5.1. 记 (n,m) 为 n 个 male. m 个 female.

而 $q((n,m),(n,m+1))$ 为从 (n,m) 状态转移到 $(n,m+1)$ 的速率.

$q((n,m),(n,m+1)) = C_n^1 \cdot C_m^1 \cdot \lambda \times \frac{1}{2} = \frac{nm\lambda}{2}$

同理: $q((n,m),(n+1,m)) = C_n^1 C_m^1 \cdot \lambda \times \frac{1}{2} = \frac{nm\lambda}{2}$

5.2. 我们记 $N_A(t)$ 为 t 时刻 A 状态有机体数量

$N_B(t)$ 为 t 时刻 B 状态有机体数量.

则 $\{(N_A(t), N_B(t))\}$ 为一个 CTMC.

则 $q[(n,m),(n-1,m+1)] = C_n^1 \cdot \alpha = \alpha n$.

$q[(n,m),(n+2,m-1)] = C_m^1 \cdot \beta = \beta m$.

5.3. 注意到 $v_i < M$. 则可以定义一个 CTMC. $\{\tilde{N}(t)\}$. 其 $v_i = M$. $\forall i$

则相较于 $\{N(t)\}$. $\{\tilde{N}(t)\}$ 的相对转移速度较快, 故.

故 $N(t) \geq n \Rightarrow \tilde{N}(t) \geq n$

而 $\tilde{N}(t)$ 是一个参数为 M 的 Poisson Process.

故 $P(N(t) \geq n) \leq P(\tilde{N}(t) \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(Mt)^k}{k!} e^{-Mt}$

故对于固定 t, $n \to \infty$. $P(N(t) \geq n) \to 0$

即在有限时间段内只有有限次转移. regular.

5.4. 注意到. $P(X(t+h) = n+1 \mid X(t) = n) = \lambda n h + o(h)$.

$P(X(t+h) = n \mid X(t) = n) = 1 - \lambda n h + o(h)$.

故记 T_i 是 $(i-1)$st birth 到 ith birth 的时间.

则 $T_i \sim \exp(\lambda i)$.

从而 $E[\sum_{i=0}^{n} T_i \mid n = N-1] = \sum_{i=1}^{N-1} E[T_i] = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{\lambda i}$

而 $Var(\sum_{i=0}^{n} T_i \mid n=N-1) = \sum_{i=1}^{N-1} Var(T_i) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{\lambda_i^2}$

而 $\phi(t) = E[e^{t(\sum_{i=0}^{n} T_i \mid n=N-1)}] = \prod_{i=1} E[e^{tT_i}]$

$$= \prod_{i=1} \int_0^\infty e^{tx} \cdot \lambda_i e^{-\lambda_i x} dx$$

$$= \prod_{i=1} \frac{\lambda_i}{t-\lambda_i} e^{(t-\lambda_i)x} \Big|_0^\infty$$

$$= \prod_{i=1} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - t} \quad (t < \min\{\lambda_i\}).$$

5.10 a). 由于 $P(t) = P_{00}(t)$. 故 $1-P(t) = 1-P_{00}(t)$ 为跳出状态 0 的概率. 从而 $\lim_{t\to 0} \frac{1-P(t)}{t} = \nu_0$ 为转移出 state 0 的速率.

b). $P(t)P(s) = P_{00}(t)P_{00}(s)$

而 $P(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{0k}(t) P_{k0}(s)$.

故 $P(t)P(s) \leq P(t+s)$.

而 $P(t+s) = P_{00}(t)P_{00}(s) + \sum_{k=1}^{\infty} P_{0k}(t)P_{k0}(s)$

$$\leq P(t)P(s) + \sum_{k=1}^{\infty} P_{k0}(s).$$

$$= P(t)P(s) + 1 - P_{00}(s)$$

$$= 1-P(s) + P(t)P(s).$$

c). 由 b) 知.

$$P(t-s)P(s) \leq P(t) \leq 1-P(t-s) + P(t-s)P(s)$$

故 $P(s)(P(t-s)-1) \leq P(t)-P(s) \leq (P(s)-1)(P(t-s)-1)$

注意到 $P(s)\cdot(P(t-s)-1) < 0$. 故

$$P(s)(P(t-s)-1) > P(t-s)-1$$

而 $(P(s)-1)(P(t-s)-1) \geq 0$. 故

$$(P(s)-1)(P(t-s)-1) \leq 1-P(t-s)$$

从而 $|P(t)-P(s)| \leq 1-P(t-s)$

而 $\lim_{t\to s} |P(t)-P(s)| \leq \lim_{t\to s} (1-P(t-s))$

$= 1 - P_{00}(0) = 0$.

故. P 连续.

5.12. 我们可以定义一个 Reward Renewal Process. 更新点是每次进 state 0，则一次更新间隔 X 包括了从 $0 \to 1$ 的时长，记为 X_0，和 $1 \to 0$ 的时长、记为 X_1. 则 $X = X_0 + X_1$，而 $X_0 \sim \exp(\lambda)$，$X_1 \sim \exp(\mu)$.

而在 X 中. 记 Reward 为 events 发生的次数. 则.在 X_0 上 $R_0 \sim$ Poisson (α_0)、X_1 上 $R_1 \sim$ Poisson (α_1).

故 $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{ER}{EX}$.

而 $EX = EX_1 + EX_0 = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$

$$ER = E[R_0] + E[R_1]$$
$$= E[E[R_0 | X_0]] + E[E[R_1 | X_1]]$$
$$= E[\alpha_0 X_0] + E[\alpha_1 X_1] = \frac{\alpha_0}{\lambda} + \frac{\alpha_1}{\mu}$$

故 $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{\alpha_0\mu + \alpha_1\lambda}{\lambda+\mu}$

b). $E[N(t)] = E[R(t)] = E[E[R_0 | X_0 = t']] + E[E[R_1 | X_1 = t - t']]$

$$= \alpha_0 E[X_0 = t'] + \alpha_1 (t - E[X_0 = t'])$$
$$= (\alpha_0 - \alpha_1) E[X_0 = t'] + \alpha_1 t$$
$$= \alpha_1 t + (\alpha_0 - \alpha_1) \int_0^t P_{00}(s)\, ds$$

而 $P_{00}'(s) = -(\lambda+\mu) P_{00}(s) + \mu$，$P_{00}(0) = 1$

故. $P_{00}(s) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)s}$

从而代入可得

$$E[N(t)] = \alpha_1 t + \frac{\mu t}{\lambda+\mu}(\alpha_0 - \alpha_1) + \frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}(\alpha_0 - \alpha_1)\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$$

5.13. 注意到在 state i 处.

$P_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}$ ，故前 k 个事件都是 birth 的概率.

$$P = \prod_{n=i}^{i+k-1} P_{n,n+1} = \prod_{n=i}^{i+k-1} \frac{\lambda_n}{\lambda_n+\mu_n}$$

5.22. M/M/s 是一个生灭过程，其参数如下：

$$\lambda_n = \lambda . \qquad \mu_n = \begin{cases} \mu s & n>s \\ \mu n & n\le s \end{cases}$$

而对于生灭过程而言，其极限概率有：

$$\theta_0 = 1. \qquad \theta_j = \frac{\lambda_0\cdot\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\cdot\mu_2\cdots\mu_j} = \begin{cases} \frac{\lambda^j}{j!\,\mu^j} & n\le s \\ \frac{\lambda^j}{s!\,s^{j-s}\,\mu^j} & n>s \end{cases}$$

$$故 \sum_{k=0}^{\infty}\theta_k = 1+\sum_{k=1}^{s}\frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k}+\sum_{k=s+1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{s!\,s^{k-s}\mu^k}$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\cdot\frac{1}{k!}+\frac{s^s}{s!}\sum_{k=s+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)^k$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}\theta_k} . \qquad P_j = \theta_j P_0 .$$

而存在的条件是 $\frac{\lambda}{\mu s} < 1$

5.23. 由于 $X(t)$、$Y(t)$ 都是 time-reversible MC. 故有

$$P_i^X q_{ij}^X = P_j^X q_{ji}^X \qquad P_i^Y q_{ij}^Y = P_j^Y q_{ji}^Y$$

而对于 $(X(t), Y(t))$ 而言

$P_{(i,j)} = P_i^X P_j^Y$ 由于 $X(t)$、$Y(t)$ 相互独立.

而 $q_{(i,j)\to(i',j')} = q_{ii'}^X q_{jj'}^Y$ ，同样由于 $X(t)$、$Y(t)$ 相互独立.

(即可以看成两个独立的 CTMC 各自进行转移).

从而 $P_{(i,j)}\, q_{(i,j)\to(i',j')} = q_{ii'}^X q_{jj'}^Y P_i^X P_j^Y$

$= P_{i'}^X q_{i'i}^X P_{j'}^Y q_{j'j}^Y = P_{(i',j')}\, q_{(i',j')\to(i,j)}$.

从而 $(X(t), Y(t))$ 也是 Time-Reversible MC.

5.24. 由 5.22) 知. 当 $S=1$ 时. $P_j = (\frac{\lambda}{\mu})^j (1-\frac{\lambda}{\mu})$.

由 5.23 知. $P(n,m) = \dfrac{(\frac{\lambda_1}{\mu_1})^n}{\sum_{i=0}^{N}(\frac{\lambda_1}{\mu_1})^N} \quad \dfrac{(\frac{\lambda_2}{\mu_2})^m}{\sum_{i=1}^{N}(\frac{\lambda_2}{\mu_2})} \quad m+n = 0, 1, \cdots, N$

5.21. 可以看成是 $M/M/1$ 模型. 其中 $\lambda = \begin{cases} (2-n)\frac{1}{3} & n \le 2 \\ 0 & n > 2 \end{cases}$ $\mu = \frac{1}{4}$. 且

因此 $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = \dfrac{\lambda_0}{\mu_1} = \dfrac{8}{3}$, $\theta_2 = \dfrac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} = \dfrac{32}{9}$

故 $P_0 = \dfrac{9}{65}$, $P_1 = \dfrac{24}{65}$ $P_2 = \dfrac{32}{65}$

a) 平均顾客数 : $\dfrac{24}{65} + \dfrac{64}{65} = \dfrac{88}{65}$

b) 顾客进入商店的概率为 $\dfrac{33}{65}$

c) 如果 barber 工作速度变为 $\frac{1}{8}$. 则.

$\theta_0 = 1$, $\theta_1 = \dfrac{16}{3}$. $\theta_2 = \dfrac{128}{9}$

则 $P_0 = \dfrac{9}{185}$, $P_1 = \dfrac{48}{185}$, $P_2 = \dfrac{128}{185}$

则 平均顾客数为: $\dfrac{304}{185}$