Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: Ricardo Menares **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Teoría de Números **Sigla:** MAT2814
Fecha: 8 de septiembre de 2025

Asintótica de funciones aritméticas

1. Ejercicios

◐◐ 1. Sea $\mathbb{F}_q$ un cuerpo con $q < \infty$ elementos.
   a) Sea $f(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ es irreducible. Pruebe que $f(x) \mid x^{q^n} - x$ syss $\deg f \mid n$.
   b) Sea $M(n)$ la cantidad de polinomios irreducibles de grado n en $\mathbb{F}_q[x]$ y sea $E(n)$ la cantidad de elementos de $\mathbb{F}_{q^n}$ de grado exactamente n (i.e., cuyo polinomio minimal tiene grado n y, por tanto, que generan la extensión $\mathbb{F}_{q^n}$). ¿Qué relación hay entre $M(n)$ y $E(n)$?
   c) Pruebe que
$$n\psi(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) q^{n/d}.$$

2. **Primer teorema de Mertens:** Demuestre que
$$\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1),$$
(donde el subíndice p siempre recorre los números primos.)
   Para facilitar el ejercicio realice los siguientes pasos:
   (i) Demuestre que cuando n es entero
$$T(n) = \log(n!) = \sum_{p \le n} \left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots \right) \log p.$$
   (ii) Demuestre que
$$\frac{n}{p} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots < \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}.$$
   (iii) Demuestre que $\sum_{p \le x} \log p \le c_2 x$.
   (iv) Concluya el enunciado.

3. **Segundo teorema de Mertens:** Demuestre que
$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = \log\log x + M + O\left(\frac{1}{\log x} \right),$$
donde M es una constante llamada la *constante de Mertens*.
   Pista: Emplee fórmula de suma por partes de Abel. □

◉◉ 4. **Postulado de Bertrand (demostración de Erdős):** El objetivo de este ejercicio es probar que para todo $n \ge 2$ existe un primo p con $n \le p < 2n$.
   (i) Pruebe que $\prod_{p \le x} p \le 4^x$ para todo $x \ge 2$.
   (ii) Pruebe que para todo entero $n \ge 1$ se cumple que
$$\binom{2n}{n} \ge \frac{4^n}{2n}.$$
   (iii) Dé cotas para la valuación de un primo $p \mid \binom{2n}{n}$ en los intervalos:
$$\left(\sqrt{2n}, \frac{2}{3}n\right], \qquad \left(\frac{2}{3}n, n\right], \qquad (n, 2n].$$

(iv) Confronte cotas y pruebe que el postulado de Bertrand es cierto para n suficientemente grande.

Referencias y lecturas adicionales

1. Granville, A. *Number Theory Revealed. A Masterclass* (American Mathematical Society, 2020).
2. Tenenbaum, G. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres* 4.ª ed. (Berlin, 2015).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`
URL: `https://josecuevas.xyz/teach/2025-2-num/`