Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: Héctor Pastén Vásquez **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra abstracta II **Sigla:** MAT2244
Fecha: 27 de marzo de 2025

Normalidad y separabilidad

1. Extensiones normales

1. Sea $f(x) \in k[x]$ un polinomio de grado n, sea K su cuerpo de escisión. Pruebe que $[K : k] \mid n!$
2. Defina $\zeta_n := e^{2\pi/n\mathrm{i}} \in \mathbb{C}$ y note que $\zeta_n^n = 1$, pero $\zeta_n^j \neq 1$ para $1 \leq j < n$.
   a) Pruebe que $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ es una extensión normal.
   b) Pruebe que para $n = p$ primo, $[\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}] = p - 1$.
   c) Construya el cuerpo de escisión K de $x^5 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$ y calcule $[K : \mathbb{Q}]$.

2. Extensiones (in)separables

Como se vio en clases, las extensiones en característica cero son todas separables, por lo que en esta sección k será un cuerpo de $\operatorname{car} k = p > 0$.

3. Sea K/k una extensión algebraica y sea $\alpha \in K$.
   a) Pruebe que si α es inseparable, entonces su polinomio minimal $f(x) \in k[x]$ satisface que $f(x) = g(x^p)$.
   b) Pruebe que α es separable syss $k(\alpha) = k(\alpha^p)$.
4. Pruebe que si $f(x) \in k[x]$ es irreducible, entonces todas sus raíces (en su cuerpo de escisión) tienen la misma multiplicidad y esta es una potencia de p.
5. Sea K/k una extensión algebraica de cuerpos. Un elemento $\alpha \in K$ se dice ***puramente inseparable*** si su polinomio minimal $f(x) \in k[x]$ es una potencia del monomio $x - \alpha$.
   a) Empleando el ejercicio anterior pruebe que si $\alpha \in K$ es puramente inseparable, entonces $\alpha^{p^e} \in k$ para algún $e \geq 1$.
   b) Pruebe que si $a \in k \setminus k^p$, entonces el polinomio $x^{p^e} - a$ es irreducible para $e \in \mathbb{N}$.
   c) Pruebe que
   $$K_{\text{ins}} = \{\alpha \in K : \alpha \text{ es puramente inseparable}\}$$
   es un subcuerpo de K.
6. Para un entero $n \geq 1$, denote por $k^{p^{-n}}$ a la mínima extensión de k en la cual todo elemento tiene raíz p^n-ésima.
   a) Pruebe que $k^{p^{-n}}/k$ es una extensión puramente inseparable (i.e., algebraica y todo elemento suyo es puramente inseparable).
   b) Pruebe que
   $$k^{p^{-\infty}} := \bigcup_{n \geq 1} k^{p^{-n}}$$
   es un cuerpo perfecto.

A. Ejercicios propuestos

1. Pruebe que toda extensión cuadrática es normal.
2. Definamos el *polinomio de Artin-Schreier* $\wp(x) := x^p - x$. Sea $a \in k$ tal que $a \notin \wp[k]$. Pruebe que el polinomio $\wp(x) - a$ es irreducible e inseparable.

Referencias

1. Jacobson, N. *Basic Algebra* 2 vols. (Freeman y Company, 1910).
2. Nagata, M. *Theory of Commutative Fields Translations in Mathematical Monographies* **125** (American Mathematical Society, 1967).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`
URL: `https://josecuevas.xyz/teach/2025-1-ayud/`