Математическое приложение

Нугманов Булат

26 ноября 2022 г.

Данный документ является наброском математического приложения, результаты которого точно выполняются численно. А ещё надо будет это перевести.

1. Переписывание ряда через интеграл
2. Нахождение перевальных точек
3. Асимптотика кривых постоянной фазы через перевальные точки — не знаю, надо ли об этом писать?
4. Деформация контура в зависимости от знака Γ — пока нет
5. Подсчёт вкладов по методу перевала
6. Вставка с полиномами Белла и числами Стирлинга для явного подсчёта коэффициентов в методе перевала
7. Слова о том, что при $|\Gamma| \ll 1$ достаточно учитывать лишь одно слагаемое
8. Точное значение в максимуме
9. Выбор $\overline{k}$
10. Граница выбора $\overline{k}$
11. Итог: асимптотика ряда

Вступление

Целью данного документа является подсчёт асимптотики ряда следующего вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n e^{i\Gamma n^2}}{n!} \tag{1}$$

Переход от суммы к интегралу

Первым делом избавимся от $\exp\left(i\Gamma n^2\right)$

$$\exp\left(i\Gamma n^2\right) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\Gamma}}{2\sqrt{\pi|\Gamma|}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{z^2}{4\Gamma}+inz\right)dz \tag{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n e^{i\Gamma n^2}}{n!} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\Gamma}}{2\sqrt{\pi|\Gamma|}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{z^2}{4\Gamma}+iAz\right)dz \tag{3}$$

$$Z = -2iA\Gamma = Re^{i\Phi} \tag{4}$$

$\Phi \in (-\pi, \pi]$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n e^{i\Gamma n^2}}{n!} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\Gamma}}{2\sqrt{\pi|\Gamma|}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{-i\frac{z^2}{2}+iZe^{iz}}{2\Gamma}\right)dz \tag{5}$$

Нахождение перевальных точек

$$f(z) = \frac{z^2}{2i} + iZe^{iz} \tag{6}$$

$$e^{iz_k} = \frac{z_k}{iZ} \Rightarrow z_k = iW_k(Z) \tag{7}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{f(z)}{2\Gamma}\right)dz = \sum_{k=0}^{-\operatorname{sign}\Gamma\cdot\infty}\int\limits_{\gamma_k}\exp\left(\frac{f(z)}{2\Gamma}\right)dz \tag{8}$$

$$f(z) = \underbrace{\frac{z_k^2}{2i}+z_k}_{f(z_k)} + \underbrace{\frac{-i-z_k}{2}}_{a_0}(z-z_k)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{-i^n z_k}{(n+2)!}}_{a_1,\,a_2,\ldots}(z-z_k)^{n+2} \tag{9}$$

Подсчёт вкладов по методу перевала

$$\begin{gathered}\int\limits_{\gamma_k}\exp\left(\frac{f(z)}{2\Gamma}\right)dz = \exp\left(\frac{f(z_k)}{2\Gamma}\right)\sqrt{\frac{2\Gamma}{a_0}}\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)(2\Gamma)^n c_{2n}\\ c_{2n} = \sum_{j=0}^{2n}\frac{C^j_{-n-\frac{1}{2}}}{a_0^{n+j}}\hat{B}_{2n,j}\left(a_1, a_2, \ldots, a_{2n-j+1}\right)\end{gathered} \tag{10}$$

Полезная формула

Итогом должно стать:

$$\hat{B}_{n,k}\left(\frac{1}{r!},\frac{1}{(r+1)!},\dots,\frac{1}{(n-k+r)!}\right)=\frac{k!}{(n+(r-1)k)!}S_r(n+(r-1)k,k) \tag{11}$$

где далее можно использовать

$$S_r(n+1,k)=kS_r(n,k)+C_n^rS_r(n-r+1,k-1) \tag{12}$$

Полиномы Белла

$$\exp\left(u\sum_{j=1}^{\infty}x_jt^j\right)=\sum_{n\geq k\geq 0}\hat{B}_{n,k}\left(x_1,x_2,\dots,x_{n-k+1}\right)t^n\frac{u^k}{k!} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\hat{B}_{2n,j}(\zeta x_1,\zeta x_2,\dots,\zeta x_{2n-j+1})=\zeta^j\hat{B}_{2n,j}(x_1,x_2,\dots,x_{2n-j+1})\\ \hat{B}_{2n,j}(\zeta x_1,\zeta^2 x_2,\dots,\zeta^{2n-j+1}x_{2n-j+1})=\zeta^{2n}\hat{B}_{2n,j}(x_1,x_2,\dots,x_{2n-j+1})\end{gathered} \tag{14}$$

В нашем случае:

$$\begin{aligned}\hat{B}_{2n,j}\left(a_1,a_2,\dots,a_{2n-j+1}\right)&=\hat{B}_{2n,j}\left(\frac{-iz_k}{3!},\frac{-i^2z_k}{4!},\dots,\frac{-i^{2n-j+1}z_k}{(2n-j+3)!}\right)\\&=(-1)^n(-z_k)^j\hat{B}_{2n,j}\left(\frac{1}{3!},\frac{1}{4!},\dots,\frac{1}{(2n-j+3)!}\right)\end{aligned} \tag{15}$$

Числа Стирлинга

$$\exp\left(u\left(\frac{t^r}{r!}+\frac{t^{r+1}}{(r+1)!}+\dots\right)\right)=\sum_{n=(r+1)k,k=0}^{\infty}S_r(n,k)u^k\frac{t^n}{n!} \tag{16}$$

Сравнивая данную строчку с определением полиномов Белла,

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq k\geq 0}\hat{B}_{n,k}\left(\frac{1}{r!},\frac{1}{(r+1)!},\dots,\frac{1}{(n-k+r)!}\right)t^n\frac{u^k}{k!}&=\exp\left(\frac{u}{t^{r-1}}\left(\frac{t^r}{r!}+\frac{t^{r+1}}{(r+1)!}+\dots\right)\right)\\&=\sum_{n,k}^{\infty}S_r(n,k)\frac{u^k}{t^{(r-1)k}}\frac{t^n}{n!}\\&=\sum_{n,k}^{\infty}S_r(n+(r-1)k,k)u^k\frac{t^n}{(n+(r-1)k)!}\end{aligned} \tag{17}$$

Наилучшее $\bar{k}$

Используя всё выше перечисленное и обозначение для z_k:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{iZ}{2\Gamma}\right)^n\frac{e^{i\Gamma n^2}}{n!}=e^{\frac{i\pi}{4}}\sum_{k=0}^{-\operatorname{sign}\Gamma\cdot\infty}\frac{\exp\left(\frac{-i-i(z_k+i)^2}{4\Gamma}\right)}{(-i-z_k)^{\frac{1}{2}}}\sum_{n=0}^{\infty}(2\Gamma)^n\sum_{j=0}^{2n}\left(-\frac{1}{2}\frac{z_k}{i+z_k}\right)^{n+j}\frac{S_3(2n+2j,j)}{(n+j)!}, \tag{18}$$

Далее мы переходим к менее точным оценкам.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{iZ}{2\Gamma}\right)^n\frac{e^{i\Gamma n^2}}{n!}\approx e^{\frac{i\pi}{4}}\frac{\exp\left(\frac{-i-i(z_{\bar{k}}+i)^2}{4\Gamma}\right)}{(-i-z_{\bar{k}})^{\frac{1}{2}}} \tag{19}$$

Выпишем действительную часть показателя экспоненты:

$$\mathrm{Re}\left(f(z_k)\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(-i(z_k+i)^2\right)=-\mathrm{Im}(W_k(Z))\left(1+\mathrm{Re}(W_k(Z))\right) \tag{20}$$

Точное поведение $\mathrm{Re}\, f(z_k)$

Найдём поведение $\mathrm{Re}\, f(z_k)\,\mathrm{sign}\,\Gamma$ как функцию от Φ в окрестности точки максимума. Для сокращения дальнейших формул используем в данном параграфе сокращение $W=W_k(Z=Re^{i\Phi})$. Для этого нам понадобиться:

$$\frac{\partial W}{\partial \Phi}=\frac{iW}{1+W} \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Phi}\mathrm{Re}\left(f(z_k)\right)=-\mathrm{Re}(W) \tag{22}$$

В точке максимума $\frac{\partial}{\partial\Phi}\mathrm{Re}\left(f(z_k)\right)=0$. Отсюда из определения W-функции Ламберта

$$i\,\mathrm{Im}\, W e^{i\,\mathrm{Im}\, W}=Re^{i\Phi_{\max}}\Rightarrow|\mathrm{Im}\, W|=R \tag{23}$$

$$\mathrm{sign}\left(\frac{f(z_k)}{2\Gamma}\right)_{\Phi=\Phi_{max}}=1\Rightarrow\mathrm{Im}\, W=R\,\mathrm{sign}\, k\Rightarrow\left(\frac{f(z_k)}{2\Gamma}\right)_{\Phi=\Phi_{max}}=\frac{R}{2|\Gamma|} \tag{24}$$

$$iR\,\mathrm{sign}\, k e^{iR\,\mathrm{sign}\, k}=Re^{i\Phi_{\max}}\Rightarrow\Phi_{\max}=\left(R+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{sign}\, k \mod 2\pi \tag{25}$$

Взятием производных более высоких порядков можно получить, что:

$$\mathrm{Re}\, f(z_k)=R\,\mathrm{sign}\,\Gamma-\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{i^m q_m\left(-iR\,\mathrm{sign}\,\Gamma\right)}{\left(1-iR\,\mathrm{sign}\,\Gamma\right)^{2m-1}}\right)\frac{\left(\Phi-\Phi_{\max}\right)^{m+1}}{(m+1)!} \tag{26}$$

$$\mathrm{Re}\, f(z_k)=R\,\mathrm{sign}\,\Gamma+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(\Phi-\Phi_{\max}\right)^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\left\langle\left\langle {m-1 \atop k}\right\rangle\right\rangle\mathrm{Re}\left(\frac{i^m\left(iR\,\mathrm{sign}\,\Gamma\right)^{k+1}}{\left(1-iR\,\mathrm{sign}\,\Gamma\right)^{2m-1}},\right) \tag{27}$$

где принято обозначение $\left\langle\left\langle {m-1 \atop k}\right\rangle\right\rangle$ — Эйлеровы числа второго рода

Асимптотика W при $R\to\infty$

Несмотря на заявленное в заголовке, асимптотика хорошо работает и при небольших R.

$$W_k(z)=\log z+2\pi ik-\log\left(\log z+2\pi ik\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}c_{km}\log^m\left(\log z+2\pi ik\right)\left(\log z+2\pi ik\right)^{-k-m}$$
$$c_{km}=\frac{(-1)^k}{m!}c(k+m,k+1), \tag{28}$$

где $c(k+m,k+1)$ — беззнаковые числа Стирлинга первого рода.

Пренебрегая членами $O\left(\frac{\log(\log R+2\pi ik)}{\log R+2\pi ik}\right)$ в разложении функции Ламберта:

$$\begin{aligned} W_k\left(Z\right) &\approx \log R + i\Phi + 2\pi ik - \log\left(\log R + i\Phi + 2\pi ik\right) \\ &\approx \log R - \frac{1}{2}\log\left(\log^2 R + (2\pi k)^2\right) + i\left(\Phi + 2\pi k - \arctan\left(\frac{2\pi k}{\log R}\right)\right) \\ \mathrm{Re}\left(f(z_k)\right) &\approx -\left(\Phi + 2\pi k - \arctan\left(\frac{2\pi k}{\log R}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\log\left(\left(\frac{2\pi k}{R}\right)^2 + \frac{\log^2 R}{R^2}\right)\right) \end{aligned} \tag{29}$$

Из этого выражения мы видим, что $\bar{k} = O(R)$. Более детальный расчёт максимума последнего выражения по k приводит к:

$$|\bar{k}| \approx \left[\frac{1}{2\pi}\left(R + \left|\Phi + \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\Gamma\right|\right)\right] \tag{30}$$

Эта формула однозначно делит комплексную плоскость для Z на области выбора оптимального $\bar{k}$. Разложение $W_k(Z)$ с точностью до $O\left(\frac{\log^3 R}{R^3}\right)$ приводит к следующей формуле:

$$\mathrm{Re}(f(z_k)) = R\operatorname{sign}\Gamma + \frac{\left(\Phi + 2\pi\bar{k} + \left(R + \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sign}\Gamma\right)^2}{2R} + O\left(\frac{\log^3 R}{R^2}\right) \tag{31}$$

Решение уравнения $\mathrm{Re}(f(z_{k-\operatorname{sign}\Gamma})) = \mathrm{Re}(f(z_k))$ приводит к тому, что оптимум $\bar{k}$, найденный в уравнении 30, имеет точность определения границы областей оптимального $\bar{k}$ на комплексной плоскости для Z порядка $O\left(\frac{\log^3 R}{R}\right)$.

Финал

Таким образом, можно получать либо достаточно точную асимптотику из выражения 19, либо, при желании сэкономить на расчёте функции Ламберта, можно использовать более наглядную формулу для модуля в окрестности точки максимума:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{iZ}{2\Gamma}\right)^n \frac{e^{i\Gamma n^2}}{n!}\right| \approx \frac{1}{\sqrt{R}}\left(1 - \frac{1}{4R^2} + \frac{5}{32R^4} + \ldots\right)\exp\left(\frac{R}{2|\Gamma|} - \frac{(\delta-\Gamma)^2}{4R|\Gamma|} + \ldots\right), \tag{32}$$

где ввели обозначение $\delta = \Phi + 2\pi\bar{k} + \left(R + \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sign}\Gamma$