

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
ФИЗТЕХ-ШКОЛА РАДИОТЕХНИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ

Работа 2.2.1. Диффузия

Работу выполнил:
Долгов Александр Алексеевич, группа Б01-106

Долгопрудный, 2022

Содержание

1	Аннотация	3
2	Теоретические сведения	3
3	Схема эксперимента	5
4	Методика измерений	7
5	Экспериментальная установка	8
6	Обработка полученных результатов	9
7	Вывод	12
8	Приложения	13

1 Аннотация

В данной работе исследуется взаимная диффузия газов: гелия и воздуха (более строго, воздух, конечно, является смесью газов). Проводится измерение коэффициента взаимной диффузии этих газов, а также проверяется теоретический результат, что коэффициент взаимной диффузии не зависит от пропорций компонентов бинарной смеси и обратно пропорционален давлению в системе.

2 Теоретические сведения

Диффузия - самопроизвольное взаимное проникновение веществ друг в друга, происходящее вследствие теплового движения молекул. Пусть система состоит из двух компонентов: "а" и "b". Пусть также диффузия осуществляется только вдоль оси Ох, тогда справедлив закон Фика:

$$j_a = -D \frac{\partial n_a}{\partial x}, j_b = -D \frac{\partial n_b}{\partial x},$$

где j_a и j_b - соответственно плотности потока компонентов а и b, то есть число частиц, проходящих через единичную площадку в единицу времени.

Давление Р и температура Т предполагаются неизменными. Для идеального газа (и гелий и воздух считаем таковыми в условиях эксперимента) справедливо уравнение:

$$P = (n_{He} + n_{air})kT,$$

где n_{He} и n_{air} - соответственно концентрации гелия и воздуха в сосуде.

Так как $P = \text{const}$ и $T = \text{const}$, то $n_{He} + n_{air} = \text{const} \Rightarrow \Delta n_{air} = -\Delta n_{He} \Rightarrow$ достаточно описать диффузию одного из компонентов, например, гелия:

$$j_{He} = -D \frac{\partial n_{He}}{\partial x} \tag{1}$$

В работе предполагается, что $n_{\text{He}} \ll n_{\text{air}}$. Также верно, что $\mu_{\text{He}} \ll \mu_{\text{N}_2}$ и $\mu_{\text{He}} \ll \mu_{\text{O}_2}$, то есть атомы гелия значительно легче молекул, из которых в основном состоит воздух. Из этих двух утверждений следует, что процесс взаимной диффузии гелия и воздуха можно приближённо описывать как диффузию примеси лёгких частиц He на практически стационарном фоне воздуха. Для такого приближения верно:

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{v}, \quad (2)$$

где \bar{v} - средняя скорость хаотического движения частиц примеси, λ - их длина свободного пробега. Эти величины вычисляются по формулам:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu_{\text{He}}}} \quad (3)$$

$$\lambda = \frac{1}{n_0 \sigma}, \quad (4)$$

где n_0 - концентрация рассеивающих центров (воздуха в нашем случае), σ - сечение столкновения частиц примеси с частицами фона.

В общем случае формула (2) также остаётся верна, однако под λ нужно понимать величину:

$$\lambda = \frac{1}{(n_{\text{air}} + n_{\text{He}})\sigma},$$

а под \bar{v} понимать величину:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\bar{m}}},$$

где \bar{m} - приведённая масса частиц смеси.

Так как $n_{\text{He}} + n_{\text{air}} = \frac{P}{kT}$, то $\lambda = \frac{kT}{P\sigma} \Rightarrow D \sim \frac{1}{P}$. Также из приведённых выражения ясно, что величина D не зависит от пропорций компонентов смеси.

3 Схема эксперимента

В работе будем использовать сосуды объёмами V_1 и V_2 ($V_1 \approx V_2 = V$), соединённые трубкой длины L и сечения S . Сосуды заполнены смесью двух газов при одинаковом давлении, но различной концентрации компонентов (рис. 1).

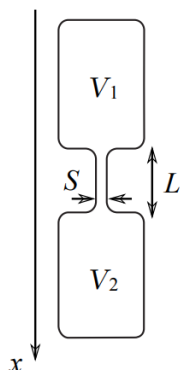


Рис. 1

В общем случае: $n = n(x, t)$, но если объём соединительной трубки много меньше объёма сосудов ($SL \ll V$), то внутри сосудов можно считать: $n = n(t)$ (концентрация постоянна во всём объёме сосудов) и принять, что концентрация изменяется только благодаря диффузии в трубке.

Сначала предположим, что на концах соединительной трубки концентрации гелия поддерживаются постоянными и равными n_1 и n_2 (индексы соответствуют индексам объёмов сосудов). Тогда через некоторое время в трубке установится стационарный поток частиц, постоянный во всех сечениях трубки (в противном случае в трубке бы происходило накопление частиц и через некоторое время поток прекратился бы).

Из (1) получаем:

$$j = -D \frac{\partial n}{\partial x} = \text{const} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} = \text{const}$$

Отсюда получаем:

$$n(x) = \frac{n_2 - n_1}{L}x + n_1 \quad (5)$$

Из (5): $\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{n_2 - n_1}{L}$. Отсюда окончательно получим:

$$j = -D \frac{n_2 - n_1}{L} \quad (6)$$

Предположим, что процесс перехода частиц из сосуда 2 в сосуд 1 происходит настолько медленно, что в любой момент времени течение

газа можно считать стационарным и описывать формулами (5) и (6), то есть речь идёт о квазистационарном течении.

Также считаем, что концентрация примеси вблизи трубки и в остальных частях сосудов отличаются мало, то есть это отличие много меньше самих концентраций. Тогда в сосудах 1 и 2 соответственно $N_1 = n_1 V$ и $N_2 = n_2 V$ частиц примеси.

По определению плотности потока частиц получаем:

$$\frac{dN_1}{dt} = -jS, \quad \frac{dN_2}{dt} = jS \quad (7)$$

Запишем (7) в более удобном виде:

$$\frac{dn_1}{dt} V = -jS, \quad \frac{dn_2}{dt} V = jS \Rightarrow \frac{d}{dt}(n_2 - n_1) = \frac{2jS}{V}$$

С использованием (6) получаем:

$$\frac{d}{dt}(n_2 - n_1) = -2D \frac{n_2 - n_1}{L} \frac{S}{V}$$

Введём обозначение:

$$\tau = \frac{1}{D} \frac{VL}{2S} \quad (8)$$

С использованием обозначения получаем:

$$\frac{d(n_2 - n_1)}{dt} = -\frac{n_2 - n_1}{\tau} \Rightarrow \frac{d(n_2 - n_1)}{n_2 - n_1} = -\frac{dt}{\tau}$$

Решая последнее уравнение, получаем:

$$\Delta n = \Delta n_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (9)$$

где $\Delta n \equiv n_2 - n_1$, $\Delta n_0 = \Delta n$ при $t = 0$.

4 Методика измерений

Перед проведением измерений необходимо убедиться в соблюдении некоторых условий:

1) Для наблюдения диффузии необходимо отсутствие конвекции \Rightarrow необходимо обеспечить равенство температур и давлений в сосудах до начала эксперимента.

2) Для применения квазистационарного приближения диффузии в трубке необходимо убедиться в том, что величина $\tau \gg \tau_0$ (τ_0 - характерное время диффузии одной частицы вдоль данной трубки). Согласно закону Эйнштейна-Смолуховского: $\tau_0 \sim \frac{L^2}{2D}$.

$$\tau \gg \tau_0 \iff \frac{1}{D} \frac{VL}{S} \gg \frac{L^2}{2D} \iff \frac{V}{S} \gg L \iff SL \ll V$$

3) Если сосуды расположены вертикально, то влиянием силы тяжести можно пренебречь, так как $mgL \ll kT$.

Для измерения разности концентраций в установке применяются датчики теплопроводности. Теплопроводность κ зависит от концентрации: при $\Delta n \ll n_{1,2}$ можно считать, что $\Delta \kappa = \kappa(n_2) - \kappa(n_1) \approx C \Delta n$, где C - некоторая константа.

Упомянутые датчики в своём устройстве содержат проволоку-нагреватель, приращение сопротивления которой пропорционально теплопроводности газа при заданной мощности тока, текущего по проволоке.

Для измерения сопротивления используется мостовая схема (см. раздел "Экспериментальная установка"), которая балансируется при заполнении сосудов одной и той же смесью. При различии в концентрациях смесей показания вольтметра подсоединённого к диагонали моста: $U \sim \Delta \kappa \sim \Delta n$. Таким образом, в процессе диффузии напряжение изменяется по закону:

$$U = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (10)$$

где $U_0 = U$ при $t = 0$.

Измеряя $U(t)$, можно найти τ , откуда по формуле (8) найти коэффициент диффузии D .

5 Экспериментальная установка

Схема измерительной части установки приведена на рис. 2. Она соединена с системой откачки и напуска воздуха и гелия. Один из вариантов конструкции системы изображён на рис.3.

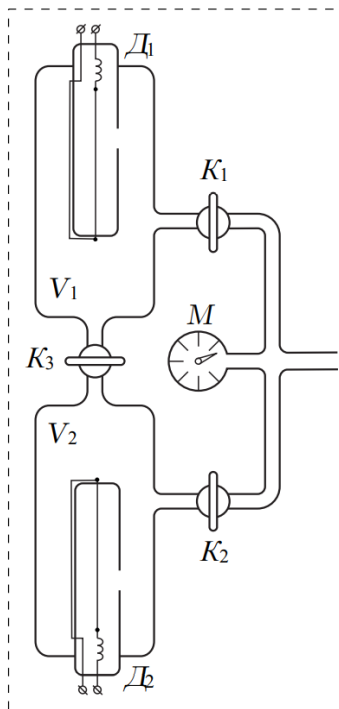


Рис. 2

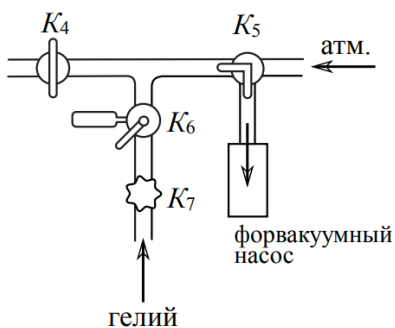


Рис. 3

Сосуды V_1 и V_2 размещены вертикально. Краны K_1 и K_2 нужны для откачки/подачи гелия в сосуды. Трубка, соединяющая сосуды оснащена краном K_3 . К соединительным трубкам подключён манометр M , измеряющий разность давлений между соединительными трубками и атмосферой.

Гелий содержится в баллоне под давлением, превышающем атмосферное. В установке предусмотрен кран K_7 , отделяющий баллон с гелием от установки. Для подачи малых порций гелия применяется двухходовый кран с дозатором (см. рис. 4). Если открыт кран K_7 и рычаг P находится в положении I, то гелий в небольшом количестве поступает в дозатор. Если P находится в положении II, гелий из дозатора поступает в установку.

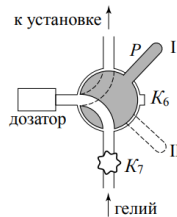


Рис. 4

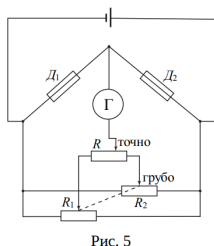


Рис. 5

Датчики теплопроводности D_1 и D_2 , расположенные в сосудах V_1 и V_2 соответственно, включены в мостовую схему согласно рис. 5. Резисторы R , R_1 и R_2 служат для балансировки моста. Контакты резисторов R_1 и R_2 находятся на общей оси и изменяются одновременно поворотом ручки грубой регулировки. Точная балансировка выполняется резистором R .

6 Обработка полученных результатов

Параметры экспериментальной установки:

$$V_1 = V_2 = V = (1200 \pm 30) \text{ см}^3$$

$$\frac{L}{S} = (5,5 \pm 0,5) \text{ см}^{-1}$$

Было проведено 4 серии измерений зависимости $U(t)$ при различных значениях давления. Результаты представлены в виде таблиц и графиков (см. раздел "Приложения"). Для каждой серии получено значение τ , полученное аппроксимацией экспериментальных точек графиками вида $y = y_0 + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$. Эти значения запишем в табл.1.

Таблица 1:

Р, мм рт.ст	τ , с	$\Delta\tau$, с
40,4	348,8	$2,4 \cdot 10^{-5}$
80,8	522,6	$6,6 \cdot 10^{-6}$
121,3	627,9	$9,8 \cdot 10^{-6}$
201,4	970,1	$1,2 \cdot 10^{-5}$

Обратим внимание на то, что погрешность, отражённая в табл.1 является случайной и её порядок много меньше величины τ . Следовательно, этой погрешностью можно пренебречь и в дальнейших расчётах не учитывать.

Из (8) получим, что

$$D = \frac{1}{\tau} \frac{L}{S} V$$

Теперь по результатам табл.1 получим значения коэффициента диффузии для каждого значения давления. Также рассчитаем погрешности этих величин. Погрешность D можно посчитать по формуле:

$$\Delta D = D \sqrt{\left(\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 + \left(\Delta\left(\frac{L}{S}\right) / \frac{L}{S}\right)^2}$$

Так как погрешностью $\Delta\tau$ мы пренебрегли, то последняя формула приобретает вид:

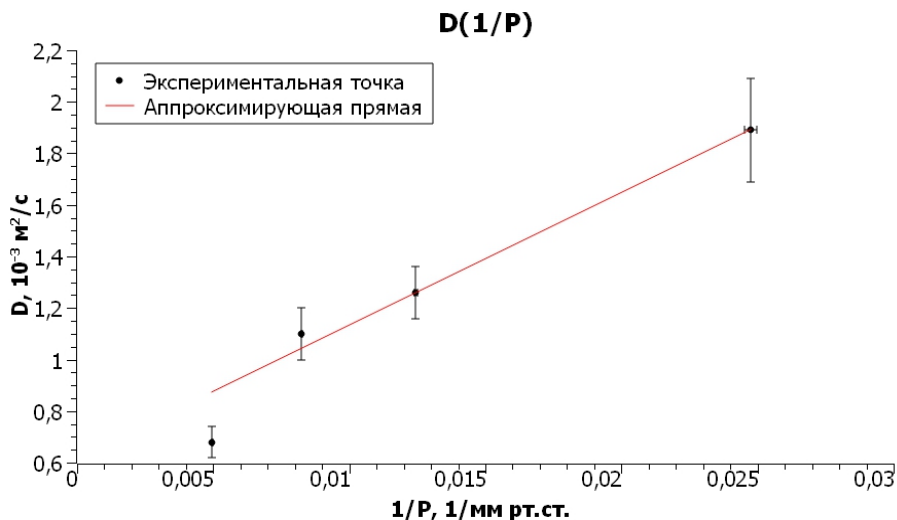
$$\Delta D = D \sqrt{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 + \left(\Delta\left(\frac{L}{S}\right) / \frac{L}{S}\right)^2}$$

Результаты представим в виде табл.2.

Таблица 2:

Р, мм рт.ст	D , $\text{м}^2/\text{с}$	ΔD , $\text{м}^2/\text{с}$
40,4	$1,89 \cdot 10^{-3}$	$0,2 \cdot 10^{-3}$
80,8	$1,26 \cdot 10^{-3}$	$0,1 \cdot 10^{-3}$
121,3	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$0,1 \cdot 10^{-3}$
201,4	$6,8 \cdot 10^{-4}$	$0,6 \cdot 10^{-4}$

По данным таблицы построим график зависимости $D(\frac{1}{p})$:



Погрешность величины $\frac{1}{p}$ можно найти по формуле:

$$\Delta \left(\frac{1}{p} \right) = \frac{\Delta p}{p^2}$$

Погрешностью измерения давления Δp считаем погрешность манометра, которая в для данной экспериментальной установки равна $\Delta p = 50 \text{ Па} \approx 0,38 \text{ мм рт.ст.}$

Аппроксимируя экспериментальные точки прямой линией, получаем, что угловой коэффициент её наклона равен:

$$k = (51,5 \pm 5,8) \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2 \cdot \text{мм рт.ст.}}{\text{с}}$$

Считая, что зависимость $D(\frac{1}{p})$ имеет вид: $D = \frac{k}{p}$ получим, что при атмосферном давлении ($p = 760 \text{ мм рт.ст.}$) коэффициент диффузии равен:

$$D_{\text{атм}} = (6,8 \pm 0,9) \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$$

Погрешность результата оценивалась по формуле (атмосферное давление

считалось точной величиной):

$$\Delta D_{\text{атм}} = D_{\text{атм}} \frac{\Delta k}{k}$$

Теперь из (3) и (4) получим формулу для вычисления длины свободного пробега:

$$\lambda = 3D_{\text{атм}} \sqrt{\frac{\pi \mu_{\text{He}}}{8RT}}$$

Найдём длину свободного пробега молекул гелия в воздухе при температуре $T = 20^\circ\text{C} = 293\text{K}$:

$$\lambda = (1,6 \pm 0,2) \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

Также справедлива формула:

$$\sigma = \frac{kT}{P\lambda}$$

из которой получаем:

$$\sigma = (2,5 \pm 0,3) \cdot 10^{-19} \text{ м}^2$$

7 Вывод

В результате работы вычислено значение коэффициента диффузии гелия в воздухе при атмосферном давлении. Это значение с учётом указанной погрешности соответствует табличным данным: было найдено значение $D_{\text{атм}} = 6,2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$. Также найденное значение длины свободного пробега молекулы гелия соответствует табличным значениям с учётом рассчитанной погрешности: было найдено значение $\lambda = 1,75 \cdot 10^{-7}$. Более того, подтвердилась обратно пропорциональная зависимость коэффициента диффузии от давления газа.

8 Приложения

График 1:

Измерение 1. $P = 40,4$ мм рт.ст

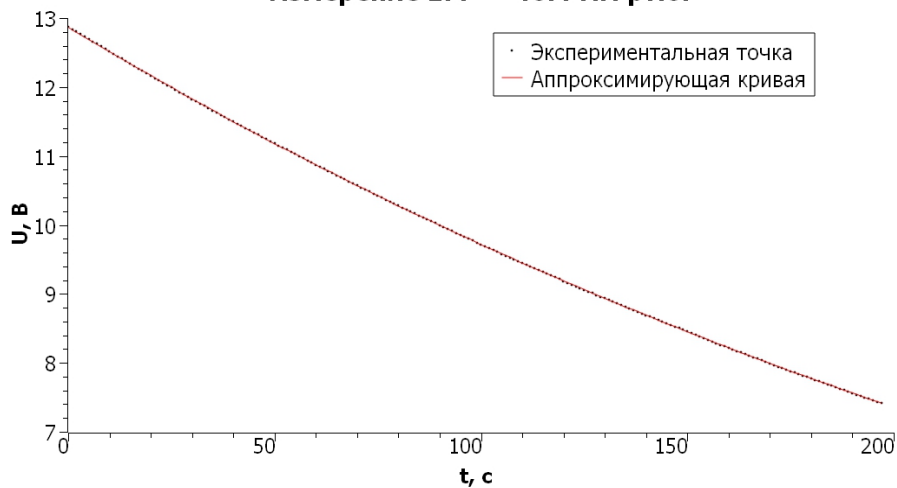


График 2:

Измерение 2. $P = 80,8$ мм рт.ст.

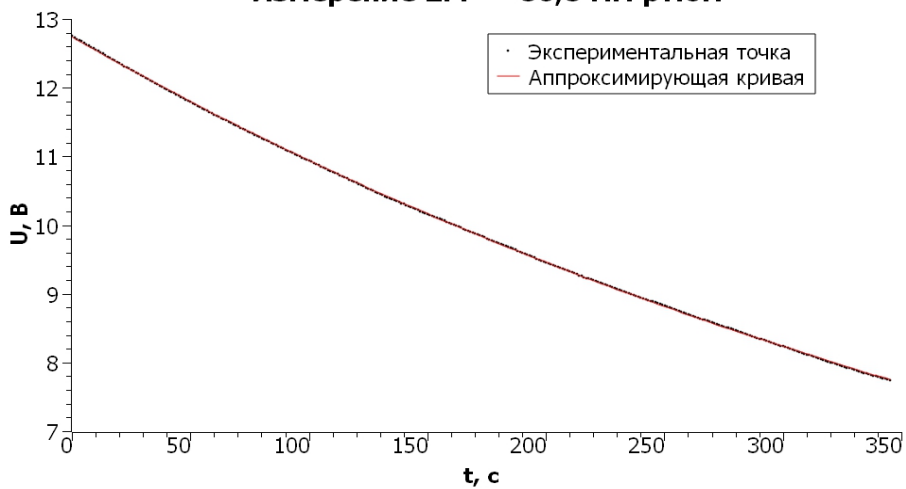


График 3:

Измерение 3. $P = 121,3$ мм рт.ст

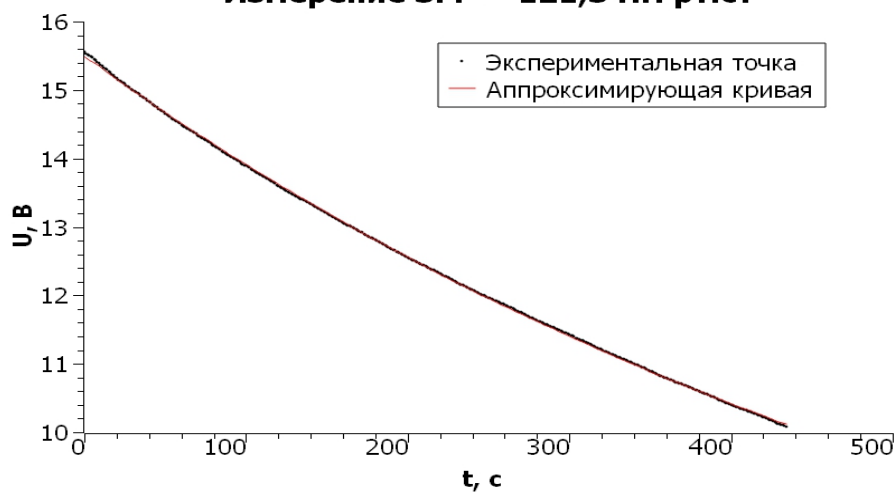


График 4:

Измерение 4. $P = 201,4$ мм. рт.ст

