AB1 REAVALIAÇÃO

MARIA JÚLIA DE OLIVEIRA VIEIRA

1. Usando o Teorema mestre para resolver a recorrência: $T(n) = 4T(n/2) + n^2$, mostramos que T(n) = Θ(n^2). Mostre que a prova através do método da substituição falha se assumirmos que T(n) <= cn^2. Em seguida mostre como subtrair um elemento de menor ordem para tornar a prova por substituição correta.

Resposta

Hipótese: $T(n) \leq cn^2$

Provar que é verdade para n:

$$T(n) = 4T(n/2) + n^2$$

$$T(n) \leq 4c(n/2)^2 + n^2$$

$$T(n) \leq cn^2 + n^2$$

$$T(n) \leq n^2 (c + 1)$$

Mas $c + 1 \geq 0 \Rightarrow c \geq -1$ o que gera um impasse.

Podemos transformar a hipótese em $T(n) \leq cn^2 - n$ então temos

$$T(n) = 4T(n/2) + n^2$$

$$T(n) \leq 4[c(n/2)^2 - n/2] + n^2$$

$$T(n) \leq cn^2 - 2n + n$$

$$T(n) \leq cn^2 - n$$

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

2. Use uma árvore de recursão para determinar bons limites assintóticos superiores para as recorrências abaixo. Em seguida utilize o método da substituição para verificar sua resposta.:

a) T(n) = 3T(n/2) + n

Resposta

Avaliar como funciona a recursão, somando os seus custos, para chegar a um limite assintótico. Altura da árvore é menor ou igual a $logn$ e tem $2^{lg\ n}$, no caso $3^{lg\ 2}$.

$$T(n) = 3T(n/2) + n$$

$$T(n) = \Theta(n^{lg3}) + \sum_{i=0}^{lgn-1} n(3/2)^i$$

$$T(n) = \Theta(n^{lg3}) + n\,[(\,(3/2)^{lgn} - 1) / (3/2) - 1)\,]$$

$$T(n) = \Theta(n^{lg3}) + n\Theta(n^{log3-1})$$

$$T(n) = \Theta(n^{lg3})$$

Provando pela regra da substituição, para $T(n) \leq cn^{lg3} + 2n$ temos que:

$$T(n) = 3T(n/2) + n$$

$$T(n) \leq 3[c(n/2)^{lg3} + 2n/2] + n$$

$$T(n) \leq 3[c(n/2)^{lg3} + 2n/2] + n$$

$$T(n) \leq c(n/2)^{lg3} + 2n$$

b) T(n) = 4T(n/2 + 2) + n

Resposta

Altura da árvore é menor ou igual a $logn$ e cada nível aumenta $2^k n + 2^{1-k}$, no caso $4^{lg\ n} = n^2$, o que nos dá $\Theta(n^2)$.

Erro

$$T(n) = \Theta(n^2) + \sum_{i=0}^{lgn-1} 2^i n + \sum_{i=0}^{lgn-1} 2^{1-i}$$

$$T(n) = \Theta(n^2) + [(2^{lgn} - 1) / (2 - 1)] + 2 \sum_{i=0}^{lgn-1} (1/2)^i$$

$$T(n) = \Theta(n^2) + (n - 1) + 2(1 / (1 - (1/2))$$

$$T(n) = \Theta(n^2) + n + 3$$

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

Chutando $T(n) \le cn^2 + 2n$, pelo método da substituição temos :

$$T(n) = 3T(n/2) + n$$

$$T(n) \le 4c(n/2)^2 + 2n/2 + n$$

$$T(n) \le cn^2 + 2n$$

$$T(n) \le cn^2 + 2n$$

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

c) T(n) = T(n-1) + T(n/2) + n

Resposta

A árvore se comporta de um jeito que não sei, então pela sua apresentação suponho que ela está entre $O(2^n)$ e $\Omega(n^2)$.

Chutando que $T(n) \le c2^n - 4n$

$$T(n) \le c2^{n-1} - 4(n-1) + c2^{n/2} - 4(n/2) + n$$

$$T(n) \le c(2^{n-1} + 2^{n/2}) - 5n + 1$$ (como n > ¼)

$T(n) \leq c(2^{n-1} + 2^{n-1}) - 4n$ (como n > 2)

Erro

Chutando que $T(n) \geq cn^2$

$T(n) \geq c(n-1)^2 + c(n/2)^2 + n$

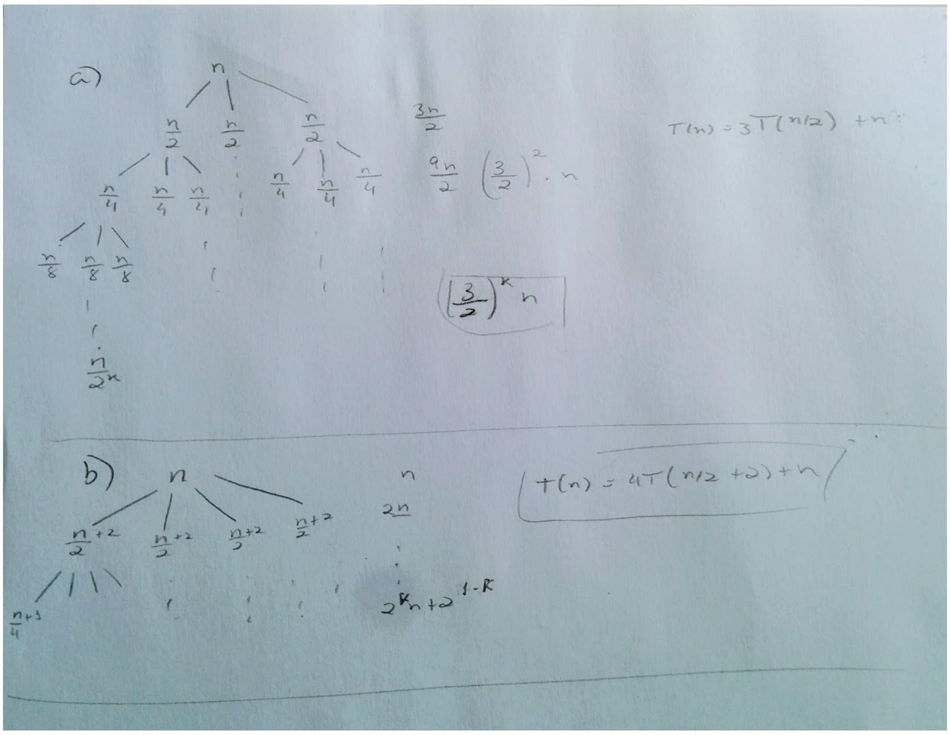
$T(n) \geq c(n-1)^2 + c(n/2)^2 + n$

$T(n) \geq cn^2 - 2cn + 1 + cn^2/4 + n$

$T(n) \geq c5n^2/4 + (1-2c)n + 1$

$T(n) \geq cn^2 + (1-2c)n + 1 \Rightarrow T(n) \geq cn^2$ (como c < ½)

ÁRVORES QUESTÃO 2a) 2b)



3. Use o teorema mestre para encontrar bons limites assintóticos superiores para as recorrências abaixo:

a) T(n) = 2T(n/4) + 1

Resposta

Seja T(n) = aT(n/b) + f(n) onde a = 2, b = 4 e f(n) = 1.

$n^{log_4^2} = n^{1/2}$

Temos que f(n) = O(1).

Portanto,

f(n) = O(1) = O($n^{1/2 - \varepsilon}$), se $\varepsilon = 1/2$

O($n^{1/2 - \varepsilon}$) = O(n^0) = 1

Caímos no caso 1 do Teorema Mestre, resultando em $T(n) = \Theta(n^{1/2})$

b) T(n) = 2T(n/4) + raiz(n)

Resposta

Seja T(n) = aT(n/b) + f(n) onde $a = 2,\ b = 4\ e\ f(n) = \sqrt{n}$.

$n^{log_4^2} = n^{1/2} = f(n)$

Portanto, caímos no caso 2 do Teorema Mestre, resultando em $T(n) = \Theta(\sqrt{n}\ logn)$

c) T(n) = 2T(n/4) + n

Resposta

Seja T(n) = aT(n/b) + f(n) onde $a = 2,\ b = 4\ e\ f(n) = n$.

$n^{log_4^2} = n^{1/2}$

Comparando $n^{1/2}$ com $f(n)$ observamos que $f(n)$ está por cima, portanto, caímos no caso 3 do Teorema Mestre:

$\Omega(n^{1/2 - \varepsilon}) = f(n)$, para $\varepsilon = 1/2$

$af(n/b) = cf(n)$, para $c < 1$

$\Rightarrow 2n/4 = cn$

$\Rightarrow (1/2)n = (1/2)n$ c = ½ < 1

Resultando em $T(n) = \Theta(n)$

d) T(n) = 2T(n/4) + n 2

Resposta

Seja T(n) = aT(n/b) + f(n) onde $a = 2,\ b = 4\ e\ f(n) = n^2$.

$n^{log_4^2} = n^{1/2}$

Comparando $n^{1/2}$ com $f(n)$ observamos que $f(n)$ está por cima, portanto, caímos no caso 3 do Teorema Mestre:

$\Omega(n^{1/2 - \varepsilon}) = f(n)$, $\varepsilon > 0$, para $\varepsilon = 3/2$

$\Omega(n^2) = f(n)$

$af(n/b) = cf(n)$, para $c < 1$

$\Rightarrow 2(n/4)^2 = cn^2$

$\Rightarrow (2/16)n = (1/16)n$, para c = $1/6$ < 1

Resultando em $T(n) = \Theta(n^2)$