Разложение z_k

Разложение функции Ламберта из статьи

Следующая формула взята из статьи "On the Lambert W Function"(DOI:10.1007/BF02124750), формула (4.20):

$$W_k(z) = \log z + 2\pi ik - \log\left(\log z + 2\pi ik\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{km}\log^m\left(\log z + 2\pi ik\right)\left(\log z + 2\pi ik\right)^{-k-m} \tag{1}$$

Для того, чтоб ветви функции Ламберта совпадали с общепринятыми, ветви $\log z$ необходимо так же брать привычными — с разрезом на отрицательных числах и нулевой мнимой частью при положительных z. Коэффициенты c_{km} определены в статье после формулы (4.18):

$$c_{km} = \frac{(-1)^k}{m!}c(k+m, k+1) \tag{2}$$

$c(k+m, k+1)$ — это беззнаковые числа Стирлинга первого рода. В вольфраме они обозначаются как "Abs@StirlingS1[k+m, k+1]".

В нашей же задаче, требуется определить $z_k = \frac{i}{2}W_k(-2i\alpha\gamma)$. Обозначая $z = -2i\alpha\gamma$, $k+m=n$, получаем:

$$\begin{aligned} -2iz_k &= W_k(z) \\ &= \log z + 2\pi ik - \log\left(\log z + 2\pi ik\right) + \dots \\ &\dots + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{m!}c(n, n-m+1)\frac{\log^m\left(\log z + 2\pi ik\right)}{\left(\log z + 2\pi ik\right)^n} \end{aligned} \tag{3}$$

В такой форме наглядно видно разложение по малости остаточных членов. В дальнейшем будет видно, что большим параметром при разложении здесь является номер функции Ламберта — k. Ещё можно использовать знаковые числа Стирлинга $\left(s(n,k) = (-1)^{n-k}c(n,k) \Rightarrow (-1)^{n-m}c(n, n-m+1) = (-1)^{n+1}s(n, n-m+1)\right)$, однако в этом нет пока необходимости.

Метод перевала с остаточными членами

Общая теория метода перевала

Следует быть осторожным при использовании чужих формул по методу перевала. Сейчас будет сформулировано утверждение под названием "Perron's formula" [1]. Это формула для нахождения интеграла через перевальную точку z_0 вдоль кривой наискорейшего спуска γ.

$$\begin{gathered} \int_\gamma e^{\lambda f(z)}dz = e^{\lambda f(z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{c_{2n}}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}} \\ c_{2n} = \frac{1}{(2n)!}\left[\left(\frac{d}{dz}\right)^{2n}\left\{\frac{(z-z_0)^2}{f(z)-f(z_0)}\right\}^{n+\frac{1}{2}}\right]_{z=z_0} \end{gathered} \tag{4}$$

[1]Формула (2.5) в файле "Метод перевала с остаточными членами". Сразу рассмотрим более частный случай, имеющий непосредственное влияние на нашу задачу. А именно возьмём перевальную точку второго порядка $m=2$, положим функцию рядом с экспонентой под интегралом $g(z)=1$, будем считать, что контур проходит через перевальную точку, а не имеет в ней начало или конец, как это приведено в книге.

Если же использовать разложение функции f в ряд Тейлора, то можно получить "Campbell – Froman – Walles – Wojdylo formula"[2].

$$\begin{gathered}
f(z) = f(z_0) + \sum_{p=0}^{\infty} a_p (z - z_0)^{p+2} \\
c_{2n} = \frac{1}{a_0^{n+\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{2n} C^j_{-n-\frac{1}{2}} \frac{1}{a_0^j} \hat{B}_{2n,j} \left(a_1, a_2, \ldots, a_{2n-j+1}\right)
\end{gathered} \tag{5}$$

Обобщённые числа Стирлинга

Они упоминаются в английской вики на странице о числах Стирлинга. Там же приводится ссылка на книгу Кометта, посвящённую комбинаторике. (см. papers)

$$\exp\left(u\left(\frac{t^r}{r!} + \frac{t^{r+1}}{(r+1)!} + \ldots\right)\right) = \sum_{n=(r+1)k,k=0}^{\infty} S_r(n,k) u^k \frac{t^n}{n!} \tag{6}$$

Для чисел Стирлинга есть рекуррентная формула всё в той же книжке "Advanced combinatorics":

$$S_r(n+1,k) = kS_r(n,k) + C_n^r S_r(n-r+1,k-1) \tag{7}$$

Немного о полиномах Белла

$$\exp\left(u \sum_{j=1}^{\infty} x_j t^j\right) = \sum_{n \geq k \geq 0} \hat{B}_{n,k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1}\right) t^n \frac{u^k}{k!} \tag{8}$$

Подставляя необходимые x_j в нашем случае, получаем следующий ряд:

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq k \geq 0} \hat{B}_{n,k}\left(\frac{1}{r!}, \frac{1}{(r+1)!}, \ldots, \frac{1}{(n-k+r)!}\right) t^n \frac{u^k}{k!} &= \exp\left(\frac{u}{t^{r-1}}\left(\frac{t^r}{r!} + \frac{t^{r+1}}{(r+1)!} + \ldots\right)\right) \\
&= \sum_{n,k}^{\infty} S_r(n,k) \frac{u^k}{t^{(r-1)k}} \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n,k}^{\infty} S_r(n+(r-1)k,k) u^k \frac{t^n}{(n+(r-1)k)!}
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\hat{B}_{n,k}\left(\frac{1}{r!}, \frac{1}{(r+1)!}, \ldots, \frac{1}{(n-k+r)!}\right) = \frac{k!}{(n+(r-1)k)!} S_r(n+(r-1)k,k) \tag{10}$$

Применение теории

Как упоминается в приложении к диплому:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n e^{i\gamma n^2}}{n!} = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{x^2}{\gamma} + \alpha e^{2ix}} dx \quad = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{\gamma}\left(-ix^2 + \alpha\gamma e^{2ix}\right)} dx \tag{11}$$

[2] формула (1.11) в книжке по методу перевала.

В таком виде очевидно, что в формуле 4 будут использоваться следующие замены: $\lambda \rightsquigarrow \frac{1}{\gamma}$, $f(x) \rightsquigarrow -ix^2 + \alpha\gamma e^{2ix} = -ix^2 - \frac{z}{2i}e^{2ix}$. (А так же вспомним обозначение из первой части $z = -2i\alpha\gamma$).

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(z_k)}{(x - z_k)^2} &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{f^{(p+2)}(z_k)}{(p+2)!}(x - z_k)^p \\ &= \underbrace{\left(-i - ize^{2iz_k}\right)}_{a_0} - \sum_{p=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(2i)^{p+1} ze^{2iz_k}}{(p+2)!}}_{a_1, a_2, \ldots}(x - z_k)^p \end{aligned} \tag{12}$$

Теперь мы готовы воспользоваться формулой 5 и выразить интеграл по перевальному контуру через z_k (а так же используем формулу 5.6 из моего диплома):

$$\begin{aligned} &\int_{\gamma_k} e^{\frac{1}{\gamma}\left(-ix^2+\alpha\gamma e^{2ix}\right)} dx = \exp\left(\frac{z_k(1 - iz_k)}{\gamma}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) c_{2n} \gamma^{n+\frac{1}{2}} \\ &c_{2n} = \sum_{j=0}^{2n} C^j_{-n-\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(-i - ize^{2iz_k}\right)^{n+j+\frac{1}{2}}} \hat{B}_{2n,j}\left(-\frac{(2i)^2 ze^{2iz_k}}{3!}, -\frac{(2i)^4 ze^{2iz_k}}{4!}, \ldots, -\frac{(2i)^{2n-j+2} ze^{2iz_k}}{(2n - j + 3)!}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

Для упрощения последнего выражения нам понадобиться пара свойств полиномов Белла. А именно можно использовать их однородность и экспоненциальные полиномы Белла:

$$\begin{aligned} \hat{B}_{2n,j}(\zeta x_1, \zeta x_2, \ldots, \zeta x_{2n-j+1}) &= \zeta^j \hat{B}_{2n,j}(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-j+1}) \\ \hat{B}_{2n,j}(\zeta x_1, \zeta^2 x_2, \ldots, \zeta^{2n-j+1} x_{2n-j+1}) &= \zeta^{2n} \hat{B}_{2n,j}(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-j+1}) \end{aligned} \tag{14}$$

Из этого следует:

$$\begin{aligned} &\hat{B}_{2n,j}\left(-\frac{(2i)^2 ze^{2iz_k}}{3!}, -\frac{(2i)^4 ze^{2iz_k}}{4!}, \ldots, -\frac{(2i)^{2n-j+2} ze^{2iz_k}}{(2n - j + 3)!}\right) = \\ &\quad = (-2ize^{2iz_k})^j (2i)^{2n} \hat{B}_{2n,j}\left(\frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \ldots, \frac{1}{(2n - j + 3)!}\right) \end{aligned} \tag{15}$$

Используя выше перечисленное[3], можно написать:

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \sum_{j=0}^{2n} C^j_{-n-\frac{1}{2}} \frac{(-2ize^{2iz_k})^j (2i)^{2n}}{\left(-i - ize^{2iz_k}\right)^{n+j+\frac{1}{2}}} \frac{j!}{(2n + 2j)!} S_3(2n + 2j, j) \\ &= \sum_{j=0}^{2n} \frac{n!(2n + 2j)!}{(n + j)!(2n)!j!(2i)^{2j}} \frac{(-2ize^{2iz_k})^j (2i)^{2n}}{\left(-i - ize^{2iz_k}\right)^{n+j+\frac{1}{2}}} \frac{j!}{(2n + 2j)!} S_3(2n + 2j, j) \\ &= \sum_{j=0}^{2n} \frac{n!}{(n + j)!(2n)!} \frac{(-2ize^{2iz_k})^j (2i)^{2n-2j}}{\left(-i - ize^{2iz_k}\right)^{n+j+\frac{1}{2}}} S_3(2n + 2j, j) \end{aligned} \tag{16}$$

Альтернативное переписывание

Как можно было заметить, в полученных формулах много некрасивостей. Сейчас, когда мы уже знаем, какие выражения придётся ворочить, предлагается сделать следующие пере-

[3] А также $\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(2i)^{2n} n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}$

обозначения:

$$\begin{aligned} A &\rightsquigarrow \alpha \\ \Gamma &\rightsquigarrow \gamma \\ Z = Re^{i\Phi} = -2iA\Gamma &\rightsquigarrow -2i\alpha\gamma \end{aligned} \tag{17}$$

Мотивация следующая:

1. Большие буквы обозначают неизменность, что важно в контексте множества сумм, парамтров и всего такого
2. A позволит не путать моё ошибочно выбранное обозначение с общепринятым
3. Γ совпадает с общепринятым обозначением
4. Большая буква Z обозначает неизменную комплексную величину[4]

Так же для упрощения формул с методом перевала немного переписать подынтегральную функцию:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n e^{i\Gamma n^2}}{n!} &= \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi\Gamma}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{z^2}{\Gamma}+Ae^{2iz}} dz \\ &= \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi\Gamma}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{z^2}{4\Gamma}+Ae^{iz}} dz \\ &= \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi\Gamma}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-i\frac{z^2}{2}+Zie^{iz}}{2\Gamma}\right) dz \end{aligned} \tag{18}$$

Сделаем следующее обозначение:

$$f(z) = \frac{z^2}{2i} + iZe^{iz} \tag{19}$$

Далее мы будем пользоваться методом перевала. Здесь нам нужно обосновать, что контур действительно можно деформировать ... Этому посвящена моя прога и анализ до этого момента, так что дописать это будет не трудно.

Теперь решения $f'(z_k) = 0$ можно просто обозначить в виде:

$$e^{iz_k} = \frac{z_k}{iZ} \Rightarrow \quad z_k = iW_k(Z) \tag{20}$$

По-моему, такие обозначения просто прекрасны. Вот, например, разложение вокруг перевальной точки:

$$f(z) = \underbrace{\frac{z_k^2}{2i} + z_k}_{f(z_k)} + \underbrace{\frac{-i-z_k}{2}}_{a_0}(z-z_k)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{-i^n z_k}{(n+2)!}}_{a_1,\, a_2, \ldots}(z-z_k)^{n+2} \tag{21}$$

[4] Надеюсь на благоразумие читателей, потому что автор против Z-движения в России

Полагая $\lambda = \frac{1}{2\Gamma}$ можно написать[5]:

$$\int\limits_{\gamma_k} \exp\left(\lambda f(z)\right) dz = \exp\left(\lambda f(z_k)\right) \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{c_{2n}}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= \sum_{j=0}^{2n} C^{j}_{-n-\frac{1}{2}} \frac{1}{a_0^{n+j+\frac{1}{2}}} \hat{B}_{2n,j}\left(a_1, a_2, \ldots, a_{2n-j+1}\right) \\
&= \frac{1}{\left(\frac{-i-z_k}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{2n} \frac{\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)}{j!\Gamma\left(-n-j+\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{\left(\frac{-i-z_k}{2}\right)^{n+j}} (-1)^n (-z_k)^j \hat{B}_{2n,j}\left(\frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \ldots, \frac{1}{(2n-j+3)!}\right) \\
&= \frac{1}{\left(\frac{-i-z_k}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{2n} \frac{\frac{n!}{(2n)!}}{j!\frac{(-4)^j(n+j)!}{(2n+2j)!}} \frac{(-1)^n(-z_0)^j}{\left(\frac{-i-z_k}{2}\right)^{n+j}} \frac{j!}{(2n+2j)!} S_3(2n+2j,j) \\
&= \frac{(-1)^n n!}{(2n)!} \frac{1}{\left(\frac{-i-z_k}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{(-4)^j(n+j)!} \frac{(-z_k)^j}{\left(\frac{-i-z_k}{2}\right)^{n+j}} S_3(2n+2j,j)
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) c_{2n} &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4^n\left(-i-z_k\right)^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{(-4)^j(n+j)!} \frac{(-z_k)^j}{\left(\frac{-i-z_k}{2}\right)^{n+j}} S_3(2n+2j,j) \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{(-i-z_k)^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{2n} \left(-\frac{1}{2}\frac{z_k}{i+z_k}\right)^{n+j} \frac{S_3(2n+2j,j)}{(n+j)!}
\end{aligned} \tag{23}$$

Резюмируя выше написанное одной формулой:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{iZ}{2\Gamma}\right)^n \frac{e^{i\Gamma n^2}}{n!} = e^{\frac{i\pi}{4}} \sum_{k=0}^{-\operatorname{sign}\Gamma\cdot\infty} \frac{\exp\left(\frac{-i-i(z_k+i)^2}{4\Gamma}\right)}{(-i-z_k)^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} (2\Gamma)^n \sum_{j=0}^{2n} \left(-\frac{1}{2}\frac{z_k}{i+z_k}\right)^{n+j} \frac{S_3(2n+2j,j)}{(n+j)!}, \tag{24}$$

где $z_k = iW_k(Z)$. От него так же можно избавиться и придти к следующую формулу:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{iZ}{2\Gamma}\right)^n \frac{e^{i\Gamma n^2}}{n!} = i \sum_{k=0}^{-\operatorname{sign}\Gamma\cdot\infty} \frac{\exp\left(\frac{-i+i(1+W_k(Z))^2}{4\Gamma}\right)}{(1+W_k(Z))^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} (2\Gamma)^n \sum_{j=0}^{2n} \left(-\frac{1}{2}\frac{W_k(Z)}{1+W_k(Z)}\right)^{n+j} \frac{S_3(2n+2j,j)}{(n+j)!}, \tag{25}$$

Поговорим немного о выборе ветви корня. Так как изначальный интеграл брался в пределах $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$, то направление каждой из ветвей должно было выбираться из условия, чтоб $\arg\frac{dz}{ds} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, где s — натуральный параметр кривой постоянной фазы. Это значит:

$$\arg\left(-i-z_k\right)^{-\frac{1}{2}} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \tag{26}$$

что соответствует определению корня с разрезом в $z : \operatorname{Re}(z) \le 0; \operatorname{Im}(z) = 0$. В последней же формуле используется разрез в $z : \arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$, что соответствует $\operatorname{Im} + \operatorname{Re}(\sqrt{1+W(Z)}) > 0$.

[5]Надеюсь, что читатель не перепутает Γ и Γ-функцию. Для удобства чтения после использования числа Γ не будет скобочек.

Какое k вносит основной вклад

В полученном выражении стоит сумма по k с лидирующими вкладами вида $\exp\left(\frac{i+(z_k+i)^2}{4\Gamma}\right)$. Стоит заметить, что, например, при $\Gamma = 10^{-6}$, а значит незначительная разница на 0.01 в $\operatorname{Re}\left((z_k+i)^2\right)$ при различных k приведёт к разнице слагаемых в $\sim e^{-10^4}$, что значит, что меньшим из слагаемых можно пренебречь, не сильно потеряв в точности. Найдём, при каком k вносится основной вклад.

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(f(z_k)\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(-i(z_k+i)^2\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left((z_k+i)^2\right) &= -\operatorname{Re}\left(z_k\right)\left(1+\operatorname{Im}(z_k)\right)\\ &= \operatorname{Im}(W_k(Z))\left(1+\operatorname{Re}(W_k(Z))\right)\end{aligned} \tag{27}$$

Применим разложение, с которого начинается данный документ, огрубив его до суммирования ($R, |k| \to \infty$):

$$\begin{aligned}W_k\left(Z = Re^{i\Phi}\right) &= \log R + i\Phi + 2\pi ik - \log\left(\log R + i\Phi + 2\pi ik\right) + O\left(\frac{\log\left(\log R + i\Phi + 2\pi ik\right)}{\log R + i\Phi + 2\pi ik}\right)\\ &= \log R + i\Phi + 2\pi ik - \log\left(\log R + 2\pi ik\right) + \underbrace{\log\left(1 + \frac{i\Phi}{\log R + 2\pi ik}\right)}_{\sim\frac{1}{\log R + 2\pi ik}\approx 0} + O\left(\frac{\log\left(\log R + 2\pi ik\right)}{\log R + 2\pi ik}\right)\\ &= \log R - \frac{1}{2}\log\left(\log^2 R + (2\pi k)^2\right) + i\left(\Phi + 2\pi k - \arctan\left(\frac{2\pi k}{\log R}\right)\right) + O\left(\frac{\log\left(\log R + 2\pi ik\right)}{\log R + 2\pi ik}\right)\end{aligned} \tag{28}$$

Воспользуемся сначала самым простым и тупым приближением: $W_k(Z) \approx \log R + i\Phi + 2\pi ik$

$$\operatorname{Re}\left(f(z_k)\right) \approx (2\pi k + \Phi)(1 + \log R) \tag{29}$$

Получаем, что в первом приближении $k \approx \infty$. Воспользуемся следующим порядком приближения без учёта суммы:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(f(z_k)\right) &\approx \left(\Phi + 2\pi k - \arctan\left(\frac{2\pi k}{\log R}\right)\right)\left(1 + \log R - \frac{1}{2}\log\left(\log^2 R + (2\pi k)^2\right)\right)\\ &\approx \left(\Phi + 2\pi k - \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} k\right)\left(1 + \log R - \log|2\pi k|\right),\end{aligned} \tag{30}$$

где мы пренебрегли всеми слагаемыми, которые при раскрытии скобок дадут вклад $O\left(\frac{\log^2 R}{R}\right)$. Попробуем оптимизировать данное выражение так, как если бы $k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{k}\operatorname{Re}\left(f(z_k)\right) = 0 \tag{31}$$

$$\begin{aligned}2\pi\left(1 + \log R - \log|2\pi k|\right) &= \frac{1}{k}\left(\Phi + 2\pi k - \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} k\right)\\ \frac{2\pi|k|}{R}\log\left(\frac{2\pi|k|}{R}\right) &= \frac{\left|\Phi - \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} k\right|}{R}\end{aligned} \tag{32}$$

Введём временно обозначение $e^{\varkappa} = \frac{2\pi|k|}{R} > 0$:

$$\begin{aligned}\varkappa e^{\varkappa} &= \frac{\left|\Phi - \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} k\right|}{R} \approx 0\\ \varkappa &= W_0\left(\frac{\left|\Phi - \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} k\right|}{R}\right)\end{aligned} \tag{33}$$

Для нулевой функции Ламберта у нас так же есть небольшое разложение $W_0(x) \approx x$. Применим его и подставим $\varkappa$:

$$2\pi|k| \approx R + \left|\Phi - \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} k\right| \tag{34}$$

Такое приближённое решение почти всегда даёт наилучшее приближение, потому что при учёте высших порядков вклад будет $\ll 1$ при больших R. Значения функции Ламберта в окрестности малых R требует уже численных расчётов. Далее мы будем обозначать это оптимальное k через $\overline{k}$, подразумевая его зависимость от Z и $\operatorname{sign}\Gamma$.

Какой вклад вносит слагаемое под номером $\overline{k}$