4.1. X_n 的状态空间 $\{0,1,\cdots,S\}$. 则

$$X_{n+1}=\begin{cases}(S-D)^+ & X_n<s\\ (X_n-D)^+ & X_n\geq s\end{cases}$$

故转移矩阵

$$P_{ij}=\begin{cases}\alpha_{S-j} & i=0,1,2,\cdots,s-1,\ j=0,1,2,\cdots,S\\ \alpha_{i-j} & i=s,s+1,\cdots,S,\ j=1,\cdots,i\\ 0 & i=s,s+1,\cdots,S,\ j=i+1,\cdots,S.\end{cases}$$

4.2. $P(X_n=j\mid X_{n_1}=i_1,\cdots,X_{n_k}=i_k)$

$$=\frac{P(X_{n_1}=i_1,\cdots,X_{n_k}=i_k,X_n=j)}{P(X_{n_1}=i_1,\cdots,X_{n_k}=i_k)}$$

$$=\frac{P_{i_1i_2}^{n_2-n_1}\cdots P_{i_{k-1}i_k}^{n_k-n_{k-1}}\times P_{i_kj}^{n-n_k}}{P_{i_1i_2}^{n_2-n_1}\times P_{i_2i_3}^{n_3-n_2}\times\cdots\times P_{i_{k-1}i_k}^{n_k-n_{k-1}}}=P_{i_k,j}^{n-n_k}=P(X_n=j\mid X_{n_k}=i_k).$$

4.3 由于 j 是可以从 i 可达的. 因此 $\exists k$. 使得 $P_{ij}^k>0$,

$$P_{ij}^k=P(X_k=j\mid X_0=i)=P(X_0=i,X_1=i_1,\cdots,X_{k-1}=i_{k-1},X_k=j).$$

故存在某条长度为 k, 从 i 到 j 的转移链, 注意到, 满足条件的最短链应该没有环. 即不可能存在某个 $i_m=i_n$, 否则 i_m 到 i_n 中的转移可直接截掉. 因此从 i 到 j 的转移过程中, n 个结点至多被访问1次. 即转移次数 $\leq n$.

4.4. 直观上来看, P_{ij}^n 表示 i 经过 n 次转移到 j. 而在这 n 次转移中, i 可能已经到达过 j 多次, 因此.

$$P_{ij}^n=P(i\text{ 经过 }n\text{ 次转移到 }j)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}P(i\text{ 经过 }k\text{ 次转移第 1 次到达 }j)\times P(j\text{ 经过 }n-k\text{ 次}$$

转移到 j) $= \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{k} \cdot P_{jj}^{n-k}$

4.5. a). $P_{ij/k}^{n}$ 表示从 i 经过 n 次转移到 j，且途中不经过 k 状态。

b). $P_{ij}^{n} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X_n=j,\ X_k=i,\ X_l \neq i,\ l=k+1,\cdots,n \mid X_0=i)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X_n=j, X_l \neq i, l=k+1,\cdots,n \mid X_0=i, X_k=i)\, P(X_k=i \mid X_0=i)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X_n=j, X_l \neq i, l=k+1,\cdots,n-1 \mid X_k=i)\, P(X_k=i \mid X_0=i)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P_{ij/i}^{n-k} P_{ii}^{k}$$

4.10. a). 即为与 i 个 infectious individual 碰面的概率，故为 $1-(1-p)^{i}$

b) 不是，因为 X_n 与 X_{n-1}、Y_{n-1} 有关。

c)、不是，因为 Y_n 与 X_{n-1}、Y_{n-1} 有关。

d) 是。

$$P(X_n = i-k, Y_n = k \mid X_{n-1} = i, Y_{n-1} = j)$$

$$= C_i^{k} \left(1-(1-p)^{j}\right)^{k} (1-p)^{j(i-k)}$$

即假设上一周期有 i 个人 noninfected，j 个人 infectous，则在这一周期中，若有 k 个人 infectious，则剩下 i-k 个人 nonifectous，而这个概率服从二项分布，$B(i, 1-(1-p)^{j}, k)$。

4.15. 对于 M/G/1 system，我们每当一个顾客离开时，观察系统中的人数。X_n：第 n 个顾客离开后，系统中的人数。

记 Y_n 为从第 n 个顾客离开到第 n+1 个顾客离开，期间到达的顾客数，因此

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + Y_n - 1 & , X_n \geq 1 \\ \cdots \end{cases}$$

$\begin{cases} \bar{Y}_n & X_n = 0 \end{cases}$

而 $\varphi_j = P(\bar{Y}_n = j) = \int_0^\infty P(\bar{Y}_n = j \mid T = t)\, dG(t)$

$$= \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}\, dG(t)$$

从而转移概率. $P_{ij} = \begin{cases} \varphi_j & i=0 \\ \varphi_{j-i+1} & i\geq 1,\ j \geq i-1 \\ 0 & i \geq 1,\ j < i-1 \end{cases}$

故 $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij} \pi_i$

$$= \varphi_j \pi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \varphi_{j-i+1}$$

我们令 $\pi(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j s^j$, $A(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j s^j$

则 $\pi(s) = \pi_0 s^0 + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j s^j$

$$= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j s^j\right)\pi_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \varphi_{j-i+1} s^j$$

$$= \pi_0 A(s) + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \sum_{j=i-1}^{\infty} \varphi_{j-i+1} s^j$$

$$= \pi_0 A(s) + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i s^i \sum_{j=i-1}^{\infty} \varphi_{j-i+1} s^{j-i+1} \times s^{-1}$$

$$= \pi_0 A(s) + (\pi(s) - \pi_0)\frac{A(s)}{s}$$

$\Rightarrow \pi(s) = \dfrac{(s-1)\pi_0 A(s)}{s - A(s)}$

而 $\lim_{s\to 1} A(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j = 1$.

$$\pi'(s) = \frac{[\pi_0 A(s) + (s-1)\pi_0 A'(s)](s - A(s)) - (1 - A'(s))(s-1)\pi_0 A(s)}{(s - A(s))^2}$$

$$= \frac{\pi_0 (A(s) - A^2(s) + s^2 A'(s) - sA'(s))}{(s - A(s))^2}$$

我们记 $\rho = \sum j \varphi_j$. 则 ρ 为一个服务期间平均到达人数. 而 arrivals 服从 Poisson 分布. 故

$$\rho = \lambda E[T].$$

T 是一个服务周期的时长.

$A'(s) = \sum_{j=0}^{\infty} j \varphi_j s^j$, 从而 $A'(1) = \rho$.

则 $\lim_{s\to 1} \pi(s) = \pi_0 \lim_{s\to 1} \dfrac{(s-1)A(s)}{s - A(s)} = \pi_0 \dfrac{A(1)}{1 - A'(1)} = \pi_0 \dfrac{1}{1-\rho}$

故 $1 = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \pi_0 \dfrac{1}{1-\rho} \Rightarrow \pi_0 = 1 - \rho$.

从而 $\pi'(s) = (1-A'(1))\dfrac{A(s)-A^2(s)+s(s-1)A'(s)}{[s-A(s)]^2}$.

$$\sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i = \lim_{s\to 1}\pi'(s) = (1-\rho)\left.\frac{A(s)-2A(s)A'(s)+(2s-1)A'(s)+s(s-1)A''(s)}{2(s-A(s))\cdot(1-A'(s))}\right|_{s=1}$$

$$= (1-\rho)\left.\frac{2A'(s)(s-A(s))+s(s-1)A''(s)}{2(1-A'(s))(s-A(s))}\right|_{s=1}$$

$$= (1-\rho)\left[\frac{A'(s)}{2(1-A'(s))}\right]\Big|_{s=1}$$

$$= \frac{1-\rho}{2}$$

4.21 positive recurrence 要求在有限步内返回状态的概率大于 0.

因此. 方程： $y_0 = P_{1,0}\, y_1 = (1-P_1)\, y_1$

$$y_j = P_{j-1}\cdot y_{j-1} + (1-P_{j+1})\, y_{j+1}$$

有 解. 且 $y_j > 0$, $\Sigma y_j = 1$.

而 $q_{j+1}\, y_{j+1} - q_j\, y_j = p_j y_j - P_{j-1}\, y_{j-1}$

故 $y_{j+1}\, q_{j+1} = y_j P_j$

$$\Rightarrow y_{j+1} = y_0\frac{P_0\cdots P_j}{q_1\cdots q_{j+1}}$$

故若要求 positive recurrent. 则.

$$1 = \sum_{j=0}^{\infty} y_{j+1} = y_0\sum_{j=0}^{\infty}\frac{P_0\cdots P_j}{q_1\cdots q_{j+1}} \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty}\frac{P_0\cdots P_j}{q_1\cdots q_{j+1}} < \infty.$$

而 极限概率: $y_0 = \dfrac{1}{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{P_0\cdots P_j}{q_1\cdots q_{j+1}}}$ $\quad y_{j+1} = y_0\dfrac{P_0\cdots P_j}{q_1\cdots q_{j+1}}$.

4.23. 转移概率. $P_{i,i-1} = q$. $P_{i,i+1} = p$.

则 记 A: she wins the next gamble | present fortune i

B: present fortune i, eventually reaches N.

则 $p(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

先算 p(B). 则. 记 f(i) 为: 在输掉 i 个筹码前. 赢得 N 个筹码的概率. 则.

$f(N) = 1$. $\quad f(0) = 0$.

$$f(i) = q f(i-1) + p f(i+1).$$ 而 $p+q=1$

$$\Rightarrow p f(i) + q f(i) = q f(i-1) + p f(i+1).$$

$$\Rightarrow f(i+1) - f(i) = \frac{q}{p}\left(f(i) - f(i-1)\right)$$

从而可推出：$f(i) = \begin{cases} \dfrac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-\frac{q}{p}} f(1) & 若\ p \neq \frac{1}{2} \\ i f(1) & 若\ p = \frac{1}{2} \end{cases}$

而 $f(N) = 1 \Rightarrow f(1) = \begin{cases} \dfrac{1-\frac{q}{p}}{1-(\frac{q}{p})^N} & p \neq \frac{1}{2} \\ \dfrac{1}{N} & p = \frac{1}{2} \end{cases}$

故 $p(B) = \begin{cases} \dfrac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-(\frac{q}{p})^N} & p \neq \frac{1}{2} \\ \dfrac{i}{N} & p = \frac{1}{2} \end{cases}$

而 $p(AB) = \begin{cases} p \times \dfrac{1-(\frac{q}{p})^{i+1}}{1-(\frac{q}{p})^N} & p \neq \frac{1}{2} \\ \dfrac{i+1}{N} \times \dfrac{1}{2} & p = \frac{1}{2} \end{cases}$

从而 $p(A) = \begin{cases} \dfrac{p[1-(\frac{q}{p})^{i+1}]}{1-(\frac{q}{p})^i} & p \neq \frac{1}{2} \\ \dfrac{i+1}{2i} & p = \frac{1}{2} \end{cases}$

4.20 我们假设一个二元变量 $X_{ij}(n)$. 若第 n 次从状态 i 转移到达了状态 j，则取值为 1，否则为 0. 记 N_i 为在回到状态 0 前到达状态 i 的次数.

则 $m_j = E\left[\sum_i \sum_{n=1}^{N_i} X_{ij}(n)\right] = \sum_i E[N_i] \cdot E[X_{ij}(n)]$

$$= \sum_i m_i \times P_{ij}$$

第二种证明：由于 MC 是 Positive recurrent. 因此在有限步后回到状态 0. 从而 $\pi_j > 0$，而由 Blackwell's theorem. 我们知道 $\frac{m_j}{\mu_{00}} = \pi_j$，从而 $m_j = \mu_{00}\pi_j$.

而 $\pi_j = \sum_i P_{ij}\pi_i$，从而有：$m_j = \sum_i P_{ij} m_i$

4.30. 我们记 $Z_i = X_i - Y_i$. 则我们忽略 $X_i = Y_i$ 的情况. 则

有 $P(Z_i = 1 \mid Z_i \neq 0) = \dfrac{P(X_i=1, Y_i=0)}{P(X_i=1, Y_i=0)+P(X_i=0, Y_i=1)} = \dfrac{P_1(1-P_2)}{P_1(1-P_2)+P_2(1-P_1)}$

$P(Z_i = -1 \mid Z_i \neq 0) = \dfrac{P(X_i=0, Y_i=1)}{P(X_i=1, Y_i=0)+P(X_i=0, Y_i=1)} = \dfrac{(1-P_1)P_2}{P_1(1-P_2)+P_2(1-P_1)}$

因此, 可转化为 gambler's ruin problem. 从而

$$p(\text{error}) = p(M \text{ down before } M \text{ up})$$

$$= \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^M}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{2M}} = \frac{1-\left(\frac{P_1(1-P_2)}{P_2(1-P_1)}\right)^M}{1-\left(\frac{P_1(1-P_2)}{P_2(1-P_1)}\right)^{2M}}$$

$$= \frac{1-\lambda^M}{1-\lambda^{2M}} = \frac{1}{1+\lambda^M}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i - Y_i\right] = EN \cdot (P_1 - P_2).$$

而 $$\sum_{i=1}^{N} X_i - Y_i = \begin{cases} M & \text{概率 } \frac{\lambda^M}{1+\lambda^M} \\ -M & \text{概率 } \frac{1}{1+\lambda^M} \end{cases}$$

因此. $\dfrac{M\lambda^M - M}{1+\lambda^M} = EN\,(P_1 - P_2)$

$$\Rightarrow \quad EN = \frac{M(\lambda^M - 1)}{(P_1-P_2)(1+\lambda^M)}$$

4.31. 我们记状态 1 为: spider at 1. fly at 2.

状态 2 为: spider at 2. fly at 1.

状态 3 为: spider 和 fly 在相同位置.

从而我们有如下转移矩阵:

$P_{11} = P(\text{spider}: 1\to 1.\ \text{fly}: 2\to 2) = 0.7\times 0.4 = 0.28.$

$P_{12} = P(\text{spider}: 1\to 2.\ \text{fly}: 2\to 1) = 0.3\times 0.6 = 0.18.$

$P_{13} = P(\text{spider}: 1\to 1,\ \text{fly}: 2\to 1) + P(\text{spider}: 1\to 2.\ \text{fly}: 2\to 2)$

$= 0.7\times 0.6 + 0.3\times 0.4 = 0.54.$

类似地. 可算得:

$$P = \begin{bmatrix} 0.28 & 0.18 & 0.54 \\ 0.18 & 0.28 & 0.54 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a). 根据 ck Equation. 我们需要计算 P^n

而 $$\lambda I-P=\begin{bmatrix}\lambda-0.28 & -0.18 & -0.54\\ -0.18 & \lambda-0.28 & -0.54\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{bmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\left[(\lambda-0.28)^2-0.18^2\right]$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-0.46)(\lambda-0.1).$$

$\lambda=1$. 特征向量：$(1,1,1)'$

$\lambda=0.46$，特征向量：$(1,1,0)'$

$\lambda=0.1$，特征向量：$(1,-1,0)'$

因此. $$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&0&0\end{bmatrix}^{-1}P\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\&0.46&\\&&0.1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^n=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&0.46^n&\\&&0.1^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&0&0\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0.46^n&0.1^n\\1&0.46^n&-0.1^n\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0.5&0.5&-1\\0.5&-0.5&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.5\,(0.46^n+0.1^n) & 0.5\,(0.46^n-0.1^n) & 1-0.46^n\\ 0.5\,(0.46^n-0.1^n) & 0.5\,(0.46^n+0.1^n) & 1-0.46^n\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

故 $P(\text{initial location})=\frac{1}{2}(0.46^n+0.1^n)$

b) 注意到. 只要 spider 和 fly 位置不同. 则下次转移位置相同的概率为. 0.54. 从而第 n 次被捕食的概率为 $(0.46)^{n-1}\,0.54$. 服从几何分布. 从而均值为：$\frac{1}{0.54}=\frac{50}{27}$

4.33. a) 由于 $E[X_n]=E[E[X_n\mid X_{n-1}]]$

$$=E[\mu X_{n-1}]$$

$$=\mu^n.EX_0.$$

故若 $\mu<1$. 则 $EX_n\to0$. 从而 $X_n\to0$.

若 $\mu>1$. 则 $EX_n\to\infty$. 则 $X_n\to\infty$.

b). $Var(X_n\mid X_0=1)=$

$Var(E[X_n | X_{n-1}, X_0=1]) + E[Var(X_n | X_{n-1}, X_0=1)]$

$= Var(\mu X_{n-1} | X_0=1) + E[\sigma^2 X_{n-1} | X_0=1]$

$= \mu^2 Var(X_{n-1} | X_0=1) + \sigma^2 \mu^{n-1}$

$= \mu^2 (\mu^2 Var(X_{n-2} | X_0=1) + \sigma^2 \mu^{n-2}) + \sigma^2 \mu^{n-1}$

$= \mu^4 Var(X_{n-2} | X_0=1) + \sigma^2 (\mu^{n-1} + \mu^n)$

$= \sigma^2 (\mu^{n-1} + \cdots + \mu^{2n-2})$

$$= \begin{cases} \sigma^2 \mu^{n-1} \dfrac{\mu^n - 1}{\mu - 1} & \mu \neq 1 \\ n\sigma^2 & \mu = 1 \end{cases}$$

4.44.

$\overline{\pi}_j = \sum_{i=0}^{M} \overline{P}_{ij} \overline{\pi}_i$

代入 $\overline{\pi}_i = \dfrac{\pi_i}{\sum_{i=0}^{M} \pi_i}$

则 $\overline{P}_{ij} \overline{\pi}_i = \dfrac{\pi_i}{\sum_{i=0}^{M} \pi_i} (P_{ij} + I(i=j) \Sigma_{k>M} P_{ik})$

而原 Markov chain 是 time-reversible 的.

故. $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$

故 $\overline{P}_{ij} \overline{\pi}_i = \dfrac{\pi_j}{\sum_{i=0}^{M} \pi_i} (P_{ji} + I(i=j) \Sigma_{k>M} P_{jk})$

$= \overline{\pi}_j \times \overline{P}_{ji}$

故 truncated chain 是 time-reversible 的.

同时可得: $\sum_{i=0}^{M} \overline{P}_{ij} \times \dfrac{\pi_i}{\sum_{i=0}^{M} \pi_i}$

$= \sum_{i=0}^{M} \overline{P}_{ji} \times \dfrac{\pi_j}{\sum_{j=0}^{M} \pi_j} = \dfrac{\pi_j}{\sum_{j=0}^{M} \pi_j}$,

由极限概率的唯一性知:

$\dfrac{\pi_j}{\sum_{j=0}^{M} \pi_j}$ 是方程: $\overline{\pi}_j = \sum_{i=0}^{M} \overline{P}_{ij} \overline{\pi}_i$ 的解.

故 $\overline{\pi}_j = \dfrac{\pi_j}{\sum_{j=0}^{M} \pi_j}$.

4.46. a) 是的. Y_n 仅与 Y_{n-1} 取值有关.

b). $$\pi'_j = \frac{\pi_j}{\sum_{i=0}^{N} \pi_i} \qquad j=0,1,\cdots,N$$

c) $$\pi_i(N) = \frac{1}{E[\text{number of } Y\text{-transitions between } Y\text{-visit to } i]}$$

$$\pi_j(N) = \frac{E[\text{number of } Y\text{-visits to } j \text{ between } Y\text{-visits to } i]}{E[\text{number of } Y\text{-transitions between } Y\text{-visit to } i]}$$

$$= \pi_i(N) \times E[\text{number of } X\text{-visits to } j \text{ between } X\text{-visits to } i]$$

d) 对于 symmetric random walk.

$$P_{i,i+1} = \frac{1}{2} = P_{i,i-1}$$

$$P_{00} = \frac{1}{2} = P_{01}. \qquad P_{NN} = \frac{1}{2} = P_{N,N-1}.$$

故是 Doubly stochastic Matrix.

$$\pi_i(N) = \pi_j(N) = \frac{1}{N+1}$$

因此由 c 知 均值为 1.

e) 由 b 知, $\pi'_j = \frac{\pi_j}{\sum_{i=0}^{N} \pi_i}$, 而 X 是 time-Reversible.

因此 Y 也是 time-reversible.