Математическое приложение

Нугманов Булат

23 ноября 2022 г.

Данный документ является наброском математического приложения, результаты которого точно выполняются численно. А ещё надо будет это перевести.

1. Переписывание ряда через интеграл
2. Нахождение перевальных точек
3. Асимптотика кривых постоянной фазы через перевальные точки — ???
4. Деформация контура в зависимости от знака Γ
5. Подсчёт вкладов по методу перевала
6. Вставка с полиномами Белла и числами Стирлинга для явного подсчёта коэффициентов в методе перевала
7. Слова о том, что при $|\Gamma| \ll 1$ достаточно учитывать лишь одно слагаемое
8. Точное значение в максимуме
9. Выбор $\overline{k}$
10. Граница выбора $\overline{k}$
11. Итог: асимптотика ряда

Вступление

Целью данного документа является подсчёт асимптотики ряда следующего вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n e^{i\Gamma n^2}}{n!} \tag{1}$$

Переход от суммы к интегралу

Первым делом избавимся от $\exp\left(i\Gamma n^2\right)$

$$\exp\left(i\Gamma n^2\right) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\Gamma}}{2\sqrt{\pi|\Gamma|}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{4\Gamma} + inz\right) dz \tag{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n e^{i\Gamma n^2}}{n!} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\Gamma}}{2\sqrt{\pi|\Gamma|}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{4\Gamma} + iAz\right) dz \tag{3}$$

$$Z = -2iA\Gamma = Re^{i\Phi} \tag{4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n e^{i\Gamma n^2}}{n!} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\Gamma}}{2\sqrt{\pi|\Gamma|}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-i\frac{z^2}{2} + iZe^{iz}}{2\Gamma}\right) dz \tag{5}$$

$$f(z) = \frac{z^2}{2i} + iZe^{iz} \tag{6}$$

$$e^{iz_k} = \frac{z_k}{iZ} \Rightarrow z_k = iW_k(Z) \tag{7}$$

$$f(z) = \underbrace{\frac{z_k^2}{2i} + z_k}_{f(z_k)} + \underbrace{\frac{-i - z_k}{2}}_{a_0}(z - z_k)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{-i^n z_k}{(n+2)!}}_{a_1,\, a_2, \ldots}(z - z_k)^{n+2} \tag{8}$$

Считая 1:

$$\int\limits_{\gamma_k} \exp\left(\frac{f(z)}{2\Gamma}\right) dz = \exp\left(\frac{f(z_k)}{2\Gamma}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) (2\Gamma)^{n+\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{2n} \frac{C^j_{-n-\frac{1}{2}}}{a_0^{n+j+\frac{1}{2}}} \hat{B}_{2n,j}\left(a_1, a_2, \ldots, a_{2n-j+1}\right) \tag{9}$$