

# Заметки по работе проги

Нугманов Булат

24 марта 2023 г.

## 1 Про тупое суммирование Хусими

### Приближение для ряда

Обозначение:

$$\alpha = r e^{i\phi} \quad (1)$$

Стирлинг:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n} + \dots} \quad (2)$$

Логарифм одного слагаемого в  $F$  — *normalized*:

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{\alpha^n e^{i\phi n + i\gamma n(n+1)}}{n!} e^{-r} \right) &\approx \ln \left( \frac{r^n e^{i\phi n + i\gamma n(n+1)}}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}} e^{-r} \right) = \\ &= n (\ln r + i\phi + i\gamma(n+1)) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln n - n (\ln n - 1) - \frac{1}{12n} - r \\ &= n - r + n \cdot \ln \left( \frac{r}{n} \right) + in (\phi + \gamma(n+1)) - \frac{1}{12n} - \frac{1}{2} \ln n - \frac{1}{2} \ln(2\pi) \end{aligned} \quad (3)$$

### Из $F$ в Хусими

Это формула 3.3 из моего диплома:

$$Q(\beta) = \frac{e^{-|\alpha|^2 - |\beta|^2}}{\pi} |F(\alpha\beta^* e^{2i\Gamma}, e^{-i\Gamma})|^2 \quad (4)$$

Если использовать  $F_n$  —  $F$  *normalized*, которое  $F_n(r, \phi, \gamma) = F(re^{i\phi}, e^{i\gamma}) \cdot e^{-r}$ , то формула предстанет в следующем виде:

$$Q(\beta) = \frac{e^{-(|\alpha| - |\beta|)^2}}{\pi} |F_n(|\alpha\beta|, 2\Gamma + \arg(\alpha\beta^*), -\Gamma)|^2 \quad (5)$$

### Вычисление функции Вигнера

Возьмём некоторый алгоритм расчёта функции  $F$ , указанной в дипломе. Это может быть как прямое суммирование, так и нахождение через  $\max \operatorname{Re} f(z_k)$  или же асимптотическое разложение при  $|Z| \gg 1$ . Для вычисления функции Вигнера лучше использовать формулу из диплома под номером (3.25):

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} e^{-|\alpha|^2 - 2|\beta|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} |F(2\alpha\beta^* \psi^{2m-2}, \psi)|^2 \quad (6)$$

Перепишем эту формулу через  $F_n(|A|, \arg A, e^{i\Gamma}) = e^{-|A|} F(A, e^{i\Gamma})$ :

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\beta|^2 - |\alpha|^2 - 4|\alpha\beta|} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} |F_n(2\alpha\beta^* \psi^{2m-2}, \psi)|^2 \quad (7)$$

В последнем ряду основной вклад вносят только члены с  $n \sim |\alpha|^2 \pm 3|\alpha|$ .<sup>1</sup>

Для дальнейшего разложения пригодится аналогичное уже упоминавшемуся разложение в Стирлинга:

$$\ln \left( \frac{|\alpha|^{2m}}{m!} \right) \approx 2m \ln |\alpha| - \frac{1}{2} \ln m - m (\ln m - 1) - \frac{1}{12m} \quad (8)$$

## 2 Про суммирование Вигнера

### Про связь различных определений $F$

Возьмём формулу выше, которая следует из моего диплома при использовании старого определения  $F$ :

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} e^{|\alpha|^2 - 2(|\beta| - |\alpha|)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} |F_n(2\alpha\beta^* \psi^{2m-2}, \psi)|^2 \quad (9)$$

Нормализация старого и нового определений совпадает, но сами они чуток отличаются:

$$\begin{aligned} F_{\text{старое}}(A, \psi = e^{i\Gamma}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} e^{i\Gamma n(n+1)} \\ F_{\text{новое}}(A, e^{i\Gamma}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} e^{i\Gamma n^2} \\ F_{\text{старое}}(A, e^{i\Gamma}) &= F_{\text{новое}}(Ae^{i\Gamma}, e^{i\Gamma}) \end{aligned} \quad (10)$$

Такое определение соответствует исходно поставленной задаче с заменой  $\Gamma$  на  $-\Gamma$ . Это не очень существенно для вычислений, но об этом нельзя забывать при выписывании конечного ответа.

Следующая формула использует новое определение  $F$ :

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} e^{|\alpha|^2 - 2(|\beta| - |\alpha|)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} |F_n(2\alpha\beta^* e^{i\Gamma(2m-1)}, e^{i\Gamma})|^2 \quad (11)$$

Основной идеей суммирования последнего выражения является преобразование Фурье над  $|F_n|$ :

$$\begin{aligned} |F_n(Re^{i\Phi}, e^{i\Gamma})|^2 &= \sum_k A_k(R) e^{ik\Phi} \\ Re^{i\Phi} &= -2i \times 2\alpha\beta^* e^{i\Gamma(2m-1)} \times \Gamma = Re^{i\Phi_0 + 2im\Gamma} \end{aligned} \quad (12)$$

<sup>1</sup>Данную оценку можно сузить ещё сильнее, если учесть, что  $Q(\dots)$  имеет гауссов колокол. Ширина этого колокола  $\sqrt{|\alpha\beta|}2\Gamma$ . Так как теоретически это значение порядка может быть велико и зависеть от  $\beta$ , мы лучше в тупую просто просуммируем при всех соответствующих  $n$ .

Суммирование ведётся по частотам  $k$ , которые пробегает значения из  $\mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned}
W(\beta) &= \frac{2}{\pi} e^{|\alpha|^2 - 2(|\beta| - |\alpha|)^2} \sum_k A_k(4|\alpha\beta^*\Gamma|) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} e^{ik \times (\Phi_0 + 2im\Gamma)} \\
&= \frac{2}{\pi} e^{|\alpha|^2 - 2(|\beta| - |\alpha|)^2} \sum_k A_k(4|\alpha\beta^*\Gamma|) e^{ik\Phi_0} \exp(-|\alpha|^2 e^{2ik\Gamma}) \\
&= \frac{2}{\pi} e^{-2(|\beta| - |\alpha|)^2} \sum_k A_k(4|\alpha\beta^*\Gamma|) e^{ik\Phi_0} \exp(|\alpha|^2 (1 - e^{2ik\Gamma}))
\end{aligned} \tag{13}$$

## Приблизительный путь... (заброшен)

Данный путь основывается на разложении  $W$  в ряд Фурье по  $\Phi$ . Это же самое рассуждение можно применить без приближений, что реализует следующий метод. Если придётся возродить данный метод, то я бы делал не совсем так, как показано далее.  $\operatorname{Re} \left( \frac{i}{2} (1 + W_k(Re^{i\Phi}))^2 \right)$  можно аналитически продолжить по  $\Phi$  до  $-i \left( (1 + W_k(Re^{i\Phi}))^2 - (1 + W_k(Re^{-i\Phi}))^2 \right)$ . Это выражение позволяет применить комплексный метод перевала, найдя точку в которой при  $k\Gamma \sim 1$  наблюдается перевал. Наивные рассуждения с разложением по малости  $\Gamma$  без учёта  $k\Gamma \sim 1$  являются ошибочными. Тем не менее я не буду их пока удалять, потому что схожие выкладки могут возникнуть вновь.

Далее это выражение можно упрощать, раскладывая последнюю экспоненту по малости  $\Gamma$  или в ряд Фурье, но так или иначе, сначала надо посчитать коэффициенты  $A_k$ . Важно также отметить, что количество членов ряда Фурье надо брать достаточно высоким, чтоб было хорошее разложение в Фурье в окрестности пика  $F_n$ .

$$\begin{aligned}
A_k(R) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\Phi} |F_n(Re^{i\Phi}, e^{i\Gamma})|^2 d\Phi \\
&\approx \frac{e^{-\frac{R}{|\Gamma|}}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\Phi} \frac{\exp\left(\frac{\operatorname{Re} f(z_k)}{\Gamma}\right)}{|i + z_k|} d\Phi
\end{aligned} \tag{14}$$

Введём следующее обозначение:

$$b_m = \frac{i^m q_m(-iR \operatorname{sign} \Gamma)}{(1 - iR \operatorname{sign} \Gamma)^{2m-1}} \tag{15}$$

Приведём парочку разложений для подынтегральных функций:

$$\operatorname{Re} f(z_k) = R \operatorname{sign} \Gamma - \operatorname{Re} b_1 \frac{(\Phi - \Phi_{\max})^2}{2} - \operatorname{Re} b_2 \frac{(\Phi - \Phi_{\max})^3}{6} - \operatorname{Re} b_3 \frac{(\Phi - \Phi_{\max})^4}{24} + o((\Phi - \Phi_{\max})^4) \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
1 + W_k(Re^{i\Phi}) &\approx 1 + W_k(Re^{i\Phi_{\max}}) + \frac{iW_k(Re^{i\Phi_{\max}})}{1 + W_k(Re^{i\Phi_{\max}})} (\Phi - \Phi_{\max}) - \dots \\
&\dots - \frac{W_k(Re^{i\Phi_{\max}}) - 2W_k(Re^{i\Phi_{\max}})^2 (\Phi - \Phi_{\max})^2}{(1 + W_k(Re^{i\Phi_{\max}}))^3} \frac{(\Phi - \Phi_{\max})^2}{2} \\
&\approx 1 - iR \operatorname{sign} \Gamma + \underbrace{\frac{R \operatorname{sign} \Gamma}{1 - iR \operatorname{sign} \Gamma}}_{b_1} (\Phi - \Phi_{\max}) + \underbrace{\frac{iR \operatorname{sign} \Gamma - 2R^2}{(1 - iR \operatorname{sign} \Gamma)^3}}_{b_2} \frac{(\Phi - \Phi_{\max})^2}{2}
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\operatorname{Re} f(z_k) \approx R \operatorname{sign} \Gamma - \operatorname{Re} b_1 \frac{(\Phi - \Phi_{\max})^2}{2} - \operatorname{Re} b_2 \frac{(\Phi - \Phi_{\max})^3}{6} - \operatorname{Re} b_3 \frac{(\Phi - \Phi_{\max})^4}{24} + o((\Phi - \Phi_{\max})^4) \tag{18}$$

Наконец, произведём оценку того, какой точности мы сможем добиться при указанных разложениях ( $\phi = \Phi - \Phi_{\max}$ ,  $x = \sqrt{\frac{\operatorname{Re} b_1}{\Gamma}} \phi = \sqrt{\frac{R}{\Gamma(1+R^2)}} \phi$ ):

$$\begin{aligned}
A_k &= \frac{e^{-ik\Phi_{\max} - \frac{R}{|\Gamma|}}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\phi} \frac{\exp\left(\frac{\operatorname{Re} f(z_k)}{\Gamma}\right)}{|i + z_k|} d\phi \\
&= \frac{\exp(-ik\Phi_{\max})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\frac{\operatorname{Re} b_1}{\Gamma} \phi^2 - ik\phi\right) d\phi \times \dots \\
&\dots \times \exp\left(-\frac{\operatorname{Re} b_2}{6\Gamma} \phi^3 - \frac{\operatorname{Re} b_3}{24\Gamma} \phi^4 + O(\phi^5)\right) (p_0 + p_1\phi + p_2\phi^2 + O(\phi^3)) \\
&= \frac{\exp(-ik\Phi_{\max})}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2 - ik\sqrt{\frac{\Gamma}{\operatorname{Re} b_1}} x\right) \sqrt{\frac{\Gamma}{\operatorname{Re} b_1}} dx \times \dots \\
&\dots \times \exp\left(-\frac{\operatorname{Re} b_2}{6(\operatorname{Re} b_1)^{3/2}} \sqrt{\Gamma} x^3 - \frac{\operatorname{Re} b_3}{24(\operatorname{Re} b_1)^2} \Gamma x^4 + O(\Gamma^{3/2})\right) \left(p_0 + p_1 \sqrt{\frac{\Gamma}{\operatorname{Re} b_1}} x + \frac{p_2 \Gamma}{\operatorname{Re} b_1} x^2 + O(\Gamma^{3/2})\right)
\end{aligned} \tag{19}$$

Таким образом, ожидаемая относительная точность вычислений  $O(\Gamma^2)$ .

Дальнейшие вычисления интеграла содержатся в вольфрам. В целом, их можно охарактеризовать следующей важной формулой:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - ik\sqrt{\frac{\Gamma}{\operatorname{Re} b_1}} x} \exp\left(-\frac{\operatorname{Re} b_2 \times \sqrt{\Gamma} x^3}{6(\operatorname{Re} b_1)^{3/2}} - \frac{\operatorname{Re} b_3 \times \Gamma x^4}{24(\operatorname{Re} b_1)^2}\right) \left(p_0 + p_1 \sqrt{\frac{\Gamma}{\operatorname{Re} b_1}} x + \frac{p_2 \Gamma}{\operatorname{Re} b_1} x^2\right) dx = \\
= (A^0 + A^1 2i\Gamma k + O(\Gamma^2)) e^{-\varkappa|\alpha|^2 (2k\Gamma)^2}
\end{aligned} \tag{20}$$

Коэффициенты  $A^0$  и  $A^1$  можно найти в вольфрам документе. В формуле выше было использовано:

$$4\varkappa|\alpha|^2 \Gamma^2 = \frac{|\Gamma(1 + R^2)|}{4R} \tag{21}$$

Такое обозначение выполнено не случайно:

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} e^{-2(|\beta| - |\alpha|)^2} \sum_k \frac{e^{ik(\Phi_0 - \Phi_{\max})}}{2\pi} \exp(|\alpha|^2(1 - e^{2ik\Gamma} - \varkappa(2k\Gamma)^2)) (A^0 + A^1 2i\Gamma k + O(\Gamma^2)) \quad (22)$$

## Новый путь (в разработке)

$$\begin{aligned} & |F(Ae^{i\phi}, e^{i\Gamma})|^2 = \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{|A|^{n+m} e^{i\phi(n-m)}}{m!n!} e^{i\Gamma(n^2-m^2)} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|A|^{2n}}{n!^2} + \left( \sum_{m,n=0, n>m}^{\infty} \frac{|A|^{n+m} e^{i\phi(n-m)}}{m!n!} e^{i\Gamma(n^2-m^2)} + c.c. \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Сделаем далее замену  $n - m = k$ . В таких обозначениях  $n + m = 2m + k$ .

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n=0, n>m}^{\infty} \frac{|A|^{n+m} e^{i\phi(n-m)}}{m!n!} e^{i\Gamma(n^2-m^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|A|^{2m+k} e^{i\phi k}}{m!(m+k)!} e^{i\Gamma k(2m+k)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (|A|e^{i\phi})^k e^{i\Gamma k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(|A|e^{i\Gamma k})^{2m}}{m!(m+k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ik(\phi-2\Gamma)+i\Gamma k^2} I_k(|A|e^{i\Gamma k}) = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{ik(\phi-2\Gamma)+i\Gamma k^2} \int_0^{\pi} \cos(kx) \exp(|A|e^{i\Gamma k} \cos(x)) dx \end{aligned} \quad (24)$$

Суммирование во второй строчке произведено при помощи модифицированной функции Бесселя  $I_k$ .