数值分析第一次作业

1.

- 1. 为便于算法在计算机上实现,必须将一个数学问题分解为**有限次**的**四则**运算.
- 2. 在数值计算中为避免损失有效数字,尽量避免两个**相近的**数作减法运算;为避免误差的扩大,也尽量避免分母的绝对值**远小于**分子的绝对值.
- 3. 误差有四大来源,数值分析主要处理其中的**截断误差**和**舍入误差**.
- 4. 有效数字越多,相对误差越小.
- 2. 正方形的面积 $f(x) = x^2$,则传播误差为

$$\varepsilon(f(x)) = f'(x)\varepsilon(x) = 2x\varepsilon(x)$$

若使 $\varepsilon(f(x)) \leq 1$,则有

$$2 \times 100 \times \varepsilon(x) \leq 1$$

得

$$\varepsilon(x) \leq 0.005$$

即对正方形边长的测量误差不能超过0.005厘米.

6. 设x为跑道的测量值,y为运动员的成绩,v为运动员的速度,跑道的测量误差为

$$\varepsilon(x) = 0.001x$$

则运动员成绩的绝对误差为

$$\varepsilon(y) = \varepsilon(\frac{x}{v}) = \frac{1}{v}\varepsilon(x) = 0.001\frac{x}{v} = 0.001 \times 60 = 0.06s$$

运动员成绩的绝对误差为

$$\varepsilon_r(y) = \frac{0.06}{60} = 0.1\%$$

7. 由常识知, $4 < \sqrt{20} < 5$,设x有n位有效数字,则x的相对误差限

$$arepsilon_r \leq rac{1}{2\cdot 4} imes 10^{-n+1} < 0.1\%$$

解得

取整得x至少拥有4位小数.

8. 由于直径d=3.7有两位有效数字,故其绝对误差限为

$$\varepsilon(d) = 0.5 \times 10^{-2+1} = 0.05$$

则体积的绝对误差限为

$$arepsilon(V) = rac{1}{6} imes 3 imes \pi d^2 imes 0.05 = 1.1$$

相对误差限为

$$arepsilon_r(V) = rac{arepsilon(V)}{V} = rac{rac{1}{6} imes 3\pi d^2 imes 0.05}{rac{1}{6}\pi d^3} = 4.1\%$$

9.

1.
$$y = \frac{1}{1+2x} - \frac{1-x}{1+x} (|x| \ll 1)$$

$$y = \frac{(1+x) - (1-x)(1+2x)}{(1+2x)(1+x)} = \frac{2x^2}{(1+2x)(1+x)}$$
2.
$$y = \sqrt{x+\frac{1}{x}} - \sqrt{x-\frac{1}{x}} (x \gg 1)$$

$$y = \frac{\frac{x^2+1}{x} - \frac{x^2-1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x}} + \sqrt{\frac{x^2-1}{x}}} = \frac{2}{x(\sqrt{\frac{x^2+1}{x}} + \sqrt{\frac{x^2-1}{x}})}$$
3.
$$y = \frac{1-\cos 2x}{x} (|x| \ll 1)$$

$$y = \frac{1-\cos^2 x + \sin^2 x}{x} = \frac{2\sin^2 x}{x}$$
4.
$$\sin(x+\varepsilon) - \sin x = 2\cos(\frac{2x+\varepsilon}{2})\sin\frac{\varepsilon}{2}$$

10. (1) 由 $\Delta \approx 55.96427$ 得方程的两个根 $x_1 = 0.01786, x_2 = 55.98$,若 x_1 和 x_2 均有四位有效数字,设 Δ 有 x_2 0位有效数字,则存在下列等式

$$arepsilon(x_1) = rac{1}{2}arepsilon(\Delta)$$
 $arepsilon(x_2) = rac{1}{2}arepsilon(\Delta)$

由定义知

$$arepsilon(x_1) = arepsilon_r(x_1) \cdot x_1 \ arepsilon(x_2) = arepsilon_r(x_2) \cdot x_2 \ arepsilon(\Delta) = arepsilon_r(\Delta) \cdot \Delta$$

对于有n位有效数字的 Δ ,有

$$arepsilon_r(\Delta) = rac{1}{2 imes 5} imes 10^{-n+1} = 10^{-n}$$

为使 x_1 和 x_2 有四位有效数字,则其相对误差分别为

$$arepsilon_r(x_1) = rac{1}{2} imes 10^{-3} \ arepsilon_r(x_2) = 10^{-4}$$

整理得

$$egin{aligned} 10^{-n} &\geq rac{2arepsilon(x_1)\cdot x_1}{\Delta} \ & \ 10^{-n} &\geq rac{2arepsilon(x_2)\cdot x_2}{\Delta} \end{aligned}$$

解以上两个不等式,得 $n_1 \geq 6.5$ 和 $n_2 \geq 3.7$,故 Δ 至少要取7位有效数字.

(2) 若利用 Vieta theorem, 由 $x_1=rac{1}{x_2}$,故仅需取4位有效数字算出 x_2 后取倒数即可算出 x_1 .