simple.  $\square$
- Sea  $A$  un dominio íntegro que contiene a un subcuerpo  $k \subseteq A$  y tal que  $A$  es un  $k$ -espacio vectorial de dimensión finita. Pruebe que  $A$  es un cuerpo.
- Se dice que un  $A$ -módulo  $M$  es **descomponible** si posee dos submódulos propios  $N_1, N_2$  tales que  $M \cong N_1 \oplus N_2$ . Claramente todo módulo simple es indescomponible, pero el recíproco no es cierto.
  - Pruebe que un módulo no nulo  $M$  es descomponible si y sólo si existe un endomorfismo no nulo  $\varphi: M \rightarrow M$  tal que  $\varphi^2 = \varphi$ .
  - (Examen de lucidez) ¿Para exactamente qué enteros  $n > 1$  se cumple que  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  es  $(\mathbb{Z})$ -indescomponible? ¿Para cuáles es simple?
- Lema de los cuatro:** Considere el diagrama conmutativo de  $A$ -módulos

$$\begin{array}{ccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 \end{array}$$

con filas exactas. Supongamos que  $f_1$  es sobreyectivo y  $f_4$  es inyectivo. Se cumplen:

- Si  $f_2$  es inyectivo, entonces  $f_3$  también
- Si  $f_3$  es sobreyectivo, entonces  $f_2$  también

#### B. COMENTARIOS ADICIONALES

Las técnicas que involucran construir diagramas con filas/columnas exactas y aplicar lemas similares al de la serpiente se conocen como «cazando diagramas» (eng. *diagram chasing*). Hay varios libros dedicados a explotar esta técnica, un ejemplo es [3]. Las primeras dos ediciones de LANG [2] incluían este famoso y desventurado ejercicio:

Coja cualquier texto de álgebra homológica y pruebe todos los teoremas que contenga sin ver las demostraciones.

La traducción al ruso del libro fue incluyendo una serie de pies de página y anotaciones por el traductor. En este punto añade «Sugerimos saltarse éste ejercicio en una primera lectura.»<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Si bien el adjetivo «natural» es un tanto ambiguo en matemáticas, aquí tiene una connotación precisa. El lector puede probar que si un grupo abeliano  $G$  admite estructura de  $\mathbb{Q}$ -módulo, esta es única.

<sup>2</sup>Vid. <https://mathoverflow.net/a/10909>

El álgebra homológica fue inventada y explorada principalmente por topólogos algebristas al inicio del siglo XX como Samuel Eilenberg, Norman Steenrod y Jean Leray.<sup>3</sup> En un comienzo pretendía tener aplicaciones específicas a la topología, pero probó ser de gran utilidad en el álgebra también, principalmente en el estudio de módulos con la aparición de los funtores Ext y Tor. Esta revolución fue llevada a cabo por varios matemáticos de renombre, por nombrar algunos: Eduard Čech, Henri Cartan, Nobuo Yoneda, Hyman Bass y Jean-Pierre Serre.

## REFERENCIAS

1. ATIYAH, M. F. y MACDONALD, I. G. *Introduction to Commutative Algebra* (Addison-Wesley, 1969).
2. LANG, S. *Algebra* (Springer-Verlag New York, 2002).
3. MAC LANE, S. *Homology* (Springer-Verlag Berlin, 1967).

Correo electrónico: josecuevasbtos@uc.cl

URL: <https://josecuevas.xyz/teach/2025-1-ayud/>

---

<sup>3</sup>Si quiere puede rastrear influencias más antiguas a David Hilbert y Henri Poincaré.