第二章
不确定条件下的决策理论

不确定条件下的决策问题

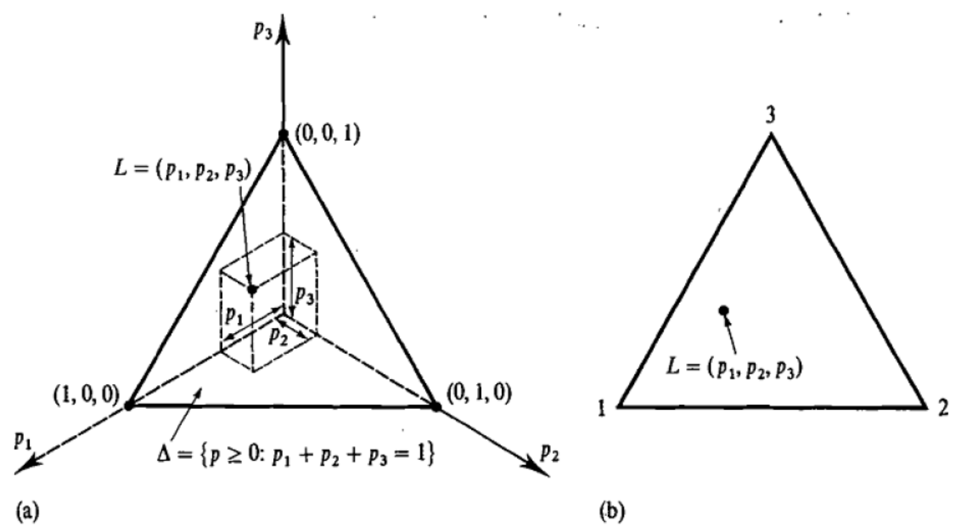
- 确定性的决策问题，备选物是确定的
- 当面对不确定的备选物时，我们应当如何做出选择？

风险备选物的描述

- 风险备选物的正式描述工具——彩票

定义 6.B.1：一个简单彩票（simple lottery）L 是一组概率 $L=(p_1,\ldots,p_N)$，其中 $p_n \geq 0$ 对于所有 n 成立并且 $\sum_n p_n = 1$，p_n 是结果 n 发生的概率。

- 一个简单的彩票可用(N-1)维的单纯形中的一点来表示



风险备选物的描述

- 风险备选物的正式描述工具——彩票

定义 6.B.2：给定 K 个简单彩票 $L_k=(p_1^k,\ldots,p_N^k)$，$k=1,\ldots,k$ 而且概率 $\alpha_k\geq 0$ 以及 $\sum_k \alpha_k=1$，复合彩票 $(L_1,\ldots,L_K;\alpha_1,\ldots,a_K)$ 是能够以概率 α_k（其中 $k=1,\ldots,k$）产生简单彩票 L_k 的风险备选物。

- 对于任何复合彩票，我们都可以计算出相应的简化彩票 $L=(p_1,\ldots,p_N)$：它是能产生与该复合彩票具有相同最终分布的简单彩票，其中 $p_n=\alpha_1 p_n^1+\ldots+\alpha_k p_n^K$
- 因此，任何复合彩票的简单彩票可通过向量加法得到：

$$L=\alpha_1 L_1+\cdots+\alpha_K L_K\in\Delta.$$

风险备选物的描述

- **在彩票上的偏好**
  - 基于彩票这种风险选择的表示方法，就可以研究决策者在彩票上的偏好。
  - 将备选物集合$\mathscr{L}$ 视为：定义在结果集C上的所有简单彩票组成的集合。
    - 假设决策者在 $\mathscr{L}$ 上具有偏好关系 $\succsim$ ，这个偏好关系是**完备的和传递的**，从而我们可以比较任何一对简单彩票。

风险备选物的描述

- **连续性公理**
  - 连续性公理意味着，存在着代表$\succsim$的效用函数$U:\mathscr{L}\to\mathbb{R}$

使得$L\succsim L'$，当且仅当$U(L)\geq U(L')$。

- 同时，概率的微小变化不会改变两个彩票之间的排序性质。

风险备选物的描述

独立性公理

定义 6.B.4：简单彩票空间 $\mathscr{L}$ 上的偏好关系 $\succsim$ 满足独立性公理，如果对于所有 $L, L', L'' \in \mathscr{L}$ 和 $\alpha \in (0,1)$ 我们有：

$$L \succsim L' \text{当且仅当} \alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L''。$$

- 如果我们将两个彩票分别与第三个彩票组合，由此形成两个新的复合彩票，那么这两个新彩票的偏好排序独立于我们使用什么样的第三个彩票（即与第三个彩票无关）

风险备选物的描述

- 独立性公理
  - 独立性公理是不确定性下选择理论的核心。
    - 在确定性选择理论中，没理由相信下列结果是合理的：决策者在备选物x和y的偏好与他选择的其他备选物无关。
    - 但是在不确定情况下，如果给定决策者在两个彩票之间的偏好，再将这两个彩票分别与第三个彩票组合，形成两个新的彩票，那么决策者在前两个彩票间的排序，将决定他对这两个新彩票的偏好排序。

风险备选物的描述

期望效用函数

定义 6.B.5：效用函数$U:\mathscr{L}\to\mathbb{R}$ **具有期望效用形式，如果可以对** N **个结果指定一组数** $(u_1,\ldots,u_N)$ **使得对于每个简单彩票** $L=(p_1,\ldots,p_N)\in\mathscr{L}$ **我们有**

$$U(L)=u_1p_1+\cdots+u_Np_N.$$

具有期望效用形式的效用函数$U:\mathscr{L}\to\mathbb{R}$ **称为冯.诺依曼—摩根斯坦期望效用函数**（von Neumann-Morgenstern expected utility function）。

- 在冯诺依曼-摩根斯坦期望效用函数中，一个彩票的效用可以视为N个结果的效用u_n的期望值。

风险备选物的描述

- 期望效用定理
  - 如果决策者在彩票上的偏好满足连续性和独立性，那么他的偏好可用具有期望效用形式的效用函数所表示。

命题 6.B.3：（期望效用定理）假设彩票空间 $\mathscr{L}$ 上的理性偏好关系 $\succsim$ 满足连续性公理和独立性公理。那么 $\succsim$ 可用具有期望效用形式的效用表示。也就是说，我们可以对于每个结果 $n=1,\ldots,N$ 指定一个数 u_n 使得对于任何两个彩票 $L=(p_1,\ldots,p_N)$ 和 $L'=(p'_1,\ldots,p'_N)$，我们有

$$L \succsim L' \text{ 当且仅当 } \sum_{n=1}^{N} u_n p_n \geq \sum_{n=1}^{N} u_n p'_n \text{。} \qquad (6.B.4)$$

风险备选物的描述

- 反例：阿莱悖论
  - 三种可能的货币奖品，即N=3。

    一等奖：250万元；二等奖：50万元；三等奖：0元

- 第一个选择： $L_1 = (0, 1, 0)$　　$L_1' = (0.10, 0.89, 0.01).$
- 第二个选择： $L_2 = (0, 0.11, 0.89)$　　$L_2' = (0.10, 0, 0.90).$
  - 实验结果：大多数人在第一个选择中选择了L_1，在第二个选择中选择了L_2'

风险备选物的描述

$$L_1=(0,1,0) \qquad L_1'=(0.10,0.89,0.01).$$

$$L_2=(0,0.11,0.89) \qquad L_2'=(0.10,0,0.90).$$

- 反例：阿莱悖论
  - 假设存在一个期望效用函数可以表示这个偏好关系，我们将这三个可能性所带来的效用值分别定义为u_{25}，u_5和u_0.
  - 根据我们的第一个选择$L_1 \succ L_1'$，就意味着有：

$$u_5>(0.10)u_{25}+(0.89)u_5+(0.01)u_0.$$

- 在上式两侧同时加上$(0.89)u_0-(0.89)u_5$，可得：

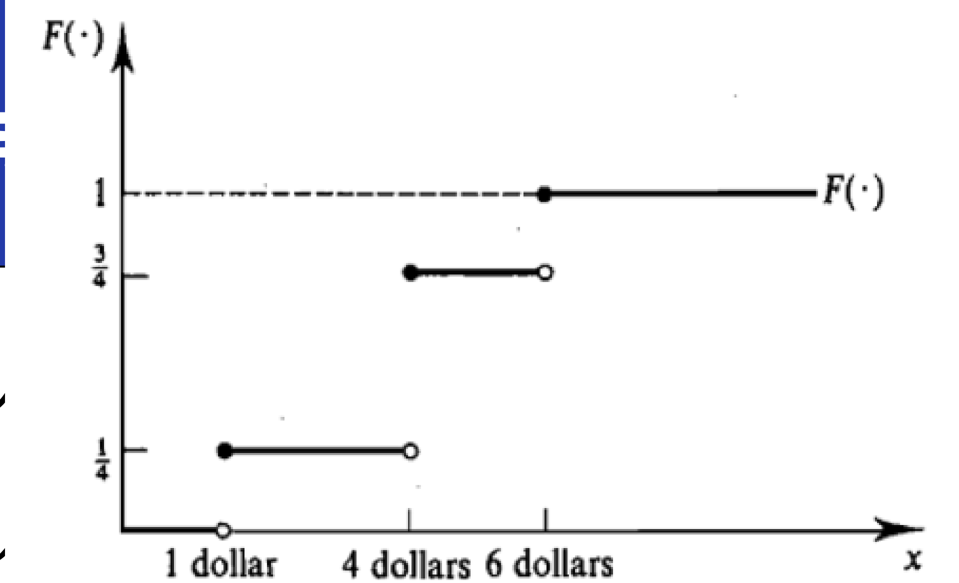
$$(0.11)u_5+(0.89)u_0>(0.10)u_{25}+(0.90)u_0$$

- 这种情形下在第二个选择中，一定会有$L_2 \succ L_2'$，矛盾。
- 人们更重视确定性！

货币偏好与

- 在很多经济环境中，个
- 为了研究风险厌恶，引
  - 假设用连续变量x表示货

    $F:\mathbb{R}\rightarrow[0,1]$描述货币彩票



$$\begin{Bmatrix} \text{Prob(1 dollar)} = \frac{1}{4} \\ \text{Prob(4 dollars)} = \frac{1}{2} \\ \text{Prob(6 dollars)} = \frac{1}{4} \end{Bmatrix} \rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 1 \\ \frac{1}{4} & \text{if } x \in [1,4) \\ \frac{3}{4} & \text{if } x \in [4,6) \\ 1 & \text{if } x \geq 6 \end{cases}$$

- 对于任何x，F(x)是收益小于x或等于x的概率。
- 如果某个彩票的分布函数具有相应的密度函数f(·)，那么对于所有的x，我们有$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ 。
  - 其中分布函数更具有一般性，可以包含结果集为离散的情况。

货币偏好与风险厌恶

货币偏好

- 我们可以使用分布函数来描述基于货币结果之上的彩票。将彩票空间视为**在非负货币量（或者在区间[a,+∞]）**上的所有分布函数组成的集合。
- 假设有一个决策者，他的理性偏好$\succsim$定义在$\mathscr{L}$之上。将期望效用定理应用到由连续变量定义的结果之后，对于货币量可以赋予效用值u(x)，使得任何F(·)可用具有下列形式的效用函数U(·)来评估：

$$U(F)=\int u(x)dF(x)$$

- U(F)为当前环境下的期望效用形式。冯诺依曼-摩根斯坦效用函数U(·)是效用u(x)在x实现值上的数学期望。

货币偏好与风险厌恶

- 货币偏好
  - 定义在彩票上的效用函数U(·)与定义在确定货币数量上的效用函数u(·)是不同的。
    - U(·)为冯诺依曼-摩根斯坦期望效用函数
    - u(·)为伯努利效用函数
    - 期望效用的分析能力取决于对伯努利效用函数施加的约束，一般情况下，在货币彩票环境下，规定u(·)是**递增且连续**的。

货币偏好与风险厌恶

- ## 风险厌恶
  - 一般情况下，假设个体总是风险厌恶的。

定义 6.C.1： 如果对于某个决策者来说，对于任何彩票 $F(\cdot)$，他认为能确定产生金额 $\int xdF(x)$ 的退化彩票至少与彩票 $F(\cdot)$ 本身一样好，我们说该决策者是个风险厌恶者或者说他是风险厌恶的（risk aversion）。如果决策者在这两个彩票之间总是[即对于任何 $F(\cdot)$]无差异的，我们说他是风险中性的（risk neutral）。最后，如果仅当这两个彩票是相同的[即当 $F(\cdot)$ 是退化的]时，决策者才认为这两个彩票无差异，那么我们说他是严格厌恶风险的（strictly risk averse）。

货币偏好与风险厌恶

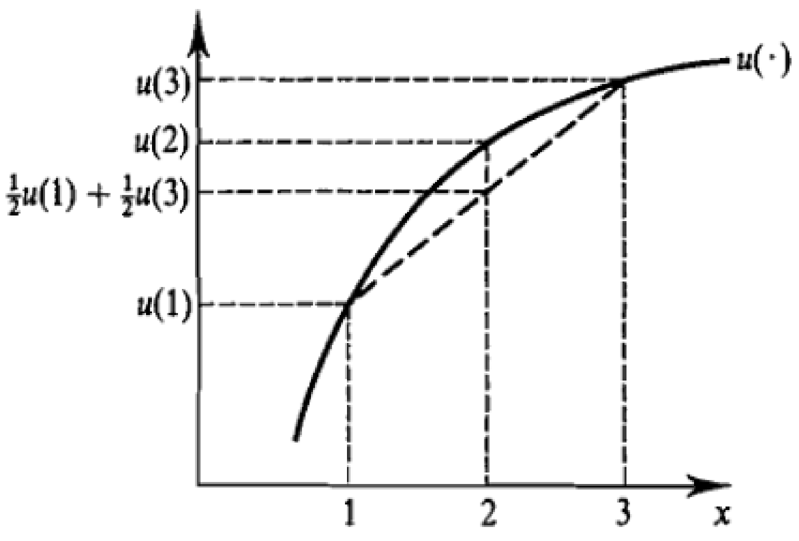
- **风险厌恶**
  - 如果偏好能用伯努利效用函数u(x)的期望效用表示，那么从风险厌恶的定义直接可以得到，决策者是风险厌恶的，当且仅当：

$$\int u(x)dF(x) \le u\left(\int x dF(x)\right) \text{ 对于所有 } F(\cdot) \text{ 成立}$$

    - 上式也被称为**詹森不等式**，这也是凹函数具有的性质
    - 因此，风险厌恶等价于函数u(·)是凹的。
      - 严格凹意味着货币的边际效用是递减的，因此在任何财富水平x上，额外一元钱带来的效用增加量，小于减少一元钱带来的效用减少量。

货币偏好与风险厌恶

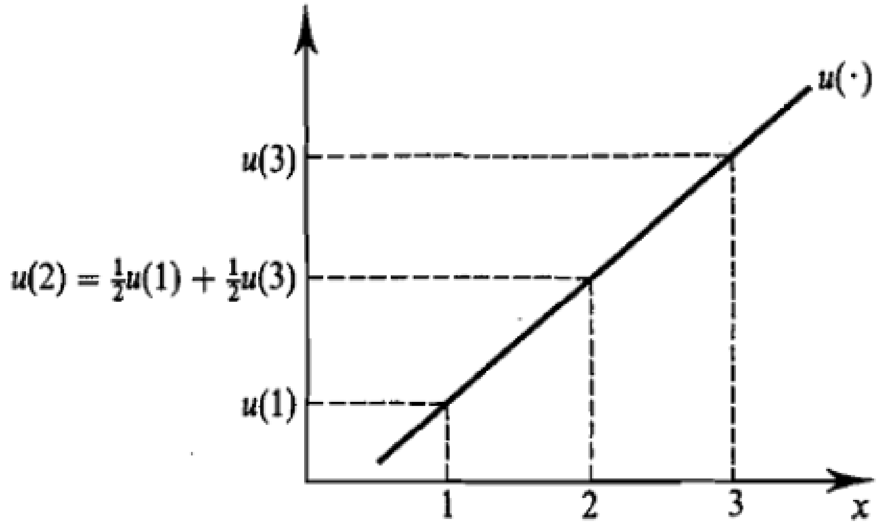
- 风险厌恶
  - 考虑一个涉及赢取或输掉1元钱的赌博，初始位置是2元。这个赌博的冯诺依曼-摩根斯坦效用为$\frac{1}{2}u(1)+\frac{1}{2}u(3)$。
    - 对于严格风险厌恶者，这个效用严格小于初时确定位置的效用u(2)



货币偏好与风险厌恶

风险厌恶

- 对于风险中性决策者来说，对于所有的F(·)，期望货币的伯努利效用和冯诺依曼摩根斯坦期望效用是相等的。
- 因此，决策者是风险中性的，当且仅当货币的伯努利效用函数u(·)是线性的。



货币偏好与风险厌恶

- **风险厌恶的衡量**
  - 阿罗-普拉特绝对风险厌恶系数

定义 6.C.3：给定一个（二次可微的）关于货币的伯努利效用函数 $u(\cdot)$，x 点上的阿罗-普拉特（Arrow-Pratt）绝对风险厌恶系数的定义为 $r_A(x) = -u''(x)/u'(x)$。

- 由于风险中性等价于u(·)是线性的，即对于所有的x都有u’’(x)=0。
- 因此，风险厌恶程度应该与u(·)的曲率有关。

不确定性下的选择行为

- 描述风险备选物的关键：概率
  - 每一种结果出现的可能性究竟有多大
- 如何得到概率？
  - 客观：基于历史情况观测不同结果出现的频次
  - 主观：基于个人体验或经验
    - 每个人获取信息和处理信息的方式不同会导致主观概率产生比较大的差异

不确定性下的选择行为

- **风险备选物的进一步描述**
  - 为了便于分析，我们依旧使用前面用货币x表示的彩票
  - 两个重要的概念
    - 期望值：不同可能的结果下货币量x的加权平均
    - 波动率：衡量期望值和实际值之间差异的程度，通常用x的方差或标准差来表示

不确定性下的选择行为

- **如何降低风险**
  - 多样化
  - 保险
  - 获取更多的信息