Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: Ricardo Menares | **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Teoría de Números | **Sigla:** MAT2814
Fecha: 3 de octubre de 2025

Funciones L y series de Dirichlet

1. Ejercicios

1. *a*) Muestre que $L(\mu^2, s) = \zeta(s)/\zeta(2s)$.
   Pista: Escriba $\zeta(2s) = L(f, s)$ para alguna función artimética f. $\square$
   b) Concluya que $\mu^2(n) = \sum_{d^2 \mid n} \mu(d)$.
   c) Pruebe que
   $$\sum_{n \le x} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2} x + O(\sqrt{x}).$$
2. Sea $L(f, s) := \sum_{n=1}^{\infty} f(n)/n^s$ una serie de Dirichlet y suponga que $f(1) \neq 0$ y que $L(f, s) \neq 0$ para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s > \sigma_0$. Entonces $L(f, s) = e^{G(s)}$, donde
   $$G(s) = \log f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f' * f^{-1})(n)/\log n}{n^s},$$
   donde $f'(n) = f(n)\log(n)$ y donde f^{-1} denota la inversa respecto a convolución (i.e., $(f * f^{-1})(n) = \delta_{1,n}$).
3. Considere la función dseta de Dirichlet
   $$\zeta_{\mathbb{Q}(\mathrm{i})}(s) = \sum_{\mathfrak{a} \neq 0} \frac{1}{\mathbf{N}(\mathfrak{a})^s},$$
   donde $\mathfrak{a}$ recorre los ideales de los enteros gaussianos $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ y donde $\mathbf{N}(\mathfrak{a}) = |\mathbb{Z}[i]/\mathfrak{a}|$.
   a) Pruebe que si $\mathfrak{a} = \beta\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, entonces $\mathbf{N}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Nm}_{\mathbb{Q}(\mathrm{i})/\mathbb{Q}}(\beta) = |\beta|^2$.
   b) Pruebe que tenemos la siguiente expansión como producto infinito
   $$\zeta_{\mathbb{Q}(\mathrm{i})}(s) = \frac{1}{1 - 2^{-s}} \cdot \prod_{p \equiv 1 \pmod 4} \frac{1}{(1 - p^{-s})^2} \cdot \prod_{p \equiv 3 \pmod 4} \frac{1}{1 - p^{-2s}}.$$
   c) Pruebe que la serie que define a $\zeta_{\mathbb{Q}(\mathrm{i})}$ converge para $\operatorname{Re} s > 1$.
   d) Pruebe que $\operatorname{Res}_{s=1} \zeta_{\mathbb{Q}(\mathrm{i})} := \lim_{s \to 1^+} \zeta_{\mathbb{Q}(\mathrm{i})}(s)/(s-1) = \pi$.
   Pista: Para ello, necesitará recordar la siguiente asintótica que vimos en la ayudantía «Funciones multiplicativas» del 4 de septiembre:
   $$\sum_{n \le x} r(n) = \pi x + O(\sqrt{x}),$$
   donde $r(n)$ cuenta las formas de escribir a n como suma de cuadrados. $\square$
4. **Contar puntos de altura acotada en $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$:** Recuerde que un punto racional en la recta proyectiva es un par $[x : y]$, donde $x, y \in \mathbb{Q}$, no son ambos nulos y $[x : y] = [z : w]$ syss $x = \lambda z$ e $y = \lambda w$ para algún $\lambda \in \mathbb{Q}^\times$. La *altura* se define como $H([x : y]) = \max\{|x|, |y|\}$, donde x, y son enteros coprimos.
   Dado $B \ge 0$ real, demuestre que la cantidad de puntos $[x : y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ de altura acotada $H([x : y]) \le B$ es
   $$\frac{12}{\pi^2} B^2 + O(B \log B).$$

Pista: Considere los puntos en $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ de «altura» $\leq B$ (i.e., $H(x,y) := \max\{|x|,|y|\} \leq B$) y ahora considere los puntos de coordenadas *coprimas* de altura $\leq B$. Mediante inversión de Möbius obtenga una fórmula para el segundo y relaciónelo con el problema del enunciado. $\square$

A. Comentarios adicionales

El ejercicio 3 es un caso particular de la función dseta de Dirichlet que se define parecido, como suma formal con ideales en un anillo $\mathcal{O}$ de enteros algebraicos. En primer lugar, empleamos ideales para evitar repetición, similar a como en $\mathbb{Z}$ sumamos a $|n|^s = n^s$ y no a $|-n|^s = n^s$. La segunda razón está en que si bien los elementos de $\mathcal{O}$ no satisfacen factorización única (por lo que no habría análogo del producto de Euler), los ideales sí la satisfacen y, por tanto, la función dseta de Dirichlet siempre tiene un producto de Euler que ahora recorre ideales primos.

El residuo en $s = 1$ es de sumo interés para teoristas de números ya que involucra varios invariantes del anillo $\mathcal{O}$; con ello también quiero decir que el «π» no es casualidad. Vid. Lang [**3,** pág. 259] para más detalles.

El ejercicio 4 fue inspirado en el **teorema de Schanuel** que da fórmulas explícitas para el conteo de puntos racionales de altura acotada en $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$; el lector puede leer más al respecto en [**2**]**.**

Referencias y lecturas adicionales

1. Apostol, T. M. *Introduction to analytic number theory* (Springer-Verlag, 1976).
2. Hindry, M. y Silverman, J. H. *Diophantine Geometry. An Introduction Graduate Texts in Mathematics* **201** (Springer-Verlag, 2000).
3. Lang, S. *Algebraic Number Theory* (Addison-Wesley, 1970).

Correo electrónico: josecuevasbtos@uc.cl
URL: https://josecuevas.xyz/teach/2025-2-num/