MATLAB 作业三参考答案

1、请将下面给出的矩阵 A 和 B 输入到 MATLAB 环境中，并将它们转换成符号矩阵。若某一矩阵为数值矩阵，另以矩阵为符号矩阵，两矩阵相乘是符号矩阵还是数值矩阵。

$$A=\begin{bmatrix}5&7&6&5&1&6&5\\2&3&1&0&0&1&4\\6&4&2&0&6&4&4\\3&9&6&3&6&6&2\\10&7&6&0&0&7&7\\7&2&4&4&0&7&7\\4&8&6&7&2&1&7\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3&5&5&0&1&2&3\\3&2&5&4&6&2&5\\1&2&1&1&3&4&6\\3&5&1&5&2&1&2\\4&1&0&1&2&0&1\\-3&-4&-7&3&7&8&12\\1&-10&7&-6&8&1&5\end{bmatrix}$$

【求解】矩阵的输入与转换是很直接的。

```
>> A=[5,7,6,5,1,6,5; 2,3,1,0,0,1,4; 6,4,2,0,6,4,4; 3,9,6,3,6,6,2;10,7,6,0,0,7,7;
7,2,4,4,0,7,7; 4,8,6,7,2,1,7]; A=sym(A)
A =
[ 5, 7, 6, 5, 1, 6, 5]
[ 2, 3, 1, 0, 0, 1, 4]
[ 6, 4, 2, 0, 6, 4, 4]
[ 3, 9, 6, 3, 6, 6, 2]
[ 10, 7, 6, 0, 0, 7, 7]
[ 7, 2, 4, 4, 0, 7, 7]
[ 4, 8, 6, 7, 2, 1, 7]
>> B=[3,5,5,0,1,2,3; 3,2,5,4,6,2,5; 1,2,1,1,3,4,6; 3,5,1,5,2,1,2;4,1,0,1,2,0,1;
-3,-4,-7,3,7,8,12; 1,-10,7,-6,8,1,5]; B=sym(B)
B =
[ 3, 5, 5, 0, 1, 2, 3]
[ 3, 2, 5, 4, 6, 2, 5]
[ 1, 2, 1, 1, 3, 4, 6]
[ 3, 5, 1, 5, 2, 1, 2]
[ 4, 1, 0, 1, 2, 0, 1]
[ -3, -4, -7, 3, 7, 8, 12]
[ 1, -10, 7, -6, 8, 1, 5]
```

2、利用 MATLAB 语言提供的现成函数对习题 1 中给出的两个矩阵进行分析，判定它们是否为奇异矩阵，得出矩阵的秩、行列式、迹和逆矩阵，检验得出的逆矩阵是否正确。

【求解】以A 矩阵为例，可以对其进行如下分析。

```
>> A=[5,7,6,5,1,6,5; 2,3,1,0,0,1,4; 6,4,2,0,6,4,4; 3,9,6,3,6,6,2;10,7,6,0,0,7,7;
7,2,4,4,0,7,7; 4,8,6,7,2,1,7]; A=sym(A);
rank(A)
ans =
    7
```

```
>> det(A)
ans =
        -35432
>> trace(A)
ans =
        27
>> B=inv(A);
>> A*B
ans =
[ 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[ 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]
```

3、试求出习题 1 中给出的 A 和 B 矩阵的特征多项式、特征值与特征向量，并对它们进行 LU 分解。

【求解】仍以*A* 矩阵为例。

```
>> A=[5,7,6,5,1,6,5; 2,3,1,0,0,1,4; 6,4,2,0,6,4,4; 3,9,6,3,6,6,2;10,7,6,0,0,7,7;
7,2,4,4,0,7,7; 4,8,6,7,2,1,7]; A=sym(A);
>>eig(A)
ans =
5.009396680079366526215873006955 2
28.679593193974410579078264020229
.27480714110743938760483528351799e-1+1.1755376247101009492093136044131
*i
-1.6336795424500642956747726147329+6.9740721596526560301948635104611*i
-3.4765922173751363914655588544224
-1.6336795424500642956747726147329-6.9740721596526560301948635104611*i
.27480714110743938760483528351799e-1-1.1755376247101009492093136044131*
i
>> [L U]=lu(A)

L =

[     1,     0,       0,        0,         0,         0, 0]
[ 2/5,     1,       0,        0,         0,         0, 0]
[ 6/5, -22,       1,        0,         0,         0, 0]
[ 3/5,   24,      -1,        1,         0,         0, 0]
[     2, -35, 55/36,   65/36,         1,         0, 0]
[ 7/5, -39, 59/36, -17/36,     3/17,         1, 0]
[ 4/5,   12,    -1/2,       -1, -60/119, -102/35, 1]
U =
[ 5,     7,      6,     5,        1,       6,              5]
```

```
[ 0, 1/5, -7/5,    -2,      -2/5,    -7/5,                   2]
[ 0,      0,    -36, -50,          -4,      -34,                  42]
[ 0,      0,        0,    -2,          11,          2,                  -7]
[ 0,      0,        0,      0, -119/4, -17/3,          557/36]
[ 0,      0,        0,      0,            0,      5/3,        479/153]
[ 0,      0,        0,      0,            0,          0, 17716/1785]
```

4、试求下面齐次方程的基础解系。

$$\begin{cases} 6x_1+x_2+4x_3-7x_4-3x_5=0 \\ -2x_1-7x_2-8x_3+6x_4=0 \\ -4x_1+5x_2+x_3-6x_4+8x_5=0 \\ -34x_1+36x_2+9x_3-21x_4+49x_5=0 \\ -26x_1-12x_2-27x_3+27x_4+17x_5=0 \end{cases}$$

【求解】可以将方程写成矩阵形式，得出的两列向量为方程的基础解系。

```
>>    A=[6,1,4,-7,-3; -2,-7,-8,6,0; -4,5,1,-6,8;-34,36,9,-21,49; -26,-12,-27,27,17];
A=sym(A);
rank(A)
ans =
        3
>> null(A)
ans =
[    237/80,    -61/80]
[    173/40, -109/40]
[ -151/40,    103/40]
[              1,              0]
[              0,              1]
```

5、试求下面线性代数方程的解析解与数值解，并检验解的正确性。

$$\begin{bmatrix} 2 & -9 & 3 & -2 & -1 \\ 10 & -1 & 10 & 5 & 0 \\ 8 & -2 & -4 & -6 & 3 \\ -5 & -6 & -6 & -8 & -4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \\ -3 & -8 & -4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 9 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

【求解】求出A, $[A;B]$ 两个矩阵的秩，可见二者相同，所以方程不是矛盾方程，应该有无穷多解。

```
>> A=[2,-9,3,-2,-1; 10,-1,10,5,0; 8,-2,-4,-6,3; -5,-6,-6,-8,-4];
B=[-1,-4,0; -3,-8,-4; 0,3,3; 9,-5,3];
[rank(A), rank([A B])]
ans =
          4    4
```

用下面的语句可以求出方程的解析解，并可以验证该解没有误差。

```
>> x0=null(sym(A));
x_analytical=sym(A)\B; syms a;
x=a*[x0 x0 x0]+x_analytical
x =
```

```
[     - (127*a)/170 - 18/17,          193/170 - (127*a)/170,          5/34 - (127*a)/170]
[     (307*a)/408 + 347/204,          (307*a)/408 - 719/408,     (307*a)/408 - 103/408]
[ (3659*a)/2040 + 587/204, (3659*a)/2040 - 8911/2040, (3659*a)/2040 - 283/408]
[ - (1321*a)/680 - 265/68,      3069/680 - (1321*a)/680,      33/136 - (1321*a)/680]
[                                   a,                                      a,
a]
>> A*x-B
ans =
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]
```

用数值解方法也可以求出方程的解，但会存在误差，且与任意常数a 的值有关。

```
>>   x0=null(A); x_numerical=A\B; syms a;
x=a*[x0 x0 x0]+x_numerical; vpa(x,10)
ans =
[ 0.2474402553*a + 0.1396556436,    0.2474402553*a - 0.6840666849,
0.2474402553*a - 0.1418420333]
[ 0.4938507789 - 0.2492262414*a, 0.07023776988 - 0.2492262414*a,
0.03853511888 - 0.2492262414*a]
[                        -0.5940839201*a,                          -0.5940839201*a,
-0.5940839201*a]
[ 0.6434420813*a - 0.7805411315,    0.6434420813*a - 0.2178190763,
0.6434420813*a - 0.5086089095]
[ - 0.3312192394*a - 1.60426346,      2.435364854 - 0.3312192394*a,
0.3867176824 - 0.3312192394*a]
>> A*x-B
ans =
[       (5*a)/36028797018963968,        (5*a)/36028797018963968,
(5*a)/36028797018963968]
[ -(177*a)/36028797018963968, -(177*a)/36028797018963968,
-(177*a)/36028797018963968]
[         (5*a)/9007199254740992,         (5*a)/9007199254740992,
(5*a)/9007199254740992]
[      (49*a)/18014398509481984,      (49*a)/18014398509481984,
(49*a)/18014398509481984]
```

6、试判定下面的线性代数方程是否有解。

$$\begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

【求解】由秩判定矩阵可以得出如下结果。

```
>> A=[16,2,3,13; 5,11,10,8; 9,7,6,12; 4,14,15,1];B=[1; 3; 4; 7];
```

```
[rank(A), rank([A B])]
ans =
         3    4
```

由得出的结果看，A, $[A;B]$ 两个矩阵的秩不同，故方程是矛盾方程，没有解。

7、求解能转换成多项式方程的联立方程，并检验得出的高精度数值解（准解析解）的精度。

1) $\begin{cases} x_1^2 - x_2 - 1 = 0 \\ (x_1-2)^2 + (x_2-0.5)^2 - 1 = 0 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} x^2y^2 - zxy - 4x^2yz^2 = xz^2 \\ xy^3 - 2yz^2 = 3x^3z^2 + 4xzy^2 \\ y^2x - 7xy^2 + 3xz^2 = x^4zy \end{cases}$

【求解】①中给出的方程可以由下面的语句直接求解，经检验可见，精度是相当高的。

```
>> [x1,x2]=solve('x1^2-x2-1=0','(x1-2)^2+(x2-0.5)^2-1=0','x1,x2')
>> norm(double([x1.^2-x2-1 (x1-2).^2+(x2-0.5).^2-1]))
ans =
     8.5171e-39
```

现在考虑②中的方程，可以由下面的语句求解并检验精度。

```
>> [x,y,z]=solve('x^2*y^2-z*x*y-4*x^2*y*z^2=x*z^2',...
'x*y^3-2*y*z^2=3*x^3*z^2+4*x*z*y^2',...
'y^2*x-7*x*y^2+3*x*z^2=x^4*z*y','x,y,z')
>> norm(double([x.^2.*y.^2-z.*x.*y-4*x.^2.*y.*z.^2-x.*z.^2,...
x.*y.^3-2*y.*z.^2-3*x.^3.*z.^2-4*x.*z.*y.^2,...
y.^2.*x-7*x.*y.^2+3*x.*z.^2-x.^4.*z.*y]))
ans =
   4.1168e-142
```

可见，除了前三组解之外，其余的解均是单个的，这样的解共有18 组，另外$(x; 0; 0)$、$(0; y; 0)$和$(0; 0; z)$ 对任意的$x; y; z$ 均满足原始方程，故方程有无数根。

8、用 Jacobi、Gauss-Seidel 迭代法求解方程组 $\begin{cases} 10x_1 - x_2 - 2x_3 = 72 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 83 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = 42 \end{cases}$，给定初值为 $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ 。

【求解】：编写 Jacobi、Gauss-Seidel 函数计算，

```
function y=jacobi(a,b,x0)
D=diag(diag(a));    U=-triu(a,1); L=-tril(a,-1);
B=D\(L+U);      f=D\b;
y=B*x0+f;
n=1;
while norm(y-x0)>=1.0e-6
        x0=y;
        y=B*x0+f;
        n=n+1;
end
```

```
n
>> a=[10,-1,-2;-1,10,-2;-1,-1,5];b=[72;83;42];
>> jacobi(a,b,[0;0;0])
n =
        17
ans =
      11.0000
      12.0000
      13.0000
function y=seidel(a,b,x0)
D=diag(diag(a));U=-triu(a,1);L=-tril(a,-1);
G=(D-L)\U    ;f=(D-L)\b;
y=G*x0+f;    n=1;
while norm(y-x0)>=1.0e-6
        x0=y;
        y=G*x0+f;
        n=n+1;
end
n
>> seidel(a,b,[0;0;0])
n =
        10
ans =
      11.0000
      12.0000
      13.0000
```

9、取$\omega=1.4, x^{(0)}=(1,1,1)^T$,用超松弛法解方程组$\begin{cases} 2x_1-x_2 = 1 \\ -x_1+2x_2-x_3=0 \\ -x_2+2x_3=1.8 \end{cases}$

【求解】：编写超松弛法函数并计算，

```
function y=sor(a,b,w,x0)
D=diag(diag(a));U=-triu(a,1);L=-tril(a,-1);
M=(D-w*L)\((1-w)*D+w*U); f=(D-w*L)\b*w;
y=M*x0+f; n=1;
while norm(y-x0)>=1.0e-6
        x0=y;
        y=M*x0+f;
        n=n+1;
end
n
>> a=[2,-1,0;-1,2,-1;0,-1,2];b=[1;0;1.8];
>>    sor(a,b,1.4,[1;1;1])
n =
        17
ans =
```

1.2000
1.4000
1.6000