Pontificia Universidad Católica de Chile y Universidad de Chile
Facultad de Matemáticas

Profesor: José Samper | **Ayudante:** José Cuevas Barrientos
Curso: Álgebra II | **Sigla:** MPG3201
Fecha: 1 de octubre de 2025

Caracteres

1. Ejercicios

A lo largo de esta ayudantía, siempre consideraremos a $\mathbb{C}$ como cuerpo de coeficientes.

1. Calcule la tabla de caracteres simples del grupo de cuaterniones
$$Q_8 = \langle i, j, k : i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ijk = -1 \rangle.$$
2. Calcule la tabla de caracteres simples de A_4.
3. Recuerde que el grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$ siempre admite la *representación por permutación* $\rho \curvearrowright \mathbb{C}^n$ dada por $\sigma \cdot (v_1, \dots, v_n) = (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$. Esta fija al vector $(1, \dots, 1)$ que genera la subrepresentación trivial, el complemento de ella es la ***representación estándar*** cuyo caracter es
$$\chi_{\mathrm{st}}(\sigma) = \chi_{\mathrm{perm}}(\sigma) - \chi_0(\sigma) = \chi_{\mathrm{perm}}(\sigma) - 1.$$
Pruebe que la representación estándar es siempre simple.
Pista: Ingénieselas para convertir el problema en contar dimensión del subespacio fijo de la acción por doble permutación $S_n \curvearrowright \mathbb{C}^{n^2}$ dada por $\sigma \cdot (v_{i,j})_{i,j=1}^n := (v_{\sigma(i),\sigma(j)})_{i,j}$. □
4. Sea G un grupo finito.
   a) Si $C_1, \dots, C_h$ son las clases de conjugación de G, pruebe que los elementos
$$c_j := \sum_{g \in C_j} [g] \in \mathbb{C}[G],$$
forman una $\mathbb{C}$-base para el centro[1] $Z(\mathbb{C}[G])$.
   b) Sea χ un caracter simple de G de grado $n := \chi(1)$, y sea $g \in C_j \subseteq G$. Pruebe que $|C_j| \frac{1}{n} \chi(g)$ es un entero algebraico (i.e., es raíz de un polinomio mónico con coeficientes en $\mathbb{Z}$).
   Pista: Para ello, note que la representación ρ que induce a χ satisface que $\rho(c_j) = b_j \,\mathrm{Id}$ y pruebe que b_j es el valor propio de una matriz a coeficientes enteros. □
   c) Pruebe que el grado de toda representación simple divide al orden de G.
   Pista: Para esto podría necesitar que los enteros algebraicos son cerrados bajo suma y productos, y que los enteros algebraicos de $\mathbb{Q}$ son exactamente los enteros $\mathbb{Z}$. □
5. Sea $H \le G$ un subgrupo de un grupo finito y sea χ el caracter de una representación $\rho\colon H \curvearrowright V$. Recuerde de la ayudantía anterior (ej. 2c) que asociado a V^ρ tenemos la representación inducida $\mathrm{Ind}_H^G(\rho)$ cuyo caracter denotaremos $\mathrm{Ind}_H^G(\chi)$. Pruebe que tenemos la siguiente fórmula para todo $g \in G$:
$$\mathrm{Ind}_H^G(\chi)(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{t \in G \\ tgt^{-1} \in H}} \chi(t^{-1} g t).$$

A. Comentarios adicionales breves

Parte del objetivo del primer ejercicio está en que tras calcular la tabla de caracteres de Q_8 el lector puede observar que coincide con la del grupo diedral D_8, de modo que dos grupos no isomorfos pueden tener la misma tabla de caracteres. Esto es interesante porque la tabla de caracteres determina completamente a un grupo abeliano finito, por ejemplo; esto es un buen ejercicio para el lector.

[1] Relativo al producto, obvio.

Así mismo, hay una serie de observaciones adicionales que el lector podría hacer tras calcular la tabla de un grupo. Por ejemplo, para Q_8 la representación simple de grado 2 es inducida del subgrupo normal $\langle i \rangle$; para A_4 todas las representaciones simples son restricciones, o bien de un cociente, o bien de S_4. Esto ejemplifica la utilidad de tener criterios sencillos para la irreducibilidad de caracteres inducidos, para lo cual recomendamos al lector leer sobre el criterio de Mackey en **[2],** §7.4.

El ejercicio 4 lo extraje de **[1].** Dicha referencia incluye después de ello una serie de aplicaciones de la teoría de caracteres a preguntas exclusivamente de grupos finitos, como el famoso teorema de Burnside de la resolubilidad de grupos de orden $p^a q^b$. Por un largo tiempo se desconocieron pruebas con exclusivamente lenguaje de grupos de dicho teorema; además de la prueba con representaciones, hay otra que emplea cohomología de grupos.

Referencias

1. Huppert, B. *Finite Groups I* (Springer Nature Switzerland, 2025).
2. Serre, J.-P. *Linear Representations of Finite Groups* (Springer-Verlag, 1977).

Correo electrónico: `josecuevasbtos@uc.cl`
URL: `https://josecuevas.xyz/teach/2025-2-alg/`