Pontificia Universidad Católica de Chile y Universidad de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: José Samper **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra II **Sigla:** MPG3201
Fecha: 1 de octubre de 2025

Caracteres

1. Ejercicios

A lo largo de esta ayudantía, siempre consideraremos a $\mathbb{C}$ como cuerpo de coeficientes.

1. Calcule la tabla de caracteres simples de A_4.
2. Calcule la tabla de caracteres simples del grupo de cuaterniones
$$Q_8 = \langle i, j, k : i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ijk = -1 \rangle.$$
3. Sea $H \leq G$ un subgrupo de un grupo finito y sea χ el caracter de una representación $\rho\colon H \curvearrowright V$. Recuerde de la ayudantía anterior (ej. 2c) que asociado a V^ρ tenemos la representación inducida $\operatorname{Ind}_H^G(\rho)$ cuyo caracter denotaremos $\operatorname{Ind}_H^G(\chi)$. Pruebe que tenemos la siguiente fórmula para todo $g \in G$:
$$\operatorname{Ind}_H^G(\chi)(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{t \in G \\ tgt^{-1} \in H}} \chi(t^{-1}gt).$$
4. Sea G un grupo finito.
   a) Si $C_1, \dots, C_h$ son las clases de conjugación de G, pruebe que los elementos
   $$c_j := \sum_{g \in C_j} [g] \in \mathbb{C}[G],$$
   forman una $\mathbb{C}$-base para el centro[1] $Z(\mathbb{C}[G])$.

   ◉◉ *b*) Sea χ un caracter simple de G de grado $n := \chi(1)$, y sea $g \in C_j \subseteq G$. Pruebe que $|C_j|\frac{1}{n}\chi(g)$ es un entero algebraico (i.e., es raíz de un polinomio mónico con coeficientes en $\mathbb{Z}$).
   Pista: Para ello, note que la representación ρ que induce a χ satisface que $\rho(c_j) = b_j \operatorname{Id}$ y pruebe que b_j es el valor propio de una matriz a coeficientes enteros. □

   c) Pruebe que el grado de toda representación simple divide al orden de G.
   Pista: Para esto podría necesitar que los enteros algebraicos son cerrados bajo suma y productos, y que los enteros algebraicos de $\mathbb{Q}$ son exactamente los enteros $\mathbb{Z}$. □
5. ◉◐ Recuerde que el grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$ siempre admite la *representación por permutación* $\rho \curvearrowright \mathbb{C}^n$ dada por $\sigma \cdot (v_1, \dots, v_n) = (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$. Esta fija al vector $(1, \dots, 1)$ que genera la subrepresentación trivial, el complemento de ella es la ***representación estándar*** cuyo caracter es
$$\chi_{\mathrm{st}}(\sigma) = \chi_{\mathrm{perm}}(\sigma) - \chi_0(\sigma) = \chi_{\mathrm{perm}}(\sigma) - 1.$$
Pruebe que la representación estándar es siempre simple.

Referencias

1. Huppert, B. *Finite Groups I* (Springer Nature Switzerland, 2025).
2. Serre, J.-P. *Linear Representations of Finite Groups* (Springer-Verlag, 1977).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`
URL: `https://josecuevas.xyz/teach/2025-2-alg/`

[1] Relativo al producto, obvio.