数值分析第一次作业

1.
    1. 为便于算法在计算机上实现，必须将一个数学问题分解为**有限次**的**四则**运算.
    2. 在数值计算中为避免损失有效数字，尽量避免两个**相近的**数作减法运算；为避免误差的扩大，也尽量避免分母的绝对值**远小于**分子的绝对值.
    3. 误差有四大来源，数值分析主要处理其中的**截断误差**和**舍入误差**.
    4. 有效数字越多，相对误差越**小**.
2. 正方形的面积$f(x) = x^2$，则传播误差为

    $$\varepsilon(f(x)) = f'(x)\varepsilon(x) = 2x\varepsilon(x)$$

    若使$\varepsilon(f(x)) \le 1$，则有

    $$2 \times 100 \times \varepsilon(x) \le 1$$

    得

    $$\varepsilon(x) \le 0.005$$

    即对正方形边长的测量误差不能超过0.005厘米.

6. 设x为跑道的测量值，y为运动员的成绩，v为运动员的速度，跑道的测量误差为

    $$\varepsilon(x) = 0.001x$$

    则运动员成绩的绝对误差为

    $$\varepsilon(y) = \varepsilon(\frac{x}{v}) = \frac{1}{v}\varepsilon(x) = 0.001\frac{x}{v} = 0.001 \times 60 = 0.06s$$

    运动员成绩的绝对误差为

    $$\varepsilon_r(y) = \frac{0.06}{60} = 0.1\%$$

7. 由常识知，$4 < \sqrt{20} < 5$，设x有n位有效数字，则x的相对误差限

    $$\varepsilon_r \le \frac{1}{2 \cdot 4} \times 10^{-n+1} < 0.1\%$$

    解得

    $$n > 3.10$$

    取整得x至少拥有4位小数.

8. 由于直径$d = 3.7$有两位有效数字，故其绝对误差限为

    $$\varepsilon(d) = 0.5 \times 10^{-2+1} = 0.05$$

    则体积的绝对误差限为

    $$\varepsilon(V) = \frac{1}{6} \times 3 \times \pi d^2 \times 0.05 = 1.1$$

    相对误差限为

$$\varepsilon_r(V)=\frac{\varepsilon(V)}{V}=\frac{\frac{1}{6}\times 3\pi d^2\times 0.05}{\frac{1}{6}\pi d^3}=4.1\%$$

9.

1. $$y=\frac{1}{1+2x}-\frac{1-x}{1+x}(|x|\ll 1)$$
$$y=\frac{(1+x)-(1-x)(1+2x)}{(1+2x)(1+x)}=\frac{2x^2}{(1+2x)(1+x)}$$
2. $$y=\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}(x\gg 1)$$
$$y=\frac{\frac{x^2+1}{x}-\frac{x^2-1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}+\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}}=\frac{2}{x(\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}+\sqrt{\frac{x^2-1}{x}})}$$
3. $$y=\frac{1-cos2x}{x}(|x|\ll 1)$$
$$y=\frac{1-cos^2x+sin^2x}{x}=\frac{2sin^2x}{x}$$
4. $$sin(x+\varepsilon)-sinx=2cos(\frac{2x+\varepsilon}{2})sin\frac{\varepsilon}{2}$$

10. (1) 由$\Delta\approx 55.96427$得方程的两个根$x_1=0.01786, x_2=55.98$，若x_1和x_2均有四位有效数字，设Δ有n位有效数字，则存在下列等式

$$\varepsilon(x_1)=\frac{1}{2}\varepsilon(\Delta)$$
$$\varepsilon(x_2)=\frac{1}{2}\varepsilon(\Delta)$$

由定义知

$$\varepsilon(x_1)=\varepsilon_r(x_1)\cdot x_1$$
$$\varepsilon(x_2)=\varepsilon_r(x_2)\cdot x_2$$
$$\varepsilon(\Delta)=\varepsilon_r(\Delta)\cdot\Delta$$

对于有n位有效数字的Δ，有

$$\varepsilon_r(\Delta)=\frac{1}{2\times 5}\times 10^{-n+1}=10^{-n}$$

为使x_1和x_2有四位有效数字，则其相对误差分别为

$$\varepsilon_r(x_1)=\frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_r(x_2)=10^{-4}$$

整理得

$$10^{-n}\geq\frac{2\varepsilon(x_1)\cdot x_1}{\Delta}$$

$$10^{-n}\geq\frac{2\varepsilon(x_2)\cdot x_2}{\Delta}$$

解以上两个不等式，得$n_1\geq 6.5$和$n_2\geq 3.7$，故Δ至少要取7位有效数字.

(2) 若利用 Vieta theorem， 由$x_1 = \frac{1}{x_2}$，故仅需取4位有效数字算出x_2后取倒数即可算出x_1.