Заметки по работе проги

Нугманов Булат

26 марта 2023 г.

1 Про тупое суммирование Хусими

Приближение для ряда

Обозначение:

$$\alpha = re^{i\phi} \tag{1}$$

Стирлинг:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}+\cdots} \tag{2}$$

Логарифм одного слагаемого в $F-normalized$:

$$\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{\alpha^n e^{i\phi n+i\gamma n(n+1)}}{n!}e^{-r}\right) \approx \ln\left(\frac{r^n e^{i\phi n+i\gamma n(n+1)}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}}e^{-r}\right) = \\
&= n\left(\ln r + i\phi + i\gamma(n+1)\right) - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln n - n\left(\ln n - 1\right) - \frac{1}{12n} - r \\
&= n - r + n\cdot\ln\left(\frac{r}{n}\right) + in\left(\phi + \gamma(n+1)\right) - \frac{1}{12n} - \frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\ln(2\pi)
\end{aligned} \tag{3}$$

Из в F в Хусими

Это формула 3.3 из моего диплома:

$$Q(\beta) = \frac{e^{-|\alpha|^2-|\beta|^2}}{\pi}\left|F(\alpha\beta^* e^{2i\Gamma}, e^{-i\Gamma})\right|^2 \tag{4}$$

Если использовать $Fn - F\ normalized$, которое $Fn(r,\phi,\gamma) = F(re^{i\phi}, e^{i\gamma})\cdot e^{-r}$, то формула предстанет в следующем виде:

$$Q(\beta) = \frac{e^{-(|\alpha|-|\beta|)^2}}{\pi}\left|Fn(|\alpha\beta|, 2\Gamma + \arg(\alpha\beta^*), -\Gamma)\right|^2 \tag{5}$$

Вычисление функции Вигнера

Возьмём некоторый алгоритм расчёта функции F, указанной в дипломе. Это может быть как прямое суммирование, так и нахождение через $\max \mathrm{Re}\, f(z_k)$ или же ассимптотическое разложение при $|Z| \gg 1$. Для вычисления функции Вигнера лучше использовать формулу из диплома под номером (3.25):

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} e^{-|\alpha|^2 - 2|\beta|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} \left| F(2\alpha\beta^* \psi^{2m-2}, \psi) \right|^2 \tag{6}$$

Перепишем эту формулу через $Fn(|A|, \arg A, e^{i\Gamma}) = e^{-|A|} F(A, e^{i\Gamma})$:

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\beta|^2 - |\alpha|^2 - 4|\alpha\beta|} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} \left| Fn(2\alpha\beta^* \psi^{2m-2}, \psi) \right|^2 \tag{7}$$

В последнем ряду основной вклад вносят только члены с $n \sim |\alpha|^2 \pm 3|\alpha|$. [1]

Для дальнейшего разложения пригодится аналогичное уже упоминавшемуся разложение в Стирлинга:

$$\ln\left(\frac{|\alpha|^{2m}}{m!}\right) \approx 2m \ln|\alpha| - \frac{1}{2}\ln m - m(\ln m - 1) - \frac{1}{12m} \tag{8}$$

2 Про суммирование Вигнера

Про связь различных определений F

Возьмём формулу выше, которая следует из моего диплома при использовании старого определения F:

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} e^{|\alpha|^2 - 2(|\beta| - |\alpha|)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} \left| Fn(2\alpha\beta^* \psi^{2m-2}, \psi) \right|^2 \tag{9}$$

Нормализация старого и нового определений совпадает, но сами они чуток отличаюся:

$$\begin{aligned} F_{\text{старое}}(A, \psi = e^{i\Gamma}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} e^{i\Gamma n(n+1)} \\ F_{\text{новое}}(A, e^{i\Gamma}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} e^{i\Gamma n^2} \\ F_{\text{старое}}(A, e^{i\Gamma}) &= F_{\text{новое}}(Ae^{i\Gamma}, e^{i\Gamma}) \end{aligned} \tag{10}$$

Такое определение соответствует исходно поставленной задаче с заменой Γ на $-\Gamma$. Это не очень существенно для вычислений, но об этом нельзя забывать при выписывании конечного ответа.

Следующая формула использует новое определение F:

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} e^{|\alpha|^2 - 2(|\beta| - |\alpha|)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} \left| Fn(2\alpha\beta^* e^{i\Gamma(2m-1)}, e^{i\Gamma}) \right|^2 \tag{11}$$

Основной идеей суммирования последнего выражения является преобразование Фурье над $|Fn|$:

$$\begin{aligned} \left| Fn(Re^{i\Phi}, e^{i\Gamma}) \right|^2 &= \sum_k A_k(R) e^{ik\Phi} \\ Re^{i\Phi} &= -2i \times 2\alpha\beta^* e^{i\Gamma(2m-1)} \times \Gamma = Re^{i\Phi_0 + 2im\Gamma} \end{aligned} \tag{12}$$

[1] Данную оценку можно сузить ещё сильнее, если учесть, что $Q(\dots)$ имеет гауссов колокол. Ширина этого колокола $\sqrt{|\alpha\beta|}2\Gamma$. Так как теоретически это значение порядка может быть велико и зависеть от β, мы лучше в тупую просто просуммируем при всех соответсвующих n.

Суммирование ведётся по частотам k, которые пробегают значения из $\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} W(\beta) &= \frac{2}{\pi} e^{|\alpha|^2 - 2(|\beta|-|\alpha|)^2} \sum_k A_k(4|\alpha\beta^*\Gamma|) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} e^{ik\times(\Phi_0 + 2im\Gamma)} \\ &= \frac{2}{\pi} e^{|\alpha|^2 - 2(|\beta|-|\alpha|)^2} \sum_k A_k(4|\alpha\beta^*\Gamma|) e^{ik\Phi_0} \exp\left(-|\alpha|^2 e^{2ik\Gamma}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} e^{-2(|\beta|-|\alpha|)^2} \sum_k A_k(4|\alpha\beta^*\Gamma|) e^{ik\Phi_0} \exp\left(|\alpha|^2 (1 - e^{2ik\Gamma})\right) \end{aligned} \tag{13}$$

Приблизительный путь... (заброшен)

Данный путь основывается на разложении W в ряд Фурье по Φ. Это же самое рассуждение можно применить без приближений, что реализует следующий метод. Если придётся возрождать данный метод, то я бы делал не совсем так, как показано далее. $Re\left(\frac{i}{2}(1 + W_k(Re^{i\Phi}))^2\right)$ можно аналитически продолжить по Φ до $-i\left(\left(1 + W_k(Re^{i\Phi})\right)^2 - \left(1 + W_k(Re^{-i\Phi})\right)^2\right)$. Это выражение позволяет применить комплексный метод перевала, найдя точку в которой при $k\Gamma \sim 1$ наблюдается перевал. Наивные рассуждения с разложением по малости Γ без учёта $k\Gamma \sim 1$ являются ошибочными. Тем не менее я не буду их пока удалять, потому что схожие выкладки могут возникнуть вновь.

Далее это выражение можно упрощать, раскладывать последнюю экспоненту по малости Γ или в ряд Фурье, но так или иначе, сначала надо посчитать коэффициенты A_k. Важно также отметить, что количество членов ряда Фурье надо брать достаточно высоким, чтоб было хорошее разложение в Фурье в окрестности пика Fn.

$$\begin{aligned} A_k(R) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\Phi} \left|Fn(Re^{i\Phi}, e^{i\Gamma})\right|^2 d\Phi \\ &\approx \frac{e^{-\frac{R}{|\Gamma|}}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\Phi} \frac{\exp\left(\frac{\operatorname{Re} f(z_k)}{\Gamma}\right)}{|i + z_k|} d\Phi \end{aligned} \tag{14}$$

Введём следующее обозначение:

$$b_m = \frac{i^m q_m(-iR \operatorname{sign}\Gamma)}{(1 - iR\operatorname{sign}\Gamma)^{2m-1}} \tag{15}$$

Приведём парочку разложений для подынтгральных функций:

$$\operatorname{Re} f(z_k) = R\operatorname{sign}\Gamma - \operatorname{Re} b_1 \frac{(\Phi - \Phi_{\max})^2}{2} - \operatorname{Re} b_2 \frac{(\Phi - \Phi_{\max})^3}{6} - \operatorname{Re} b_3 \frac{(\Phi - \Phi_{\max})^4}{24} + o\left((\Phi - \Phi_{\max})^4\right) \tag{16}$$

$$
\begin{aligned}
1+W_k(Re^{i\Phi}) &\approx 1+W_k(Re^{i\Phi_{\max}})+\frac{iW_k(Re^{i\Phi_{\max}})}{1+W_k(Re^{i\Phi_{\max}})}(\Phi-\Phi_{\max})-\dots\\
&\dots-\frac{W_k(Re^{i\Phi_{\max}})-2W_k(Re^{i\Phi_{\max}})^2}{(1+W_k(Re^{i\Phi_{\max}}))^3}\frac{(\Phi-\Phi_{\max})^2}{2}\\
&\approx 1-iR\,\mathrm{sign}\,\Gamma+\underbrace{\frac{R\,\mathrm{sign}\,\Gamma}{1-iR\,\mathrm{sign}\,\Gamma}}_{b_1}(\Phi-\Phi_{\max})+\underbrace{\frac{iR\,\mathrm{sign}\,\Gamma-2R^2}{(1-iR\,\mathrm{sign}\,\Gamma)^3}}_{b_2}\frac{(\Phi-\Phi_{\max})^2}{2}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$
\mathrm{Re}\,f(z_k)\approx R\,\mathrm{sign}\,\Gamma-\mathrm{Re}\,b_1\frac{(\Phi-\Phi_{\max})^2}{2}-\mathrm{Re}\,b_2\frac{(\Phi-\Phi_{\max})^3}{6}-\mathrm{Re}\,b_3\frac{(\Phi-\Phi_{\max})^4}{24}+o\left((\Phi-\Phi_{\max})^4\right)
\tag{18}
$$

Наконец, произведём оценку того, какой точности мы сможем добиться при указанных разложениях ($\phi=\Phi-\Phi_{\max}, x=\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,b_1}{\Gamma}}\phi=\sqrt{\frac{R}{\Gamma(1+R^2)}}\phi$):

$$
\begin{aligned}
A_k &= \frac{e^{-ik\Phi_{\max}-\frac{R}{|\Gamma|}}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ik\phi}\frac{\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\,f(z_k)}{\Gamma}\right)}{|i+z_k|}d\phi\\
&=\frac{\exp(-ik\Phi_{\max})}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left(-\frac{\mathrm{Re}\,b_1}{\Gamma}\phi^2-ik\phi\right)d\phi\times\dots\\
&\dots\times\exp\left(-\frac{\mathrm{Re}\,b_2}{6\Gamma}\phi^3-\frac{\mathrm{Re}\,b_3}{24\Gamma}\phi^4+O(\phi^5)\right)(p_0+p_1\phi+p_2\phi^2+O(\phi^3))\\
&=\frac{\exp(-ik\Phi_{\max})}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-x^2-ik\sqrt{\frac{\Gamma}{\mathrm{Re}\,b_1}}x\right)\sqrt{\frac{\Gamma}{\mathrm{Re}\,b_1}}dx\times\dots\\
&\dots\times\exp\left(-\frac{\mathrm{Re}\,b_2}{6\,(\mathrm{Re}\,b_1)^{3/2}}\sqrt{\Gamma}x^3-\frac{\mathrm{Re}\,b_3}{24\,(\mathrm{Re}\,b_1)^2}\Gamma x^4+O(\Gamma^{3/2})\right)\left(p_0+p_1\sqrt{\frac{\Gamma}{\mathrm{Re}\,b_1}}x+\frac{p_2\Gamma}{\mathrm{Re}\,b_1}x^2+O(\Gamma^{3/2})\right)
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Таким образом, ожидаемая относительная точность вычислений $O(\Gamma^2)$.

Дальнейшие вычисления интеграла содержатся в вольфраме. В целом, их можно охарактеризовать следующей важной формулой:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2-ik\sqrt{\frac{\Gamma}{\mathrm{Re}\,b_1}}x}\exp\left(-\frac{\mathrm{Re}\,b_2\times\sqrt{\Gamma}x^3}{6\,(\mathrm{Re}\,b_1)^{3/2}}-\frac{\mathrm{Re}\,b_3\times\Gamma x^4}{24\,(\mathrm{Re}\,b_1)^2}\right)\left(p_0+p_1\sqrt{\frac{\Gamma}{\mathrm{Re}\,b_1}}x+\frac{p_2\Gamma}{\mathrm{Re}\,b_1}x^2\right)dx=\\
&\qquad=\left(A^0+A^1 2i\Gamma k+O(\Gamma^2)\right)e^{-\varkappa|\alpha|^2(2k\Gamma)^2}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Коэффициенты A^0 и A^1 можно найти в вольфрам документе. В формуле выше было использовано:

$$
4\varkappa|\alpha|^2\Gamma^2=\frac{|\Gamma(1+R^2)|}{4R}
\tag{21}
$$

Такое обозначение выполнено не случайно:

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} e^{-2(|\beta|-|\alpha|)^2} \sum_k \frac{e^{ik(\Phi_0 - \Phi_{\max})}}{2\pi} \exp\left(|\alpha|^2 (1 - e^{2ik\Gamma} - \varkappa\,(2k\Gamma)^2)\right) \left(A^0 + A^1 2i\Gamma k + O(\Gamma^2)\right) \tag{22}$$

Новый путь (в разработке)

$$\begin{gathered} \left|F\left(|A|e^{i\phi}, e^{i\Gamma}\right)\right|^2 = \\ = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{|A|^{n+m} e^{i\phi(n-m)}}{m!n!} e^{i\Gamma(n^2-m^2)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|A|^{2n}}{n!^2} + \left(\sum_{m,n=0,n\geq m}^{\infty} \frac{|A|^{n+m} e^{i\phi(n-m)}}{m!n!} e^{i\Gamma(n^2-m^2)} + c.c. \right) \end{gathered} \tag{23}$$

Сделаем далее замену $n - m = k$. В таких обозначениях $n + m = 2m + k$.

$$\begin{gathered} \sum_{m,n=0,n>m}^{\infty} \frac{|A|^{n+m} e^{i\phi(n-m)}}{m!n!} e^{i\Gamma(n^2-m^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|A|^{2m+k} e^{i\phi k}}{m!(m+k)!} e^{i\Gamma k(2m+k)} = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \left(|A|e^{i\phi}\right)^k e^{i\Gamma k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(|A|e^{i\Gamma k}\right)^{2m}}{m!(m+k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ik(\phi - 2\Gamma) + i\Gamma k^2} I_k\left(|A|e^{i\Gamma k}\right) = \\ = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{ik(\phi-2\Gamma)+i\Gamma k^2} \int_0^{\pi} \cos(kx) \exp\left(|A|e^{i\Gamma k}\cos(x)\right) dx \end{gathered} \tag{24}$$

Суммирование во второй строчке произведено при помощи модифицированной функции Бесселя I_k.

Подставим данное соотношение в формулу для функции Вигнера. Это формула 13 в этом документе с точностью до следующих переобозначений:

$$\begin{aligned} &|A|e^{i\Phi_0} = 2\alpha\beta^* e^{-i\Gamma} \\ &A_k = e^{-2ik\Gamma + i\Gamma k^2} I_k\left(|A|e^{i\Gamma k}\right) \\ &A_{-k} = A_k^* \end{aligned} \tag{25}$$