

# Analyse d'Algorithmes et Programmation

## Rattrapage

Christina Boura et Yann ROTELLA  
{christina.boura, yann.rotella}@uvsq.fr

16 juin 2021

## 1 Programmation Dynamique

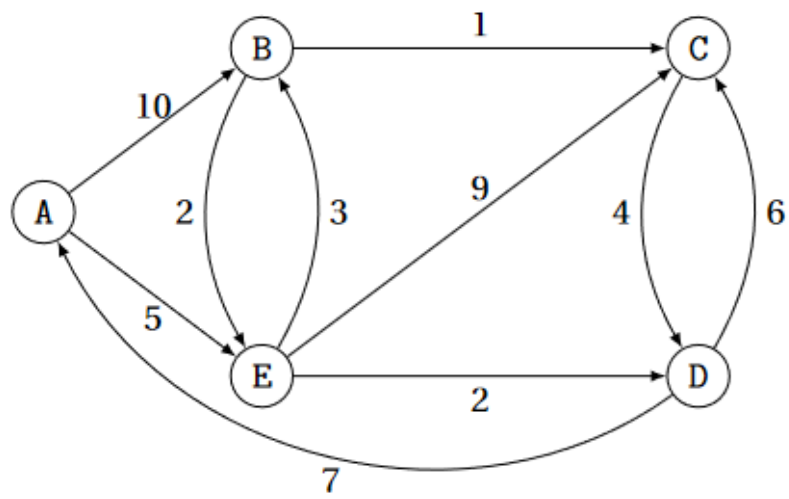
On s'intéresse au problème des multiplications matricielles enchaînées. Étant donné une chaîne de  $n$  matrices  $M_1, M_2, \dots, M_n$  on cherche à trouver le parenthésage optimal, c'est à dire celui qui minimise le nombre de multiplications scalaires pour l'opération  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ .

- Donner le nombre de parenthésages possibles pour la multiplication de  $n = 5$  matrices.  
(1 point)
- Soit cinq matrices  $M_1, M_2, \dots, M_5$ , où chaque matrice  $M_i$  pour  $i$  allant de 1 à 5 est de dimension  $p_{i-1} \times p_i$ . On note  $c_{i,j}$  pour  $1 \leq i \leq j \leq n$  le nombre minimal de multiplications scalaires nécessaires pour le calcul de la matrice  $M_i \times M_{i+1} \times \dots \times M_j$ . Exprimer  $c_{1,4}$  en fonction des coûts  $c_{1,1}, c_{2,4}, c_{1,2}, c_{3,4}, c_{1,3}, c_{4,4}$  et des entiers  $p_i$  pour  $i$  allant de 0 à 5.  
(1 point)
- On suppose maintenant que les dimensions des matrices  $M_1, M_2, \dots, M_5$  sont données par  $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 3, 5, 1, 4, 3)$ . Calculer le coût optimal  $c_{1,5}$  pour la multiplication  $M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_5 \times M_5$  en sauvegardant les coûts pour la multiplication des chaînes plus petites. Montrer finalement le parenthésage optimal que vous obtenez.  
(1.5 points)
- On suppose maintenant que les coefficients des matrices sont des entiers modulo un entier  $m$  et que l'on travaille dans l'anneau  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ . Quel est la complexité asymptotique du calcul précédent en nombre d'opérations binaires ? (Justifiez avec l'algorithme de multiplication que vous utilisez)  
(2 points)

## 2 Applications d'algorithmes sur les graphes

On considère le graphe orienté suivant.

- Le graphe est-il connexe ? Fortement connexe ?  
(0.5 points)
- Donnez la représentation de ce graphe sous forme de liste d'adjacence.  
(1 point)
- Combien de bits sont nécessaires à l'encodage de ce graphe sous forme de liste d'adjacence ? Et sous forme de matrice d'adjacence ? Justifiez.  
(1.5 points)
- Détaillez les étapes du parcours en profondeur sur le graphe donné en exemple en commençant par le sommet de votre choix. En particulier détaillez la suite des sommets parcourus, et, à chaque étape, quels sommets sont marqués blancs, gris et noirs.  
(2 points)
- Appliquez l'algorithme de Dijkstra au graphe et détaillez les étapes.



(2 points)