第三章　消费者选择与需求理论

消费者选择

消费者与商品

微观经济理论的最基本决策单位之一就是**消费者**。

在这里，我们假设消费者是在**市场经济**的环境下进行决策，从而确定自己的需求。

市场经济是指，消费者能够以已知的价格购买产品和服务，或者说消费者能以已知交换比率交换其他产品。

在市场经济中，消费者是价格的接受者，个人的需求变化一般不会改变产品和服务的市场价格。

消费者选择

消费者与商品

市场经济中的消费者面对的*决策问题*，是在市场中选择各种可以买到的产品和服务的消费水平。

一般来说，我们可以将这些产品和服务统一称为商品，并且为了简化问题，我们假设商品的种类是有限的，共有L种（分别记为l=1,2,...,L）。

定义商品向量（或称作商品束）：一组表示不同商品数量的数字，即

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_L \end{bmatrix}$$

这里的x是$\mathbb{R}^L$中的一点，$\mathbb{R}^L$ 可以被称为商品空间。

消费者选择

消费者与商品

商品向量可以用来表示某个人的消费水平：商品向量中的第l个元素就表示商品l的数量，所以我们也可以将商品向量叫做**消费向量**或者**消费束**。

通常情况下，我们研究的商品可以忽略时间因素，即我周一吃的糖醋排骨和我周三吃的糖醋排骨应该是一样的，在进行经济分析时，我们通常会把这一周吃掉的糖醋排骨进行加总。

但在有些情况下，**时间或地点**因素也可以用来定义商品。也就是说，今天去看电影和明天去看电影应该是有区别的商品（尤其是在如果今天是首映的情况下）。

消费者选择

消费者与消费集

消费者在面对各种产品和服务时，通常可能受到一些物理限制：

例如：我们消费的糖醋排骨的数量不可能为负数。

也就是说，**消费集**应该为商品空间$\mathbb{R}^L$的子集，可以记为$X \subset \mathbb{R}^L$。

消费集的元素是消费束，是在环境施加的物理约束下个人**能消费的消费束**。

消费者选择

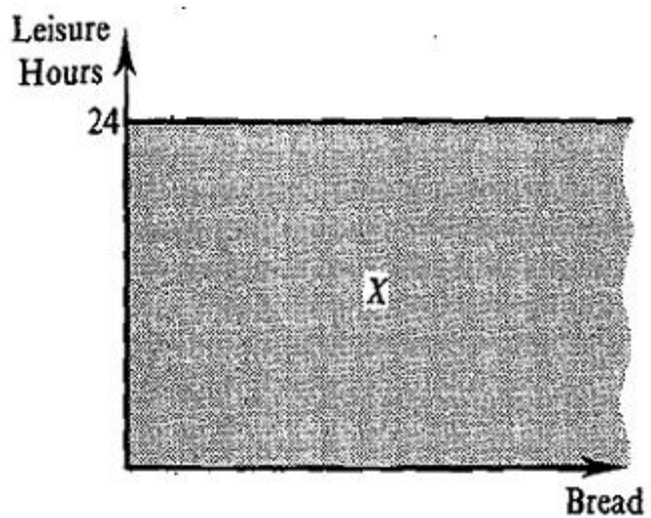
消费者与消费集

假设L=2，即消费者只面对两种商品。

（1）两种商品分别为：面包和休闲的时间。

这

面包
同时



消费者选择

消费者与消费集

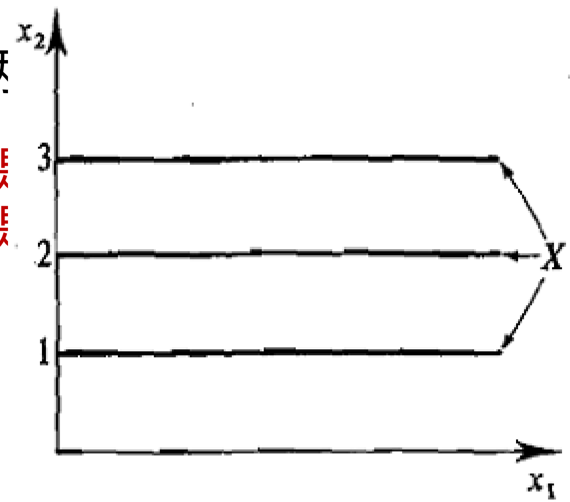
假设L=2，即消费者只面对两种商品。

（2）两种商品分别为：瓜子和北冰洋汽水。

这两

瓜子

只能



但北冰洋汽水

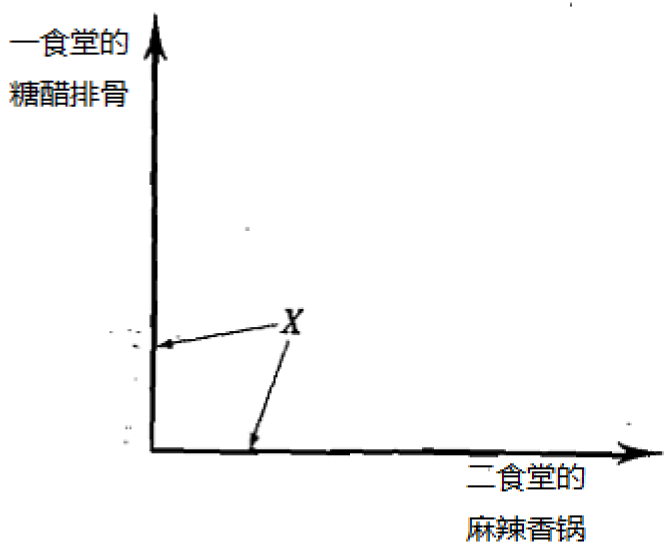
消费者选择

消费者与消费集

假设L=2，即消费者只面对两种商品。

（3）两种 ……**吃麻辣香锅。**

不



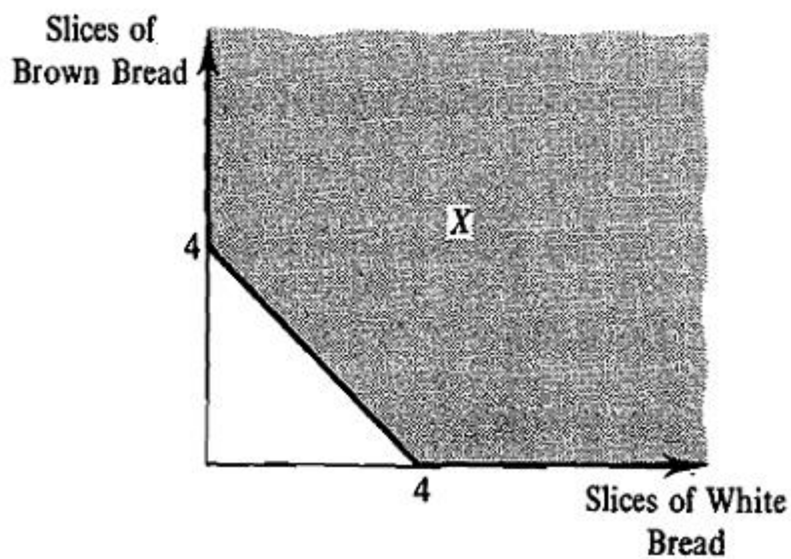
消费者选择

消费者与消费集

假设L=2，即消费者只面对两种商品。

（4）两种 **消费的面包**

数量最少

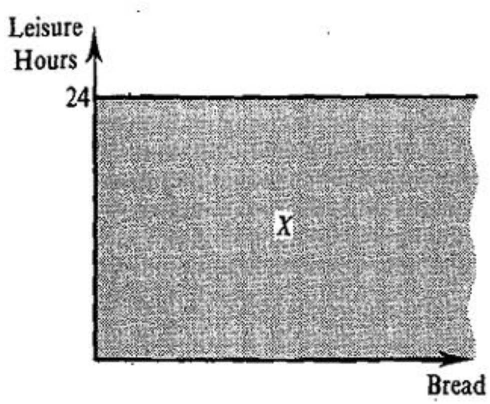


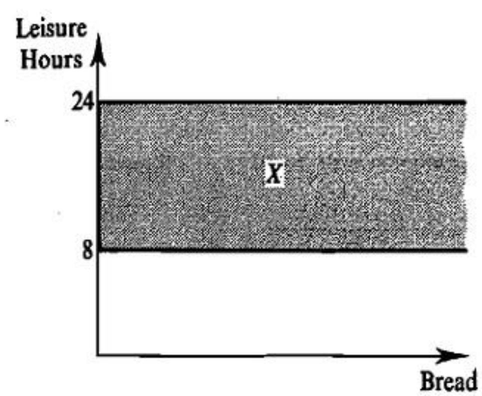
消费者选择

消费者与消费集

假设L=2，即消费者只面对两种商品。

上面四个例子当中，消费者都面临了一定的物理约束。有时候，消费集也可能包含制度约束。例如，如果法律规定一天工作时间禁止超过16个小时，那么再回到第一个问题：两种商品分别为面包和休闲的时间。

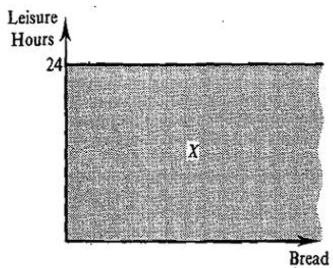


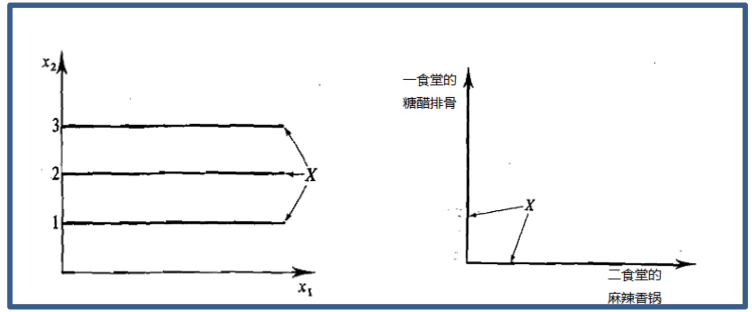


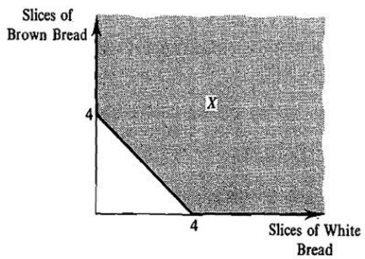
消费者选择

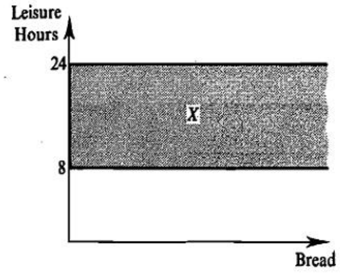
消费者与消费集

消费集 $\mathbb{R}_+^L$ 的凸性：如果消费束 x 和 x' 都是消费集 $\mathbb{R}_+^L$ 中的元素，则消费束 $x''=\alpha x+(1-\alpha)x'$ 也是 $\mathbb{R}_+^L$ 中的元素，其中， $\alpha\in[0,1]$ 。







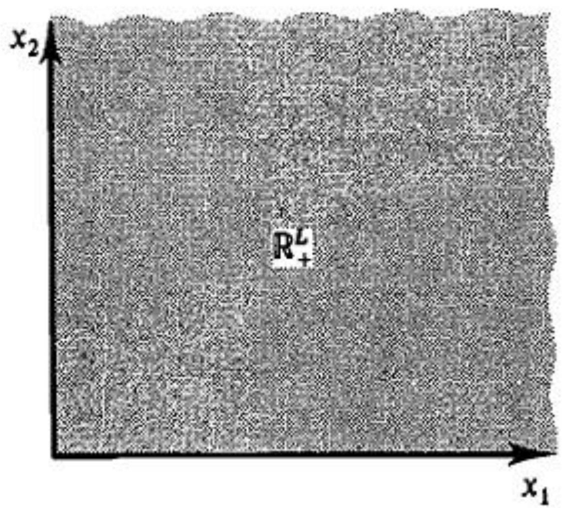


消费者选择

消费者与消费集

假设我们的消费集是最简单形式的消费集，由非负的商品束组成：

$$X=\mathbb{R}_{+}^{L}=\{x\in\mathbb{R}^{L}:x_{l}\geq 0\text{对于}l=1,\ldots,L\}$$



消费者选择

消费者与竞争性预算

消费者除了面对物理约束外，他还要面对一种重要的**经济约束**：他的消费选择被限定在那些他能买得起的商品束。

假设1：L种商品都在市场中交易，它们的价格是公开标明的货币价格。这个原则被称为**市场的完备性或普遍性原则**。

这些价格可以用价格向量表示：

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_L \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^L$$

一般情况下，p是大于0的，但如果面临的是噪音、污染等厌恶品，p可能是小于0的。

该向量表示由L种商品组成且每种商品的数量都为一单位的消费束的货币价格。

消费者选择

消费者与竞争性预算

消费者除了面对物理约束外，他还要面对一种重要的**经济约束**：他的消费选择被限定在那些他能买得起的商品束。

假设2：这些商品的价格不受单个消费者的影响。这被称为**价格接受假设**。这一假设在消费者对任何商品的需求只占该商品总需求的很小比例时成立。

消费者选择

消费者与竞争性预算

消费者能否买得起某个商品束取决于两个因素：

（1）市场价格 $p=(p_1,\dots,p_L)$

（2）消费者的财富水平 w **（有多少钱）**

只有某个消费束$x\in\mathbb{R}_+^L$ **的总费用不超过消费者的财富水平时，消费者才能够买得起这个消费束。也就是说，**$p\cdot x=p_1x_1+\cdots+p_Lx_L\le w$ **。在这种情况下，x是满足经济约束的，同时加上物理约束**$x\in\mathbb{R}_+^L$**，表明x是可行的消费束。**

消费者选择

消费者与竞争性预算

消费者可行的消费束集合是由同时满足经济约束和物理约束的消费束组成的，即：$\{x \in \mathbb{R}_+^L : p \cdot x \leq w\}$。这个集合被称为**瓦尔拉斯预算集**或**竞争性预算集**。

非负实数空间.

定义 2.D.1：瓦尔拉斯预算集或说竞争性预算集 $B_{p,w} = \{x \in \mathbb{R}_+^L : p \cdot x \leq w\}$，是由消费者在面对市场价格 p 和财富 w 时的所有可行消费束组成的集合。

外生 外生.

因此，消费者的选择问题，就变成了在给定p和财富w的情况下，如何在瓦尔拉斯预算集中选择一个消费束x。

消费者选择

消费者与竞争性预算

里昂·瓦尔拉斯

经济均衡理论是瓦尔拉斯的不朽贡献。这个伟大理论以水晶般明澈的思路和一种基本原理的光明照耀着纯粹经济关系的结构。在洛桑大学为尊敬他而树立的纪念碑上只是刻着这几个字：**经济均衡**。

熊彼特，《从马克思到凯恩斯十大经济学家》

消费者选择

消费者与竞争性预算

里昂·瓦尔拉斯

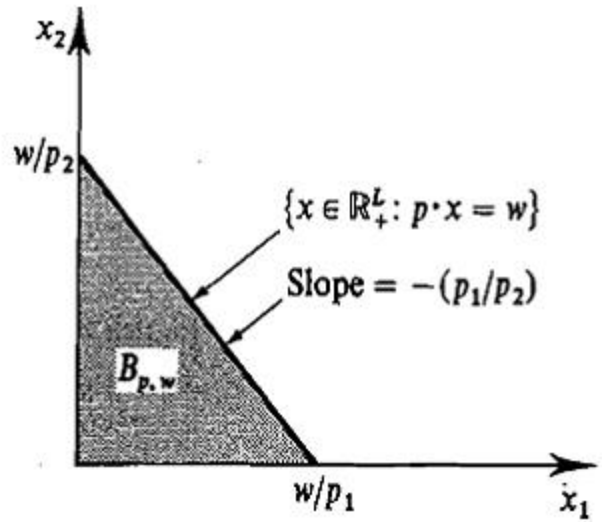
1858年的一天傍晚，小瓦尔拉斯（Léon Walras，1834--1910，经济学家，一般均衡体系的创立者）与父亲老瓦尔拉斯(Antoine Auguste Walras，1801--1866)一起散步，老瓦尔拉斯教导儿子说："使社会科学近似于自然科学是19世纪有待完成的重大工作之一。"

由于数学工具的局限，当时里昂.瓦尔拉斯的数学模型还很不完善，甚至是错误的。直到1954年，在数学家德布鲁(Gerard Debreu，1921年-)和美国经济学家阿罗(Kenneth Joseph Arrow，1921年-)的共同努力下，才最终完成了对一般均衡理论的数学证明。

消费者选择

消费者与竞争性预算

假设最简单的情形，令L=2，即只面对两种商品。这种情况下，瓦尔拉斯预算集可以决定出一条预算线（budget line），确定了预算集的上边界。



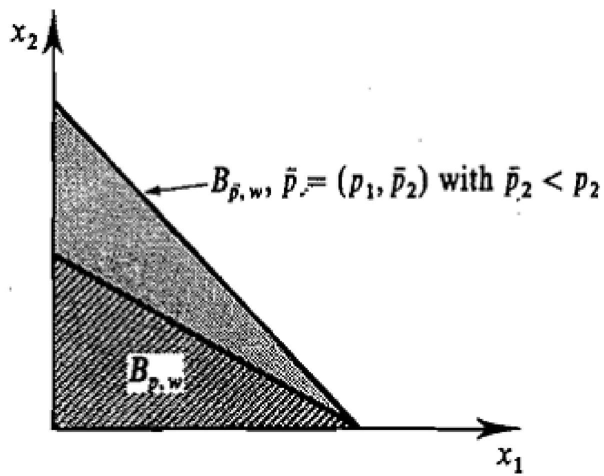
预算线的斜率为 $-(p_1 / p_2)$
描述了两种商品的交换比率

截距代表了将所有财富都用来购买某种单一商品的数量。

消费者选择

消费者与竞争性预算

如果商品2的价格下降到了$\bar{p}_2 < p_2$(但是维持商品1的价格和财富w不变），这种情况下，消费者能买得起更多的消费束，预算线变得更陡峭，预算集变大了。



消费者选择

消费者与竞争性预算

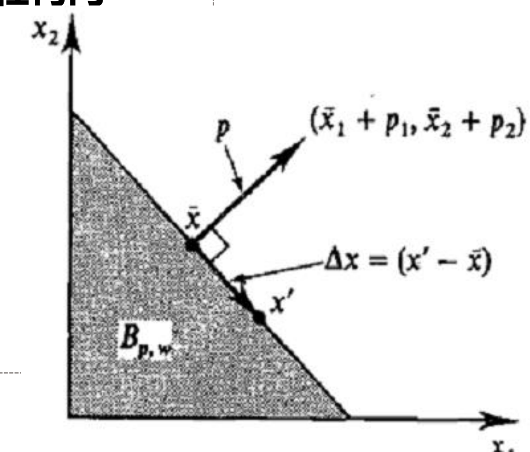
预算线反映了两种商品之间的交换比率。

从预算线上任一点 $\bar{x}$ 画出的价格向量p，必然与起点在 $\bar{x}$ 且位于预算线上的任何向量正交（垂直）。

对于L>2的情况，预算线就变成了L维实数空间里的预算超平面，同样满足预算超平面上任一点出发画出的价格向量与预算超平面上的任何向量都正交。

证明：对于预算超平面上的任一点 x' 来说，我们有 $p \cdot x' = p \cdot \bar{x} = w$

因此，如果令 $\Delta x = x' - \bar{x}$,则 $p \cdot \Delta x = 0$



消费者选择

消费者与竞争性预算

瓦尔拉斯预算集$B_{p,w}$ **也是一个凸集：即如果消费束**x **和** x' **都是** $B_{p,w}$ **的元素，那么消费束**$x''=\alpha x+(1-\alpha)x'$ **也是** $B_{p,w}$**的元素。**

首先，消费束x和 x' 都是非负的，因此，$x''\in\mathbb{R}_{+}^{L}$；

其次，因为 $p\cdot x\leq w$ 和 $p\cdot x'\leq w$ ，所以 $p\cdot x''=\alpha(p\cdot x)+(1-\alpha)(p\cdot x')\leq w$

因此，$x''\in B_{p,w}=\{x\in\mathbb{R}_{+}^{L}:p\cdot x\leq w\}$

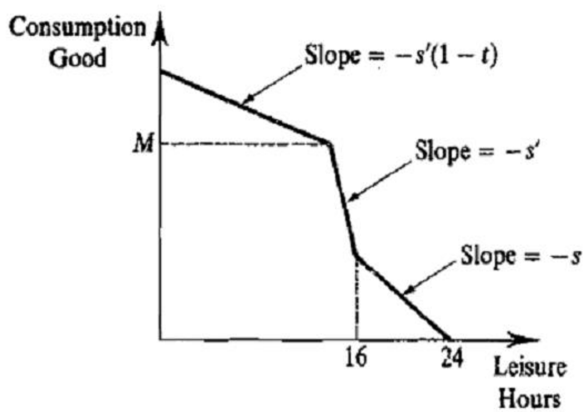
瓦尔拉斯预算集的凸性实际上依赖于消费集在物理约束上的凸性，则$\mathbb{R}_{+}^{L}$的凸性。一般来说，只要消费集X是凸的，则$B_{p,w}$ 也是凸的。

消费者选择

消费者与竞争性预算

但在我们进行经济分析时，面对的预算集也未必是凸的

消费者在消费品和休闲时间的权衡选择中，如果还涉及税收、补贴和不同的工资率，那么他的预算集就会比较复杂。



假设消费品的价格为1，消费者的工资率为阶梯式的：前8个小时为每小时s元，额外的加班时间每小时为$s' > s$ 元。但是，如果他的工资收入超过了M元，超过的部分要缴税，税率为t。

这个预算集不是凸的

消费者选择

需求函数

消费者的瓦尔拉斯需求x(p,w)为每个价格和财富的组合(p,w)指定了可能被选中的消费束的集合。

理论上，这种对应可以是多值的，也就是说，每个给定的价格和财富组合(p,w)可能对应两个或两个以上的消费向量。在这种情形下，当消费者面临特定的价格财富组合时，他有可能选择任何的$x \in x(p,w)$。当x取单值的时候，就可以将$x(p,w)$称为**需求函数**。(瓦尔拉斯)

消费者选择

需求函数

假设瓦尔拉斯需求对应x(p,w)满足两个假设：

（1）x(p,w)是零次齐次的；

（2）x(p,w)满足瓦尔拉斯法则。

消费者选择

需求函数

零次齐次性：对于任何的p，w和 $\alpha > 0$ 都有 $x(\alpha p, \alpha w) = x(p, w)$，则瓦尔拉斯需求对应x(p,w)是零次齐次的。

瓦尔拉斯
预算集不变.

也就是说，如果所有商品的价格和消费者的财富都变动相同的比例，那么他的消费选择不会变动。

消费者的选择取决于他的可行点集，当价格和财富从(p,w)变为 $(\alpha p, \alpha w)$ 时，并不会导致消费者的可行消费束集发生任何变动。

消费者选择

需求函数

向量所有元素

瓦尔拉斯法则：若对于每个 $p \gg 0$ 和 $w > 0$，都能得到 $p \cdot x = w$ 对于所有的 $x \in x(p, w)$ 都成立，则瓦尔拉斯需求对应x(p,w)满足瓦尔拉斯法则。

瓦尔拉斯法则是说，消费者花光了他的财富。

消费者的预算集可以是跨期的，因此可以理解为他将所有的财富用于其一生的消费。

消费者选择

需求函数

例：假设L=3，考虑需求函数x(p,w)，这个需求函数的定义如下：

$$x_1(p,w)=\frac{p_2}{p_1+p_2+p_3}\frac{w}{p_1},$$

$$x_2(p,w)=\frac{p_3}{p_1+p_2+p_3}\frac{w}{p_2},$$

$$x_3(p,w)=\frac{\beta p_1}{p_1+p_2+p_3}\frac{w}{p_3}.$$

这个函数是否满足零次齐次和瓦尔拉斯法则?

满足零次齐次

$\beta=1$，满足瓦尔拉斯法则

消费者选择

需求函数

零次齐次性决定了p和w等比例变化不会影响需求，那也就是说，尽管x(p,w)这个需求对应看上去有L+1个自变量（L个商品的价格和财富），但因为满足了零次齐次，实际上我们可以将这L+1个自变量中的任意一个标准化在一个固定的水平，比如令第一种商品的价格为单位价格1，或者令财富水平为1。

因此，实际上需求对应x(p,w)实际上只有L个自变量。

消费者选择

需求函数

尽管我们上面讲的物理约束和经济约束下，瓦尔拉斯需求对应的需求往往是多值的（一个集合），即便满足瓦尔拉斯法则，也依旧可能是多值的（预算超平面或预算线）。但是在其他条件下（效用最大化），这个需求往往是单值的。

这种情况下，我们可以将需求对应写成具体商品的需求函数：

$$x(p,w)=\begin{bmatrix} x_1(p,w) \\ x_2(p,w) \\ \vdots \\ x_L(p,w) \end{bmatrix}.$$

并且通常假设需求函数是连续和可微的。

消费者选择

比较静态

比较静态分析：消费者的选择如何随着他的财富和商品价格的变动而变动，这种分析潜在的经济参数的变化而引起的结果的变化，叫做比较静态分析。

（1）财富效应

（2）价格效应

消费者选择

比较静态

财富效应 固定价格

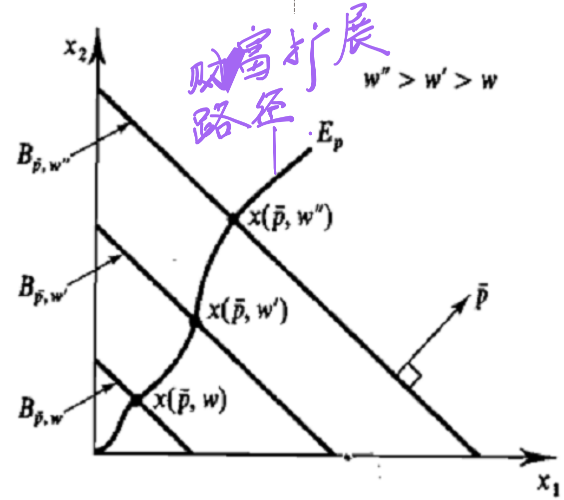
对于固定的价格 $\bar{p}$ ，财富的函数 $x(\bar{p}, w)$ 称为消费者的恩格尔函数。

恩格尔函数在 $\mathbb{R}_+^L$ 中的像 $E_{\bar{p}} = \{x(\bar{p}, w) : w > 0\}$ ，称为财富扩展路径。

当L=2时，财富扩展路径就是二维平面上的曲线。

财富效应可以用矩阵符号表示为： $D_w x(p,w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(p,w)}{\partial w} \\ \frac{\partial x_2(p,w)}{\partial w} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_L(p,w)}{\partial w} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^L$

对w求导



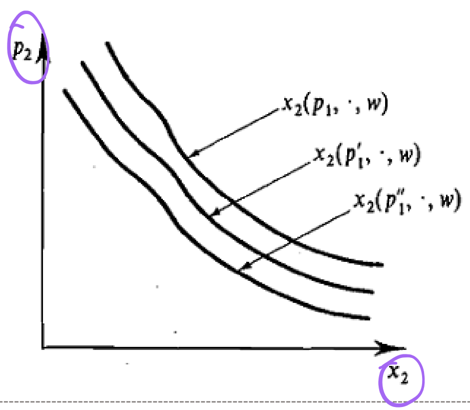
消费者选择

比较静态

价格效应

价格效应主要研究商品的需求水平如何随价格的变动而变动。

依旧考虑L=2的情况，假设维持财富和其中一种商品价格p_1不变。



商品2的需求函数，横坐标是需求数量，纵坐标是自身价格。维持财富保持不变，在给定的第一种商品价格水平下，第二种商品随价格变化的需求状况。

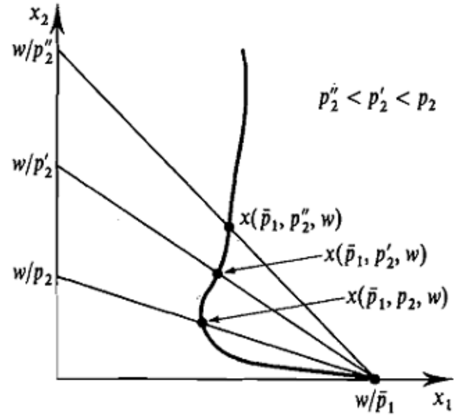
经济学中一般使用纵轴表示价格变量，横轴表示需求量（因变量）。

消费者选择

比较静态

价格效应

另外一种表示方法是表示消费者在不同价格水平上对两种商品的需求，也就是考察需求束在商品空间中的运动轨迹，被称为**提供曲线**(offer curve)。



消费者选择

比较静态

价格效应

$$D_p x(p,w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(p,w)}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_1(p,w)}{\partial p_L} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial x_L(p,w)}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_L(p,w)}{\partial p_L} \end{bmatrix}.$$

在一般的情况下，将导数 $\partial x_l(p,w)/\partial p_k$ 定义为 p_k 的价格效应，也就是商品k的价格对商品l需求的影响。

通常情况下，某种商品价格下降会导致消费者多购买该商品。但是也有一些情况下，商品价格下降反而会导致消费者少购买该商品，如果商品l在(p,w)处，有 $\partial x_l(p,w)/\partial p_l > 0$ 那么就说商品l在(p,w)处为吉芬商品。

低质量的商品对于低财富水平的消费者来说很有可能是吉芬商品。

消费者选择

比较静态

价格效应

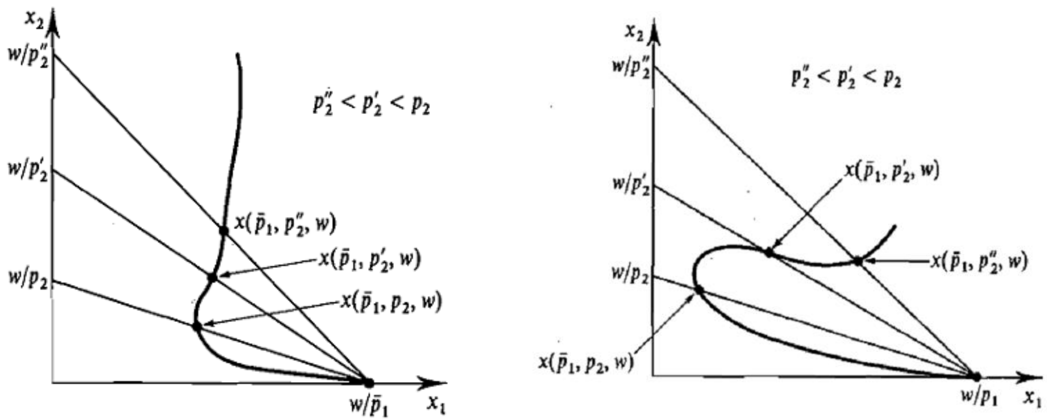
例如，某个贫穷的消费者最初只能依靠馒头充饥，因为馒头比较便宜。

如果馒头价格下降，他实际上变得更富有了（预算集变大了，能够购买的商品束范围变大了）。他能购买其他它更想要的，比如包子，因为这些食物也能充饥。因此，他消费的馒头量可能下降。

消费者选择

比较静态

价格效应



对于正常商品，随着价格的降低，需求量提高；

而对于右图中的商品，在 $(\bar{p}_1, p'_2, w)$ 处，如果价格继续降低，需求量也不会提高。这种商品被称为**吉芬商品**。

消费者选择

比较静态

零次齐次对财富和价格效应的影响

零次齐次意味着对于所有的 $\alpha > 0$ 都有 $x(\alpha p, \alpha w) - x(p, w) = 0$。将这个式子对 α 求微分，并计算 $\alpha = 1$ 时的导数，就可以得到：

命题 2.E.1：若瓦尔拉斯需求函数 $x(p, w)$ 是零次齐次的，则对于所有 p 和 w 都有：

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial p_k} p_k + \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial w} w = 0 \text{ 对于 } l = 1, \dots, L \text{。} \quad (2.E.1)$$

若用矩阵符号表示，上式变为

$$D_p x(p, w) p + D_w x(p, w) w = 0. \quad (2.E.2)$$

消费者选择

比较静态

零次齐次对财富和价格效应的影响

$$\sum_{k=1}^{L}\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k}p_k+\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w}w=0\ \text{对于}\ l=1,\ldots,L$$

零次齐次意味着对于任何商品l的需求，它关于价格的导数和关于财富的导数分别以相应的价格和财富为权重时，加权和等于0.

也就是说，当我们同比例的增加所有商品的价格和消费者的财富时，每个变量的变化都和它的初始水平成比例。

消费者选择

比较静态

零次齐次对财富和价格效应的影响

商品l的需求的价格弹性 $\varepsilon_{lk}(p,w)$ **和需求的财富弹性** $\varepsilon_{lw}(p,w)$ **，可以定义为：**

$$\varepsilon_{lk}(p,w)=\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k}\frac{p_k}{x_l(p,w)}$$

$$\varepsilon_{lw}(p,w)=\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w}\frac{w}{x_l(p,w)}$$

弹性给出了因商品k的价格或财富每个边际百分比变动引起的商品l需求的百分比变动，也可以写成： $(\Delta x/x)/(\Delta w/w)$ **。可见，弹性是无量纲的。**

消费者选择

比较静态

零次齐次对财富和价格效应的影响

可以用弹性表达

$$\sum_{k=1}^{L}\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k}p_k+\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w}w=0 \text{ 对于 } l=1,\ldots,L$$

得到：

$$\sum_{k=1}^{L}\varepsilon_{lk}(p,w)+\varepsilon_{lw}(p,w)=0 \text{ 对于 } l=1,\ldots,L$$

也就是说，零次齐次对于比较静态来说，意味着所有商品价格和消费者财富的同比例变化不会引起需求的变化。

消费者选择

比较静态

瓦尔拉斯法则对财富和价格效应的影响

根据瓦尔拉斯法则，对于所有的p和w都有：

$$p \cdot x(p,w) = w$$

对上式做关于价格的微分，可以得到：

命题 2.E.2：若瓦尔拉斯需求函数 $x(p,w)$ **满足瓦尔拉斯法则，则对于所有** p **和** w**：**

$$\sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + x_k(p,w) = 0 \text{ 对于 } k=1,\ldots,L \text{。} \tag{2.E.4}$$

或用矩阵符号写成(五)**，**

$$p \cdot D_p x(p,w) + x(p,w)^{\mathrm{T}} = 0^{\mathrm{T}}. \tag{2.E.5}$$

消费者选择

比较静态

瓦尔拉斯法则对财富和价格效应的影响

根据瓦尔拉斯法则，对于所有的p和w都有：

$$p \cdot x(p, w) = w$$

对上式做关于财富w的微分，可以得到：

命题 2.E.3： 若瓦尔拉斯需求函数 $x(p,w)$ 满足瓦尔拉斯法则，那么对于所有 p 和 w：

$$\sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} = 1. \qquad \text{(2.E.6)}$$

或用矩阵符号写成

$$p \cdot D_w x(p,w) = 1. \qquad \text{(2.E.7)}$$

消费者选择

比较静态

瓦尔拉斯法则对财富和价格效应的影响

关于价格微分得到的条件通常被称为**古诺加总性质**，关于财富微分得到的条件通常被称为**恩格尔加总性质**。

古诺加总性质：$\sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + x_k(p,w) = 0$ 对于 $k = 1, \ldots, L$

恩格尔加总性质：$\sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} = 1.$

他们分别代表的是：*价格变化不会引起总支出的变化；总支出的变化量必定等于财富的变化量。*

消费者选择

比较静态

瓦尔拉斯法则对财富和价格效应的影响

古诺加总性质： $\sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + x_k(p,w) = 0$ 对于 $k = 1, \dots, L$

我们对于任意的商品k上式都成立： $-xk(p,w) = \sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k}$

左右两边分别乘以p_k/w，可得： $\frac{-p_k x_k(p,w)}{w} = \sum_{l=1}^{L} \frac{p_l x_l}{w} \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} \frac{p_k}{x_l}$

$$\frac{-p_k x_k(p,w)}{w} = \sum_{l=1}^{L} \frac{p_l x_l}{w} \varepsilon_{lk}$$

总支出因为商品k的价格上升而减少的份额等于所有商品因为商品k的价格上升而增加的份额，也就是*价格变化不会引起总支出的变化*

消费者选择

比较静态

瓦尔拉斯法则对财富和价格效应的影响

恩格尔加总性质： $\sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} = 1.$

分子分母都乘以wx_l**，得** $\sum_{l=1}^{L} p_l x_l \frac{\partial x_l(p,w)}{x_l} \frac{w}{\partial w} \frac{1}{w} = \sum_{l=1}^{L} \frac{p_l x_l}{w} \varepsilon_{lw} = 1$

$$\sum_{l=1}^{L} p_l x_l \varepsilon_{lw} = w$$

也就是，总支出的变化量必定等于财富的变化量。