

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Московский физико-технический институт (государственный  
университет)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
Кафедра Российского квантового центра  
Лаборатория квантовой оптомеханики

Выпускная квалификационная работа бакалавра

# Влияние кубической нелинейности на когерентные состояния света

**Автор:**

Студент 827 группы  
Нугманов Булат Ниязович

**Научный руководитель:**

доктор физико-математических наук  
Халили Фарит Явдатович



Москва 2022

## Аннотация

Влияние кубической нелинейности на когерентные состояния света

*Нугманов Булат Ниязович*

Как известно, лазер является генератором когерентных состояний света. Данные состояния рассматриваются как квазиклассические, так как имеют строго положительную функцию Вигнера. Перспективным способом генерации существенно неклассических состояний света заданной частоте является пропускание света когерентного состояния через нелинейную среду. В данной работе приведено теоретическое описание состояния, полученного при взаимодействии лазерного излучения и кубически нелинейной среды, что является распространённой в эксперименте ситуацией.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
1.1	Квазивероятностные распределения . . . . .	3
1.1.1	Функция Вигнера . . . . .	3
1.1.2	Функция Хусими . . . . .	4
1.2	Квантовые оптические нелинейности . . . . .	5
1.2.1	Кубическая нелинейность в классической оптике . . . . .	5
1.2.2	Квантовая керровская нелинейность . . . . .	5
1.2.3	Банановое состояние . . . . .	5
1.2.4	Практический интерес . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Расчет квазираспределений вероятности</b>	<b>10</b>
3.1	Построение решения задачи . . . . .	10
3.2	Аппроксимация функции Хусими . . . . .	11
3.2.1	Численный расчет . . . . .	11
3.2.2	Угадывание аналитической формулы . . . . .	12
3.3	Аналитический подход . . . . .	17
3.3.1	Аналитика при рациональных $\gamma/\pi$ . . . . .	17
3.3.2	Выражение функции Вигнера через функцию Хусими . . . . .	18
3.4	Скорость вычислений . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Заключение</b>	<b>22</b>
<b>5</b>	<b>Приложения</b>	<b>23</b>
5.0.1	Неудачная аналитика для функции Хусими . . . . .	23

# Глава 1

## Введение

Сжатие квадратуры при распространении когерентного света через оптическую среду, характеризующуюся кубической нелинейностью, основано на эффектах самофазной модуляции, перекрестной фазовой модуляции и процессе четырехволнового смешивания [1, 2, 3, 4]. Эффективность процесса может быть повышена за счет использования оптических резонаторов, изготовленных либо из нелинейного материала, либо с использованием материалов [5, 6, 7, 8]. Квантовое состояние, генерируемое процессом SPM, можно рассматривать как квадратурное сжатое состояние только асимптотически. В общем случае его функция Вигнера негауссова и принимает отрицательные значения. Это действительно неклассическое состояние можно рассматривать как обобщенное гауссово состояние [9, 10], которое отличается от когерентного состояния дополнительными  $n$ -зависимыми фазовыми факторами при его разложении на состояния Фока  $|n\rangle$ .

Обычное сжатие в керровски нелинейной среде наблюдалось экспериментально в нескольких работах. Сжатие 0,6 дБ в одномодовом оптическом волокне длиной 114 метров было зарегистрировано в 1986 году [11]. В 1991 году такой же тип сжатия наблюдался в 50-метровом интерферометре Саньяка [12], достигая показателя 5 дБ. Этот эксперимент был проведен с использованием коротких (100 пс) оптических импульсов. Еще более короткие импульсы позволяют реализовать умеренное (1,1 дБ) сжатие Керра при комнатной температуре [13]. Но для таких коротких импульсов необходимо управлять сильной дисперсией групповой скорости. С этой целью солитонный режим был использован для получения сжатия в интерферометрах Саньяка: 3,9 дБ с импульсами 126 фс [14] и 5,7 дБ с импульсами 182 фс [15].

Для квантового сжатия можно использовать несколько других платформ. Например, полное оптоволокно является уникальной платформой для создания сжатых состояний в благородных газах или парах металлов, заполняющих волокно. Это было продемонстрировано с использованием аргона [16] и паров ртути [17].

Фотонные кристаллы [18, 19] и кремниевые микрорезонаторы [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26] также использовались в качестве источников фотонных пар, используемых в демонстрациях в запутанности энергии-времени и поляризации, и нарушении неравенств Белла [24, 25, 26].

## 1.1 Квазивероятностные распределения

### 1.1.1 Функция Вигнера

Рассмотрим некоторую бесспиновую частицу. В классической механике, мы приписали бы ей плотность вероятности оказаться в некоторой точке фазового простран-

ства  $f(x, p)$ . Для расчёта среднего значения некоторой физической величины  $A(x, p)$ , мы бы использовали выражение следующего вида:

$$\langle A \rangle_{cl.} = \iint A(x, p) f(x, p) dx dp. \quad (1.1)$$

В квантовой механике нет функции плотности распределения в фазовом пространстве, хотя бы потому что координата и импульс одновременно неизмеримы. Для частицы с волновой функцией  $\psi(\vec{x})$  среднее от оператора  $A(x, p)$  находится из следующего выражения:

$$\langle A \rangle = \int \psi^*(x) A(x, -i\hbar \nabla_x) \psi(x) dx. \quad (1.2)$$

Поставим в соответствие  $\psi$  функцию Вигнера, смысл которой станет ясен позже:

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int \psi^*(x+y) \psi(x-y) e^{2ipy} dy. \quad (1.3)$$

С её помощью можно переписать определение 1.2[27]<sup>1</sup>:

$$\langle A \rangle = \iint A(x, p) W(x, p) dx dp. \quad (1.4)$$

Сравнивая (1.4) и (1.1) видим, что  $W(x, p)$  очень похоже на квантовый аналог вероятностного распределения. Однако, несмотря на кажущуюся схожесть, нормировку на 1 и  $W(x, p) \in \mathbb{R}$ , такая интерпретация терпит крах после замечания возможности  $W(x, p) < 0$ , что недопустимо для вероятностных распределений.

Для квантового осциллятора, как известно, удобно обезразмеривать координату и импульс. Удобно это и в иных задачах, где гамильтониан имеет основную осцилляторную часть и некоторую добавку. Используем общепринятое соглашение о компоновке импульса и координаты в единую комплексную переменную:

$$\beta = \frac{x + ip}{\sqrt{2}}. \quad (1.5)$$

В задачах, где идёт речь о гамильтониане в фоковском пространстве,  $\alpha$  можно рассматривать как среднее значение оператора уничтожения. Именно это определение стоит представлять, когда речь идёт о пси-функции оптической моды.

### 1.1.2 Функция Хусими

Кроме функции Вигнера есть и другие функции, которые называют квазивероятностными распределениями. Однако их смысл как "распределений" может быть не так очевиден. Одной из таких функций является функция Хусими, которую зачастую оказывается считать гораздо проще. Перейдём к её определению:

$$Q(\beta) = \frac{1}{\pi} |\langle \beta | \psi \rangle|^2. \quad (1.6)$$

Как следует из определения, она строго неотрицательна.

---

<sup>1</sup>Для применения формулы 1.2 необходимо симметризовать  $A(\hat{x}, \hat{p})$ , то есть выполнить упорядочение Вейля-Вигнера

Формульную связь функции Хусими с функцией Вигнера проще всего отобразить в терминах соответствующих им характеристических функций:

$$W(\beta) = \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 z}{\pi} e^{-i(z^* \beta + z \beta^*)} \underbrace{e^{\frac{|z|^2}{2}} \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 \tilde{\beta}}{\pi} e^{i(z^* \tilde{\beta} + z \tilde{\beta}^*)} Q(\tilde{\beta})}_{C_a(z)} \underbrace{\phantom{e^{\frac{|z|^2}{2}} \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 \tilde{\beta}}{\pi} e^{i(z^* \tilde{\beta} + z \tilde{\beta}^*)} Q(\tilde{\beta})}}_{C_s(z)} \quad (1.7)$$

Таким образом, получение функции Хусими из функции Вигнера является "сглаживающим"—амплитуда высокочастотных гармоник экспоненциально спадает. Обратное же преобразование из функции Хусими функции Вигнера является "обостряющим". Математически даже невозможно выразить ядро данного линейного преобразования, потому что преобразование определено для очень узкого класса функций, в который, безусловно, входят функции Хусими, соответствующие квантовым состояниям.

## 1.2 Квантовые оптические нелинейности

### 1.2.1 Кубическая нелинейность в классической оптике

Рассмотрим кристалл под воздействием внешнего электрического поля. При небольших амплитудах приложенного поля поляризацию можно разложить в ряд Тейлора:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} : \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi^{(3)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots \quad (1.8)$$

Пренебрегая магнитооптическими эффектами, это же разложение работает и для случая, если источником поля является свет. Если же кристалл обладает сферической симметрией и слагаемыми высоких порядков можно пренебречь, то выражение 1.8 можно существенно упростить:

$$\mathbf{P} \simeq \varepsilon_0 (\chi^{(1)} + 3\chi^{(3)} |\mathbf{E}|^2) \mathbf{E}. \quad (1.9)$$

Исследуемая кубическая нелинейность, которую так же называют керровской, приводит к простой добавке в показатель преломления, пропорциональной интенсивности.

### 1.2.2 Квантовая керровская нелинейность

Гамильтониан света, распространяющегося в керровски нелинейной среде выглядит следующим образом [28]:

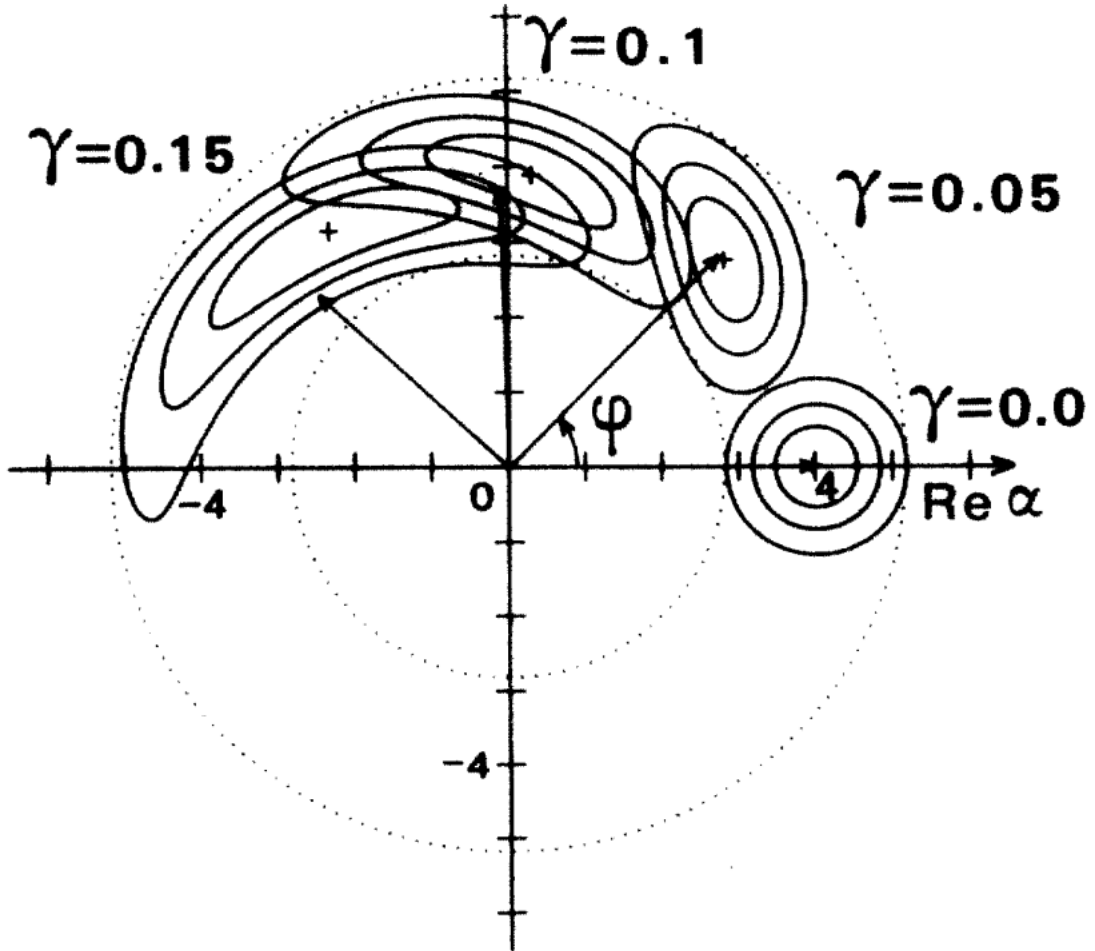
$$H = \hbar \omega a^\dagger a + \gamma a^{\dagger 2} a^2. \quad (1.10)$$

Подобная запись допускает простую интерпретацию: все фотоны в данной моде взаимодействуют друг с другом, причём энергия такого парного взаимодействия фиксирована.

### 1.2.3 Банановое состояние

Состояние, получающееся в результате прохождения когерентного состояния  $|\alpha\rangle$  через кубически нелинейную среду 1.10 является основным объектом исследования в

данной работе. Одним из первых, кто его изучал, был Kitagawa [28]. Он заметил, что на фазовой плоскости когерентные состояния искривляются, постепенно напоминая сечение банана:



Насколько сильно будет проявляться нелинейность в состоянии банана влияет произведение

$$\Gamma = \gamma\tau, \quad (1.11)$$

где  $\gamma$  — показатель нелинейности среды, упомянутый в гамильтониане 1.10, а  $\tau$  — время прохождения света через среду. Так как в действительности банановое состояние активно используется в резонаторах, то  $\tau \sim \frac{Q}{\omega_0}$  ограничено добротностью системы  $Q$ . Наилучшие показатели, достигнутые для кубически нелинейных материалов при частотах из оптического диапазона приведены в таблице [29]:

Материал	$Q$	$\gamma$ , Гц	$\Gamma \cdot 10^{-6}$
$\text{Al}_2\text{O}_3$	$2 \times 10^9$	0.06	24
$\text{CaF}_2$	$3 \times 10^{11}$	0.4	24000
$\text{MgF}_2$	$6 \times 10^9$	0.03 (e, o)	36
Кварц	$5 \times 10^9$	0.1	100
Плавленный кварц	$9 \times 10^9$	0.08	144
$\text{LiNbO}_3$	$10^9$	0.26 (o)	52
$\text{Si}_3\text{N}_4$	$8 \times 10^7$	0.39	6
Si	$10^9$	0.5	100

### 1.2.4 Практический интерес

Как известно [30], лазеры с точки зрения квантовой механики являются источниками когерентных состояний. Лазер является сравнительно несложным в реализации элементом для экспериментов. Пропускание через специально подобранный кристалл так же относительно просто, однако позволяет существенно расширить множество получаемых состояний. Кратко обсудим два важных аспекта, которыми обосновывается интерес к некогерентным состояниям.

#### Неопределённость числа фотонов

На данный момент генерировать состояния с большим определённым числом фотонов не представляется возможным. Естественно поставить задачу о генерации состояний с минимальной дисперсией числа фотонов. Просто генерируемые когерентные состояния плохо подходят для данного вопроса [31]:

$$\Delta n_{coh} = \bar{n}^{\frac{1}{2}} \quad (1.12)$$

Значительно меньшей дисперсией при тех же интенсивностях может обладать сжатый свет, генерируемый с помощью кристаллов с нелинейностью типа  $\chi^{(2)}$ :

$$\Delta n_{\chi^{(2)}} \approx \bar{n}^{\frac{1}{3}} \quad (1.13)$$

Для состояний получающихся в результате эволюции когерентного состояния в кубически нелинейной среде теоретическая граница [28] ещё ниже:

$$\Delta n_{\chi^{(3)}} \approx \bar{n}^{\frac{1}{6}} \quad (1.14)$$

#### Отрицательность функции Вигнера

Когерентный и сжатый свет считают классическими в квантовой оптике. Мотивацией к этому является то, что это единственные типы состояний, функции Вигнера которых всюду положительны [32]. Напомним, что именно отрицательность функции Вигнера не позволяет интерпретировать её как функцию плотности распределения в фазовом пространстве. Когерентный и сжатый свет не накладывают подобных ограничений, а значит допускают классическую интерпретацию.

Авторы статьи [33] утверждают, что для квантовых вычислений необходимы именно состояния с негативностью функции Вигнера. Стоит отметить, что на данный момент есть различные меры, классифицирующие состояния по степени негативности: объём негативности [34], глубина негативности и площадь негативной части. Наибольший интерес представляют состояния с наибольшими значениями мер негативности, потому что из-за потерь все они неизбежно снижаются. Несмотря на их



спад, взаимодействие с одним из наиболее распространённых источников потерь — светоделителем — никогда не уничтожит негативность, если коэффициент пропускания через светоделитель  $\eta > \frac{1}{2}$  [35, 36].

## Глава 2

### Постановка задачи

Целью данной работы является разработка методов расчёта функций Хусими и Вигнера "бананового" состояния, как аналитических, так и численных, в области больших значений числа квантов в моде и малых показателей нелинейности, свойственных для оптических материалов с малым поглощением  $\Gamma \sim 10^{-6}$ , используемых в оптических микрорезонаторах.

Количество фотонов состояния можно считать большим если сдвиг фаз, вызванный нелинейностью за время жизни фотона в резонаторе, становится сравним с единицей. Для современных оптических микрорезонаторов эта величина составляет  $\sim 10^6$ .

## Глава 3

# Расчет квазираспределений вероятности

### 3.1 Построение решения задачи

Алгоритм решения задачи иллюстрирован на диаграмме 3.1.

- Из разложения “банановского” состояния в фоковском базисе (banana-state) выражаем соответствующую функцию Хусими  $Q$ .
- Далее есть два направления деятельности: программное (program) и приближенное аналитическое (analytic formula).
- Используя результаты работы программы (program), мы угадываем аналитическую формулу для  $Q$  (approximation).
- Аналитическими преобразованиями мы находим формулу, связывающую значения функции Вигнера со значениями функции Хусими на одной окружности (analytic formula).
- Применяя эту и аппроксимирующую функцию Хусими формулы, мы находим значения функции Вигнера, что и является целью исследования.

Введём немного пояснений к выше написанному. Для функции Хусими “банановского” состояния известно выражение:

$$Q(\beta) = \frac{1}{\pi} \left| e^{-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\beta^*)^n e^{-i\Gamma n(n-1)}}{n!} \right|^2 \quad (3.1)$$

Удобно ввести вспомогательную функцию

$$F(\alpha, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} \psi^{m(m+1)} \quad (3.2)$$

и выразить функцию Хусими через нее:

$$Q(\beta) = \frac{e^{-|\alpha|^2 - |\beta|^2}}{\pi} |F(\alpha\beta^* e^{2i\Gamma}, e^{-i\Gamma})|^2 \quad (3.3)$$

Из формулы (3.3) сразу видно, что в процессе анализа  $F$  нас будет интересовать только её модуль.

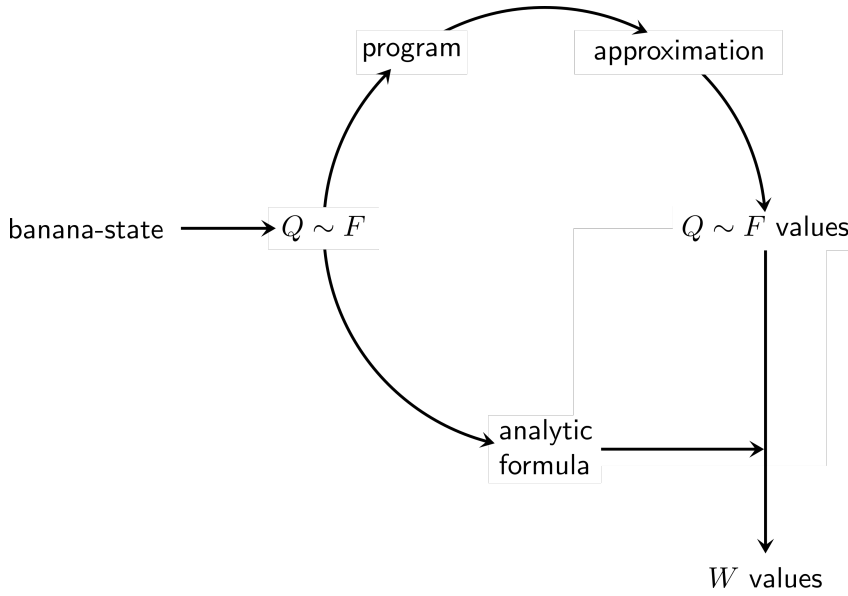


Рис. 3.1: Алгоритм решения задачи

## 3.2 Аппроксимация функции Хусими

### 3.2.1 Численный расчет

Рассмотрим численный расчёт функции Хусими. Для реализации воспользуемся языком python. Python — это интерпретируемый язык программирования с динамической типизацией, а это значит, например, что всякая численная переменная рассматривается python как объект класса со множеством свойств. Это затратно по памяти и скорости работы. Поэтому для ускорения мы используем пакеты numru и numba. Numru позволяет объединять числа в массивы, работающие гораздо быстрее, чем нативные списки из чистого python. Numba немного отходит от интерпретируемой концепции python и позволяет компилировать функции, если последние подразумевают работу только с числами. Достигается такое повышение производительности за счёт частичного перенесения кода на python в компилируемый и быстрый язык C. Множество тестов показывают, что разница в скорости работы при использовании numba и C для одних и тех же задач почти незаметна.

Итак, задачу о вычислении функции Хусими можно свести к вычислению следующего ряда:

$$F(\alpha, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} \psi^{m(m+1)} \quad (3.4)$$

Для начала, ограничимся суммированием конечного количества членов этого ряда. Необходимо определить, какие члены вносят наибольший вклад. Для этого разложим  $m!$  в знаменателе по формуле Стирлинга и найдём максимум получившейся аналитической функции по индексу суммирования:

$$\frac{|\alpha|^m}{m!} \approx \left( \frac{|\alpha|e}{m} \right)^m = \exp \left( m \left( 1 - \ln \left( \frac{m}{|\alpha|} \right) \right) \right) \approx \exp \left( |\alpha| - \frac{(m - |\alpha|)^2}{2|\alpha|} \right) \quad (3.5)$$

Из такой приблизительной оценки становится видно, что наибольший вклад вносят члены с  $m \sim |\alpha|$ , спад членов в окрестности происходит по Гауссу со “среднеквадратическим отклонением”  $\sim \sqrt{|\alpha|}$ . Отсюда же становится видно препятствие на пути

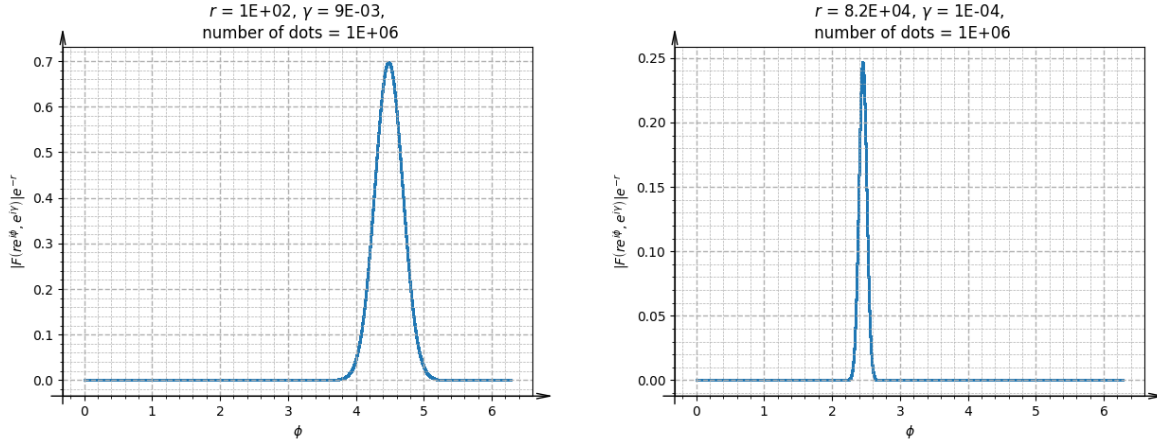


Рис. 3.2: Зависимость  $|F|$  от угла  $\phi = \arg \alpha$

к такой простой реализации суммирования: так как мы ищем значение ряда при  $|\alpha| \gg 1$ , то при вычислении членов  $\sim \exp(|\alpha|)$  произойдёт переполнение численного типа данных<sup>1</sup>. Из-за этого каждое из слагаемых необходимо нормализовать на некоторую общую большую величину схожего порядка.

Представлять аргумент  $\alpha$  оказывается удобнее в полярных координатах. Это и то, что "расплывание" квазивероятностных распределений ожидается в тангенциальном, направлении наводит на мысль об исследовании зависимости  $F$  в первую очередь от фазы  $\phi$  комплексного параметра  $\alpha$ . На рис. 3.2 приведены два графика, иллюстрирующих эту зависимость.

Эти графики напоминают гауссов колокол. Основными параметрами при этом являются высота, точка максимума и ширина колокола. Нами было смоделировано более 300 серий данных, на основании которых была "угаданы" формулы для этих параметров и итоговая приближенная аналитическая формула (3.9).

### 3.2.2 Угадывание аналитической формулы

**Точка максимума.** Максимум достигается при

$$\phi = -2r\gamma \mod (2\pi), \quad (3.6)$$

что иллюстрируется графиком, приведенным на рис. 3.3. ( $\psi = e^{i\gamma}$ )

<sup>1</sup>в данном случае: float64 и complex128

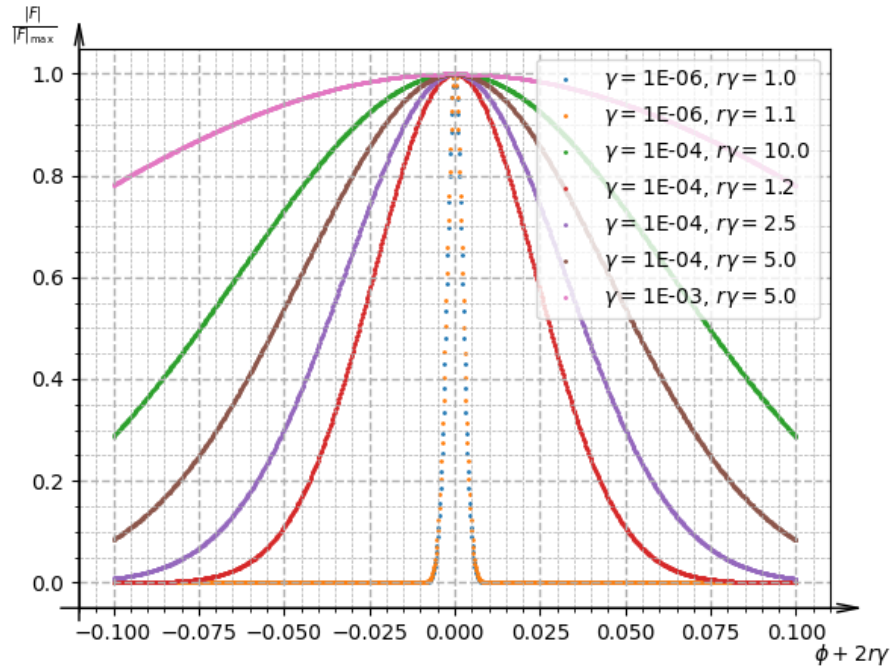
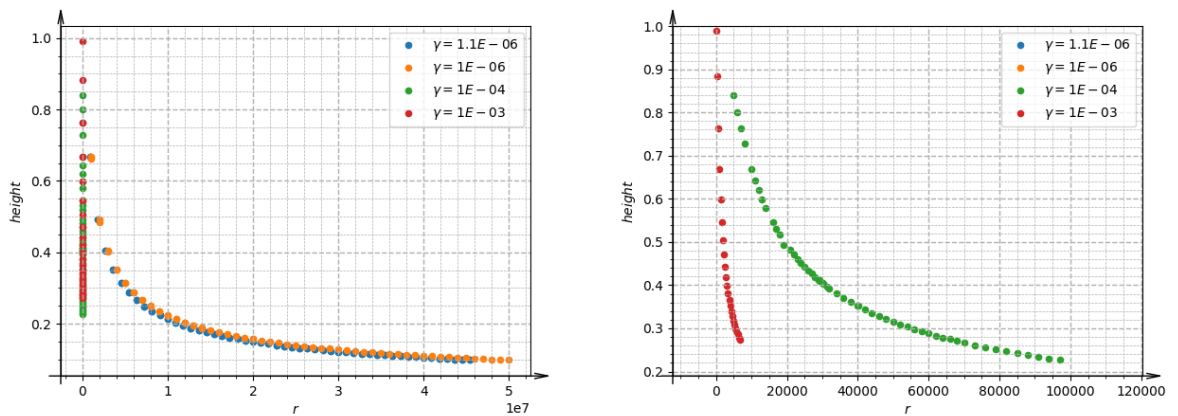


Рис. 3.3

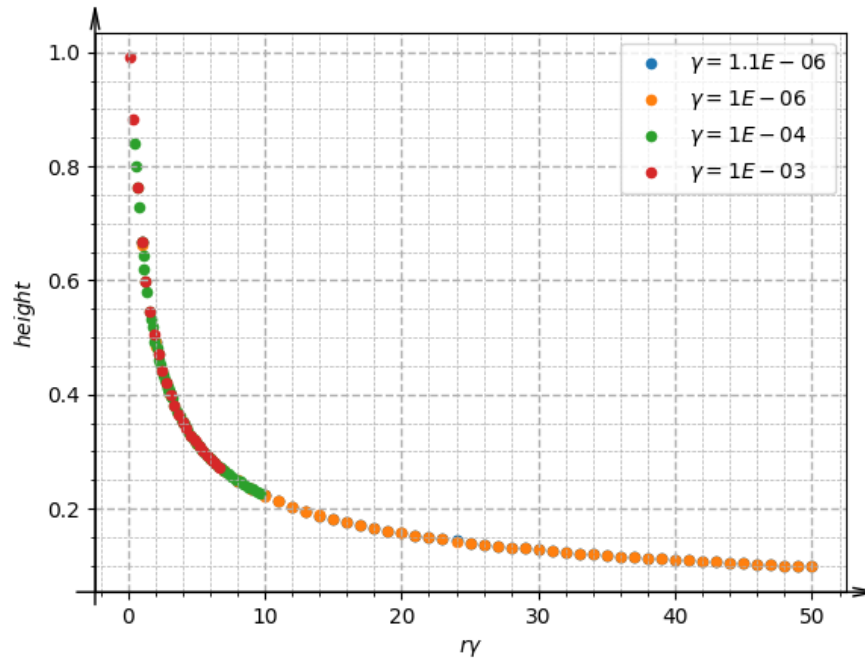
**Высота колокола.** Высотой мы условно назвали величину  $\max_{\phi} |F(re^{i\phi}, e^{i\gamma})| e^{-r}$ .

Как и должно было получиться, высота колокола всегда меньше  $1^2$ , но и не слишком мала. Зафиксируем  $\gamma$  и посмотрим, какова зависимость высоты от  $r$ :



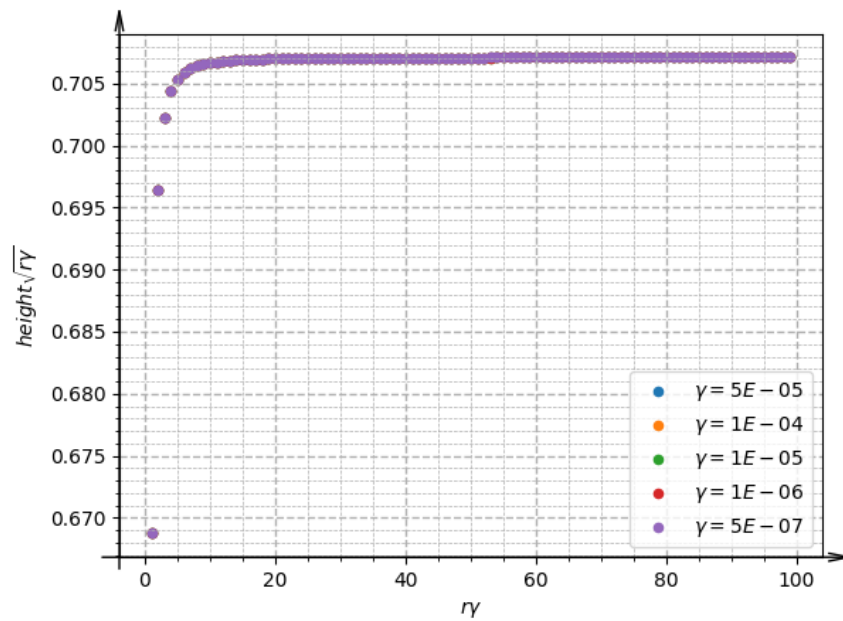
Каждая из серий ложится на некоторую спадающую кривую. Попробуем сменить оси так, чтоб все серии лежали на одной кривой. Очевидно, масштабирование по вертикальной оси делать не стоит (по причине того, что все кривые в 0 выходят из 1). Попробуем построить график от  $r\gamma$ :

<sup>2</sup>Высота в точности равна 1, если бы все слагаемые имели одну фазу

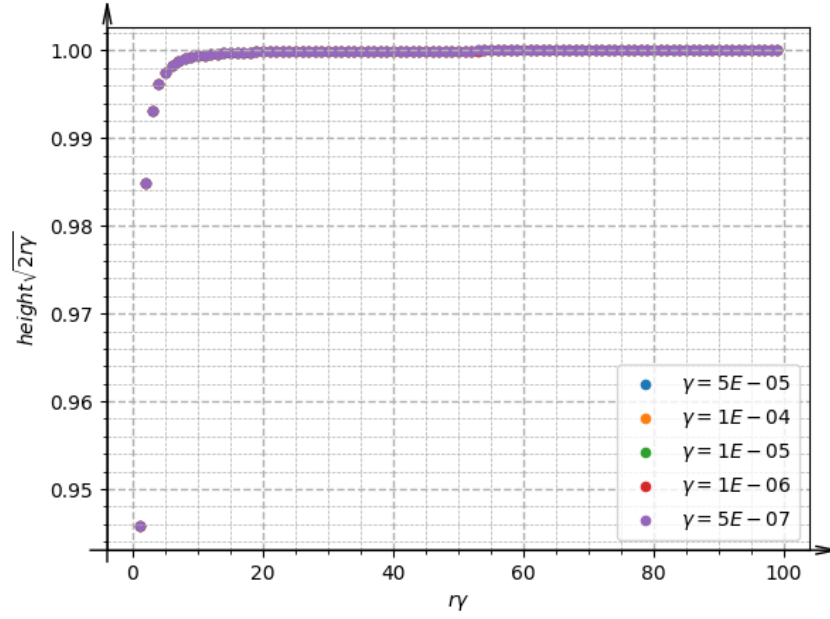


Далее процесс угадывания идёт очень просто:

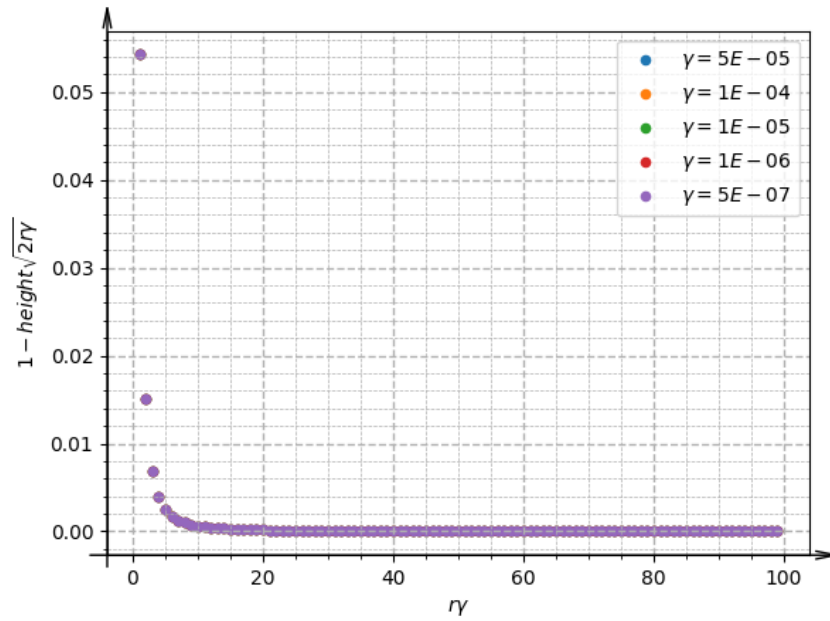
- Перебираем степень  $r\gamma$ , при домножении на которую график выходит на константу.



- Домножаем на такое число, чтоб константа оказалась единичной



- Отображаем график относительно 1



- Повторяем цикл заново

Так мы угадываем следующую закономерность:

$$\text{height} = \frac{1}{\sqrt{2r|\gamma|}} \left( 1 - \frac{1}{4(2r\gamma)^2} + \frac{1}{6(2r\gamma)^4} + \dots \right) \quad (3.7)$$

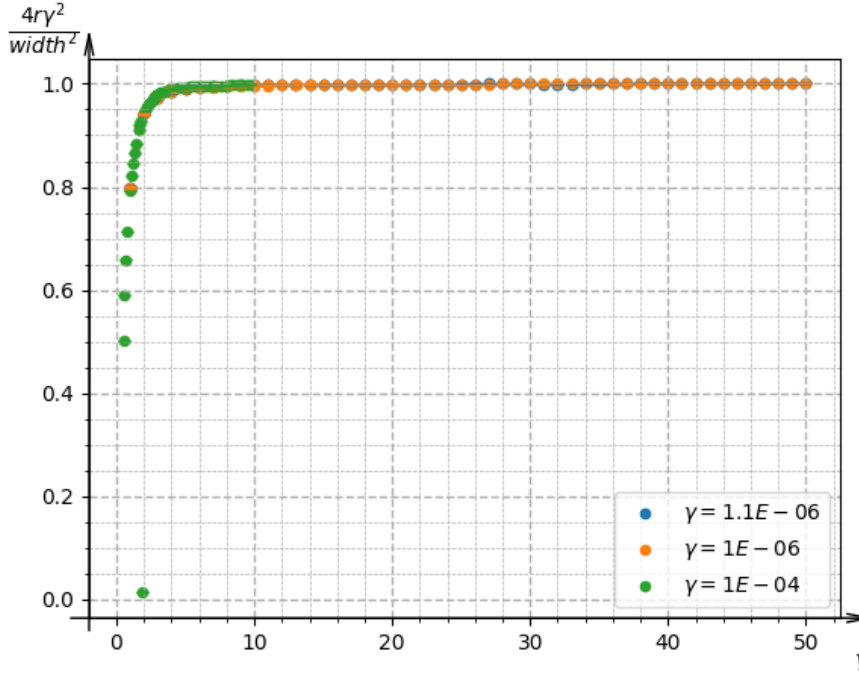
Дальнейшие члены в разложении угадать не получается, потому что для выявления асимптотического значения следует брать  $r\gamma \gg 1$ . При больших  $r$  требуется брать больше членов ряда для суммирования. По-видимому небольшие ошибки при суммировании накапливаются, что делает невозможным отгадать следующие порядки в разложении.



**Ширина колокола.** Классический гауссов колокол для нашей задачи необходимо заменить некоторой функцией, имеющей  $2\pi$ -периодичную структуру. Например, такой:

$$|F(re^{i\varphi}, e^{i\gamma})| e^{-r} = \text{height} \times \exp\left(\frac{\cos(\phi - \phi_{\max}) - 1}{\text{width}^2}\right) \quad (3.8)$$

В такой постановке задачи, мы применим метод наименьших квадратов для нахождения зависимости между  $\ln |F(re^{i\varphi}, e^{i\gamma})|$  и  $\cos(\phi - \phi_{\max})$ . Угловой коэффициент в данной зависимости будет как раз  $1/\text{width}^2$ :



**Подведение итогов численных расчётов.** Итогом данного раздела является следующая формула (3.9):

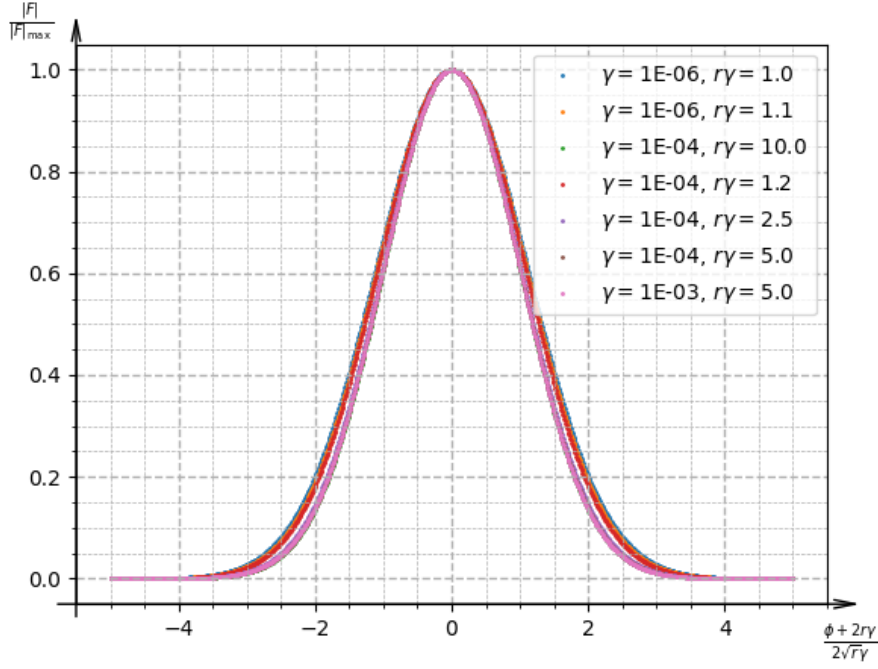
$$|F(re^{i\varphi}, e^{i\gamma})| = \frac{1}{\sqrt{2r|\gamma|}} \left( 1 - \frac{1}{4(2r\gamma)^2} + \frac{1}{6(2r\gamma)^4} + \dots \right) \exp\left(r + \frac{\cos(\phi + 2r\gamma) - 1}{4r\gamma^2} + \dots\right) \quad (3.9)$$

Соответствующая формула для функции Хусими имеет следующий вид:

$$Q(\beta) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2|\alpha\beta\gamma|} - \frac{1}{16} \frac{1}{|\alpha\beta\gamma|^3} + \frac{19}{1536} \frac{1}{|\alpha\beta\gamma|^5} + \dots \right) \times \exp\left(-(|\alpha| - |\beta|)^2 + \frac{\cos(\arg(\alpha\beta^*)) + 2\gamma(|\alpha\beta| + 1)) - 1}{2|\alpha\beta|\gamma^2} + \dots\right), \quad (3.10)$$

при  $|\beta| \gtrsim \frac{1}{|\alpha\gamma|}$ .

Итоговый “правильно” отмасштабированный график, построенный для тех же данных, что и рис. 3.3 имеет вид:



Если сильно приблизить график к пику колокола, то можно заметить, что при  $r\gamma \gtrsim 1$  "погрешность" отклонения  $\Delta(\phi_{max} + 2r\gamma) \lesssim r^{1/2}\gamma^{3/2}$ , что является крайне малой величиной.

### 3.3 Аналитический подход

#### 3.3.1 Аналитика при рациональных $\gamma/\pi$

Прежде, чем приступить к заявленному в заголовке, посмотрим на производную  $F^3$ :

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^{m-1}}{(m-1)!} \psi^{m(m+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} \psi^{(m+1)(m+2)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} \psi^{m(m+1)} \psi^{2m+2} = \psi^2 F(\alpha\psi^2) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Подобные уравнения называют функционально-дифференциальными, потому что производная связана со значением функции нелокально. Общей методики решения таких уравнений нет, однако в данном случае можно заметить, что высшие производные задействуют всё более далёкие точки с тем же модулем:

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \psi^2 F(\alpha\psi^2) \\ F''(\alpha) &= \psi^2 \cdot \frac{d}{d\alpha} F(\alpha\psi^2) = \psi^2 \cdot \psi^4 F(\alpha\psi^4) \\ F'''(\alpha) &= \psi^2 \cdot \psi^4 \frac{d}{d\alpha} F(\alpha\psi^4) = \psi^2 \cdot \psi^4 \cdot \psi^6 F(\alpha\psi^6) \\ &\dots \\ F^{(m)} &= \psi^{m(m+1)} F(\alpha\psi^{2m}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

<sup>3</sup>В данном разделе будем полагать  $\psi$  фиксированным и будем опускать второй аргумент  $F$

Точка, от которой зависит  $m$ -тая производная в  $\alpha$  будет сдвигаться, пока не обойдёт всю окружность и иногда может снова попасть в  $\alpha$ , если для некоторого  $n$  выполняется  $\psi^{2n} = 1$ . Для простоты дальнейших рассуждений можно потребовать (просто переобозначив  $n$ ) более жёсткого условия:  $\psi^n = 1$ . Это и будет значить, что  $\psi = \exp(i\frac{2\pi k}{n})$ , что соответствует заявленному в оглавлении. Напишем простое дифференциальное уравнение, следующее из наложенных выше условий:

$$F^{(n)}(\alpha) = F(\alpha) \quad (3.13)$$

Для составления решения потребуется перебрать корни из единицы, которые мы занумеруем, используя  $\psi$ :

$$F(\alpha) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} C_j \exp(\psi^{2j+1}\alpha) \quad (3.14)$$

Для нахождения  $C_j$  подставим данное решение в исходное функционально-дифференциальное уравнение 3.11:

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \psi^2 F(\alpha \psi^2) \\ \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} C_j \psi^{2j+1} \exp(\psi^{2j+1}\alpha) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} C_j \psi^2 \exp(\psi^{2j+1}\alpha) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} C_{j-1} \psi^2 \exp(\psi^{2j+1}\alpha) \\ C_j \psi^{2j+1} &= C_{j-1} \psi^2 \Rightarrow C_{j+1} \psi^{2j+1} = C_j \Rightarrow C_j = C_0 \psi^{-j^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Таким образом, осталось лишь произвести нормировку для сохранения условия  $F(0) = 1$ :

$$F(\alpha, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} \psi^{m(m+1)} = \frac{\sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \psi^{-j^2} \exp(\alpha \psi^{2j+1})}{\sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \psi^{-j^2}}, \quad (3.16)$$

Это ключевой результат, необходимый для следующего раздела. Так же его можно использовать для вычисления функции Хусими, хотя по скорости расчётов он на одном уровне с обычным рядом 3.2. Несмотря на кажущуюся узость применения формулы при рациональных  $\gamma/\pi$ , можно воспользоваться гладкостью зависимости от  $\gamma$  и теорией цепных дробей для нахождения оценок сверху/снизу на вычисляемое значение.

### 3.3.2 Выражение функции Вигнера через функцию Хусими

В данном разделе при выводе мы будем полагать, что  $\gamma/\pi$  рационально, однако результат можно будет без труда продолжить по непрерывности для любого  $\gamma$ .

Сделаем некоторые переобозначения:

$$\left\{ \begin{aligned} \psi &= e^{-i\Gamma}, \quad a_j = \frac{\psi^{-j^2}}{\sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \psi^{-j^2}}, \quad F(\alpha \beta^* e^{2i\Gamma}, e^{-i\Gamma}) = F(\alpha \beta^* \psi^{-2}, \psi) \\ Q(\beta) &= \frac{e^{-|\alpha|^2 - |\beta|^2}}{\pi} \sum_{j_1 \in \mathbb{Z}_n} \sum_{j_2 \in \mathbb{Z}_n} a_{j_1} a_{j_2}^* \exp(\alpha \beta^* \psi^{2j_1-1}) \exp(\alpha^* \beta \psi^{-2j_2+1}) \\ &= \frac{e^{-|\alpha|^2}}{\pi} \sum_{j_1 \in \mathbb{Z}_n} \sum_{j_2 \in \mathbb{Z}_n} a_{j_1} a_{j_2}^* \underbrace{\exp(-|\beta|^2 + \alpha \beta^* \psi^{2j_1-1} + \alpha^* \beta \psi^{-2j_2+1})}_{Q^{j_1 j_2}(\beta)} \end{aligned} \right. \quad (3.17)$$

Повторим явное выражение, связывающее функции Вигнера и Хусими через характеристические функции:

$$W(\beta) = \underbrace{\int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 \beta}{\pi} e^{i(z^* \beta + z \beta^*)} Q(\beta)}_{C_s(z)} \underbrace{e^{\frac{|z|^2}{2}}}_{C_a(z)} \quad (3.18)$$

Последовательно вычислим вклад от каждой  $Q^{j_1 j_2}$  в  $W$ . Таков ближайший план вычислений:

$$\begin{aligned} C_a^{j_1 j_2}(z) &= \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 \beta}{\pi} e^{i(z^* \beta + z \beta^*)} Q^{j_1 j_2}(\beta) \\ W^{j_1 j_2}(\beta) &= \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 z}{\pi} e^{\frac{|z|^2}{2} - i(z^* \beta + z \beta^*)} C_a^{j_1 j_2}(z) \\ W(\beta) &= \frac{e^{-|\alpha|^2}}{\pi} \sum_{j_1 \in \mathbb{Z}_n} \sum_{j_2 \in \mathbb{Z}_n} a_{j_1} a_{j_2}^* W^{j_1 j_2}(\beta) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Для этих вычислений нам понадобятся формулы, проверка которых делается посредством взятия Гауссовых интегралов:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 \beta}{\pi} \exp(-|\beta|^2 + A\beta + B\beta^*) &= \exp(AB) \\ \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 z}{\pi} \exp(-\frac{|z|^2}{2} + iAz + iBz^*) &= 2 \exp(-2AB) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Итак, начнём со вклада  $Q^{j_1 j_2}$  в антисимметричную характеристическую функцию:

$$\begin{aligned} C_a^{j_1 j_2}(z) &= \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 \beta}{\pi} \exp(i(z^* \beta + z \beta^*) - |\beta|^2 + \alpha \beta^* \psi^{2j_1-1} + \alpha^* \beta \psi^{-2j_2+1}) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 \beta}{\pi} \exp(-|\beta|^2 + (\alpha^* \psi^{-2j_2+1} + iz^*)\beta + (\alpha \psi^{2j_1-1} + iz)\beta^*) \\ &= \exp((\alpha^* \psi^{-2j_2+1} + iz^*)(\alpha \psi^{2j_1-1} + iz)) \\ &= \exp(-|z|^2 + i\alpha^* \psi^{-2j_2+1} z + i\alpha \psi^{2j_1-1} z^* + |\alpha|^2 \psi^{-2j_2+2j_1}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

затем продолжим её вкладом в функцию Вигнера:

$$\begin{aligned} W^{j_1 j_2}(\beta) &= e^{|\alpha|^2 \psi^{-2j_2+2j_1}} \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 z}{\pi} \exp(-i(z^* \beta + z \beta^*) - \frac{|z|^2}{2} + i\alpha^* \psi^{-2j_2+1} z + i\alpha \psi^{2j_1-1} z^*) \\ &= e^{|\alpha|^2 \psi^{-2j_2+2j_1}} \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 z}{\pi} \exp(-\frac{|z|^2}{2} + i(\alpha^* \psi^{-2j_2+1} - \beta^*)z + i(\alpha \psi^{2j_1-1} - \beta)z^*) \\ &= 2 \exp(|\alpha|^2 \psi^{-2j_2+2j_1} - 2(\alpha^* \psi^{-2j_2+1} - \beta^*)(\alpha \psi^{2j_1-1} - \beta)) \\ &= 2 \exp(-2|\beta|^2 + 2\beta \alpha^* \psi^{-2j_2+1} + 2\beta^* \alpha \psi^{2j_1-1} - |\alpha|^2 \psi^{-2j_2+2j_1}) \\ &= 2e^{-2|\beta|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \exp(2\beta^* \alpha \psi^{2j_1-1}) (\alpha \psi^{2j_1-1})^m (\exp(2\beta^* \alpha \psi^{2j_2-1}) (\alpha \psi^{2j_2-1})^m)^* \end{aligned} \quad (3.22)$$

и наконец, просуммируем все получившиеся вклады:

$$\begin{aligned}
 W(\beta) &= \frac{2}{\pi} e^{-|\alpha|^2 - 2|\beta|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{j_1 \in \mathbb{Z}_n} \sum_{j_2 \in \mathbb{Z}_n} a_{j_1} a_{j_2}^* \dots \\
 &\quad \dots \exp(2\beta^* \alpha \psi^{2j_1-1}) (\alpha \psi^{2j_1-1})^m (\exp(2\beta^* \alpha \psi^{2j_2-1}) (\alpha \psi^{2j_2-1})^m)^* \\
 &= \frac{2}{\pi} e^{-|\alpha|^2 - 2|\beta|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left| \frac{\partial^m F(2\alpha\beta^* \psi^{-2}, \psi)}{\partial (2\beta^*)^m} \right|^2
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Получившееся выражение очень удачно скомпоновалось через введённую ранее  $F$ . Избавимся от производных, рассуждениями, похожими на вывод функционально-дифференциального уравнения 3.11:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^m F(2\alpha\beta^* \psi^{-2}, \psi)}{\partial (2\beta^*)^m} &= \left( \frac{\partial}{\partial (2\beta^*)} \right)^m \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha^p (2\beta^*)^p}{p!} \psi^{p(p-1)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha^{p+m} (2\beta^*)^p}{p!} \psi^{(p+m)(p+m-1)} = \\
 &= \alpha^m \psi^{m(m-1)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2\alpha\beta^* \psi^{2m})^p}{p!} \psi^{p(p-1)} = \alpha^m \psi^{m(m-1)} F(2\alpha\beta^* \psi^{2m} \psi^{-2}, \psi)
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} e^{-|\alpha|^2 - 2|\beta|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} |F(2\alpha\beta^* \psi^{2m-2}, \psi)|^2 \tag{3.25}$$

И, наконец, приведём выражение к виду, содержащему лишь функции Хусими и Вигнера:

$$W(\beta) = 2e^{2|\beta|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-|\alpha|^2)^m}{m!} Q(2\beta \psi^{-2m}) \tag{3.26}$$

Ещё раз подчеркнём, что данный результат непрерывен по  $\psi$  на единичной окружности, а значит может быть применён для любого  $\gamma$ .

### 3.4 Скорость вычислений

Оценим, на сколько быстро происходит вычисление функции Вигнера по формуле 3.26 и функции Хусими по формуле 3.10.

Ранее для функции Хусими использовалась формула 3.1, которая вычисляется за  $O(\alpha^2) \sim 10^6$ . Теперь же значения функции Хусими при больших параметрах, которые имеют наибольшую сложность вычислений по 3.1, можно получить за  $O(1)$ , так как мы нашли для них однозначную формулу.

В недавней работе, связанной с явным вычислением функции Вигнера [37] используется ряд

$$\begin{aligned}
 W(\beta) &= \frac{2}{\pi} e^{|\beta|^2 - |\alpha|^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha/2)^n}{n!} \frac{(-\alpha^*/2)^m}{m!} \psi^{m(m-1) - n(n-1)} \dots \\
 &\quad \dots \sum_{k=0}^{\min(n,m)} C_n^k C_m^k k! (-4\beta)^{m-k} (-4\beta^*)^{n-k},
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

требующий вычисление некоторого астрономического числа слагаемых. По приближительным оценкам в области  $|\beta| \sim |\alpha|$ , где сосредоточена наиболее содержательная картина, требуется не менее  $O(\alpha^4)$  слагаемых. Сами авторы заявляют, что для вычисления функции Вигнера при  $\alpha \leq 5$  уже требовалось 500 слагаемых в формуле,

использующей ряд, так же действующий  $\sim 500$  слагаемых. Вычислить функцию Вигнера при  $|\alpha| \sim 10^3$  по их формулам вовсе не представляется возможным. Вычислить функцию Вигнера по формуле 3.26 можно за  $O(\alpha) \sim 10^3$ . Если не использовать приближённой формулы 3.10, то функция Вигнера вычисляется за  $O(\alpha^2) \sim 10^6$ .

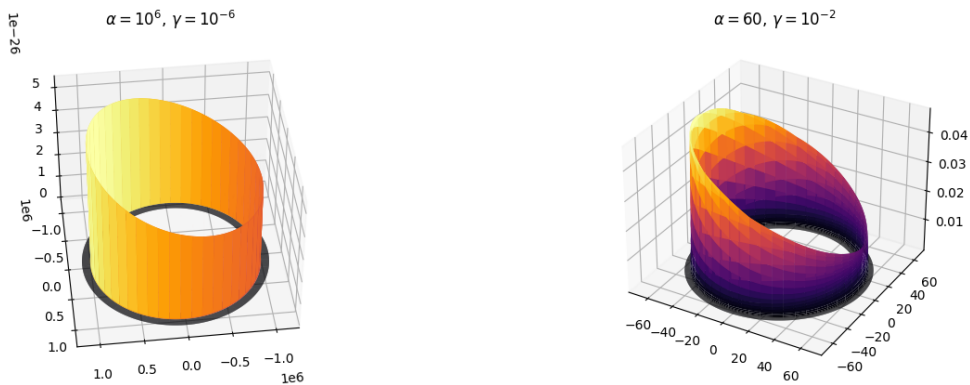
# Глава 4

## Заключение

Перечислим основные результаты, полученные в данной работе:

1. Найдено асимптотическое разложение (3.10) при больших параметрах.
2. Найдено альтернативное разложение (3.16), позволяющее вычислить функцию Хусими при рациональных значениях  $\gamma/\pi$ .
3. Найден ряд 3.26, в совокупности с предыдущими результатами, позволяющий ускорить вычисление функции Вигнера не менее, чем в миллион раз.

В качестве одного из результатов можно отметить, что в ходе численных экспериментов оказалось, что при больших интенсивностях “банановое” состояние перестаёт напоминать банан и растягивается по всей окружности на фазовой плоскости.



Функция Хусими “бананового” состояния

# Глава 5

## Приложения

### 5.0.1 Неудачная аналитика для функции Хусими

К формуле 3.9, естественно, хочется приплести некоторую аналитическую теорию. Сам вид крайне напоминает результат, полученный методом перевала. Однако привести выражение для  $F$  к виду, подходящему для использования метода перевала так и не удалось. Для сохранения времени тем, кто всё же попытается подвести аналитические выкладки на пути к 3.9, сделаем краткий обзор идей, естественным образом приходящих на ум, однако приводящих если не к тупику, то к значительным затруднениям. В конце концов, отрицательный результат — тоже результат.

1.  $F$  связана с обратным лаплас-образом тета-функции Якоби в представлении нома по первому аргументу. Тета-функция Якоби задаётся выражением:

$$\vartheta_{00}(w, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} w^{2n} \quad (5.1)$$

В самом деле, взятие лаплас образа по  $w^2$  приведёт к делению каждого из слагаемых в ряде на  $n!$ , что очень напоминает выражение для  $F$ . Однако здесь следует отметить, что ряд 5.1 определён только для  $|q| < 1$ , в то время как наш ряд соответствует  $|q| = 1$ . Поиск литературы по асимптотике тета-функции Якоби в окрестности единичной окружности приводит лишь к исследованиям поведения лишь при  $q \rightarrow 1 - 0$  (очень подробно исследовано, например, в [38]), а нам необходимо исследование при  $q \rightarrow e^{i\gamma}(1 - 0)$ .

2. Ряд 3.4 является рядом Маклорена по большому параметру  $\alpha$ . Естественно, появляется желание преобразовать выражение в разложение по малому аргументу  $\gamma$ :

$$F(\alpha, e^{i\gamma}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \exp(i\gamma n^2)}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\gamma)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2m} \alpha^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\gamma)^m}{m!} \left( \alpha \frac{d}{d\alpha} \right)^{2m} e^{\alpha} \quad (5.2)$$

Задача свелась к выводу полиномов вида  $e^{-\alpha} \left( \alpha \frac{d}{d\alpha} \right)^{2m} e^{\alpha}$ . Однако степень такого полинома будет  $2m$ , а это значит, что сумма ряда так же, как и исходный выражение 3.4 будет набираться в окрестности  $m \sim |\alpha|$  в такой же широкой полосе, если не хуже.<sup>1</sup>

3. Данная попытка мотивирована следующими соображениями:

---

<sup>1</sup>Для данной оценки надо вспомнить, что мы работаем в области  $|\alpha|\gamma \gtrsim 1$



- Метод перевала используется для интегралов.
- Гауссов интеграл является своеобразным мостом между неудобными выражениями вида  $e^{\#n^2}$  и удобными  $e^{\#n^2}$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix^2+2i\sqrt{\gamma}nx} dx = \sqrt{\pi} e^{-\frac{i\pi}{4}} e^{i\gamma n^2} \quad (5.3)$$

Преобразуем ряд 3.4, используя 5.3:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \exp(i\gamma n^2)}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix^2+2i\sqrt{\gamma}nx} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} dx}{\sqrt{\pi}} = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ix^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{2i\sqrt{\gamma}x})^n}{n!} = \\ &= \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ix^2+\alpha e^{2i\sqrt{\gamma}x}} = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\frac{x^2}{\gamma}+\alpha e^{2ix}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Несмотря на кажущуюся привлекательность последней формулы, заключающуюся в выделении  $\sqrt{\gamma}$  в знаменателе и естественном появлении основного параметра разложения  $\alpha\gamma$ , анализировать её крайне затруднительно. На действительной оси подынтегральное выражение представляет собой бесконечную череду осциллирующих пучностей:

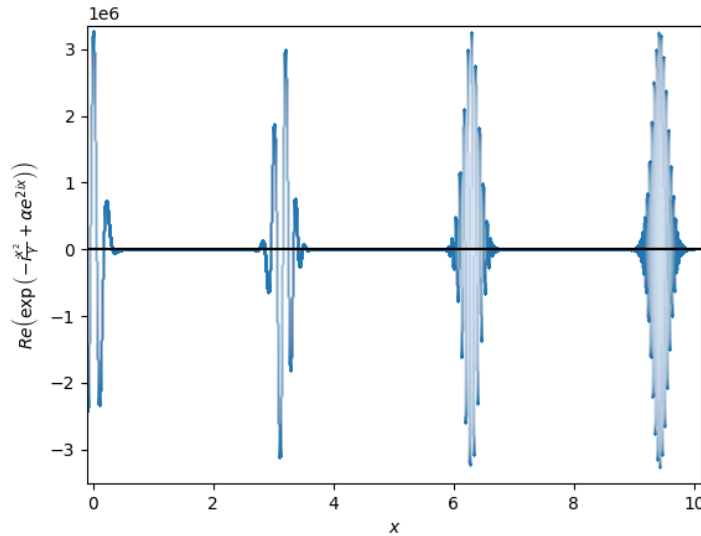


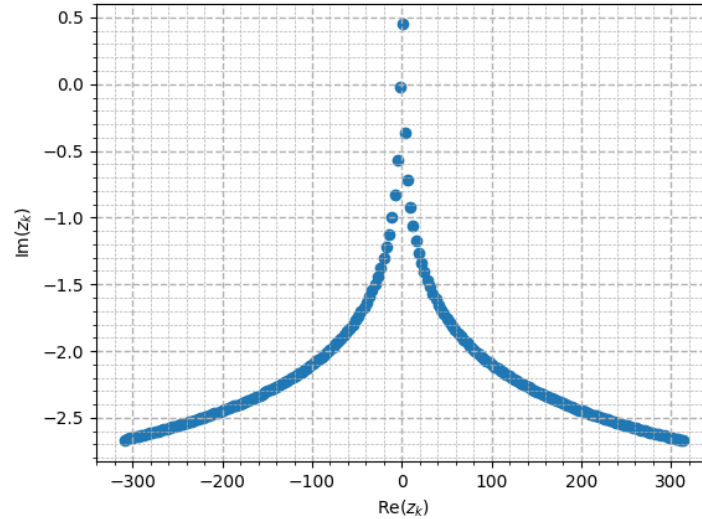
График построен при  $\alpha = 15, \gamma = 0.1$ . При больших  $\alpha$  и меньших  $\gamma$  быстро происходит переполнение.

Уже из этого графика видно, что частота осцилляций в пучностях растёт, что говорит о затруднительности применения метода перевала на действительной оси. Если же применить комплексный метод перевала, то окажется, что перевальных точек бесконечно много. Располагаются они в точках

$$z_k = \frac{i}{2} W_k(-2i\alpha\gamma), \quad (5.5)$$

<sup>2</sup>Здесь и далее подразумевается, что интегралы берутся в смысле главного значения

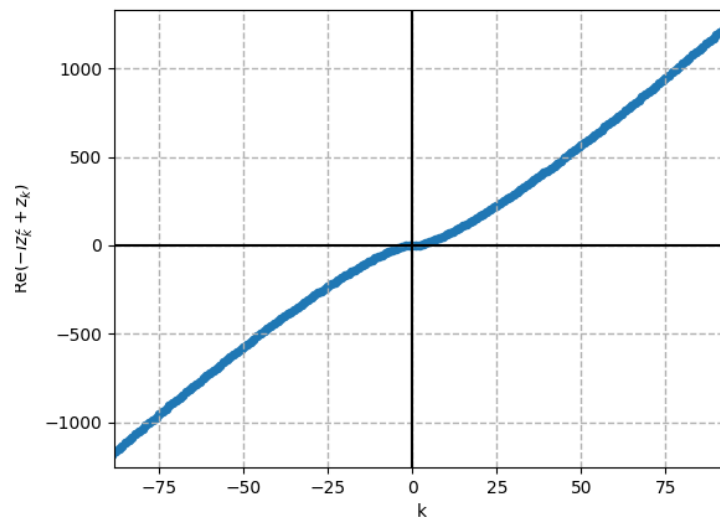
где  $W_k$  - занумерованные ветви функции Ламберта. Дословно следуя методу перевала, мы должны деформировать контур интегрирования вдоль линий стационарных фаз этих точек. Отметим их примерное расположение на комплексной плоскости при тех же  $\alpha, \gamma$ :



Заметим, что линии, на которых лежат  $z_k$  при высоких логарифмически отходят от действительной оси. Можно предположить, что достаточно учесть лишь несколько перевальных точек, вносящих наибольший вклад. Для проверки такого предположения, вычислим показатель экспоненты формулы 5.4 в точках  $z_k$ , учитывая, что  $z_k = \alpha\gamma e^{2iz_k}$ :

$$-i \frac{z_k^2}{\gamma} + \alpha e^{2iz_k} = \frac{-iz_k^2 + z_k}{\gamma} \quad (5.6)$$

Для определения номера, вносящего наибольший вклад, построим зависимость действительной части показателя экспоненты от номера корня:



Как видим, асимптотически при росте номера ветви, вклад её только растёт, что говорит о неверности предположения о внесении основного вклада ограниченным числом членов.

# Литература

- [1] *Yuen, H. P.* Generation and detection of two-photon coherent states in degenerate four-wave mixing / H. P. Yuen, J.H. Shapiro // *Opt. Lett.* — Vol. 4. — P. 334.
- [2] Generation and detection of squeezed states of light by nondegenerate four-wave mixing in an optical fiber / M. D. Levenson, R.M. Shelby, A. Aspect et al. // *Phys. Rev. A.* — Vol. 32. — P. 1550.
- [3] *Levenson, M. D.* Squeezing of classical noise by nondegenerate four-wave mixing in an optical fiber / M. D. Levenson, R.M. Shelby, S.H. Perlmutter // *Opt. Lett.* — Vol. 10. — P. 514.
- [4] *Tyc, T.* Highly non-Gaussian states created via cross-Kerr nonlinearity / T. Tyc, N. Korolkova // *New J. Phys.* . — Vol. 10. — P. 023041.
- [5] *Yurke, B.* Squeezed-coherent-state generation via four-wave mixers and detection via homodyne detectors / B. Yurke // *Phys. Rev. A.* — Vol. 32. — P. 300.
- [6] Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in an optical cavity / R.E. Slusher, L.W. Hollberg, B. Yurke et al. // *Phys. Rev. Lett.* — Vol. 55. — P. 2409.
- [7] Squeezed states in optical cavities: A spontaneous-emission-noise limit / R.E. Slusher, L.W. Hollberg, B. Yurke et al. // *Phys. Rev. A.* — Vol. 31. — P. 3512.
- [8] Generation of squeezed states of light with a fiber-optic ring interferometer / R.M. Shelby, M.D. Levenson, D.F. Walls et al. // *Phys. Rev. A.* — Vol. 33. — P. 4008.
- [9] *Titulaer, U.* Density operators for coherent fields / U. Titulaer, R.J. Glauber // *Phys. Rev.* . — Vol. 145. — P. 1041–1050.
- [10] *Stoler, D.* Generalized coherent states / D. Stoler // *Phys. Rev. D* . — Vol. 4. — P. 2309–2312.
- [11] Broad-band parametric deamplification of quantum noise in an optical fiber / Robert M Shelby, Marc D Levenson, Stephen H Perlmutter et al. // *Physical review letters.* — 1986. — Vol. 57, no. 6. — P. 691.
- [12] *Bergman, Keren.* Squeezing in fibers with optical pulses / Keren Bergman, HA Haus // *Optics letters.* — 1991. — Vol. 16, no. 9. — Pp. 663–665.
- [13] *Rosenbluh, Michael.* Squeezed optical solitons / Michael Rosenbluh, Robert M Shelby // *Physical review letters.* — 1991. — Vol. 66, no. 2. — P. 153.

- [14] Photon-number squeezed solitons from an asymmetric fiber-optic Sagnac interferometer / S Schmitt, J Ficker, M Wolff et al. // *Physical review letters*. — 1998. — Vol. 81, no. 12. — P. 2446.
- [15] *Krylov, Dmitriy*. Amplitude-squeezed solitons from an asymmetric fiber interferometer / Dmitriy Krylov, Keren Bergman // *Optics letters*. — 1998. — Vol. 23, no. 17. — Pp. 1390–1392.
- [16] Squeezed light and self-induced transparency in mercury-filled hollow core photonic crystal fibers / Ulrich Vogl, Nicolas Y Joly, Philip St J Russell et al. // European Quantum Electronics Conference / Optical Society of America. — 2015. — P. PD\_B\_2.
- [17] Optical properties of low loss (70dB/km) hypocycloid-core kagome hollow core photonic crystal fiber for Rb and Cs based optical applications / Thomas D Bradley, Yingying Wang, Meshaal Alharbi et al. // *Journal of Lightwave Technology*. — 2013. — Vol. 31, no. 16. — Pp. 3052–3055.
- [18] Photonic crystal fiber source of correlated photon pairs / JG Rarity, J Fulconis, J Duligall et al. // *Optics express*. — 2005. — Vol. 13, no. 2. — Pp. 534–544.
- [19] *Fan, Jingyun*. A broadband high spectral brightness fiber-based two-photon source / Jingyun Fan, Alan Migdall // *Optics express*. — 2007. — Vol. 15, no. 6. — Pp. 2915–2920.
- [20] Continuous wave photon pair generation in silicon-on-insulator waveguides and ring resonators / Stéphane Clemmen, K Phan Huy, Wim Bogaerts et al. // *Optics express*. — 2009. — Vol. 17, no. 19. — Pp. 16558–16570.
- [21] Ultra-low power generation of twin photons in a compact silicon ring resonator / Stefano Azzini, Davide Grassani, Michael J Strain et al. // *Optics express*. — 2012. — Vol. 20, no. 21. — Pp. 23100–23107.
- [22] Photon pair generation in a silicon micro-ring resonator with reverse bias enhancement / Erman Engin, Damien Bonneau, Chandra M Natarajan et al. // *Optics express*. — 2013. — Vol. 21, no. 23. — Pp. 27826–27834.
- [23] Telecom-band degenerate-frequency photon pair generation in silicon microring cavities / Yuan Guo, Wei Zhang, Shuai Dong et al. // *Optics letters*. — 2014. — Vol. 39, no. 8. — Pp. 2526–2529.
- [24] Micrometer-scale integrated silicon source of time-energy entangled photons / Davide Grassani, Stefano Azzini, Marco Liscidini et al. // *Optica*. — 2015. — Vol. 2, no. 2. — Pp. 88–94.
- [25] Time-bin entangled photon pair generation from Si micro-ring resonator / Ryota Wakabayashi, Mikio Fujiwara, Ken-ichiro Yoshino et al. // *Optics express*. — 2015. — Vol. 23, no. 2. — Pp. 1103–1113.
- [26] Generation of hyper-entanglement on polarization and energy-time based on a silicon micro-ring cavity / Jing Suo, Shuai Dong, Wei Zhang et al. // *Optics express*. — 2015. — Vol. 23, no. 4. — Pp. 3985–3995.
- [27] *Schleich, Wolfgang P*. Quantum optics in phase space / Wolfgang P Schleich. — John Wiley & Sons, 2011.

- [28] *Kitagawa, M.* Number-phase minimum-uncertainty state with reduced number uncertainty in a Kerr nonlinear interferometer / M Kitagawa, Y Yamamoto // *Physical Review A*. — 1986. — Vol. 34, no. 5. — P. 3974.
- [29] On perspectives of generating quasi-Fock state via resonant self-phase-modulation / SN Balybin, F Ya Khalili, DV Strekalov et al. // *Quantum and Nonlinear Optics VII* / SPIE. — Vol. 11558. — 2020. — Pp. 9–24.
- [30] *Glauber, Roy J.* Coherent and incoherent states of the radiation field / Roy J Glauber // *Physical Review*. — 1963. — Vol. 131, no. 6. — P. 2766.
- [31] *Sundar, Kasivishvanathan.* Amplitude-squeezed quantum states produced by the evolution of a quadrature-squeezed coherent state in a Kerr medium / Kasivishvanathan Sundar // *Physical Review A*. — 1996. — Vol. 53, no. 2. — P. 1096.
- [32] *Hudson, Robin L.* When is the Wigner quasi-probability density non-negative? / Robin L Hudson // *Reports on Mathematical Physics*. — 1974. — Vol. 6, no. 2. — Pp. 249–252.
- [33] Negative quasi-probability as a resource for quantum computation / Victor Veitch, Christopher Ferrie, David Gross, Joseph Emerson // *New Journal of Physics*. — 2012. — Vol. 14, no. 11. — P. 113011.
- [34] *Kenfack, Anatole.* Negativity of the Wigner function as an indicator of non-classicality / Anatole Kenfack, Karol Życzkowski // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. — 2004. — Vol. 6, no. 10. — P. 396.
- [35] *Nugmanov, B.* Robustness of negativity of the Wigner function to dissipation / B Nugmanov, N Zunikov, F Ya Khalili // *arXiv preprint arXiv:2201.03257*. — 2022.
- [36] *Lütkenhaus, N.* Nonclassical effects in phase space / N Lütkenhaus, Stephen M Barnett // *Physical Review A*. — 1995. — Vol. 51, no. 4. — P. 3340.
- [37] *Stobińska, Magdalena.* Wigner function evolution of quantum states in the presence of self-Kerr interaction / Magdalena Stobińska, G. J. Milburn, Krzysztof Wódkiewicz // *Phys. Rev. A*. — 2008. — Jul. — Vol. 78. — P. 013810. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.78.013810>.
- [38] *Bringmann, Kathrin.* Asymptotic behavior of partial and false theta functions arising from Jacobi forms and regularized characters / Kathrin Bringmann, Amanda Folsom, Antun Milas // *Journal of Mathematical Physics*. — 2017. — Vol. 58, no. 1. — P. 011702.
- [39] *Asbóth, János K.* Computable measure of nonclassicality for light / János K Asbóth, John Calsamiglia, Helmut Ritsch // *Physical review letters*. — 2005. — Vol. 94, no. 17. — P. 173602.