第三章　消费者选择与需求理论

消费者选择

弱公理与需求法则

显示偏好弱公理实际上是我们在探讨决策理论中，基于选择结构的方法需要满足的一致性公理。

在瓦尔拉斯需求函数下，弱公理可以表示为：

定义 2.F.1：瓦尔拉斯需求函数 $x(p,w)$ 满足显示偏好弱公理（weak axiom of revealed preference, WA），**如果对于任何两个价格财富状况 (p,w) 和 (p',w')，下列性质都成立：**

$$\text{若 } p\cdot x(p',w')\leq w \text{ 和 } x(p',w')\neq x(p,w)\text{，则 } p'\cdot x(p,w)>w'.$$

这里的定义是弱公理的特殊形式，即在瓦尔拉斯预算集上进行选择，并且需求函数x(p,w)指明了消费者唯一的选择。

消费者选择

弱公理与需求法则

如果满足：$p \cdot x(p', w') \leq w$ 和 $x(p', w') \neq x(p, w)$，则我们知道当消费者面对价格p和财富w时，即使他也能买得起商品束 $x(p', w')$ 但他还是选择了商品束 $x(p, w)$。我们可以将这种选择解释为它“显示了”消费者更偏好于 $x(p, w)$ 。

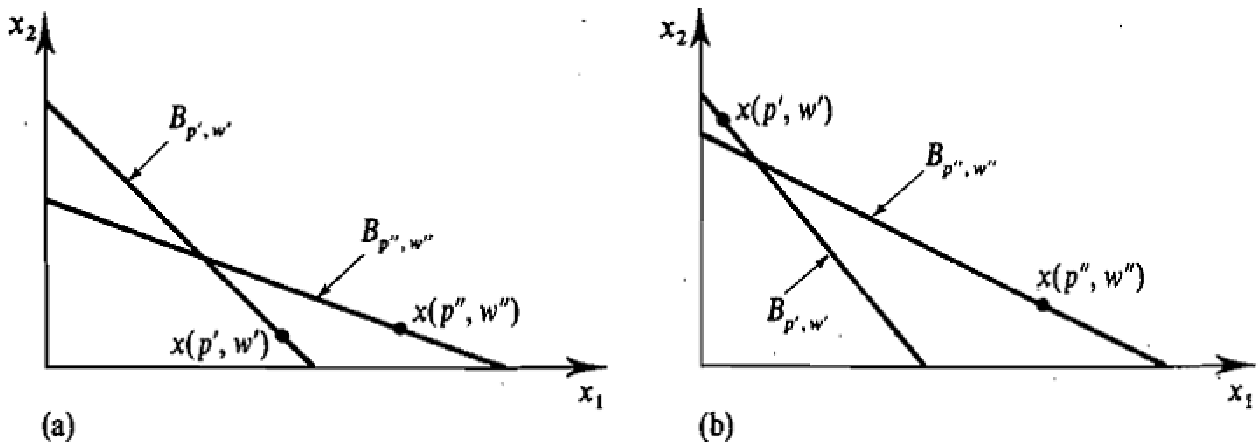
假设消费者的需求行为能够体现一定的一致性，也就是说，给定消费者的显示性偏好，一旦 $x(p', w')$ 和 $x(p, w)$ 都能买得起时，他总是选择后者而不是前者。如果消费者选择了前者，则意味着在价格和财富组合 (p', w') 的情况下，他必定买不起 $x(p, w)$

也就是说，按照弱公理的要求，必定有：$p' \cdot x(p, w) > w'$

消费者选择

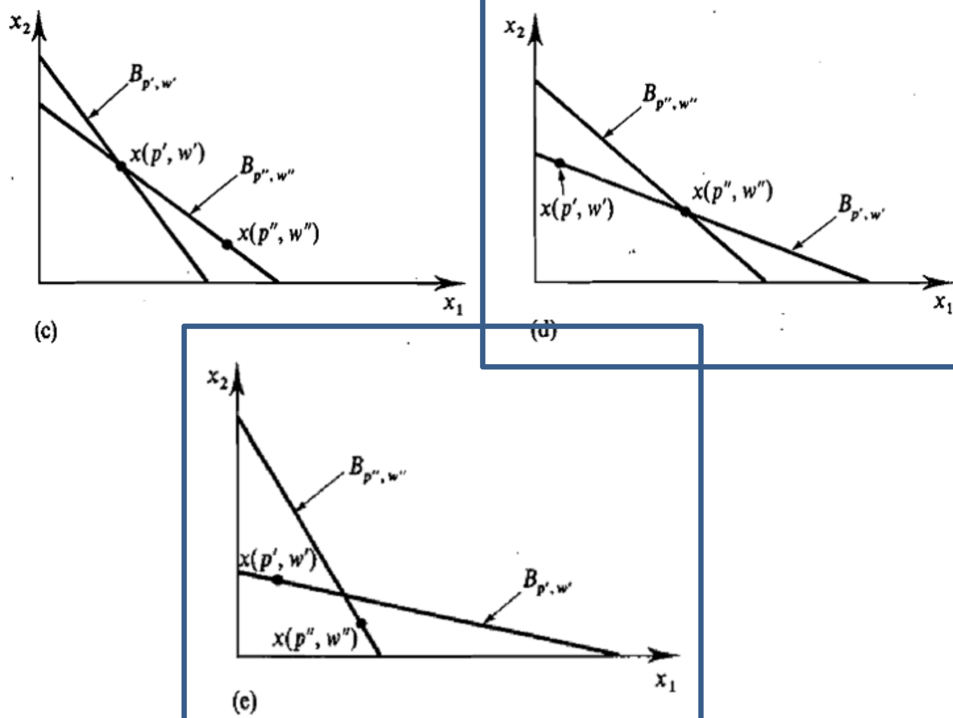
弱公理与需求法则

考虑L=2的情况。每个图中都给出了两个预算集$B_{p',w'}$ 和 $B_{p'',w''}$ 以及各自相应的选择$x(p',w')$和 $x(p'',w'')$。由弱公理可知: $p'\cdot x(p'',w'')\le w'$ 和 $p''\cdot x(p',w')\le w''$ 不可能同时成立。



消费者选择

弱公理与需求法则



消费者选择

弱公理与需求法则

弱公理对于价格变动对需求的影响来说，有重要意义。

吉芬商品：价格变动对消费者的影响有两个方面。

（1）改变了不同商品的相对价格

（2）改变了消费者的实际财富：某种商品价格上升使得消费这种商品的消费者变得更贫穷。

消费者选择

弱公理与需求法则

为了只研究其中的价格效应，我们假设：商品价格变动时，相应调整消费者的财富，使得他恰好能在新价格下买得起原来的消费束。也就是说，如果消费者原来面对价格p和财富w时，他选择了消费束x(p,w)，那么当价格变为 p' 时，我们设想将消费者的财富调整为 $w' = p' \cdot x(p,w)$。因此，财富调整量为： $\Delta w = \Delta p \cdot x(p,w)$

这种财富调整称为斯勒茨基财富补偿。

消费者选择

弱公理与需求法则

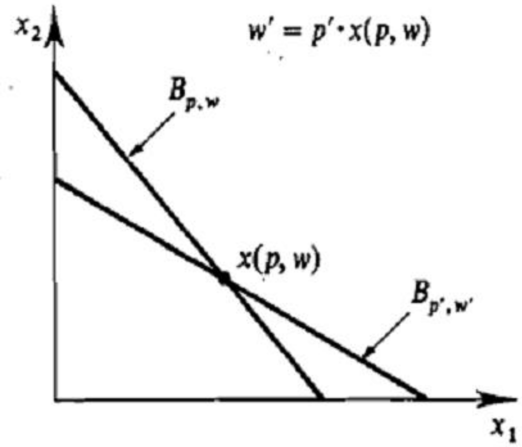


图 2.F.2：从 (p, w) 到 (p', w') 的补偿性价格变化

预算集因为价格的变化将发生变化：商品1的价格下降时，进行了斯勒茨基财富补偿。从几何图形上看我们的限制就是与新的 (p', w') 对应的预算超平面要经过向量x(p,w).

消费者选择

弱公理与需求法则

伴随着这种财富补偿的价格变动可以被称为补偿性价格变化。

弱公理可以等价的用需求对补偿性价格变化的反应来表示：

命题 2.F.1：假设瓦尔拉斯需求函数 $x(p,w)$ 是零次齐次的且满足瓦尔拉斯法则。则 $x(p,w)$ 满足弱公理当且仅当下列性质成立：

对于从初始价格财富组合 (p,w) 到新价格财富组合 $(p',w')=(p',p'\cdot x(p,w))$ 的任何补偿性价格变化，我们有

$$(p'-p)\cdot[x(p',w')-x(p,w)]\leq 0, \qquad \text{(2.F.1)}$$

且仅当 $x(p',w')\neq x(p,w)$ 时，严格不等式成立。

消费者选择

弱公理与需求法则

首先证明弱公理的情况下不等式 $(p'-p)\cdot[x(p',w')-x(p,w)]\leq 0$ 成立。

当 $x(p',w')=x(p,w)$时，自然有$(p'-p)\cdot[x(p',w')-x(p,w)]=0$，成立。

当 $x(p',w')\neq x(p,w)$时，不等式的左边可以写成

$$\begin{aligned}&(p'-p)\cdot[x(p',w')-x(p,w)]\\&=p'\cdot[x(p',w')-x(p,w)]-p\cdot[x(p',w')-x(p,w)]\end{aligned}$$

由于从p变为 p'是补偿性价格变化，因此$p'\cdot x(p,w)=w'$ 。而瓦尔拉斯法则又决定了 $w'=p'\cdot x(p',w')$ ，因此可以得到第一项$p'\cdot[x(p',w')-x(p,w)]=0$

又因为$p'\cdot x(p,w)=w'$，所以x(p,w)在价格财富组合为 (p',w')的情况下也是能够买得起的。因此弱公理意味着 $x(p',w')$ 在价格财富组合为(p,w)的情况下必定买不起。

因此可以得到 $p\cdot x(p',w')>w$，由瓦尔拉斯法则可知 $p\cdot x(p,w)=w$，因此可以得到：$p\cdot[x(p',w')-x(p,w)]>0$

消费者选择

弱公理与需求法则

然后证明不等式 $(p'-p)\cdot[x(p',w')-x(p,w)]\leq 0$ 成立意味着弱公理成立。

相当于证明，若对于两个价格财富组合 (p,w) 和(p',w')，当$x(p',w')\neq x(p,w)$
并且$p\cdot x(p',w')=w$ 时，我们有 $p'\cdot x(p,w)>w'$， 则弱公理成立。

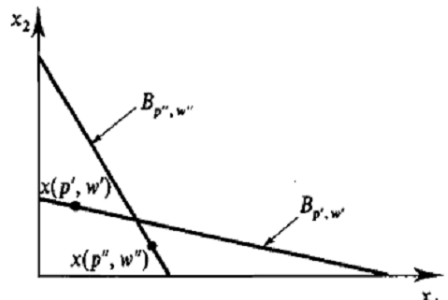
想要证明上面的命题，我们需要证明，如果弱公理不成立，那么必定存在违反弱公理的补偿性价格变化。我们假设有两个价格组合 (p',w')和(p'',w'') 使得：

$$x(p',w')\neq x(p'',w'') \qquad p'\cdot x(p'',w'')\leq w' \qquad p''\cdot x(p',w')\leq w''$$

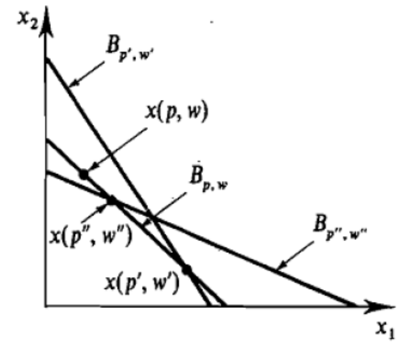
如果这两个若不等式中有一个是以等式形式成立的，则实际上就是一个补偿性价格变化。我们将其假设为严格不等式，即 $p'\cdot x(p'',w'')<w'$ 且 $p''\cdot x(p',w')<w''$

消费者选择

弱公理与需求法则



(e)



选择一个 $\alpha \in (0,1)$ 使得 $(\alpha p' + (1-\alpha)p'')\cdot x(p',w') = (\alpha p' + (1-\alpha)p'')\cdot x(p'',w'')$

令 $p = \alpha p' + (1-\alpha)p''$ 和 $w = (\alpha p' + (1-\alpha)p'')\cdot x(p',w')$

可以得到：
$$\begin{aligned}\alpha w' + (1-\alpha)w'' &> \alpha p'\cdot x(p',w') + (1-\alpha)p''\cdot x(p',w')\\ &= w\\ &= p\cdot x(p,w)\\ &= \alpha p'\cdot x(p,w) + (1-\alpha)p''\cdot x(p,w).\end{aligned}$$

因此，要么有 $p'\cdot x(p,w) < w'$ 要么有 $p''\cdot x(p,w) < w''$

消费者选择

弱公理与需求法则

假设 $p' \cdot x(p,w) < w'$ 成立

有 $x(p,w) \neq x(p',w')$，并且 $p \cdot x(p',w') = w$

这样我们就构造出一个补偿性价格：从 (p',w') 变为 (p,w) 但违背了弱公理。

也就是说，如果弱公理不成立，就存在类似从 (p',w') 变为 (p,w) 的补偿性价格变化，使得：$x(p,w) \neq x(p',w')$，$p \cdot x(p',w') = w$ 和 $p' \cdot x(p,w) \leq w'$

但是由于x(·,·)满足瓦尔拉斯法则，我们可以得到

$$p \cdot [x(p',w') - x(p,w)] = 0 \text{ 和 } p' \cdot [x(p',w') - x(p,w)] \geq 0$$

$$(p'-p) \cdot [x(p',w') - x(p,w)] \geq 0 \text{ 和 } x(p,w) \neq x(p',w')$$

这与 $(p'-p) \cdot [x(p',w') - x(p,w)] \leq 0$ 相矛盾，满足该不等式意味着弱公理成立

消费者选择

弱公理与需求法则

不等式 $(p'-p)\cdot[x(p',w')-x(p,w)]\leq 0$ 可以简写为： $\Delta p\cdot\Delta x\leq 0$

可将其解释为一种**需求法则**：需求和价格的运动是相反的。

因为这一需求法则对于补偿性价格变化成立，所以通常也被称为**补偿性需求法则**。

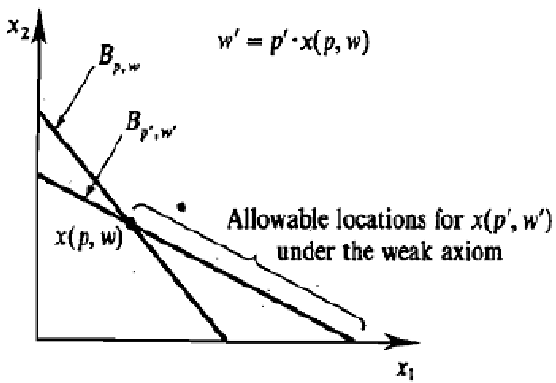
消费者选择

弱公理与需求法则

考虑某种商品l的自身价格 p_l 的补偿性变化对其需求的影响。

当只有这种商品自身价格变化时，$\Delta p = (0, \ldots, 0, \Delta p_l, 0, \ldots, 0)$ 。

由于 $\Delta p \cdot \Delta x = \Delta p_l \Delta x_l$，需求法则表明，如果 $\Delta p_l > 0$，则必然有 $\Delta x_l < 0$ 。



初始价格财富组合为(p,w)，商品1的价格补偿性下降，则预算线绕着x(p,w)转动。

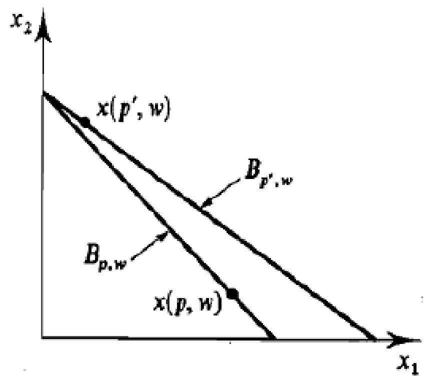
显示偏好弱公理只允许商品1的需求增加。

消费者选择

弱公理与需求法则

而对于非补偿性的价格变化来说，预算线是绕着在纵轴上的截距转动。

仅根据弱公理，未必得到与需求法则相一致的结论。因为弱公理对于新的消费束在什么位置上没有施加任何的限制，因此可能存在，价格下降，需求也下降的情况。



消费者选择

弱公理与需求法则

考虑消费者需求函数x(p,w)是个关于价格和财富的可微函数时，该命题便有着非常重要的微分含义。

假设给定某个价格财富组合(p,w)，现在价格发生微分变化dp，再假设我们对消费者进行补偿 $dw = x(p,w)\cdot dp$ （类似于 $\Delta w = x(p,w)\cdot \Delta p$ ），从而使得该价格变化变为补偿性变化。该命题就等价于： $dp\cdot dx \le 0$

由补偿性价格变化引起的需求的微分变化可以写成：

$$dx = D_p x(p,w)dp + D_w x(p,w)dw$$

$$dx = D_p x(p,w)dp + D_w x(p,w)\left[x(p,w)\cdot dp\right]$$

$$dx = \left[D_p x(p,w) + D_w x(p,w)x(p,w)^{\mathrm{T}}\right]dp$$

消费者选择

弱公理与需求法则

代入 $dp \cdot dx \le 0$ ，可得：

$$dp \cdot \left[D_p x(p,w) + D_w x(p,w) x(p,w)^{T} \right] dp \le 0$$

L×L矩阵，将其记为S(p,w)

$$S(p,w) = \begin{bmatrix} s_{11}(p,w) & \cdots & s_{1L}(p,w) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{L1}(p,w) & \cdots & s_{LL}(p,w) \end{bmatrix}$$

矩阵的第(l,k)个元素为 $s_{lk}(p,w) = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} x_k(p,w)$

这个矩阵被称为替代矩阵或斯勒茨基矩阵，它的每一个元素代表的就是替代效应。

消费者选择

弱公理与需求法则

矩阵的第(l,k)个元素 $s_{lk}(p,w)=\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k}+\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w}x_k(p,w)$ 之所以可以被称为替代效应，是因为它衡量的是由商品k的价格的微分变化时，我们调整了他的财富使他刚好仍能买得起原来的消费束而导致的商品l的消费量的微分变化，这种情况下我们对财富进行了补偿，也就是这个商品l的消费量的微分变化是仅在相对价格变化的情况下商品l替代其他商品或被其他商品替代的量。

如果我们不进行财富补偿，那么商品l的需求变动就是 $(\partial x_l(p,w)/\partial p_k)dp_k$

当我们进行财富补偿后，产生的财富量变化为 $x_k(p,w)dp_k$，这个财富的变化也会使得商品l的需求发生变化，这个由财富变化引起的替代效应就是

$$(\partial x_l(p,w)/\partial w)[x_k(p,w)dp_k]$$

所以这两个效应之和就刚好是 $s_{lk}(p,w)dp_k$ 。

消费者选择

$$dp \cdot \left[D_p x(p,w) + D_w x(p,w) x(p,w)^{\mathrm{T}} \right] dp \le 0$$

弱公理与需求法则

命题 2.F.2：若可微的瓦尔拉斯需求函数 $x(p,w)$ 满足瓦尔拉斯法则、零次齐次性以及弱公理，则在任何 (p,w) 处，斯勒茨基矩阵 $S(p,w)$ 对于任何 $v \in \mathbb{R}^L$ 都满足 $v \cdot S(p,w)v \le 0$。

满足该命题性质的矩阵称为负半定的，如果不等式对于所有的 $v \neq 0$ 都为严格的不等式，则该矩阵是负定。

矩阵S(p,w)的负半定性质，意味着$s_{ll}(p,w) \le 0$，也就是说，商品l关于自身价格的替代效应总是非正的。

对于吉芬商品来看，$s_{ll}(p,w) = \partial x_l(p,w) / \partial p_l + [\partial x_l(p,w) / \partial w] x_l(p,w) \le 0$

如果随着价格降低，需求量反而下降了，即 $\partial x_l(p,w) / \partial p_l > 0$

那么必然有$\partial x_l(p,w) / \partial w < 0$

也就是说，l是一种劣等商品