Pontificia Universidad Católica de Chile y Universidad de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: José Samper
Ayudante: José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra II
Sigla: MPG3201
Fecha: 26 de noviembre de 2025

Dimensión II

1. Ejercicios

1. Considere $\mathfrak{a} := (xz - x^2, yz - xy) \lhd k[x, y, z]$.
   a) Pruebe que $\mathfrak{a} \cap k[z] = 0$. ¿Podría darse que $\mathfrak{a} \cap k[x, z] = 0$ o $\mathfrak{a} \cap k[y, z] = 0$?
   b) Muestre que $\mathfrak{a} \cap k[x, y] = 0$, pero $\mathfrak{a} \neq 0$.
   c) ¿Qué puede decir de $\dim \mathbf{V}(\mathfrak{a})$?
2. Sea $f \in R := k[x_0, \dots, x_n]$ homogéneo de grado $r > 0$.
   a) Calcule el polinomio de Hilbert (proyectivo) del ideal (f).
   b) Sea $\mathfrak{a}$ un ideal y suponga que f no es un divisor de cero en $R/\mathfrak{a}$. Pruebe que el polinomio de Hilbert $\mathfrak{a} + (f)$ solo depende de $\mathfrak{a}$ y r.
3. Sea $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ una variedad[1] proyectiva.
   a) Pruebe que, si $\dim V > 0$, entonces existe una subvariedad $W \subsetneq V$ de $\dim W = \dim V - 1$.
   Pista: Para ello, pueden resultar útiles el hecho de que para todo $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ que no se anula idénticamente en V se cumple que $\dim(V \cap \mathbf{V}(f)) = \dim V - 1$; así como el siguiente resultado de álgebra conmutativa:

   El conjunto de primos ($\subseteq$-)minimales de un anillo noetheriano es finito (Ex. 8 de [**1**, Ch. 6]). □

   b) Pruebe que si $\dim V = m$, entonces existe una cadena de $m + 1$ subvariedades distintas:
   $$V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_m = V$$
   y que no hay cadenas más largas.
4. Sea $F\colon \mathbb{A}^m(k) \to \mathbb{A}^n(k)$ un morfismo regular y sea $V = \overline{\operatorname{Img} F} \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ la clausura de su imagen («F es una parametrización racional de V»). Pruebe que $m \geq \dim V$, y dé un ejemplo donde $m > \dim V$.

A. Comentarios adicionales

El ejercicio 3*b* muestra que la dimensión topológica o combinatórica de V (en sentido de Hartshorne [**3**, pág. 5]) coincide con la «dimensión» que ya hemos definido (mediante polinomios de Hilbert).

Referencias

1. Atiyah, M. F. y MacDonald, I. G. *Introduction to Commutative Algebra* (Addison-Wesley, 1969).
2. Cox, D. A., Little, J. y O'Shea, D. *Ideals, Varieties, and Algorithms. An introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra* 5.ª ed. (Springer-Verlag, 2020).
3. Hartshorne, R. *Algebraic Geometry Graduate Texts in Mathematics* **52** (Springer-Verlag New York, 1977).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`
URL: `https://josecuevas.xyz/teach/2025-2-alg/`

[1] Para mí, todas las variedades son irreducibles y, para quienes sepan esquemas, *reducidas*.