Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: Héctor Pastén **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Teoría de Números **Sigla:** MAT2225
Fecha: 15 de septiembre de 2023

Pell y sus amigos

1. La ecuación de Pell

Dado $d > 0$ libre de cuadrados, una ***ecuación de Pell*** es una ecuación diofántica del tipo $x^2 - dy^2 = 1$ y nos interesan soluciones enteras de x, y, donde las soluciones *triviales* son $(x, y) := (\pm 1, 0)$. Un aspecto interesante de la ecuación de Pell es que existe una «operación» para construir más soluciones:

$$(a, b) * (x, y) := (ax - dby, ay + bx). \tag{1}$$

1. Considere la ecuación de Pell negativa dada por
$$\mathcal{P}_-: \quad x^2 - dy^2 = -1.$$
   a) Demuestre que la operación (1) aplicada a dos soluciones de $\mathcal{P}_-$ nos da una solución de la ecuación de Pell usual (con $+1$).
   b) No obstante, esta condición no es muy buena. Encuentre algún d para el cual la ecuación de Pell negativa no posee soluciones.
   c) Más generalmente, nótese que si $u^2 + dv^2 = a$ y $x^2 + dy^2 = b$, entonces
$$(ux - dvy)^2 + d(vx + uy)^2 = ab.$$
   De modo que las ecuaciones de Pell generalizadas $x^2 + dy^2 = b$ pueden o no tener soluciones o tener infinitas.
2. Sea d libre de cubos. Demuestre que la ecuación $x^n - dy^n = 1$ con $n \geq 3$ admite a lo sumo finitas soluciones.
3. La ***ecuación de Markoff*** está dada por
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz, \tag{2}$$
   donde la *solución trivial* es $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Demuestre lo siguiente:
   a) Dada una solución (a, b, c) de (2), entonces $(a, b, 3ab - c)$ es otra solución.
   b) Todas las soluciones positivas no triviales a la ecuación de Markoff están generadas por $(1, 1, 1)$ empleando la regla del inciso anterior.

«Mejor» perspectiva. ¿Por qué la ecuación de Pell tiene una estructura de grupo asociada? Quizá algo que desvele un poco el misterio está en trabajar en $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{x + y\sqrt{d} : x, y \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$. Aquí la ecuación de Pell se revela como que

$$1 = x^2 - dy^2 = (x - y\sqrt{d})(x + y\sqrt{d}) =: \operatorname{Nm}(x + y\sqrt{d}).$$

Nótese que si $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ entonces $\operatorname{Nm}(\alpha\beta) = \operatorname{Nm}(\alpha)\operatorname{Nm}(\beta)$ (esto es el contenido del ejercicio 1.*c*).

4. **Resolver la ecuación de Pell generalizada.** Sea $\omega = u + v\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ tal que $\operatorname{Nm}(\omega) = 1$ (es decir, es una solución de la ecuación de Pell) con $u, v > 0$. Demuestre que toda solución a la ecuación de Pell generalizada $x^2 - dy^2 = n$ es de la forma $(a + b\sqrt{d})\omega^2$ donde
$$|a| \leq \frac{\sqrt{|n|}(\sqrt{\omega} + 1)}{2}, \qquad |b| \leq \frac{\sqrt{|n|}(\sqrt{\omega} + 1)}{2\sqrt{d}}.$$
   a) Para el primer paso defina $L(x + y\sqrt{d}) := (\log|x + y\sqrt{d}|, \log|x - y\sqrt{d}|)$ y verifique que $L(\alpha\beta) = L(\alpha) + L(\beta)$.
   b) Verifique que el conjunto $\{L(\alpha) : \alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]\}$ es cerrado bajo adición y multiplicación por escalares en $\mathbb{Z}$.

c) Si ahora multiplicamos por $\mathbb{R}$, demuestre que el conjunto $\{r\,L(\alpha) : \alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}], r \in \mathbb{R}\}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Más aún, argumente el por qué es $\mathbb{R}^2$ y dé una base.

d) Demuestre que una solución $x^2 - dy^2 = n$ satisface:

$$L(x + y\sqrt{d}) = \frac{\log|n|}{2}(1,1) + c\,L(\omega),$$

para algún $c \in \mathbb{R}$.

e) Empleando el inciso anterior aproxime adecuadamente $L((x + y\sqrt{d})\omega^k)$ (osea elija un k apropiado) para concluir el enunciado.

2. El multiverso de Pell

Aquí incluímos problemas en los que la ecuación de Pell hace una aparición eventual y llamativa.

5. Un ***número triangular*** es aquello de la forma

$$n = 1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Deduzca un método para encontrar *todos* los números triangulares que son cuadrados perfectos.

Pista: Para agilizar calculos, le adelantamos que los dos primeros números triangulares que son cuadrados son 1 y

$$36 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 8 = \frac{8 \cdot 9}{2}. \qquad \square$$

6. Demuestre que existen infinitas ternas de números consecutivos $(a, a+1, a+2)$ tales que cada uno es suma de dos cuadrados. Encuentre alguna terna distinta de $(0, 1, 2)$.

3. Comentarios adicionales

La escritura matemática dedicada al estudio de la ecuación de Pell es bastante rica. Comencemos por un tecnicismo: es probable que el nombre «ecuación de Pell» sea poco acertado pues Pell no aportó mucho a las ecuaciones, y aquellas que sí trató tampoco eran ninguna hazaña; al parecer el nombre fue popularizado por Euler, quien lo confundió al leer el libro de Álgebra de Wallis, quien cita varias veces a Pell. Históricamente los griegos ya conocían casos particulares de la ecuación de Pell, Teón de Esmirna trató la ecuación $x^2 - 2y^2 = 1$ y descubrió su operación en este caso; y Diofanto describió las ecuaciones con $d \in \{26, 30\}$. Luego de ellos, el indio Brahmagupta descubrió en toda su generalidad la operación subyacente y otros matemáticos indios descubrieron el método *chakravala* para encontrar eficientemente soluciones. Finalmente, cabe destacar el aporte de Fermat al demostrar que las ecuaciones de Pell siempre admiten alguna solución no trivial que, aplicando la operación, induce la existencia de infinitas soluciones. Algunos le llaman a la ecuación «de Pell-Fermat», pero tratar de cambiarle el nombre sería como tratar de cambiarle el nombre América porque Vespucio no fue el primer conquistador en llegar.

- ¿Cómo se encuentra eficientemente una solución no trivial de la ecuación de Pell? Inmediatamante notamos que la solución satisface

$$\left(\frac{x}{y} - \sqrt{d}\right)\left(\frac{x}{y} + \sqrt{d}\right) = \frac{x^2}{y^2} - d = \frac{1}{y^2},$$

de modo que $\pm x$ satisface que $\left|\frac{x}{y} - \sqrt{d}\right| \leq \frac{1}{y^2}$. Es decir, una solución de Pell está relacionada con una buena aproximación de $\sqrt{d}$ y, coincidentalmente, la teoría de las fracciones continuas ofrece tales aproximaciones. Para más información revise Granville [**2,** págs. 427-435], §11B.

- La demostración del ejercicio 3 puede mejorarse ligeramente a

$$|a| \leq \frac{\sqrt{|n|}(\sqrt{\omega} + 1/\sqrt{\omega})}{2}, \qquad |b| \leq \frac{\sqrt{|n|}(\sqrt{\omega} + 1/\sqrt{\omega})}{2\sqrt{d}};$$

véase Conrad [**1**].

- El ejercicio 4 es parte de una pregunta diofantina más general: ¿cuándo es un coeficiente binomial un cuadrado? Los casos triviales son $\binom{n}{0} = 1^2$, y $\binom{n^2}{1} = n^2$. Es fácil notar que uno no pierde generalidad estudiando $\binom{n+k}{k}$ con $k \leq n$, en este contexto nosotros estudiamos $\binom{n+2}{2}$. El caso $\binom{n+3}{3}$ induce una curva elíptica tras cambios de coordenadas y uno puede probar que $\binom{n+j}{j}$ con $j \geq 4$ solo admite finitas soluciones.

Referencias y lecturas adicionales

1. Conrad, K. *Pell's equation II* `https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/pelleqn2.pdf`.
2. Granville, A. *Number Theory Revealed. A Masterclass* (American Mathematical Society, 2020).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`