MATEMATIKA

MAMZD19C0T01

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

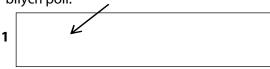
- Didaktický test obsahuje 26 úloh.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- Povolené pomůcky: psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi pište do záznamového archu.
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–15) tvoří úlohy otevřené.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 16–26) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je právě jedna odpověď správná.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku se neudělují záporné body.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte modře nebo černě píšící propisovací tužkou, která píše dostatečně silně a nepřerušovaně.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

• Výsledky **pište čitelně** do vyznačených bílých polí.



- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapište správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

 Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



 Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvěte původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



 Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

Z je množina všech celých čísel, A = (-2; 3).

Určete všechny prvky množiny $A \cap Z$.

Řešení: $A \cap Z = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$

1 bod

2 Vypočtěte 50 % z čísla 2^{1 000}.

Výsledek vyjádřete rovněž ve tvaru mocniny.

Řešení: $2^{1000}: 2 = 2^{999}$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

Vlak má tři vagony, všechny se stejným počtem míst. V každém vagonu je o 20 míst k stání více než k sezení.

Při odjezdu z Roztok byl vlak zaplněn přesně do poloviny své kapacity.

V prvním a posledním vagonu byla všechna místa k sezení obsazená, ale ve druhém vagonu zůstalo 25 % míst k sezení volných.

(Kapacita vlaku je součet počtu všech míst k stání a sezení. Každý cestující obsadil buď jedno místo k stání, nebo jedno místo k sezení.)

(CZVV)

max. 2 body

3 Počet **míst k sezení** v jednom vagonu označme n.

Vyjádřete v závislosti na veličině n počet všech cestujících, kteří při odjezdu z Roztok

3.1 byli ve vlaku;

Řešení:

Počet míst k stání v každém vagonu je n + 20.

Cestující zaplnili polovinu kapacity vlaku, tj. $(3n + 3 \cdot (n + 20)) : 2 = 3n + 30$.

3.2 ve vlaku stáli.

Řešení:

Počet cestujících ve vlaku byl 3n + 30.

Počet sedících byl n + 0.75n + n = 2.75n.

Počet stojících byl 3n + 30 - 2,75n = 0,25n + 30.

4 **Pro** $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 0; 3\}$ **zjednodušte:**

$$\frac{1+\frac{3}{a}}{\frac{a^2}{3}-3}=$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení:

$$\frac{1 + \frac{3}{a}}{\frac{a^2}{3} - 3} = \frac{\frac{a+3}{a}}{\frac{a^2 - 9}{3}} = \frac{a+3}{a} \cdot \frac{3}{(a+3)(a-3)} = \frac{3}{a^2 - 3a}$$

max. 2 body

5 V oboru R řešte rovnici:

$$\frac{2x+8}{4x^2-8x} - \frac{5}{2x} = \frac{1}{x}$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

$$\frac{2x+8}{4x^2-8x} - \frac{5}{2x} = \frac{1}{x} \quad | \cdot 4x(x-2) \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{0; 2\}$$

$$2x+8-10(x-2) = 4(x-2)$$

$$2x+8-10x+20 = 4x-8$$

$$36 = 12x$$

$$x = 3, \quad K = \{3\}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 6

Na zámek přišly pouze dvě třetiny všech účastníků zájezdu, ale na prohlídku zámku čtyři z těchto příchozích nešli. Prohlídky zámku se tak zúčastnila jen polovina všech účastníků zájezdu.

(CZVV)

1 bod

6 Určete počet všech účastníků zájezdu.

Řešení:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$
 ... 4 účastníci, $\frac{6}{6}$... **24 účastníků**

max. 2 body

7 Kvadratická funkce má předpis $y = 2x^2 - 3x$. Její graf protíná přímka p ve dvou různých bodech $P[p_1; 9]$ a $Q[q_1; 9]$.

Vypočtěte souřadnice p_1 , q_1 bodů P, Q.

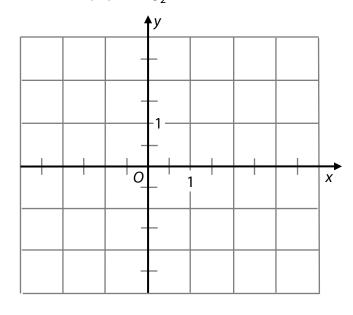
$$2x^{2} - 3x = 9$$

$$2x^{2} - 3x - 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 9}{4} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

$$p_{1} = 3, q_{1} = -1,5$$

Je dána funkce $f: y = \log_2 x$.



(CZVV)

max. 3 body

8

8.1 Dopočtěte souřadnici a_2 bodu A[4; a_2] grafu funkce f.

Řešení: $a_2 = \log_2 4 = 2$

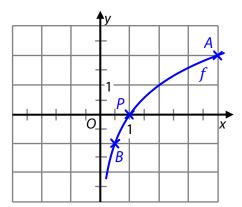
8.2 Dopočtěte souřadnici b_1 bodu $B[b_1; -1]$ grafu funkce f.

Řešení:

$$\log_2 b_1 = -1$$
$$b_1 = 2^{-1} = \mathbf{0.5}$$

8.3 Sestrojte graf funkce f s přesně vyznačenými body A, B a průsečíkem P grafu funkce f se souřadnicovou osou x.

V záznamovém archu obtáhněte vše propisovací tužkou.

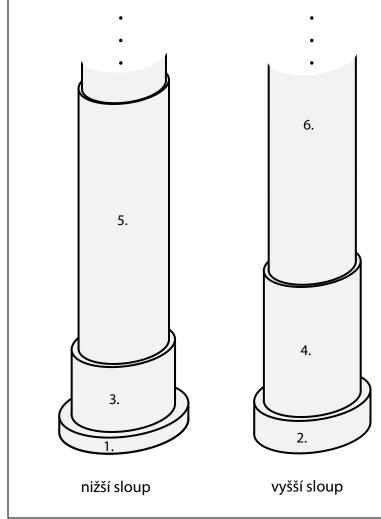


V Kocourkově navrhli nereálný plán stavby dvou sloupů sahajících do nebe.

Na stavbu se má použít celkem 20 válců. Jednotlivé válce jsou podle výšky označeny pořadovými čísly od 1 do 20.

Nejnižší je 1. válec s výškou 1 m, 2. válec má výšku 2 m a rovněž každý další válec je <u>dvakrát vyšší</u> než válec s pořadovým číslem o 1 nižším. (Tedy 3. válec má výšku 4 m, 4. válec 8 m atd.)

Nižší sloup bude postaven ze všech válců označených lichými pořadovými čísly od 1 do 19, vyšší sloup ze všech válců označených sudými pořadovými čísly od 2 do 20.



(CZVV)

max. 2 body

9 Určete v metrech

9.1 výšku 20. válce;

Řešení:

$$a_1 = 1 \text{ m}, q = 2, n = 20$$

 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
 $a_{20} = 1 \text{ m} \cdot 2^{20-1} =$ **524 288 m**

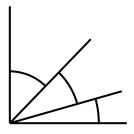
9.2 výšku nižšího sloupu.

$$a_1 = 1 \text{ m}, q = 4, n = 10$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s_{10} = 1 \text{ m} \cdot \frac{4^{10} - 1}{4 - 1} = 349 525 \text{ m}$$

Pravý úhel je rozdělen na tři úhly, jejichž velikosti tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Nejmenší z těchto tří úhlů má velikost 11°.



(CZVV)

1 bod

10 Určete ve stupních velikost největšího z těchto tří úhlů.

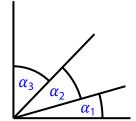
Řešení:

$$\alpha_1 = 11^{\circ}$$

$$s_3 = \frac{3}{2} \cdot (\alpha_1 + \alpha_3)$$

$$90^{\circ} = 1.5 \cdot (11^{\circ} + \alpha_3)$$

$$\alpha_3 = 49^{\circ}$$



1 bod

11 Pro dva různé úhly $\alpha = 112^{\circ}$, $\beta \in (0^{\circ}; 360^{\circ})$ platí $\cos \alpha = \cos \beta$.

Určete ve stupních velikost úhlu β .

Řešení:

Pro každé
$$x \in \langle 0^{\circ}; 360^{\circ} \rangle$$
 platí: $\cos x = \cos(360^{\circ} - x)$. $\beta = 360^{\circ} - \alpha$ $\beta = 360^{\circ} - 112^{\circ} = 248^{\circ}$

1 bod

12 V oboru R řešte rovnici:

$$\frac{25^x}{5} = 5 \cdot 5^{x-2}$$

$$5^{2x-1} = 5^{1+x-2}$$

$$2x - 1 = x - 1$$
$$x = \mathbf{0}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

Trojmístný kód obsahuje vždy písmeno A a dvě **různé** číslice z deseti možných (0–9). Vyhovují např. kódy A36, 0A1, 69A.

(CZVV)

1 bod

13 Určete počet všech možných kódů vyhovujících zadání.

Řešení: $3 \cdot 10 \cdot 9 = 270$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Během prvních 5 dnů se vyrobilo denně v průměru o čtvrtinu výrobků méně, než se vyrobilo v každém z 10 následujících dnů. Celkem se tak za 15 dnů vyrobilo 2 200 výrobků.

(CZVV)

max. 3 body

14 Užitím <u>rovnice nebo soustavy rovnic</u> **určete celkový počet výrobků vyrobených za prvních 5 dnů**.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení** (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení:

Počet výrobků za prvních 5 dnů je x.

Počet výrobků za druhých 5 dnů je y.

$$x = \frac{3}{4}y \Rightarrow y = \frac{4}{3}x$$

$$x + 2y = 2200$$

$$x + 2 \cdot \frac{4}{3}x = 2200$$

$$11x = 6600$$

$$x = 600$$

Za prvních 5 dnů se vyrobilo 600 výrobků.

15 Rotační válec, jehož výška je rovna průměru podstavy, má objem 1 litr.

Vypočtěte v cm výšku tohoto válce.

Výsledek zaokrouhlete na desetiny cm.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

$$v = d, V = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

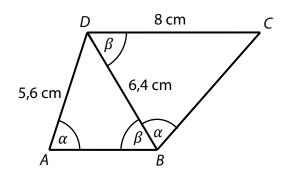
$$V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot v = \frac{\pi v^3}{4}$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4000}{\pi}} \text{ cm}$$

$$v = 10.8 \text{ cm}$$

Lichoběžník ABCD je rozdělen úhlopříčkou na dva podobné trojúhelníky ABD a BDC. V trojúhelnících jsou vyznačeny dvě dvojice shodných úhlů α , β .

Platí: |AD| = 5.6 cm, |BD| = 6.4 cm, |CD| = 8 cm.



(CZVV)

max. 2 body

16 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

161	AB		וחאו	_	IRDI		
1 () . 1	-1/2DI	•	いひしつし		リカレノ	•	レル

16.2 Obvod trojúhelníku BCD je 1,25krát větší než obvod trojúhelníku ABD.

16.3 |AB| = 5,12 cm

16.4 |BC| = 7 cm

16.1
$$\triangle ABD \sim \triangle BDC \Rightarrow |AB| : |BD| = |BD| : |CD|$$

16.2
$$|CD|: |BD| = 8: 6,4 = 1,25;$$
 $o_{BCD} = 1,25o_{ABD}$

16.3
$$|AB| = \frac{|BD|^2}{|CD|} = \frac{6.4^2}{8} \text{ cm} = 5.12 \text{ cm}$$

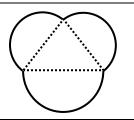
16.3
$$|AB| = \frac{|BD|^2}{|CD|} = \frac{6,4^2}{8} \text{ cm} = 5,12 \text{ cm}$$

16.4 $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|AD|}{|BD|}, \quad |BC| = \frac{|CD| \cdot |AD|}{|BD|} = \frac{8 \cdot 5,6}{6,4} \text{ cm} = 7 \text{ cm}$

Obrazec je ohraničen třemi půlkružnicemi.

Společné krajní body půlkružnic tvoří vrcholy rovnoramenného trojúhelníku se základnou délky 12 cm.

Obsah tohoto trojúhelníku je 48 cm².



(CZVV)

2 body

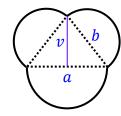
17 Jaký je obvod obrazce ohraničeného třemi půlkružnicemi?

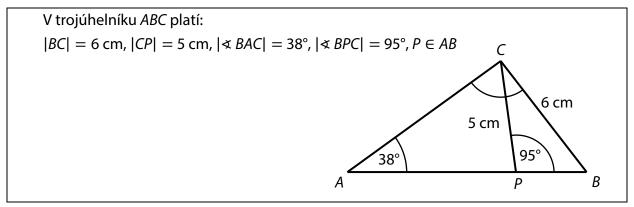
Výsledek je zaokrouhlen na celé cm.

- A) menší než 35 cm
- B) 36 cm
- C) 39 cm
- (D)) 50 cm
 - E) větší než 51 cm

$$a = 12 \text{ cm}, S = 48 \text{ cm}^2$$

 $S = \frac{av}{2}, \quad v = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 48}{12} \text{ cm} = 8 \text{ cm}$
 $b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2, \quad b = \sqrt{\frac{a^2}{4} + v^2} = \sqrt{\frac{12^2}{4} + 8^2} \text{ cm} = 10 \text{ cm}$
 $o = \frac{\pi a}{2} + \pi b = \frac{\pi \cdot 12 \text{ cm}}{2} + \pi \cdot 10 \text{ cm} = 16\pi \text{ cm} = 50 \text{ cm}$





(CZVV)

2 body

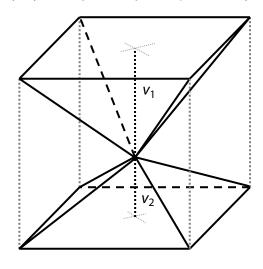
18 Jaká je velikost vnitřního úhlu ACB v daném trojúhelníku?

Výsledek je zaokrouhlen na celé stupně.

- A) 83°
- B) 86°
- C) 90°
- D) 102°
- E) větší než 103°

V krychli jsou dva čtyřboké jehlany umístěny tak, že mají společný hlavní vrchol a podstavy obou jehlanů tvoří rovnoběžné stěny krychle.

Výšky obou jehlanů jsou v poměru $v_1:v_2=3:2$.



(CZVV)

2 body

19 Jakou část objemu krychle tvoří objem většího z obou jehlanů?

- A) $\frac{3}{5}$
- B) $\frac{1}{3}$
- C) $\frac{2}{9}$
- $\begin{array}{c}
 \boxed{D} \quad \frac{1}{5}
 \end{array}$
 - E) $\frac{1}{6}$

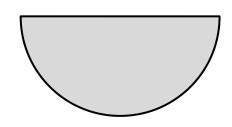
Řešení:

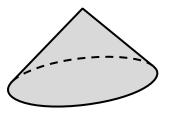
Délka hrany krychle je a.

$$v_{1} = \frac{3}{5}a$$

$$\frac{V_{1}}{V_{k}} = \frac{\frac{1}{3}a^{2} \cdot v_{1}}{a^{3}} = \frac{\frac{1}{3}a^{2} \cdot \frac{3}{5}a}{a^{3}} = \frac{1}{5}$$

Rozvinutý plášť rotačního kužele tvoří půlkruh o poloměru 10 cm.



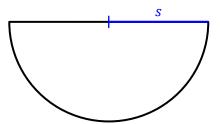


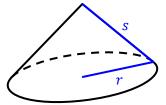
(CZVV)

2 body

20 Jaký je povrch kužele (včetně podstavy)?

- (A) 75 π cm²
 - B) $100\pi \text{ cm}^2$
- C) $125\pi \text{ cm}^2$
- D) $150\pi \text{ cm}^2$
- E) jiný povrch





Řešení:

Obsah pláště kužele je roven obsahu půlkruhu o poloměru s.

$$s = 10 \, \text{cm}$$

$$S_{\text{pl}} = \pi r s = \frac{\pi s^2}{2} \Rightarrow r = \frac{s}{2} = \frac{10 \text{ cm}}{2} = 5 \text{ cm}$$

 $S = \pi r (r + s) = \pi r (r + 2r) = 3\pi r^2 = 3\pi \cdot 5^2 \text{ cm}^2 = 75\pi \text{ cm}^2$

2 body

V rovině jsou dány body A[-21; 9], B[15; -5] a P[0; -2]. Bod S je střed úsečky AB.

Jaká je vzdálenost bodů P, S?

- A) 3,5
- B) 4
- C) 4,5
- (D) 5
 - E) jiná vzdálenost

$$S = \left[\frac{-21 + 15}{2}; \frac{9 + (-5)}{2} \right] = [-3; 2]$$
$$|PS| = \sqrt{(0 - (-3))^2 + (-2 - 2)^2} = 5$$

V geometrické posloupnosti platí: 22

$$a_2 = \sqrt[3]{3}$$

$$a_3 = -\sqrt[3]{9}$$

Jaká je hodnota součtu $a_1 + a_4$?

- A) 2
- 1
- C) 0
- D) -1
- jiná hodnota E)

Řešení:

$$q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{-\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}} = -\sqrt[3]{3}$$

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{\sqrt[3]{3}}{-\sqrt[3]{3}} = -1$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = -\sqrt[3]{9} \cdot (-\sqrt[3]{3}) = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$a_1 + a_4 = -1 + 3 = 2$$

2 body

23 Pro kterou z následujících nerovnic s neznámou $x \in R$ je množinou všech řešení interval $(-\infty; 0)$?

- A) -2x < 0
- B) $\frac{x}{x-1} < 0$
- C) $\frac{x}{-2} \ge 0$
- D) $\frac{2x}{x} < 0$

A)
$$-2x < 0$$
 $x > 0$ $K = (0; +\infty)$

B)
$$\frac{x}{x-1} < 0$$
 ... $K = (0;1)$

Resent:
A)
$$-2x < 0$$
 $x > 0$ $K = (0; +\infty)$
B) $\frac{x}{x-1} < 0$... $K = (0; 1)$
C) $\frac{x}{-2} \ge 0$ $x \le 0$ $K = (-\infty; 0)$
D) $\frac{2x}{x} < 0$ $2 < 0$ $K = \emptyset$
E) $2x < x$ $x < 0$ $K = (-\infty; 0)$

D)
$$\frac{2x}{x} < 0$$
 $2 < 0$ $K = \emptyset$

E)
$$2x < x$$
 $x < 0$ $K = (-\infty; 0)$

Je dán výraz $\frac{12(a-2)^2}{12-6a}$ s reálnou proměnnou a.

Které tvrzení je pravdivé?

- A) Pro $a = 101^8$ je výraz kladný.
- B) Pro a = 2 je hodnota výrazu 0.
- (C)) Hodnota výrazu nemůže být nikdy nulová.
- D) Pro všechna $a \neq \frac{1}{6}$ je výraz roven $\frac{(a-2)^2}{1-6a}$.
- E) Pro některá a je výraz roven 2(a-2).

Řešení:

$$\frac{12(a-2)^2}{12-6a} = -2(a-2) \text{ pro } a \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$$

Pro a < 2 je hodnota výrazu kladná, hodnota a = 2 nepatří do definičního oboru výrazu, pro a > 2 je hodnota výrazu záporná.

- A) $101^8 > 2$, proto pro $a = 101^8$ není výraz kladný.
- B) Pro a = 2 není výraz definován, tedy hodnota výrazu neexistuje.
- C) Pro žádné $a \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ není hodnota výrazu nulová.
- D) Rovnost výrazů $\frac{(a-2)^2}{1-6a} = -2(a-2)$ platí pouze pro a=0.
- E) Rovnost 2(a-2) = -2(a-2) neplatí pro žádné $a \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 25

V rodině Novotných mají 4 děti, a to 2 dívky a 2 chlapce. V rodině Dlouhých mají také 4 děti, ale jen 1 dívku a 3 chlapce.

Z uvedených osmi dětí se vylosuje dvojice dětí.

(CZVV)

max. 4 body

Přiřadte ke každému z následujících jevů (25.1-25.4) pravděpodobnost (A-F), 25 s kterou může daný jev nastat.

25.1 Ve vylosované dvojici budou dvě dívky.

25.2 Ve vylosované dvojici budou dva chlapci.

25.3 Ve vylosované dvojici budou oba chlapci Novotných.

25.4 Ve vylosované dvojici bude 1 chlapec Novotných a 1 dívka Dlouhých.

- A)
- B)
- C)
- D)
- E)
- F)

$$|\Omega| = \binom{8}{2} = 28$$

25.1
$$\frac{\binom{3}{2}}{28} = \frac{3}{28}$$

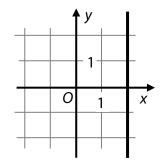
25.1
$$\frac{\binom{3}{2}}{28} = \frac{3}{28}$$
25.2
$$\frac{\binom{5}{2}}{28} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$
25.3
$$\frac{1 \cdot 1}{28} = \frac{1}{28}$$

$$25.3 \qquad \frac{1 \cdot 1}{28} = \frac{1}{28}$$

25.4
$$\frac{\binom{2}{1} \cdot 1}{28} = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$$

26 Přiřadte ke každé přímce (26.1–26.3) její analytické vyjádření (A–E).

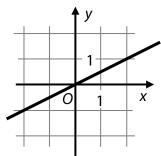
26.1



Řešení:

$$x = 2, y = t, t \in \mathbf{R}$$
E resp.
 $x - 2 = 0$

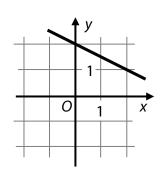
26.2



 $x = 2 + 2t, y = 1 + t, t \in \mathbf{R}$

resp.
$$x - 2y = 0$$

26.3



 $x = 2t, y = 2 - t, t \in \mathbf{R}$

B resp.

$$x + 2y - 4 = 0$$

A)
$$y = -x + 2$$

B)
$$x + 2y - 4 = 0$$

C)
$$x = 2 + 2t$$
, $y = 1 + t$, $t \in \mathbf{R}$

D)
$$x = t$$
, $y = 2$, $t \in \mathbf{R}$

E)
$$x = 2$$
, $y = t$, $t \in \mathbf{R}$