第三章　消费者选择与需求理论

消费者需求理论

经典的需求理论

经典的消费者需求理论是基于**消费者偏好**的。

因此，要对消费者行为进行分析，首先要确定消费者在消费集 $X \subset \mathbb{R}_{+}^{L}$ 中的消费束上有怎样的**偏好**。

消费者的偏好是用定义在消费集X上的**理性偏好关系** $\succsim$ 来表示的。而理性的偏好关系，需要满足完备性和传递性。

（i）完备性：对于所有 $x, y \in X$，都有 $x \succsim y$ 或 $y \succsim x$（或二者都成立）。

（ii）传递性：对于所有 $x, y, z \in X$，若 $x \succsim y$ 且 $y \succsim z$，则 $x \succsim z$。

消费者需求理论

偏好的基本性质

在消费者需求分析当中，除了要求偏好关系满足完备性和传递性，同时需要假定偏好满足另外两个基本性质：

（1）合意性

（2）凸性

消费者需求理论

偏好的基本性质

合意性假设：

对于消费者来说，商品多多益善！

也就是说我们更偏好更多的商品。

这个性质可以用单调性来描述。

定义 3.B.2：对于 X 上的偏好关系 $\succsim$，若 $x \in X$ 和 $y \gg x$ 意味着 $y \succ x$，则称 $\succsim$ 是是弱单调的（weakly monotone）或简称单调的。若 $y \geq x$ 且 $y \neq x$ 意味着 $y \succ x$，则它是强单调的（strongly monotone）[一]。

消费者需求理论

偏好的基本性质

合意性假设：

只要商品都是消费者喜欢的，而不是像噪音、污染这种的厌恶品，偏好是单调的这个假设一般就能够满足。

当我们面对的某种商品是厌恶品时，我们实际上也可以重新定义这种商品，例如定义为“缺乏噪音”这种新商品，那么我们的偏好就变得又符合单调性了，也就是满足合意性假设。

消费者需求理论

偏好的基本性质

合意性假设：

如果偏好 $\succsim$ 是单调的，对于一个既定的消费束而言，增加某些商品（但不一定是全部商品）的数量，可以得到另外一个消费束，那么消费者可能对这两个消费束是无差异的，或者更偏好于后者。

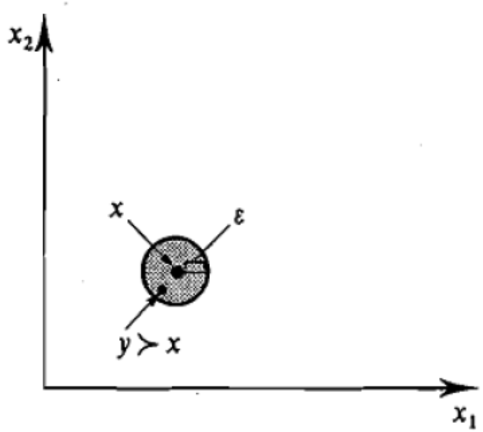
而如果偏好是强单调的，那么如果一个y中的某些商品数量比x多，且y中的其他商品数量至少和x中的一样多，那么y就严格偏好于x。

消费者需求理论

偏好的基本性质

合意性假设：

在实际情况下，强单调和单调都是比较严格的约束，因此对于消费者理论的大部分情况，我们可以仅要求偏好关系满足局部非饱和性。



对于任何的消费束 $x \in \mathbb{R}_+^L$ 和离x任意小的距离 $\varepsilon > 0$，在这个距离范围内都存在一个好于x的另一个消费束 $y \in \mathbb{R}_+^L$ 。

这里并不一定要求消费束y中的每种商品数量都比x中的多。见右图中的y。

消费者需求理论

偏好的基本性质

合意性假设：

定义 3.B.3：对于 X 上的偏好关系 $\succsim$ 来说，如果对于任何 $x \in X$ 和任何 $\varepsilon > 0$，都存在 $y \in X$ 使得 $\|y - x\| \le \varepsilon$ 且 $y \succ x$，则称该偏好关系是局部非饱和的（locally nonsatiated）[三]。

局部非饱和性是比单调性更弱的合意性假设。

如果偏好是强单调的，则它是单调的

如果偏好是单调的，则它是局部非饱和的

消费者需求理论

偏好的基本性质

合意性假设：

给定偏好关系 $\succsim$ 和消费束x，我们可以定义消费束的三个相关集：

(1) x的**无差异集**：由所有与x无差异的消费束组成的集合，即 $\{y \in X : y \sim x\}$

(2) x的**上轮廓集**：由所有与x至少一样好的消费束组成的集合 $\{y \in X : y \succsim x\}$

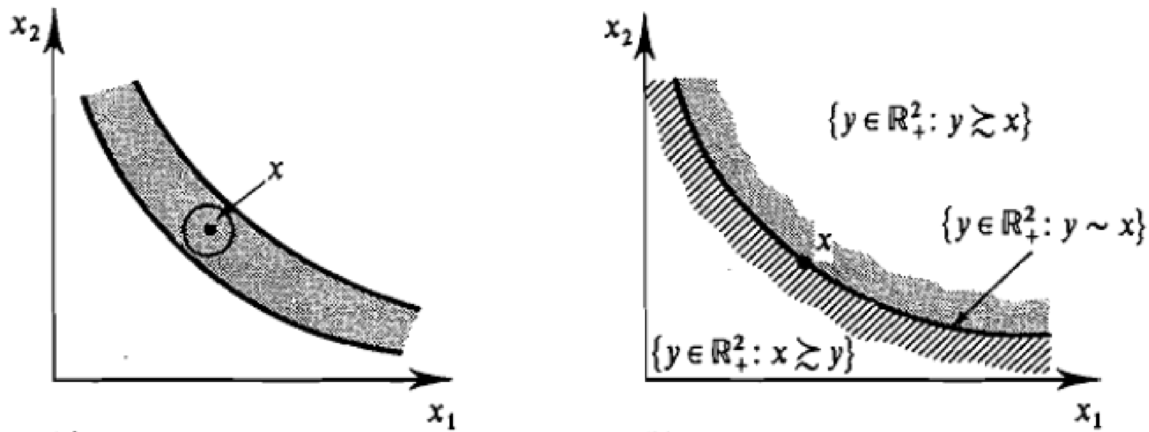
(3) x的**下轮廓集**：由所有不比x好的消费束组成的集合，即 $\{y \in X : x \succsim y\}$

消费者需求理论

偏好的基本性质

合意性假设：

局部非饱和性意味着不可能出现“厚的”无差异集。



(a) (b)

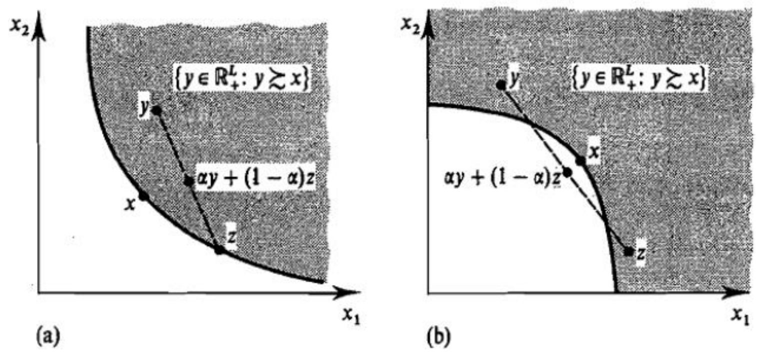
消费者需求理论

偏好的基本性质

凸性假设：

凸性假设涉及了消费者在不同商品之间的权衡。

定义 3.B.4： X 上的偏好关系 $\succsim$ 是凸的，若对于任何 $x \in X$，上轮廓集 $\{y \in X : y \succsim x\}$ 是凸的；也就是说，若 $y \succsim x$ 和 $z \succsim x$，则对于任何 $\alpha \in [0,1]$ 都有 $\alpha y + (1-\alpha)z \succsim x$。



消费者需求理论

偏好的基本性质

凸性假设：

在经济学分析中，凸性是一个很强并且很重要的假设。

凸性可以用边际替代率递减来解释：在凸偏好的情况下，如果我们从任意一个消费束x开始，对于任何两种商品来说，如果我们减少一种商品的数量，每次减少一个单位，为了补偿这种变化，必须连续增加另外一种商品的数量，并且每次增加的数量是递增的。

消费者需求理论

偏好的基本性质

凸性假设：

凸性也可以理解为一个经济参与人偏爱多样性的基本倾向。

在凸偏好的情形下，如果x和y是无差异的，那么一半x和一半y的组合，$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y$ 不可能比x或者y差。

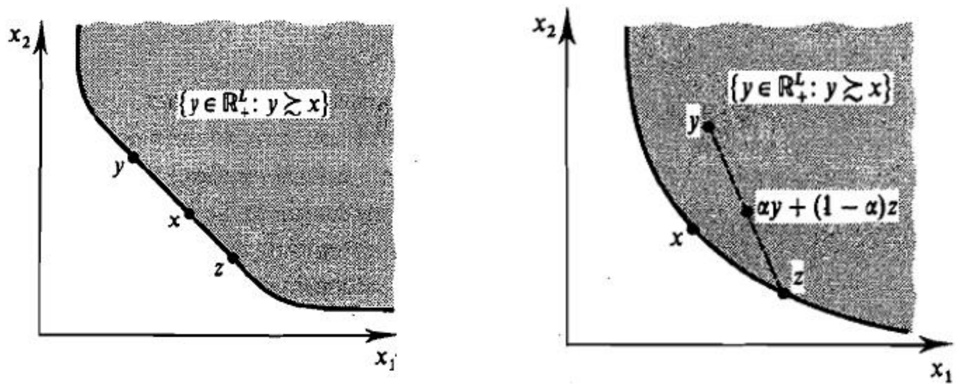
消费者需求理论

偏好的基本性质

凸性假设：

凸性假设的严格版本是**严格凸性**。

定义 3.B.5：X **上的偏好关系** $\succsim$ **是严格凸的**（strictly convex），**若对于任何** x**，我们有** $y \succsim x$ **和** $z \succsim x$ **且** $y \neq z$ **意味着** $\alpha y + (1-\alpha) z \succ x$ **对于所有** $\alpha \in (0,1)$ **成立。**



消费者需求理论

偏好的基本性质

在进行经济分析时，我们希望能从*单个无差异集推导出消费者的全部偏好关系*。

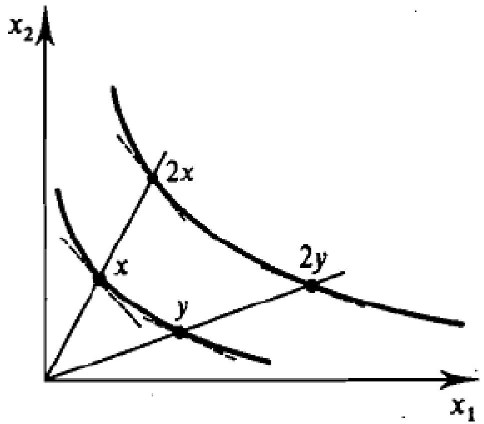
位似偏好和**拟线性偏好**就是这种偏好。

消费者需求理论

偏好的基本性质

位似偏好

定义 3.B.6：$X=\mathbb{R}_+^L$ 上的偏好关系 $\succsim$ 是位似的（homothetic），若所有无差异集都可以通过沿着任何射线等比例地扩展而联系在一起；也就是说，若 $x\sim y$ 则 $\alpha x\sim\alpha y$，其中 $\alpha\geq 0$ 是任意的。



消费者需求理论

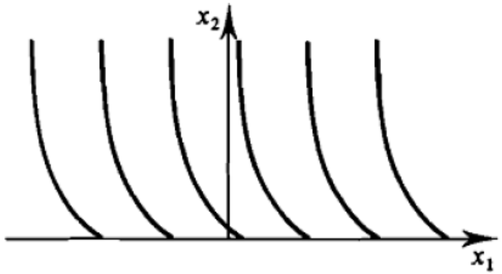
偏好的基本性质

拟线性偏好

定义 3.B.7：$X=(-\infty,\infty)\times\mathbb{R}_+^{L-1}$ 上的偏好关系 $\succsim$ 关于商品 1（在这种情形下商品 1 称为计价物商品（numeraire commodity））是拟线性的（quasilinear），如果[五]：

（i）所有无差异集彼此之间可以通过沿着商品 1 的坐标轴平行位移而得到。也就是说，若 $x\sim y$，则对于 $e_1=(1,0,\ldots,0)$ 和任何 $\alpha\in\mathbb{R}$，都有 $(x+\alpha e_1)\sim(y+\alpha e_1)$。

（ii）商品 1 是合意的（消费者所想要的）；也就是说，对于所有 x 和 $\alpha>0$，都有 $x+\alpha e_1\succ x$。



在该定义中，假设商品1的消费量是没有下界的

消费者需求理论

偏好与效用

效用函数是偏好的表示方法

例 3.C.1：字典序偏好关系。为简单起见，假设 $X = \mathbb{R}_+^2$。将 $x \succsim y$ 定义为：要么"$x_1 > y_1$"或要么"$x_1 = y_1$ 和 $x_2 \geq y_2$"。这样的偏好关系称为**字典序的偏好关系**

这个名字源于字典中字的排列方式：像英文字典一样，英文单词第一个字母在单词排序上具有最高优先权，在决定偏好顺序时商品1也具有最高优先权。当两个商品束中的商品1数量相等时，商品2的数量决定了消费者的偏好。

字典序偏好关系是完备的、传递的、强单调的、严格凸的。但是却不存在能够表示这个偏好关系的效用函数。

- 在这种偏好下，两个不同的商品束不可能是无差异的，也就是说无差异集是单点集。在这种情况下，无差异集有两个衡量维度，但是效用函数是单值的。

消费者需求理论

偏好与效用

为了保证效用函数存在，必须假设偏好关系是连续的。

定义 3.C.1： X 上的偏好关系 $\succsim$ 是连续的（continuous），若 $\succsim$ 在极限运算之下仍能保留。也就是说，对于任何数对序列 $\{(x^n, y^n)\}_{n=1}^{\infty}$，若 $x^n \succsim y^n$ 对于所有的 n 都成立，且 $x = \lim_{n\to\infty} x^n$ 和 $y = \lim_{n\to\infty} y^n$，则 $x \succsim y$。

连续性是说，消费者的偏好不能有“跳跃”，即不可能出现：消费者认为序列 $\{x^n\}$ 中的每个元素都好于序列 $\{y^n\}$ 中的相应元素，但是在这两个序列的极限x和y上，他忽然偏好y胜于x。

也可以定义为：对于所有的x，上轮廓集 $\{y \in X : y \succsim x\}$ 下轮廓集 $\{y \in X : x \succsim y\}$ 都是**闭集**，即这两个集合都包含各自的边界。

- 对于任何点序列 $\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$，若对于任何n都有 $x \succsim y^n$ 且 $y = \lim_{n\to\infty} y^n$ 则 $x \succsim y$

消费者需求理论

偏好与效用

字典序的偏好是不连续的。

证明：考虑消费束序列 $x^n = (1/n, 0)$ 和 $y^n = (0,1)$。对于每个n，都有 $x^n \succ y^n$ 。但

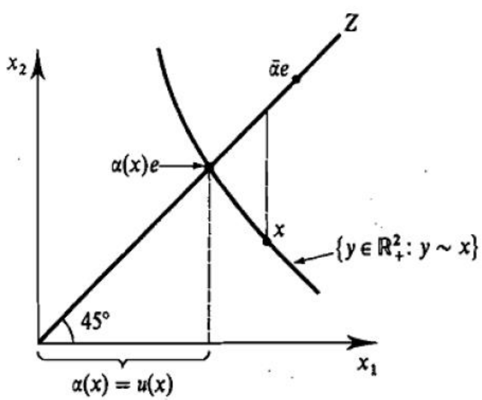
$$\lim_{n\to\infty} y^n = (0,1) \succ (0,0) = \lim_{n\to\infty} x^n$$

也就是说，只要x的第一个元素大于y的第一个元素，即使y的第二个元素远大于x的第二个元素，消费者也偏好x胜于y。但是只要它们的第一个元素相等，那么第二个元素就决定了排序，因此在这两个序列的极限点上，消费者的偏好突然发生了逆转。

偏好与效用

偏好关系的连续性足以保证存在能表示它的连续的效用函数

命题 3.C.1：若 X 上的偏好关系 $\succsim$ 是连续的，则存在能代表 $\succsim$ 的连续的效用函数 $u(x)$ 。



针对消费集 $X = \mathbb{R}^L_+$ 且偏好关系为单调的情况。令Z表示消费集中的对角射线（所有L个分量都相等的向量的轨迹）。令e表示所有L个分量都为1的向量。则对于所有非负实数 $\alpha \geq 0$ 都有 $\alpha e \in Z$ 。
对于每一个 $x \in \mathbb{R}^L_+$ ，单调性意味着 $x \succsim 0$ 。对于任何的 $\bar{\alpha}$ 只要它能使得 $\bar{\alpha}e \gg x$ ，就有 $\bar{\alpha}e \succsim x$ 。

偏好关系的单调性和连续性意味着存在唯一的 $\alpha(x) \in [0, \bar{\alpha}]$ 使得 $\alpha(x)e \sim x$

消费者需求理论

偏好与效用

偏好关系的连续性足以保证存在能表示它的连续的效用函数

命题 3.C.1：若 X 上的偏好关系 $\succsim$ 是连续的，则存在能代表 $\succsim$ 的连续的效用函数 $u(x)$。

根据连续性可得，x的上轮廓集和下轮廓集都是闭集，即 $A^+ = \{\alpha \in \mathbb{R}_+ : \alpha e \succsim x\}$ 和 $A^- = \{\alpha \in \mathbb{R}_+ : x \succsim \alpha e\}$ 是非空的闭集。

根据偏好的完备性可知，$\mathbb{R}_+ \subset (A^+ \cup A^-)$，又因为上下轮廓集都是非空且闭的，并且 $\mathbb{R}_+$ 是联通的，所以 $A^+ \cap A^- \neq \varnothing$ 。

因此，存在一个实数 α 使得 $\alpha e \sim x$ 。而且，根据单调性可知。$\alpha_1 e \succ a_2 e$ 意味着 $\alpha_1 > a_2$ 。因此，最多只能有一个实数满足 $\alpha e \sim x$ ，这个实数就是 $\alpha(x)$。

消费者需求理论

偏好与效用

那么这里的 $\alpha(x)$ 就可以作为效用函数。

也就是说，对于每个x，我们都赋予一个效用值 $u(x)=\alpha(x)$ 。

效用函数需要满足两个性质：

（1）它代表了偏好 $\succsim$ [即 $\alpha(x)\geq\alpha(y)\Leftrightarrow x\succsim y$]

（2）它是个连续函数

证明：假设$\alpha(x)\geq\alpha(y)$，根据单调性可知 $\alpha(x)e\succsim\alpha(y)e$ 。又因为$x\sim\alpha(x)e$ 且$y\sim\alpha(y)e$

因此可以得到$x\succsim y$

反过来，假设$x\succsim y$，那么$\alpha(x)e\sim x\succsim y\sim\alpha(y)e$ 因此，根据单调性可以得到$\alpha(x)\geq\alpha(y)$

消费者需求理论

偏好与效用

假设消费者的偏好关系是连续的，就可以用连续的效用函数来表示。

但是代表某一特定偏好关系的 $\succsim$ 的效用函数不是唯一的。

效用函数u(·)的任何严格递增变化，比如 $v(x)=f(u(x))$ （f为严格增函数）也能代表这个偏好关系。

同理，如果偏好关系是连续的，那么存在能够代表这一偏好的某个连续效用函数：

(1) 并非能代表这一偏好关系的所有效用函数都是连续的；

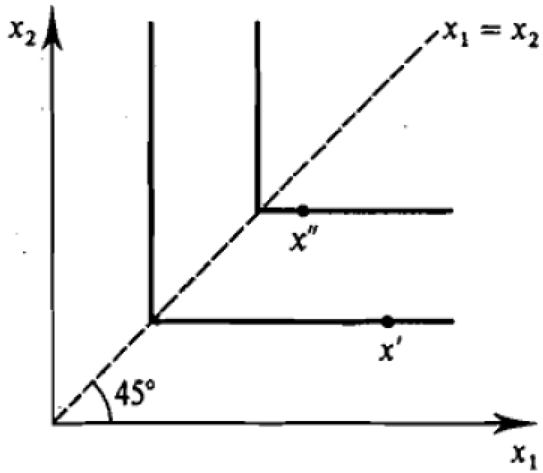
(2) 连续效用函数的任何严格递增但非连续的变换，也能代表该偏好。

消费者需求理论

偏好与效用

为了方便分析，通常假设效用函数u(·)是可微的。

但是需要注意，连续性偏好其实未必可以用可微的效用函数来表示。



里昂惕夫偏好

在这种偏好下，当且仅当 $\mathrm{Min}\{x_1'', x_2''\} \geq \mathrm{Min}\{x_1', x_2'\}$ 时，$x'' \succsim x'$ 。

由于无差异曲线在x1=x2时出现了拐折，因此它是不可微的。

消费者需求理论

偏好与效用

通常我们假设效用函数是**二次连续可微**的：

要求无差异集是一个光滑的超平面，从而保证商品之间的**替代率**取决于可微的消费水平。

消费者需求理论

偏好与效用

通过偏好向效用函数的转化，对偏好的限制就转化为对效用函数的限制：

单调性意味着效用函数是递增的： 若 $x \gg y$，则 $u(x) > u(y)$

偏好的凸性意味着效用函数u(·)是拟凹的，偏好的严格凸性意味着u(·)是严格拟凹的。

若集合 $\{y \in \mathbb{R}_+^L : u(y) \geq u(x)\}$ 对于所有的x都是凸的，或者说，对于任何的x,y和所有的 $\alpha \in [0,1]$，不等式 $u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \mathrm{Min}\{u(x), u(y)\}$ 都成立，则效用函数是拟凹的。

但也有可能对于某个特定的凸偏好关系，并不存在任何能代表它的凹效用函数

消费者需求理论

偏好与效用

偏好关系的**单调性**和**凸性**意味着所有能代表这种偏好关系的效用函数都是**递增**的和**拟凹**的。这两种性质都是效用函数u(·)的**序数性质**，这些性质在效用函数的任何递增变换下都能被保留。

（i） $X=\mathbb{R}_+^L$ 上的连续的偏好关系 $\succsim$ 是位似的，当且仅当它能用一次齐次的效用函数 $u(\cdot)$ 表示[一次齐次是指对于所有 $\alpha>0$ 都有 $u(\alpha x)=\alpha u(x)$]。

（ii） $(-\infty,\infty)\times\mathbb{R}_+^{L-1}$ 上的连续的偏好关系 $\succsim$ 关于商品 1 是拟线性的，当且仅当它能用下列形式的 $u(x)$ 表示，即 $u(x)=x_1+\phi(x_2,\ldots,x_L)$ 。

这两个性质是说满足位似性和拟线性的偏好关系**至少能有一种**形式的效用函数可以表示，并且这两个性质在递增变换的情况下不能被保留，为**基数性质**。