Приближение для ряда

Обозначение:

$$\alpha = re^{i\phi} \tag{1}$$

Стирлинг:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}+\cdots} \tag{2}$$

Логарифм одного слагаемого в $F - normalized$:

$$\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{\alpha^n e^{i\phi n+i\gamma n(n+1)}}{n!}e^{-r}\right) \approx \ln\left(\frac{r^n e^{i\phi n+i\gamma n(n+1)}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}}e^{-r}\right) = \\
&= n\left(\ln r + i\phi + i\gamma(n+1)\right) - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln n - n\left(\ln n - 1\right) - \frac{1}{12n} - r \\
&= n - r + n\cdot\ln\left(\frac{r}{n}\right) + in\left(\phi + \gamma(n+1)\right) - \frac{1}{12n} - \frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\ln(2\pi)
\end{aligned} \tag{3}$$

Из в F в Хусими

Это формула 3.3 из моего диплома:

$$Q(\beta) = \frac{e^{-|\alpha|^2-|\beta|^2}}{\pi}\left|F(\alpha\beta^* e^{2i\Gamma}, e^{-i\Gamma})\right|^2 \tag{4}$$

Если использовать Fn — $F\ normalized$, которое $Fn(r,\phi,\gamma) = F(re^{i\phi}, e^{i\gamma})\cdot e^{-r}$, то формула предстанет в следующем виде:

$$Q(\beta) = \frac{e^{-(|\alpha|-|\beta|)^2}}{\pi}\left|Fn(|\alpha\beta|, 2\Gamma + \arg\left(\alpha\beta^*\right), -\Gamma)\right|^2 \tag{5}$$

Вычисление функции Вигнера

Возьмём некоторый алгоритм расчёта функции F, указанной в дипломе. Это может быть как прямое суммирование, так и нахождение через $\max \operatorname{Re} f(z_k)$ или же ассимптотическое разложение при $|Z| \gg 1$. Для вычисления функции Вигнера лучше использовать формулу из диплома под номером (3.25):

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi}e^{-|\alpha|^2-2|\beta|^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-|\alpha|^2\right)^m}{m!}\left|F(2\alpha\beta^*\psi^{2m-2}, \psi)\right|^2 \tag{6}$$

Перепишем эту формулу через $Fn(|A|, \arg A, e^{i\Gamma}) = e^{-|A|}F(A, e^{i\Gamma})$:

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi}e^{-|\beta|^2-(|\alpha|-|\beta|)^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-|\alpha|^2\right)^m}{m!}\left|Fn(2\alpha\beta^*\psi^{2m-2}, \psi)\right|^2 \tag{7}$$

В последнем ряду основной вклад вносят только члены с $n \sim |\alpha|^2 \pm 3|\alpha|$. [1]

[1] Данную оценку можно сузить ещё сильнее, если учесть, что $Q(\dots)$ имеет гауссов колокол. Ширина этого колокола $\sqrt{|\alpha\beta|}2\Gamma$. Так как теоретически это значение порядка может быть велико и зависеть от β, мы лучше в тупую просто просуммируем при всех соответсвующих n.

Для дальнейшего разложения пригодится аналогичное уже упоминавшемуся разложение в Стирлинга:

$$\ln\left(\frac{|\alpha|^{2m}}{m!}\right) \approx 2m\ln|\alpha| - \frac{1}{2}\ln m - m\left(\ln m - 1\right) - \frac{1}{12m} \tag{8}$$