Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: Héctor Pastén Vásquez | **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra abstracta II | **Sigla:** MAT2244
Fecha: 13 de marzo de 2025

Números algebraicos

A lo largo de las ayudantías trataré de inclur comentarios o problemas especiales. Los problemas difíciles tendrán ojos asustados ◉◉, los comentarios que son opcionales u omitibles tendrán ojos hastiados ◓◓ y los comentarios **importantes** tendrán ojos interesados ◑◑.

1. Números algebraicos

1. (Examen de lucidez)
   a) Pruebe que, para toda extensión $K/\mathbb{Q}$ cuadrática, existe un entero $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados (i.e., si un primo $p \mid d$, entonces $p^2 \nmid d$) tal que $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
   b) Pruebe que si $d_1 \neq d_2$ son dos enteros libres de cuadrados distintos, entonces $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1}) \neq \mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$.
2. Pruebe que para todo racional $r \in \mathbb{Q}$, los números $\sin(r\pi), \cos(r\pi) \in \mathbb{C}$ son algebraicos sobre $\mathbb{Q}$.
3. Pruebe que si un número complejo $x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ con $x, y \in \mathbb{R}$ es ($\mathbb{Q}$-)algebraico, entonces x e y son algebraicos.
4. Defina $\alpha := \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{C}$.
   a) Encuentre un polinomio $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado 4 tal que $f(\alpha) = 0$.
   b) Verifique que $f(x)$ no tiene raíces racionales, de modo que si $p(x)$ es un polinomio irreducible tal que $p(\alpha) = 0$, entonces p debe ser cuadrático.
   c) Verifique que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{6})$ y, por tanto, $f(x) = p(x)$ ya era irreducible.

◉◉ **Problema:** ¿Toda extensión cúbica $K/\mathbb{Q}$ es de la forma $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{n})$ para algún $n \in \mathbb{Z}$?

2. Cuerpos finitos

5. Sea k un cuerpo finito. Pruebe lo siguiente:
   a) Su característica $\operatorname{car} k = p$ es un número primo.
   b) Su cardinalidad $|k| = p^n$ es una potencia de $p = \operatorname{car} k$ con exponente $n \geq 1$.
   c) Cada elemento *siempre* tiene raíz p-ésima.
6. Pruebe que para todo cuerpo k existen infinitos polinomios irreducibles con coeficientes en k.
7. Sea k un cuerpo de característica $p := \operatorname{car} k > 0$. Sea $q := p^n$ con $n \geq 1$ a elección. Pruebe que
$$k^q := \{\alpha^q : \alpha \in k\} \subseteq k$$
es un subcuerpo de k.

Referencias

1. Lang, S. *Algebra* (Springer-Verlag New York, 2002).

Correo electrónico: josecuevasbtos@uc.cl
URL: https://josecuevas.xyz/teach/2025-1-ayud/