



高级微观经济学

——博 弈 论

乔 晗

中国科学院大学经济与管理学院

2023年4月25日

博弈论与产业组织理论

- 产业组织理论是近年来经济学最活跃、成果最丰富的领域之一。产业组织理论以市场与企业为研究对象，从市场角度研究企业行为或从企业角度研究市场结构。
- 产业组织理论始于解释新古典微观经济理论不能很好解释的垄断和不完全竞争问题，现在已形成完整而系统的理论体系。
- 从实践上看，产业组织理论是伴随着上世纪大型制造业公司的迅猛涌现以后出现的。

市场结构

- **完全竞争**：

　1）买卖双方数目足够大；2）产品同质（homogeneous），完全可以互相替代；3）进入与退出市场充分自由；4）信息是充分的，完全的。例如：发达的证券市场和农产品市场。

- **完全垄断**：独卖；只有一家供货者
- **垄断竞争**（竞争和垄断并存，以竞争为主）

　企业之间的产品或服务是不同的，各有优势，但是不同产品之间的差异不是根本性差异，具有替代性和竞争性，企业进入和退出市场是自由的。如牙膏、肥皂、服装等日用品市场。

- **寡头垄断**（竞争和垄断并存，以垄断为主）

　产品基本同质，生产商或者销售商较少，比如电信市场或者石油市场。

什么是博弈论？

- Game Theory
- 博弈论

- 博弈： 运用策略（谋略、韬略）的各主体之间的策略互动过程
- 博弈论：研究不同主体存在策略互动时该如何决策的理论

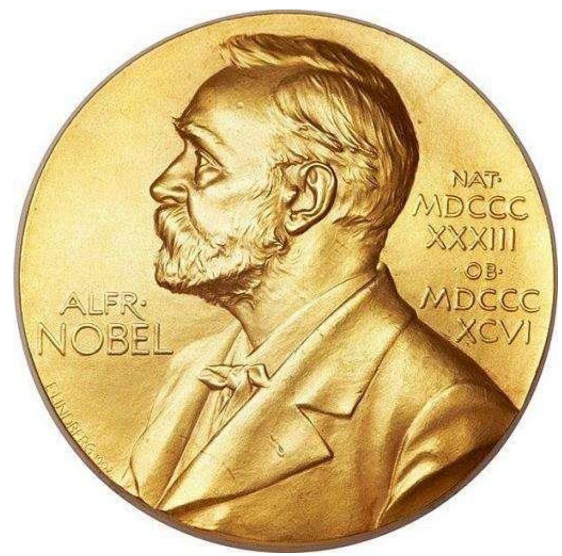
博弈论在经济学领域的辉煌历程

- 博弈论已成为经济学的一个标准分析工具
- 1994年到2022年，诺贝尔经济学奖先后

10次授予博弈论学者

诺贝尔经济学奖

29年10次！



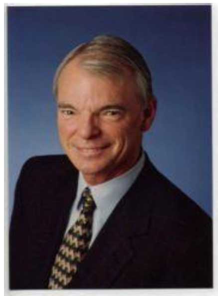
博弈论与诺贝尔经济学奖

- **1994年**：约翰•海萨尼
  约翰•纳什
  莱因哈德•泽尔滕
  获奖贡献：**非合作博弈**

- **1996年**：詹姆斯•莫里斯
  威廉•维克瑞
  获奖贡献：**经济激励理论**

博弈论与诺贝尔经济学奖

- **2001年**：乔治•阿克尔洛夫
迈克尔•斯宾塞
约瑟夫•斯蒂格利茨


获奖贡献：建立了**不对称信息市场的一般理论**

- **2005年**：托马斯•克罗姆比•谢林
罗伯特•约翰•奥曼

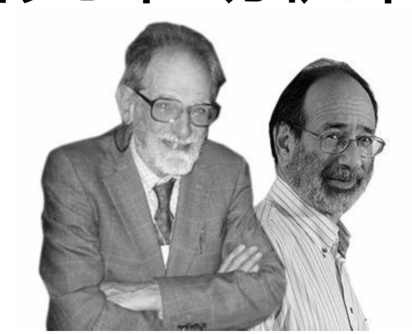

获奖贡献：用博弈论的分析加深了人们对**冲突与合作**的理解

博弈论与诺贝尔经济学奖

- **2007年**：里奥尼德•赫维茨
  埃里克•马斯金
  罗杰•迈尔森

获奖贡献：建立**机制设计**理论研究市场机制

- **2012年**：埃尔文•罗斯
  罗伊德•沙普利



获奖贡献：**稳定匹配**理论和**市场设计**实践

博弈论与诺贝尔经济学奖

- 2014年，法国经济学家Jean Tirole因对**市场力量与监管的分析**获得诺贝尔经济学奖。

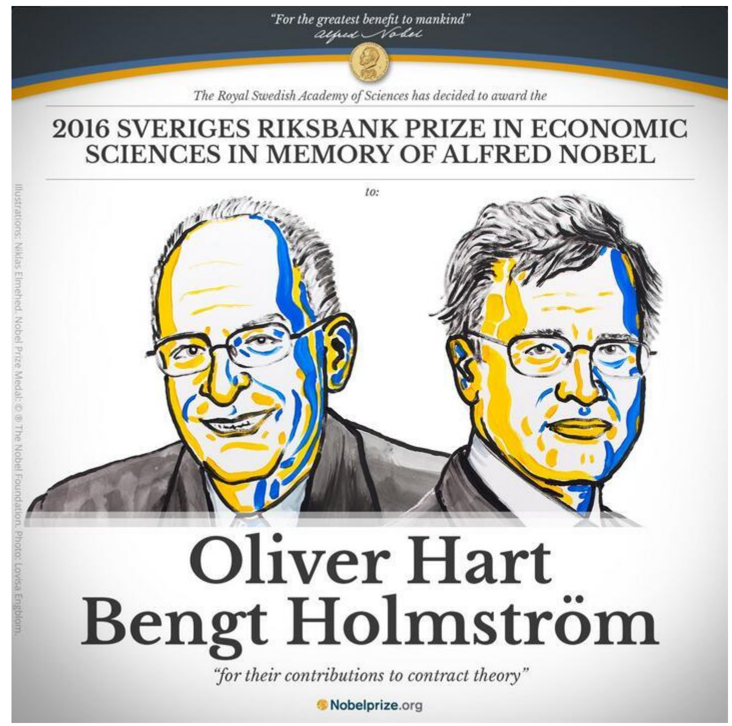
- Jean Tirole:
  1953年生于法国巴黎
  1976年毕业于法国理工学院
  1978年获得巴黎第九大学应用数学博士学位
  1981年获得美国MIT经济学博士学位

博弈论与诺贝尔经济学奖

- 2016年诺贝尔经济学奖授予奥利弗·哈特和本特·霍尔姆斯特伦这两名经济学家。

获奖理由：对契约理论的贡献

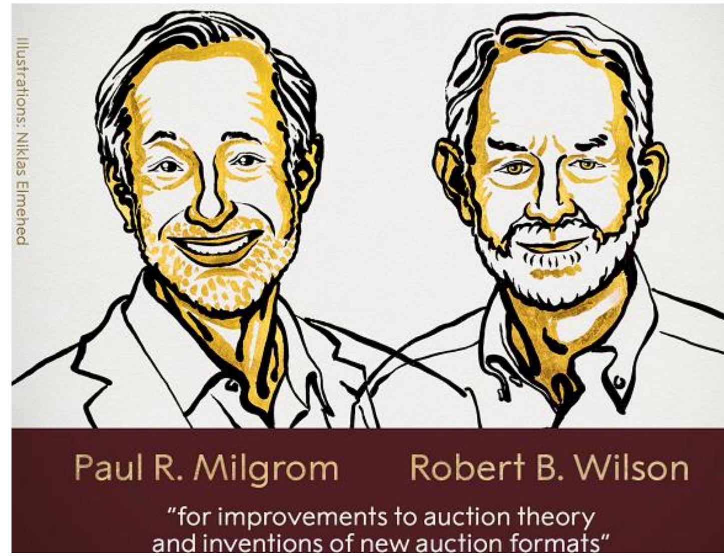
委托-代理理论
激励相容
不完全信息



更多介绍：
http://www.360doc.com/content/16/1012/17/535749_597906327.shtml

博弈论与诺贝尔经济学奖

2020年诺贝尔经济学奖授予保罗·米尔格罗姆（Paul R.**Milgrom**）和罗伯特·威尔逊（Robert B.**Wilson**），以表彰他们“**对拍卖理论改进和新拍卖方式的发明**”方面的贡献，两位获奖者将分享1000万瑞典克朗奖金（约合760万人民币）。



两位斯坦福大学教授

Wilson：共同价值拍卖；**Milgrom**：关联价值拍卖

Milgrom 和Wilson 共同设计了**同步多轮拍卖方式**，应用于无线电频谱拍卖并取得巨大成功，这是一种**动态拍卖机制**。

博弈论与诺贝尔经济学奖

2022年

本·S·伯南克

（Ben S. Bernanke）

道格拉斯·W·戴蒙德

（Douglas W. Diamond）

菲利普·H·迪布维格

（Philip H. Dybvig ）

以表彰他们对银行和金融危机的研究

博弈类型划分

- 根据是否合作

  非合作博弈、合作博弈
- 根据效用是否可转移

  旁支付博弈、非旁支付博弈
- 根据博弈的阶段

  单阶段博弈、多阶段博弈（包含重复博弈）
- 其它分类

  零和博弈、常和博弈、演化博弈等

非合作博弈模型分类

- 根据行动时序：

  静态博弈、动态博弈
- 根据信息类型：

  完全信息

  不完全信息 (不确定其他局中人的支付情况)
- 两种分类方法交叉

完全信息静态博弈	完全信息动态博弈
不完全信息静态博弈	不完全信息动态博弈

不完全信息博弈与信息经济学

- 激励理论
- 机制设计
- 拍卖理论
- 契约理论

参考教材

- Martin J. Osborne, An Introduction to Game Theory, Oxford University Press, 2004.
- Robert Gibbons, A Primer in Game Theory, Prentice Hall Europe Publisher, 1992.
- 张维迎, 博弈论与信息经济学, 上海三联书店, 上海人民出版社, 2006.
- 张维迎，博弈与社会，北京大学出版社，2013年

参考教材

1.M. Osborne and A. Rubinstein, A Course in Game Theory, MIT Press, 1994.

2.R. Myerson, Game Theory, Harvard University Press, 1997.

3.Varian, Hal, Microeconomic Analysis, Third Edition，经济科学出版社，2002.

4.Geoffrey A. Jehle and Philip J. Reny, Advanced Microeconomic Theory

5.Mas-Collel, Winston, and Green, Microeconomic Theory，曹乾 译，中国人民大学出版社，2014.

完全信息静态博弈

Static (or Simultaneous-Move) Games of Complete Information

完全信息静态博弈

- **同时行动**
  - 每一个局中人选择策略时不知道其他局中人的选择
- **完全信息**
  - 每一个局中人的策略和支付函数都是所有局中人的共同知识（common knowledge）
- **关于局中人的假设**
  - 局中人是理性（Rationality）的
    - 局中人希望最大化自己的收益
    - 局中人能够算出如何最大化自己的收益
  - 每一个局中人都知道其他局中人是理性的

完全信息静态博弈

静态博弈包含:

- 局中人集合（至少两人）
  - {局中人1, 局中人2, ... 局中人n}
- 对每一个局中人，对应着一个策略集合
  - $S_1\ S_2\ \dots\ S_n$
- 对每一种策略组合，对应着各个局中人的支付
  - $u_i(s_1, s_2, \dots s_n)$, 对所有 $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \dots\ s_n \in S_n$.

博弈的标准式或策略式表述（normal-form or strategic-form representation）

- 博弈G的标准式（*normal-form*）或策略式（*strategic-form*）表述包括：
  - 一个有限的局中人集合$\{1, 2, ..., n\}$，
  - 局中人的策略空间$S_1 \ S_2 \ ... \ S_n$，
  - 局中人的支付函数$u_1 \ u_2 \ ... \ u_n$
    其中$u_i : S_1 \times S_2 \times ... \times S_n \rightarrow R$.

标准式表述: 两个局中人的博弈

- 双矩阵（Bi-matrix representation）
  - 两个局中人：局中人1、局中人 2
  - 每个局中人有有限个策略：
    $S_1=\{s_{11}, s_{12}, s_{13}\}$ $S_2=\{s_{21}, s_{22}\}$

在每一个方格中，依次给出每一个局中人的支付（自己建模时要交待清楚）

局中人2

局中人1		s_{21}	s_{22}
	s_{11}	$u_1(s_{11},s_{21})$， $u_2(s_{11},s_{21})$	$u_1(s_{11},s_{22})$， $u_2(s_{11},s_{22})$
	s_{12}	$u_1(s_{12},s_{21})$， $u_2(s_{12},s_{21})$	$u_1(s_{12},s_{22})$， $u_2(s_{12},s_{22})$
	s_{13}	$u_1(s_{13},s_{21})$， $u_2(s_{13},s_{21})$	$u_1(s_{13},s_{22})$， $u_2(s_{13},s_{22})$

例：猜硬币

两人相同，局中人2赢
两人相异，局中人1赢

零和博弈

		局中人2 正面	局中人2 反面
局中人 1	正面	-1 , 1	1 , -1
	反面	1 , -1	-1 , 1

- 标准 (或策略)式表述：
  - 局中人集合：{局中人1, 局中人2}
  - 策略集合： $S_1 = S_2 = \{$ 正面, 反面 $\}$
  - 支付函数：
    表示在双矩阵中

博弈论经典案例——囚徒困境

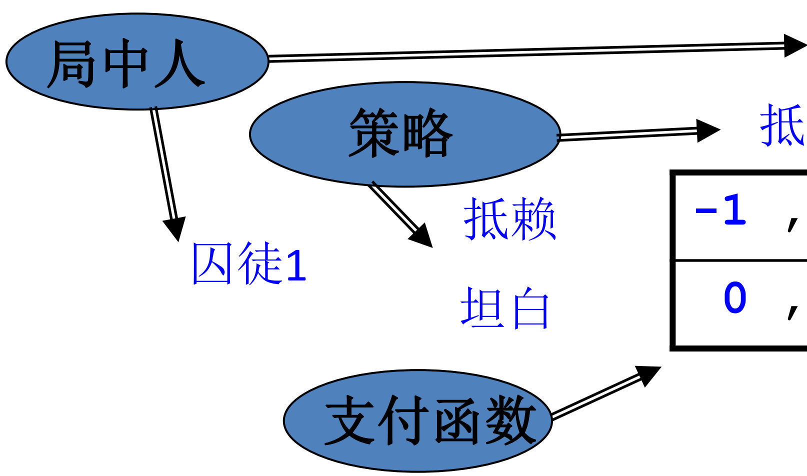
囚徒困境是博弈论中最经典的例子——

两个嫌疑犯作案后被警察抓住，分别被关在不同的屋子里审讯，警察告诉他们：

- 如果两个人都坦白，各判刑6年；
- 如果两个人都抵赖，各判1年（因为证据不足）
- 如果一人坦白，一人抵赖，坦白的放出去，不坦白的判刑9年（坦白从宽，抗拒从严）。

囚徒困境：标准式表示

- 局中人集合:　　　{囚徒1, 囚徒2}
- 策略集合:　　　　$S_1 = S_2 =$ **{抵赖, 坦白}**
- 支付函数:



	囚徒2: 抵赖	囚徒2: 坦白
囚徒1: 抵赖	-1 , -1	-9 , 0
囚徒1: 坦白	0 , -9	-6 , -6

囚徒困境的解

- 无论对方怎么选择，“坦白”总是好于“抵赖”
- **占优策略（Dominant strategy）**：
  不管其他局中人怎么选择，一种策略总是好于另一种策略
- **劣策略（Dominated strategy）**

		囚徒2 抵赖	囚徒2 坦白
囚徒 1	抵赖	-1 ，-1	-9 ， 0
	坦白	0 ，-9	-6 ，-6

定义：严格占优策略

在标准式博弈$\{S_1, S_2, \ldots, S_n, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$中，

$s_i', s_i'' \in S_i$ 是局中人 i 的策略，如果对任意 $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2, \ldots, s_{i-1} \in S_{i-1}, s_{i+1} \in S_{i+1}, \ldots, s_n \in S_n$

$$\boxed{\begin{gathered} u_i(s_1, s_2, \ldots s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \ldots, s_n) \\ < u_i(s_1, s_2, \ldots s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, \ldots, s_n) \end{gathered}}$$

无论其他局中人怎样选择

则称策略 s_i' 被策略 s_i''严格占优 (或策略 s_i''严格优于策略 s_i')

		囚徒2 抵赖	囚徒2 坦白
囚徒 1	抵赖	-1 ， -1	-9 ， 0
囚徒 1	坦白	0 ， -9	-6 ， -6

定义: 弱占优策略 (weakly dominated strategy)

在标准式博弈$\{S_1, S_2, \ldots, S_n, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$中，$s_i'$ $s_i'' \in S_i$ 是局中人 i 的两个策略，如果

$$u_i(s_1, s_2, \ldots s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \ldots, s_n)$$
$$\leq(\text{但不全等于})\ u_i(s_1, s_2, \ldots s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

对所有的 $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \ldots, s_{i-1} \in S_{i-1}, s_{i+1} \in S_{i+1}, \ldots,$ $s_n \in S_n$ 成立，则称策略 s_i' 被策略 s_i''弱占优

s_i'' 至少不小于 s_i'

无论其他局中人如何选择

局中人2

		左	右
局中人 1	上	1 , 1	2 , 0
	下	0 , 2	2 , 2

重复剔除严格劣策略

- 理性局中人不会选择被严格占优的策略，因此被严格占优的策略可以删除
  - 如果策略被严格占优，可以删除它
  - 博弈会被简化
  - 从简化了的博弈中删除任意被严格占优的策略，重复进行直至结束

重复剔除严格劣策略：例子

		局中人 2		
		左	中	右
局中人 1	上	1 ， 0	1 ， 2	0 ， 1
	下	0 ， 3	0 ， 1	2 ， 0

		局中人 2	
		左	中
局中人 1	上	1 ， 0	1 ， 2
	下	0 ， 3	0 ， 1

Nash 均衡

		局中人 2		
		左	中	右
局中人 1	上	0 ， 4	4 ， 0	5 ， 3
	中	4 ， 0	0 ， 4	5 ， 3
	下	3 ， 5	3 ， 5	6 ， 6

策略组合（下，右）具有如下特性：

- 如果**局中人1选择“下”**，局中人2**不能**通过**偏离“右”得到更好的收益**
- 如果**局中人2选择“右”**，局中人1**不能**通过**偏离“下”得到更好的收益**

Nash均衡的思想

- Nash均衡（Nash Equilibrium）
  - ➢是所有局中人的策略组合
  - ➢每个局中人对应着一个策略
  - ➢给定其他局中人都采取均衡中的策略时，任何局中人都不会有动机单独偏离当前的均衡策略（单独偏离无法得到更好的收益）

Nash 均衡的定义

在标准型博弈 $\{S_1, S_2, \ldots, S_n, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$中，称策略组合$(s_1^*,\ldots,s_n^*)$ 是 Nash 均衡，如果对每一个局中人 i，

$$u_i(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*) \geq u_i(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*)$$

给定其他局中人的策略，局中人i不能通过偏离s_i*得到更多收益

对所有的$s_i \in S_i$成立。即s_i^*是如下最优问题的解：

$$\textbf{Maximize} \quad u_i(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*)$$
$$\textbf{s.t.} \quad s_i \in S_i$$

囚徒 2

囚徒1		抵赖	坦白
	抵赖	-1 , -1	-9 , 0
	坦白	0 , -9	-6 , -6

Nash均衡：思想

- **Nash均衡**
  - 局中人的策略组合，给定其他局中人的策略都是这个策略组合中的策略时，每一个局中人的当前策略都是最优选择
  - 一种稳定状态：如果其他局中人都坚持当前状态，则没有局中人会选择单独偏离当前状态

（坦白，坦白）是**Nash**均衡

		囚徒 2	
		抵赖	坦白
囚徒 1	抵赖	-1 , -1	-9 , 0
	坦白	0 , -9	-6 , -6

最优反应

- $S_1=\{s_{11},\ s_{12},\ s_{13}\}$ $S_2=\{s_{21},\ s_{22}\}$
- 局中人1的策略s_{11} **是局中人2**策略s_{21} **的最优反应，如果**
  $u_1(s_{11},s_{21}) \geq u_1(s_{12},s_{21})$ **且**
  $u_1(s_{11},s_{21}) \geq u_1(s_{13},s_{21})$。

局中人2

		s_{21}	s_{22}
局中人1	s_{11}	$u_1(s_{11},s_{21})$， $u_2(s_{11},s_{21})$	$u_1(s_{11},s_{22})$， $u_2(s_{11},s_{22})$
	s_{12}	$u_1(s_{12},s_{21})$， $u_2(s_{12},s_{21})$	$u_1(s_{12},s_{22})$， $u_2(s_{12},s_{22})$
	s_{13}	$u_1(s_{13},s_{21})$， $u_2(s_{13},s_{21})$	$u_1(s_{13},s_{22})$， $u_2(s_{13},s_{22})$

定义：**最优反应函数**

(best response function)

在标准型博弈 $\{S_1, S_2, ..., S_n, u_1, u_2, ..., u_n\}$中，如果局中人 1, 2, ..., ***i*-1**, ***i*+1**, ..., n 分别选择策略 $s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n$, 则局中人 ***i*** 的最优反应函数定义如下：

$$B_i(s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n) =$$

$$\{s_i \in S_i : u_i(s_1,\ldots,s_{i-1},s_i,s_{i+1},\ldots,s_n)$$

$$\geq u_i(s_1,\ldots,s_{i-1},s_i',s_{i+1},\ldots,s_n), \text{ for all } s_i' \in S_i\}$$

用最优反应函数定义Nash均衡

在标准型博弈 $\{S_1, ..., S_n,\ u_1,\ ..., u_n\}$中，
如果对任意的局中人 i, 都有

$$s_i^* \in B_i(\ s_1^*, ..., s_{i-1}^*,\ s_{i+1}^*, ..., s_n^*\ )$$

则称策略组合$(s_1^*, ..., s_n^*)$是一个 Nash 均衡

- 当其他人的策略给定时，每一个局中人的策略都是最优选择
- 一种没有任何局中人有动机单独偏离的稳定状态

最优反应函数
(Best response function)

		局中人 2		
		L’	C’	R’
局中人 1	T’	0 , 4	4 , 0	3 , 3
	M’	4 , 0	0 , 4	3 , 3
	B’	3 , 3	3 , 3	3.5 , 3.6

- 假如局中人2选择L′，则局中人1的最优策略是M′
- 假如局中人2 选择C′，则局中人1的最优策略是T′
- 假如局中人2选择R′，则局中人1的最优策略是B′
- 假如局中人1选择B′，则局中人2的最优策略是R′

- 最优反应（Best response）：给定所有其他局中人采取的策略，一个局中人可以采取的最优策略

应用最优反应函数求Nash均衡

- 在2人博弈中，(s_1, s_2) 是一个Nash均衡当且仅当局中人1的策略s_1 是局中人2策略s_2的最优反应，并且局中人2的策略s_2 是局中人1的策略 s_1的最优反应。
- 画线法选择最优反应，进而求取Nash均衡

		囚徒 2	
		抵赖	坦白
囚徒 1	抵赖	-1 ， -1	-9 ， <u>0</u>
	坦白	<u>0</u> ， -9	<u>-6</u> ， <u>-6</u>

应用最优反应函数求Nash均衡：例子

Player 2

		L’	C’	R’
Player 1	T’	0 , <u>4</u>	<u>4</u> , 0	3 , 3
	M’	<u>4</u> , 0	0 , <u>4</u>	3 , 3
	B’	3 , 3	3 , 3	<u>3.5</u> , <u>3.6</u>

- 对于局中人2的策略L′，局中人1的最优反应是M′
- 对于局中人2的策略C′，局中人1的最优反应是T′
- <u>对于局中人2的策略R′，局中人1的最优反应是B′</u>

- 对于局中人1的策略T′，局中人2的最优反应是L′
- 对于局中人1的策略M′，局中人2的最优反应是C′
- <u>对于局中人1的策略B′，局中人2的最优反应是R′</u>

例:性别战

		丈夫	
		电影	足球
妻子	电影	<u>2</u> , <u>1</u>	0 , 0
	足球	0 , 0	<u>1</u> , <u>2</u>

- 有两个Nash均衡
  - (电影，电影)
  - (足球，足球)

例：猜硬币

两人相同，局中人2赢
两人相异，局中人1赢

局中人2

		正面	反面
局中人 1	正面	-1 , 1	1 , -1
	反面	1 , -1	-1 , 1

- 当局中人2选择正面时，局中人1的最优反应是反面
- 当局中人2选择反面时，局中人1的最优反应是正面

- 当局中人1选择正面时，局中人2的最优反应是反面
- 当局中人1选择反面时，局中人2的最优反应是正面

➢ 因此，博弈没有**纯策略**的Nash均衡

猜硬币：求解

		局中人2		
		正面	反面	
局中人 1	正面	-1 , $\underline{1}$	$\underline{1}$, -1	r
	反面	$\underline{1}$, -1	-1 , $\underline{1}$	$1-r$
		q	$1-q$	

- **随机选择策略以避免对手猜到**
  - 局中人1选择正面和反面的概率分别为r和$1-r$
  - 局中人2选择正面和反面的概率分别为q和$1-q$
- **混合策略:**
  - **按照一个给定的概率从策略集合中随机选择纯策略**

混合策略(Mixed strategy)

- 局中人的**混合策略**是在局中人纯策略集合上的**概率分布**
- 以性别战为例：
  - 妻子的混合策略为概率分布(p, 1-p)，其中p 是选择看电影的概率，1-p 是选择看足球的概率
  - 如果p=1 说明妻子一定会选择看电影（纯策略）
  - 如果p=0 说明妻子一定会选择看足球（纯策略）

性别战

		丈夫	
		电影	足球
妻子	电影 (p)	<u>2</u> ， <u>1</u>	0 ， 0
	足球 (1-p)	0 ， 0	<u>1</u> ， <u>2</u>

混合策略

- **混合策略：**
  - 局中人的混合策略是在局中人纯策略集合上的概率分布

定义 G 为n人博弈，策略集合为$S_1, S_2, .., S_n$，局中人i的混合策略σ_i是一个定义在S_i的概率分布。如果S_i 中包含有限个纯策略，如$S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \ldots s_{iK_i}\}$，则混合策略是一个函数$\sigma_i : S_i \to \Re^+$，使得$\sum_{j=1}^{K_i} \sigma_i(s_{ij}) = 1$。

我们把混合策略记作$(\sigma_i(s_{i1}), \sigma_i(s_{i2}), \ldots,\ \sigma_i(s_{iK_i}))$

混合策略举例

- 猜硬币

局中人1有两个纯策略：正面和反面

- (σ_1(正面)=0.5, σ_1(反面)=0.5) 是一个混合策略

  即局中人1以0.5和0.5的概率分别选择正面和反面

- (σ_1(正面)=0.3, σ_1(反面)=0.7)是另一个混合策略

  即局中人1分别以概率0.3和0.7选择正面和反面

混合策略纳什均衡

- **混合策略均衡**
  - ➢是每个局中人纯策略的一个概率分布
  - ➢在期望支付意义下，每一个局中人的概率分布都是对其他局中人概率分布的最优反应

混合策略均衡：具有纯策略的2人博弈

		局中人2	
		s_{21} (q)	s_{22} ($1-q$)
局中人1	s_{11} (r)	$u_1(s_{11}, s_{21})$, $u_2(s_{11}, s_{21})$	$u_1(s_{11}, s_{22})$, $u_2(s_{11}, s_{22})$
	s_{12} ($1-r$)	$u_1(s_{12}, s_{21})$, $u_2(s_{12}, s_{21})$	$u_1(s_{12}, s_{22})$, $u_2(s_{12}, s_{22})$

- 混合策略Nash均衡：
  - 混合策略 $((r^*, 1-r^*), (q^*, 1-q^*))$

    是一个Nash均衡，如果 $(r^*,1-r^*)$是对$(q^*, 1-q^*)$的最优反应，且 $(q^*, 1-q^*)$是对$(r^*,1-r^*)$的最优反应.

    即$v_1((r^*, 1-r^*), (q^*, 1-q^*)) \geq v_1((r, 1-r), (q^*, 1-q^*))$, **对所有的**$0\leq r \leq 1$

    $v_2((r^*, 1-r^*), (q^*, 1-q^*)) \geq v_2((r^*, 1-r^*), (q, 1-q))$, **对所有的**$0\leq q \leq 1$

求解混合策略均衡：在具有纯策略的2人博弈中

- 给定局中人2的混合策略，求局中人1的最优反应
- 给定局中人1的混合策略，求局中人2的最优反应
- 使用最优反应函数求解混合策略Nash均衡

求解猜硬币博弈

局中人2

		正面	反面		期望支付
局中人1	正面	-1 , 1	1 , -1	*r*	*1-2q*
	反面	1 , -1	-1 , 1	*1-r*	*2q-1*
		q	*1-q*		

- 局中人1的期望支付
  - 如果局中人1选择正面，$-q+(1-q)=1-2q$
  - 如果局中人1选择反面，$q-(1-q)=2q-1$

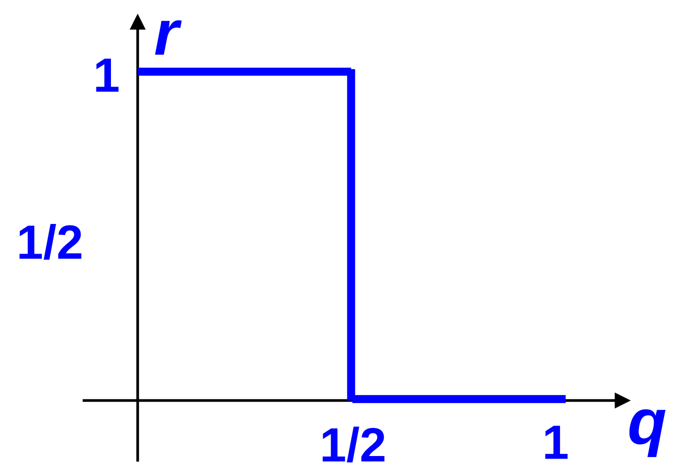
求解猜硬币博弈

		局中人2			
		正面	反面		期望支付
局中人1	正面	-1 , $\underline{1}$	$\underline{1}$, -1	r	$1-2q$
	反面	$\underline{1}$, -1	-1 , $\underline{1}$	$1-r$	$2q-1$
		q	$1-q$		

- 局中人1的最优反应

$B_1(q)$:

- 当q<0.5时，选择“正面”(r=1)
- 当q>0.5时，选择“反面” (r=0)
- 当q=0.5时，无差别 (0≤r≤1)



求解猜硬币博弈

		局中人2			
		正面	反面		**期望支付**
局中人1	正面	-1 , 1	1 , -1	r	$1-2q$
	反面	1 , -1	-1 , 1	$1-r$	$2q-1$
		q	$1-q$		
期望支付		$2r-1$	$1-2r$		

- 局中人2的期望支付
  - 如果局中人2选择正面，$r-(1-r)=2r-1$
  - 如果局中人2选择反面，$-r+(1-r)=1-2r$

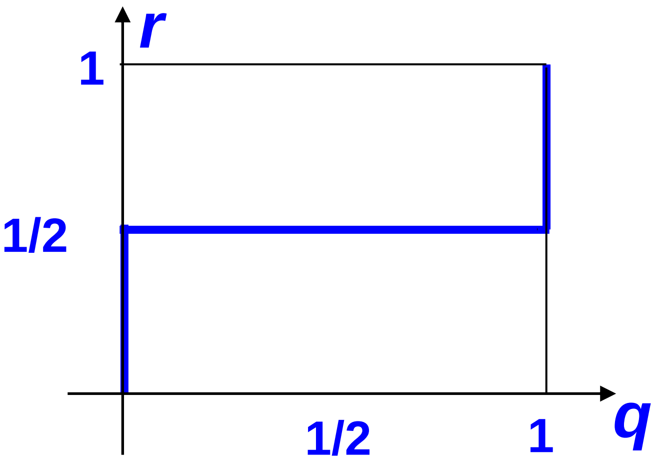
求解猜硬币博弈

		局中人2			
		正面	反面		期望支付
局中人1	正面	-1 , 1	1 , -1	*r*	*1-2q*
	反面	1 , -1	-1 , 1	*1-r*	*2q-1*
		q	*1-q*		
期望支付		*2r-1*	*1-2r*		

- 局中人2的最优反应

$B_2(r)$:

- 当r<0.5时， 反面 (q=0)
- 当r>0.5时， 正面 (q=1)
- 当r=0.5时， 无差别 (0≤q≤1)



求解猜硬币博弈

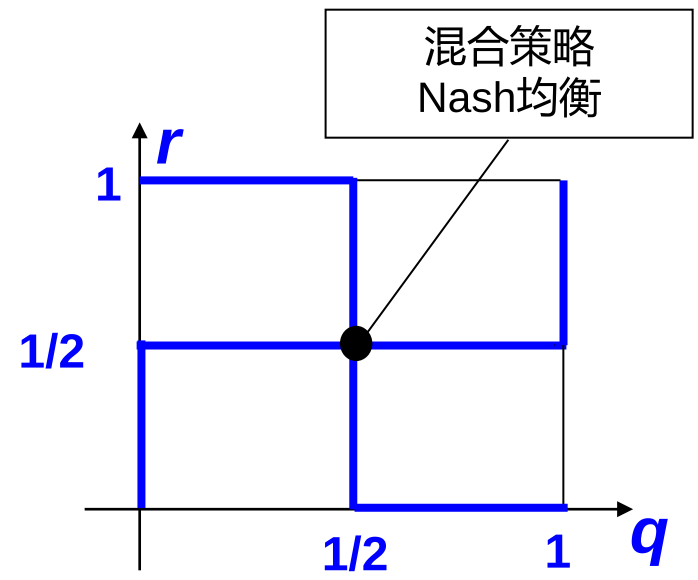
- 局中人1的最优反应
  $B_1(q)$:
  - 如果q<0.5，Head (r=1)
  - 如果q>0.5，Tail (r=0)
  - 如果q=0.5，任意混合策略 (0≤r≤1)
- 局中人2的最优反应
  $B_2(r)$:
  - 如果r<0.5，Tail (q=0)
  - 如果r>0.5，Head (q=1)
  - 如果 r=0.5，任意混合策略 (0≤q≤1)

✓ 检验
r = 0.5 是q=0.5的最优反应
q = 0.5 是r=0.5的最优反应

((0.5,0.5), (0.5, 0.5))是一个混合策略均衡

局中人2

局中人1		正面	反面	
	正面	-1 ， $\underline{1}$	$\underline{1}$ ， -1	*r*
	反面	$\underline{1}$ ， -1	-1 ， $\underline{1}$	*1-r*
		q	*1-q*	



定理(Nash 1950)

- n人标准式博弈G=｛S_1, …S_n;u_1, … u_n｝中，如果n是有限的，且S_i 对每一个i有限，则至少存在一个Nash均衡，这个Nash均衡有可能是混合策略的。
- Nash均衡的存在性定理（有限局中人，有限策略时)

Cournot双寡头垄断 (Duopoly)

- 一种产品由两个企业生产：企业1和 2
- 产量分别为q_1 和 q_2，每个企业在选择产量时不知道对方的选择
- 产品的市场价格$P(Q)=a-Q$，其中a是足够大的正数，$Q=q_1+q_2$
- 企业i的生产成本是q_i 的函数，$C_i(q_i)=cq_i$

  其中$c<a$

Cournot双寡头垄断 (Duopoly)

标准式表述:

- 局中人集合： {企业1, 企业2}
- 策略集合： $S_1=[0, +\infty)$, $S_2=[0, +\infty)$
- 支付函数：

  $u_1(q_1, q_2)=q_1(a-(q_1+q_2)-c)$

  $u_2(q_1, q_2)=q_2(a-(q_1+q_2)-c)$

注：u_1不仅受q_1影响, 还受q_2影响

同理，u_2不仅受q_2影响, 还受q_1影响

Cournot双寡头垄断 (Duopoly)

- 求解Nash均衡
  - 寻找(q_1*, q_2*)使得q_1*是公司1对公司2产量q_2*的最优反应；q_2* 是公司2对公司1产量q_1*的最优反应
  - q_1*是以下问题的解

    $$\text{Max } u_1(q_1, q_2^*)=q_1(a-(q_1+q_2^*)-c)$$

    $$\text{s.t.} \quad 0 \le q_1 < +\infty$$

    且 q_2*是以下问题的解

    $$\text{Max } u_2(q_1^*, q_2)=q_2(a-(q_1^*+q_2)-c)$$

    $$\text{s.t.} \quad 0 \le q_2 < +\infty$$

Cournot双寡头垄断 (Duopoly)

- 求解Nash均衡——q_1
  - 解:

$$\text{Max } u_1(q_1, q_2^*)=q_1(a-(q_1+q_2^*)-c)$$

$$\text{s.t. } 0 \le q_1 \le +\infty$$

一阶条件： $a - 2q_1 - q_2^* - c = 0$

$$q_1 = (a - q_2^* - c)/2$$

Cournot双寡头垄断 (Duopoly)

- 求解Nash均衡——q_2
  - 解:

$$\text{Max } u_2(q_1^*, q_2) = q_2(a-(q_1^*+q_2)-c)$$

$$\text{s. t. } 0 \le q_2 \le +\infty$$

一阶条件：$a - 2q_2 - q_1^* - c = 0$

$$q_2 = (a - q_1^* - c)/2$$

Cournot双寡头垄断 (Duopoly)

- 求解Nash均衡
  - 产量组合(q_1^*, q_2^*) 是Nash均衡须满足

    $q_1^* = (a - q_2^* - c)/2$

    $q_2^* = (a - q_1^* - c)/2$

  - 解上述方程组可得

    $q_1^* = q_2^* = (a - c)/3$

Cournot双寡头垄断 (Duopoly)

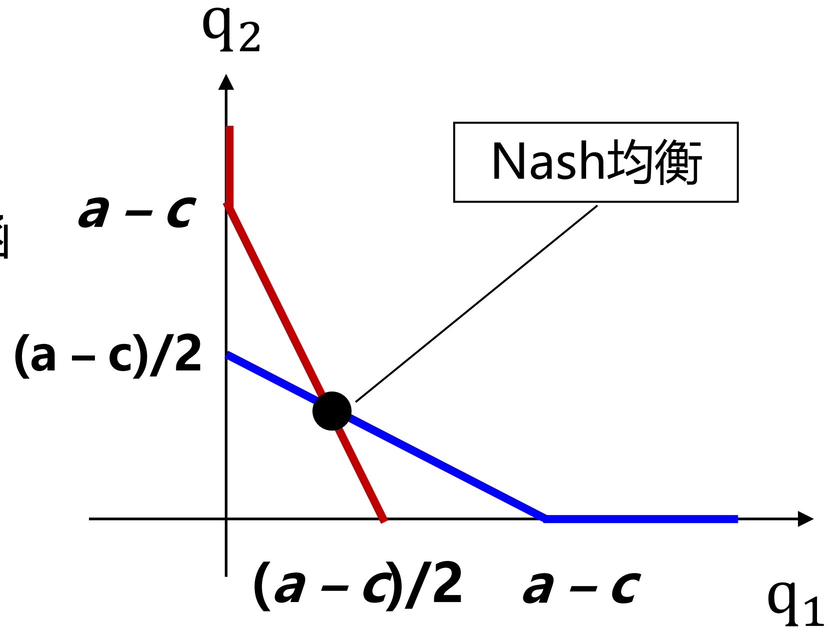
- 最优反应函数
  - 对企业2的产量q_2，企业1的最优反应函数：

    当$q_2 < a-c$时，$R_1(q_2) = (a - q_2 - c)/2$;

    否则，$R_1(q_2)=0$
  - 对企业1的产量q_1，企业2的最优反应函数：

    当$q_1 < a-c$ 时，$R_2(q_1) = (a - q_1 - c)/2$;

    否则，$R_2(q_1) = 0$



Cournot多寡头垄断（Oligopoly）

- 一种产品被n个企业生产：企业1…n
- 企业i的产量标记为q_i，每一个企业选择产量的时候并不知道其他企业的选择；
- 产品的市场价格为 $P(Q)=a-Q$，其中 a 是常数，$Q=q_1+q_2+\ldots+q_n$，假设 $Q<a$；否则 $P(Q)=0$
- 企业i 的生产成本为 $C_i(q_i)=cq_i$。

Cournot多寡头垄断（Oligopoly）

标准式表述：

- 局中人集合：{ **企业1, ... 企业n**}
- 策略集合：　$S_i=[0, +\infty)$, for $i=1, 2, \ldots, n$
- 支付函数：

$$u_i(q_1, \ldots, q_n)=q_i(a-(q_1+q_2+\ldots+q_n)-c),$$

$$i=1, 2, \ldots, n$$

Cournot多寡头垄断（Oligopoly）

- 求解Nash均衡
  - 求解策略组合(q_1*, ... q_n*)使得q_i* 是企业i关于其他企业产量的最优反应
  - 即 q_1*是如下优化问题的解：

    Max $u_1(q_1, q_2^*, ..., q_n^*)=q_1(a-(q_1+q_2^* +...+q_n^*)-c)$

    s.t. $0 \le q_1 \le +\infty$

    q_2*是如下优化问题的解:

    Max $u_2(q_1^*, q_2 , q_3^*, ..., q_n^*)=q_2(a-(q_1^*+q_2+q_3^*+ ...+ q_n^*)-c)$

    s.t. $0 \le q_2 \le +\infty$

    ....

Cournot多寡头垄断 (Oligopoly)

对局中人i, q_i* 是如下问题的解:

$$\text{Max } u_i(q_i, q_{-i}^*)=q_i(a-(q_i+q_{-i}^*)-c)$$

$$\text{s.t. } q_i \geq 0$$

一阶条件: $q_i^* = (a - q_{-i}^* - c)/2 ===> q_i^*=a-Q^*-c$

$\therefore\ q_1^*=q_2^*=\cdots q_n^*$

因此, $Q^*=\Sigma q_i^*=nq_i^*$

$\therefore\ q_i^*=(a-c)/(n+1)$, $Q^*=n(a-c)/(n+1)$,

$p^*=(a+nc)/(n+1)$.

当$n\to\infty$, $p^*\to c$. （说明了什么？）

奥古斯汀·古诺
(Augustin Cournot)

- 19世纪著名的法国经济学家，重视思辨和演绎
- 法国经济学派的开山鼻祖
- 1838年发表的《对财富理论的数学原理的研究》（Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth），给出了两个企业的博弈均衡的经典式证明，影响至今
- 后来的法国经济学家瓦尔拉斯（L. Walras）和泰勒（J. Tirole）继承和发扬了这一演绎传统

思辨：哲学上指运用逻辑推导而进行纯理论、纯概念的思考
演绎：从一些假设的命题出发，运用逻辑的规则，导出另一命题的过程

Bertrand双寡头垄断模型
(Bertrand model of duopoly)

- Bertrand（1883）讨论了参加博弈的双方以**价格为决策变量**的静态博弈

Bertrand双寡头垄断模型（同种产品）

- 两个企业：企业1和企业2
- 每个企业在不知道对方产品价格的情况下确定价格，价格分别标记为 p_1 和p_2
- 消费者对企业1生产的产品需求量：

$$q_1(p_1, p_2) = \begin{cases} a - p_1, & \text{如果 } p_1 < p_2; \\ (a - p_1)/2, & \text{如果 } p_1 = p_2; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- 消费者对企业2生产的产品需求量：

$$q_2(p_1, p_2) = \begin{cases} a - p_2, & \text{如果 } p_2 < p_1; \\ (a - p_2)/2, & \text{如果 } p_1 = p_2; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- 企业i 的生产成本为：$C_i(q_i)=cq_i$.

Bertrand双寡头垄断模型（同种产品）

标准式表述：

- 局中人集合：**{企业1, 企业2}**
- 策略集合：***S*₁=[0, +∞), *S*₂=[0, +∞)**
- 支付函数：

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_1 - c)(a - p_1) & \text{如果 } p_1 < p_2 \\ (p_1 - c)(a - p_1)/2 & \text{如果 } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{如果 } p_1 > p_2 \end{cases}$$

$$u_2(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_2 - c)(a - p_2) & \text{如果 } p_2 < p_1 \\ (p_2 - c)(a - p_2)/2 & \text{如果 } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{如果 } p_2 > p_1 \end{cases}$$

Bertrand双寡头垄断模型（同种产品）

- NE是(c,c)，即双方的定价都是c，价格等于成本，零利润。
- 首先，两家企业价格竞争，低价一方拥有整个市场，高价者失去全部市场，企业总有动力降价，直到$p_i=c$为止；
- 其次， $p_i=c$时，每个企业获利$\frac{1}{2}(p_i-c)(a-p_i)$，即零利润
- 是否可以通过改变价格增加利润？否，因为若单方偏离c，使$p_i > c$，当另一方$p_j = c$时，i会失去整个市场，利润没有改善；若$p_i < c$，则负利润，利润同样没有改善。

Bertrand双寡头垄断模型（同种产品）

再次，是否可以$p_1=p_2>c$?

否，若企业2使$p_1>p_2>c$，则可以正利润得到整个市场，而企业1利润为0.

同理，企业1也是如此。

因此，每个企业都有动力降价。

因此， $p_i=c$是纳什均衡。

结果?

Bertrand双寡头垄断模型（同种产品）

- Bertrand均衡的含义：如果同业中的两家企业经营同样的产品，且成本一样，则价格战会使每个企业按价格等于边际成本来经营**（红海战略）**
- 启示：产品要有差异、寻找新蓝海

Bertrand双寡头垄断模型
Bertrand model of duopoly

讨论两种不同的产品（differentiated products）

- 两个企业：企业1和企业2.
- 每一个企业在对产品定价的时候并不知道另一个企业的定价，两个公司的产品价格分别标记为p_1和p_2
- 消费者对企业1生产的产品需求量（2>b>0）：

$$q_1(p_1, p_2) = a - p_1 + bp_2$$

- 消费者对企业2生产的产品需求量：

$$q_2(p_1, p_2) = a - p_2 + bp_1$$

- 企业i的生产成本为： $C_i(q_i)=cq_i$

Bertrand双寡头垄断模型（不同产品）

标准式表述：

- 局中人集合：{ 企业 1, 企业2}
- 策略集合：　$S_1=[0, +\infty)$, $S_2=[0, +\infty)$
- 支付函数：

$$u_1(p_1, p_2)=(a-p_1+bp_2)(p_1-c)$$

$$u_2(p_1, p_2)=(a-p_2+bp_1)(p_2-c)$$

Bertrand双寡头垄断模型（不同产品）

- 求解Nash均衡
  - 寻找价格组合(p_1*, p_2*) 使得p_1* 是企业1对企业2产品价格p_2*的最优反应，p_2*企业2对企业1产品价格p_1*的最优反应
  - 即 p_1*是如下优化问题的解

    $$\text{Max } u_1(p_1, p_2^*) = (a - p_1 + bp_2^*)(p_1 - c)$$

    $$\text{s.t. } 0 \le p_1 \le +\infty$$

    p_2*是如下优化问题的解

    $$\text{Max } u_2(p_1^*, p_2) = (a - p_2 + bp_1^*)(p_2 - c)$$

    $$\text{s. t. } 0 \le p_2 \le +\infty$$

Bertrand双寡头垄断模型（不同产品）

- 求解Nash均衡
  - 企业1的优化问题

    $\text{Max } u_1(p_1, p_2^*) = (a - p_1 + bp_2^*)(p_1 - c)$

    $\text{s.t. } 0 \le p_1 \le +\infty$

    一阶条件: $a + c - 2p_1 + bp_2^* = 0$

    $$p_1 = (a + c + bp_2^*)/2$$

Bertrand双寡头垄断模型（不同产品）

- 求解Nash均衡
  - 企业2的优化问题

$$\text{Max } u_2(p_1^*, p_2)=(a - p_2 + bp_1^*)(p_2 - c)$$

$$\text{s.t.} \quad 0 \le p_2 \le +\infty$$

一阶条件: $a + c - 2p_2 + bp_1^* = 0$

$$p_2 = (a + c + bp_1^*)/2$$

Bertrand双寡头垄断模型（不同产品）

- 求解Nash均衡
  - 价格组合(p_1^*, p_2^*) 是Nash均衡，如果

    $p_1^* = (a + c + bp_2^*)/2$

    $p_2^* = (a + c + bp_1^*)/2$

  - 解方程组可得

    $p_1^* = p_2^* = (a + c)/(2 – b)$

  - 作业：证明$p_i^* > c$