

## Разложение $z_k$

### Разложение функции Ламберта из статьи

Следующая формула взята из статьи "On the Lambert W Function" (DOI:10.1007/BF02124750), формула (4.20):

$$W_k(z) = \log z + 2\pi i k - \log(\log z + 2\pi i k) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{km} \log^m(\log z + 2\pi i k) (\log z + 2\pi i k)^{-k-m} \quad (1)$$

Для того, чтоб ветви функции Ламберта совпадали с общепринятыми, ветви  $\log z$  необходимо так же брать привычными — с разрезом на отрицательных числах и нулевой мнимой частью при положительных  $z$ . Коэффициенты  $c_{km}$  определены в статье после формулы (4.18):

$$c_{km} = \frac{(-1)^k}{m!} c(k+m, k+1) \quad (2)$$

$c(k+m, k+1)$  — это беззнаковые числа Стирлинга первого рода. В вольфраме они обозначаются как "Abs@StirlingS1[k+m, k+1]".

В нашей же задаче, требуется определить  $z_k = \frac{i}{2} W_k(-2i\alpha\gamma)$ . Обозначая  $z = -2i\alpha\gamma$ ,  $k+m = n$ , получаем:

$$\begin{aligned} -2iz_k &= W_k(z) \\ &= \log z + 2\pi i k - \log(\log z + 2\pi i k) + \dots \\ &\dots + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{n-m}}{m!} c(n, n-m+1) \frac{\log^m(\log z + 2\pi i k)}{(\log z + 2\pi i k)^n} \end{aligned} \quad (3)$$

В такой форме наглядно видно разложение по малости остаточных членов. В дальнейшем будет видно, что большим параметром при разложении здесь является номер функции Ламберта —  $k$ . Ещё можно использовать знаковые числа Стирлинга ( $s(n, k) = (-1)^{n-k} c(n, k) \Rightarrow (-1)^{n-m} c(n, n-m+1) = (-1)^{n+1} s(n, n-m+1)$ ), однако в этом нет пока необходимости.

## Метод перевала с остаточными членами

### Общая теория метода перевала

Следует быть осторожным при использовании чужих формул по методу перевала. Сейчас будет сформулировано утверждение под названием "Perron's formula" <sup>1</sup>. Это формула для нахождения интеграла через перевальную точку  $z_0$  вдоль кривой наискорейшего спуска  $\gamma$ .

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} e^{\lambda f(z)} dz &= e^{\lambda f(z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{c_{2n}}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}} \\ c_{2n} &= \frac{1}{(2n)!} \left[ \left(\frac{d}{dz}\right)^{2n} \left\{ \frac{(z-z_0)^2}{f(z) - f(z_0)} \right\}^{n+\frac{1}{2}} \right]_{z=z_0} \end{aligned} \quad (4)$$

<sup>1</sup>Формула (2.5) в файле "Метод перевала с остаточными членами". Сразу рассмотрим более частный случай, имеющий непосредственное влияние на нашу задачу. А именно возьмём перевальную точку второго порядка  $m = 2$ , положим функцию рядом с экспонентой под интегралом  $g(z) = 1$ , будем считать, что контур проходит через перевальную точку, а не имеет в ней начало или конец, как это приведено в книге.

Если же использовать разложение функции  $f$  в ряд Тейлора, то можно получить "Campbell – Froman – Walles – Wojdylo formula"<sup>2</sup>.

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{p=0}^{\infty} a_p (z - z_0)^{p+2} \quad (5)$$

$$c_{2n} = \frac{1}{a_0^{n+\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{2n} C_{-n-\frac{1}{2}}^j \frac{1}{a_0^j} \hat{B}_{2n,j}(a_1, a_2, \dots, a_{2n-j+1})$$

## Обобщённые числа Стирлинга

Они упоминаются в английской вики на странице о числах Стирлинга. Там же приводится ссылка на книгу Кометта, посвящённую комбинаторике. (см. papers)

$$\exp \left( u \left( \frac{t^r}{r!} + \frac{t^{r+1}}{(r+1)!} + \dots \right) \right) = \sum_{n=(r+1)k, k=0}^{\infty} S_r(n, k) u^k \frac{t^n}{n!} \quad (6)$$

## Применение теории

Как упоминается в приложении к диплому:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n e^{i\gamma n^2}}{n!} = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{x^2}{\gamma} + \alpha e^{2ix}} dx = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{\gamma}(-ix^2 + \alpha\gamma e^{2ix})} dx \quad (7)$$

В таком виде очевидно, что в формуле 4 будут использоваться следующие замены:  $\lambda \rightsquigarrow \frac{1}{\gamma}$ ,  $f(x) \rightsquigarrow -ix^2 + \alpha\gamma e^{2ix} = -ix^2 - \frac{z}{2i} e^{2iz}$ . (А так же вспомним обозначение из первой части  $z = -2i\alpha\gamma$ ).

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(z_k)}{(x - z_k)^2} &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{f^{(p+2)}(z_k)}{(p+2)!} (x - z_k)^p \\ &= \underbrace{(-i - iz e^{2iz_k})}_{a_0} - \sum_{p=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(2i)^{p+1} z e^{2iz_k}}{(p+2)!}}_{a_1, a_2, \dots} (x - z_k)^p \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь мы готовы воспользоваться формулой 5 и выразить интеграл по перевальному контуру через  $z_k$  (а так же используем формулу 5.6 из моего диплома):

$$\int_{\gamma_k} e^{\frac{1}{\gamma}(-ix^2 + \alpha\gamma e^{2ix})} dx = \exp \left( \frac{z_k(1 - iz_k)}{\gamma} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma \left( n + \frac{1}{2} \right) c_{2n} \gamma^{n+\frac{1}{2}}$$

$$c_{2n} = \sum_{j=0}^{2n} C_{-n-\frac{1}{2}}^j \frac{1}{(-i - iz e^{2iz_k})^{n+j+\frac{1}{2}}} \hat{B}_{2n,j} \left( -\frac{(2i)^2 z e^{2iz_k}}{3!}, -\frac{(2i)^4 z e^{2iz_k}}{4!}, \dots, -\frac{(2i)^{2n-j+2} z e^{2iz_k}}{(2n-j+3)!} \right) \quad (9)$$

---

<sup>2</sup>формула (1.11) в книжке по методу перевала.

Для упрощения последнего выражения нам понадобятся пара свойств полиномов Белла. А именно можно использовать их однородность и экспоненциальные полиномы Белла:

$$\begin{aligned}\hat{B}_{2n,j}(\zeta x_1, \zeta x_2, \dots, \zeta x_{2n-j+1}) &= \zeta^j \hat{B}_{2n,j}(x_1, x_2, \dots, x_{2n-j+1}) \\ \hat{B}_{2n,j}(\zeta x_1, \zeta^2 x_2, \dots, \zeta^{2n-j+1} x_{2n-j+1}) &= \zeta^{2n} \hat{B}_{2n,j}(x_1, x_2, \dots, x_{2n-j+1}) \\ \hat{B}_{2n,j}(x_1, x_2, \dots, x_{2n-j+1}) &= \frac{j!}{(2n)!} B_{2n,j}(x_1 1!, x_2 2!, \dots, x_{2n-j+1} (2n-j+1)!)\end{aligned}\quad (10)$$

Из этого следует:

$$\begin{aligned}\hat{B}_{2n,j} \left( -\frac{(2i)^2 z e^{2iz_k}}{3!}, -\frac{(2i)^4 z e^{2iz_k}}{4!}, \dots, -\frac{(2i)^{2n-j+2} z e^{2iz_k}}{(2n-j+3)!} \right) &= \\ &= (-2i z e^{2iz_k})^j (2i)^{2n} \hat{B}_{2n,j} \left( \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \dots, \frac{1}{(2n-j+3)!} \right) \\ &= \frac{(-2i z e^{2iz_k})^j (2i)^{2n} j!}{(2n)!} B_{2n,j} \left( \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots, \frac{(2n-j+1)!}{(2n-j+3)!} \right)\end{aligned}\quad (11)$$

### Рекуррентная формула для коэффициентов $B_{2n,j}$

К сожалению, полученные полиномы Белла никак не преобразуются к числам Стирлинга. Возлагались надежды на использование следующей формулы:

$$\exp \left( u \sum_{j=1}^{\infty} x_j t^j \right) = \sum_{n \geq k \geq 0} \hat{B}_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}) u^n \frac{t^k}{k!} \quad (12)$$

Подставляя необходимые  $x_j$  в нашем случае, получаем следующий ряд:

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq k \geq 0} \hat{B}_{n,k} \left( \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \dots, \frac{1}{(n-k+3)!} \right) u^n \frac{t^k}{k!} &= \exp \left( u \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+2)!} t^j \right) \\ &= \exp \left( \frac{u}{t^2} \left( e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2} \right) \right) \\ &= \sum_{n=2k, k=0}^{\infty} S_3(n, k) \frac{u^k t^n}{t^{2k} n!} \\ &= \sum_{n=2k, k=0}^{\infty} S_3(n+2k, k) u^k \frac{t^n}{(n+2k)!} \\ &= \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{k!}{(k+2n)!} S_3(k+2n, n) u^n \frac{t^k}{k!}\end{aligned}\quad (13)$$

$$\hat{B}_{n,k} \left( \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \dots, \frac{1}{(n-k+3)!} \right) = \frac{k!}{(k+2n)!} S_3(k+2n, n) \quad (14)$$