Übungsblatt 2 Recommendersysteme

Markus Bilz – Matr. Nr. 2327197

14. Juli 2020

a) Ein öffentliches Gut zeichnet sich dadurch aus, dass niemand von dessen Verbrauch ausgeschlossen werden kann (**Nicht-Ausschluss**) und dessen Verbrauch durch Einen, nicht den etwaigen Verbrauch eines Zweiten einschränkt (**Nicht-Rivalität**) (vgl. Geyer-Schulz & Sonnenbichler, 2019, S. 10).

b) **Zielsetzung:**
Das Empfehlungsakquisitionsspiel versucht den Wert von Empfehlungen zu ermitteln, um damit eine effiziente Abgabe von Bewertungen für ein Produkt zu erreichen (vgl. Avery et al., 1999, S. 565).

Aufbau:
Im Empfehlungsakquisitionsspiel entscheidet jeder Spieler, ob er ein Produkt konsumiert oder nicht. Konsumiert ein Spieler ein Produkt tatsächlich, so wird seine Empfehlung ohne Kosten den anderen Spielern publik. Die Empfehlung ist damit zum öffentlichen Gut geworden. Gefällt einem Spieler ein Produkt, so steigert dies den erwarteten Payoff der nachfolgenden Spieler, womit der Konsum durch diese wahrscheinlicher wird. Das Spiel existiert mit den Modi *Batch Mode* und *One-at-a-Time*, welche sich nach Anzahl der Runden und Konsumenten unterscheiden. (vgl. Avery et al., 1999, S. 566 ff.)

c) Die Bedeutung der Parameter ist folgende:

- f bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, mit welcher der zugehörige Knoten im Spielverlauf erreicht werden kann.
- p bezeichnet die *a priori* Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt gut ist.
- ρ bezeichnet die (subjektive) Wahrscheinlichkeit unter der Gefahr des Irrtums, dass ein Produkt durch den nächsten Spieler als gut wahrgenommen wird.
- b bezeichnet die bedingte Wahrscheinlichkeit, zu welcher ein schlechtes Produkt durch den Spieler als schlecht empfunden wird.
- g bezeichnet die bedingte Wahrscheinlichkeit, zu welcher ein gutes Produkt auch einen Spieler auch als gut wahrgenommen wird.

d) Der Entscheidungsbaum ist in Abbildung 1 dargestellt.

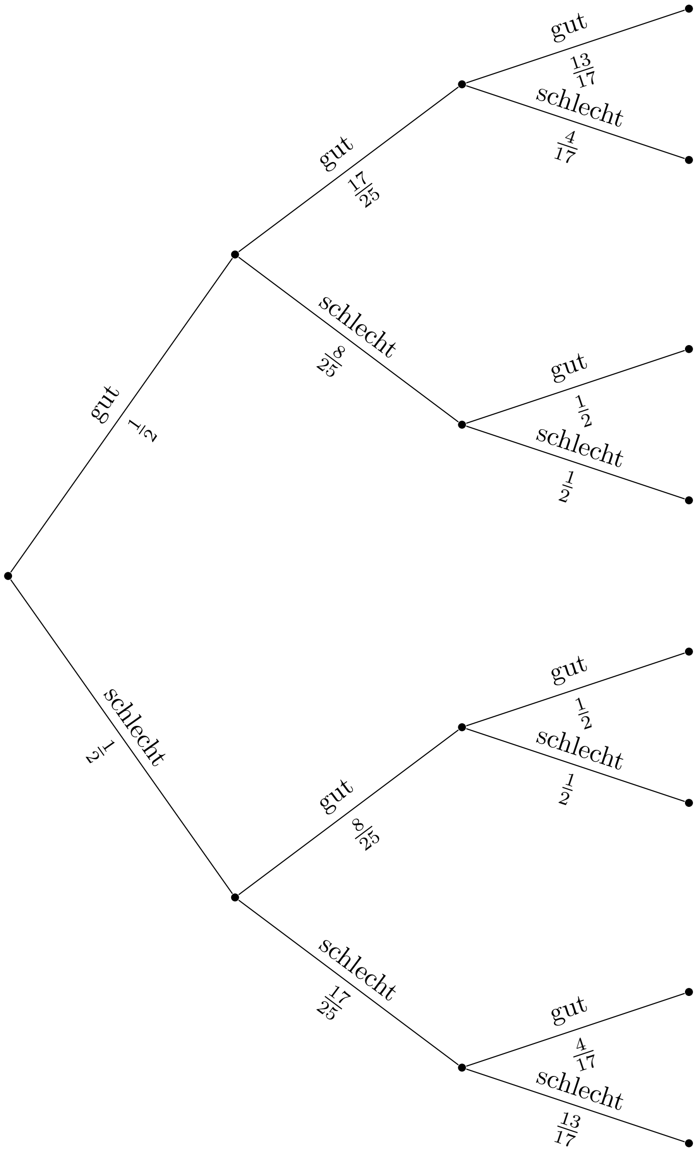

Abbildung 1: Entscheidungsbaum (Eigene Darstellung)

Unten stehend findet sich der komplette Rechenweg zum Baum einschließlich aller Variablen aus Punkt c).

Ebene 1

$$\begin{aligned}
f &= 1, \\
g &= \frac{4}{5}, \\
b &= \frac{4}{5}, \\
p_1 &= \frac{1}{2}, \\
\rho_1 &= p_1 g + (1-p_1)(1-b) = \frac{1}{2}\frac{4}{5} + \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

Ebene 2 oben

$$\begin{aligned}
f &= \frac{1}{2},\\
p_2^+ &= (gp_1)/\rho_1 = \left(\frac{4}{5}\frac{1}{2}\right)/\frac{1}{2} = \frac{4}{5},\\
\rho_2^+ &= p_2^+ g + \left(1 - p_2^+\right)(1-b) = \frac{4}{5}\frac{4}{5} + \left(1 - \frac{4}{5}\right)\left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{17}{25},
\end{aligned}$$

Ebene 2 unten

$$\begin{aligned}
f &= \frac{1}{2},\\
p_2^- &= (1-g)p_1/(1-\rho_1) = \left(1 - \frac{4}{5}\right)\frac{1}{2}/\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5},\\
\rho_2^- &= p_2^- g + \left(1 - p_2^-\right)(1-b) = \frac{1}{5}\frac{4}{5} + \left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{8}{25},
\end{aligned}$$

Ebene 3 oben, oben

$$\begin{aligned}
f &= \frac{1}{2}\frac{17}{25} = \frac{17}{50},\\
p_3^{++} &= (gp_2^+)/\rho_2^+ = \left(\frac{4}{5}\frac{4}{5}\right)/\frac{17}{25} = \frac{16}{17},\\
\rho_3^{++} &= p_3^{++} g + \left(1 - p_3^{++}\right)(1-b) = \frac{16}{17}\frac{4}{5} + \left(1 - \frac{16}{17}\right)\left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{13}{17},
\end{aligned}$$

Ebene 3 oben, unten

$$\begin{aligned}
f &= \frac{1}{2}\frac{8}{25} = \frac{8}{50},\\
p_3^{+-} &= (1-g)p_2^+/(1-\rho_2^+) = \left(1 - \frac{4}{5}\right)\frac{4}{5}/\left(1 - \frac{17}{25}\right) = \frac{1}{2},\\
\rho_3^{+-} &= p_3^{+-} g + \left(1 - p_3^{+-}\right)(1-b) = \frac{1}{2}\frac{4}{5} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

Ebene 3 unten, oben

$$\begin{aligned}
f &= \frac{1}{2}\frac{8}{25} = \frac{8}{50},\\
p_3^{-+} &= (gp_2^-)/\rho_2^- = \left(\frac{4}{5}\frac{1}{5}\right)/\frac{8}{25} = \frac{1}{2},\\
\rho_3^{-+} &= p_3^{-+} g + \left(1 - p_3^{-+}\right)(1-b) = \frac{1}{2}\frac{4}{5} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

Ebene 3 unten, unten

$$\begin{aligned}
f &= \frac{1}{2}\frac{17}{25} = \frac{17}{50},\\
p_3^{--} &= (1-g)p_2^-/(1-\rho_2^-) = \left(1 - \frac{4}{5}\right)\frac{1}{5}/\left(1 - \frac{8}{25}\right) = \frac{1}{17},\\
\rho_3^{--} &= p_3^{--} g + \left(1 - p_3^{--}\right)(1-b) = \frac{1}{17}\frac{4}{5} + \left(1 - \frac{1}{17}\right)\left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{4}{17},
\end{aligned}$$

Ebene 4 oben, oben, oben

$$\begin{aligned}
f &= \frac{17}{50}\frac{13}{17} = \frac{13}{50},\\
p_4^{+++} &= (gp_3^{++})/\rho_3^{++} = \left(\frac{4}{5}\frac{16}{17}\right)/\frac{13}{17} = \frac{64}{65},\\
\rho_4^{+++} &= p_4^{+++} g + \left(1 - p_4^{+++}\right)(1-b) = \frac{64}{65}\frac{4}{5} + \left(1 - \frac{64}{65}\right)\left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{257}{325},
\end{aligned}$$

Ebene 4 oben, oben, unten

$$\begin{aligned}
f &= \frac{17}{50}\frac{4}{17} = \frac{2}{25},\\
p_4^{++-} &= (1-g)p_3^{++}/(1-\rho_3^{++}) = \left(1-\frac{4}{5}\right)\frac{16}{17}/\left(1-\frac{13}{17}\right) = \frac{4}{5},\\
\rho_4^{++-} &= p_4^{++-}g + \left(1-p_4^{++-}\right)(1-b) = \frac{4}{5}\frac{4}{5} + \left(1-\frac{4}{5}\right)\left(1-\frac{4}{5}\right) = \frac{17}{25},
\end{aligned}$$

Ebene 4 oben, unten, oben

$$\begin{aligned}
f &= \frac{8}{50}\frac{1}{2} = \frac{2}{25},\\
p_4^{+-+} &= \left(gp_3^{+-}\right)/\rho_3^{+-} = \left(\frac{4}{5}\frac{1}{2}\right)/\frac{1}{2} = \frac{4}{5},\\
\rho_4^{+-+} &= p_4^{+-+}g + \left(1-p_4^{+-+}\right)(1-b) = \frac{4}{5}\frac{4}{5} + \left(1-\frac{4}{5}\right)\left(1-\frac{4}{5}\right) = \frac{17}{25},
\end{aligned}$$

Ebene 4 oben, unten, oben

$$\begin{aligned}
f &= \frac{8}{50}\frac{1}{2} = \frac{2}{25},\\
p_4^{+--} &= (1-g)p_3^{+-}/(1-\rho_3^{+-}) = \left(1-\frac{4}{5}\right)\frac{1}{2}/\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5},\\
\rho_4^{+--} &= p_4^{+--}g + \left(1-p_4^{+--}\right)(1-b) = \frac{1}{5}\frac{4}{5} + \left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{25},
\end{aligned}$$

Ebene 4 unten, oben, oben

$$\begin{aligned}
f &= \frac{8}{50}\frac{1}{2} = \frac{2}{25},\\
p_4^{-++} &= (gp_3^{-+})/\rho_3^{-+} = \frac{1}{2}\frac{4}{5}/\frac{1}{2} = \frac{4}{5},\\
\rho_4^{-++} &= p_4^{-++}g + \left(1-p_4^{-++}\right)(1-b) = \frac{4}{5}\frac{4}{5} + \left(1-\frac{4}{5}\right)\left(1-\frac{4}{5}\right) = \frac{17}{25},
\end{aligned}$$

Ebene 4 unten, oben, unten

$$\begin{aligned}
f &= \frac{8}{50}\frac{1}{2} = \frac{2}{25},\\
p_4^{-+-} &= (1-g)p_3^{-+}/(1-\rho_3^{-+}) = \left(1-\frac{4}{5}\right)\frac{1}{2}/\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5},\\
\rho_4^{-+-} &= p_4^{-+-}g + \left(1-p_4^{-+-}\right)(1-b) = \frac{1}{5}\frac{4}{5} + \left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{25},
\end{aligned}$$

Ebene 4 unten, unten, oben

$$\begin{aligned}
f &= \frac{17}{50}\frac{4}{17} = \frac{2}{25},\\
p_4^{--+} &= \left(gp_3^{--}\right)/\rho_3^{--} = \frac{4}{5}\frac{1}{17}/\frac{4}{17} = \frac{1}{5},\\
\rho_4^{--+} &= p_4^{--+}g + \left(1-p_4^{--+}\right)(1-b) = \frac{1}{5}\frac{4}{5} + \left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{25},
\end{aligned}$$

Ebene 4 unten, unten, unten

$$\begin{aligned}
f &= \frac{17}{50}\frac{13}{17} = \frac{13}{50},\\
p_4^{---} &= (1-g)p_3^{--}/(1-\rho_3^{--}) = \left(1-\frac{4}{5}\right)\frac{1}{17}/\left(1-\frac{4}{17}\right) = \frac{1}{65},\\
\rho_4^{---} &= p_4^{---}g + \left(1-p_4^{---}\right)(1-b) = \frac{1}{65}\frac{4}{5} + \left(1-\frac{1}{65}\right)\left(1-\frac{4}{5}\right) = \frac{68}{325}.
\end{aligned}$$

e) Sei der Payoff für Spieler A, B, C und D wie in Tabelle 1.

Spieler i	pos. Payoff r_i	neg. Payoff s_i
A	1	0
B	2	0
C	2	-2
D	0	-10

Tabelle 1: Payoffs

Der Payoff aller Spieler lässt sich dann nach Nazemi (2020, S. 17) ermitteln als:

$$Payoff_x = \sum_{x \text{ konsumiert in } i} f_i \left(\rho_i Pay_x^+ + (1 - \rho_i)\, Pay_x^-\right).$$

Damit ergibt sich ein Einzelspieler-Payoff in Höhe von:

$Payoff_A = 1\left(\frac{1}{2}1 - \frac{1}{2}0\right) = \frac{1}{2}$,

$Payoff_B = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{25}2 - \frac{8}{25}0\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{8}{25}2 - \frac{17}{25}0\right) = 1$,

$Payoff_C = \max\left(0; \frac{17}{50}\left(\frac{13}{17}2 - \frac{4}{17}2\right)\right) + \max\left(0; \frac{4}{25}\left(\frac{1}{2}2 - \frac{1}{2}2\right)\right) = 0 + 0 = 0$,

$Payoff_D = \max\left(0; 0; 0; \frac{13}{50}\left(\frac{257}{325}0 - \frac{68}{325}10\right)\right) + \max\left(0; 0; 0; \frac{2}{25}\left(\frac{17}{25}0 - \frac{8}{25}10\right)\right) = 0 + 0 = 0.$

Der Gesamt-Payoff beträgt: $Payoff_\Sigma = \frac{1}{2} + 1 + 0 + 0 = \frac{3}{2}$.

f) Die Konsumreihenfolge aus e) ist *nicht* optimal. Avery et al. (1999, S. 572) führen Faustformeln für die optimale Reihenfolge der Bewertungen an. Demnach sollten alle, die sicher sind, das Produkt zu konsumieren, es sofort tun, was in Aufgabenteil e) gegeben ist. Gilt zusätzlich $(r_B \geq r_A)$ oder auch $(s_B \geq s_A)$, dann sollte jedoch B zuerst konsumieren. Im vorliegenden Fall konsumiert aber A zuerst, weshalb die Konsumreihenfolge *nicht* optimal ist. Überdies sollte D gänzlich auf Konsum verzichten, da er in jedem Fall einen nicht positiven Payoff erlangt.

Literatur

Avery, C., Resnick, P. & Zeckhauser, R. (1999). The Market for Evaluations. *American Economic Review*, *89*(3), 564–584. https://doi.org/10.1257/aer.89.3.564

Geyer-Schulz, A. & Sonnenbichler, A. (2019). Recommendersysteme – Kapitel 6: Zum Wert von Empfehlungen.

Nazemi, A. (2020). Mechanism Design Problems & Wert von Empfehlungen.