Разложение z_k

Разложение функции Ламберта из статьи

Следующая формула взята из статьи "On the Lambert W Function"(DOI:10.1007/BF02124750), формула (4.20):

$$W_k(z) = \log z + 2\pi ik - \log\left(\log z + 2\pi ik\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{km}\log^m\left(\log z + 2\pi ik\right)\left(\log z + 2\pi ik\right)^{-k-m} \tag{1}$$

Для того, чтоб ветви функции Ламберта совпадали с общепринятыми, ветви $\log z$ необходимо так же брать привычными — с разрезом на отрицательных числах и нулевой мнимой частью при положительных z. Коэффициенты c_{km} определены в статье после формулы (4.18):

$$c_{km} = \frac{(-1)^k}{m!}c(k+m, k+1) \tag{2}$$

$c(k+m, k+1)$ — это беззнаковые числа Стирлинга первого рода. В вольфраме они обозначаются как "Abs@StirlingS1[k+m, k+1]".

В нашей же задаче, требуется определить $z_k = \frac{i}{2}W_k(-2i\alpha\gamma)$. Обозначая $z = -2i\alpha\gamma$, $k+m=n$, получаем:

$$\begin{aligned}
-2iz_k &= W_k(z) \\
&= \log z + 2\pi ik - \log\left(\log z + 2\pi ik\right) + \ldots \\
&\cdots + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{m!}c(n, n-m+1)\frac{\log^m\left(\log z + 2\pi ik\right)}{\left(\log z + 2\pi ik\right)^n}
\end{aligned} \tag{3}$$

В такой форме наглядно видно разложение по малости остаточных членов. В дальнейшем будет видно, что большим параметром при разложении здесь является номер функции Ламберта — k. Ещё можно использовать знаковые числа Стирлинга $\left(s(n,k) = (-1)^{n-k}c(n,k) \Rightarrow (-1)^{n-m}c(n, n-m+1) = (-1)^{n+1}s(n, n-m+1)\right)$, однако в этом нет пока необходимости.

Метод перевала с остаточными членами

В википедии следующая штука имеет название "Campbell–Froman–Walles–Wojdylo formula". Если нужно куда-то сослаться, то подойдёт файл "Метод перевала с остаточными членами". Там это формула (1.11). (Для самого общего случая, конечно же.) Пример для случая перевальной точки второго порядка на контуре интегрирования можно найти в формулах (1.17 - 1.19). (Там пример с асимптотикой гамма-фукнции.) Перепишем то же самое для случая перевальной точки второго порядка z_0:

$$\begin{aligned}
&\int e^{\lambda f(z)}dz = \frac{2e^{\lambda f(z_0)+i\chi}}{\sqrt{|a_0|\lambda}}\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{c_{2n}}{\lambda^n} \\
&\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)c_{2n} = \frac{1}{a_0^n}\sum_{j=0}^{2n}\frac{(-1)^j}{j!a_0^j}\Gamma\left(n+j+\frac{1}{2}\right)\hat{B}_{2n,j}\left(a_1, a_2, \ldots, a_{2n-j+1}\right) \\
&f(z) = f(z_0) + \sum_{m=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^{m+2},
\end{aligned} \tag{4}$$

где χ — угол, характеризующий направление кривой постоянной фазы в окрестности точки перевала, а $\hat{B}_{2n,j}(\dots)$ — обыкновенные полиномы Белла. В большинстве литературы рассматриваются исключительно экспоненциальные полиномы Белла, которые в обозначениях отличаются лишь шляпкой.