生产的两个最优化问题

利润最大化和成本最小化

- 假设存在L种商品，价格向量可以表示为 $p=(p_1,\ldots,p_L)\gg 0$

这些价格独立于企业的生产计划，即企业也是价格的接受者

- 假设企业的生产集Y是非空的、闭的和满足自由处置性。

- 利润最大化（PMP）：给定价格向量p和生产向量y，企业执行生产计划y产生的利润为p·y，最大化p·y的问题。
- 成本最小化（CMP）：给定投入物的价格向量w和产出向量q，用z表示投入物向量，最小化成本w·z的问题。

利润最大化问题

- **在给定价格向量$p \gg 0$和生产向量$y \in \mathbb{R}^L$，企业执行生产计划y产生的利润为：$p \cdot y = \sum_{l=1}^{L} p_l y_l$**
  - 正的y_l表示产出，负的y_l表示投入，因此利润就是总收入减去总成本。
  - 给定生产集Y代表的生产技术约束，企业的利润最大化问题（Profit Maximization Problem，PMP）的问题为：

$$\max_{y} \; p \cdot y$$
$$\text{s.t.} \quad y \in Y.$$

利润最大化问题

- 由于转换函数相当于生产集在是实数集上的映射，因此，可以用转换函数F(·)来描述生产集Y，这样PMP问题就可以等价的表示为：

$$\begin{aligned}&\operatorname*{Max}_{y}\ p\cdot y\\&\qquad \text{s.t. } F(y)\le 0.\end{aligned}$$

利润最大化问题

- **利润函数**
  - 给定生产集Y和价格向量p，企业的**利润函数**为利润最大化问题的最优函数值：

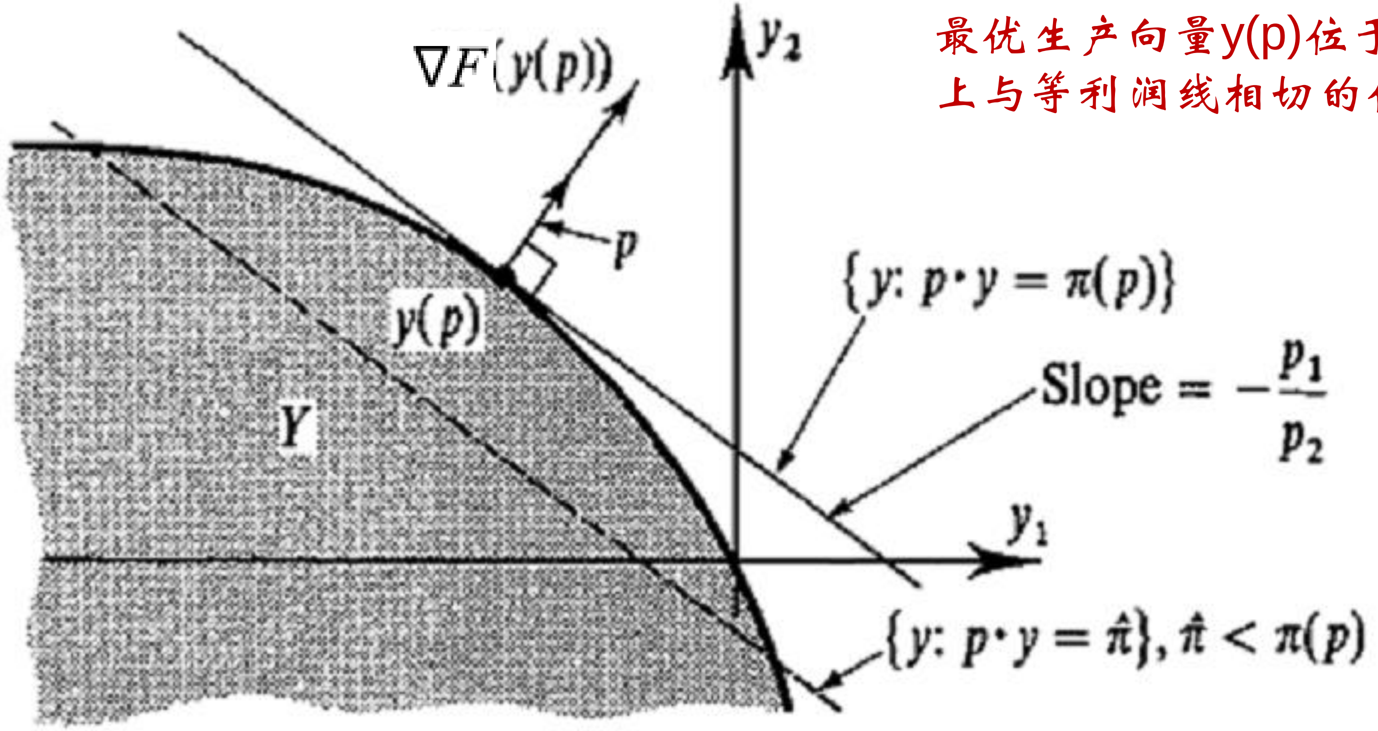
$$\pi(p)=\mathrm{Max}\{p\cdot y: y\in Y\}$$

- **供给对应**
  - 企业在价格向量p下的**供给对应**y(p)为使得利润最大化的生产向量组成的集合。

$$y(p)=\{y\in Y: p\cdot y=\pi(p)\}$$

利润最大化问题

- 凸生产集Y和利润最大化的供给
  - **等利润线**：这条直线上所有点产生的利润是相等的



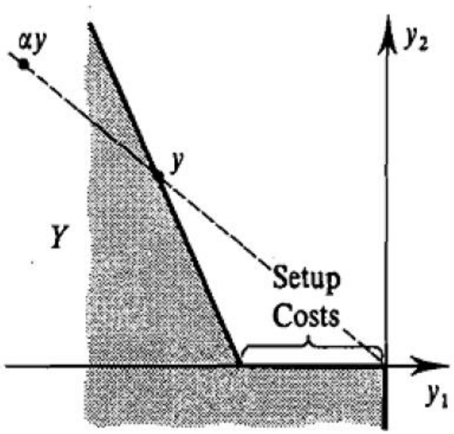
最优生产向量y(p)位于生产集右上与等利润线相切的位置。

利润最大化问题

- **一般来说，y(p)可能是个集合而不是单个向量**
- **同时，也可能不存在利润最大化的生产向量**
  - 假设L=2，企业是规模报酬不变的：使用每单位投入（商品1）可以产生一单位产品（商品2）。
  - 那么当$p_2 \le p_1$时，$\pi(p)=0$。但是如果$p_2 > p_1$，那么企业的利润为$(p_2-p_1)y_2$，其中y_2是商品2的产量。那么，只要让y_2任意大，则利润也任意大。即$\pi(p)=+\infty$。
  - 该价格体系使得利润不存在上界。

利润最大化问题

- **如果生产集Y是规模报酬非减的，那么要么 $\pi(p)\le 0$ 要么 $\pi(p)=+\infty$**
  - 随着投入物的增加，产出物增加更大的比例
  - 在某些价格体系下，最大利润为0
  - 在某些价格体系下，总可以通过多生产获得更高的利润



利润最大化问题

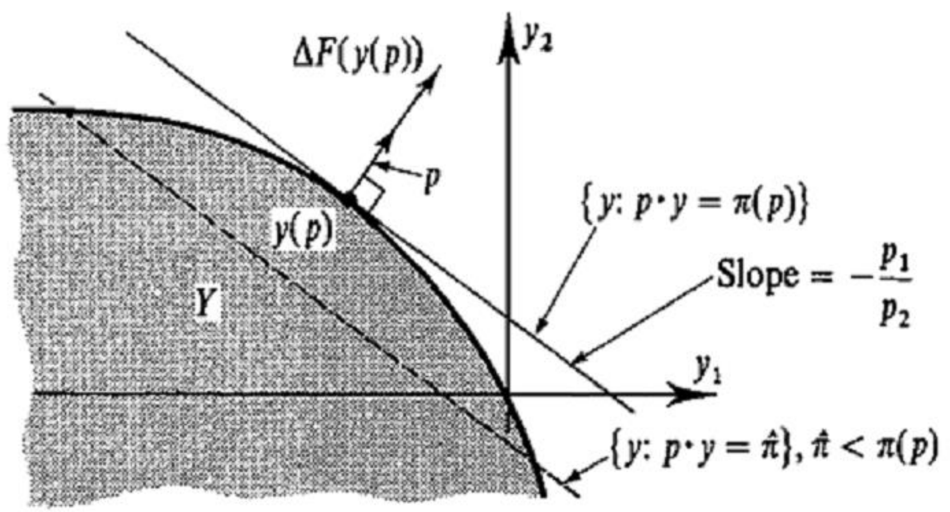
- 利润最大化的条件
  - 如果F(·)是可微的，类似于UMP问题，可以使用一阶条件来刻画PMP的解。
    - 如果 $y^* \in y(p)$，那么对于某个 $\lambda \geq 0$，y^*必定满足一阶条件：

$$p_l = \lambda \frac{\partial F(y^*)}{\partial y_l} \quad \text{对于 } l = 1,\dots,L \text{ 成立} \qquad\qquad p = \lambda \nabla F(y^*)$$

    - 也就是说，价格向量p和F(p*)的梯度向量是成比例的。
    - 因此，$p_l / p_k = MRT_{lk}(y^*)$对于所有的l，k都成立

利润最大化问题

- 利润最大化的条件
  - 对于L=2，在利润最大化的生产计划上，转换边界的斜率等于价格比率的相反数。
    - 否则，企业生产计划的微小变动都会导致利润增加。



利润最大化问题

- 只有一种产出物的情况
  - 当只有一种产出物时，假设Y对应着可微的生产函数f(z)，企业的决策就可以视为他在投入水平z上的选择决策。
    - 令p>0表示企业产品的价格，$w \gg 0$表示它的投入物的价格。
    - 给定(p,w)，利润最大化问题可以表示为：

$$\underset{z \geq 0}{\text{Max}}\ pf(z) - w \cdot z$$

    - 如果z*是最优解，那么z*必定满足一阶条件：$p\dfrac{\partial f(z^*)}{\partial z_l} \leq w_l$
      - 其中l=1,...,L-1，$z_l^* > 0$。
      - 一阶条件也可以用矩阵符号表示：$p\nabla f(z^*) \leq w$

利润最大化问题

- 只有一种产出物的情况
  - 对于内部最优解（非边角解的情况），可以得到利润最大化的条件：$p\nabla f(z^*)-w=0$
    - 也就是说，实际使用的每种投入物l的边际产品，必定等于该投入物的价格 w_l/p ，这个是被产品价格标准化之后的投入物价格。
    - 对于满足 $(z_l^*,z_k^*)\gg 0$ 的任何两种投入物l和k来说，利润最大化的条件也意味着 $MRTS_{lk}=w_l/w_k$ ，也就是说，两种投入物之间的边际技术替代率等于它们的价格之比
      - 这一价格之比刚好可以衡量这两种投入物在经济上的替代率。

利润最大化问题

- **如果生产集Y是凸的，那么无论是使用F(·)还是使用f(·)表示的一阶条件，不仅是确定PMP的解的必要条件，而且是充分条件。**
  - 也就是说，只要满足一阶条件，必定为PMP的解
  - PMP的解，必定满足一阶条件

利润最大化问题

- **利润函数和供给对应的性质**
  - 假设$\pi(\cdot)$是生产集Y的利润函数，y(·)是与该利润函数相伴的供给对应。假设Y是闭的且满足自由处置性质。那么利润函数和供给对应满足以下性质：
    - 1. y(·)是零次齐次的
      - 投入物和产出物价格都变为原来的k倍，对最优产出向量没有影响
    - 2. $\pi(\cdot)$是一次齐次的
      - 利润函数是价格向量与生产向量的内积，因此，当价格向量变为原来的k倍，利润也变为原来的k倍

利润最大化问题

- 利润函数和供给对应的性质
  - 3. $\pi(\cdot)$ 是凸的
    - 假设 $y \in y(\alpha p + (1-\alpha)p')$

$$\pi(\alpha p + (1-\alpha)p') = \alpha p \cdot y + (1-\alpha)p' \cdot y \le \alpha\pi(p) + (1-\alpha)\pi(p')$$。

利润最大化问题

- 利润函数和供给对应的性质
  - 4. 如果Y是凸的，那么

$$Y=\{y\in\mathbb{R}^L: p\cdot y\le\pi(p)\text{对于所有}\ p\gg 0\ \text{成立}\}$$

- 即，如果Y是闭的、凸的而且满足自由处置性质，那么利润函数$\pi(p)$提供了另一种对偶的描述技术的方式。
- 与使用间接效用函数代表偏好，或利用支出函数代表支出类似，与Y相比，使用 $\pi(p)$ 描述生产技术相对简洁，因为利润函数取决于价格定义和价格接受行为的定义。

利润最大化问题

- **利润函数和供给对应的性质**
  - 5. 如果Y是凸的，那么对于所有的p，y(p)是个凸集。如果Y是严格凸的，那么y(p)在非空的情况下是单值的。

利润最大化问题

- **利润函数和供给对应的性质**
  - 6. 如果 $y(\bar{p})$ 是个单点集，那么 $\pi(\cdot)$ 在 $\bar{p}$ 点可微，且满足：

$$\nabla \pi(\bar{p}) = y(\bar{p})$$

  - ——霍特林引理
    - 即只要知道利润函数 $\pi(p)$，就可以立即计算出供给对应
    - 这一性质将*供给行为和利润行为的导数*关联起来了。

利润最大化问题

- 利润函数和供给对应的性质
  - 7. 如果y(·)是个在p点可微的函数，那么 $Dy(\bar{p}) = D^2\pi(\bar{p})$是个对称的和正半定矩阵，且 $Dy(\bar{p})\bar{p} = 0$。
    - 矩阵的正半定性，可由利润函数的凸性推出。
    - Dy(p)的正半定性是**供给法则**的一般数学表达式，即*供给量和价格同方向变动*。
      - 如果某种产出品的价格上升（所有其他价格维持不变），那么该产出品的供给量增加；
      - 反之，如果某种投入物价格上升，那么该投入物的需求下降

利润最大化问题

- **利润函数和供给对应的性质**
  - 供给法则
    - 供给法则对于任何价格变化都成立。因为，与需求理论不同，供给不存在预算约束，也不存在任何类型的补偿要求，因此，不存在财富效应，仅存在替代效应。
    - 供给法则的非微分形式可以表达为：对于所有的p和p′，且 $y \in y(p)$ 和 $y' \in y(p')$，有：$(p-p')\cdot(y-y') \geq 0$

利润最大化问题

- 利润函数和供给对应的性质
  - 供给法则
    - 从显示性偏好的角度考虑供给法则

$$(p-p')\cdot(y-y')=(p\cdot y-p\cdot y')+(p'\cdot y'-p'\cdot y)\geq 0$$

    - 由于 $y\in y(p)$ 且 $y'\in y(p')$，即给定价格p，y是利润最大化的，所以上述不等式成立。

利润最大化问题

- **利润函数和供给对应的性质**
  - 供给替代矩阵
    - y(p)的导数矩阵Dy(p)可称为供给替代矩阵，它的性质类似于需求理论中替代矩阵的性质，但是符号相反。
      - 自身的替代效应是非负的，即对于所有的l，都有 $\partial y_l(p)/\partial p_l \geq 0$
      - 替代效应是对称的。

成本最小化问题

- **企业选择利润最大化生产计划的一个重要含义是，不存在以更低的总投入成本去生产该产量的方法。**
- **因此，成本最小化是利润最大化的一个必要条件。**
  - 成本最小化可以产生在技术方法上非常有用的结果。当生产集是规模报酬非减的，成本最小化问题（维持产出不变）的最优值函数和最优解，比PMP的利润函数和供给对应的表现更好。
  - 如果企业在产出品市场上不是价格的接受者，利润函数的分析将失效，但是只要投入物市场上他们是价格接受者，成本最小化问题的结果依旧有效。

成本最小化问题

- 单一产出的情况
  - 令z表示投入物的非负向量，f(z)表示生产函数，q表示产出量，$w \gg 0$表示投入物价格向量。
  - 成本最小化问题（Cost Minimization Problem，CMP）可以表述为：

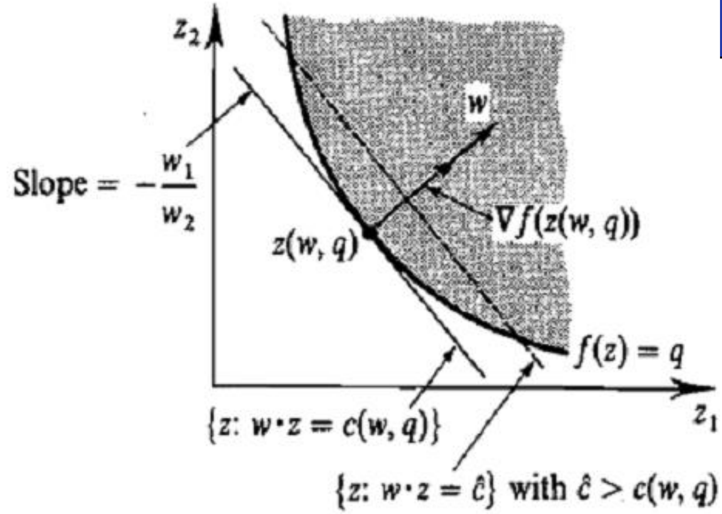
$$\underset{z \geq 0}{\text{Min}}\ w \cdot z$$

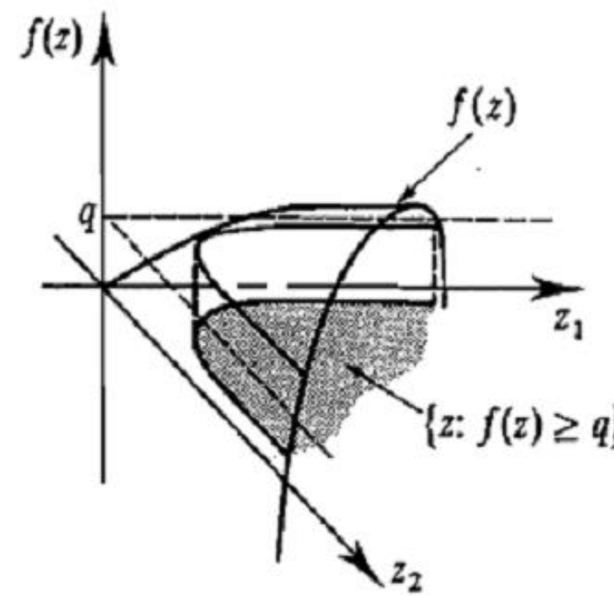
$$\text{s.t. } f(z) \geq q.$$

    - CMP的最优值由**成本函数**c(w,q)给出，相应的最优投入物（或要素）选择集z(w,q)称为**条件要素需求对应**（或带有附加条件的要素需求对应，条件为产量水平为q）

成本最小化问题

- 单一产出的情况
  - 两种投入物的情况
    - 阴影区域表示至少能生产产量q的投入物向量集合。
      - 它是至少生产产量q的那部分生产集Y在投入物空间第一象限中的投影
      - z(w,q)这个最优解位于等成本线与集合$\{z \in \mathbb{R}_+^L : f(z) \geq q\}$相交的最接近于原点的点上。





成本最小化问题

- **成本最小化的条件**
  - 如果z^*在CMP中是最优的，而且如果生产函数f(·)是可微的，那么对于某个$\lambda \geq 0$，下列一阶条件必定对于每个投入物l=1,...,L-1成立。

$$w_l \geq \lambda \frac{\partial f(z^*)}{\partial z_l}$$

    - 在$z_l^* > 0$时，等式成立。
    - 或写成矩阵符号的表示：$w \geq \lambda \nabla f(z^*)$ 或 $[w - \lambda \nabla f(z^*)] \cdot z^* = 0$.

成本最小化问题

成本最小化的条件

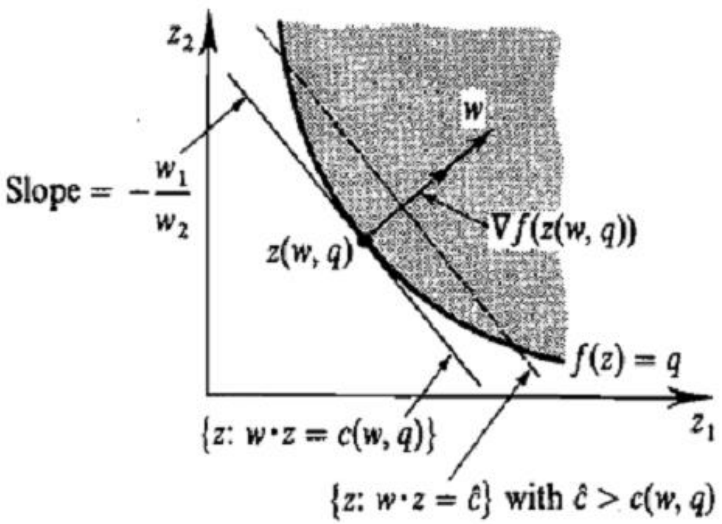
- 与利润最大化问题一样，如果生产集Y是凸的，对应于只有单一产出物的情况就是生产函数f(·)是凹的，那么条件：

$$w \geq \lambda \nabla f(z^*) \quad 和 \quad [w - \lambda \nabla f(z^*)] \cdot z^* = 0.$$

- 不仅是z^*是CMP最优解的必要条件，也是充分条件。

成本最小化问题

- 成本最小化的条件
  - 与利润最大化问题的条件类似，成本最小化问题的条件意味着对于任何满足$(z_l, z_k) \gg 0$的投入物l和k，我们都：$MRTS_{lk} = w_l / w_k$ 。
    - 对于L=3，这就意味着与既定产量水平q相伴的等产量线在z*点的斜率，恰好等于投入物价格比值的相反数 $-w_1 / w_2$



成本最小化问题

- 成本最小化的条件
  - 类似于效用最大化问题，这里的拉格朗日乘子可以解释为放松约束条件$f(z^*)\geq q$时的边际价值，因此，拉格朗日乘子等于边际生产成本 $\partial c(w,q)/\partial q$

成本最小化问题

- **成本最小化的条件**
  - 生产理论与消费理论有很强的类似性
    - 将$f(\cdot)$，q和z分别替换为$u(\cdot)$，u和x，即把生产函数解释为效用函数，那么成本最小化问题CMP就变为支出最小化问题EMP

成本最小化问题

- **成本函数和条件要素需求对应的性质**
  - 假设c(w,q)是与单一产品生产技术Y的生产函数f(·)相伴的成本函数，z(w,q)是相应的条件要素需求对应。再假设Y是闭的且满足自由处置性质。那么：
    - 1. c(·)关于w一次齐次，关于q非减
    - 2. c(·)是w的凹函数
    - 3. 如果集合 $\{z \geq 0 : f(z) \geq q\}$ 关于每个q都是凸的，那么：

$$Y = \{(-z, q) : w \cdot z \geq c(w, q) \text{ 对于所有 } w \gg 0 \text{ 成立}\}$$

    - 4. z(·)关于w是零次齐次的。

成本最小化问题

- **成本函数和条件要素需求对应的性质**
  - 5. 如果集合$\{z\geq 0: f(z)\geq q\}$是凸的，那么z(w,q)是个凸集，而且，如果$\{z\geq 0: f(z)\geq q\}$是严格凸的，那么z(w,q)是单值的。
  - 6. 如果$z(\bar{w},q)$是单点集，那么c(·)关于$\bar{w}$可微而且满足

$$\nabla_w c(\bar{w},q)=z(\bar{w},q)$$

    - ——谢波特引理
  - 7. 如果z(·)在$\bar{w}$点是可微的，那么$D_w z(\bar{w},q)=D_w^2 c(\bar{w},q)$是个对称的、负半定的矩阵而且满足$D_w z(\bar{w},q)\bar{w}=0$。
  - 8. 如果f(·)是一次齐次的，那么c(·)和z(·)关于q都是一次齐次的。
  - 9. 如果f(·)是凹的，那么c(·)是q的凸函数（边际成本关于q非减）

成本最小化问题

- **成本函数和条件要素需求对应的性质**
  - 当生产集是规模报酬不变类型时，在允许某些价格向量上，y(·)都不是单值的，从而使得前面的霍特林引理（$\nabla\pi(\bar{p})=y(\bar{p})$）在这些价格上不再成立。
  - 但是，在这种情况下，条件要素需求仍可能是单值的，所以我们可以继续使用谢波特引理（$\nabla_w c(\bar{w},q)=z(\bar{w},q)$）。
  - 因此，在生产集是规模报酬不变类型时，成本函数更有用。

成本最小化问题

- 成本函数和条件要素需求对应的性质
  - 但是，成本函数与利润函数含有的信息是一致的。

（iii）如果 Y **是凸的，那么** $Y=\{y\in\mathbb{R}^L: p\cdot y\le\pi(p)$ **对于所有** $p\gg 0$ **成立**$\}$

（iii）如果集合 $\{z\ge 0: f(z)\ge q\}$ **关于每个** q **都是凸的，那么** $Y=\{(-z,q): w\cdot z\ge c(w,q)$ **对于所有** $w\gg 0$ **成立**$\}$**。**

- 也就是说，在凸性条件下，利润函数和成本函数之间存在着某种对应，使用这两个函数中的任一个函数，我们都能够还原生产集，也就能够推导出另外一个函数。

成本最小化问题

- 成本函数
  - 使用成本函数，我们可以将企业的利润最大化决策问题重新表述为：$\underset{q\geq 0}{\text{Max}}\ pq-c(w,q)$
    - q^*是利润最大化产量的必要一阶条件为：

$$p-\frac{\partial c(w,q^*)}{\partial q}\leq 0$$

      - 其中等式在$q^*>0$时成立。
      - 也就是说，在内部解（$q^*>0$）上，价格等于边际成本。如果成本函数关于q是凸的，那么一阶条件也是q^*为最优的充分条件。

成本最小化问题

- 成本函数
  - 实例：柯布-道格拉斯生产函数的利润函数和成本函数
    - 柯布-道格拉斯生产函数 $f(z_1,z_2)=z_1^{\alpha}z_2^{\beta}$
      - 其中 $\alpha+\beta$ 的值等于1，小于1和大于1分别对应着规模报酬不变、规模报酬递减和规模报酬递增的情形。

$$z_1(w_1,w_2,q)=q^{1/(\alpha+\beta)}(\alpha w_2/\beta w_1)^{\beta/(\alpha+\beta)},$$

$$z_2(w_1,w_2,q)=q^{1/(\alpha+\beta)}(\beta w_1/\alpha w_2)^{\alpha/(\alpha+\beta)},$$

$$c(w_1,w_2,q)=q^{1/(\alpha+\beta)}[(\alpha/\beta)^{\beta/(\alpha+\beta)}+(\alpha/\beta)^{-\alpha/(\alpha+\beta)}]w_1^{\alpha/(\alpha+\beta)}w_2^{\beta/(\alpha+\beta)}$$

成本最小化问题

- **成本函数** $c(w_1,w_2,q)=q^{1/(\alpha+\beta)}[(\alpha/\beta)^{\beta/(\alpha+\beta)}+(\alpha/\beta)^{-\alpha/(\alpha+\beta)}]w_1^{\alpha/(\alpha+\beta)}w_2^{\beta/(\alpha+\beta)}$
  - 实例：柯布-道格拉斯生产函数的利润函数和成本函数
    - 这个成本函数可以简写成：$c(w_1,w_2,q)=q^{1/(\alpha+\beta)}\theta\phi(w_1,w_2)$
    - 其中，$\theta=[(\alpha/\beta)^{\beta/(\alpha+\beta)}+(\alpha/\beta)^{-\alpha/(\alpha+\beta)}]$ 是个常数；

      $\phi(w_1,w_2)=w_1^{\alpha/(\alpha+\beta)}w_2^{\beta/(\alpha+\beta)}$ 是个不依赖于产出水平q的函数。
      - 当规模报酬不变时，$\theta\phi(w_1,w_2)$是每单位产品的生产成本。

成本最小化问题

- 成本函数
  - 实例：柯布-道格拉斯生产函数的利润函数和成本函数
    - 如何得到它的供给函数和利润函数？
    - ——使用成本函数求解 $\underset{q \geq 0}{\text{Max}}\ pq - c(w,q)$
      - 这个问题的一阶条件为：

$$p - \frac{\partial c(w,q^*)}{\partial q} \leq 0$$

$$p \leq \theta\phi(w_1,w_2)\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)q^{(1/(\alpha+\beta))-1}$$

      - 其中等式在q>0时成立

成本最小化问题

- 成本函数
  - 实例：柯布-道格拉斯生产函数的利润函数和成本函数

$$p \le \theta\phi(w_1,w_2)\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)q^{(1/(\alpha+\beta))-1}$$

    - 当 $\alpha+\beta\le 1$ 时，企业的成本函数关于q是凸的，因此一阶条件是最大值的充要条件。
      - 当 $\alpha+\beta<1$ 时，使用一阶条件可求出唯一的最优产量水平：

$$q(w_1,w_2,p)=(\alpha+\beta)[p/\theta\phi(w_1,w_2)]^{(\alpha+\beta)/(1-\alpha-\beta)}.$$

        - 通过变量替换就可以得到要素需求及利润函数

$$z_l(w_1,w_2,p)=z_l(w_1,w_2,q(w_1,w_2,p)) \quad 其中\ l=1,2$$

$$\pi(w_1,w_2,p)=pq(w_1,w_2,p)-w\cdot z(w_1,w_2,q(w_1,w_2,p))$$

成本最小化问题

- **成本函数**
  - 实例：柯布-道格拉斯生产函数的利润函数和成本函数

$$p \le \theta\phi(w_1, w_2)\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)q^{(1/(\alpha+\beta))-1}$$

    - 当$\alpha+\beta=1$时，一阶条件的右侧变为$\theta\phi(w_1, w_2)$，即单位生产成本，且独立于产量q。
      - 如果$\theta\phi(w_1, w_2)$大于p，那么最优产量为$q^*=0$；
      - 如果$\theta\phi(w_1, w_2)$小于p，那么不存在最优产量，即在这种情况下，利润随着q的增大而增大，利润无上界；
      - 如果$\theta\phi(w_1, w_2)$等于p，任何非负产量水平都是最优的，在这种情况下利润为零。

成本最小化问题

- 成本函数
  - 实例：柯布-道格拉斯生产函数的利润函数和成本函数

$$p \le \theta\phi(w_1, w_2)\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)q^{(1/(\alpha+\beta))-1}$$

- 当$\alpha+\beta>1$时，规模报酬递增，满足一阶条件的产量q并不是利润最大化的产量。

在规模报酬递增的情况下，利润最大化问题无解

  - 由于p>0，从任何产量q开始，将产量翻番变为2q，那么企业的收入也翻番，但成本增加的比例却是小于2倍的，也就是说成本没有翻到一番。不停的翻番，企业利润就不停变大，直至无穷大。