

## Разложение $z_k$

### Разложение функции Ламберта из статьи

Следующая формула взята из статьи "On the Lambert W Function" (DOI:10.1007/BF02124750), формула (4.20):

$$W_k(z) = \log z + 2\pi i k - \log(\log z + 2\pi i k) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{km} \log^m(\log z + 2\pi i k) (\log z + 2\pi i k)^{-k-m} \quad (1)$$

Для того, чтоб ветви функции Ламберта совпадали с общепринятыми, ветви  $\log z$  необходимо так же брать привычными — с разрезом на отрицательных числах и нулевой мнимой частью при положительных  $z$ . Коэффициенты  $c_{km}$  определены в статье после формулы (4.18):

$$c_{km} = \frac{(-1)^k}{m!} c(k+m, k+1) \quad (2)$$

$c(k+m, k+1)$  — это беззнаковые числа Стирлинга первого рода. В вольфраме они обозначаются как "Abs@StirlingS1[k+m, k+1]".

В нашей же задаче, требуется определить  $z_k = \frac{i}{2} W_k(-2i\alpha\gamma)$ . Обозначая  $z = -2i\alpha\gamma$ ,  $k+m = n$ , получаем:

$$\begin{aligned} -2iz_k &= W_k(z) \\ &= \log z + 2\pi i k - \log(\log z + 2\pi i k) + \dots \\ &\dots + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{n-m}}{m!} c(n, n-m+1) \frac{\log^m(\log z + 2\pi i k)}{(\log z + 2\pi i k)^n} \end{aligned} \quad (3)$$

В такой форме наглядно видно разложение по малости остаточных членов. В дальнейшем будет видно, что большим параметром при разложении здесь является номер функции Ламберта —  $k$ . Ещё можно использовать знаковые числа Стирлинга ( $s(n, k) = (-1)^{n-k} c(n, k) \Rightarrow (-1)^{n-m} c(n, n-m+1) = (-1)^{n+1} s(n, n-m+1)$ ), однако в этом нет пока необходимости.

## Метод перевала с остаточными членами

### Общая теория метода перевала

Следует быть осторожным при использовании чужих формул по методу перевала. Сейчас будет сформулировано утверждение под названием "Perron's formula" <sup>1</sup>. Это формула для нахождения интеграла через перевальную точку  $z_0$  вдоль кривой наискорейшего спуска  $\gamma$ .

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} e^{\lambda f(z)} dz &= e^{\lambda f(z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{c_{2n}}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}} \\ c_{2n} &= \frac{1}{(2n)!} \left[ \left(\frac{d}{dz}\right)^{2n} \left\{ \frac{(z-z_0)^2}{f(z) - f(z_0)} \right\}^{n+\frac{1}{2}} \right]_{z=z_0} \end{aligned} \quad (4)$$

<sup>1</sup>Формула (2.5) в файле "Метод перевала с остаточными членами". Сразу рассмотрим более частный случай, имеющий непосредственное влияние на нашу задачу. А именно возьмём перевальную точку второго порядка  $m = 2$ , положим функцию рядом с экспонентой под интегралом  $g(z) = 1$ , будем считать, что контур проходит через перевальную точку, а не имеет в ней начало или конец, как это приведено в книге.

Если же использовать разложение функции  $f$  в ряд Тейлора, то можно получить "Campbell – Froman – Walles – Wojdylo formula"<sup>2</sup>.

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{p=0}^{\infty} a_p (z - z_0)^{p+2}$$

$$c_{2n} = \frac{1}{a_0^{n+\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{2n} C_{-n-\frac{1}{2}}^j \frac{1}{a_0^j} \hat{B}_{2n,j}(a_1, a_2, \dots, a_{2n-j+1}) \quad (5)$$

## Обобщённые числа Стирлинга

Они упоминаются в английской вики на странице о числах Стирлинга. Там же приводится ссылка на книгу Кометта, посвящённую комбинаторике. (см. papers)

$$\exp\left(u\left(\frac{t^r}{r!} + \frac{t^{r+1}}{(r+1)!} + \dots\right)\right) = \sum_{n=(r+1)k, k=0}^{\infty} S_r(n, k) u^k \frac{t^n}{n!} \quad (6)$$

Для чисел Стирлинга есть рекуррентная формула всё в той же книжке "Advanced combinatorics":

$$S_r(n+1, k) = k S_r(n, k) + C_n^r S_r(n-r+1, k-1) \quad (7)$$

## Немного о полиномах Белла

$$\exp\left(u \sum_{j=1}^{\infty} x_j t^j\right) = \sum_{n \geq k \geq 0} \hat{B}_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}) t^n \frac{u^k}{k!} \quad (8)$$

Подставляя необходимые  $x_j$  в нашем случае, получаем следующий ряд:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq k \geq 0} \hat{B}_{n,k}\left(\frac{1}{r!}, \frac{1}{(r+1)!}, \dots, \frac{1}{(n-k+r)!}\right) t^n \frac{u^k}{k!} &= \exp\left(\frac{u}{t^{r-1}} \left(\frac{t^r}{r!} + \frac{t^{r+1}}{(r+1)!} + \dots\right)\right) \\ &= \sum_{n,k} S_r(n, k) \frac{u^k}{t^{(r-1)k}} \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n,k} S_r(n + (r-1)k, k) u^k \frac{t^n}{(n + (r-1)k)!} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\hat{B}_{n,k}\left(\frac{1}{r!}, \frac{1}{(r+1)!}, \dots, \frac{1}{(n-k+r)!}\right) = \frac{k!}{(n + (r-1)k)!} S_r(n + (r-1)k, k) \quad (10)$$

## Применение теории

Как упоминается в приложении к диплому:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n e^{i\gamma n^2}}{n!} = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{x^2}{\gamma} + \alpha e^{2ix}} dx = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{\gamma}(-ix^2 + \alpha\gamma e^{2ix})} dx \quad (11)$$

<sup>2</sup>формула (1.11) в книжке по методу перевала.

В таком виде очевидно, что в формуле 4 будут использоваться следующие замены:  $\lambda \rightsquigarrow \frac{1}{\gamma}$ ,  $f(x) \rightsquigarrow -ix^2 + \alpha\gamma e^{2ix} = -ix^2 - \frac{z}{2i}e^{2ix}$ . (А так же вспомним обозначение из первой части  $z = -2i\alpha\gamma$ ).

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(z_k)}{(x - z_k)^2} &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{f^{(p+2)}(z_k)}{(p+2)!} (x - z_k)^p \\ &= \underbrace{(-i - iz_k e^{2iz_k})}_{a_0} - \sum_{p=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(2i)^{p+1} z e^{2iz_k}}{(p+2)!}}_{a_1, a_2, \dots} (x - z_k)^p \end{aligned} \quad (12)$$

Теперь мы готовы воспользоваться формулой 5 и выразить интеграл по перевальному контуру через  $z_k$  (а так же используем формулу 5.6 из моего диплома):

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_k} e^{\frac{1}{\gamma}(-ix^2 + \alpha\gamma e^{2ix})} dx &= \exp\left(\frac{z_k(1 - iz_k)}{\gamma}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) c_{2n} \gamma^{n+\frac{1}{2}} \\ c_{2n} &= \sum_{j=0}^{2n} C^j_{-n-\frac{1}{2}} \frac{1}{(-i - iz_k e^{2iz_k})^{n+j+\frac{1}{2}}} \hat{B}_{2n,j} \left( -\frac{(2i)^2 z e^{2iz_k}}{3!}, -\frac{(2i)^4 z e^{2iz_k}}{4!}, \dots, -\frac{(2i)^{2n-j+2} z e^{2iz_k}}{(2n-j+3)!} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

Для упрощения последнего выражения нам понадобятся пара свойств полиномов Белла. А именно можно использовать их однородность и экспоненциальные полиномы Белла:

$$\begin{aligned} \hat{B}_{2n,j}(\zeta x_1, \zeta x_2, \dots, \zeta x_{2n-j+1}) &= \zeta^j \hat{B}_{2n,j}(x_1, x_2, \dots, x_{2n-j+1}) \\ \hat{B}_{2n,j}(\zeta^2 x_1, \zeta^2 x_2, \dots, \zeta^{2n-j+1} x_{2n-j+1}) &= \zeta^{2n} \hat{B}_{2n,j}(x_1, x_2, \dots, x_{2n-j+1}) \end{aligned} \quad (14)$$

Из этого следует:

$$\begin{aligned} \hat{B}_{2n,j} \left( -\frac{(2i)^2 z e^{2iz_k}}{3!}, -\frac{(2i)^4 z e^{2iz_k}}{4!}, \dots, -\frac{(2i)^{2n-j+2} z e^{2iz_k}}{(2n-j+3)!} \right) &= \\ = (-2iz_k e^{2iz_k})^j (2i)^{2n} \hat{B}_{2n,j} \left( \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \dots, \frac{1}{(2n-j+3)!} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Используя выше перечисленное<sup>3</sup>, можно написать:

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \sum_{j=0}^{2n} C^j_{-n-\frac{1}{2}} \frac{(-2iz_k e^{2iz_k})^j (2i)^{2n}}{(-i - iz_k e^{2iz_k})^{n+j+\frac{1}{2}}} \frac{j!}{(2n+2j)!} S_3(2n+2j, j) \\ &= \sum_{j=0}^{2n} \frac{n!(2n+2j)!}{(n+j)!(2n)!j!(2i)^{2j}} \frac{(-2iz_k e^{2iz_k})^j (2i)^{2n}}{(-i - iz_k e^{2iz_k})^{n+j+\frac{1}{2}}} \frac{j!}{(2n+2j)!} S_3(2n+2j, j) \\ &= \sum_{j=0}^{2n} \frac{n!}{(n+j)!(2n)!} \frac{(-2iz_k e^{2iz_k})^j (2i)^{2n-2j}}{(-i - iz_k e^{2iz_k})^{n+j+\frac{1}{2}}} S_3(2n+2j, j) \end{aligned} \quad (16)$$

## Альтернативное переписывание

Как можно было заметить, в полученных формулах много некрасивостей. Сейчас, когда мы уже знаем, какие выражения придётся ворожить, предлагается сделать следующие пере-

<sup>3</sup>А также  $\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(2i)^{2n} n!}{(2n)!} \sqrt{\pi}$

обозначения:

$$\begin{aligned} A &\rightsquigarrow \alpha \\ \Gamma &\rightsquigarrow \gamma \\ Z = Re^{i\Phi} &= -2iA\Gamma \rightsquigarrow -2i\alpha\gamma \end{aligned} \quad (17)$$

Мотивация следующая:

1. Большие буквы обозначают неизменность, что важно в контексте множества сумм, параметров и всего такого
2.  $A$  позволит не путать моё ошибочно выбранное обозначение с общепринятым
3.  $\Gamma$  совпадает с общепринятым обозначением
4. Большая буква  $Z$  обозначает неизменную комплексную величину<sup>4</sup>

Так же для упрощения формул с методом перевала немного переписать подынтегральную функцию:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n e^{i\Gamma n^2}}{n!} &= \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi\Gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{z^2}{\Gamma} + Ae^{2iz}} dz \\ &= \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi\Gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{z^2}{4\Gamma} + Ae^{iz}} dz \\ &= \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi\Gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-i\frac{z^2}{2} + Ze^{iz}}{2\Gamma}\right) dz \end{aligned} \quad (18)$$

Сделаем следующее обозначение:

$$f(z) = \frac{z^2}{2i} + iZe^{iz} \quad (19)$$

Далее мы будем пользоваться методом перевала. Здесь нам нужно обосновать, что контур действительно можно деформировать ... Этому посвящена моя прога и анализ до этого момента, так что дописать это будет не трудно.

Теперь решения  $f'(z_k) = 0$  можно просто обозначить в виде:

$$e^{iz_k} = \frac{z_k}{iZ} \Rightarrow z_k = iW_k(Z) \quad (20)$$

По-моему, такие обозначения просто прекрасны. Вот, например, разложение вокруг перевальной точки:

$$f(z) = \underbrace{\frac{z_k^2}{2i}}_{f(z_k)} + \underbrace{z_k}_{a_0} + \frac{2-i}{4}(z-z_k)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{-i^n}{(n+2)!}}_{a_1, a_2, \dots} (z-z_k)^{n+2} \quad (21)$$

---

<sup>4</sup>Надеюсь на благоразумие читателей, потому что автор против Z-движения в России

Полагая  $\lambda = \frac{1}{2\Gamma}$  можно написать<sup>5</sup>:

$$\int_{\gamma_k} \exp(\lambda f(z)) dz = \exp(\lambda f(z_k)) \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{c_{2n}}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}} \quad (22)$$

$$c_{2n} = \sum_{j=0}^{2n} C_{-n-\frac{1}{2}}^j \frac{1}{a_0^{n+j+\frac{1}{2}}} \hat{B}_{2n,j}(a_1, a_2, \dots, a_{2n-j+1})$$

Можно заметить, что сумма, стоящая после  $\exp(\lambda f(z_k))$  совершенно не зависит от  $z_k$ . Более того, все  $c_{2n}$  — это просто числа.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\lambda f(z)) dz = \sum_{k=0}^{-\infty} \int_{\gamma_k} \exp(\lambda f(z)) dz = \left( \sum_{k=0}^{-\infty} \exp(\lambda f(z_k)) \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{c_{2n}}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}} \right) \quad (23)$$

## Смелые идеи

Полученную сумму  $\sum_{k=0}^{-\infty} \exp(\lambda f(z_k))$  можно было бы переписать в виде интеграла, а затем переписать полученное выражение с помощью метода перевала. Это получился бы метод перевала в квадрате! Покажу первые шаги:

$$\sum_{k=0}^{-\infty} \exp(\lambda f(z_k)) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{\lambda \tilde{f}(z)}}{-ize^{-iz} - Z} g(z) dz \quad (24)$$

Контур  $C$  необходимо выбрать так, чтоб он обходил все  $z_k$ . Функции  $\tilde{f}(z)$  и  $g(z)$  необходимо выбрать из следующих соображений:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z_k) &= f(z_k) \\ \text{Res}_{z=z_k} \frac{e^{\lambda \tilde{f}(z)}}{-ize^{-iz} - Z} g(z) &= e^{\lambda f(z_k)} \end{aligned} \quad (25)$$

Или же, в предположении целости функции  $g$ :

$$g(z_k) = \frac{d}{dz} (-ize^{-iz} - Z)_{z=z_k} = \underbrace{-(i + z_k)e^{-iz_k}}_{= -i(1 + Ze^{iz_k})e^{-iz_k}} = -(i + z_k) \frac{iZ}{z_k} = \underbrace{-i(1 + Ze^{iz_k})e^{-iz_k}}_{= -i(1 + Ze^{iz_k})e^{-iz_k}} \quad (26)$$

Любой из обведённых вариантов удобен для задания функции  $g$  в зависимости от поведения модуля подынтегральной функции на комплексной плоскости. Очень важно, чтоб контур интегрирования деформировался удобным образом. Более простой вид для функции  $\tilde{f}$  угадывается следующим образом:

$$\tilde{f}(z) = \frac{z^2}{2i} + z = \frac{i}{2} + \frac{(z+i)^2}{2i} \quad (27)$$

Можно было бы выбрать и другие формы, однако в таком виде очевидным образом находится единственная перевальная точка:

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= -i \\ \tilde{f}(\tilde{z}) &= \frac{i}{2} \end{aligned} \quad (28)$$

<sup>5</sup>Надеюсь, что читатель не перепутает  $\Gamma$  и  $\Gamma$ -функцию. Для удобства чтения после использования числа  $\Gamma$  не будет скобочек.