Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: Ricardo Menares
Ayudante: José Cuevas Barrientos
Curso: Teoría de Números
Sigla: MAT2814
Fecha: 17 de octubre de 2025

Función dseta

1. Ejercicios

Para esta ayudantía convendrá recordar hechos conocidos de la función Γ, *como su ecuación funcional* $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ *y que* $\Gamma(n+1) = n!$.

1. Pruebe que los residuos de la función Γ en $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ son

$$\operatorname*{Res}_{z=-n} \Gamma(z) := \lim_{w \to -n} (w+n)\Gamma(w) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

2. Sean $u, c > 0$ números reales y $k \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ un número natural.
   a) Pruebe que

$$\frac{u^{-z}\Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)} = \frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)}.$$

   b) Concluya que, si $u \leq 1$, para un radio real $R > k$ se cumple que

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z|=R} \frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)} \, \mathrm{d}z = \frac{(1-u)^k}{k!}.$$

   Pista: Conviene emplear la fórmula de residuos de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z|=R} f(z) \, \mathrm{d}z = \sum_{|a|<R} \operatorname{Res}(f; a). \qquad \square$$

   c) Pruebe que, si $R > 2k$, entonces

$$\left| \frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)} \right| \leq \frac{u^{-c}}{R(R/2)^k}$$

   para todo z con $|z| = R$ y con $\operatorname{Re} z \geq c$ (resp. $\operatorname{Re} z < c$) si $u > 1$ (resp. $u \leq 1$).
   d) Concluya que

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\infty \mathrm{i}}^{c+\infty \mathrm{i}} \frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)} \, \mathrm{d}z = \begin{cases} \dfrac{(1-u)^k}{k!}, & 0 < u \leq 1, \\ 0, & u > 1. \end{cases}$$

   Pista: Emplee el hecho de que conoce que el lado derecho son los residuos de la función y descomponga el contorno en una parte rectilínea como el dominio que quiere integrar, y otra parte en donde la integral converge a 0 cuando $R \to \infty$. Ojo que cuando $u > 1$ conviene tomar una región que evite a los polos en $0, -1, \dots, -k$. $\square$

3. Sea $s \in \mathbb{C}$.
   a) Pruebe que, para $\operatorname{Re} s > 0$, se tiene

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} - s \int_N^\infty \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} \, \mathrm{d}x + \frac{N^{1-s}}{s-1}.$$

   Pista: Para $\operatorname{Re} s > 1$ se sigue de despejar la integral separándola en los intervalos $[N, N+1]$. Luego argumente por qué la fórmula sigue siendo válida para $\operatorname{Re} s > 0$. $\square$

b) Pruebe que, para $\operatorname{Re} s > 0$, se tiene que

$$\zeta'(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\log n}{n^s} + s\int_N^\infty \frac{(x-\lfloor x\rfloor)\log x)}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x - \int_N^\infty \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x - \frac{N^{1-s}\log N}{s-1} - \frac{N^{1-s}}{(s-1)^2}.$$

c) Pruebe que para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Im} s =: t \geq e$ y todo $A > 0$, existe una constante $M := M(A) > 0$ tal que

$$|\zeta(s)| \leq M \log t, \qquad |\zeta'(s)| \leq M \log^2 t,$$

para todo s con

$$\operatorname{Re} s > \text{máx}\left\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{A}{\log t}\right\}.$$

Pista: Será conveniente tomar $N = \lfloor t \rfloor$ en las fórmulas previas. $\square$

4. Sea $s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s > 0$.

a) Pruebe que tenemos la fórmula

$$\Gamma(s/2)n^{-s}\pi^{-s/2} = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}e^{-n^2\pi x}\,\mathrm{d}x.$$

b) Defina

$$\omega(x) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}, \qquad \theta(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x}.$$

Pruebe que $2\omega(x) = \theta(x) - 1$ y que

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}s\right)\zeta(s) = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}\omega(x)\,\mathrm{d}x.$$

Referencias

1. Apostol, T. M. *Introduction to analytic number theory* (Springer-Verlag, 1976).
2. Davenport, H. *Multiplicative number theory* (Springer-Verlag, 1982).

2. Soluciones

1. Basta proceder por inducción, donde el caso base viene de que
$$\lim_{z\to 0} z\Gamma(z) = \lim_{z\to 0}\Gamma(z+1) = 1.$$
Así, en general
$$\begin{aligned}\lim_{z\to -n-1}(z+n+1)\Gamma(z) &= \lim_{z\to -n-1}\frac{z+n+1}{z}\Gamma(z+1)\\ &= \lim_{w\to -n}(w+n)\Gamma(w)\frac{1}{w-1} = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{(-n-1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$
2. a) Basta notar que
$$\Gamma(z+k+1) = (z+k)\Gamma(z+k) = (z+k)(z+k-1)\cdots z\Gamma(z),$$
y luego despejar.

   b) El teorema de residuos de Cauchy dice que a la derecha aparecen los residuos de f que suceden necesariamente en los polos. La función
$$\frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)}$$
solo tiene polos en $z\in\{0,-1,\dots,-k\}$ y, por el inciso anterior, tenemos luego que
$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=R}\frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)}\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{k}\operatorname*{Res}_{z=-n}\frac{u^{-z}\Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)},$$
pero $u^{-z}/\Gamma(k+1-n)$ no tienen polo en $z\to -n$, así que una álgebra de límites dice que tenemos
$$\begin{aligned}&= \sum_{n=0}^{k}\frac{u^n}{\Gamma(k+1-n)}\operatorname*{Res}_{z=-n}\Gamma(z),\\ &= \sum_{n=0}^{k}\frac{u^n}{(k-n)!}\frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}(-u)^n = \frac{(1-u)^k}{k!}.\end{aligned}$$

   c) Basta notar que $|u^z| = u^{\operatorname{Re} z}|e^{\log(u)\operatorname{Im}(z)\mathrm{i}}| = u^{\operatorname{Re} z}$ y que $x\mapsto(1/u)^x$ es creciente si $u<1$ y decreciente si $u>1$; de modo que $|u^{-z}|\le u^{-c}$ si $u>1$ (resp. $u\le 1$) y $\operatorname{Re} z\ge c$ (resp. $\operatorname{Re} z\le c$).
Ahora bien, como $|z|=R$, tenemos que
$$|z+n|\ge|z|-n = R-n > R-k > R-\frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R.$$
Esto prueba que
$$\left|\frac{1}{z(z+1)\cdots(z+k)}\right|\le\frac{1}{R(R/2)^k},$$
y lo juntamos con la cota anterior.

   d) Siguiendo la pista, cuando $u\le 1$ podemos considerar los dos caminos dados por la fig. 1. La unión de ambos tiene los residuos que ya calculamos y cuando $R\to\infty$, el camino β se acerca a la vertical $c+\mathbb{R}\mathrm{i}$, de modo que
$$\lim_{R\to\infty}\int_{\beta(R)}\frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)}\,\mathrm{d}z = \int_{c-\infty\mathrm{i}}^{c+\infty\mathrm{i}}\frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)}\,\mathrm{d}z.$$

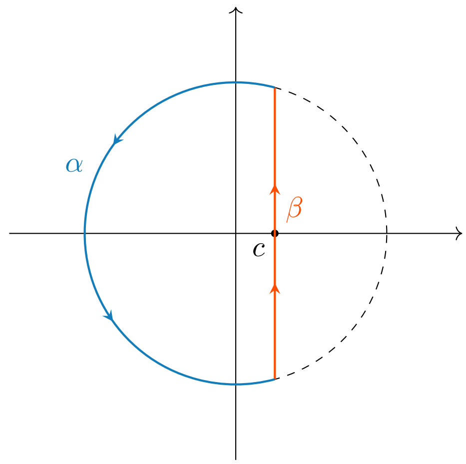

Figura 1

Así, basta ver que $\lim_{R\to\infty} \int_{\alpha(R)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Para ello, empleamos las cotas del inciso anterior

$$\left| \int_{\alpha(R)} \frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)}\,\mathrm{d}z \right| \leq \int_{\alpha(R)} \frac{u^{-c}}{R(R/2)^k}\,\mathrm{d}z \leq (2\pi R)\frac{u^{-c}}{R(R/2)^k} \ll R^{-k} \to 0.$$

En cambio, si $u > 1$, escogemos los caminos dados por la fig. 2 y vemos que exactamente el mismo análisis aplica.

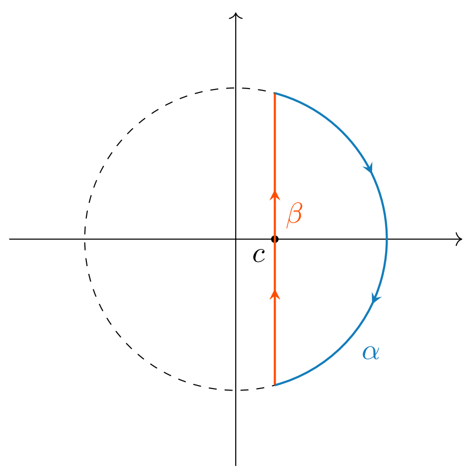

Figura 2

3. *a*) Como señala la pista, basta evaluar

$$\begin{aligned}\int_N^{N+1} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x &= \int_N^{N+1} x^{-s} - Nx^{-s-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(1-s)}((N+1)^{1-s} - N^{1-s}) + \frac{N}{s}((N+1)^{-s} - N^{-s}) \\ &= N^{1-s}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) + (N+1)^{1-s}\left(\frac{N}{(N+1)s} - \frac{1}{s-1}\right),\end{aligned}$$

de modo que

$$-s\int_N^{N+1} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{N^{1-s}}{1-s} - \frac{(N+1)^{1-s}}{1-s} + (N+1)^{-s}.$$

Así
$$\sum_{n=1}^{N} n^{-s} - s\int_N^{N+1} \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x + \frac{N^{1-s}}{s-1} = \sum_{n=1}^{N+1} n^{-s} + \frac{(N+1)^{1-s}}{s-1},$$
y por inducción obtenemos la fórmula
$$\sum_{n=1}^{N} n^{-s} - s\int_N^{N+k} \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x + \frac{N^{1-s}}{s-1} = \sum_{n=1}^{N+k} n^{-s} + \frac{(N+k)^{1-s}}{s-1},$$
y con $k \to \infty$ se alcanza igualdad para $\operatorname{Re} s > 1$.
Basta notar que la fórmula obtenida determina una función analítica para $\operatorname{Re} s > 0$, de modo que la igualdad sigue siendo válida debido a la unicidad de la continuación analítica de una función.

b) Basta tomar la fórmula anterior y derivarla, recordando que
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_N^{\infty} \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x = -\int_N^{\infty} \frac{(x-\lfloor x\rfloor)\log x}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x.$$

c) Para s con $\sigma := \operatorname{Re} s \geq 2$, vemos que
$$|\zeta(s)| \leq \zeta(2), \qquad |\zeta'(s)| \leq |\zeta'(2)|.$$
Así, suponemos que $|\sigma| < 2$ y, como $t > 2$, tenemos
$$|s| \leq \sigma + t \leq 2 + t \leq 2t, \qquad |s-1| \geq t.$$
Luego, aplicando la fórmula del inciso anterior, tenemos
$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n=1}^{N} n^{-\sigma} + 2t\int_N^{\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}}\,\mathrm{d}x + \frac{N^{1-\sigma}}{t} \leq \sum_{n=1}^{N} n^{-\sigma} + \frac{2t}{\sigma N^{\sigma}} + \frac{N^{1-\sigma}}{t}.$$
Finalmente,
$$\frac{1}{n^{\sigma}} = \frac{n^{1-\sigma}}{n} = \frac{1}{n}e^{(1-\sigma)\log n} = \frac{1}{n}e^{A\log n/\log t} \ll_A \frac{1}{n}.$$
Hacemos ahora la elección de $N = \lfloor t\rfloor$ y obtenemos
$$|\zeta(s)| \ll \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} + \frac{t}{N\sigma} + \frac{N}{t} \ll \log t + \frac{1}{\sigma} + 1 \ll \log t,$$
pues $\sigma \geq 1/2$.
Similarmente con ζ' el mismo procedimiento nos dice que el único término importante será la serie del inicio.

4. *a*) Basta notar que tenemos la siguiente expresión para Γ cuando $\operatorname{Re} s > 0$:
$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
(Esta fórmula es bien conocida. Si desea probar que coincide con la que dimos en la ayudantía pasada puede aplicar directamente el criterio de Wielandt, empleando que la ecuación funcional se sigue de integración por partes:
$$\Gamma(s+1) = \int_0^{\infty} t^s e^{-t}\,\mathrm{d}t = \big[-t^s e^{-t}\big]_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^{\infty} s t^{s-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = s\Gamma(s).)$$
Luego aplicamos el cambio de variables $t = n^2\pi x$ con $\mathrm{d}t = n^2\pi\,\mathrm{d}x$ y evaluamos en $s/2$:
$$\Gamma(s/2) = \int_0^{\infty} \pi^{\frac{1}{2}s} n^s x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2\pi x}\,\mathrm{d}x.$$

b) En efecto, que $\theta(x) = 1 + 2\omega(x)$ se sigue de que $(-n)^2 = n^2$ y que $1 = e^0$. La igualdad ahora es inmediata de sumar las anteriores

$$\pi^{-s/2}\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi^{-s/2}\Gamma(\tfrac{1}{2}s)n^{-s} = \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}s-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} \right) \mathrm{d}x.$$

Como es costumbre, el intercambio suma-integral es una aplicación directa del teorema de Tonelli.

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`
URL: `https://josecuevas.xyz/teach/2025-2-num/`