Математическое приложение

Нугманов Булат

4 декабря 2022 г.

Данный документ является наброском математического приложения, результаты которого точно выполняются численно. А ещё надо будет это перевести.

1. Переписывание ряда через интеграл
2. Нахождение перевальных точек
3. Асимптотика кривых постоянной фазы через перевальные точки — не знаю, надо ли об этом писать?
4. Деформация контура в зависимости от знака Γ — пока нет
5. Подсчёт вкладов по методу перевала
6. Вставка с полиномами Белла и числами Стирлинга для явного подсчёта коэффициентов в методе перевала
7. Слова о том, что при $|\Gamma| \ll 1$ достаточно учитывать лишь одно слагаемое
8. Точное значение в максимуме
9. Выбор $\overline{k}$
10. Граница выбора $\overline{k}$
11. Итог: асимптотика ряда

Вступление

In this section we will find the asymptotics of the series of the following form:

$$F(A, e^{i\Gamma}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n e^{i\Gamma n^2}}{n!}, \tag{1}$$

when $\Gamma \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{C}$ and $|\Gamma| \ll 1$.

Наметим примерный план дальнейшего рассказа. Первым делом мы перейдём от суммы к расчёту интеграла по действительной оси. Далее мы воспользуемся отсутствием полюсов подынтегральной функции и деформируем контур так, чтоб он проходил через перевальные точки по кривым постоянной фазы. После этого математическая мысль может двигаться в двух направлениях. С одной стороны мы можем строго вывести все остаточные члены, используя формулу CFWW и ассоциированные числа Стирлинга. С другой стороны мы можем использовать то, что при $|\Gamma| \ll 1$ основной вклад в получившуюся сумму вносит лишь одно слагаемое с номером $\bar{k}$. Можно воспользоваться приближёнными вычислениями для определения $\bar{k}$, а далее можно найти простую асимптотику при $|A\Gamma| \gg 1$. Эти направления мысли почти не связаны. И если первая служит больше для теоретической полноты описания, то вторая больше служит для численных расчётов.

Переход от суммы к интегралу

Вычисление суммы "табличными"методами существенно осложняется множителем $\exp\left(i\Gamma n^2\right)$. Воспользуемся следующей формулой (здесь и далее мы будем подразумевать все интегралы в смысле главного значения):

$$\exp\left(i\Gamma n^2\right) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\Gamma}}{2\sqrt{\pi|\Gamma|}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{4\Gamma} + inz\right) dz \tag{2}$$

Применим данную формулу для ряда (1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n e^{i\Gamma n^2}}{n!} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\Gamma}}{2\sqrt{\pi|\Gamma|}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{4\Gamma} + iAz\right) dz \tag{3}$$

Приведём данную формулу к более удобному для применения метода перевала виду. Для этого введём обозначения

$$\begin{gathered} f(z) = \frac{z^2}{2i} + iZe^{iz} \\ Z = -2iA\Gamma = Re^{i\Phi}, \end{gathered} \tag{4}$$

где $\Phi \in (-\pi, \pi]$ и $R \in \mathbb{R}$. И наконец,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n e^{i\Gamma n^2}}{n!} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\Gamma}}{2\sqrt{\pi|\Gamma|}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{f(z)}{2\Gamma}\right) dz \tag{5}$$

Применение метода перевала

Перевальные точки

Начнём с поиска перевальных точек, которые являются решением $f'(z) = 0$. Бесконечное множество таких решений можно занумеровать номером k:

$$e^{iz_k} = \frac{z_k}{iZ} \Rightarrow z_k = iW_k(Z), \tag{6}$$

где W_k — k-ая ветвь W-функции Ламберта.

Деформация контура через кривые постоянной фазы

Здесь должно быть объяснение того, почему мы выбриаем только некоторые из всего множества точек. График с положением перевальных точек, кривыми постоянных фаз через каждую из точек, доказательство того, что номера выбора перевальных точек должны быть

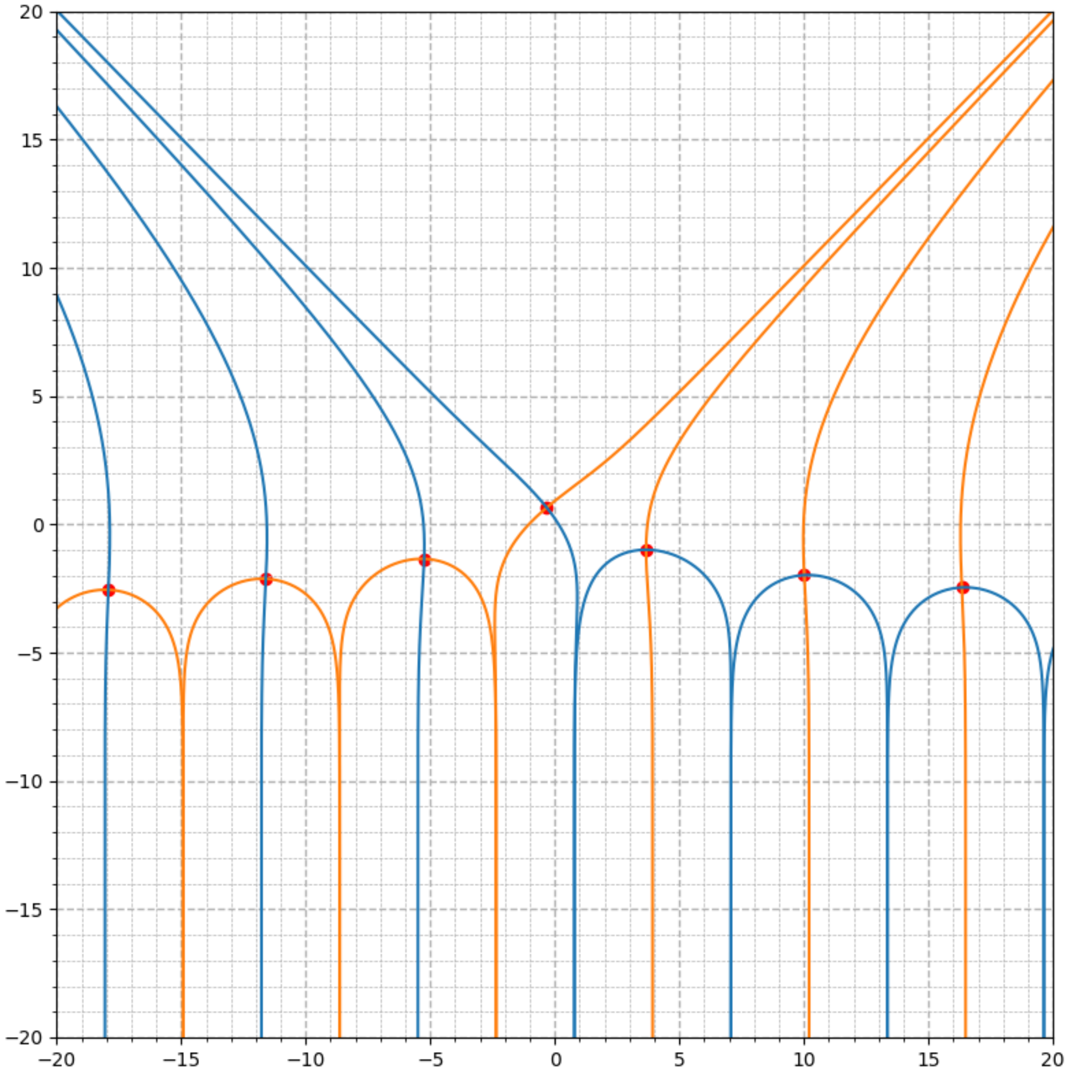

Рис. 1: Кривые постоянной фазы для интеграла 5 при $Z = 1 + i$. Синим указаны кривые наискорейшего спуска γ_k при $\Gamma < 0$, оранжевым — при $\Gamma > 0$. Красные точки пересечения кривых — точки перевала $f'(z_k) = 0$.

инвариантны относительно Z и пара слов про расходимость теории при особом случае $Z = -e^{-1}$. А ещё пара слов о том, почему контур действительно деформируется и удалённых областях интеграл по дополнительным (неперевальным) контурам стремится к нулю.

Правильно выбрав контура интегрирования γ_k, мы можем сформулировать следующее:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{f(z)}{2\Gamma}\right) dz = \sum_{k=0}^{-\operatorname{sign}\Gamma\cdot\infty} \int\limits_{\gamma_k} \exp\left(\frac{f(z)}{2\Gamma}\right) dz \tag{7}$$

Интеграл по γ_k

Для расчёта интеграла вдоль некоторой γ_k, мы воспользуемся формулой CFWW [1]. Для её применения нам необходимо разложение в ряд Тейлора функции f в окрестности перевальной точки:

$$f(z) = \underbrace{\frac{z_k^2}{2i} + z_k}_{f(z_k)} + \underbrace{\frac{-i - z_k}{2}}_{a_0}(z - z_k)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{-i^n z_k}{(n+2)!}}_{a_1,\, a_2, \ldots}(z - z_k)^{n+2} \tag{8}$$

Для использовании CFWW мысленно разделим контур интегрирования на две части, начинающиеся в z_k уходящие на бесконечность. Учитывая, что перевальная точка имеет второй порядок[1], запишем итоговый результат:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\gamma_k} \exp\left(\frac{f(z)}{2\Gamma}\right) dz = \exp\left(\frac{f(z_k)}{2\Gamma}\right) \sqrt{\frac{2\Gamma}{a_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) (2\Gamma)^n c_{2n} \\ c_{2n} = \sum_{j=0}^{2n} \frac{C^j_{-n-\frac{1}{2}}}{a_0^{n+j}} \hat{B}_{2n,j}\left(a_1, a_2, \ldots, a_{2n-j+1}\right),\end{gathered} \tag{9}$$

где $\hat{B}_{2n,j}\left(a_1, a_2, \ldots, a_{2n-j+1}\right)$ — экспоненциальные полиномы Белла от коэффициентов в разложении f по ряду Тейлора (8).

Полиномы Белла

Полиномы Белла задаются имеют производящую функцию:

$$\exp\left(u \sum_{j=1}^{\infty} x_j t^j\right) = \sum_{n \geq k \geq 0} \hat{B}_{n,k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1}\right) t^n \frac{u^k}{k!} \tag{10}$$

Из этого определения легко можно вывести:

$$\begin{aligned}\hat{B}_{2n,j}(\zeta x_1, \zeta x_2, \ldots, \zeta x_{2n-j+1}) &= \zeta^j \hat{B}_{2n,j}(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-j+1}) \\ \hat{B}_{2n,j}(\zeta x_1, \zeta^2 x_2, \ldots, \zeta^{2n-j+1} x_{2n-j+1}) &= \zeta^{2n} \hat{B}_{2n,j}(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-j+1})\end{aligned} \tag{11}$$

Применим эти формулы для полиномов Белла, встречающихся в (9):

$$\begin{aligned}\hat{B}_{2n,j}\left(a_1, a_2, \ldots, a_{2n-j+1}\right) &= \hat{B}_{2n,j}\left(\frac{-i z_k}{3!}, \frac{-i^2 z_k}{4!}, \ldots, \frac{-i^{2n-j+1} z_k}{(2n-j+3)!}\right) \\ &= (-1)^n (-z_k)^j \hat{B}_{2n,j}\left(\frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \ldots, \frac{1}{(2n-j+3)!}\right)\end{aligned} \tag{12}$$

[1] Особый случай $z_k = -i$ или, что то же самое $W_k(Z) = -1$ соответствует точке ветвления W-функции Ламберта. При этом $Z = -e^{-1}$, а перевальные точки соответствующие $k = -1, 0, 1$ схлопываются в одну. Мы не будем рассматривать этот крайне редкий случай.

Связь полиномов Белла и чисел Стирлинга

В данном разделе мы докажем следующую формулу:

$$\hat{B}_{n,k}\left(\frac{1}{r!},\frac{1}{(r+1)!},\dots,\frac{1}{(n-k+r)!}\right)=\frac{k!}{(n+(r-1)k)!}S_r(n+(r-1)k,k) \tag{13}$$

где далее можно использовать рекуррентную формулу [2, p. 222]

$$S_r(n+1,k)=kS_r(n,k)+C_n^rS_r(n-r+1,k-1) \tag{14}$$

Доказательство

Ассоциированные числа Стирлинга имеют следующее определение [2, p. 222]

$$\exp\left(u\left(\frac{t^r}{r!}+\frac{t^{r+1}}{(r+1)!}+\dots\right)\right)=\sum_{n=(r+1)k,k=0}^{\infty}S_r(n,k)u^k\frac{t^n}{n!} \tag{15}$$

Сравнивая производящую функцию чисел Стирлинга (15) и полиномов Бернулли (10), можно заметить некоторое сходство:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq k\geq 0}\hat{B}_{n,k}\left(\frac{1}{r!},\frac{1}{(r+1)!},\dots,\frac{1}{(n-k+r)!}\right)t^n\frac{u^k}{k!}&=\exp\left(\frac{u}{t^{r-1}}\left(\frac{t^r}{r!}+\frac{t^{r+1}}{(r+1)!}+\dots\right)\right)\\&=\sum_{n,k}^{\infty}S_r(n,k)\frac{u^k}{t^{(r-1)k}}\frac{t^n}{n!}\\&=\sum_{n,k}^{\infty}S_r(n+(r-1)k,k)u^k\frac{t^n}{(n+(r-1)k)!}\end{aligned} \tag{16}$$

Сравнивая первую и последнюю строчку полученного выражения получаем требуемое (13).

Точная формула

Собирая воедино формулы (9), (12), (13) приходим к следующему:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)c_{2n}&=\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{j=0}^{2n}C_{-n-\frac{1}{2}}^{j}\frac{1}{a_0^{n+j}}\hat{B}_{2n,j}\left(a_1,a_2,\dots,a_{2n-j+1}\right)\\&=\sum_{j=0}^{2n}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)}{j!\Gamma\left(-n-j+\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{\left(\frac{-i-z_k}{2}\right)^{n+j}}(-1)^n(-z_k)^j\hat{B}_{2n,j}\left(\frac{1}{3!},\frac{1}{4!},\dots,\frac{1}{(2n-j+3)!}\right)\\&=\sum_{j=0}^{2n}\frac{\frac{\pi}{\sin\left(\pi n+\frac{\pi}{2}\right)}}{j!\frac{(-4)^{n+j}(n+j)!}{(2n+2j)!}\sqrt{\pi}}\frac{(-1)^n(-z_k)^j}{\left(\frac{-i-z_k}{2}\right)^{n+j}}\frac{j!}{(2n+2j)!}S_3(2n+2j,j)\\&=\sum_{j=0}^{2n}\frac{\sqrt{\pi}}{(-4)^{n+j}(n+j)!}\frac{(-z_k)^j}{\left(\frac{-i-z_k}{2}\right)^{n+j}}S_3(2n+2j,j)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^n(i+z_k)^n}\sum_{j=0}^{2n}\left(-\frac{1}{2}\frac{z_k}{i+z_k}\right)^j\frac{S_3(2n+2j,j)}{(n+j)!}\end{aligned} \tag{17}$$

Подставляя этот результат в (5), (7), находим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{iZ}{2\Gamma}\right)^n\frac{e^{i\Gamma n^2}}{n!}=e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sign}\Gamma}\sum_{k=0}^{-\operatorname{sign}\Gamma\cdot\infty}\frac{\exp\left(\frac{-i-i(z_k+i)^2}{4\Gamma}\right)}{\sqrt{-\operatorname{sign}\Gamma\,(i+z_k)}}\times\dots$$
$$\dots\times\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\Gamma}{i+z_k}\right)^n\sum_{j=0}^{2n}\left(-\frac{1}{2}\frac{z_k}{i+z_k}\right)^j\frac{S_3(2n+2j,j)}{(n+j)!}, \tag{18}$$

где выбор ветви корня определяется из условия:

$$\arg\sqrt{-\operatorname{sign}\Gamma\,(i+z_k)}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \tag{19}$$

Такое условие обусловлено направлением γ_k в точке перевала. И так как изначальный интеграл (5) брался в пределах $(-\infty,\infty)$, то γ_k так же имеет направление слева направо.

Если сделать нормальное пояснение картинок γ_k в разделе про деформацию контура, то здесь всё станет понятно и очевидно...

Наилучшее $\bar{k}$

Далее мы переходим к менее точным оценкам.

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{iZ}{2\Gamma}\right)^n\frac{e^{i\Gamma n^2}}{n!}\right|\approx\frac{\exp\left(\frac{-i-i(z_{\bar{k}}+i)^2}{4\Gamma}\right)}{|i+z_{\bar{k}}|^{\frac{1}{2}}} \tag{20}$$

Выпишем действительную часть показателя экспоненты:

$$\operatorname{Re}\left(f(z_k)\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(-i(z_k+i)^2\right)=-\operatorname{Im}(W_k(Z))\left(1+\operatorname{Re}(W_k(Z))\right) \tag{21}$$

Точное поведение $\operatorname{Re} f(z_k)$

Рассмотрим функцию $\operatorname{Re} f(iW(Re^{i\Phi}))$ как функцию от $\Phi\in(-\infty,\infty)$, учитывая, что при изменении Φ на 2π меняется ветвь W-функции Ламберта. (Для сокращения дальнейших формул используем в данном параграфе сокращение $W=W(Z=Re^{i\Phi})$). Найдём максимум функции $\operatorname{Re} f(iW(Re^{i\Phi}))$ от Φ. Для этого нам понадобиться формула для производной [3, formula 3.2]:

$$\frac{\partial W}{\partial\Phi}=\frac{iW}{1+W} \tag{22}$$

Подставляя это выражение в (21):

$$\frac{\partial}{\partial\Phi}\operatorname{Re}\left(f(z_k)\right)=-\operatorname{Re}(W) \tag{23}$$

В точке максимума $\frac{\partial}{\partial\Phi}\operatorname{Re}\left(f(z_k)\right)=0$. Отсюда из определения W-функции Ламберта

$$i\operatorname{Im}We^{i\operatorname{Im}W}=Re^{i\Phi_{\max}}\Rightarrow|\operatorname{Im}W|=R \tag{24}$$

Неопределённость знака $\operatorname{Im} W$ можно снять, если учесть, что мы ищем именно максимум, а не произвольный экстремум:

$$\operatorname{sign}\left(\frac{f(z_k)}{2\Gamma}\right)_{\Phi=\Phi_{max}} = 1 \Rightarrow \operatorname{Im} W = -R \operatorname{sign}\Gamma \Rightarrow \left(\frac{f(z_k)}{2\Gamma}\right)_{\Phi=\Phi_{max}} = \frac{R}{2|\Gamma|} \tag{25}$$

Используя определение W-функции Ламберта, находим $\Phi_{\max}$:

$$-iR \operatorname{sign}\Gamma e^{-iR \operatorname{sign}\Gamma} = Re^{i\Phi_{\max}} \Rightarrow \Phi_{\max} = -\left(R + \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sign}\Gamma \mod 2\pi \tag{26}$$

Взятием производных более высоких порядков [3, formula 3.5] можно получить поведение в окрестности точки максимума:

$$\operatorname{Re} f(z_k) = R \operatorname{sign}\Gamma - \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{i^m q_m\left(-iR \operatorname{sign}\Gamma\right)}{\left(1 - iR \operatorname{sign}\Gamma\right)^{2m-1}}\right) \frac{\left(\Phi - \Phi_{\max}\right)^{m+1}}{(m+1)!} \tag{27}$$

$$\operatorname{Re} f(z_k) = R \operatorname{sign}\Gamma + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\Phi - \Phi_{\max}\right)^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \left\langle\!\!\left\langle {m-1 \atop k} \right\rangle\!\!\right\rangle \operatorname{Re}\left(\frac{i^m \left(iR \operatorname{sign}\Gamma\right)^{k+1}}{\left(1 - iR \operatorname{sign}\Gamma\right)^{2m-1}},\right) \tag{28}$$

где принято обозначение $\left\langle\!\left\langle {m-1 \atop k} \right\rangle\!\right\rangle$ — Эйлеровы числа второго рода.

Асимптотика W при $R \to \infty$

Несмотря на заявленное в заголовке, асимптотика хорошо работает и при небольших $R > e^{-1}$. Используем следующее асимптотическое выражение [3, formula 4.20]

$$\begin{aligned} W_k(z) &= \log z + 2\pi ik - \log\left(\log z + 2\pi ik\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{km} \log^m\left(\log z + 2\pi ik\right)\left(\log z + 2\pi ik\right)^{-k-m} \\ c_{km} &= \frac{(-1)^k}{m!} c(k+m, k+1), \end{aligned} \tag{29}$$

где $c(k+m, k+1)$ — беззнаковые числа Стирлинга первого рода.

Пренебрегая членами $O\left(\frac{\log(\log R + 2\pi ik)}{\log R + 2\pi ik}\right)$ в разложении функции Ламберта:

$$\begin{aligned} W_k\left(Z\right) &\approx \log R + i\Phi + 2\pi ik - \log\left(\log R + i\Phi + 2\pi ik\right) \\ &\approx \log R - \frac{1}{2}\log\left(\log^2 R + (2\pi k)^2\right) + i\left(\Phi + 2\pi k - \arctan\left(\frac{2\pi k}{\log R}\right)\right) \\ \operatorname{Re}\left(f(z_k)\right) &\approx -\left(\Phi + 2\pi k - \arctan\left(\frac{2\pi k}{\log R}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\log\left(\left(\frac{2\pi k}{R}\right)^2 + \frac{\log^2 R}{R^2}\right)\right) \end{aligned} \tag{30}$$

Из этого выражения мы видим, что $\bar{k} = O(R)$. Более детальный расчёт максимума последнего выражения по k приводит к:

$$|\bar{k}| \approx \left[\frac{1}{2\pi}\left(R + \left|\Phi + \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\Gamma\right|\right)\right] \tag{31}$$

Эта формула однозначно делит комплексную плоскость для Z на области выбора оптимального $\bar{k}$. Разложение $W_k(Z)$ с точностью до $O\left(\frac{\log^3 R}{R^3}\right)$ приводит к следующей формуле:

$$\operatorname{Re}(f(z_{\bar{k}})) = R \operatorname{sign}\Gamma + \frac{\left(\Phi + 2\pi\bar{k} + \left(R + \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sign}\Gamma\right)^2}{2R} + O\left(\frac{\log^3 R}{R^2}\right) \tag{32}$$

Решение уравнения $\operatorname{Re}(f(z_{k-\operatorname{sign}\Gamma})) = \operatorname{Re}(f(z_k))$ приводит к тому, что оптимум $\bar{k}$, найденный в уравнении (31), имеет точность определения границы областей оптимального $\bar{k}$ на комплексной плоскости для Z порядка $O\left(\frac{\log^3 R}{R}\right)$.

Финал

Таким образом, можно получать либо достаточно точную асимптотику из выражения (20), либо, при желании сэкономить на расчёте функции Ламберта, можно использовать более наглядную формулу для модуля в окрестности точки максимума:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{iZ}{2\Gamma}\right)^n \frac{e^{i\Gamma n^2}}{n!}\right| \approx \frac{1}{\sqrt{R}}\left(1 - \frac{1}{4R^2} + \frac{5}{32R^4} + \dots\right)\exp\left(\frac{R}{2|\Gamma|} - \frac{(\delta-\Gamma)^2}{4R|\Gamma|} + \dots\right), \tag{33}$$

где ввели обозначение $\delta = \Phi + 2\pi\bar{k} + \left(R + \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sign}\Gamma$.

Список литературы

[1] Norman Bleistein and Richard A Handelsman. *Asymptotic expansions of integrals*. Ardent Media, 1975.

[2] Louis Comtet. *Advanced Combinatorics: The art of finite and infinite expansions*. Springer Science & Business Media, 2012.

[3] Robert M Corless, Gaston H Gonnet, David EG Hare, David J Jeffrey, and Donald E Knuth. On the lambertw function. *Advances in Computational mathematics*, 5(1):329–359, 1996.