第二章　消费者选择与需求理论

消费者需求理论

支出最小化问题

支出最小化问题（Expenditure Minimization Problem，**EMP**）是研究：在给定 $p \gg 0$ 且 $u > u(0)$ 的情况下，求解最小支出的问题。

UMP计算的是在既定财富水平w下能达到的最大效用水平，而EMP计算的是能达到效用水平u所需要的最小的财富水平。

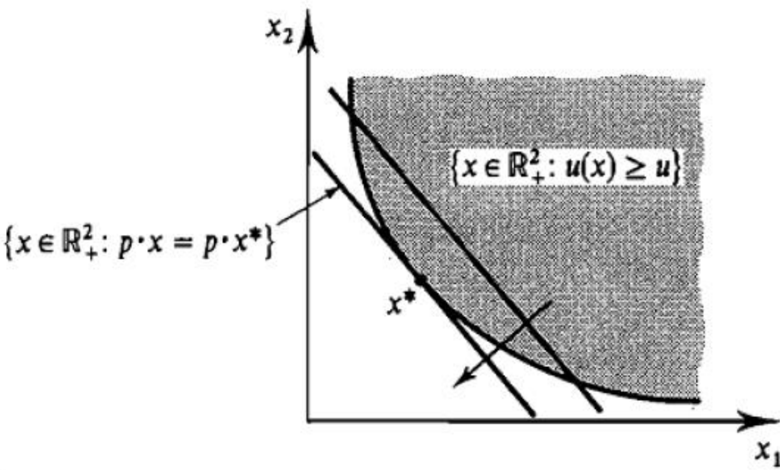
——EMP与UMP是**对偶问题**：EMP描述的消费者目标和UMP是相同的，都是为了有效率的使用他的购买力。但是EMP将UMP下的目标函数和约束条件互换了。

即EMP的目标函数为UMP的约束条件，而EMP的约束条件为UMP的目标函数。

消费者需求理论

支出最小化问题

假设u(·)是一个用来表示定义在消费集$\mathbb{R}_+^L$ 上的局部非饱和偏好关系$\succsim$ 的连续性的效用函数。



对于L=2的情况，最优消费束 x^* 是能让消费者达到效用水平u，但支出最小的消费束。

从图上说，它是$\{x \in \mathbb{R}_+^L : u(x) \geq u\}$中的一点，该点的准确位置是位于与价格向量p相伴的最低可能的预算线上。

消费者需求理论

支出最小化问题

UMP与EMP的关系

命题 3.E.1：假设定义在消费集 $X=\mathbb{R}_{+}^{L}$ **上的局部非饱和偏好关系** $\succsim$ **，可用连续效用函数** $u(\cdot)$ **表示；而且价格向量** $p \gg 0$ **。那么我们有**

（i）若财富 $w>0$ **时** x^{*} **是 UMP 中最优的，则对于既定的目标效用水平** $u(x^{*})$ **来说，** x^{*} **在 EMP 中是最优的。而且，这个 EMP 的最小支出水平恰为** w **。**

（ii）若目标效用水平为 $u>u(0)$ **时** x^{*} **是 EMP 中最优的，则当财富为** $p\cdot x^{*}$ **时，** x^{*} **在 UMP 中是最优的。而且，这个 UMP 的最大效用水平恰为** u **。**

消费者需求理论

（i）若财富 $w>0$ 时 x^* 是 UMP 中最优的，则对于既定的目标效用水平 $u(x^*)$ 来说，x^* 在 EMP中是最优的。而且，这个 EMP 的最小支出水平恰为 w。

支出最小化问题

UMP与EMP的关系

i. 证明：使用反证法，假设目标效用水平为 $u(x^*)$ 时，x^* 不是EMP的最优解，而是存在另外一个消费束 x'，使得 $u(x')\geq u(x^*)$ 且 $p\cdot x'<p\cdot x^*\leq w$。

由局部非饱和性可知，可以找到一个非常接近于x'的消费束 x'' 使得 $u(x'')\geq u(x')$ 且 $p\cdot x''<w$。但这意味着 $x''\in B_{p,w}$ 和 $u(x'')\geq u(x^*)$，这与 x^* 在UMP中是最优的矛盾。因此，当目标效用水平为 $u(x^*)$ 时，x^* 必定是EMP中最优的，因此最小支出水平为 $p\cdot x^*$。

由于 x^* 是当财富为w时的UMP的解，由瓦尔拉斯法则可知 $p\cdot x^*=w.$

(ii)若目标效用水平为 $u > u(0)$ 时 x^* 是 EMP 中最优的，则当财富为 $p \cdot x^*$ 时，x^* 在 UMP 中是最优的。而且，这个 UMP 的最大效用水平恰为 u。

支出最小化问题

UMP与EMP的关系

ii. 证明：由于u>u(0)，必有 $x^* \neq 0$ 。因此，$p \cdot x^* > 0$ 。假设当财富为$p \cdot x^*$ 时，x^* 在UMP中不是最优解，则存在另外一个消费束 x'，使得 $u(x') \geq u(x^*)$ 且 $p \cdot x' \leq p \cdot x^*$

考虑消费束 $x'' = \alpha x'$，其中$\alpha \in (0,1)$，即x'' 是x' “等比例缩小”的版本。根据u(·)的连续性可知，如果 α 充分接近于1，则我们$u(x'') > u(x^*)$ 和 $p \cdot x'' < p \cdot x^*$

但这与x^* 是EMP中最优的这个事实矛盾。因此，当财富为 $p \cdot x^*$ 时， x^* 必定为UMP中最优的，因此最大效用水平为 $u(x^*)$。

消费者需求理论

支出最小化问题

EMP和UMP一样，当 $p \gg 0$ 时，EMP的解在非常一般的情况下都存在。

我们只需要要求约束集是非空的即可。

也就是说，存在某个x使得u(·)的值至少与u一样大。因此，我们假设，如果u(·)是无上界的，对于任何的u>u(0)，这个条件都能够满足。

消费者需求理论

EMP：支出函数

类似于UMP中的最优值函数——**间接效用函数**，同样考虑EMP的最优值函数——**支出函数**。

给定价格 $p \gg 0$ 和既定目标效用水平 $u > u(0)$ ，用e(p,u)表示EMP的值。这个函数e(p,u)称为支出函数。

对于任何给定的(p,u)，支出函数的值就是 $p \cdot x^*$，其中 x^* 是EMP的任一解。

消费者需求理论

EMP：支出函数

支出函数的性质

命题 3.E.2：假设定义在消费集 $X=\mathbb{R}_+^L$ 上的局部非饱和偏好关系 $\succsim$，可用连续效用函数 $u(\cdot)$ 表示。那么支出函数 $e(p,u)$：

（i）关于 p 是一次齐次的。

（ii）关于是 u 严格递增的，关于任何商品 l 的价格 p_l 是非递减的。

（iii）关于 p 是凹的。

（iv）关于 p 和 u 是连续的。

EMP：支出函数

支出函数的性质

证明关于p的一次齐次性：

当价格变化时，EMP的约束集不会发生任何变化。因此，对于任何实数 $\alpha > 0$，在这个集合上，使 $(\alpha p) \cdot x$ 最小化的最优消费束，与使p·x最小化的最优消费束是相同的。令 x^* 表示这个最优消费束，就有：

$$e(\alpha p, u) = \alpha p \cdot x^* = \alpha e(p, u)$$

消费者需求理论

EMP：支出函数

支出函数的性质

证明凹性：

将目标效用水平固定为 $\overline{u}$ 令 $p''=\alpha p+(1-\alpha)p'$，其中$\alpha\in(0,1)$。假设x''是价格为p''时EMP的最优消费束。就有：

$$
\begin{aligned}
e(p'',u) &= p''\cdot x'' \\
&= \alpha p\cdot x''+(1-\alpha)p'\cdot x'' \\
&\geq \alpha e(p,\overline{u})+(1-\alpha)e(p',\overline{u})
\end{aligned}
$$

消费者需求理论

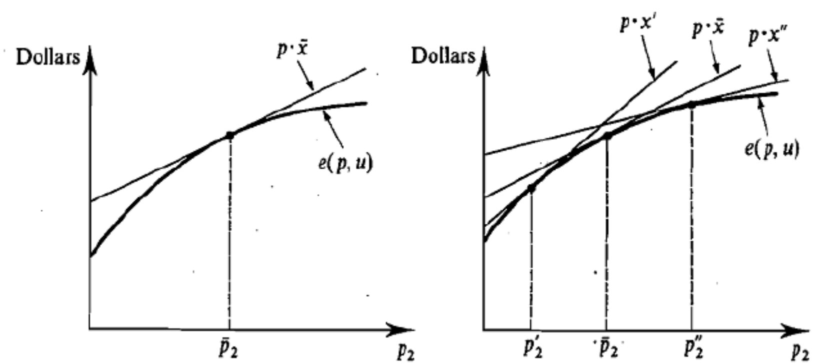
EMP：支出函数

支出函数的性质

对于给定的$\bar{u}$，支出函数 $e(p,\bar{u})$ 关于p是凹的是非常重要的性质。

- 假设初始价格为 $\bar{p}$，此时 $\bar{x}$ 是EMP问题的最优消费束。如果价格变化但不允许消费者的消费水平变化，则他的支出为 $p\cdot\bar{x}$，这实际上是价格p的线性表达式。但是当消费者可以调整他的消费时，那么他的最低支出水平不可能大于 $p\cdot\bar{x}$ 。

维持p_1不变改变p_2：
当 $p\neq\bar{p}$ 时，$e(p,\bar{u})$ 的图形位于线性函数 $p\cdot\bar{x}$ 的下方；
当 $p=\bar{p}$ 时，这两个图形相切。
这等价于凹性，因为在支出函数的每一点上，它与线性函数的这种关系都必然成立



消费者需求理论

EMP：支出函数

支出函数与间接效用函数

对于任何的 $p \gg 0$，$w > 0$ 和 $u > u(0)$ 有：

$$e(p, v(p, w)) = w \quad 和 \quad v(p, e(p, u)) = u$$

这意味着，对于既定的价格 $\bar{p}$ 来说，$e(\bar{p}, \cdot)$ 和 $v(\bar{p}, \cdot)$ 是互逆的。

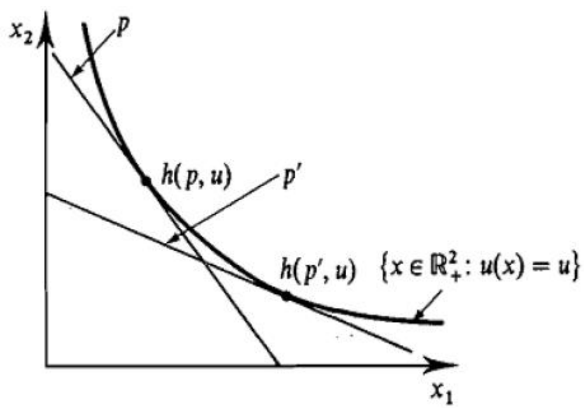
也就是，支出函数和间接效用函数的性质之间也存在直接的对应关系。

在描述消费者选择问题的潜在特征方面，这两个函数的作用是相同的，他们描述相同的特征。

EMP：希克斯需求函数

EMP中的最优商品束集合可以用 $h(p,u) \subset \mathbb{R}_+^L$ 表示，则h(p,u)称为希克斯需求对应，或补偿性需求对应。

如果h(p,u)是单值的，则称为希克斯需求函数，或补偿性需求函数。



给定效用水平u，价格水平p和p’下的需求对应分别是h(p,u)和h(p’,u)

EMP：希克斯需求函数

希克斯需求的基本性质：

命题 3.E.3： 假设定义在消费集 $X=\mathbb{R}_+^L$ 上的局部非饱和偏好关系 $\succsim$，可用连续效用函数 $u(\cdot)$ 表示。那么对于任何 $p \gg 0$，希克斯需求对应 $h(p,u)$ 具有下列性质：

（i）关于 p 是零次齐次的：$h(\alpha p,u)=h(p,u)$ 对于任何 p，u 和 $\alpha>0$ 都成立。

（ii）无超额效用（no excess utility）：对于任何 $x\in h(p,u)$，都有 $u(x)=u$。

（iii）凸性/唯一性：若 $\succsim$ 是凸的，则 $h(p,u)$ 是个凸集；若 $\succsim$ 是严格凸的，从而 $u(\cdot)$ 为严格拟凹的，则 $h(p,u)$ 只有唯一一个元素。

消费者需求理论

EMP：希克斯需求函数

希克斯需求的基本性质：

命题 3.E.3： 假设定义在消费集 $X=\mathbb{R}_+^L$ 上的局部非饱和偏好关系 $\succsim$，可用连续效用函数 $u(\cdot)$ 表示。那么对于任何 $p \gg 0$，希克斯需求对应 $h(p,u)$ 具有下列性质：

（i）关于 p 是零次齐次的：$h(\alpha p,u)=h(p,u)$ 对于任何 p，u 和 $\alpha>0$ 都成立。

（ii）无超额效用（no excess utility）：对于任何 $x\in h(p,u)$，都有 $u(x)=u$。

（iii）凸性/唯一性：若 $\succsim$ 是凸的，则 $h(p,u)$ 是个凸集；若 $\succsim$ 是严格凸的，从而 $u(\cdot)$ 为严格拟凹的，则 $h(p,u)$ 只有唯一一个元素。

命题 3.D.2： 假设定义在消费集 $X=\mathbb{R}_+^L$ 上的局部非饱和的偏好关系 $\succsim$，可用连续效用函数 $u(\cdot)$ 表示。则瓦尔拉斯需求对应 $x(p,w)$ 具有下列性质：

（i）关于 (p,w) 是零次齐次的：$x(\alpha p,aw)=x(p,w)$ 对于任何 p，w 和实数 $\alpha>0$ 都成立。

（ii）瓦尔拉斯法则：$p\cdot x=w$ 对于所有 $x\in x(p,w)$ 都成立。

（iii）凸性/唯一性：若 $\succsim$ 是凸的，从而 $u(\cdot)$ 是拟凹的，则 $x(p,w)$ 是个凸集。而且，若 $\succsim$ 为严格凸，从而 $u(\cdot)$ 是严格拟凹的，则 $x(p,w)$ 只有唯一一个元素。

消费者需求理论

EMP：希克斯需求函数

希克斯需求的基本性质：零次齐次

h(p,u)关于p是零次齐次的

这里的h(p,u)是EMP这个带约束的最小化问题的解，而两个最优化问题：

$$\text{Min}_x\ p\cdot x \quad \text{s.t. } u(x)\geq u$$

$$\text{Min}_x\ \alpha p\cdot x \quad \text{s.t. } u(x)\geq u$$

（其中$\alpha>0$是任意实数）

他们的解是相同的。

消费者需求理论

EMP：希克斯需求函数

希克斯需求的基本性质：无超额效用

反证法。假设存在一个 $x \in h(p,u)$，使得 $u(x) > u$。考虑消费束 $x' = \alpha x$，其中 $\alpha \in (0,1)$。根据u(·)的连续性可知，对于充分接近于1的 α，有 $u(x') \geq u$ 和 $p \cdot x' < p \cdot x$，这与当既定目标效用水平为u时，x是EMP的最优解相矛盾。

消费者需求理论

EMP：希克斯需求函数

希克斯需求的基本性质：凸性/唯一性

假设偏好关系是凸的，有$x \in h(p,u)$和$x' \in h(p,u)$，那么就有$p \cdot x = p \cdot x'$，并且$u(x) \geq u, u(x') \geq u$

给定一个$\alpha \in [0,1]$，定义$x'' = ax + (1-a)x'$，因此就有：

$$p \cdot x'' = ap \cdot x + (1-a)p \cdot x'$$

由于偏好关系是凸的，效用函数是拟凹的，所以有$u(x'') \geq u$，所以$x'' \in h(p,u)$

这就证明了希克斯需求的凸性

消费者需求理论

EMP：希克斯需求函数

希克斯需求的基本性质：凸性/唯一性

假设偏好关系是严格凸的，有$x \in h(p,u)$和$x' \in h(p,u)$，$x \neq x'$，并且$u(x) \geq u(x') \geq u$

给定一个$\alpha \in (0,1)$，定义$x'' = ax + (1-a)x'$，因此就有：

$$p \cdot x'' = ap \cdot x + (1-a)p \cdot x' = p \cdot x = p \cdot x'$$

由于偏好关系是严格凸的，效用函数是严格拟凹的，所以有$u(x'') > u(x')$

对于充分接近于1的$\beta \in (0,1)$，根据u()的连续性，我们有$u(\beta x'') > u(x') \geq u$，这跟x和x’是支出最小化问题的解相矛盾，所以希克斯需求是单值的

消费者需求理论

EMP：希克斯需求函数

与UMP类似，如果u(·)是可微的，那么EMP中的最优消费束就可以用一阶条件描述，并且其形式与UMP的一阶条件非常类似

根据K-T条件，EMP的一阶条件为：

$$p \geq \lambda \nabla u(x^*)$$

$$x^* \cdot [p - \lambda \nabla u(x^*)] = 0$$

UMP的一阶条件为：

$$\nabla u(x^*) \leq \lambda p$$

$$x^* \cdot [\nabla u(x^*) - \lambda p] = 0$$

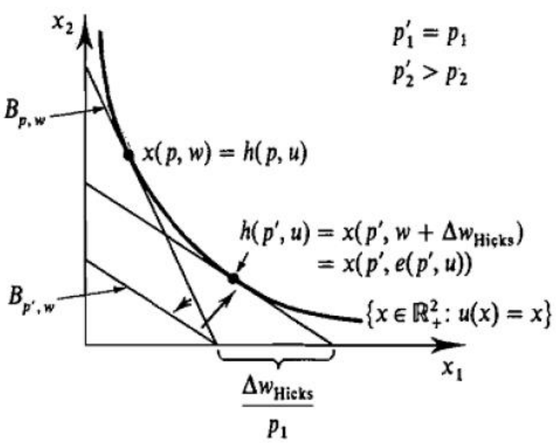
消费者需求理论

EMP：希克斯需求函数

希克斯需求对应和瓦尔拉斯需求对应的关系

$$h(p,u)=x(p,e(p,u)) \quad \text{和} \quad x(p,w)=h(p,v(p,w))$$

第一个关系回答了为什么将希克斯需求也称作补偿性需求：当价格变化时，如果我们同时调整消费者的财富，使他的效用维持在u的水平上，那么他的需求恰好是h(p,u)。这种财富补偿被称为**希克斯财富补偿**。



消费者的初始价格财富组合为(p,w)，假设价格变为p’，其中$p_1'=p_1$和$p_2'>p_2$，则希克斯财富补偿额为$\Delta w_{\text{Hicks}}=e(p',u)-w$。因此，当价格变化时，希克斯需求函数h(p,u)维持消费者的效用水平不变；当价格变化时，瓦尔拉斯需求函数允许效用变化但维持货币财富不变。

EMP：希克斯需求函数

希克斯需求与补偿性需求法则

希克斯需求的一个重要性质是：满足**补偿性需求法则**，即对于希克斯财富补偿的价格变化来说，***需求和价格的变动方向是相反的。***

命题 3.E.4：假设定义在消费集 $X=\mathbb{R}_+^L$ 上的局部非饱和偏好关系 $\succsim$，可用连续效用函数 $u(\cdot)$ 表示。而且，对于所有 $p \gg 0$，$h(p,u)$ 都只有唯一一个元素。那么希克斯需求函数 $h(p,u)$ 满足需求的补偿性法则：

$$(p''-p')\cdot[h(p'',u)-h(p',u)]\leq 0. \qquad \textbf{(3.E.5)}$$

消费者需求理论

EMP：希克斯需求函数

希克斯需求与补偿性需求法则

对于任何的 $p \gg 0$，消费束h(p,u)在EMP中是最优的，所以它在价格为p时的支出，小于能提供效用至少为u的任何其他消费束的支出。即：

$$p'' \cdot h(p'',u) \leq p'' \cdot h(p',u)$$

$$p' \cdot h(p'',u) \geq p' \cdot h(p',u)$$

两式相减，可得：

$$(p'' - p') \cdot [h(p'',u) - h(p',u)] \leq 0.$$

消费者需求理论

EMP：希克斯需求函数

希克斯需求与补偿性需求法则

补偿性需求法则意味着：*补偿性需求的自身价格效应是非正*。

即，如果只有商品l的价格p_l发生变化，则

$$(p_l'' - p_l') \cdot [h_l(p_l'', u) - h_l(p_l', u)] \leq 0$$

该结论对于瓦尔拉斯需求来说不一定成立，即*瓦尔拉斯需求未必满足补偿性需求法则*。例如，某种商品价格下降的时候，该商品的需求可能下降（吉芬商品）。

消费者需求理论

EMP：希克斯需求函数

柯布-道格拉斯效用函数的希克斯需求和支出函数

假设消费者在两种商品上的效用可以用柯布-道格拉斯效用函数来描述，即

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

使用EMP的一阶条件和约束条件，可得到希克斯需求函数：

$$h_1(p,u) = \left[\frac{\alpha p_2}{(1-\alpha)p_1}\right]^{1-\alpha} u \qquad h_2(p,u) = \left[\frac{(1-\alpha)p_1}{\alpha p_2}\right]^{\alpha} u$$

计算支出函数 $e(p,u) = p \cdot h(p,u)$

$$e(p,u) = [\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}] p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} u.$$

消费者需求理论

需求、间接效用与支出函数

希克斯需求和支出函数

假设u(·)是连续的效用函数，代表了局部非饱和的偏好关系，并且只考虑 $p \gg 0$
同时假设偏好是严格凸的，因此瓦尔拉斯需求x(p,w)和希克斯需求h(p,u)都是单值的。

在已知希克斯需求函数的情况下，支出函数为： $e(p,u) = p \cdot h(p,u)$

命题 3.G.1：假设定义在消费集 $X = \mathbb{R}_+^L$ 上的局部非饱和且严格凸的偏好关系 $\succsim$，可用连续效用函数 $u(\cdot)$ 表示。对于所有 p 和 u，希克斯需求 $h(p,u)$ 是支出函数关于价格的导数（向量）：

$$h(p,u) = \nabla_p e(p,u). \qquad (3.G.1)$$

也就是说，对于所有 $l = 1,\dots,L$，我们有 $h_l(p,u) = \partial e(p,u) / \partial p_l$。

换言之，给定消费者的支出函数，能通过求微分计算出他的希克斯需求函数

消费者需求理论

需求、间接效用与支出函数

希克斯需求和支出函数

假设h(p,u)在(p,u)处是可微的，支出的变动可以写为：

$$\nabla_p e(p,u) = \nabla_p [p \cdot h(p,u)]$$
$$= h(p,u) + [p \cdot D_p h(p,u)]^{\mathrm{T}}$$

由于h(p,u)是EMP的最优解，因此满足一阶条件 $p = \lambda \nabla u(h(p,u))$，代入可得

$$\nabla_p e(p,u) = h(p,u) + \lambda [\nabla u(h(p,u)) \cdot D_p h(p,u)]^{\mathrm{T}}$$

又因为在EMP中，u(h(p,u))=u对于所有的p都成立，因此：

$$\nabla u(h(p,u)) \cdot D_p h(p,u) = 0$$

因此，可得 $h(p,u) = \nabla_p e(p,u)$

消费者需求理论

需求、间接效用与支出函数

希克斯需求和支出函数

在EMP问题中，价格参数只进入了目标函数p·x（约束条件中效用值与价格无关），所以在价格 $\overline{p}$ 处变动引起的EMP最优值函数的变动 $\nabla_p e(\overline{p},u)$，恰好等于目标函数关于p的偏导数在最优点的值 $h(\overline{p},u)$。因此，$h(p,u)=\nabla_p e(p,u)$

如果在EMP的解这一点上，那么由价格变动引起的需求变动对消费者的支出没有一阶影响。

$$\begin{aligned}\nabla_p e(p,u) &= \nabla_p\left[p\cdot h(p,u)\right]\\ &= h(p,u)+\left[p\cdot D_p h(p,u)\right]^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

从第一项来看，价格变动（但维持需求不变）对支出有直接影响；从第二项来看，为引起需求变动（但维持价格不变）对支出的间接影响。但由于我们处在支出最小化的消费束上，EMP的一阶条件就意味着这种间接影响为0，即第二项为0.

需求、间接效用与支出函数

希克斯需求函数的价格导数的性质

命题 3.G.2：假设定义在消费集 $X=\mathbb{R}_{+}^{L}$ 上的局部非饱和且严格凸的偏好关系 $\succsim$，可用连续效用函数 $u(\cdot)$ 表示。再假设 $h(\cdot,u)$ 在 (p,u) 点是连续可微的，将 $h(\cdot,u)$ 的 $L\times L$ 导数矩阵记为 $D_p h(p,u)$。那么，

（i）$D_p h(p,u)=D_p^2 e(p,u)$。

（ii）$D_p h(p,u)$ 是个负半定的矩阵。

（iii）$D_p h(p,u)$ 是个对称矩阵。

（iv）$D_p h(p,u)p=0$。

消费者需求理论

需求、间接效用与支出函数

希克斯需求函数的价格导数的性质

性质(i) $D_p h(p,u) = D_p^2 e(p,u)$ 可以由 $h(p,u) = \nabla_p e(p,u)$ 对价格p微分得到

性质(ii)和(iii)即$D_p h(p,u)$ 是半负定和对称矩阵：e(p,u)是二次连续的可微凹函数，它的二阶导数矩阵（即海塞矩阵）是对称的和负半定的。

性质(iv)即 $D_p h(p,u)p = 0$：由于h(p,u)关于p是零次齐次的，所以对于任意的α 都有 $h(\alpha p,u) - h(p,u) = 0$ 。将这个式子关于 α 微分并计算等于1时的导数可以得到

$D_p h(p,u)p = 0$

需求、间接效用与支出函数

希克斯需求函数的价格导数的性质

$D_p h(p,u)$ 矩阵的负半定性是补偿性需求法则的微分形式。

补偿性需求法则的微分形式为 $dp \cdot dh(p,u) \le 0$，由于 $dh(p,u) = D_p h(p,u) dp$
代入可得：$dp \cdot D_p h(p,u) dp \le 0$ 对于所有的dp都成立；因此，矩阵是负半定的。

负半定性意味着所有对角线上的元素 $\partial h_l(p,u) / \partial p_l \le 0$，也就是说，自身的补偿性价格效应是非正的，价格下降，希克斯需求一定不会下降。

消费者需求理论

需求、间接效用与支出函数

希克斯需求函数的价格导数的性质

$D_p h(p,u)$ 矩阵的对称性意味着任何两种商品（如商品l和商品k）的补偿性需求的价格交叉导数必定满足 $\partial h_l(p,u)/\partial p_k = \partial h_k(p,u)/\partial p_l$

这一性质与理性偏好的传递性密切相关。

消费者需求理论

需求、间接效用与支出函数

希克斯需求函数的价格导数的性质

对于两种商品l和k，如果在(p,u)处有 $\partial h_l(p,u)/\partial p_k \geq 0$，那么就说这两种商品在(p,u)处是**替代品**；

如果在(p,u)处有 $\partial h_l(p,u)/\partial p_k \leq 0$，那么就说这两种商品在(p,u)处是**互补品**。

如果瓦尔拉斯需求在(p,w)也有同样的关系，就称这两种商品在(p,w)处是**总替代品**和**总互补品**。

由于 $\partial h_l(p,u)/\partial p_l \leq 0$ 同时 $D_p h(p,u)p=0$，所以必然存在满足 $\partial h_l(p,u)/\partial p_k \geq 0$ 的商品k。因此，每种商品在消费集中都至少有一个替代品。

需求、间接效用与支出函数

希克斯需求函数和瓦尔拉斯需求函数

由于效用水平是无法被直接观测到的，因此，以效用水平作为自变量的希克斯需求函数不能直接观测到。

但是矩阵 $D_p h(p,u)$ 可以从可观测的瓦尔拉斯需求函数x(p,w)计算得出。

命题 3.G.3：（斯勒茨基方程）假设定义在消费集 $X=\mathbb{R}_+^L$ 上的局部非饱和且严格凸的偏好关系 $\succsim$，可用连续效用函数 $u(\cdot)$ 表示。那么对于所有 (p,w) 和 $u=v(p,w)$，我们有

$$\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k}=\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k}+\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w}x_k(p,w) \quad \text{对于所有 } l,k \text{ 成立} \qquad (3.G.3)$$

或等价地，以矩阵符号表示为，

$$D_p h(p,u)=D_p x(p,w)+D_w x(p,w)x(p,w)^{\mathrm{T}}. \qquad (3.G.4)$$

消费者需求理论

需求、间接效用与支出函数

希克斯需求函数和瓦尔拉斯需求函数

考虑一个消费者，他面对的价格财富组合是 $(\bar{p},\bar{w})$，达到的效用水平为 $\bar{u}$。这种情况下，他的财富水平与支出必定相等，即 $\bar{w}=e(\bar{p},\bar{u})$。对于所有的(p,u)，都有：

$$h_l(p,u)=x_l(p,e(p,u))$$

将上式关于p_k微分并求其在 $(\bar{p},\bar{u})$ 的值，可得：

$$\frac{\partial h_l(\bar{p},\bar{u})}{\partial p_k}=\frac{\partial x_l(\bar{p},e(\bar{p},\bar{u}))}{\partial p_k}+\frac{\partial x_l(\bar{p},e(\bar{p},\bar{u}))}{\partial w}\frac{\partial e(\bar{p},\bar{u})}{\partial p_k}$$

根据希克斯需求函数的导数性质，有 $\partial e(\bar{p},\bar{u})/\partial p_k=h_k(\bar{p},\bar{u})$ 代入可得：

$$\frac{\partial h_l(\bar{p},\bar{u})}{\partial p_k}=\frac{\partial x_l(\bar{p},e(\bar{p},\bar{u}))}{\partial p_k}+\frac{\partial x_l(\bar{p},e(\bar{p},\bar{u}))}{\partial w}h_k(\bar{p},\bar{u})$$

需求、间接效用与支出函数

希克斯需求函数和瓦尔拉斯需求函数

$$\frac{\partial h_l(\bar{p},\bar{u})}{\partial p_k}=\frac{\partial x_l(\bar{p},e(\bar{p},\bar{u}))}{\partial p_k}+\frac{\partial x_l(\bar{p},e(\bar{p},\bar{u}))}{\partial w}h_k(\bar{p},\bar{u})$$

又有： $\bar{w}=e(\bar{p},\bar{u})$， $h_k(\bar{p},\bar{u})=x_k(\bar{p},e(\bar{p},\bar{u}))=x_k(\bar{p},\bar{w})$， 可得

$$\frac{\partial h_l(\bar{p},\bar{u})}{\partial p_k}=\frac{\partial x_l(\bar{p},\bar{w})}{\partial p_k}+\frac{\partial x_l(\bar{p},\bar{w})}{\partial w}x_k(\bar{p},\bar{w})$$

$$D_p h(p,u)=D_p x(p,w)+D_w x(p,w)x(p,w)^{\mathrm{T}}$$

消费者需求理论

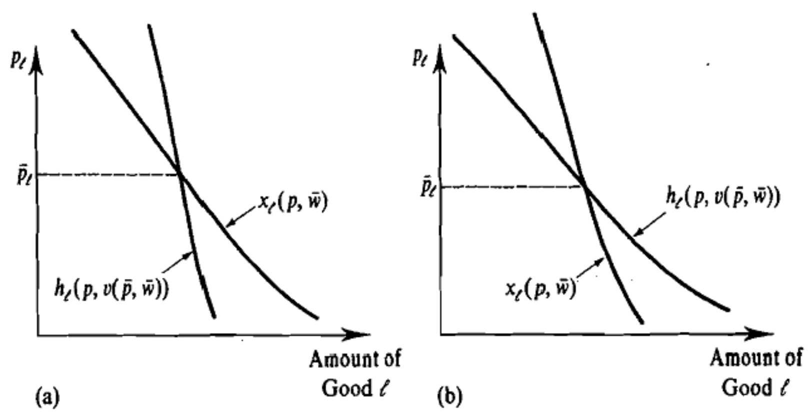
需求、间接效用与支出函数

希克斯需求函数和瓦尔拉斯需求函数

商品l的瓦尔拉斯需求曲线和希克斯需求曲线。

瓦尔拉斯需求函数，以及要达到效用水平 $\bar{u}=v((\bar{p}_l,\bar{p}_{-l}),\bar{w})$ 的希克斯函数。

当 $p_l=\bar{p}_l$ 时，这两个需求函数相等。



需求、间接效用与支出函数

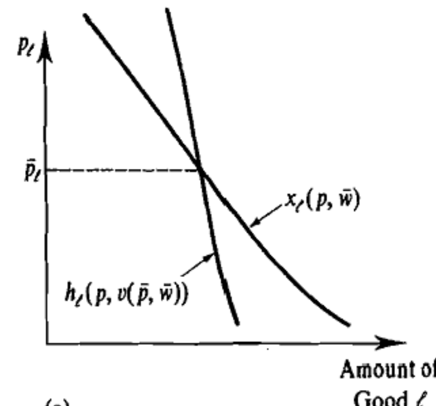
希克斯需求函数和瓦尔拉斯需求函数

斯勒茨基方程描述了两个需求函数在价格 $\bar{p}_l$ 处的斜率关系。

$$\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k}=\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k}+\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w}x_k(p,w)$$

在 $\bar{p}_l$ 处，瓦尔拉斯需求曲线比希克斯需求曲线平缓，即尽管二者斜率都为负，但瓦尔拉斯需求曲线的斜率的绝对值更小。这对应的商品l在该点为正常商品。

当商品l是正常商品时，在不进行补偿的情形下，价格上升时，消费者对它的需求会下降的更多。



(a)

消费者需求理论

需求、间接效用与支出函数

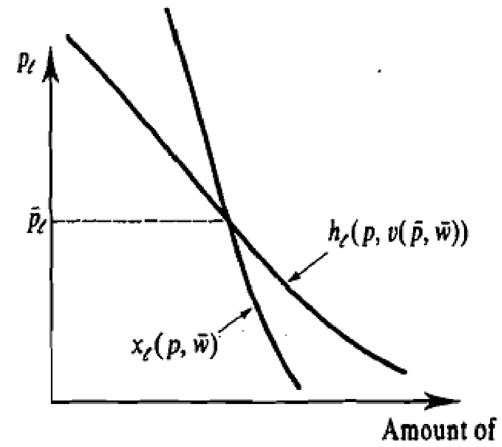
希克斯需求函数和瓦尔拉斯需求函数

斯勒茨基方程描述了两个需求函数在价格 $\bar{p}_l$ 处的斜率关系。

$$\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k}=\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k}+\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w}x_k(p,w)$$

当商品l是劣等品的时候，瓦尔拉斯需求曲线的斜率绝对值比希克斯需求曲线更大。

对于劣等品，价格上升，在进行补偿的情形下，消费者对它的需求会下降的更多。



(b)

需求、间接效用与支出函数

希克斯需求函数和瓦尔拉斯需求函数

希克斯需求函数关于价格的导数矩阵 $D_p h(p,u)$ 具有的形式：

$$D_p h(p,u) = D_p x(p,w) + D_w x(p,w) x(p,w)^{\mathrm{T}}$$

这与前面的斯勒茨基替代矩阵的形式相同：

$$S(p,w) = \begin{bmatrix} s_{11}(p,w) & \cdots & s_{1L}(p,w) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{L1}(p,w) & \cdots & s_{LL}(p,w) \end{bmatrix}$$

其中， $s_{lk}(p,w) = \partial x_l(p,w)/\partial p_k + [\partial x_l(p,w)/\partial w] x_k(p,w)$

S矩阵可以根据瓦尔拉斯需求函数的信息直接计算得到，由于 $S(p,w) = D_p h(p,u)$

也就是说当需求函数是由效用最大化生成时，S必定满足负半定性、对称性，$S(p,w)p = 0$

消费者需求理论

需求、间接效用与支出函数

希克斯需求函数和瓦尔拉斯需求函数

斯勒茨基替代矩阵S(p,w)是由斯勒茨基财富补偿产生的补偿性需求的导数矩阵。

斯勒茨基补偿是调整财富使得消费者能在新的价格下*正好能买得起原来的消费束*。

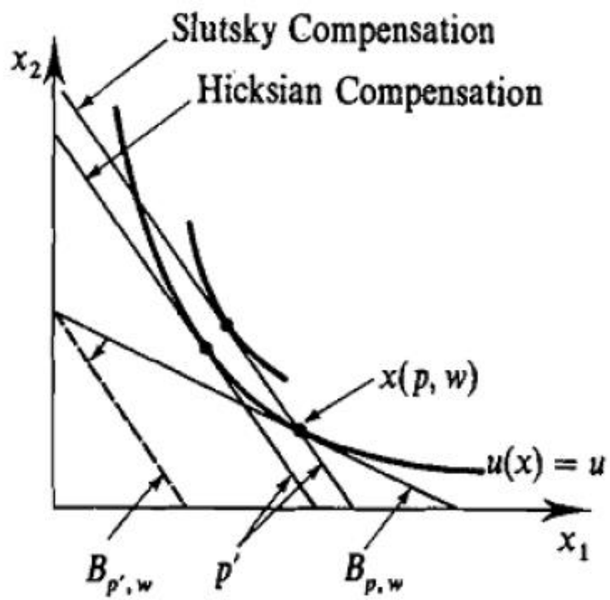
希克斯补偿则是*变动财富来维持效用不变*。

结论：希克斯需求函数的导数等于斯勒茨基补偿下的需求导数

消费者需求理论

需求、间接效用与支出函数

希克斯需求函数和瓦尔拉斯需求函数



当价格变动到p'时，通过变动财富来补偿因为这个价格变动带来的财富效应。有两种方式：

1. 将财富变动 $\Delta w_{\text{Slustky}} = p' \cdot x(\bar{p}, \bar{w}) - \bar{w}$
   这种情况下，消费者能正好买得起初始的消费束；
2. 将财富变动 $\Delta w_{\text{Hicks}} = e(p', \bar{u}) - \bar{w}$
   这种情况下，消费者的效用水平维持不变

$$\Delta w_{\text{Hicks}} \le \Delta w_{\text{Slustky}}$$

一般来说，这个不等式对于任何离散变动都是严格不等式。

消费者需求理论

需求、间接效用与支出函数

希克斯需求函数和瓦尔拉斯需求函数

对于从 $\bar{p}$ 开始的微分价格变动，由于 $\nabla e(\bar{p},\bar{u}) = h(\bar{p},\bar{u}) = x(\bar{p},\bar{w})$

这两种财富补偿是恒等的：对于某个价格的微分变动，为实现效用水平不变而进行的总补偿即希克斯补偿水平，相当于维持消费束不变情况下的价格变动的斯勒茨基财富补偿。

因此，在两种补偿机制下，补偿性需求函数的导数是相同的。

消费者需求理论

需求、间接效用与支出函数

希克斯需求函数和瓦尔拉斯需求函数

导数相等有助于我们比较消费者需求的两种基本构造方法。

对于斯勒茨基矩阵，如果x(p,w)满足弱公理，则S(p,w)是负半定的且S(p,w)p=0。

除了L=2外，*满足弱公理的需求未必需要有对称的斯勒茨基矩阵*。

可见，基于偏好方法的需求函数的限制，要强于建立在弱公理上的基于选择规则方法的需求函数的限制。事实上，当替代矩阵不是对称矩阵时，不可能找到能理性化需求的偏好。

消费者需求理论

需求、间接效用与支出函数

瓦尔拉斯需求和间接效用函数

EMP的最小化向量h(p,u)，是EMP的最优值函数e(p,u)关于价格p的导数。

$$h(p,u)=\nabla_p e(p,u)$$

这样的结论对于UMP并不成立。瓦尔拉斯需求不可能等于间接效用函数关于价格的导数。但如果使用财富的边际效用将v(p,w)关于p的导数标准化，就可以使得类似的结论对于UMP成立。

罗伊恒等式：描述了UMP问题中需求函数和间接效用函数之间的关系，类似于EMP中

$h(p,u)=\nabla_p e(p,u)$

消费者需求理论

需求、间接效用与支出函数

瓦尔拉斯需求和间接效用函数

命题 3.G.4：假设定义在消费集 $X=\mathbb{R}_+^L$ **上的局部非饱和且严格凸的偏好关系** $\succsim$**，可用连续效用函数** $u(\cdot)$ **表示。再假设间接效用函数在** $(\bar{p},\bar{w})\gg 0$ **点是可微的。那么，**

$$x(\bar{p},\bar{w})=-\frac{1}{\nabla_w v(\bar{p},\bar{w})}\nabla_p v(\bar{p},\bar{w})\text{。}$$

也就是说，对于每个 $l=1,\ldots,L$**：**

$$x_l(\bar{p},\bar{w})=-\frac{\partial v(\bar{p},\bar{w})/\partial p_l}{\partial v(\bar{p},\bar{w})/\partial w}.$$

处于一个最优点时，计算某个微分价格变动对最优值函数的效应时，可以忽略价格变动引起的需求变动，因此，罗伊恒等式和 $h(p,u)=\nabla_p e(p,u)$ 就是UMP和EMP对应的结果。

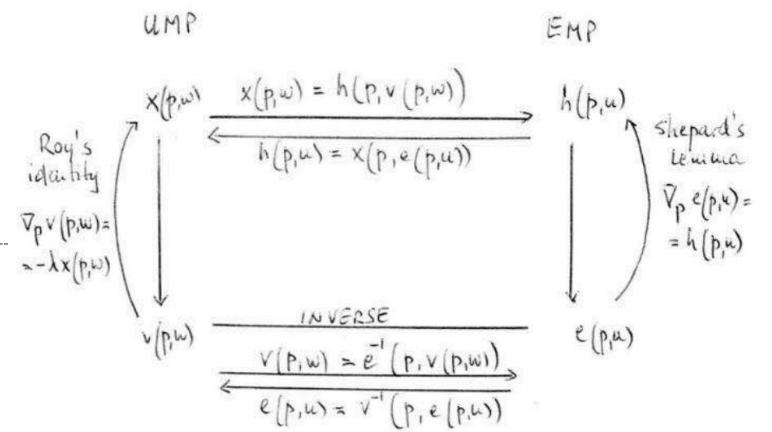
消费者需求理论

需求、间接效用与支出函数

瓦尔拉斯需求和间接效用函数

罗伊恒等式的意义：利用间接效用函数计算瓦尔拉斯需求，比从直接效用函数计算瓦尔拉斯需求更容易。

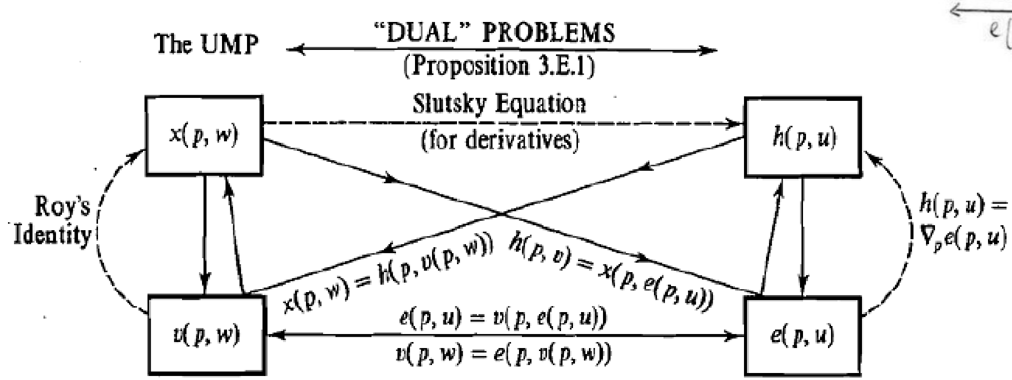
从间接效用函数求x(p,w)只涉及导数运算，而不用求解一阶条件方程组。



消费者需求理论

需求、间接效用与支出函数

UMP和EMP的关系



从UMP或EMP中的一个既定的效用函数出发，我们可以推导出最优的消费束x(p,w)和h(p,u)，以及最优值函数v(p,w)和e(p,u).

每个问题的需求向量都可以从它的最优值函数计算得出；利用斯勒茨基方程，希克斯需求函数的导数可以从可观测的瓦尔拉斯需求计算。