

Заметки по работе проги

Нугманов Булат

21 февраля 2023 г.

1 Про тупое суммирование Хусими

Приближение для ряда

Обозначение:

$$\alpha = r e^{i\phi} \quad (1)$$

Стирлинг:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n} + \dots} \quad (2)$$

Логарифм одного слагаемого в F — *normalized*:

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\alpha^n e^{i\phi n + i\gamma n(n+1)}}{n!} e^{-r} \right) &\approx \ln \left(\frac{r^n e^{i\phi n + i\gamma n(n+1)}}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}} e^{-r} \right) = \\ &= n (\ln r + i\phi + i\gamma(n+1)) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln n - n (\ln n - 1) - \frac{1}{12n} - r \\ &= n - r + n \cdot \ln \left(\frac{r}{n} \right) + i n (\phi + \gamma(n+1)) - \frac{1}{12n} - \frac{1}{2} \ln n - \frac{1}{2} \ln(2\pi) \end{aligned} \quad (3)$$

Из F в Хусими

Это формула 3.3 из моего диплома:

$$Q(\beta) = \frac{e^{-|\alpha|^2 - |\beta|^2}}{\pi} |F(\alpha\beta^* e^{2i\Gamma}, e^{-i\Gamma})|^2 \quad (4)$$

Если использовать F_n — F *normalized*, которое $F_n(r, \phi, \gamma) = F(re^{i\phi}, e^{i\gamma}) \cdot e^{-r}$, то формула предстанет в следующем виде:

$$Q(\beta) = \frac{e^{-(|\alpha| - |\beta|)^2}}{\pi} |F_n(|\alpha\beta|, 2\Gamma + \arg(\alpha\beta^*), -\Gamma)|^2 \quad (5)$$

Вычисление функции Вигнера

Возьмём некоторый алгоритм расчёта функции F , указанной в дипломе. Это может быть как прямое суммирование, так и нахождение через $\max \operatorname{Re} f(z_k)$ или же асимптотическое разложение при $|Z| \gg 1$. Для вычисления функции Вигнера лучше использовать формулу из диплома под номером (3.25):

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} e^{-|\alpha|^2 - 2|\beta|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} |F(2\alpha\beta^*\psi^{2m-2}, \psi)|^2 \quad (6)$$

Перепишем эту формулу через $F_n(|A|, \arg A, e^{i\Gamma}) = e^{-|A|} F(A, e^{i\Gamma})$:

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\beta|^2 - |\alpha|^2 - 4|\alpha\beta|} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} |F_n(2\alpha\beta^*\psi^{2m-2}, \psi)|^2 \quad (7)$$

В последнем ряду основной вклад вносят только члены с $n \sim |\alpha|^2 \pm 3|\alpha|$.¹

Для дальнейшего разложения пригодится аналогичное уже упоминавшемуся разложение в Стирлинга:

$$\ln \left(\frac{|\alpha|^{2m}}{m!} \right) \approx 2m \ln |\alpha| - \frac{1}{2} \ln m - m (\ln m - 1) - \frac{1}{12m} \quad (8)$$

2 Про суммирование Вигнера

Из моего диплома возьмём следующее:

$$W(\beta) = 2e^{2|\beta|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} Q(2\beta\psi^{-2m}) \quad (9)$$

На бумажке проверил, что это выражение вроде совпадает с тем, что должно получиться, для случая отсутствия нелинейности. Даже нормировано на 1!))) В таком виде выражение неудобно.

¹Данную оценку можно сузить ещё сильнее, если учесть, что $Q(\dots)$ имеет гауссов колокол. Ширина этого колокола $\sqrt{|\alpha\beta|}2\Gamma$. Так как теоретически это значение порядка может быть велико и зависеть от β , мы лучше в тупую просто просуммируем при всех соответствующих n .