

MATLAB 作业二参考答案

1、试求出如下极限。

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^{x+2}(x+3)^{x+3}}{(x+5)^{2x+5}}, \quad (2) \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{x^2 y + xy^3}{(x+y)^3}, \quad (3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{x^2 + y^2}}$$

【求解】极限问题可以由下面语句直接求解。

```
>> syms x; f=(x+2)^(x+2)*(x+3)^(x+3)/(x+5)^(2*x+5);  
limit(f,x,inf)  
ans =  
exp(-5)  
>> syms x y  
fa=(x^2*y+x*y^3)/(x+y)^3; limit(limit(fa,x,-1),y,2)  
ans =  
-6  
>> fc=(1-cos(x^2+y^2))*exp(x^2+y^2)/(x^2+y^2);  
limit(limit(fc,x,0),y,0)  
ans =  
0
```

2、试求出下面函数的导数。

$$(1) y(x) = \sqrt{x \sin x \sqrt{1 - e^x}}, \quad (2) \operatorname{atan} \frac{y}{x} = \ln(x^2 + y^2)$$

【求解】由求导函数diff() 可以直接得出如下结果，其中(2) 为隐函数，故需要用隐函数求导公式得出导数。

```
>> syms x;  
f=sqrt(x*sin(x)*sqrt(1-exp(x))); simplify(diff(f))  
ans =  
1/2/(x*sin(x)*(1-exp(x))^(1/2))^(1/2)*(sin(x)*(1-exp(x))^(1/2)+  
x*cos(x)*(1-exp(x))^(1/2)-1/2*x*sin(x)/(1-exp(x))^(1/2)*exp(x))  
>> syms x,y; f=atan(y/x)-log(x^2+y^2);  
f1= simplify (-diff(f,x)/diff(f,y))  
f1 =  
(y+2*x)/(x-2*y)
```

3、假设 $u = \cos^{-1} \sqrt{\frac{x}{y}}$ ，试验证 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ 。

【求解】证明二者相等亦可以由二者之差为零来证明，故由下面的语句直接证明。

```
>> syms x y; u=acos(x/y);
diff(diff(u,x),y)-diff(diff(u,y),x)
ans =
0
```

4、假设 $f(x, y) = \int_0^{xy} e^{-t^2} dt$ ，试求 $\frac{x}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 。

【求解】由下面的命令可以得出所需结果。

```
>> syms x y t
f=int(exp(-t^2),t,0,x*y);
x/y*diff(f,x,2)-2*diff(diff(f,x),y)+diff(f,y,2)
simplify(ans)
ans =
2*x^2*y^2*exp(-x^2*y^2) - 2*x^3*y*exp(-x^2*y^2) - 2*exp(-x^2*y^2)
ans =
-2*exp(-x^2*y^2)*(x^3*y - x^2*y^2 + 1)
```

5、假设已知函数矩阵 $f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 3x + e^y z \\ x^3 + y^2 \sin z \end{bmatrix}$ ，试求出其 Jacobi 矩阵。

【求解】Jacobi 矩阵可以由下面的语句直接得出。

```
>> syms x y z
F=[3*x+exp(y)*z; x^3+y^2*sin(z)];
jacobian(F,[x,y,z])
ans =
[ 3, exp(y)*z, exp(y)]
[ 3*x^2, 2*y*sin(z), y^2*cos(z)]
```

6、试求解下面的不定积分问题。

$$(1) \quad I(x) = \int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}} dx, \quad (2) \quad I(x) = \int x e^{ax} \cos bx dx$$

【求解】(1) 可以用下面的语句求出问题的解

```
>> syms x; f=sqrt(x*(x+1))/(sqrt(x)+sqrt(x+1));int(f,x)
ans =
int((x*(x+1))^(1/2)/((x+1)^(1/2)+x^(1/2)), x)
```

(2) 可以求出下面的结果

```
>> syms a b x
f=x*exp(a*x)*cos(b*x); int(f,x)
```

```
ans =
(exp(a*x)*(b^2*cos(b*x) - a^2*cos(b*x) + a^3*x*cos(b*x) + b^3*x*sin(b*x) -
2*a*b*sin(b*x) + a*b^2*x*cos(b*x) + a^2*b*x*sin(b*x)))/(a^2 + b^2)^2
```

7、试求解下面的定积分或无穷积分。

$$(1) \quad I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx, \quad (2) \quad I = \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$$

【求解】 ① 可以直接求解

```
>> syms x; int(cos(x)/sqrt(x),x,0,inf)
ans =
(2^(1/2)*pi^(1/2))/2
```

② 可以得出

```
>> syms x; int((1+x^2)/(1+x^4),x,0,1)
ans =
(pi*2^(1/2))/4
```

8、试对下面函数进行 Fourier 幂级数展开。

$$(1) \quad f(x) = (\pi - |x|) \sin x, \quad -\pi \leq x < \pi; \quad (2) \quad f(x) = e^{|x|}, \quad -\pi \leq x < \pi;$$

【求解】

```
function [A,B,F]=fseries(f,x,n,a,b)
```

%用于求解函数的傅里叶级数展开

```
if nargin==3, a=-pi; b=pi; end
L=(b-a)/2;
```

```
if a+b, f=subs(f,x,x-L-a); end %变量区域互换
```

```
A=int(f,x,-L,L)/L; B=[]; F=A/2; %计算a0
```

```
for i=1:n
```

```
    an=int(f*cos(i*pi*x/L),x,-L,L)/L;
```

```
    bn=int(f*sin(i*pi*x/L),x,-L,L)/L;
```

```
    A=[A, an];
```

```
    B=[B, bn];
```

```
    F=F+an*cos(i*pi*x/L)+bn*sin(i*pi*x/L);
```

```
end
```

```
if a+b, F=subs(F,x,x+L+a); end %换回变量区域
```

```
end
```

① 可以立即由下面的语句求出。

```
>> syms x; f=(sym(pi)-abs(x))*sin(x);[A,B,F]=fseries(f,x,10,-pi,pi); F
F =
(16*sin(2*x))/(9*pi) + (32*sin(4*x))/(225*pi) + (48*sin(6*x))/(1225*pi) +
(64*sin(8*x))/(3969*pi) + (80*sin(10*x))/(9801*pi) + (pi*sin(x))/2
```

② 可以由下面语句求解，并得出数学公式为

```
>> syms x; f=exp(abs(x));[A,B,F]=fseries(f,x,10,-pi,pi); F
F =
(2*exp(pi) - 2)/(2*pi) - (cos(3*x)*(exp(pi)/5 + 1/5))/pi + (cos(2*x)*((2*exp(pi))/5 -
2/5))/pi - (cos(5*x)*(exp(pi)/13 + 1/13))/pi + (cos(4*x)*((2*exp(pi))/17 - 2/17))/pi -
(cos(7*x)*(exp(pi)/25 + 1/25))/pi + (cos(6*x)*((2*exp(pi))/37 - 2/37))/pi -
(cos(9*x)*(exp(pi)/41 + 1/41))/pi + (cos(8*x)*((2*exp(pi))/65 - 2/65))/pi +
(cos(10*x)*((2*exp(pi))/101 - 2/101))/pi - (cos(x)*(exp(pi) + 1))/pi
>> vpa(F,10)
ans =
2.819040541*cos(2.0*x) + 0.8291295708*cos(4.0*x) + 0.2168492724*cos(8.0*x) -
0.1874200274*cos(9.0*x) - 0.5910939326*cos(5.0*x) + 0.1395564624*cos(10.0*x) -
1.536844225*cos(3.0*x) + 0.3809514244*cos(6.0*x) - 0.307368845*cos(7.0*x) -
7.684221124*cos(x) + 7.047601352
```

9、试求出下面函数的 Taylor 幂级数展开。

$$(1) \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad (2) \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

【求解】由下面的语句可以分别求出各个函数的幂级数展开，

```
>> syms t x; f=int(sin(t)/t,t,0,x);taylor(f,x,15)
>> syms x; f=log(x+sqrt(1+x^2)); taylor(f,x,15)
```

10、求级数 $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}) + \cdots + (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}) + \cdots$ 的前 n 项及无穷项的和。

【求解】下面的语句可以直接求解级数的和。

```
>> syms n k; symsum(1/2^k+1/3^k,k,1,n)
ans =
3/2 - (1/3)^n/2 - (1/2)^n
>> symsum(1/2^k+1/3^k,k,1,inf)
ans =
3/2
```

当然，无穷级数的和还可以通过极限的方式求出。

11、试求出下面的极限。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2-1} \right],$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \frac{1}{n^2 + 3\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right)。$$

【求解】① 可以用下面两种方法求解。

```
>> syms k n; symsum(1/((2*k)^2-1),k,1,inf)
ans =
1/2
>> limit( symsum(1/((2*k)^2-1),k,1,n),n,inf)
ans =
1/2
```

② 可以由下面的语句直接求解。

```
>> syms k n
limit(n*symsum(1/(n^2+k*pi),k,1,n),n,inf)
ans =
1
```