Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Profesor: Héctor Pastén Vásquez **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra abstracta II **Sigla:** MAT2244
Fecha: 15 de mayo de 2025

Localizaciones y anillos noetherianos

Preliminares

Sea A un anillo (conmutativo). Un ***A-módulo*** M es un grupo abeliano aditivo $(M,+)$ con un «producto escalar» $\cdot\colon A\times M\to M$ tales que para todo $a,b\in A$ y $m,n\in M$ se cumple:

1. $1\cdot m=m$.
2. $a\cdot(b\cdot m)=(ab)\cdot m$.
3. $a\cdot(m+n)=a\cdot m+a\cdot n$.
4. $(a+b)\cdot m=a\cdot m+b\cdot m$.

Se sigue que $0\cdot m=0\in M$ (recuerde que M es aditivo así que tiene un «0»).

Dado un par de A-módulos M,N, una función $\varphi\colon M\to N$ se dice un ***homomorfismo de A-módulos*** si es un homomorfismo de grupos aditivos $(M,+)\to(N,+)$ y respeta producto escalar:

$$\forall a\in A,\ m\in M,\qquad \varphi(am)=a\varphi(m).$$

Dado un conjunto multiplicativo $S\subseteq A$ y un A-módulo M podemos construir el $S^{-1}A$-módulo $S^{-1}M$ cuyos elementos son pares (m,s) con $m\in M$ y $s\in S$ bajo la equivalencia

$$m/s=m'/s'\iff \exists t\in S\quad t(s'm-sm)=0\in M.$$

Con las sumas y producto escalar:

$$\frac{m}{s}+\frac{n}{t}:=\frac{tm+sn}{st},\qquad \frac{a}{t}\cdot\frac{m}{s}:=\frac{am}{ts}.$$

Dado un ideal primo $\mathfrak{p}\lhd A$, considere $S:=A\setminus\mathfrak{p}$ el cual es un conjunto multiplicativo (¿por qué?), denotaremos por $A_\mathfrak{p}:=S^{-1}A$ a la localización.

1. Propiedades «locales»

1. (Examen de lucidez) Sea A un anillo.
   a) Pruebe que, dado un primo $\mathfrak{p}\lhd A$, el anillo $A_\mathfrak{p}$ es local y que su único ideal maximal es
   $$\mathfrak{p}_\mathfrak{p}=\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}=\left\{\frac{p}{q}:p\in\mathfrak{p},q\notin\mathfrak{p}\right\}.$$
   b) Si A es dominio íntegro, describa la localización $A_{(0)}$.
2. (Funtorialidad de localización) Sea $\varphi\colon M\to N$ un homomorfismo de A-módulos.
   a) Pruebe que la función $M\to S^{-1}M$ dada por $m\mapsto m/1$ es un homomorfismo de A-módulos.
   b) Pruebe que la función $S^{-1}\varphi\colon S^{-1}M\to S^{-1}N$ dada por $m/s\mapsto\varphi(m)/s$ es un homomorfismo de $S^{-1}A$-módulos.
3. Sea A un anillo y M un A-módulo. Pruebe que son equivalentes:
   a) $M=0$.
   b) $M_\mathfrak{p}=0$ para todo $\mathfrak{p}\lhd A$ primo.
   c) $M_\mathfrak{m}=0$ para todo $\mathfrak{m}\lhd A$ maximal.
4. Sea $\varphi\colon M\to N$ un homomorfismo de A-módulos. Pruebe que son equivalentes:
   a) φ es inyectiva.
   b) $\varphi_\mathfrak{p}$ es inyectiva para todo $\mathfrak{p}\lhd A$ primo.
   c) $\varphi_\mathfrak{m}$ es inyectiva para todo $\mathfrak{m}\lhd A$ maximal.

5. Un anillo A se dice ***reducido*** si su nilradical $\mathfrak{N}(A) = 0$. Pruebe que A es reducido syss cada localización $A_\mathfrak{p}$ (donde $\mathfrak{p} \lhd A$ recorre los ideales primos) es reducida.

Problema: ¿Es cierto que A es un dominio íntegro syss cada localización $A_\mathfrak{p}$ es un dominio íntegro?

2. Anillos noetherianos

6. Sea A un anillo noetheriano. Pruebe que toda A-álgebra finitamente generada es también noetheriana.
7. Sea A un anillo noetheriano. Pruebe que existe un entero $n \geq 1$ tal que la potencia del nilradical $\mathfrak{N}^n = 0$.

Problema: Dé un contraejemplo de un nilradical cuyas potencias jamás son el ideal nulo.

A. Ejercicios propuestos

1. Sea A un anillo y $\mathfrak{p} \lhd A$ un ideal primo. Pruebe que $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ es isomorfo al cuerpo de fracciones $\operatorname{Frac}(A/\mathfrak{p})$.
2. Sea A un anillo y $\mathfrak{p} \lhd A$ un ideal primo.
   a) Describa $\operatorname{Spec} A_\mathfrak{p}$ en términos de $\operatorname{Spec} A$.
   b) ¿Qué sucede con $\operatorname{Spec} A_\mathfrak{p}$ cuándo $\mathfrak{p}$ es maximal?

   Pista: Para este ejercicio podría resultar conveniente recordar que, al localizar con $S = \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ para $f \in A$, se cumple que
   $$\operatorname{Spec}(S^{-1}A) = \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \cap S = \varnothing\} \subseteq \operatorname{Spec} A. \qquad \square$$
3. Un espacio topológico X se dice *noetheriano* si toda cadena descendente de cerrados
   $$F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots,$$
   se estabiliza, es decir, existe n para el cual $F_n = F_{n+1} = \cdots$
   a) Pruebe que si A es anillo noetheriano, entonces $\operatorname{Spec} A$ es un espacio noetheriano.
   b) Dé un ejemplo de un anillo no noetheriano A cuyo espectro $\operatorname{Spec} A$ sí es noetheriano.

B. Comentarios adicionales

El ejercicio 4 puede mejorarse a que φ es sobreyectivo (resp. isomorfismo) syss cada localización en maximales lo es. La razón de no incluirlo aquí fue que emplea la noción del conúcleo $\operatorname{coker} \varphi := N/\operatorname{Img} \varphi$ que exige un poco más de familiaridad con módulos; los lectores estás invitados a hacer el intento del ejercicio.

Referencias

1. Atiyah, M. F. y MacDonald, I. G. *Introduction to Commutative Algebra* (Addison-Wesley, 1969).
2. Jacobson, N. *Basic Algebra* 2 vols. (Freeman y Company, 1910).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`
URL: `https://josecuevas.xyz/teach/2025-1-ayud/`