Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: Héctor Pastén Vásquez — **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra abstracta II — **Sigla:** MAT2244
Fecha: 13 de marzo de 2025

Extensiones de cuerpos I

A lo largo de las ayudantías trataré de incluír comentarios o problemas especiales. Los problemas difíciles tendrán ojos asustados ◉◉, los comentarios que son opcionales u omitibles tendrán ojos hastiados ◓◓ y los comentarios **importantes** tendrán ojos interesados ◑◑.

1. Extensiones de cuerpos

1. (Examen de lucidez)
   a) Pruebe que, para toda extensión $K/\mathbb{Q}$ cuadrática, existe un entero $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados (i.e., si un primo $p \mid d$, entonces $p^2 \nmid d$) tal que $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
   b) Pruebe que si $d_1 \neq d_2$ son dos enteros libres de cuadrados distintos, entonces $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1}) \neq \mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$.
2. Pruebe que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{C}$ es un elemento algebraico de grado 4 sobre $\mathbb{Q}$.
3. Sea $L = K(\alpha)$ una extensión finita de grado impar. Pruebe que $L = K(\alpha^2)$.
4. Sea L/k una extensión algebraica (no necesariamente finita). Pruebe que todo subanillo $k \subseteq A \subseteq L$ es, de hecho, una extensión intermedia de cuerpos.

2. Cuerpos finitos

5. Sea k un cuerpo finito. Pruebe lo siguiente:
   a) Su característica $\operatorname{car} k = p$ es un número primo.
   b) Su cardinalidad $|k| = p^n$ es una potencia de $p = \operatorname{car} k$ con exponente $n \geq 1$.
   c) Cada elemento *siempre* tiene raíz p-ésima.
6. Sea k un cuerpo de característica $p := \operatorname{car} k > 0$. Sea $q := p^n$ con $n \geq 1$ a elección. Pruebe que
$$k^q := \{\alpha^q : \alpha \in k\} \subseteq k$$
   es un subcuerpo de k.
7. Sea k un cuerpo finito. Pruebe que el grupo de unidades $k^\times$ es cíclico.

Referencias

1. Lang, S. *Algebra* (Springer-Verlag New York, 2002).
2. Nagata, M. *Theory of Commutative Fields Translations in Mathematical Monographies* **125** (American Mathematical Society, 1967).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`
URL: `https://josecuevas.xyz/teach/2025-1-ayud/`