

Нахождение интеграла для F

Нугманов Булат

10 ноября 2022 г.

Разложение z_k

Разложение функции Ламберта из статьи

Следующая формула взята из статьи "On the Lambert W Function" (DOI:10.1007/BF02124750), формула (4.20):

$$W_k(z) = \log z + 2\pi i k - \log(\log z + 2\pi i k) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{km} \log^m(\log z + 2\pi i k) (\log z + 2\pi i k)^{-k-m} \quad (1)$$

Для того, чтоб ветви функции Ламберта совпадали с общепринятыми, ветви $\log z$ необходимо так же брать привычными — с разрезом на отрицательных числах и нулевой мнимой частью при положительных z . Коэффициенты c_{km} определены в статье после формулы (4.18):

$$c_{km} = \frac{(-1)^k}{m!} c(k+m, k+1) \quad (2)$$

$c(k+m, k+1)$ — это беззнаковые числа Стирлинга первого рода. В вольфраме они обозначаются как "Abs@StirlingS1[k+m, k+1]".

В нашей же задаче, требуется определить $z_k = \frac{i}{2} W_k(-2i\alpha\gamma)$. Обозначая $z = -2i\alpha\gamma$, $k+m = n$, получаем:

$$\begin{aligned} -2iz_k &= W_k(z) \\ &= \log z + 2\pi i k - \log(\log z + 2\pi i k) + \dots \\ &\dots + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{n-m}}{m!} c(n, n-m+1) \frac{\log^m(\log z + 2\pi i k)}{(\log z + 2\pi i k)^n} \end{aligned} \quad (3)$$

В такой форме наглядно видно разложение по малости остаточных членов. В дальнейшем будет видно, что большим параметром при разложении здесь является номер функции Ламберта — k . Ещё можно использовать знаковые числа Стирлинга ($s(n, k) = (-1)^{n-k} c(n, k) \Rightarrow (-1)^{n-m} c(n, n-m+1) = (-1)^{n+1} s(n, n-m+1)$), однако в этом нет пока необходимости.

Метод перевала с остаточными членами

Общая теория метода перевала

Следует быть осторожным при использовании чужих формул по методу перевала. Сейчас будет сформулировано утверждение под названием "Perron's formula" ¹. Это формула для нахождения интеграла через перевальную точку z_0 вдоль кривой наискорейшего спуска γ .

$$\int_{\gamma} e^{\lambda f(z)} dz = e^{\lambda f(z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{c_{2n}}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}} \quad (4)$$
$$c_{2n} = \frac{1}{(2n)!} \left[\left(\frac{d}{dz} \right)^{2n} \left\{ \frac{(z - z_0)^2}{f(z) - f(z_0)} \right\}^{n+\frac{1}{2}} \right]_{z=z_0}$$

Если же использовать разложение функции f в ряд Тейлора, то можно получить "Campbell – Froman – Walles – Wojdylo formula" ².

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{p=0}^{\infty} a_p (z - z_0)^{p+2} \quad (5)$$
$$c_{2n} = \frac{1}{a_0^{n+\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{2n} C_{-n-\frac{1}{2}}^j \frac{1}{a_0^j} \hat{B}_{2n,j}(a_1, a_2, \dots, a_{2n-j+1})$$

Обобщённые числа Стирлинга

Они упоминаются в английской вики на странице о числах Стирлинга. Там же приводится ссылка на книгу Кометта, посвящённую комбинаторике. (см. papers)

$$\exp\left(u \left(\frac{t^r}{r!} + \frac{t^{r+1}}{(r+1)!} + \dots \right)\right) = \sum_{n=(r+1)k, k=0}^{\infty} S_r(n, k) u^k \frac{t^n}{n!} \quad (6)$$

Для чисел Стирлинга есть рекуррентная формула всё в той же книжке "Advanced combinatorics":

$$S_r(n+1, k) = k S_r(n, k) + C_n^r S_r(n-r+1, k-1) \quad (7)$$

Немного о полиномах Белла

$$\exp\left(u \sum_{j=1}^{\infty} x_j t^j\right) = \sum_{n \geq k \geq 0} \hat{B}_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}) t^n \frac{u^k}{k!} \quad (8)$$

Подставляя необходимые x_j в нашем случае, получаем следующий ряд:

¹Формула (2.5) в файле "Метод перевала с остаточными членами". Сразу рассмотрим более частный случай, имеющий непосредственное влияние на нашу задачу. А именно возьмём перевальную точку второго порядка $m = 2$, положим функцию рядом с экспонентой под интегралом $g(z) = 1$, будем считать, что контур проходит через перевальную точку, а не имеет в ней начало или конец, как это приведено в книге.

²формула (1.11) в книжке по методу перевала.

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq k \geq 0} \hat{B}_{n,k} \left(\frac{1}{r!}, \frac{1}{(r+1)!}, \dots, \frac{1}{(n-k+r)!} \right) t^n \frac{u^k}{k!} &= \exp \left(\frac{u}{t^{r-1}} \left(\frac{t^r}{r!} + \frac{t^{r+1}}{(r+1)!} + \dots \right) \right) \\
&= \sum_{n,k} S_r(n, k) \frac{u^k}{t^{(r-1)k}} \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n,k} S_r(n + (r-1)k, k) u^k \frac{t^n}{(n + (r-1)k)!}
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\hat{B}_{n,k} \left(\frac{1}{r!}, \frac{1}{(r+1)!}, \dots, \frac{1}{(n-k+r)!} \right) = \frac{k!}{(n + (r-1)k)!} S_r(n + (r-1)k, k) \tag{10}$$

Применение теории

Как упоминается в приложении к диплому:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n e^{i\gamma n^2}}{n!} = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{x^2}{\gamma} + \alpha e^{2ix}} dx = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{\gamma}(-ix^2 + \alpha\gamma e^{2ix})} dx \tag{11}$$

В таком виде очевидно, что в формуле 4 будут использоваться следующие замены: $\lambda \rightsquigarrow \frac{1}{\gamma}$, $f(x) \rightsquigarrow -ix^2 + \alpha\gamma e^{2ix} = -ix^2 - \frac{z}{2i} e^{2iz}$. (А так же вспомним обозначение из первой части $z = -2i\alpha\gamma$).

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(z_k)}{(x - z_k)^2} &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{f^{(p+2)}(z_k)}{(p+2)!} (x - z_k)^p \\
&= \underbrace{(-i - iz e^{2iz_k})}_{a_0} - \sum_{p=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(2i)^{p+1} z e^{2iz_k}}{(p+2)!}}_{a_1, a_2, \dots} (x - z_k)^p
\end{aligned} \tag{12}$$

Теперь мы готовы воспользоваться формулой 5 и выразить интеграл по перевальному контуру через z_k (а так же используем формулу 5.6 из моего диплома):

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_k} e^{\frac{1}{\gamma}(-ix^2 + \alpha\gamma e^{2ix})} dx &= \exp \left(\frac{z_k(1 - iz_k)}{\gamma} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma \left(n + \frac{1}{2} \right) c_{2n} \gamma^{n+\frac{1}{2}} \\
c_{2n} &= \sum_{j=0}^{2n} C_{-n-\frac{1}{2}}^j \frac{1}{(-i - iz e^{2iz_k})^{n+j+\frac{1}{2}}} \hat{B}_{2n,j} \left(-\frac{(2i)^2 z e^{2iz_k}}{3!}, -\frac{(2i)^4 z e^{2iz_k}}{4!}, \dots, -\frac{(2i)^{2n-j+2} z e^{2iz_k}}{(2n-j+3)!} \right)
\end{aligned} \tag{13}$$

Для упрощения последнего выражения нам понадобятся пара свойств полиномов Белла. А именно можно использовать их однородность и экспоненциальные полиномы Белла:

$$\begin{aligned}
\hat{B}_{2n,j}(\zeta x_1, \zeta x_2, \dots, \zeta x_{2n-j+1}) &= \zeta^j \hat{B}_{2n,j}(x_1, x_2, \dots, x_{2n-j+1}) \\
\hat{B}_{2n,j}(\zeta x_1, \zeta^2 x_2, \dots, \zeta^{2n-j+1} x_{2n-j+1}) &= \zeta^{2n} \hat{B}_{2n,j}(x_1, x_2, \dots, x_{2n-j+1})
\end{aligned} \tag{14}$$

Из этого следует:

$$\begin{aligned} \hat{B}_{2n,j} \left(-\frac{(2i)^2 z e^{2iz_k}}{3!}, -\frac{(2i)^4 z e^{2iz_k}}{4!}, \dots, -\frac{(2i)^{2n-j+2} z e^{2iz_k}}{(2n-j+3)!} \right) = \\ = (-2iz e^{2iz_k})^j (2i)^{2n} \hat{B}_{2n,j} \left(\frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \dots, \frac{1}{(2n-j+3)!} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Используя выше перечисленное³, можно написать:

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \sum_{j=0}^{2n} C_{-n-\frac{1}{2}}^j \frac{(-2iz e^{2iz_k})^j (2i)^{2n}}{(-i - iz e^{2iz_k})^{n+j+\frac{1}{2}}} \frac{j!}{(2n+2j)!} S_3(2n+2j, j) \\ &= \sum_{j=0}^{2n} \frac{n!(2n+2j)!}{(n+j)!(2n)!j!(2i)^{2j}} \frac{(-2iz e^{2iz_k})^j (2i)^{2n}}{(-i - iz e^{2iz_k})^{n+j+\frac{1}{2}}} \frac{j!}{(2n+2j)!} S_3(2n+2j, j) \\ &= \sum_{j=0}^{2n} \frac{n!}{(n+j)!(2n)!} \frac{(-2iz e^{2iz_k})^j (2i)^{2n-2j}}{(-i - iz e^{2iz_k})^{n+j+\frac{1}{2}}} S_3(2n+2j, j) \end{aligned} \quad (16)$$

Альтернативное переписывание

Как можно было заметить, в полученных формулах много некрасивостей. Сейчас, когда мы уже знаем, какие выражения придётся ворочить, предлагается сделать следующие переобозначения:

$$\begin{aligned} A &\rightsquigarrow \alpha \\ \Gamma &\rightsquigarrow \gamma \\ Z &= Re^{i\Phi} = -2iA\Gamma \rightsquigarrow -2i\alpha\gamma \end{aligned} \quad (17)$$

Мотивация следующая:

1. Большие буквы обозначают неизменность, что важно в контексте множества сумм, параметров и всего такого
2. A позволит не путать моё ошибочно выбранное обозначение с общепринятым
3. Γ совпадает с общепринятым обозначением
4. Большая буква Z обозначает неизменную комплексную величину⁴

Так же для упрощения формул с методом перевала немного переписать подынтегральную функцию:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n e^{i\Gamma n^2}}{n!} &= \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi\Gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{z^2}{\Gamma} + Ae^{2iz}} dz \\ &= \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi\Gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{z^2}{4\Gamma} + Ae^{iz}} dz \\ &= \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi\Gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-i\frac{z^2}{2} + Zie^{iz}}{2\Gamma}\right) dz \end{aligned} \quad (18)$$

³А также $\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(2i)^{2n} n!}{(2n)!} \sqrt{\pi}$

⁴Надеюсь на благоразумие читателей, потому что автор против Z-движения в России

Сделаем следующее обозначение:

$$f(z) = \frac{z^2}{2i} + iZe^{iz} \quad (19)$$

Далее мы будем пользоваться методом перевала. Здесь нам нужно обосновать, что контур действительно можно деформировать ... Этому посвящена моя прога и анализ до этого момента, так что дописать это будет не трудно.

Теперь решения $f'(z_k) = 0$ можно просто обозначить в виде:

$$e^{iz_k} = \frac{z_k}{iZ} \Rightarrow z_k = iW_k(Z) \quad (20)$$

По-моему, такие обозначения просто прекрасны. Вот, например, разложение вокруг перевальной точки:

$$f(z) = \underbrace{\frac{z_k^2}{2i} + z_k}_{f(z_k)} + \underbrace{\frac{-i - z_k}{2}}_{a_0} (z - z_k)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{-i^n z_k}{(n+2)!}}_{a_1, a_2, \dots} (z - z_k)^{n+2} \quad (21)$$

Полагая $\lambda = \frac{1}{2i}$ можно написать⁵:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_k} \exp(\lambda f(z)) dz &= \exp(\lambda f(z_k)) \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{c_{2n}}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}} \\ c_{2n} &= \sum_{j=0}^{2n} C_{-n-\frac{1}{2}}^j \frac{1}{a_0^{n+j+\frac{1}{2}}} \hat{B}_{2n,j}(a_1, a_2, \dots, a_{2n-j+1}) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{-i-z_k}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{2n} \frac{\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right)}{j! \Gamma\left(-n - j + \frac{1}{2}\right)} \frac{1}{\left(\frac{-i-z_k}{2}\right)^{n+j}} (-1)^n (-z_k)^j \hat{B}_{2n,j}\left(\frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \dots, \frac{1}{(2n-j+3)!}\right) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{-i-z_k}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{2n} \frac{\frac{n!}{(2n)!}}{j! \frac{(-4)^j (n+j)!}{(2n+2j)!}} \frac{(-1)^n (-z_k)^j}{\left(\frac{-i-z_k}{2}\right)^{n+j}} \frac{j!}{(2n+2j)!} S_3(2n+2j, j) \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(2n)!} \frac{1}{\left(\frac{-i-z_k}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{(-4)^j (n+j)!} \frac{(-z_k)^j}{\left(\frac{-i-z_k}{2}\right)^{n+j}} S_3(2n+2j, j) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) c_{2n} &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4^n (-i - z_k)^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{(-4)^j (n+j)!} \frac{(-z_k)^j}{\left(\frac{-i-z_k}{2}\right)^{n+j}} S_3(2n+2j, j) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{(-i - z_k)^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{2n} \left(-\frac{1}{2} \frac{z_k}{i + z_k}\right)^{n+j} \frac{S_3(2n+2j, j)}{(n+j)!} \end{aligned} \quad (23)$$

Резюмируя выше написанное одной формулой:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{iZ}{2\Gamma}\right)^n \frac{e^{i\Gamma n^2}}{n!} = e^{\frac{i\pi}{4}} \sum_{k=0}^{-\text{sign } \Gamma \cdot \infty} \frac{\exp\left(\frac{-i-i(z_k+i)^2}{4\Gamma}\right)}{(-i - z_k)^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} (2\Gamma)^n \sum_{j=0}^{2n} \left(-\frac{1}{2} \frac{z_k}{i + z_k}\right)^{n+j} \frac{S_3(2n+2j, j)}{(n+j)!}, \quad (24)$$

⁵Надеюсь, что читатель не перепутает Γ и Γ -функцию. Для удобства чтения после использования числа Γ не будет скобочек.

где $z_k = iW_k(Z)$. От него так же можно избавиться и придти к следующей формулу:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{iZ}{2\Gamma} \right)^n \frac{e^{i\Gamma n^2}}{n!} = i \sum_{k=0}^{-\text{sign } \Gamma \cdot \infty} \frac{\exp \left(\frac{-i+i(1+W_k(Z))^2}{4\Gamma} \right)}{(1+W_k(Z))^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} (2\Gamma)^n \sum_{j=0}^{2n} \left(-\frac{1}{2} \frac{W_k(Z)}{1+W_k(Z)} \right)^{n+j} \frac{S_3(2n+2j, j)}{(n+j)!}, \quad (25)$$

Поговорим немного о выборе ветви корня. Так как изначальный интеграл брался в пределах $\int_{-\infty}^{\infty}$, то направление каждой из ветвей должно было выбираться из условия, чтоб $\arg \frac{dz}{ds} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, где s — натуральный параметр кривой постоянной фазы. Это значит:

$$\arg(-i - z_k)^{-\frac{1}{2}} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (26)$$

что соответствует определению корня с разрезом в $z : \text{Re}(z) \leq 0; \text{Im}(z) = 0$. В последней же формуле используется разрез в $z : \arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$, что соответствует $\text{Im} + \text{Re}(\sqrt{1+W(Z)}) > 0$.

Какое k вносит основной вклад

В полученном выражении стоит сумма по k с лидирующими вкладами вида $\exp \left(\frac{i+(z_k+i)^2}{4\Gamma} \right)$. Стоит заметить, что, например, при $\Gamma = 10^{-6}$, а значит незначительная разница на 0.01 в $\text{Re}((z_k+i)^2)$ при различных k приведёт к разнице слагаемых в $\sim e^{-10^4}$, что значит, что меньшим из слагаемых можно пренебречь, не сильно потеряв в точности. Найдём, при каком k вносится основной вклад.

$$\begin{aligned} \text{Re}(f(z_k)) &= \frac{1}{2} \text{Re}(-i(z_k+i)^2) = \frac{1}{2} \text{Im}((z_k+i)^2) = \text{Re}(z_k)(1 + \text{Im}(z_k)) \\ &= -\text{Im}(W_k(Z))(1 + \text{Re}(W_k(Z))) \end{aligned} \quad (27)$$

Применим разложение, с которого начинается данный документ, огрубив его до суммирования ($R, |k| \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned} W_k(Z = Re^{i\Phi}) &= \log R + i\Phi + 2\pi ik - \log(\log R + i\Phi + 2\pi ik) + O\left(\frac{\log(\log R + i\Phi + 2\pi ik)}{\log R + i\Phi + 2\pi ik}\right) \\ &= \log R + i\Phi + 2\pi ik - \log(\log R + 2\pi ik) + \underbrace{\log\left(1 + \frac{i\Phi}{\log R + 2\pi ik}\right)}_{\sim \frac{1}{\log R + 2\pi ik} \approx 0} + O\left(\frac{\log(\log R + 2\pi ik)}{\log R + 2\pi ik}\right) \\ &= \log R - \frac{1}{2} \log(\log^2 R + (2\pi k)^2) + i\left(\Phi + 2\pi k - \arctan\left(\frac{2\pi k}{\log R}\right)\right) + O\left(\frac{\log(\log R + 2\pi ik)}{\log R + 2\pi ik}\right) \end{aligned} \quad (28)$$

Воспользуемся сначала самым простым и тупым приближением: $W_k(Z) \approx \log R + i\Phi + 2\pi ik$

$$\text{Re}(f(z_k)) \approx -(2\pi k + \Phi)(1 + \log R) \quad (29)$$

Получаем, что в первом приближении $k \approx \infty$. Воспользуемся следующим порядком приближения без учёта суммы:

$$\begin{aligned} \text{Re}(f(z_k)) &\approx -\left(\Phi + 2\pi k - \arctan\left(\frac{2\pi k}{\log R}\right)\right) \left(1 + \log R - \frac{1}{2} \log(\log^2 R + (2\pi k)^2)\right) \\ &\approx -\left(\Phi + 2\pi k - \frac{\pi}{2} \text{sign } k\right) (1 + \log R - \log |2\pi k|), \end{aligned} \quad (30)$$

где мы пренебрегли всеми слагаемыми, которые при раскрытии скобок дадут вклад $O\left(\frac{\log^2 R}{R}\right)$. Попробуем оптимизировать данное выражение так, как если бы $k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dk} \operatorname{Re}(f(z_k)) = 0 \quad (31)$$

$$\begin{aligned} 2\pi(1 + \log R - \log |2\pi k|) &= \frac{1}{k} \left(\Phi + 2\pi k - \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} k \right) \\ \frac{2\pi|k|}{R} \log \left(\frac{2\pi|k|}{R} \right) &= \frac{|\Phi - \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} k|}{R} \end{aligned} \quad (32)$$

Введём временно обозначение $e^\varkappa = \frac{2\pi|k|}{R} > 0$:

$$\begin{aligned} \varkappa e^\varkappa &= \frac{|\Phi - \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} k|}{R} \approx 0 \\ \varkappa &= W_0 \left(\frac{|\Phi - \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} k|}{R} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

Для нулевой функции Ламберта у нас так же есть небольшое разложение $W_0(x) \approx x$. Применим его и подставим \varkappa :

$$|k| = \left\lceil \frac{1}{2\pi} \left(R + \left| \Phi - \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} k \right| \right) \right\rceil \quad (34)$$

Такое приближённое решение почти всегда даёт наилучшее приближение, потому что при учёте высших порядков вклад будет $\ll 1$ при больших R . Значения функции Ламберта в окрестности малых R требует уже численных расчётов. Далее мы будем обозначать это оптимальное k через \bar{k} , подразумевая его зависимость от Z и $\operatorname{sign} \Gamma$.

Какой вклад вносит слагаемое под номером \bar{k}

Как бы нам не хотелось убрать знак округления (квадратные скобки в формуле выше), оно неизбежно. Введём следующее обозначение:

$$\begin{aligned} \varkappa &= 2\pi\bar{k} - R \operatorname{sign} k \sim 1 \\ 2\pi|\bar{k}| &= R + \varkappa \operatorname{sign} k \end{aligned} \quad (35)$$

Максимум по Φ

Будем рассматривать только показатель экспоненты основной ветви, считая, что она одна на всём промежутке $(-\pi, \pi)$. Нам понадобится формула для производной функции Ламберта:

$$\frac{dW}{dZ} = \frac{1}{Z} \frac{W}{1+W}, \quad (36)$$

где подразумевается тот же аргумент Z . Для поиска точки максимума по Φ сделаем следующее:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\Phi} \operatorname{Re}(f(z_k)) &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{d}{d\Phi} (iW_k(Z) + i)^2 \right) \\
&= -\operatorname{Im} \left((W_k(Z) + 1) \frac{dW_k(Z)}{d\Phi} \right) \\
&= -\operatorname{Im} \left((W_k(Z) + 1) \underbrace{\frac{d \log Z}{d\Phi}}_{=i} \frac{W_k(Z)}{1 + W_k(Z)} \right) \\
&= -\operatorname{Im}(iW_k(Z)) = -\operatorname{Re}(W_k(Z)) = 0
\end{aligned} \tag{37}$$

Воспользуемся определением W -функции Ламберта и возьмём модуль от обеих частей:

$$i \operatorname{Im} W_k(Z) e^{i \operatorname{Im} W_k(Z)} = R e^{i\Phi} \Rightarrow |\operatorname{Im} W_k(Z)| = R \tag{38}$$

Тут у нас встаёт небольшой вопрос о выборе знака. Для этого посмотрим на значение $\operatorname{Re} f(z_k)$ и учтём, что $\operatorname{sign} k = -\operatorname{sign} \Gamma$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sign} \left(\frac{f(z_k)}{\Gamma} \right) &= \operatorname{sign} k \operatorname{sign}(\operatorname{Im} W_k(Z)) = 1 \Rightarrow \\
\operatorname{Im} W_k(Z) &= R \operatorname{sign} k \Rightarrow \\
\left(\frac{f(z_k)}{2\Gamma} \right)_{\Phi=\Phi_{\max}} &= \frac{R}{2\Gamma}
\end{aligned} \tag{39}$$

А это обстоятельство очень полезно для определения угла Φ :

$$\begin{aligned}
iR \operatorname{sign} k e^{iR \operatorname{sign} k} &= R e^{i\Phi} = R e^{i\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} k + iR \operatorname{sign} k} \Rightarrow \\
\Phi &= \left(R + \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{sign} k \pmod{2\pi}
\end{aligned} \tag{40}$$

Граница выбора z_k

На комплексной плоскости для любого Z можно указать, каков оптимальный выбор \bar{k} . Этот выбор полностью определяется максимумом $\operatorname{Re}(f(z_k)) = -\operatorname{Im}(W_k(Z))(1 + \operatorname{Re}(W_k(Z)))$. Данная функция дискретна по k и не имеет простого описания при малых Z . На границе:

$$\operatorname{Re}(f(z_k)) = \operatorname{Re}(f(z_{k+\operatorname{sign} k})) \tag{41}$$

Давайте же посмотрим на асимптотику $|Z| \gg 1$. В этом случае мы снова применяем асимптотическое выражение для поиска пограничного Z при $2\pi k = R \operatorname{sign} k + \varkappa$, где $\varkappa = O(1)$:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \log R + i\Phi + i \left(\underbrace{R \operatorname{sign} k + \varkappa}_{2\pi k} \right) = O(R) \\
L_2 &= \log(L_1) = O(\log(R)) \\
\operatorname{Re}(f(z_k)) &= L_1 - L_2 + \frac{L_2}{L_1} + O\left(\frac{\log^2 R}{R^2}\right) \\
&\approx -\Phi + \frac{\pi \varkappa}{2R} - \operatorname{sign} k \left(R + \frac{\pi}{2} + \frac{-\log^2 R + \log R - \varkappa(\Phi + \frac{\varkappa}{2})}{R} \right) + O\left(\frac{\log^2 R}{R^2}\right)
\end{aligned} \tag{42}$$

Замена k на $k + \text{sign } k$ в данных обозначениях это замена \varkappa на $\varkappa + 2\pi \text{sign } k$. На границе:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2 \text{sign } k}{R} - \frac{\text{sign } k}{R} \left((\varkappa + 2\pi \text{sign } k) \left(\Phi + \frac{\varkappa + 2\pi \text{sign } k}{2} \right) - \varkappa \left(\Phi + \frac{\varkappa}{2} \right) \right) &= O \left(\frac{\log^2 R}{R^2} \right) \\ \varkappa + \Phi + \frac{\pi}{2} \text{sign } k &= O \left(\frac{\log^2 R}{R} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

Или если интересоваться только значением Φ :

$$\Phi \approx \left(R - \frac{\pi}{2} \right) \text{sign } k \quad \text{mod } 2\pi \quad (44)$$