# Разложение $z_k$

## Разложение функции Ламберта из статьи

Следующая формула взята из статьи "On the Lambert W Function"(DOI:10.1007/BF02124750), формула (4.20):

$$W_k(z) = \log z + 2\pi i k - \log\left(\log z + 2\pi i k\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{km} \log^m\left(\log z + 2\pi i k\right)\left(\log z + 2\pi i k\right)^{-k-m} \tag{1}$$

Для того, чтоб ветви функции Ламберта совпадали с общепринятыми, ветви $\log z$ необходимо так же брать привычными — с разрезом на отрицательных числах и нулевой мнимой частью при положительных $z$. Коэффициенты $c_{km}$ определены в статье после формулы (4.18):

$$c_{km} = \frac{(-1)^k}{m!} c(k+m, k+1) \tag{2}$$

$c(k+m, k+1)$ — это беззнаковые числа Стирлинга первого рода. В вольфраме они обозначаются как "Abs@StirlingS1[k+m, k+1]".

В нашей же задаче, требуется определить $z_k = \frac{i}{2} W_k(-2i\alpha\gamma)$. Обозначая $z = -2i\alpha\gamma$, $k + m = n$, получаем:

$$\begin{aligned} -2iz_k &= W_k(z) \\ &= \log z + 2\pi i k - \log\left(\log z + 2\pi i k\right) + \ldots \\ &\cdots + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{n-m}}{m!} c(n, n-m+1) \frac{\log^m\left(\log z + 2\pi i k\right)}{\left(\log z + 2\pi i k\right)^n} \end{aligned} \tag{3}$$

В такой форме наглядно видно разложение по малости остаточных членов. В дальнейшем будет видно, что большим параметром при разложении здесь является номер функции Ламберта — $k$. Ещё можно использовать знаковые числа Стирлинга $\left(s(n,k) = (-1)^{n-k} c(n,k) \Rightarrow (-1)^{n-m} c(n, n-m+1) = (-1)^{n+1} s(n, n-m+1)\right)$, однако в этом нет пока необходимости.

# Метод перевала с остаточными членами

## Общая теория метода перевала второго порядка

В википедии следующая штука имеет название "Campbell–Froman–Walles–Wojdylo formula". Если нужно куда-то сослаться, то подойдёт файл "Метод перевала с остаточными членами". Там это формула (1.11). (Для нас удобнее наблюдать за последней строчкой. Для случая второго порядка перевальной точки надо положить $\alpha = 2$. Для случая отсутствующей при экспоненте функции под интегралом надо положить $b_k = \delta_{k0}$, $\beta = 1$.) Пример для случая перевальной точки второго порядка на контуре интегрирования можно найти в формулах (1.17 - 1.19). (Там пример с асимптотикой гамма-фукнции.) Перепишем то же самое для случая перевальной точки второго порядка $z_0$:

$$
\begin{aligned}
&\int e^{\lambda f(z)} dz = \frac{e^{\lambda f(z_0)+i\chi}}{\sqrt{|a_0|\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{c_{2n}}{\lambda^n} \\
&\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) c_{2n} = \frac{1}{a_0^n} \sum_{j=0}^{2n} \frac{(-1)^j}{j! a_0^j} \Gamma\left(n+j+\frac{1}{2}\right) \hat{B}_{2n,j}\left(a_1, a_2, \ldots, a_{2n-j+1}\right) \\
&f(z) = f(z_0) + \sum_{m=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^{m+2},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $\chi$ — угол, характеризующий направление кривой постоянной фазы в окрестности точки перевала, а $\hat{B}_{2n,j}\left(\ldots\right)$ — обыкновенные полиномы Белла. В большинстве литературы рассматриваются исключительно экспоненциальные полиномы Белла, которые в обозначениях отличаются лишь шляпкой.

## Обобщённые числа Стирлинга

Они упоминаются в английской вики на странице о числах Стирлинга. Там же приводится ссылка на книгу House Кометта, посвящённую комбинаторике. (см. papers)

## Применение теории