Разложение z_k

Разложение функции Ламберта из статьи

Следующая формула взята из статьи "On the Lambert W Function"(DOI:10.1007/BF02124750), формула (4.20):

$$W_k(z) = \log z + 2\pi ik - \log\left(\log z + 2\pi ik\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{km}\log^m\left(\log z + 2\pi ik\right)\left(\log z + 2\pi ik\right)^{-k-m} \tag{1}$$

Для того, чтоб ветви функции Ламберта совпадали с общепринятыми, ветви $\log z$ необходимо так же брать привычными — с разрезом на отрицательных числах и нулевой мнимой частью при положительных z. Коэффициенты c_{km} определены в статье после формулы (4.18):

$$c_{km} = \frac{(-1)^k}{m!}c(k+m, k+1) \tag{2}$$

$c(k+m, k+1)$ — это беззнаковые числа Стирлинга первого рода. В вольфраме они обозначаются как "Abs@StirlingS1[k+m, k+1]".

В нашей же задаче, требуется определить $z_k = \frac{i}{2}W_k(-2i\alpha\gamma)$. Обозначая $z = -2i\alpha\gamma$, $k+m=n$, получаем:

$$\begin{aligned}-2iz_k &= W_k(z)\\ &= \log z + 2\pi ik - \log\left(\log z + 2\pi ik\right) + \dots\\ &\dots + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{m!}c(n, n-m+1)\frac{\log^m\left(\log z + 2\pi ik\right)}{\left(\log z + 2\pi ik\right)^n}\end{aligned} \tag{3}$$

В такой форме наглядно видно разложение по малости остаточных членов. В дальнейшем будет видно, что большим параметром при разложении здесь является номер функции Ламберта — k. Ещё можно использовать знаковые числа Стирлинга $\left(s(n,k) = (-1)^{n-k}c(n,k) \Rightarrow (-1)^{n-m}c(n, n-m+1) = (-1)^{n+1}s(n, n-m+1)\right)$, однако в этом нет пока необходимости.