

Lógica Computacional 2021-II

Ejercicio Semanal 2

Ui Chul Shin (신의철)

Neider Sánchez Reza (네이데르 산체스 레사)

Karyme Ivette Azpeitia García (카리메 이베트 아스페티아 가르시아)

12 de marzo de 2021

1. Define recursivamente la función **ni** que recibe una fórmula φ y regresa el número de símbolos de implicación que tiene la fórmula. Por ejemplo:

$$\mathbf{ni}(p \wedge r \rightarrow \neg(q \rightarrow r)) = 2$$

La función $\mathbf{ni} : PROP \rightarrow \mathbb{N}$ devuelve el número de símbolos de implicación que tienen la fórmula dada y se define como:

$$\mathbf{ni}(\varphi) = 0 \text{ si } \varphi \text{ es atómica.}$$

$$\mathbf{ni}(\neg\varphi) = \mathbf{ni}(\varphi).$$

$$\mathbf{ni}(\varphi \rightarrow \psi) = 1 + \mathbf{ni}(\varphi) + \mathbf{ni}(\psi).$$

$$\mathbf{ni}(\varphi \star \psi) = \mathbf{ni}(\varphi) + \mathbf{ni}(\psi).$$

donde $\star \in \{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}$.

2. Estás en un laberinto y encuentras tres posibles caminos: uno de oro, otro de mármol y el último de madera. Cada uno protegido por un guardia. Al hablar con los guardias te dan la siguiente información:

- **El guardia del camino de oro dice:** *Este camino te llevará directo a la salida del laberinto. Si el camino de madera te lleva a la salida, entonces también el de mármol te llevará a la salida.*
- **El guardia del camino de mármol dice:** *Los caminos de oro y madera no te llevarán a la salida.*
- **El guardia del camino de madera dice:** *Sigue el camino de oro y llegarás a la salida, pero si vas por el de mármol te perderás.*

Sabes que los tres guardias están mintiendo.

Utilizando **exclusivamente** el glosario:

- g : el camino de oro dirige a la salida.
- m : el camino de mármol dirige a la salida.
- w : el camino de madera dirige a la salida.

Responde lo siguiente.

- a) Formaliza el problema anterior con lógica proposicional definiendo lo que dice cada guardia como una fórmula.

Especificación formal:

- **El guardia del camino de oro dice:** $g \wedge (w \rightarrow m)$
- **El guardia del camino de mármol dice:** $\neg g \wedge \neg w$
- **El guardia del camino de madera dice:** $(g \wedge \neg m)$

Por lo tanto, podemos expresar la información dada por cada guardia, tomando en cuenta que sabemos que los tres guardias están mintiendo, como sigue:

$$\neg(g \wedge (w \rightarrow m)) \wedge \neg(\neg g \wedge \neg w) \wedge \neg(g \wedge \neg m)$$

Como tenemos la conjunción de tres subfórmulas (? , expresaremos el conjunto de fórmulas como:

$$\Gamma = \{\neg g \vee (w \wedge \neg m), g \vee w, \neg g \vee m\}$$

- b) Encuentra un estado que no sea modelo para el conjunto de fórmulas definido en el inciso anterior.

- 1) $\mathcal{I}(\neg g \vee (w \wedge \neg m)) = 1$
- 2) $\mathcal{I}(g \vee w) = 1$
- 3) $\mathcal{I}(\neg g \vee m) = 1$
- 4) $\mathcal{I}(g) = 1$
- 5) $\mathcal{I}(\neg g) = 0$ por 4
- 6) $\mathcal{I}(m) = 1$ por 3 y 5
- 7) $\mathcal{I}(\neg m) = 0$ por 6
- 8) $\mathcal{I}(w) = 1$ por 2 y 4
- 9) $\mathcal{I}(w \wedge \neg m) = 0$ por 1, 7 y 8
- 10) $\mathcal{I}(\neg g) = 1$ por 1 y 9 Contradicción con 5
- 11) $\mathcal{I}(g) = 0$ por 10 Contradicción con 4

Partimos de suponer que $\mathcal{I}(g) = 1$ y llegamos a una contradicción.

\therefore Cualquier estado que tenga $\mathcal{I}(g) = 1$ no es un modelo para el conjunto de fórmulas.

$\therefore \mathcal{I}(g) = 1, \mathcal{I}(m) = 0, \mathcal{I}(w) = 1$ es un estado que no es modelo.

c) Encuentra un modelo para el conjunto de fórmulas del inciso a).

Construiremos un modelo para el conjunto Γ del inciso a) partiendo de las siguientes premisas:

- $\mathcal{I}(g \wedge (w \rightarrow m)) = 0$
- $\mathcal{I}(\neg g \wedge \neg w) = 0$
- $\mathcal{I}(g \wedge \neg m) = 0$

Como se mencionó anteriormente, dado que sabemos que estas proposiciones son falsas, entonces tenemos:

- 1) $\mathcal{I}(\neg g \vee (w \wedge \neg m)) = 1$
- 2) $\mathcal{I}(g \vee w) = 1$
- 3) $\mathcal{I}(\neg g \vee m) = 1$

De 1) podemos ver que: (4) $\mathcal{I}(\neg g) = 1$, o bien (5) $\mathcal{I}(w \wedge \neg m) = 1$. Separaremos el análisis en dos casos para obtener los valores para las variables g , m y w :

- Si $\mathcal{I}(\neg g) = 1$, entonces (6) $\mathcal{I}(g) = 0$. Luego, por (6) y 2) tenemos que (7) $\mathcal{I}(w) = 1$. Así, juntando (6) y (7), vemos que sea cual sea el valor de $\mathcal{I}(m)$, todas las fórmulas ya son satisfacibles. Por lo tanto, tenemos dos modelos:
 - $\mathcal{I}(g) = 0, \mathcal{I}(m) = 1, \mathcal{I}(w) = 1$
 - $\mathcal{I}(g) = 0, \mathcal{I}(m) = 0, \mathcal{I}(w) = 1$
- Si, por otro lado, $\mathcal{I}(w \wedge \neg m) = 1$, entonces tenemos (8) $\mathcal{I}(w) = 1$ y (9) $\mathcal{I}(\neg m) = 1$. De (9) sabemos entonces que (10) $\mathcal{I}(m) = 0$. Juntando (10) y 3), deducimos que (11) $\mathcal{I}(\neg g) = 1$. Así, por (11) tenemos que $\mathcal{I}(g) = 0$. De este caso, hemos obtenido el siguiente modelo: $\mathcal{I}(g) = 0, \mathcal{I}(w) = 1, \mathcal{I}(m) = 0$.

De esta manera, hemos obtenido dos modelos que satisfacen las fórmulas de Γ , a saber,

- Primer modelo: $\mathcal{I}(g) = 0, \mathcal{I}(m) = 1, \mathcal{I}(w) = 1$
- Segundo modelo: $\mathcal{I}(g) = 0, \mathcal{I}(m) = 0, \mathcal{I}(w) = 1$.

d) Decide por qué camino salir del laberinto.

Dados los modelos en c) podemos concluir que los caminos adecuados para salir son el camino de mármol y el camino de madera.