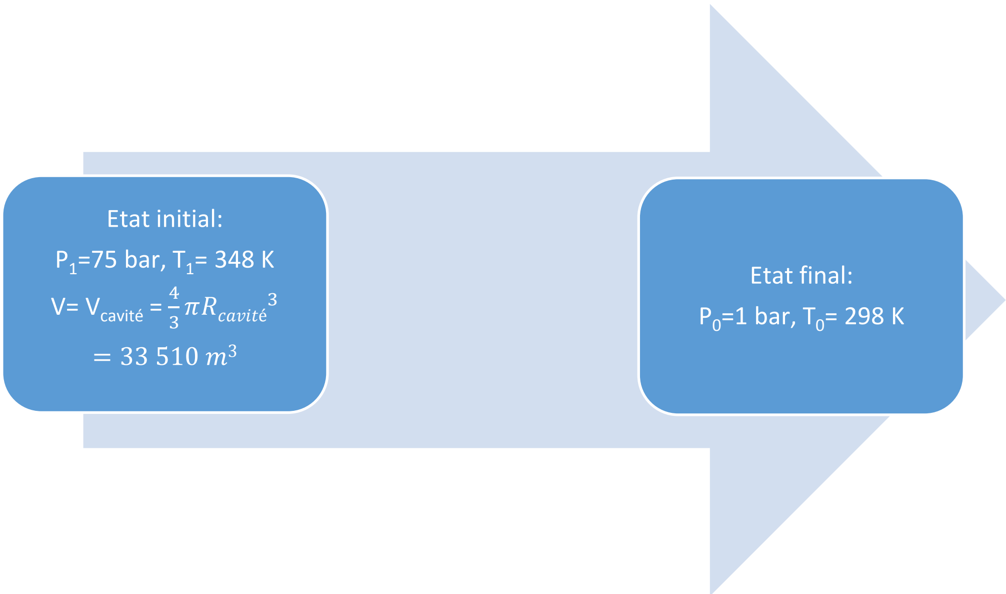
Calcul de l'énergie récupérée durant un demi-cycle

cf. schéma pour la figure

On considère l'évolution du système ouvert {gaz qui passe dans la turbine entre t et t+dt}



Système : fluide en système ouvert dans une turbine

Hypothèses :

- L'écoulement est considéré comme stationnaire (sur un petit temps dt)
- La température de la cavité de change pas

$$T_{cavité} = cste = 348\ K$$

- L'air est considéré comme un Gaz Parfait

$$PV=nRT$$

- La turbine est adiabatique

1er principe de la thermodynamique industrielle :

$$\Delta h + \Delta E_c + \Delta E_p = w_i + q$$

Compte tenu de nos hypothèses :

$$\Delta h = w_i$$

Par définition de l'enthalpie on a :

$$\Delta h = c_p \, \Delta T$$

Et, l'évolution étant adiabatique,

$$P_{entrée}^{1-ɣ} T_{entrée}^{ɣ} = P_0^{1-ɣ} T_{sortie}^{ɣ}$$

D'où, avec $P_{entrée}(t) = (P_{moy} + A\cos(\omega t)) * 10^5$, et $T_{entrée} = 349$ K, on a :

$$T_{sortie}(t) = \left(\frac{P_{entrée}(t)}{P_0}\right)^{\frac{1-ɣ}{ɣ}} T_{entrée}$$

On a donc,

$$\Delta h = c_p \, T_{entrée}\left(\left(\frac{P_{entrée}(t)}{P_0}\right)^{\frac{1-ɣ}{ɣ}} - 1\right)$$

Ainsi,

$$w_i(t) = c_p \, T_1 \left(\left((\mathrm{Pmoy} + \mathrm{A}\cos(\omega \mathrm{t})) \right)^{\frac{1-ɣ}{ɣ}} - 1 \right)$$

(On notera que P_{moy} et A sont sans unité et correspondent aux bars).

Or, la puissance fournie à la machine est égale à :

$$P_{th}(t) = D_m(t) \; w_i(t)$$

Il reste à calculer $D_m(t)$:

$$Dm(t) = -M_{air} \frac{\partial n_{int}(t)}{\partial t}$$

et :

$$n_{int}(t) = \frac{P_1(t)V}{RT_1} = \frac{(\mathrm{Pmoy} + \mathrm{A}\cos(\omega \mathrm{t})) * 10^5 \, V}{RT_1}$$

Donc :

$$D_m(t) = M_{air} \frac{\mathrm{A} * 10^5 \, \omega \left(\sin(\omega t)\right) V}{RT_1}$$

D’où :

$$P_{turb}(t) = M_{air} \frac{\mathrm{A} * 10^5 \, \omega \left(\sin(\omega t)\right) V}{RT_1} * c_p \, T_1 \left(((\mathrm{Pmoy} + \mathrm{A}\cos(\omega t)))^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right)$$

Ainsi,

$$E_{turb} = M_{air} \frac{\mathrm{A} * 10^5 \ V}{RT_1} * c_p \, T_1 * \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \omega \left(\sin(\omega t)\right) \left(((\mathrm{Pmoy} + \mathrm{A}\cos(\omega t)))^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right) dt$$

Après calcul, on trouve,

$$E_{turb} = M_{air} \frac{\mathrm{A} * 10^5 \, V}{RT_1} * c_p \, T_1 * \left(\left((\mathrm{Pmoy} + \mathrm{A})^{\frac{1}{\gamma}} - (\mathrm{Pmoy} - \mathrm{A})^{\frac{1}{\gamma}} \right) - 2 \right)$$

$$E_{turb} = M_{air} \frac{4 \, \pi \, 10^5 \, \mathrm{A} \, R_i^3}{3RT_1} * c_p \, T_1 * \left(\frac{\gamma}{A} \left((\mathrm{Pmoy} + \mathrm{A})^{\frac{1}{\gamma}} - (\mathrm{Pmoy} - \mathrm{A})^{\frac{1}{\gamma}} \right) - 2 \right)$$

C.Q.F.D