Pontificia Universidad Católica de Chile y Universidad de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: José Samper **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra II **Sigla:** MPG3201
Fecha: 13 de agosto de 2025

Extensiones algebraicas

A lo largo de las ayudantías trataré de incluír comentarios o problemas especiales. Los problemas difíciles tendrán ojos asustados ◉◉, los problemas/comentarios que son opcionales u omitibles tendrán ojos hastiados ◓◓ y los problemas/comentarios **importantes** (o sugeridos por el profesor) tendrán ojos interesados ◑◑.

1. General

1. Sea Ω/k una extensión de cuerpos con extensiones intermedias $k \subseteq K, L \subseteq \Omega$. Pruebe que
$$[KL : k] \leq [K : k]\,[L : k],$$
y que se alcanza igualdad cuando $[K : k]$ y $[L : k]$ son coprimos.
2. ◑◑ Sea p un número primo y sean x, y variables indeterminadas sobre $\mathbb{F}_p$. Pruebe que $\mathbb{F}_p(x, y) \supseteq \mathbb{F}_p(x^p, y^p)$ es una extensión de grado p^2 que tiene infinitas subextensiones y, en consecuente, concluya que no es simple o primitiva.
3. ◑◑ Sea $\mathbb{F}_q$ un cuerpo con $q < \infty$ elementos.
   a) Sea $f(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ es irreducible. Pruebe que $f(x) \mid x^{q^n} - x$ syss $\deg f \mid n$.
   b) Sea $\psi(d)$ la cantidad de polinomios irreducibles de grado d en $\mathbb{F}_q[x]$. Pruebe que
   $$n\psi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) q^{n/d},$$
   donde $\mu(d)$ es la *función de Möbius* que vale 0 si $p^2 \mid d$ para algún primo p y vale $(-1)^m$ si $d = p_1 \cdot p_2 \cdots p_m$, donde p_j son primos distintos dos a dos.
   Pista: Para el problema podría necesitar de la fórmula de inversión de Möbius. □

2. Extensiones (in)separables

Como se vio en clases, las extensiones en característica cero son todas separables, por lo que en esta sección k será un cuerpo de $\operatorname{car} k = p > 0$.

4. Sea K/k una extensión algebraica y sea $\alpha \in K$.
   a) Pruebe que si α es inseparable, entonces su polinomio minimal $f(x) \in k[x]$ satisface que $f(x) = g(x^p)$ para todo $g(x) \in k[x]$.
   b) Pruebe que α es separable syss $k(\alpha) = k(\alpha^p)$.
5. Pruebe que si $f(x) \in k[x]$ es irreducible, entonces todas sus raíces (en su cuerpo de escisión) tienen la misma multiplicidad y esta es una potencia de p.

Referencias

1. Lang, S. *Algebra* (Springer-Verlag New York, 2002).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`