

# Математическое приложение

Нугманов Булат

21 февраля 2023 г.

Данный документ является наброском математического приложения, результаты которого точно выполняются численно. А ещё надо будет это перевести.

1. Переписывание ряда через интеграл
2. Нахождение перевальных точек
3. Асимптотика кривых постоянной фазы через перевальные точки — не знаю, надо ли об этом писать?
4. Деформация контура в зависимости от знака  $\Gamma$  — пока нет
5. Подсчёт вкладов по методу перевала
6. Вставка с полиномами Белла и числами Стирлинга для явного подсчёта коэффициентов в методе перевала
7. Слова о том, что при  $|\Gamma| \ll 1$  достаточно учитывать лишь одно слагаемое
8. Точное значение в максимуме
9. Выбор  $\bar{k}$
10. Граница выбора  $\bar{k}$
11. Итог: асимптотика ряда

## Вступление

In this section we will find the asymptotics of the series of the following form:

$$F(A, e^{i\Gamma}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n e^{i\Gamma n^2}}{n!}, \quad (1)$$

when  $\Gamma \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{C}$  and  $|\Gamma| \ll 1$ .

Наметим примерный план дальнейшего рассказа. Первым делом мы перейдём от суммы к расчёту интеграла по действительной оси. Далее мы воспользуемся отсутствием полюсов подынтегральной функции и деформируем контур так, чтоб он проходил через перевальные точки по кривым постоянной фазы. После этого математическая мысль может двигаться в двух направлениях. С одной стороны мы можем строго вывести все остаточные члены, используя формулу CFWW и ассоциированные числа Стирлинга. С другой стороны мы можем

использовать то, что при  $|\Gamma| \ll 1$  основной вклад в получившуюся сумму вносит лишь одно слагаемое с номером  $\bar{k}$ . Можно воспользоваться приближёнными вычислениями для определения  $\bar{k}$ , а далее можно найти простую асимптотику при  $|A\Gamma| \gg 1$ . Эти направления мысли почти не связаны. И если первая служит больше для теоретической полноты описания, то вторая больше служит для численных расчётов.

## Переход от суммы к интегралу

Вычисление суммы "табличными" методами существенно осложняется множителем  $\exp(i\Gamma n^2)$ . Воспользуемся следующей формулой (здесь и далее мы будем подразумевать все интегралы в смысле главного значения):

$$\exp(i\Gamma n^2) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \Gamma}}{2\sqrt{\pi|\Gamma|}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{4\Gamma} + inz\right) dz \quad (2)$$

Применим данную формулу для ряда (1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n e^{i\Gamma n^2}}{n!} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \Gamma}}{2\sqrt{\pi|\Gamma|}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{4\Gamma} + iAz\right) dz \quad (3)$$

Приведём данную формулу к более удобному для применения метода перевала виду. Для этого введём обозначения

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2}{2i} + iZe^{iz} \\ Z &= -2iA\Gamma = Re^{i\Phi}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Phi \in (-\pi, \pi]$  и  $R \in \mathbb{R}$ . И наконец,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n e^{i\Gamma n^2}}{n!} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \Gamma}}{2\sqrt{\pi|\Gamma|}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{f(z)}{2\Gamma}\right) dz \quad (5)$$

## Применение метода перевала

### Перевальные точки

Начнём с поиска перевальных точек, которые являются решением  $f'(z) = 0$ . Бесконечное множество таких решений можно занумеровать номером  $k$ :

$$e^{iz_k} = \frac{z_k}{iZ} \Rightarrow z_k = iW_k(Z), \quad (6)$$

где  $W_k$  —  $k$ -ая ветвь  $W$ -функции Ламберта.

### Деформация контура через кривые постоянной фазы

Здесь должно быть объяснение того, почему мы выбираем только некоторые из всего множества точек. График с положением перевальных точек, кривыми постоянных фаз через каждую из точек, доказательство того, что номера выбора перевальных точек должны быть

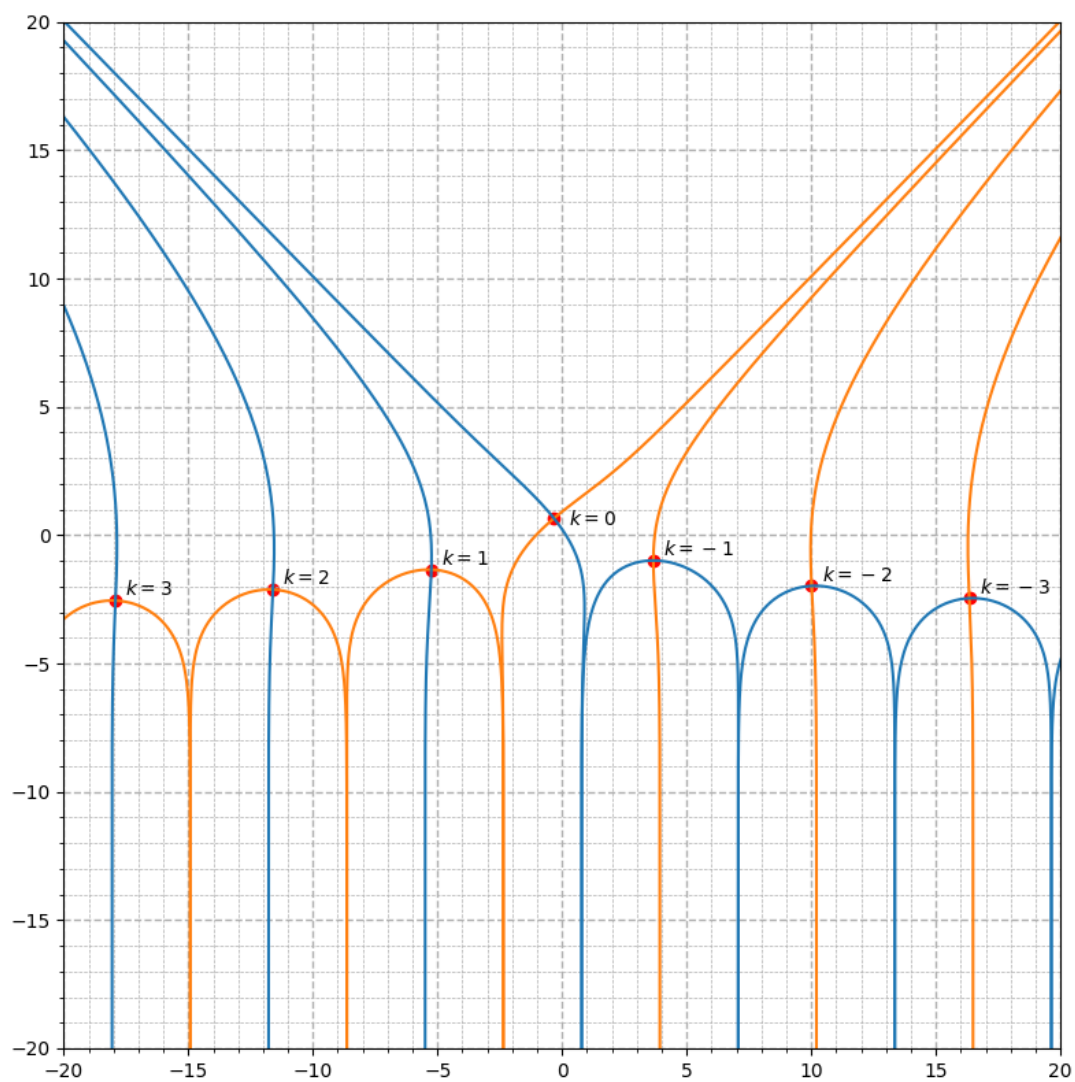


Рис. 1: Кривые постоянной фазы для интеграла 5 при  $Z = 1 + i$ . Синим указаны кривые наискорейшего спуска  $\gamma_k$  при  $\Gamma < 0$ , оранжевым — при  $\Gamma > 0$ . Красные точки пересечения кривых — точки перевала  $f'(z_k) = 0$ .

инвариантны относительно  $Z$  и пара слов про расходимость теории при особом случае  $Z = -e^{-1}$ . А ещё пара слов о том, почему контур действительно деформируется и удалённых областях интеграл по дополнительным (непервальным) контурам стремится к нулю.

Правильно выбрав контура интегрирования  $\gamma_k$ , мы можем сформулировать следующее:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{f(z)}{2\Gamma}\right) dz = \sum_{k=0}^{-\text{sign } \Gamma \cdot \infty} \int_{\gamma_k} \exp\left(\frac{f(z)}{2\Gamma}\right) dz \quad (7)$$

## Интеграл по $\gamma_k$

Для расчёта интеграла вдоль некоторой  $\gamma_k$ , мы воспользуемся формулой CFWW [1]. Для её применения нам необходимо разложение в ряд Тейлора функции  $f$  в окрестности перевальной точки:

$$f(z) = \underbrace{\frac{z_k^2}{2i} + z_k}_{f(z_k)} + \underbrace{\frac{-i - z_k}{2}}_{a_0} (z - z_k)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{-i^n z_k}{(n+2)!}}_{a_1, a_2, \dots} (z - z_k)^{n+2} \quad (8)$$

Для использования CFWW мысленно разделим контур интегрирования на две части, начинающиеся в  $z_k$  уходящие на бесконечность. Учитывая, что перевальная точка имеет второй порядок<sup>1</sup>, запишем итоговый результат:

$$\int_{\gamma_k} \exp\left(\frac{f(z)}{2\Gamma}\right) dz = \exp\left(\frac{f(z_k)}{2\Gamma}\right) \sqrt{\frac{2\Gamma}{a_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) (2\Gamma)^n c_{2n} \quad (9)$$

$$c_{2n} = \sum_{j=0}^{2n} \frac{C^j}{a_0^{n+j}} \hat{B}_{2n,j}(a_1, a_2, \dots, a_{2n-j+1}),$$

где  $\hat{B}_{2n,j}(a_1, a_2, \dots, a_{2n-j+1})$  — экспоненциальные полиномы Белла от коэффициентов в разложении  $f$  по ряду Тейлора (8).

## Полиномы Белла

Полиномы Белла задаются имеют производящую функцию:

$$\exp\left(u \sum_{j=1}^{\infty} x_j t^j\right) = \sum_{n \geq k \geq 0} \hat{B}_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}) t^n \frac{u^k}{k!} \quad (10)$$

Из этого определения легко можно вывести:

$$\begin{aligned} \hat{B}_{2n,j}(\zeta x_1, \zeta x_2, \dots, \zeta x_{2n-j+1}) &= \zeta^j \hat{B}_{2n,j}(x_1, x_2, \dots, x_{2n-j+1}) \\ \hat{B}_{2n,j}(\zeta x_1, \zeta^2 x_2, \dots, \zeta^{2n-j+1} x_{2n-j+1}) &= \zeta^{2n} \hat{B}_{2n,j}(x_1, x_2, \dots, x_{2n-j+1}) \end{aligned} \quad (11)$$

Применим эти формулы для полиномов Белла, встречающихся в (9):

$$\begin{aligned} \hat{B}_{2n,j}(a_1, a_2, \dots, a_{2n-j+1}) &= \hat{B}_{2n,j}\left(\frac{-iz_k}{3!}, \frac{-i^2 z_k}{4!}, \dots, \frac{-i^{2n-j+1} z_k}{(2n-j+3)!}\right) \\ &= (-1)^n (-z_k)^j \hat{B}_{2n,j}\left(\frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \dots, \frac{1}{(2n-j+3)!}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

<sup>1</sup>Особый случай  $z_k = -i$  или, что то же самое  $W_k(Z) = -1$  соответствует точке ветвления  $W$ -функции Ламберта. При этом  $Z = -e^{-1}$ , а перевальные точки соответствующие  $k = -1, 0, 1$  схлопываются в одну. Мы не будем рассматривать этот крайне редкий случай.

## Связь полиномов Белла и чисел Стирлинга

В данном разделе мы докажем следующую формулу:

$$\hat{B}_{n,k} \left( \frac{1}{r!}, \frac{1}{(r+1)!}, \dots, \frac{1}{(n-k+r)!} \right) = \frac{k!}{(n+(r-1)k)!} S_r(n+(r-1)k, k) \quad (13)$$

где далее можно использовать рекуррентную формулу [2, р. 222]

$$S_r(n+1, k) = k S_r(n, k) + C_n^r S_r(n-r+1, k-1) \quad (14)$$

### Доказательство

Ассоциированные числа Стирлинга имеют следующее определение [2, р. 222]

$$\exp \left( u \left( \frac{t^r}{r!} + \frac{t^{r+1}}{(r+1)!} + \dots \right) \right) = \sum_{n=(r+1)k, k=0}^{\infty} S_r(n, k) u^k \frac{t^n}{n!} \quad (15)$$

Сравнивая производящую функцию чисел Стирлинга (15) и полиномов Бернулли (10), можно заметить некоторое сходство:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq k \geq 0} \hat{B}_{n,k} \left( \frac{1}{r!}, \frac{1}{(r+1)!}, \dots, \frac{1}{(n-k+r)!} \right) t^n \frac{u^k}{k!} &= \exp \left( \frac{u}{t^{r-1}} \left( \frac{t^r}{r!} + \frac{t^{r+1}}{(r+1)!} + \dots \right) \right) \\ &= \sum_{n,k}^{\infty} S_r(n, k) \frac{u^k}{t^{(r-1)k}} \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n,k}^{\infty} S_r(n+(r-1)k, k) u^k \frac{t^n}{(n+(r-1)k)!} \end{aligned} \quad (16)$$

Сравнивая первую и последнюю строчку полученного выражения получаем требуемое (13).

### Точная формула

Собирая воедино формулы (9), (12), (13) приходим к следующему:

$$\begin{aligned} \Gamma \left( n + \frac{1}{2} \right) c_{2n} &= \Gamma \left( n + \frac{1}{2} \right) \sum_{j=0}^{2n} C_{-n-\frac{1}{2}}^j \frac{1}{a_0^{n+j}} \hat{B}_{2n,j} (a_1, a_2, \dots, a_{2n-j+1}) \\ &= \sum_{j=0}^{2n} \frac{\Gamma \left( n + \frac{1}{2} \right) \Gamma \left( -n + \frac{1}{2} \right)}{j! \Gamma \left( -n - j + \frac{1}{2} \right)} \frac{1}{\left( \frac{-i-z_k}{2} \right)^{n+j}} (-1)^n (-z_k)^j \hat{B}_{2n,j} \left( \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \dots, \frac{1}{(2n-j+3)!} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{2n} \frac{\frac{\pi}{\sin \left( \pi n + \frac{\pi}{2} \right)}}{j! \frac{(-4)^{n+j} (n+j)!}{(2n+2j)!} \sqrt{\pi}} \frac{(-1)^n (-z_k)^j}{\left( \frac{-i-z_k}{2} \right)^{n+j}} \frac{j!}{(2n+2j)!} S_3(2n+2j, j) \\ &= \sum_{j=0}^{2n} \frac{\sqrt{\pi}}{(-4)^{n+j} (n+j)!} \frac{(-z_k)^j}{\left( \frac{-i-z_k}{2} \right)^{n+j}} S_3(2n+2j, j) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n (i+z_k)^n} \sum_{j=0}^{2n} \left( -\frac{1}{2} \frac{z_k}{i+z_k} \right)^j \frac{S_3(2n+2j, j)}{(n+j)!} \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя этот результат в (5), (7), находим:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{iZ}{2\Gamma} \right)^n \frac{e^{i\Gamma n^2}}{n!} &= e^{\frac{i\pi}{4} \operatorname{sign} \Gamma} \sum_{k=0}^{-\operatorname{sign} \Gamma \cdot \infty} \frac{\exp \left( \frac{-i-i(z_k+i)^2}{4\Gamma} \right)}{\sqrt{-\operatorname{sign} \Gamma (i+z_k)}} \times \dots \\ &\dots \times \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\Gamma}{i+z_k} \right)^n \sum_{j=0}^{2n} \left( -\frac{1}{2} \frac{z_k}{i+z_k} \right)^j \frac{S_3(2n+2j, j)}{(n+j)!}, \end{aligned} \quad (18)$$

где выбор ветви корня определяется из условия:

$$\arg \sqrt{-\operatorname{sign} \Gamma (i+z_k)} \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \quad (19)$$

Такое условие обусловлено направлением  $\gamma_k$  в точке перевала. И так как изначальный интеграл (5) брался в пределах  $(-\infty, \infty)$ , то  $\gamma_k$  так же имеет направление слева направо.

Если сделать нормальное пояснение картинок  $\gamma_k$  в разделе про деформацию контура, то здесь всё станет понятно и очевидно...

## Наилучшее $\bar{k}$

Далее мы переходим к менее точным оценкам.

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{iZ}{2\Gamma} \right)^n \frac{e^{i\Gamma n^2}}{n!} \right| \approx \frac{\exp \left( \frac{-i-i(z_{\bar{k}}+i)^2}{4\Gamma} \right)}{|i+z_{\bar{k}}|^{\frac{1}{2}}} \quad (20)$$

Выпишем действительную часть показателя экспоненты:

$$\operatorname{Re}(f(z_k)) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(-i(z_k+i)^2) = -\operatorname{Im}(W_k(Z)) (1 + \operatorname{Re}(W_k(Z))) \quad (21)$$

## Точное поведение $\operatorname{Re} f(z_k)$

Рассмотрим функцию  $\operatorname{Re} f(iW(Re^{i\Phi}))$  как функцию от  $\Phi \in (-\infty, \infty)$ , учитывая, что при изменении  $\Phi$  на  $2\pi$  меняется ветвь  $W$ -функции Ламберта. (Для сокращения дальнейших формул используем в данном параграфе сокращение  $W = W(Z = Re^{i\Phi})$ ). Найдём максимум функции  $\operatorname{Re} f(iW(Re^{i\Phi}))$  от  $\Phi$ . Для этого нам понадобится формула для производной [3, formula 3.2]:

$$\frac{\partial W}{\partial \Phi} = \frac{iW}{1+W} \quad (22)$$

Подставляя это выражение в (21):

$$\frac{\partial}{\partial \Phi} \operatorname{Re}(f(z_k)) = -\operatorname{Re}(W) \quad (23)$$

В точке максимума  $\frac{\partial}{\partial \Phi} \operatorname{Re}(f(z_k)) = 0$ . Отсюда из определения  $W$ -функции Ламберта

$$i \operatorname{Im} W e^{i \operatorname{Im} W} = R e^{i \Phi_{\max}} \Rightarrow |\operatorname{Im} W| = R \quad (24)$$

Неопределённость знака  $\text{Im } W$  можно снять, если учесть, что мы ищем именно максимум, а не произвольный экстремум:

$$\text{sign} \left( \frac{f(z_k)}{2\Gamma} \right)_{\Phi=\Phi_{\max}} = 1 \Rightarrow \text{Im } W = -R \text{sign } \Gamma \Rightarrow \left( \frac{f(z_k)}{2\Gamma} \right)_{\Phi=\Phi_{\max}} = \frac{R}{2|\Gamma|} \quad (25)$$

Используя определение  $W$ -функции Ламберта, находим  $\Phi_{\max}$ :

$$-iR \text{sign } \Gamma e^{-iR \text{sign } \Gamma} = R e^{i\Phi_{\max}} \Rightarrow \Phi_{\max} = - \left( R + \frac{\pi}{2} \right) \text{sign } \Gamma \mod 2\pi \quad (26)$$

Взятием производных более высоких порядков [3, formula 3.5] можно получить поведение в окрестности точки максимума:

$$\text{Re } f(z_k) = R \text{sign } \Gamma - \sum_{m=1}^{\infty} \text{Re} \left( \frac{i^m q_m (-iR \text{sign } \Gamma)}{(1 - iR \text{sign } \Gamma)^{2m-1}} \right) \frac{(\Phi - \Phi_{\max})^{m+1}}{(m+1)!} \quad (27)$$

$$\text{Re } f(z_k) = R \text{sign } \Gamma + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\Phi - \Phi_{\max})^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \left\langle \left\langle \begin{matrix} m-1 \\ k \end{matrix} \right\rangle \right\rangle \text{Re} \left( \frac{i^m (iR \text{sign } \Gamma)^{k+1}}{(1 - iR \text{sign } \Gamma)^{2m-1}} \right) \quad (28)$$

где принято обозначение  $\left\langle \left\langle \begin{matrix} m-1 \\ k \end{matrix} \right\rangle \right\rangle$  — Эйлеровы числа второго рода.

## Асимптотика $W$ при $R \rightarrow \infty$

Несмотря на заявленное в заголовке, асимптотика хорошо работает и при небольших  $R > e^{-1}$ . Используем следующее асимптотическое выражение [3, formula 4.20]

$$W_k(z) = \log z + 2\pi i k - \log(\log z + 2\pi i k) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{km} \log^m(\log z + 2\pi i k) (\log z + 2\pi i k)^{-k-m}$$

$$c_{km} = \frac{(-1)^k}{m!} c(k+m, k+1), \quad (29)$$

где  $c(k+m, k+1)$  — беззнаковые числа Стирлинга первого рода.

Пренебрегая членами  $O\left(\frac{\log(\log R + 2\pi i k)}{\log R + 2\pi i k}\right)$  в разложении функции Ламберта:

$$W_k(Z) \approx \log R + i\Phi + 2\pi i k - \log(\log R + i\Phi + 2\pi i k)$$

$$\approx \log R - \frac{1}{2} \log(\log^2 R + (2\pi k)^2) + i \left( \Phi + 2\pi k - \arctan \left( \frac{2\pi k}{\log R} \right) \right) \quad (30)$$

$$\text{Re}(f(z_k)) \approx - \left( \Phi + 2\pi k - \arctan \left( \frac{2\pi k}{\log R} \right) \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \log \left( \left( \frac{2\pi k}{R} \right)^2 + \frac{\log^2 R}{R^2} \right) \right)$$

Из этого выражения мы видим, что  $\bar{k} = O(R)$ . Более детальный расчёт максимума последнего выражения по  $k$  приводит к:

$$|\bar{k}| \approx \left\lceil \frac{1}{2\pi} \left( R + \left| \Phi + \frac{\pi}{2} \text{sign } \Gamma \right| \right) \right\rceil \quad (31)$$

Эта формула однозначно делит комплексную плоскость для  $Z$  на области выбора оптимального  $\bar{k}$ . Разложение  $W_k(Z)$  с точностью до  $O\left(\frac{\log^3 R}{R^3}\right)$  приводит к следующей формуле:

$$\operatorname{Re}(f(z_{\bar{k}})) = R \operatorname{sign} \Gamma + \frac{(\Phi + 2\pi\bar{k} + (R + \frac{\pi}{2}) \operatorname{sign} \Gamma)^2}{2R} + O\left(\frac{\log^3 R}{R^2}\right) \quad (32)$$

Решение уравнения  $\operatorname{Re}(f(z_{k-\operatorname{sign} \Gamma})) = \operatorname{Re}(f(z_k))$  приводит к тому, что оптимум  $\bar{k}$ , найденный в уравнении (31), имеет точность определения границы областей оптимального  $\bar{k}$  на комплексной плоскости для  $Z$  порядка  $O\left(\frac{\log^3 R}{R}\right)$ .

## Финал

Таким образом, можно получать либо достаточно точную асимптотику из выражения (20), либо, при желании сэкономить на расчёте функции Ламберта, можно использовать более наглядную формулу для модуля в окрестности точки максимума:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{iZ}{2\Gamma} \right)^n \frac{e^{i\Gamma n^2}}{n!} \right| \approx \frac{1}{\sqrt{R}} \left( 1 - \frac{1}{4R^2} + \frac{5}{32R^4} + \dots \right) \exp \left( \frac{R}{2|\Gamma|} - \frac{(\delta - \Gamma)^2}{4R|\Gamma|} + \dots \right), \quad (33)$$

где ввели обозначение  $\delta = \Phi + 2\pi\bar{k} + (R + \frac{\pi}{2}) \operatorname{sign} \Gamma$ .

## Список литературы

- [1] Norman Bleistein and Richard A Handelsman. *Asymptotic expansions of integrals*. Ardent Media, 1975.
- [2] Louis Comtet. *Advanced Combinatorics: The art of finite and infinite expansions*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] Robert M Corless, Gaston H Gonnet, David EG Hare, David J Jeffrey, and Donald E Knuth. On the lambertw function. *Advances in Computational mathematics*, 5(1):329–359, 1996.