第二章 投影矩阵、广义逆与正交投影

2.1 投影矩阵(projection matrix)

2.1.1 定义：矩阵 P称为投影矩阵，若：

1. P是对称的，即$P^T = P$；
2. P是幂等的，即$P^2 = P$。

幂等矩阵的性质：

1. 特征值非 0 即 1；
2. P幂等则$tr(P) = rank(P)$；
3. P幂等$\Leftrightarrow rank(P) + rank(I_n - P) = n$。

2.1.2 投影矩阵的性质：

1. 投影矩阵是非负定的；
2. 若P_1,P_2是投影矩阵且P_1-P_2非负定，则$P_1P_2=P_2P_1=P_2$，且P_1-P_2也是投影矩阵。

2.2 广义逆

对相容性线性方程

$$A_{m\times n}x = b$$

若 $rangk(A) = m = n$ 则 方 程 有 唯 一 解 $x = A^{-1}b$。若A不是方阵或者是奇异方阵，Penrose 指出方程的解可以先求解矩阵方程

$$A_{m\times n}B_{n\times m}A_{m\times n} = A_{m\times n}$$

矩阵B称为A的广义逆，记为A^{-}。

定义 2.2.1：对矩阵 $A_{m\times n}$，一切满足方程 $AXA=A$ 的矩阵 X，称为矩阵 A 的广义逆，记为 A^{-}，即 $AA^{-}A=A$。

定理 2.2.1：设 $rank(A_{m\times n})=r$，若 A 表为

$$A=P_{m\times m}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_{n\times n},$$

其中 P,Q 可逆，则

$$A^{-}=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix}P^{-1}$$

这里 B,C,D 为适当阶数的任意矩阵。

推论 2.2.1：

1. 任何矩阵A的广义逆A^-总存在；

2. A^-唯一$\Leftrightarrow A$可逆；

3. $rank(A^-) \geq rank(A) = rank(A^- A) = rank(AA^-)$

设矩阵$A_{m\times n}$，A的列向量所张成的空间记为$\mu(A)$，即$\mu(A)=\left\{Ax \middle| x\in R^n\right\}$。

基本性质：

1.$\mu(A)\subset\mu(B)\Leftrightarrow\exists C, A=BC$；

2.$\dim\mu(A)=rank(A)$。

定理 2.2.2： $\mu(A')=\mu(A'A)$。

定理 2.2.3：对任何矩阵A

1. $A(A'A)^{-}A'$ 与 $(A'A)^{-}$ 的取值无关且 $rank\left(A(A'A)^{-}A'\right)=rank(A)$；

2. $A(A'A)^{-}A'A=A$， $A'A(A'A)^{-}A'=A'$。

定理 2.2.4：设线性方程$A_{m\times n}x=b$是相容的，A^{-}为A给定的一个广义逆，则

1. $x=A^{-}b$即为方程的一个解；
2. 齐次方程 $Ax=0$ 的所有解为 $x=(I_n-A^{-}A)z$，其中z为任意$n\times 1$向量；
3. 方程 $Ax=b$ 的所有解为 $x=A^{-}b+(I_n-A^{-}A)z$。

推论 2.2.4：相容性方程$Ax=b(b\neq 0)$的所有解为$\{x \mid x=A^{-}b, A^{-}\text{为}A\text{任一广义逆}\}$。

2.3 正交投影

R^n 中两个向量 x,y 的内积定义为 $(x,y)=x'y$，若 $x'y=0$，则称 $x\perp y$。若 $S\subset R^n$ 为线性子空间，$\forall y\in S, x\perp y$，则称 $x\perp S$。令 $S^{\perp}=\{x|x\perp S\}$，则 $S^{\perp}$ 也是线性子空间，称为 S 的正交补，易见 $S\bigcap S^{\perp}=\{0\}, S\oplus S^{\perp}=R^n, (S^{\perp})^{\perp}=S$。

例 1：令 $S=\mu(A_{n\times m})\subset R^n, rank(A)=m$，则 $S^{\perp}=\mu(B)$，这里 $B=I_n-A(A'A)^{-1}A'$。

设$rank(A_{n\times m})=r$，若$n\times(n-r)$矩阵B满足1.$A'B=0$；2.$rank(B)=n-r$，则称矩阵B为A的正交补，记$B=A^{\perp}$。从定义易见$A^{\perp}$是所有使得$A'B=0$的B秩最大的矩阵。

例 2：设$n\times m$矩阵A，则

$$\mu(A^{\perp})=\mu(A)^{\perp},\mu(A^{\perp})\oplus\mu(A)^{\perp}=R^{n}。$$

设$x \in R^n$，$S \subset R^n$为线性子空间，x有唯一分解$x = y + z$，$y \in S, z \in S^{\perp}$，称y为x在子空间S上的正交投影(orthogonal projection)。若矩阵$P_{n\times n}$满足对$\forall x \in R^n$，其在子空间S上的正交投影$y = Px$，则称P为S上的正交投影矩阵(简称投影矩阵)。

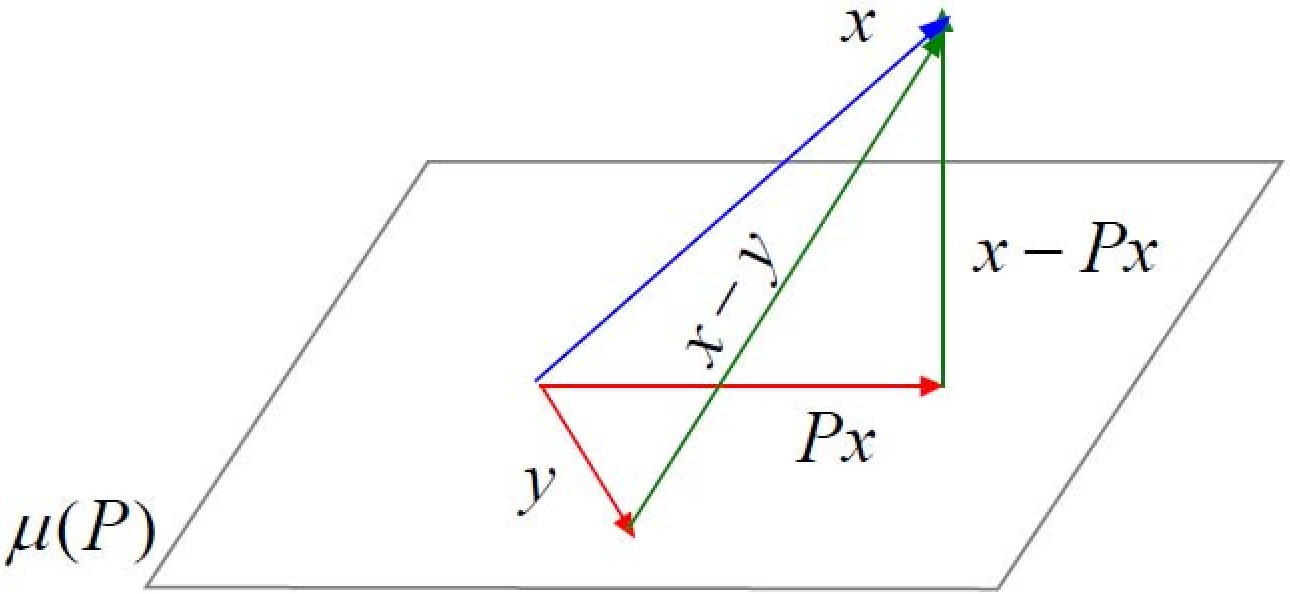
定理 2.3.1：$\mu(A_{n\times m})$上的正交投影矩阵为$P_A = A(A'A)^{-}A'$。

定理 2.3.2: P 为投影矩阵 $\Leftrightarrow$ P 对称幂等。

定理 2.3.3： $P_{n\times n}$ 为投影矩阵 $\Leftrightarrow \forall x \in R^n$，

$$\|x - Px\| = \inf_{y\in\mu(P)} \|x - y\|。$$

几何意义



第四章：线性模型参数估计与分布理论

4.1 最小二乘估计(Least Squared Estimate)

线性模型

$$Y_{n\times 1} = X_{n\times p}\beta_{p\times 1} + e_{n\times 1},$$

其中$Ee = 0$，通常对误差 e两种假定：

1.$Cov(e) = \sigma^2 I_n$，σ^2未知；

2.$e \sim N(0, \sigma^2 I_n)$，$\sigma^2$未知(比 1 强)。

由最小二乘法的思想，β的估计应选择使得

$Q(\beta) = \|e\|^2 = \|Y - X\beta\|^2 = (Y - X\beta)'(Y - X\beta)$ 达到最小。

若$\hat{\beta}$使得$\|Y-X\hat{\beta}\|^2=\min\limits_{\beta}\|Y-X\beta\|^2$，则称$\hat{\beta}$为$\beta$的一个最小二乘解。极小化$Q(\beta)$，则$\beta$需满足方程$\frac{\partial Q(\beta)}{\partial \beta}=0$，即得到正规方程

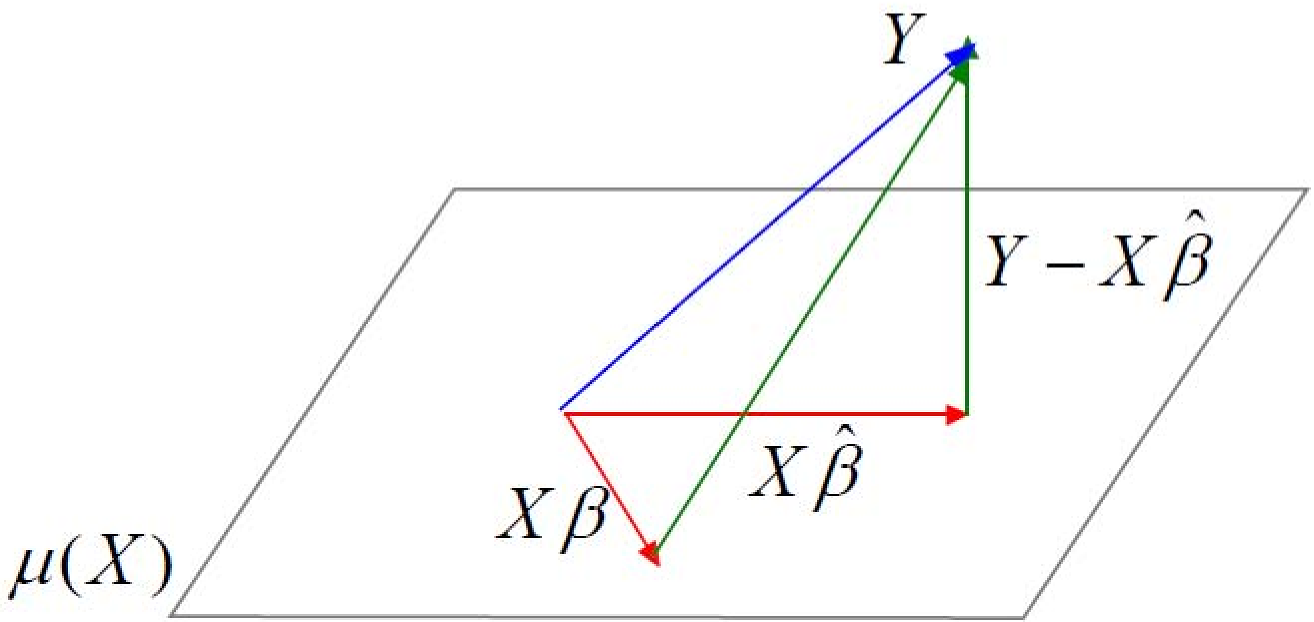
$$X'X\beta=X'Y。$$

正规方程的所有解为$(X'X)^{-}X'Y$。

定理 4.1.1：$\hat{\beta}$是最小二乘解$\Leftrightarrow\hat{\beta}$是正规方程的解，即$\hat{\beta}=(X'X)^{-}X'Y$。

最小二乘法几何解释：

$$\min_{\beta}\|Y - X\beta\|^2 = \min_{\theta\in\mu(X)}\|Y - \theta\|^2$$


Y
$Y - X\hat{\beta}$
$X\hat{\beta}$
$X\beta$
$\mu(X)$

当$rank(X)=p$时，最小二乘解有唯一解$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y$，且此时$\hat{\beta}$为$\beta$的无偏估计，即$E\hat{\beta}=\beta$，方差$Var(\hat{\beta})=\sigma^2(X'X)^{-1}$。

当$rank(X)<p$时，最小二乘解不唯一，此时最小二乘解中无 $\hat{\beta}$能作为 β的无偏估计。此外可以证明此时β的无偏估计不存在，此时β称为不可估的(nonestimable)。

定义 4.1.1:$c'\beta$为 β的某一线性函数（ c已知），若存在Y的线性函数$a'Y$使得$Ea'Y=c'\beta$，$\forall\beta$，则称 $c'\beta$是可估函数。

若$c'\beta$可估，$a'Y$为其一无偏估计，对$\forall b \in \mu(X)^{\perp}$，$(a+b)'Y$都是$c'\beta$的无偏估计。在所有线性无偏估计中，找出方差最小的估计，此估计称为最优线性无偏估计(Best Linear Unbiased Estimate，简写成 BLUE)，或称为 Gauss-Markov 估计(GM 估计)。

定理 4.1.3: (Gauss-Markov 定理)若$c'\beta$可估，则$c'\hat{\beta}$是其唯一的 GM 估计($\hat{\beta}$为β的 LS 估计)。

定理 4.2.1：在误差正态分布假设下，设$c'\beta$为可估函数，$\hat{\beta}=(X'X)^{-}X'Y$，$rank(X)=r$，则：

1. $c'\hat{\beta}$ 为 $c'\beta$ 的极大似然估计(MLE)，且 $c'\hat{\beta}\sim N\left(c'\beta,\sigma^{2}c'(X'X)^{-}c\right)$；

2. $\frac{n-r}{n}\hat{\sigma}^{2}$是$\sigma^{2}$的 MLE，且$\frac{(n-r)\hat{\sigma}^{2}}{\sigma^{2}}\sim\chi_{n-r}^{2}$；

3. $c'\hat{\beta}$与$\hat{\sigma}^{2}$独立。

注：对可估函数来说，其 LSE 与 MLE 一致；但对误差方差的估计，LSE 是无偏的，MLE 是有偏的。

定理 4.2.2：在正态误差假设下

1.$T_1 = Y'Y$，$T_2 = X'Y$是完全、充分统计量；

2.若$c'\beta$可估，则$c'\hat{\beta}$是唯一最小方差无偏估计(Minimum Variance Unbiased Estimate，简写 MVUE)；

3.$\hat{\sigma}^2$为σ^2的 MVUE。

第五章：线性模型假设检验

5.1 F检验

考虑如下线性模型：

$$Y = X_{n\times p}\beta + e，\ e \sim N(0,\sigma^2 I_n),$$

设$rank(X)=r$，矩阵$H_{m\times p}$(已知)，线性假设

$$H_0：\ H\beta = 0,$$

不失一般性设$rank(H)=m$，现要检验假设H_0(作出拒绝或接受该假设的判断)。

考虑该假设的似然比(likelihood ratio)检验。设似然函数

$$L(Y;\beta,\sigma^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n \exp\left(-\frac{\|Y-X\beta\|^2}{2\sigma^2}\right),$$

则似然比定义为

$$\lambda=\frac{\sup\limits_{\beta,\sigma^2} L(Y;\beta,\sigma^2)}{\sup\limits_{\substack{\beta,\sigma^2\\ H\beta=0}} L(Y;\beta,\sigma^2)}。$$

因此似然比

$$\lambda = \left(\frac{\left\| Y - X\hat{\beta}_H \right\|^2}{\left\| Y - X\hat{\beta} \right\|^2} \right)^{\frac{n}{2}} = \left(1 + \frac{k}{n-r} F \right)^{\frac{n}{2}},$$

这里

$$F = \frac{(SS_{HE} - SS_E)/k}{SS_E/(n-r)},$$

$$SS_E = \left\| Y - X\hat{\beta} \right\|^2，\quad SS_{HE} = \left\| Y - X\hat{\beta}_H \right\|^2,$$

$$k = rank(X) + rank(H) - rank\begin{pmatrix} X \\ H \end{pmatrix}。$$

定理 5.1.1：在本节线性模型假设下，

1. $\dfrac{SS_E}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-r}$；

2. $\dfrac{SS_{HE}-SS_E}{\sigma^2} \sim \chi^2_{k,\delta}$，这里$\delta = \dfrac{\left\| X(\beta - E\hat{\beta}_H) \right\|^2}{\sigma^2}$；

3. $SS_{HE}-SS_E$与SS_E独立；

4. 在假设H_0下，$F \sim F_{k,n-r}$。

第六章：置信区间(域)与置信带

6.1 置信椭球(confidence ellipse)

设线性模型 $Y = X_{n\times p}\beta + e$，$e \sim N(0, \sigma^2 I_n)$，$rank(X) = r$，

$$\Phi = H_{m\times p}\beta = \begin{pmatrix} h_1'\beta \\ \vdots \\ h_m'\beta \end{pmatrix}$$

为 m 个独立的可估函数，即 $rank(H) = m$，$\mu(H') = \mu(X')$。

令 $\hat{\beta}=(X'X)^{-}X'Y$， 则 $\hat{\Phi}=H\hat{\beta}$ 为 Φ 的 BLUE， 且 $\hat{\Phi}\sim N_m(\Phi,\sigma^2 V)$， 这里 $V=H(X'X)^{-}H'>0$。由推论 3.2.2

$$\frac{(\hat{\Phi}-\Phi)'V^{-1}(\hat{\Phi}-\Phi)}{\sigma^2}\sim\chi_m^2。$$

由定理 4.2.1，σ^2的估计$\hat{\sigma}^2=\frac{\left\|Y-X\hat{\beta}\right\|^2}{n-r}$且与$\hat{\Phi}$独立，$\frac{(n-r)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\sim\chi_{n-r}^2$，从而

$$\frac{(\hat{\Phi}-\Phi)'V^{-1}(\hat{\Phi}-\Phi)}{m\hat{\sigma}^2} \sim F_{m,n-r}。$$

因此对$\forall\alpha\in(0,1)$，

$$P\left(\frac{(\hat{\Phi}-\Phi)'V^{-1}(\hat{\Phi}-\Phi)}{m\hat{\sigma}^2} \le F_{m,n-r}(\alpha)\right) = 1-\alpha。$$

令

$$D=\left\{\Phi \middle| (\Phi-\hat{\Phi})'V^{-1}(\Phi-\hat{\Phi}) \le m\hat{\sigma}^2 F_{m,n-r}(\alpha)\right\},$$

是以$\hat{\Phi}$为中心的一个椭球，$P(\Phi\in D)=1-\alpha$，

D称为Φ的置信系数为$1-\alpha$的置信椭球。

用$H\beta$，$H\hat{\beta}$，$H(X'X)^{-}H'$代替$\Phi,\hat{\Phi},V$，则置信椭球可写为

$$\left(H\beta-H\hat{\beta}\right)'\left[H(X'X)^{-}H'\right]^{-1}\left(H\beta-H\hat{\beta}\right)\le m\hat{\sigma}^2F_{m,n-r}(\alpha)。$$

特别若$m=1$，由于$F_{1,n-r}$与$t^2{}_{n-r}$分布一致，令$t_{n-r}(\alpha/2)$为上$\alpha/2$分位点，则此时可估函数$h'\beta$的$1-\alpha$置信区间为：

$$h'\hat{\beta}\pm t_{n-r}(\alpha/2)\hat{\sigma}\sqrt{h'(X'X)^{-}h},$$

或$h'\hat{\beta}\pm t_{n-r}(\alpha/2)\hat{\sigma}_{h'\hat{\beta}}$，其中$\hat{\sigma}^2_{h'\hat{\beta}}=\hat{\sigma}^2h'(X'X)^{-}h$为$Var(h'\beta)$的估计。

第八章：线性回归分析

将前面几章关于线性模型的理论用于线性回归模型，在线性回归分析中，通常设计矩阵是满秩的，即$rank(X_{n\times p}) = p$，此时未知参数β是可估的。

8.1 参数 LS 估计

设线性回归模型：

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_{p-1} x_{i,p-1} + e_i$$

写成矩阵形式，令

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1,p-1} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2,p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{n,p-1} \end{pmatrix},$$

$$\beta=\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{p-1} \end{pmatrix}, \quad e=\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \text{则}$$

$$Y = X\beta + e$$

假设$Ee = 0$，$Cov(e) = \sigma^2 I_n$，$rank(X_{n\times p}) = p$。

β_0称为常数项(截距)，β_I称为回归系数，最小二乘估计$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$，令$\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\left\|Y - X\hat{\beta}\right\|^2}{n-p}$。

定理 8.1.1：在上述假定下，

1.$E\hat{\beta} = \beta$，$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$，$E\hat{\sigma}^2 = \sigma^2$；

2. (Gauss-Markov 定理)对$\forall c'\beta$，$c'\hat{\beta}$是其唯一的 BLUE；

若进一步假定误差为正态分布，则

3.对$\forall c'\beta$，$c'\hat{\beta}$是其唯一的MVUE；

4.$\hat{\beta} \sim N_p\left(\beta, \sigma^2 (X'X)^{-1}\right)$，$\dfrac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-p}$，$\hat{\beta}$与$\hat{\sigma}^2$独立。

在线性回归中，主要感兴趣的是回归系数β_I的估计，常数项β_0单独考虑。令$E_{n\times 1} = (1, \cdots, 1)'$，$X_{n\times p} = \left(E_n \vdots \widetilde{X}_{n\times(p-1)}\right)$，则模型为$Y = \beta_0 E_n + \widetilde{X}\beta_I + e$。

在实际应用中，有时要对数据中心化。所谓中心化就是把自变量的度量起点移至到 n 次试验中所取值的中心点处。记

$$\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}}{n}, 1 \le j \le p-1 \text{ ，} \quad \bar{x} = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{p-1})' \text{ ，}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$，则中心化后模型分量形式为：

$$y_i = \alpha + \beta_1(x_{i1} - \bar{x}_1) + \cdots + \beta_{p-1}(x_{i,p-1} - \bar{x}_{p-1}) + e_i$$

其中$\alpha = \beta_0 + \bar{x}'\beta_I$，写成矩阵形式为

$Y = \alpha E_n + \tilde{X}_c \beta_I + e$， $Ee = 0$， $Cov(e) = \sigma^2 I_n$，

其中$\tilde{X}_c = \left(I_n - \frac{E_n E_n'}{n} \right)\tilde{X}$。$\tilde{X}_c$称为中心化了的设计矩阵，易见$\tilde{X}_c' E_n = 0$。此时线性回归模型称为中心化的线性回归模型。正规方程：

$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \tilde{X}_c'\tilde{X}_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\bar{y} \\ \tilde{X}_c' Y \end{pmatrix}$$

解得

$$\hat{\alpha} = \bar{y}，\ \hat{\beta}_I = (\widetilde{X}_c'\widetilde{X}_c)^{-1}\widetilde{X}_c'Y，$$

$$Cov\begin{pmatrix}\hat{\alpha}\\ \hat{\beta}_I\end{pmatrix} = \sigma^2\begin{pmatrix}1/n & 0\\ 0 & (\widetilde{X}_c'\widetilde{X}_c)^{-1}\end{pmatrix}。$$

中心化的线性模型，常数项由样本均值估计，回归系数β_I的估计等价于线性回归模型$Y = \widetilde{X}_c\beta_I + e$的参数估计。若误差正态分布，则中心化后的模型估计 $\hat{\alpha}$与 $\hat{\beta}_I$独立。

定理 7.1.2：中心化后给出的回归系数估计与没有中心化时给出的估计是一致的。

除了中心化，对协变量经常作另一种处理。

令 $s_j^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_j)^2$ ， $1 \le j \le p-1$ ，

$Z = \left(z_{ij}\right)_{n\times(p-1)}$，其中$z_{ij} = \dfrac{x_{ij} - \overline{x}_j}{s_j}$，则$\sum_{i=1}^{n} z_{ij}^2 = 1$。

z_{ij}是将x_{ij}中心化后再标准化，易见$E'Z = 0$。

令 $R=(r_{ij})_{(p-1)\times(p-1)}=Z'Z$，则

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_{ki}-\bar{x}_i)(x_{kj}-\bar{x}_j)}{s_i s_j}$$

若把协变量看成随机的，则 r_{ij} 正好是协变量 x_i 与 x_j 的样本相关系数。中心化后标准化的好处在于：

1.R可以分析协变量之间的相关关系；

2.消去了单位和取值范围的差异(R 无量纲)。

用Z作为设计矩阵，此时分量形式为：$1 \le i \le n$，

$$y_i = \alpha^{(0)} + \frac{x_{i1} - \bar{x}_1}{s_1} \beta_1^{(0)} + \cdots \frac{x_{i,p-1} - \bar{x}_{p-1}}{s_{p-1}} \beta_{p-1}^{(0)} + e_i。$$

这里$\alpha^{(0)} = \alpha$，$\beta_i^{(0)} = s_i \beta_i$，$1 \le i \le p-1$。记

$\beta_I^{(0)} = \left(\beta_1^{(0)}, \cdots, \beta_{p-1}^{(0)},\right)'$，写成矩阵形式：

$$Y = \alpha^{(0)} E_n + Z \beta_I^{(0)} + e,$$

最小二乘估计

$$\hat{\alpha}^{(0)} = \bar{y}，\hat{\beta}_i^{(0)} = s_i \hat{\beta}_i，1 \le i \le p-1。$$

8.2 显著性检验

对回归系数作出估计后就可以得到经验回归方程。所建立的经验回归方程是否真正地刻画了响应变量与协变量之间的实际依赖关系呢？

对线性回归模型：$1 \le i \le n$，

$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_{p-1} x_{i,p-1} + e_i$， $e_i \sim N(0,\sigma^2)$。首先考虑响应变量 y 是否线性地依赖协变量 $x_1,\cdots,x_{p-1}$ 这个整体，即检验假设

$$H_0: \beta_1 = \cdots = \beta_{p-1} = 0。$$

上检验称为回归方程的显著性检验。若假设 H_0 被接受，意味着相对误差 e 而言，所有协变量对响应变量 Y 的影响是不重要的。

将模型中心化，写成矩阵形式：

$$Y = \alpha E_n + \widetilde{X}_c \beta_I + e = (E_n \vdots \widetilde{X}_c)\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta_I\end{pmatrix} + e, \quad e \sim N(0, \sigma^2 I_n)。$$

要检验的假设为

$$H_0: \ H\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta_I\end{pmatrix} = 0，其中 H_{(p-1)\times p} = (0 \vdots I_{p-1})。$$

该假设可以由F检验来给出拒绝域。具体地

$$F=\frac{\hat{\beta}_I'\widetilde{X}_c'Y/(p-1)}{(Y'Y-n\bar{y}^2-\hat{\beta}_I'\widetilde{X}_c'Y)/(n-p)},$$

在假设H_0下，$F\sim F_{p-1,n-p}$，故给定水平$\alpha\in(0,1)$，当$F>F_{p-1,n-p}(\alpha)$时拒绝假设H_0，否则接受H_0。

当回归方程的显著性检验结果是拒绝原假设时，仅说明至少有一个$\beta_j\neq 0$，并不排除响应变量 y不依赖其中某些协变量。

于是在整体的回归方程显著性检验被拒绝后还需对每个自变量逐一地作显著性检验，即对固定的某个 i，作如下假设检验H_i：$\beta_i = 0$。

对线性模型$Y = X\beta + e$，$e \sim N(0, \sigma^2 I_n)$，估计$\hat{\beta} \sim N_p(\beta, \sigma^2 (X'X)^{-1})$，$\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\left\| Y - X\hat{\beta} \right\|^2}{n-p}$，令$C = (c_{ij})_{p \times p} = (X'X)^{-1}$，则$\hat{\beta}_i \sim N(\beta_i, \sigma^2 c_{ii})$。

在假设H_i下，$t_i = \dfrac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{c_{ii}}\hat{\sigma}} \sim t_{n-p}$，故给定水平$\alpha$，当$|t_i| > t_{n-p}(\alpha)$时拒绝$H_i$，否则接受$H_i$。

若经过检验，接受原假设H_i：$\beta_i = 0$，认为协变量 x_i对响应变量 y无显著影响，因而可以将其从回归方程中剔除，此时 y对剩余协变量重新作回归，回归系数的估计也随之变化，然后再检验剩余回归系数是否为零，再剔除经检验对y无显著影响的协变量，这样的过程一直下去。