Заметки по работе проги

Нугманов Булат

15 марта 2023 г.

1 Про тупое суммирование Хусими

Приближение для ряда

Обозначение:

$$\alpha = re^{i\phi} \tag{1}$$

Стирлинг:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}+\cdots} \tag{2}$$

Логарифм одного слагаемого в $F - normalized$:

$$\begin{aligned} &\ln\left(\frac{\alpha^n e^{i\phi n + i\gamma n(n+1)}}{n!}e^{-r}\right) \approx \ln\left(\frac{r^n e^{i\phi n+i\gamma n(n+1)}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}}e^{-r}\right) = \\ &= n\left(\ln r + i\phi + i\gamma(n+1)\right) - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln n - n(\ln n - 1) - \frac{1}{12n} - r \\ &= n - r + n\cdot\ln\left(\frac{r}{n}\right) + in\left(\phi + \gamma(n+1)\right) - \frac{1}{12n} - \frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\ln(2\pi) \end{aligned} \tag{3}$$

Из в F в Хусими

Это формула 3.3 из моего диплома:

$$Q(\beta) = \frac{e^{-|\alpha|^2-|\beta|^2}}{\pi}\left|F(\alpha\beta^* e^{2i\Gamma}, e^{-i\Gamma})\right|^2 \tag{4}$$

Если использовать Fn — $F\ normalized$, которое $Fn(r,\phi,\gamma) = F(re^{i\phi}, e^{i\gamma})\cdot e^{-r}$, то формула предстанет в следующем виде:

$$Q(\beta) = \frac{e^{-(|\alpha|-|\beta|)^2}}{\pi}\left|Fn(|\alpha\beta|, 2\Gamma + \arg(\alpha\beta^*), -\Gamma)\right|^2 \tag{5}$$

Вычисление функции Вигнера

Возьмём некоторый алгоритм расчёта функции F, указанной в дипломе. Это может быть как прямое суммирование, так и нахождение через $\max\operatorname{Re} f(z_k)$ или же ассимптотическое разложение при $|Z| \gg 1$. Для вычисления функции Вигнера лучше использовать формулу из диплома под номером (3.25):

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} e^{-|\alpha|^2 - 2|\beta|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} \left| F(2\alpha\beta^* \psi^{2m-2}, \psi) \right|^2 \tag{6}$$

Перепишем эту формулу через $Fn(|A|, \arg A, e^{i\Gamma}) = e^{-|A|} F(A, e^{i\Gamma})$:

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\beta|^2 - |\alpha|^2 - 4|\alpha\beta|} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} \left| Fn(2\alpha\beta^* \psi^{2m-2}, \psi) \right|^2 \tag{7}$$

В последнем ряду основной вклад вносят только члены с $n \sim |\alpha|^2 \pm 3|\alpha|$. [1]

Для дальнейшего разложения пригодится аналогичное уже упоминавшемуся разложение в Стирлинга:

$$\ln\left(\frac{|\alpha|^{2m}}{m!}\right) \approx 2m \ln|\alpha| - \frac{1}{2} \ln m - m(\ln m - 1) - \frac{1}{12m} \tag{8}$$

2 Про суммирование Вигнера

Про связь различных определений F

Возьмём формулу выше, которая следует из моего диплома при использовании старого определения F:

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} e^{|\alpha|^2 - 2(|\beta| - |\alpha|)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} \left| Fn(2\alpha\beta^* \psi^{2m-2}, \psi) \right|^2 \tag{9}$$

Нормализация старого и нового определений совпадает, но сами они чуток отличаюся:

$$\begin{gathered} F_{\text{старое}}(A, \psi = e^{i\Gamma}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} e^{i\Gamma n(n+1)} \\ F_{\text{новое}}(A, e^{i\Gamma}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} e^{i\Gamma n^2} \\ F_{\text{старое}}(A, e^{i\Gamma}) = F_{\text{новое}}(Ae^{i\Gamma}, e^{i\Gamma}) \end{gathered} \tag{10}$$

Такое определение соответствует исходно поставленной задаче с заменой Γ на $-\Gamma$. Это не очень существенно для вычислений, но об этом нельзя забывать при выписывании конечного ответа.

Следующая формула использует новое определение F:

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} e^{|\alpha|^2 - 2(|\beta| - |\alpha|)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} \left| Fn(2\alpha\beta^* e^{i\Gamma(2m-1)}, e^{i\Gamma}) \right|^2 \tag{11}$$

Основной идеей суммирования последнего выражения является преобразование Фурье над $|Fn|$:

$$\left| Fn(Re^{i\Phi}, e^{i\Gamma}) \right|^2 = \sum_k A_k(R) e^{ik\Phi} \tag{12}$$

[1] Данную оценку можно сузить ещё сильнее, если учесть, что $Q(\dots)$ имеет гауссов колокол. Ширина этого колокола $\sqrt{|\alpha\beta|}2\Gamma$. Так как теоретически это значение порядка может быть велико и зависеть от β, мы лучше в тупую просто просуммируем при всех соответсвующих n.

Суммирование ведётся по частотам k, которые пробегают значения из $\frac{2\pi}{N}\mathbb{Z}_N$.

$$\begin{aligned} W(\beta) &= \frac{2}{\pi} e^{|\alpha|^2 - 2(|\beta|-|\alpha|)^2} \sum_k A_k(2|\alpha\beta^*|) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} e^{ik\times(\arg(\alpha\beta^*)-\Gamma+2m\Gamma)} \\ &= \frac{2}{\pi} e^{|\alpha|^2 - 2(|\beta|-|\alpha|)^2} \sum_k A_k(2|\alpha\beta^*|) e^{ik\times(\arg(\alpha\beta^*)-\Gamma)} \exp\left(-|\alpha|^2 e^{2ik\Gamma}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} e^{-2(|\beta|-|\alpha|)^2} \sum_k A_k(2|\alpha\beta^*|) e^{ik\times(\arg(\alpha\beta^*)-\Gamma)} \exp\left(|\alpha|^2(1-e^{2ik\Gamma})\right) \end{aligned} \tag{13}$$

Далее это выражение можно упрощать, раскладывать последнюю экспоненту по малости Γ или в ряд Фурье, но так или иначе, сначала надо посчитать коэффициенты A_k. Важно также отметить, что количество членов ряда Фурье надо брать достаточно высоким, чтоб было хорошее разложение в Фурье в окрестности пика Fn