

Quasiprobability distributions of bright “banana” states

Нугманов Булат

21 апреля 2023 г.

Вступление

$$\hat{H}_{Kerr} = \hbar\omega_0\hat{n} + \hbar\gamma\hat{n}(\hat{n} - 1) \quad (1)$$

С точностью до переопределения ω_0 можно интерпретировать гамильтониан следующим образом: пролетая через кристалл, каждая пара фотонов взаимодействует с энергией $\hbar\gamma/2$.

В представлении вращающейся волны:

$$|\psi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{Kerr}\tau} |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\Gamma n(n-1)} |n\rangle, \quad (2)$$

где $\Gamma = \gamma\tau$ — эффективный параметр нелинейности.

Функцию Хусими ранее считали по формулам из [1], которые естественным образом следуют из определения функции Хусими:

$$Q(\beta) = \frac{|\langle\beta|\psi\rangle|^2}{\pi} = \frac{e^{-|\alpha|^2-|\beta|^2}}{\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\beta^*)^n e^{-i\Gamma n(n-1)}}{n!} \right|^2 \quad (3)$$

Как можно видеть из формулы 2, эволюция в Керровском гамильтониане не меняет распределения числа фотонов. Это значит, что при больших $|\alpha|$ наиболее содержательная часть квазивероятностных распределений, так же как и у когерентного состояния будет достигаться при $|\beta| \sim |\alpha| \pm O(1)$. Функцию Вигнера ранее считали двумя основными способами: численным решением дифференциального уравнения на эволюцию функции Вигнера во времени или прямым вычислением в каждой точке. Как показывают результаты [2], известные формулы для прямого вычисления оказываются неприменимыми для больших $|\alpha|$. Они достаточно быстро приводят к переполнению и требуют около $O(|\alpha|^4)$ слагаемых. Вычисление функции Вигнера с помощью численного решения уравнения в частных производных так же нельзя назвать быстрым, так как требуется большое количество точек на сетке.

Функция Хусими

Слагаемые в суммировании по формуле 3 имеют пуассоновское распределение. При $|\beta| \sim |\alpha| \gg 1$ пуассоновское распределение вырождается в нормальное, так что пользуясь правилом 3-сигма мы получаем, что для достаточно точного вычисления функции Хусими требуется $\sim O(|\alpha|)$ слагаемых. (Для избежания переполнения, необходимо воспользоваться формулой Стирлинга для оценки $n!$) В данном разделе мы выведем формулу, которая выдаёт значения функции Хусими за $O(1)$ при $|\alpha\beta| \gg 1$ и $|\Gamma| \ll 1$.

Сначала заметим, что величины α и β входят ряд для функции Хусими только вместе в конструкции $\alpha\beta^*$. Это несколько упрощает вычисления, потому что мы можем свести зависимость от трёх параметров (α , β , Γ) к зависимости лишь от двух ($\alpha\beta^*$, Γ). Введём для этого функцию F , через которую выражается функция Хусими:

$$Q(\beta) = \frac{e^{-|\alpha|^2 - |\beta|^2}}{\pi} |F(\alpha\beta^* e^{i\Gamma}, e^{-i\Gamma})|^2 \quad (4.1)$$

$$F(A, e^{i\Gamma}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} e^{i\Gamma n^2} \quad (4.2)$$

При помощи интеграла гауссова типа мы сможем избавиться от неудобного для аналитических вычислений множителя вида $e^{i\Gamma n^2}$:

$$\exp(i\Gamma n^2) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \Gamma}}{2\sqrt{\pi|\Gamma|}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{iz^2}{4\Gamma} + inz\right) dz \quad (5.1)$$

$$F(A, e^{i\Gamma}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n e^{i\Gamma n^2}}{n!} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \Gamma}}{2\sqrt{\pi|\Gamma|}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{iz^2}{4\Gamma} + Ae^{iz}\right) dz \quad (5.2)$$

К последнему выражению можно применить комплексный метод перевала. Для упрощения выражений сделаем некоторые переобозначения:

$$f(z) = \frac{z^2}{2i} + iZe^{iz} \quad (6.1)$$

$$Z = -2iA\Gamma = Re^{i\Phi}, \quad (6.2)$$

$$F(A, e^{i\Gamma}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \Gamma}}{2\sqrt{\pi|\Gamma|}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{f(z)}{2\Gamma}\right) dz \quad (6.3)$$

В нашем случае количество точек перевала z_k бесконечно ($k \in \mathbb{Z}$). Их можно пронумеровать в соответствии номерами ветвей W -функции Ламберта:

$$f'(z_k) = 0 \Rightarrow iZe^{iz_k} = z_k \Rightarrow z_k = iW_k(Z) \quad (7)$$

Схематичное положение перевальных точек z_k и кривые постоянной фазы γ_k через них отмечены на изображении 1. Отметим, что через каждое z_k проходит две кривые постоянной фазы: одна из них соответствует кривой наискорейшего спуска при $\Gamma > 0$, а другая при $\Gamma < 0$.

Детальное рассмотрение того, как деформировать контур интегрирования и учёт остаточных членов по формуле CFWW можно посмотреть в математическом приложении. Короче говоря, деформированный контур проходит лишь через половину всех z_k , что приводит нас к следующему результату:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{f(z)}{2\Gamma}\right) dz = \sum_{k=0}^{-\operatorname{sign} \Gamma \cdot \infty} \sqrt{\frac{4\Gamma}{-i - z_k}} \exp\left(\frac{f(z_k)}{2\Gamma}\right) (1 + O(\Gamma^2)) \quad (8)$$

Ключевой идеей дальнейшего рассуждения является замечание того факта, что $\left|\exp\left(\frac{f(z_k)}{2\Gamma}\right)\right|$ как функция k имеет очень узкий гауссов профиль. Это значит, из всей суммы в уравнении 8

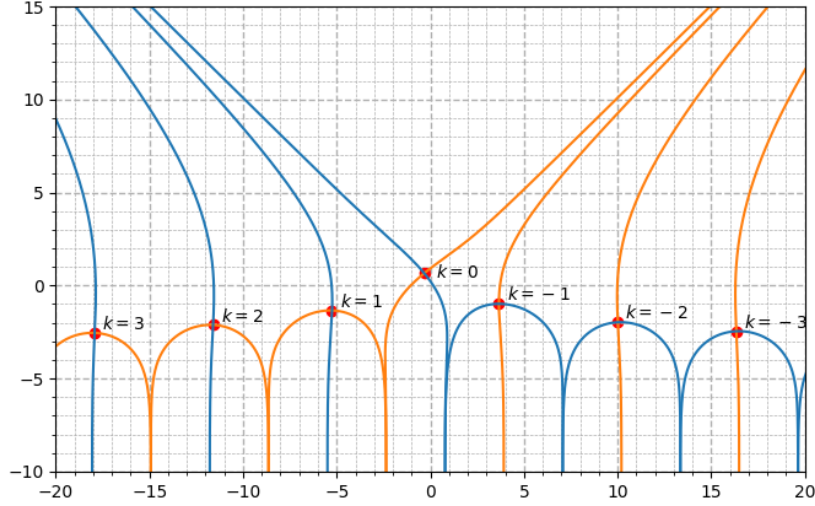


Рис. 1: Кривые постоянной фазы для интеграла 6.3 при $Z = 1 + i$. Синим указаны кривые наискорейшего спуска γ_k при $\Gamma < 0$, оранжевым — при $\Gamma > 0$. Красные точки пересечения кривых — точки перевала $f'(z_k) = 0$.

мы можем учитывать лишь 1 или 2 слагаемых, вносящих наибольший вклад. В большинстве случаев достаточно учитывать лишь одно слагаемое под номером \bar{k} , что можно увидеть на рисунке 2. Вывод ограничений на применимость таких рассуждений, нахождение оптимального $\bar{k}(Z)$ и поведение лидирующего вклада как функцию $\Phi = \arg Z$ можно посмотреть в математическом приложении.

Собирая воедино выражения 7, 8, 6.3 и 4.1 мы приходим к следующему выражению:

$$\text{Большое выражение} \quad (9)$$

Функция Вигнера

Основной идеей для поиска значений функции Вигнера является её связь с функцией Хусими через характеристические функции $C_{s,a}$ или преобразование Фурье \mathcal{F} (нужна ссылка):

$$C_s(z) = \mathcal{F}\{W\}(z) = e^{\frac{|z|^2}{2}} \mathcal{F}\{Q\}(z) = e^{\frac{|z|^2}{2}} C_a(z) \quad (10)$$

Мы не можем воспользоваться уже известным нам приближением для функции Хусими 9 и численным расчётом преобразований Фурье, так как в формуле фигурирует экспоненциальное завышение частот $e^{\frac{|z|^2}{2}}$. Подстановка функции Хусими в форму 3 представляется весьма затруднительной, поэтому мы предлагаем другую форму записи для функции F 4.1, через которую выражается функция Хусими. Кто-то может заметить, что при $\frac{\Gamma}{2\pi} = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ для функции F можно найти замкнутое выражение с конечным числом слагаемых:

$$F(A, e^{i\Gamma}) = \frac{\sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \exp(-i\Gamma j^2 + A e^{2ij\Gamma})}{\sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \exp(-i\Gamma j^2)} \quad (11)$$

Одно из возможных доказательств через функционально-дифференциальное уравнение на функцию F можно найти математическом приложении. Представление 11 в совокупности с

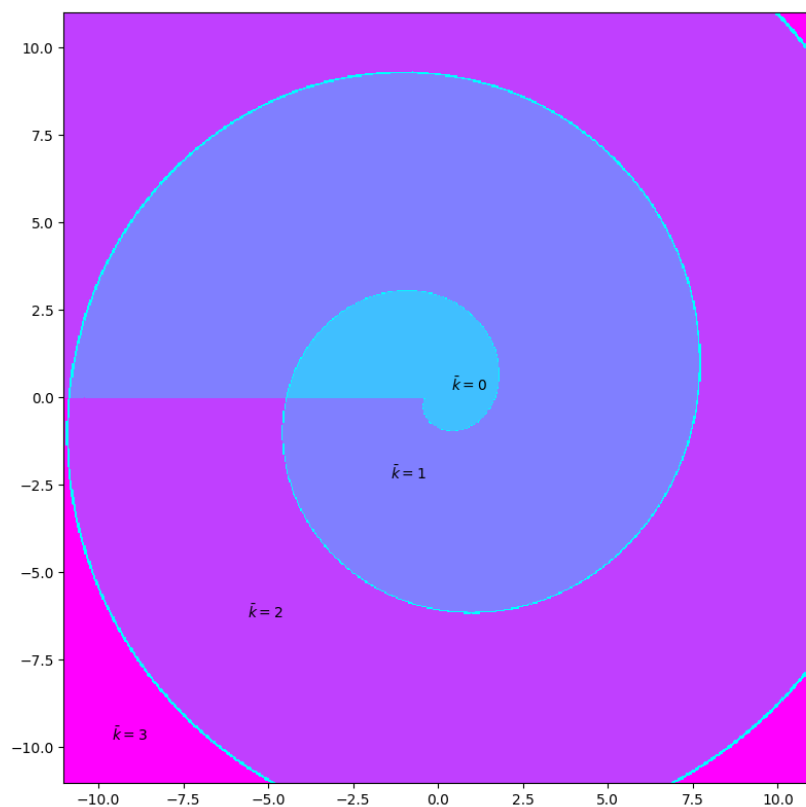


Рис. 2: На комплексной плоскости для каждой точки Z отмечены \bar{k} , вносящие основной вклад в сумму 8. Узкая голубая линия означает то небольшое множество точек, в которых $|\operatorname{Re} f(z_k) - \operatorname{Re} f(z_{k+1})| < 2\Gamma$. На графике изображена картинка при $\Gamma = 0.01$. При уменьшении Γ мера точек Z при которых в сумме 8 необходимо учитывать 2 слагаемых (\bar{k} и $\bar{k} + 1$) снижается.

4.1 является гораздо более удобной формой, так как оно сводит нахождение преобразований Фурье 10 к простому вычислению интегралов гауссова типа. Результатом громоздких выкладок, представленных в математическом приложении, является следующая формула, которая справедлива при произвольных $\Gamma \in \mathbb{R}$:

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} e^{|\alpha|^2 - 2(|\alpha| - |\beta|)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} |F(2\alpha\beta^* e^{i\Gamma(2m-1)}, e^{i\Gamma}) e^{-2|\alpha\beta^*|}|^2 \quad (12.1)$$

$$W(\beta) = 2e^{2|\beta|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} Q(2\beta e^{-i\Gamma 2m}) \quad (12.2)$$

Однако данная форма также не применима для численных расчётов. При $|\beta| \sim |\alpha|$, суммируя величины порядка $\exp(|\alpha|^2)$ в формуле 12.1 мы должны достичь точности порядка $\exp(-|\alpha|^2)$, что представляется невозможным при больших $|\alpha|$. Наконец, разложим выражение 12 в ряд Фурье по $\arg \beta$:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \arg(\alpha\beta^* e^{2i\Gamma}) \\ W(\beta) &= \frac{2}{\pi} e^{-2(|\beta| - |\alpha|)^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\Phi_0} I_k(4|\alpha\beta^*| e^{-i\Gamma k}) \exp(|\alpha|^2(1 - e^{-2ik\Gamma}) - 4|\alpha\beta^*|) \end{aligned} \quad (13)$$

В последнем выражении можно использовать асимптотику для модифицированной функции Бесселя I_k , которая будет работать как при малых, так и при больших k . Пользуясь выражением из [3] при $k\Gamma \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ приходим к удобо считаемому выражению для функции Вигнера:

$$\begin{aligned} W(\beta) &\approx \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left((4|\alpha\beta^*| e^{-ik\Gamma})^2 + k^2 \right)^{-\frac{1}{4}} \exp(-2(|\beta| - |\alpha|)^2 + ik\Phi_0 + \\ &+ |\alpha|^2(1 - e^{-2ik\Gamma}) - 4|\alpha\beta^*| + \sqrt{(4|\alpha\beta^*| e^{-ik\Gamma})^2 + k^2} - k \operatorname{arcsch}\left(\frac{k}{4|\alpha\beta^*| e^{-ik\Gamma}}\right)) \end{aligned} \quad (14)$$

Более подробно о разложении в ряд Фурье 13, об условиях применимости и остаточных членах разложения 14 можно прочитать в математическом приложении.

Заключение

Перечислим основные результаты данной статьи. Мы научились считать квазивероятностные функции Хусими и Вигнера яркого бананового состояния. Предложенные алгоритмы позволяют посчитать функцию Хусими за $O(1)$ и функцию Вигнера за $O(|\alpha|)$ при $\Gamma \sim |\alpha|^{-2} \ll 1$. Программная реализация доступна на гитхабе [4].

Список литературы

- [1] Gerard J Milburn. Quantum and classical liouville dynamics of the anharmonic oscillator. *Physical Review A*, 33(1):674, 1986.
- [2] Magdalena Stobińska, GJ Milburn, and Krzysztof Wódkiewicz. Wigner function evolution of quantum states in the presence of self-kerr interaction. *Physical Review A*, 78(1):013810, 2008.

- [3] Harry Bateman. *Higher transcendental functions*, volume 2. McGRAW-HILL book company, 1953. p. 104.
- [4] <https://github.com/KeeeeeK/Bright-banana-states>.