2.3. $$P[N(s)=k \mid N(t)=n] = \frac{P(N(s)=k,\ N(t)=n)}{P(N(t)=n)}$$

$$= \frac{P(k \text{ events in } (0,s],\ n-k \text{ events in } (s,t])}{P(N(t)=n)}$$

$$= \frac{\frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s} \cdot \frac{[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}$$

$$= \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

#

2.4. $$E[N(t)\cdot N(t+s)] = E[N(t)(N(t)+N(s))]$$

$$= E[N^2(t) + N(t)N(s)]$$

$$= \sum_0^\infty n^2 \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} + \lambda^2 ts$$

$$= \sum_1^\infty n \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} + \lambda^2 ts$$

$$= \lambda t \left[\sum_2^\infty \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-2)!} e^{-\lambda t} + \sum_1^\infty \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \right] + \lambda^2 ts$$

$$= \lambda^2 t^2 + \lambda t + \lambda^2 ts$$

2.5 $$P(N_1(t)+N_2(t)=k) = \sum_{i=0}^{k} P(N_1(t)=i,\ N_2(t)=k-i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda_1 t)^i}{i!} e^{-\lambda_1 t} \cdot \frac{(\lambda_2 t)^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2 t}$$

$$= \frac{1}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\lambda_1 t)^i (\lambda_2 t)^{k-i}$$

$$= \frac{((\lambda_1+\lambda_2)t)^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}.$$

故 $N_1(t)+N_2(t)$ 服从 rate 为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 分布.

$$P(\text{第一个事件来自 } N_1(t)) = P(N_1(t)=1 \mid N_1(t)+N_2(t)=1)$$

$$= \frac{P(N_1(t)=1,\ N_2(t)=0)}{P(N_1(t)+N_2(t)=1)}$$

$$= \frac{\lambda_1 t e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_1+\lambda_2)t\, e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

2.8 a) $$P(X_t \le a) = P\left(\frac{-\log U_t}{\lambda} \le a\right) = P(\log U_t \ge -a\lambda)$$

$= P(U_t \geq e^{-a\lambda})$

$= 1 - e^{-a\lambda}$

故 X_t 服从参数为 λ 的指数分布.

b). $-\sum_{i=1}^{n} \ln U_i \leq \lambda < -\sum_{i=1}^{n+1} \ln U_i$.

故 $\sum_{i=1}^{n} \frac{-\ln U_i}{\lambda} \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{-\ln U_i}{\lambda} > 1$.

由 a 知. $\frac{-\ln U_i}{\lambda}$ 服从参数为 λ 的指数分布.

故上式可以看作 一个 Poisson Process , rate 为 λ.

且 $S_n \leq 1$、 $S_{n+1} > 1$.

故 $N = n$ 满足 $P(N(1)=n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$. 即 Poisson 分布.

2.10. a) 变量 T 表示从到达车站到回家所花时间. t 表示等待公交车到达时间.

则 $T = \begin{cases} t + R & \text{if } t < s \\ s + W. & \text{if } t \geq s \end{cases}$

则 $ET = \int_0^s (t+R) \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt + (s+W) \cdot e^{-\lambda s}$

$= R(1-e^{-\lambda s}) + \frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda s}) + We^{-\lambda s}$

b) $ET = (W-R-\frac{1}{\lambda}) e^{-\lambda s} + R + \frac{1}{\lambda}$.

若 $W < R + \frac{1}{\lambda}$. ET 单调增. 故取 $s=0$ 最小.

若 $W > R + \frac{1}{\lambda}$. ET 单调减. 故取 $s=\infty$ 最小.

若 $W = R + \frac{1}{\lambda}$. $ET = R + \frac{1}{\lambda}$, 与 s 取值无关.

c). 注意到, 公交车的到达服从指数分布. 具有无记忆性.

故已经等了多久和刚开始等无区别.

2.14. a) 记 o_{ij} 为第 i 层上电梯, 第 j 层下电梯的人数.

则 $o_{ij} = P_{ij} N_i$. $\quad O_j = \sum_{i<j} o_{ij}$

故 $E O_j = E[\sum_{i<j} o_{ij}] = \sum_{i<j} P_{ij} E N_i = \sum_{i<j} P_{ij} \lambda_i$

b) 注意到. $O_j = \sum_{i<j} P_{ij} N_i$. 而 N_i 是相互独立的 Poisson.

故 O_j 是服从均值为 $\sum_{i<j} P_{ij} \lambda_i$ 的 Poisson

c). 由于 O_j 和 O_k 是相互独立的. 因此其联合分布.

$P(O_j = j, O_k = k) = P(O_j = j) P(O_k = k)$

其中 O_j 服从 Poisson$(\sum_{i<j} P_{ij} \lambda_i)$

O_k 服从 Poisson $(\sum_{i<k} P_{ik} \lambda_i)$.

2.16. 注意到. 结果 i 发生的次数服从参数为 $P_i\lambda$ 的 Poisson 分布. 且相互独立, 故 记 $I_i = \begin{cases} 1 & \text{结果 i 发生 j 次} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$, 从而

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} I_i$$

$$E[X_j] = \sum_{i=1}^{n} E[I_i] = \sum_{i=1}^{n} P(n_i = j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(P_i\lambda)^j}{j!} e^{-\lambda P_i}$$

而
$$\begin{aligned} Var[X_j] = Var[\sum_{i=1}^{n} I_i] &= \sum_{i=1}^{n} Var(I_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} E I_i^2 - (E I_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} E I_i (1 - E I_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(P_i\lambda)^j}{j!} e^{-\lambda P_i} \left(1 - \frac{(P_i\lambda)^j}{j!} e^{-\lambda P_i}\right) \end{aligned}$$

2.18. $f_{(U_{(1)},\cdots,U_{(n-1)}|U_{(n)})} = \dfrac{f(U_{(1)}=y_1, \cdots, U_{(n)}=y_n)}{f_{U_{(n)}}(y_n)}$

而 $f_{(U_{(1)},\cdots,U_{(n)})} = n!$

$F(U_{(n)} \le y) = F(U_1 \le y, \cdots, U_n \le y) = y^n$

故 $f_{U_{(n)}}(y) = n y^{n-1}$

从而. $f_{(U_{(1)},\cdots,U_{(n-1)}|U_{(n)}=y)} = \dfrac{n!}{n y^{n-1}} = \dfrac{(n-1)!}{y^{n-1}}$

故 $U_{(1)},\cdots,U_{(n-1)} \mid U_{(n)}=y$ 与 $(0,y)$ 上 $U_{(1)},\cdots U_{(n-1)}$ 分布相同.

2.19. 1) 记 $N_j(t)$ 是 t 时刻 搭载了 j 名乘客且完成服务的公交车数.

$X_j(t)$ 是上述对应公交车服务的总人数.

故 $E X(t) = E \sum_{j=1}^{\infty} X_j(t) = \sum_{j=1}^{\infty} E[X_j(t)]$

$= \sum_{j=1}^{\infty} E[E[X_j(t) \mid N_j(t)=n]]$

$= \sum_{j=1}^{\infty} E[N_j(t) \cdot j]$

$= \sum_{j=1}^{\infty} j\lambda\alpha_j \int_0^t G(y)\,dy$

2) 注意到. $j=2$ 时. $P(X_2(h)=1) = P(N_2(h)=1) \neq o(h)$

2.22. 假设一辆车在时刻 s 以速度 V 进入高速. 若 t 时刻它在

区间 $[a,b]$. 则应满足: $a \le V(t-s) \le b \Rightarrow \frac{a}{t-s} \le V \le \frac{b}{t-s}$

而 V 服从分布 F. 故满足上述要求的概率为. $F(\frac{b}{t-s}) - F(\frac{a}{t-s})$.

而 s 是 $(0,t)$ 中任一时刻. 故平均概率为 $\frac{1}{t}\int_0^t F(\frac{b}{t-s}) - F(\frac{a}{t-s})\,ds$.

故 汽车数量服从均值为 $\lambda \int_0^t F(\frac{b}{t-s}) - F(\frac{a}{t-s})\,ds$ 的 Poisson

2.29. 记 $P_0(s) = P(N(t+s) - N(t) = 0)$.

则 $P_0(s+h) = P(N(t+s+h) - N(t) = 0)$.

$= P(N(t+s+h) - N(t+s) = 0,\ N(t+s) - N(t) = 0)$

$$= (1-\lambda(t+s)h+o(h))\cdot P_0(s)$$

$$\Rightarrow \frac{P_0(s+h)-P_0(s)}{h} = -\lambda(t+s)P_0(s)+\frac{o(h)}{h}$$

$$P_0'(s) = -\lambda(t+s)P_0(s) \qquad P_0(0)=1$$

$$\Rightarrow P_0(s) = e^{-(m(t+s)-m(t))}$$ 满足条件.

对于 $P_n(s+h) = P(N(t+s+h)-N(t+h)=n)$

$$= P(N(t+s+h)-N(t+s)=0,\ N(t+s)-N(t)=n) + P(N(t+s+h)-N(t+s)=1,\ N(t+s)-N(t)=n-1) + o(h)$$

$$= (1-\lambda(t+s)h+o(h))\cdot P_n(s) + \lambda(t+s)h\,P_{n-1}(s) + o(h)$$

$$\frac{P_n(s+h)-P_n(s)}{h} = \lambda(t+s)P_n(s)+\lambda(t+s)P_{n-1}(s)+\frac{o(h)}{h}$$

$$P_n'(s) = \lambda(t+s)\,[P_n(s)+P_{n-1}(s)]$$

$$(e^{\lambda(t+s)}P_n(s))' = e^{\lambda(t+s)}\lambda(t+s)P_{n-1}(s).$$

$$e^{-\lambda(t+s)}P_n(s) = \int_0^s e^{\lambda(t+u)}\lambda(t+u)P_{n-1}(u)\,du + C.$$

可以由数学归纳法：$P_{n-1}(s) = \frac{(m(t+s)-m(t))^{n-1}}{(n-1)!}e^{-(m(t+s)-m(t))}$ 得.

2.30. $$P(T_1>t) = P(N(t)=0) = e^{-m(t)}$$

故 $P(T_1\le t) = 1-e^{-m(t)}$ $\qquad P(T_1=t)=\lambda(t)\cdot e^{-m(t)}$

$$P(T_2>t) = \int_0^\infty P(T_2>t\mid T_1=s)\cdot P(T_1=s)\,ds.$$

$$= \int_0^\infty P(0 \text{ event in } (s,s+t])\,P(T_1=s)\,ds.$$

$$= \int_0^\infty e^{-m(s+t)+m(s)}\cdot\lambda(s)\cdot e^{-m(s)}\,ds.$$

$$= \int_0^\infty \lambda(s)e^{-m(s+t)}\,ds.$$

$$P(T_2\le t) = 1-\int_0^\infty \lambda(s)e^{-m(s+t)}\,ds.$$

故 T_1，T_2 不相互独立. 且分布也不相同.

2.31. 我们令 $u_1=m^{-1}(t)$. $u_2=m^{-1}(t+h)$. 则

$N^*(t+h) - N^*(t) = N(\mu_1) - N(\mu_2)$.

而 $N(\mu_1) - N(\mu_2)$ 服从均值为 $\int_{\mu_1}^{\mu_2} \lambda(t)\,dt = \int_{m^{-1}(t)}^{m^{-1}(t+h)} dm(t) = h$

的 Poisson 分布.

而 $N^*(t)$ 的 Increments Independent 是显然的. 因此.

$N^*(t)$ 是 rate 为 1 的 Poisson Process.

2.37 假设 X_i 共有 k 个取值、分别为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$、则 对于每个 α_j. 给定时间 t, 取值次数可以看成一个 Poisson Process $N_j(t)$ with rate $\lambda P_j t$

且 N_j 之间相互独立. 故 $X(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i N_i(t)$.

而对于一个 Poisson 分布. $X \sim \pi(\lambda)$. 有.

$$Y = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

$$M_Y = E[\exp(t\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}})]$$

$$= \exp(-t\sqrt{\lambda}) \cdot \exp[\lambda(e^{\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}-1)].$$

$$= \exp(-t\sqrt{\lambda} + \lambda(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\frac{t}{\sqrt{\lambda}})^i}{i!} - 1)]$$

$$= \exp(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6\sqrt{\lambda}} + \cdots).$$

则当 $\lambda \to \infty$. $M_Y \to \exp(\frac{t^2}{2})$. 即 $Y \to N(0,1)$.

从而 $X \to N(\lambda, \lambda)$.

故 Poisson 渐近正态.

进而 $X(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i N_i(t)$ 渐近正态. $t \to \infty$.

2.39. 当 $s \le t$ 时 $Cov(X(s), X(t)) = Cov(X(s), X(t) - X(s) + X(s))$

$$= Cov(X(s), X(t) - X(s)) + Cov(X(s), X(s))$$

$$= Var(X(s)) = \lambda s EX^2$$

当 $s > t$ 时. $Cov(X(s), X(t)) = Cov(X(s) - X(t), X(t)) + Cov(X(t), X(t))$

$= Var(X(t)) = \lambda t\, EX^2$

#