Preparación para el examen

El último tango en París

José Cuevas Barrientos

26 de junio de 2025

Representaciones

Problema

Sea G un grupo finito y sean ρ_1, ρ_2 dos representaciones complejas con caracteres asociados χ_1, χ_2 resp. Recordando que el tensor de dos representaciones da otra representación, pruebe que el caracter de $\rho_1 \otimes \rho_2$ es $\chi(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$.

Solución (producto de caracteres)

En efecto, sea $\rho_1 \colon G \curvearrowright \mathbb{C}^n =: V$ y $\rho_2 \colon G \curvearrowright \mathbb{C}^m =: W$, donde en ambos fijamos las bases $\boldsymbol{e}_i$ y $\boldsymbol{e}'_j$ canónicas (con $1 \le i \le n$ y $1 \le j \le m$). Escribamos la matriz de $\rho_1(g)$ y $\rho_2(g)$ como $[a_{i,j}]_{i,j}^n$ y $[b_{u,v}]_{u,v}^m$ resp.

Solución (producto de caracteres)

En efecto, sea $\rho_1 \colon G \curvearrowright \mathbb{C}^n =: V$ y $\rho_2 \colon G \curvearrowright \mathbb{C}^m =: W$, donde en ambos fijamos las bases $\boldsymbol{e}_i$ y $\boldsymbol{e}'_j$ canónicas (con $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$). Escribamos la matriz de $\rho_1(g)$ y $\rho_2(g)$ como $[a_{i,j}]_{i,j}^n$ y $[b_{u,v}]_{u,v}^m$ resp. Entonces en $V^{\rho_1} \otimes W^{\rho_2}$ tomamos la base ordenada $(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}'_j : 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$, y en ella, la matriz de $\rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$ es $[a_{(i,u)} b_{(j,v)}]_{(i,j),(u,v)}$, por lo que su traza es

Solución (producto de caracteres)

En efecto, sea $\rho_1 \colon G \curvearrowright \mathbb{C}^n =: V$ y $\rho_2 \colon G \curvearrowright \mathbb{C}^m =: W$, donde en ambos fijamos las bases $\boldsymbol{e}_i$ y $\boldsymbol{e}'_j$ canónicas (con $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$). Escribamos la matriz de $\rho_1(g)$ y $\rho_2(g)$ como $[a_{i,j}]^n_{i,j}$ y $[b_{u,v}]^m_{u,v}$ resp. Entonces en $V^{\rho_1} \otimes W^{\rho_2}$ tomamos la base ordenada $(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}'_j : 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$, y en ella, la matriz de $\rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$ es $[a_{(i,u)} b_{(j,v)}]_{(i,j),(u,v)}$, por lo que su traza es

$$\chi(g) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{i,i} b_{j,j} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} b_{j,j} \right) = \chi_1(g) \chi_2(g).$$

Representaciones

Problema

Sea S_n el grupo simétrico en n letras. Defina en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ la ***representación por permutaciones*** dada por $\rho_\sigma(\boldsymbol{v}) = (v_j)_{\sigma(j)}^n$ para una permutación $\sigma \in S_n$.

Representaciones

Problema

Sea S_n el grupo simétrico en n letras. Defina en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ la ***representación por permutaciones*** dada por $\rho_\sigma(\boldsymbol{v}) = (v_j)^n_{\sigma(j)}$ para una permutación $\sigma \in S_n$.

Representaciones

Problema

Sea S_n el grupo simétrico en n letras. Defina en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ la ***representación por permutaciones*** dada por $\rho_\sigma(\boldsymbol{v}) = (v_j)^n_{\sigma(j)}$ para una permutación $\sigma \in S_n$. Pruebe que admite una subrepresentación de dimensión 1 (equivalentemente, vea que hay un vector no nulo $\boldsymbol{v}$ fijo por todo S_n), cuyo complemento ortogonal $\langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp$, llamada ***representación estándar***, es irreducible.

Solución (representación estándar)

En efecto, es fácil notar que el vector $\boldsymbol{v} := (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{C}^n$ está fijo por todo S_n

Solución (representación estándar)

En efecto, es fácil notar que el vector $\boldsymbol{v} := (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{C}^n$ está fijo por todo S_n (alternativamente, el lector podría haber expandido las condiciones para ver que todo vector fijo por S_n debe ser un múltiplo escalar de éste).

Solución (representación estándar)

En efecto, es fácil notar que el vector $\boldsymbol{v} := (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^n$ está fijo por todo S_n (alternativamente, el lector podría haber expandido las condiciones para ver que todo vector fijo por S_n debe ser un múltiplo escalar de éste).
Luego calculamos el producto interno del caracter permutación χ_{perm}, que deviese dar 2. Para ello, note que $\chi_{\mathrm{perm}}(\sigma)^2$ es la traza de la acción de permutación en $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$, así que

Solución (representación estándar)

En efecto, es fácil notar que el vector $\boldsymbol{v} := (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{C}^n$ está fijo por todo S_n (alternativamente, el lector podría haber expandido las condiciones para ver que todo vector fijo por S_n debe ser un múltiplo escalar de éste).
Luego calculamos el producto interno del caracter permutación χ_{perm}, que deviese dar 2. Para ello, note que $\chi_{\mathrm{perm}}(\sigma)^2$ es la traza de la acción de permutación en $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$, así que

$$(\chi_{\mathrm{perm}}, \chi_{\mathrm{perm}}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{a,b}^{n} \delta_{\sigma a, a} \delta_{\sigma b, b},$$

Solución (representación estándar)

En efecto, es fácil notar que el vector $\boldsymbol{v} := (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^n$ está fijo por todo S_n (alternativamente, el lector podría haber expandido las condiciones para ver que todo vector fijo por S_n debe ser un múltiplo escalar de éste).
Luego calculamos el producto interno del caracter permutación χ_{perm}, que deviese dar 2. Para ello, note que $\chi_{\mathrm{perm}}(\sigma)^2$ es la traza de la acción de permutación en $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$, así que

$$(\chi_{\mathrm{perm}}, \chi_{\mathrm{perm}}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{a,b}^{n} \delta_{\sigma a, a} \delta_{\sigma b, b},$$

intercambiamos las sumatorias y notamos que $\delta_{\sigma a, a} \delta_{\sigma b, b} = 1$ syss σ estabiliza al par ordenado (a, b).

Solución (representación estándar)

En efecto, es fácil notar que el vector $\boldsymbol{v} := (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^n$ está fijo por todo S_n (alternativamente, el lector podría haber expandido las condiciones para ver que todo vector fijo por S_n debe ser un múltiplo escalar de éste).
Luego calculamos el producto interno del caracter permutación χ_{perm}, que deviese dar 2. Para ello, note que $\chi_{\mathrm{perm}}(\sigma)^2$ es la traza de la acción de permutación en $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$, así que

$$(\chi_{\mathrm{perm}}, \chi_{\mathrm{perm}}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{a,b}^{n} \delta_{\sigma a, a} \delta_{\sigma b, b},$$

intercambiamos las sumatorias y notamos que $\delta_{\sigma a, a} \delta_{\sigma b, b} = 1$ syss σ estabiliza al par ordenado (a, b). Si $a \neq b$ habrán $(n-2)!$ de esas permutaciones y, sino habrán $(n-1)!$ de ellas, por lo que

Solución (representación estándar)

En efecto, es fácil notar que el vector $\boldsymbol{v} := (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^n$ está fijo por todo S_n (alternativamente, el lector podría haber expandido las condiciones para ver que todo vector fijo por S_n debe ser un múltiplo escalar de éste).
Luego calculamos el producto interno del caracter permutación χ_{perm}, que deviese dar 2. Para ello, note que $\chi_{\mathrm{perm}}(\sigma)^2$ es la traza de la acción de permutación en $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$, así que

$$(\chi_{\mathrm{perm}}, \chi_{\mathrm{perm}}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{a,b}^{n} \delta_{\sigma a, a} \delta_{\sigma b, b},$$

intercambiamos las sumatorias y notamos que $\delta_{\sigma a, a} \delta_{\sigma b, b} = 1$ syss σ estabiliza al par ordenado (a, b). Si $a \neq b$ habrán $(n-2)!$ de esas permutaciones y, sino habrán $(n-1)!$ de ellas, por lo que

$$\begin{aligned}
(\chi_{\mathrm{perm}}, \chi_{\mathrm{perm}}) &= \frac{1}{n!} \left(\sum_{a \neq b}^{n} \mathrm{Stab}(a, b) + \sum_{c=1}^{n} \mathrm{Stab}(c) \right) \\
&= \frac{1}{n!} \big((n-2)! \cdot (n^2 - n) + (n-1)! \cdot n \big) = 2.
\end{aligned}$$

Representaciones

Problema

Calcular la tabla de caracteres de A_4.

Solución: Como hay homomorfismo de grupos $A_4 \hookrightarrow S_4$, toda representación de S_4 se restringe a una de A_4.

Representaciones

Problema

Calcular la tabla de caracteres de A_4.

Solución: Como hay homomorfismo de grupos $A_4 \hookrightarrow S_4$, toda representación de S_4 se restringe a una de A_4.

Representaciones

Problema

Calcular la tabla de caracteres de A_4.

Solución: Como hay homomorfismo de grupos $A_4 \hookrightarrow S_4$, toda representación de S_4 se restringe a una de A_4.
En particular, el caracter ψ de la restricción de la representación estándar es irreducible porque:

Problema

Calcular la tabla de caracteres de A_4.

Solución: Como hay homomorfismo de grupos $A_4 \hookrightarrow S_4$, toda representación de S_4 se restringe a una de A_4.
En particular, el caracter ψ de la restricción de la representación estándar es irreducible porque: a) se verifica que $(\psi, \psi) = 1$ (latero, pero funciona);

Representaciones

Problema

Calcular la tabla de caracteres de A_4.

Solución: Como hay homomorfismo de grupos $A_4 \hookrightarrow S_4$, toda representación de S_4 se restringe a una de A_4.
En particular, el caracter ψ de la restricción de la representación estándar es irreducible porque: a) se verifica que $(\psi, \psi) = 1$ (latero, pero funciona); b) si ψ fuera reducible, habría otro subespacio fijo de dimensión 1, pero la acción por permutación $A_4 \curvearrowright \{1, 2, 3, 4\}$ es transitiva.

Solución (caracteres de A_4)

(I) **Clases de conjugación:** Primero calculamos las clases de A_4 que son las siguientes:

$$\{1\}, \qquad \{x := (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$
$$\{y := (123), (134), (142), (243)\}, \quad \{y^2 = (132), (143), (124), (234)\}$$

Así deducimos que hay cuatro representaciones irreducibles.

Solución (caracteres de A_4)

(I) **Clases de conjugación:** Primero calculamos las clases de A_4 que son las siguientes:

$$\{1\}, \qquad \{x := (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$
$$\{y := (123), (134), (142), (243)\}, \quad \{y^2 = (132), (143), (124), (234)\}$$

Así deducimos que hay cuatro representaciones irreducibles.

(II) Podemos deducir la dimensión de las representaciones restantes por cor. 5.16

$$|A_4| = 12 = \chi_0(1)^2 + \psi(1)^2 + \chi_1(1)^1 + \chi_2(1)^2 = 1 + 9 + \chi_1(1)^1 + \chi_2(1)^2,$$

lo que nos da que hay dos representaciones de dimensión 1.

Solución (caracteres de A_4)

(I) **Clases de conjugación:** Primero calculamos las clases de A_4 que son las siguientes:

$$\{1\}, \qquad \{x := (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$
$$\{y := (123), (134), (142), (243)\}, \quad \{y^2 = (132), (143), (124), (234)\}$$

Así deducimos que hay cuatro representaciones irreducibles.

(II) Podemos deducir la dimensión de las representaciones restantes por cor. 5.16

$$|A_4| = 12 = \chi_0(1)^2 + \psi(1)^2 + \chi_1(1)^1 + \chi_2(1)^2 = 1 + 9 + \chi_1(1)^1 + \chi_2(1)^2,$$

lo que nos da que hay dos representaciones de dimensión 1.

(III) Como $x^2 = 1$, entonces $\chi_j(x) = \pm 1$.

Solución (caracteres de A_4)

(I) **Clases de conjugación:** Primero calculamos las clases de A_4 que son las siguientes:

$$\{1\}, \qquad \{x := (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$
$$\{y := (123), (134), (142), (243)\}, \quad \{y^2 = (132), (143), (124), (234)\}$$

Así deducimos que hay cuatro representaciones irreducibles.

(II) Podemos deducir la dimensión de las representaciones restantes por cor. 5.16

$$|A_4| = 12 = \chi_0(1)^2 + \psi(1)^2 + \chi_1(1)^1 + \chi_2(1)^2 = 1 + 9 + \chi_1(1)^1 + \chi_2(1)^2,$$

lo que nos da que hay dos representaciones de dimensión 1.

(III) Como $x^2 = 1$, entonces $\chi_j(x) = \pm 1$.

Solución (caracteres de A_4)

(I) **Clases de conjugación:** Primero calculamos las clases de A_4 que son las siguientes:

$$\{1\}, \qquad \{x := (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$
$$\{y := (123), (134), (142), (243)\}, \quad \{y^2 = (132), (143), (124), (234)\}$$

Así deducimos que hay cuatro representaciones irreducibles.

(II) Podemos deducir la dimensión de las representaciones restantes por cor. 5.16

$$|A_4| = 12 = \chi_0(1)^2 + \psi(1)^2 + \chi_1(1)^1 + \chi_2(1)^2 = 1 + 9 + \chi_1(1)^1 + \chi_2(1)^2,$$

lo que nos da que hay dos representaciones de dimensión 1.

(III) Como $x^2 = 1$, entonces $\chi_j(x) = \pm 1$. Pero $(12)(34) \cdot (13)(24) = (14)(23)$, así que $\chi_j(x) = 1$.

Solución (caracteres de A_4)

(I) **Clases de conjugación:** Primero calculamos las clases de A_4 que son las siguientes:

$$\{1\}, \qquad \{x := (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$
$$\{y := (123), (134), (142), (243)\}, \quad \{y^2 = (132), (143), (124), (234)\}$$

Así deducimos que hay cuatro representaciones irreducibles.

(II) Podemos deducir la dimensión de las representaciones restantes por cor. 5.16

$$|A_4| = 12 = \chi_0(1)^2 + \psi(1)^2 + \chi_1(1)^1 + \chi_2(1)^2 = 1 + 9 + \chi_1(1)^1 + \chi_2(1)^2,$$

lo que nos da que hay dos representaciones de dimensión 1.

(III) Como $x^2 = 1$, entonces $\chi_j(x) = \pm 1$. Pero $(12)(34) \cdot (13)(24) = (14)(23)$, así que $\chi_j(x) = 1$. Como $y^3 = 1$, entonces $\chi_j(y) = \omega^?$, donde $\omega = \zeta_3$ es la raíz cúbica primitiva de la unidad; como $\chi_j(y) \neq 1$, se completa la tabla:

Solución (caracteres de A_4)

(I) **Clases de conjugación:** Primero calculamos las clases de A_4 que son las siguientes:

$$\{1\}, \qquad \{x := (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$
$$\{y := (123), (134), (142), (243)\}, \quad \{y^2 = (132), (143), (124), (234)\}$$

Así deducimos que hay cuatro representaciones irreducibles.

(II) Podemos deducir la dimensión de las representaciones restantes por cor. 5.16

$$|A_4| = 12 = \chi_0(1)^2 + \psi(1)^2 + \chi_1(1)^1 + \chi_2(1)^2 = 1 + 9 + \chi_1(1)^1 + \chi_2(1)^2,$$

lo que nos da que hay dos representaciones de dimensión 1.

(III) Como $x^2 = 1$, entonces $\chi_j(x) = \pm 1$. Pero $(12)(34) \cdot (13)(24) = (14)(23)$, así que $\chi_j(x) = 1$. Como $y^3 = 1$, entonces $\chi_j(y) = \omega^?$, donde $\omega = \zeta_3$ es la raíz cúbica primitiva de la unidad; como $\chi_j(y) \neq 1$, se completa la tabla:

	1	x	y	y^2
χ_0	1	1	1	1
χ_1	1	1	ω	ω^2
χ_2	1	1	ω^2	ω
ψ	3	-1	0	0

Teoría de Galois

Problema

Determine cuál de los siguientes es el grupo de Galois del cuerpo de escisión (sobre $\mathbb{Q}$) del polinomio $x^5 - x + 1$ (que puede asumir irreducible):

Problema

Determine cuál de los siguientes es el grupo de Galois del cuerpo de escisión (sobre $\mathbb{Q}$) del polinomio $x^5 - x + 1$ (que puede asumir irreducible):

(a) C_5.

Problema

Determine cuál de los siguientes es el grupo de Galois del cuerpo de escisión (sobre $\mathbb{Q}$) del polinomio $x^5 - x + 1$ (que puede asumir irreducible):

(a) C_5.

(b) D_5.

Teoría de Galois

Problema

Determine cuál de los siguientes es el grupo de Galois del cuerpo de escisión (sobre $\mathbb{Q}$) del polinomio $x^5 - x + 1$ (que puede asumir irreducible):

(a) C_5.

(b) D_5.

(c) S_5.

Problema

Determine cuál de los siguientes es el grupo de Galois del cuerpo de escisión (sobre $\mathbb{Q}$) del polinomio $x^5 - x + 1$ (que puede asumir irreducible):

(a) C_5.

(b) D_5.

(c) S_5.

Problema

Determine cuál de los siguientes es el grupo de Galois del cuerpo de escisión (sobre $\mathbb{Q}$) del polinomio $x^5 - x + 1$ (que puede asumir irreducible):

(a) C_5.

(b) D_5.

(c) S_5.

Como pista, emplee el siguiente resultado:

Teorema

El discriminante de un polinomio irreducible f de grado n es un cuadrado syss $\mathrm{Gal}(\mathrm{Split}_{\mathbb{Q}}(f)/\mathbb{Q}) \subseteq A_n$.

Solución 1 (calcular Galois)

Empleamos el resultado y calculamos el discriminante, es decir, el siguiente determinante:

Solución 1 (calcular Galois)

Empleamos el resultado y calculamos el discriminante, es decir, el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución 1 (calcular Galois)

Empleamos el resultado y calculamos el discriminante, es decir, el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(Horror, lo sé.)

Lo cuál da 2869 y vemos que $50^2 = 2500$, por lo que es fácil comprobar que no es un cuadrado perfecto (a ensayo y error, vea que $53^2 = 2809$ y $54^2 = 2916$).

Solución 1 (calcular Galois)

Empleamos el resultado y calculamos el discriminante, es decir, el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(Horror, lo sé.)

Lo cuál da 2869 y vemos que $50^2 = 2500$, por lo que es fácil comprobar que no es un cuadrado perfecto (a ensayo y error, vea que $53^2 = 2809$ y $54^2 = 2916$). Finalmente, note que $D_5 \leq S_5$ mediante $r \mapsto (12345) \in A_5$ y $s \mapsto (25)(34) \in A_5$, así que $D_5 \leq A_5$. Por lo que, el grupo de Galois es el **simétrico** S_5.

Solución 2 (calcular Galois)

Calculamos las raíces reales notando que la derivada es $5x^4 - 1$ la cual tiene raíces $\pm\sqrt[5]{1/5}$.

Solución 2 (calcular Galois)

Calculamos las raíces reales notando que la derivada es $5x^4 - 1$ la cual tiene raíces $\pm\sqrt[5]{1/5}$. Así, hay dos cambios de signo, por lo que hay tres raíces reales y **dos complejas**.

Solución 2 (calcular Galois)

Calculamos las raíces reales notando que la derivada es $5x^4 - 1$ la cual tiene raíces $\pm\sqrt[5]{1/5}$. Así, hay dos cambios de signo, por lo que hay tres raíces reales y **dos complejas**. Finalmente, el grupo de Galois G contiene un 5-ciclo por el teorema de Cauchy, y contiene a una trasposición dada por la conjugación compleja, así que (como 5 es **primo**), tiene que darse que $G \cong S_5$.

Problema

Sea L/K una extensión de Galois con $\mathrm{Gal}(L/K) \cong C_2 \times C_{12}$. ¿Cuántas extensiones intermedias $K \subset F \subset L$ tiene tales que $[F : K] = 4$? ¿Cuántas de estas son de Galois?

Problema

Sea L/K una extensión de Galois con $\mathrm{Gal}(L/K) \cong C_2 \times C_{12}$. ¿Cuántas extensiones intermedias $K \subset F \subset L$ tiene tales que $[F : K] = 4$? ¿Cuántas de estas son de Galois?

Problema

Sea L/K una extensión de Galois con $\mathrm{Gal}(L/K) \cong C_2 \times C_{12}$. ¿Cuántas extensiones intermedias $K \subset F \subset L$ tiene tales que $[F : K] = 4$? ¿Cuántas de estas son de Galois?

Solución: Por conexión de Galois, contar extensiones intermedias de grado 4 es contar subgrupos $H \leq C_2 \times C_{12} =: G$ tales que $[G : H] = 4$.

Teoría de Galois

Problema

Sea L/K una extensión de Galois con $\mathrm{Gal}(L/K) \cong C_2 \times C_{12}$. ¿Cuántas extensiones intermedias $K \subset F \subset L$ tiene tales que $[F : K] = 4$? ¿Cuántas de estas son de Galois?

Solución: Por conexión de Galois, contar extensiones intermedias de grado 4 es contar subgrupos $H \leq C_2 \times C_{12} =: G$ tales que $[G : H] = 4$.
En un producto, un subgrupo **no** es un producto de subgrupos (e.g., el generado por $(1, 1)$ en $C_2 \times C_{12}$).

Teoría de Galois

Problema

Sea L/K una extensión de Galois con $\mathrm{Gal}(L/K) \cong C_2 \times C_{12}$. ¿Cuántas extensiones intermedias $K \subset F \subset L$ tiene tales que $[F : K] = 4$? ¿Cuántas de estas son de Galois?

Solución: Por conexión de Galois, contar extensiones intermedias de grado 4 es contar subgrupos $H \leq C_2 \times C_{12} =: G$ tales que $[G : H] = 4$.
En un producto, un subgrupo **no** es un producto de subgrupos (e.g., el generado por $(1, 1)$ en $C_2 \times C_{12}$). No obstante, sea H como antes, vemos que $|H| = 24/4 = 6$, por lo que H contiene un elemento de orden 3 (teorema de Cauchy).

Problema

Sea L/K una extensión de Galois con $\mathrm{Gal}(L/K) \cong C_2 \times C_{12}$. ¿Cuántas extensiones intermedias $K \subset F \subset L$ tiene tales que $[F : K] = 4$? ¿Cuántas de estas son de Galois?

Solución: Por conexión de Galois, contar extensiones intermedias de grado 4 es contar subgrupos $H \leq C_2 \times C_{12} =: G$ tales que $[G : H] = 4$.
En un producto, un subgrupo **no** es un producto de subgrupos (e.g., el generado por $(1,1)$ en $C_2 \times C_{12}$). No obstante, sea H como antes, vemos que $|H| = 24/4 = 6$, por lo que H contiene un elemento de orden 3 (teorema de Cauchy). Por teorema chino del resto $C_{12} \cong C_4 \times C_3$, con lo que es fácil verificar que los únicos elementos de $C_2 \times C_4 \times C_3$ de orden 3 son $(0, 0, \pm 1)$; así que $H \geq 0 \times 0 \times C_3$. Por correspondencia, podemos bajar a contar $H' \leq C_2 \times C_4$ (mediante la proyección) de índice 4 o, equivalentemente, de orden 2.

Teoría de Galois

Problema

Sea L/K una extensión de Galois con $\mathrm{Gal}(L/K) \cong C_2 \times C_{12}$. ¿Cuántas extensiones intermedias $K \subset F \subset L$ tiene tales que $[F : K] = 4$? ¿Cuántas de estas son de Galois?

Solución: Por conexión de Galois, contar extensiones intermedias de grado 4 es contar subgrupos $H \leq C_2 \times C_{12} =: G$ tales que $[G : H] = 4$.
En un producto, un subgrupo **no** es un producto de subgrupos (e.g., el generado por $(1,1)$ en $C_2 \times C_{12}$). No obstante, sea H como antes, vemos que $|H| = 24/4 = 6$, por lo que H contiene un elemento de orden 3 (teorema de Cauchy). Por teorema chino del resto $C_{12} \cong C_4 \times C_3$, con lo que es fácil verificar que los únicos elementos de $C_2 \times C_4 \times C_3$ de orden 3 son $(0, 0, \pm 1)$; así que $H \geq 0 \times 0 \times C_3$. Por correspondencia, podemos bajar a contar $H' \leq C_2 \times C_4$ (mediante la proyección) de índice 4 o, equivalentemente, de orden 2.
Como H' tiene orden 2, solamente está generado por un elemento de orden 2. Hay tres de ellos: $(1, 0)$, $(0, 2)$ y $(1, 2)$.

Teoría de Galois

Problema

Sea L/K una extensión de Galois con $\mathrm{Gal}(L/K) \cong C_2 \times C_{12}$. ¿Cuántas extensiones intermedias $K \subset F \subset L$ tiene tales que $[F : K] = 4$? ¿Cuántas de estas son de Galois?

Solución: Por conexión de Galois, contar extensiones intermedias de grado 4 es contar subgrupos $H \leq C_2 \times C_{12} =: G$ tales que $[G : H] = 4$.
En un producto, un subgrupo **no** es un producto de subgrupos (e.g., el generado por $(1,1)$ en $C_2 \times C_{12}$). No obstante, sea H como antes, vemos que $|H| = 24/4 = 6$, por lo que H contiene un elemento de orden 3 (teorema de Cauchy). Por teorema chino del resto $C_{12} \cong C_4 \times C_3$, con lo que es fácil verificar que los únicos elementos de $C_2 \times C_4 \times C_3$ de orden 3 son $(0, 0, \pm 1)$; así que $H \geq 0 \times 0 \times C_3$. Por correspondencia, podemos bajar a contar $H' \leq C_2 \times C_4$ (mediante la proyección) de índice 4 o, equivalentemente, de orden 2.
Como H' tiene orden 2, solamente está generado por un elemento de orden 2. Hay tres de ellos: $(1, 0)$, $(0, 2)$ y $(1, 2)$.
Finalmente, todas ellas son extensiones de Galois puesto que todo subgrupo de un grupo abeliano es normal.

Problema

Diremos que un anillo conmutativo A es ***absolutamente plano*** si todo A-módulo es plano.

Álgebra conmutativa

Problema

Diremos que un anillo conmutativo A es ***absolutamente plano*** si todo A-módulo es plano.

1. Pruebe que todo cuerpo es absolutamente plano.

Álgebra conmutativa

Problema

Diremos que un anillo conmutativo A es ***absolutamente plano*** si todo A-módulo es plano.

1. Pruebe que todo cuerpo es absolutamente plano.
2. ¿Será que todo anillo absolutamente plano es un cuerpo?

Álgebra conmutativa

Problema

Diremos que un anillo conmutativo A es ***absolutamente plano*** si todo A-módulo es plano.

1. Pruebe que todo cuerpo es absolutamente plano.
2. ¿Será que todo anillo absolutamente plano es un cuerpo?

Álgebra conmutativa

Problema

Diremos que un anillo conmutativo A es ***absolutamente plano*** si todo A-módulo es plano.

1. Pruebe que todo cuerpo es absolutamente plano.
2. ¿Será que todo anillo absolutamente plano es un cuerpo? PISTA: considere el caso de anillos *booleanos* (i.e., donde $x^2 = x$ para todo $x \in A$).
3. ¿Será que todo anillo *local* absolutamente plano es un cuerpo?

Solución (anillos absolutamente planos)

1. En efecto, sobre un cuerpo todo módulo (= espacio vectorial) es **libre** (i.e., posee base), y sabemos que todo módulo libre es plano.

Solución (anillos absolutamente planos)

1. En efecto, sobre un cuerpo todo módulo (= espacio vectorial) es **libre** (i.e., posee base), y sabemos que todo módulo libre es plano.
2. No. En particular, podemos tomar un producto de cuerpos.

Solución (anillos absolutamente planos)

1. En efecto, sobre un cuerpo todo módulo (= espacio vectorial) es **libre** (i.e., posee base), y sabemos que todo módulo libre es plano.
2. No. En particular, podemos tomar un producto de cuerpos.

Solución (anillos absolutamente planos)

1. En efecto, sobre un cuerpo todo módulo (= espacio vectorial) es **libre** (i.e., posee base), y sabemos que todo módulo libre es plano.

2. No. En particular, podemos tomar un producto de cuerpos. Por ejemplo, podemos considerar el anillo booleano $\prod_{s \in S} \mathbb{F}_2$ (donde S es un conjunto cualquiera).

Solución (anillos absolutamente planos)

1. En efecto, sobre un cuerpo todo módulo (= espacio vectorial) es **libre** (i.e., posee base), y sabemos que todo módulo libre es plano.

2. No. En particular, podemos tomar un producto de cuerpos. Por ejemplo, podemos considerar el anillo booleano $\prod_{s \in S} \mathbb{F}_2$ (donde S es un conjunto cualquiera).
Para ver que cualquier anillo booleano A es *absolutamente plano*, note que un A-módulo M es plano syss cada $M_\mathfrak{p}$ es plano sobre $A_\mathfrak{p}$, donde $\mathfrak{p}$ recorre los ideales primos (ver ayudantía).

Solución (anillos absolutamente planos)

1. En efecto, sobre un cuerpo todo módulo (= espacio vectorial) es **libre** (i.e., posee base), y sabemos que todo módulo libre es plano.

2. No. En particular, podemos tomar un producto de cuerpos. Por ejemplo, podemos considerar el anillo booleano $\prod_{s\in S}\mathbb{F}_2$ (donde S es un conjunto cualquiera).
Para ver que cualquier anillo booleano A es *absolutamente plano*, note que un A-módulo M es plano syss cada $M_\mathfrak{p}$ es plano sobre $A_\mathfrak{p}$, donde $\mathfrak{p}$ recorre los ideales primos (ver ayudantía).
Ahora bien, $A_\mathfrak{p}$ también es booleano y es local. Por la interrogación, un anillo local solo tiene por idempotentes al 0 y al 1, por lo que, $A_\mathfrak{p} = \{0,1\} = \mathbb{F}_2$ es un cuerpo. Así, $M_\mathfrak{p}$ debe ser plano y M también.

Solución (anillos absolutamente planos)

3. Sea $x \in A$ arbitrario. El A-módulo $A/(x)$ es plano y, por tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(x) \otimes_A A \arrow[r, two heads, "1\otimes\pi"] \arrow[d, hook] & (x) \otimes_A A/(x) = (x)/(x^2) \arrow[d, hook, "\alpha"] \\
A \arrow[r, two heads] & A/(x)
\end{tikzcd}$$

Solución (anillos absolutamente planos)

3. Sea $x \in A$ arbitrario. El A-módulo $A/(x)$ es plano y, por tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(x) \otimes_A A \arrow[r, two heads, "1\otimes\pi"] \arrow[d, hook] & (x) \otimes_A A/(x) = (x)/(x^2) \arrow[d, hook, "\alpha"] \\
A \arrow[r, two heads] & A/(x)
\end{tikzcd}$$

Como la composición es cero y α es inyectivo, por planitud, $1 \otimes \pi = 0$, por lo que $(x) = (x^2)$.

Solución (anillos absolutamente planos)

3. Sea $x \in A$ arbitrario. El A-módulo $A/(x)$ es plano y, por tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(x) \otimes_A A \arrow[r, two heads, "1\otimes\pi"] \arrow[d, hook] & (x) \otimes_A A/(x) = (x)/(x^2) \arrow[d, hook, "\alpha"] \\
A \arrow[r, two heads] & A/(x)
\end{tikzcd}$$

Como la composición es cero y α es inyectivo, por planitud, $1 \otimes \pi = 0$, por lo que $(x) = (x^2)$.
Así, $x = ax^2$ y $e := ax$ es idempotente, pues $e^2 = a \cdot ax^2 = ax = e$.

Solución (anillos absolutamente planos)

3. Sea $x \in A$ arbitrario. El A-módulo $A/(x)$ es plano y, por tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
(x) \otimes_A A \arrow[r, two heads, "1\otimes\pi"] \arrow[d, hook] & (x) \otimes_A A/(x) = (x)/(x^2) \arrow[d, hook, "\alpha"] \\
A \arrow[r, two heads] & A/(x)
\end{tikzcd}
$$

Como la composición es cero y α es inyectivo, por planitud, $1 \otimes \pi = 0$, por lo que $(x) = (x^2)$.
Así, $x = ax^2$ y $e := ax$ es idempotente, pues $e^2 = a \cdot ax^2 = ax = e$. Pero un anillo local solo tiene por idempotentes al 0 y al 1, por lo que x es nulo o una unidad.