第二章　消费者选择与需求理论

消费者需求理论

效用最大化

再回到消费者的决策问题，假设消费者有着理性的、连续的和局部非饱和的偏好关系，可以用连续的效用函数u(x)来表示这些偏好。

依旧假设消费集为 $X=\mathbb{R}_{+}^{L}$

消费者的问题是：在给定的价格 $p \gg 0$ **和财富水平** $w>0$ **的约束条件下，选择他最偏好的消费束。这个问题可以表达为效用最大化问题（Utility Maximization Problem，UMP）：**

$$\underset{x \geq 0}{\operatorname{Max}} \quad u(x)$$

$$s.t. \quad p \cdot x \leq w$$

在效用最大化问题中，消费者在瓦尔拉斯预算集中选择消费束来使得他的效用水平最大。

消费者需求理论

效用最大化

UMP：

$$\underset{x\geq 0}{\text{Max}} \ u(x)$$
$$s.t. \quad p\cdot x\leq w$$

命题 3.D.1：若 $p\gg 0$ 且 $u(\cdot)$ 是连续的，则效用最大化问题有解。

证明：当 $p\gg 0$ 时，对于任何的 $l=1,\ldots,L$ 都有 $x_l\leq(w/p_l)$，因此瓦尔拉斯预算集 $B_{p,w}=\{x\in\mathbb{R}_+^L : p\cdot x\leq w\}$ 既是有界的又是闭的，也就是说预算集是个紧集（集合中任何子系列的极限点都属于本集合），而紧集上的连续函数总有最大值。
因此，以上最大化问题必然有解。

求解效用最大化问题，就可以得到：

(1) 消费者的最优消费组合——效用最大化问题的解

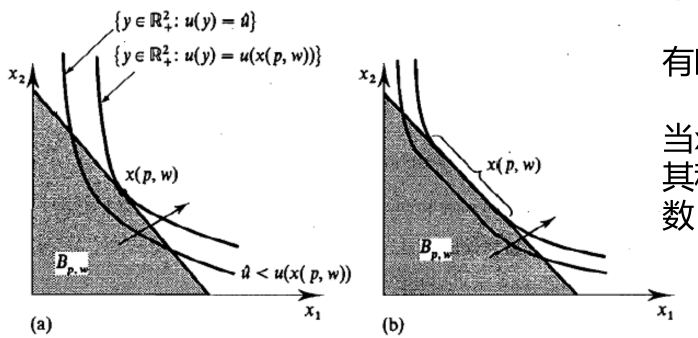
(2) 消费者的最大效用值——效用最大化的最优值函数

消费者需求理论

UMP与需求函数

如果用 $x(p,w)\in\mathbb{R}_+^L$ 表示以下规则：把效用最大化问题中的最优消费向量集合对应给每个价格财富组合 $(p,w)\gg 0$ 的规则。

这种规则 $x(p,w)\in\mathbb{R}_+^L$ 就可以称为瓦尔拉斯需求对应，或普通需求对应，或市场需求对应。



对L=2的情况，点x(p,w)位于瓦尔拉斯集中最高效用水平的无差异集中。

有时候，最优集可能包含一个以上的元素

当x(p,w)对于所有的(p,w)都是**单值**时，将其称为**瓦尔拉斯需求函数**，或普通需求函数，或市场需求函数。

消费者需求理论

UMP与需求函数

瓦尔拉斯需求函数x(p,w)的性质，可由效用最大化问题本身推出。

命题 3.D.2：假设定义在消费集 $X=\mathbb{R}_+^L$ 上的局部非饱和的偏好关系 $\succsim$，可用连续效用函数 $u(\cdot)$ 表示。则瓦尔拉斯需求对应 $x(p,w)$ 具有下列性质：

（i）关于 (p,w) 是零次齐次的：$x(\alpha p,\alpha w)=x(p,w)$ 对于任何 p，w 和实数 $\alpha>0$ 都成立。

（ii）瓦尔拉斯法则：$p\cdot x=w$ 对于所有 $x\in x(p,w)$ 都成立。

（iii）凸性/唯一性：若 $\succsim$ 是凸的，从而 $u(\cdot)$ 是拟凹的，则 $x(p,w)$ 是个凸集。而且，若 $\succsim$ 为严格凸，从而 $u(\cdot)$ 是严格拟凹的，则 $x(p,w)$ 只有唯一一个元素。

消费者需求理论

UMP与需求函数

证明：（1）零次齐次

对于任何的实数 $\alpha > 0$，都有

$$\{x \in \mathbb{R}_+^L : \alpha p \cdot x \leq \alpha w\} = \{x \in \mathbb{R}_+^L : p \cdot x \leq w\}$$

也就是说，当所有商品的价格和消费者的财富同乘以一个大于0的常数时，效用最大化问题中的可行消费束集合没有任何变化。

所以，在这两种情形下，效用最大化的消费束集合必定是相同的，因此

$$x(p, w) = x(\alpha p, \alpha w)$$

这个性质不要求对效用函数u(·)施加任何假设限制。

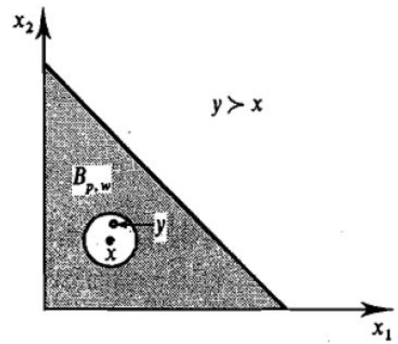
消费者需求理论

UMP与需求函数

证明：（2）瓦尔拉斯法则

瓦尔拉斯法则可以从局部非饱和性推出。

利用反证法，假设对于某个 $x \in x(p,w)$ 有 $p \cdot x < w$，则根据局部非饱和性可知，必定存在一个充分接近于x的另一个消费束y，使得 $p \cdot y < w$ 且 $y \succ x$，但这与x是效用最大化问题的最优解矛盾。



消费者需求理论

UMP与需求函数

证明：（3）凸性/唯一性

假设u(·)是拟凹的且存在两个消费束x和 x'， $x \neq x'$，这两个消费束都是x(p,w)的元素。

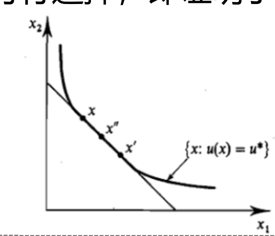
则只需要证明 $x'' = \alpha x + (1-\alpha)x'$，其中 $\alpha \in [0,1]$ 也是x(p,w)的元素就证明了凸性。

由于$u(x) = u(x')$，将这个效用水平记为u^* 。因为u(·)是拟凹的，所以 $u(x'') \geq u^*$

又因为 $p \cdot x \leq w$ 和 $p \cdot x' \leq w$，所以有

$$p \cdot x'' = p \cdot [\alpha x + (1-\alpha)x'] \leq w$$

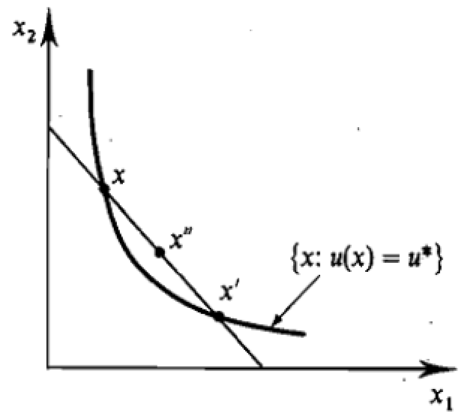
即x'' 是效用最大化问题的可行选择，即证明了：若u(·)是拟凹的，则x(p,w)是个凸集



UMP与需求函数

证明：（3）凸性/唯一性

假设u(·)是严格拟凹的。同理也可以证明 x'' 是可行的选择，且$u(x'') > u^*$ 对于所有的$\alpha \in (0,1)$ 都成立。但这又与x 和x'都是x(p,w)的元素相矛盾，因此x(p,w)中最多只有一个元素。



消费者需求理论

UMP与需求函数

库恩-塔克(必要)条件

如果u(·)是连续可微的，最优消费束 $x^* \in x(p,w)$ 可以用一阶条件来刻画。

$$\underset{x \geq 0}{\text{Max}} \quad u(x)$$

$$s.t. \quad p \cdot x \leq w$$

库恩-塔克条件表明：如果 $x^* \in x(p,w)$ 是效用最大化问题的解，则存在着一个拉格朗日乘子 $\lambda \geq 0$ 使得对于所有的 $l = 1,\ldots,L$ ：

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_l} \leq \lambda p_l \text{，等式在 } x_l^* > 0 \text{ 时成立。}$$

UMP与需求函数

库恩-塔克(必要)条件

如果用梯度向量来表示，可以令 $\nabla u(x)=[\partial u(x)/\partial x_1,\ldots,\partial u(x)/\partial x_L]$ 表示u(·)在x的梯度向量，则可以用矩阵符号表示K-T条件：

$$\nabla u(x^*)\le\lambda p$$

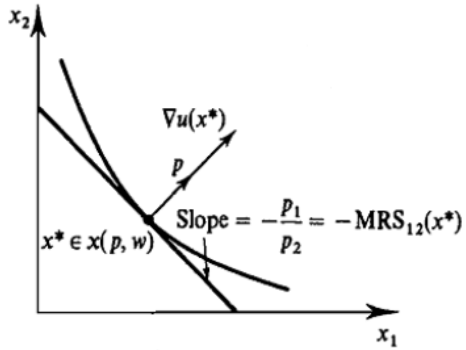
$$x^*\cdot[\nabla u(x^*)-\lambda p]=0$$

因此，如果我们的解是内部最优解($x^*\gg 0$)，必然有： $\nabla u(x^*)=\lambda p$

消费者需求理论

UMP与需求函数

库恩-塔克(必要)条件 $\nabla u(x^*) = \lambda p$



考虑L=2的情况。K-T条件表明，在内部最优点上，消费者效用函数的梯度向量 $\nabla u(x^*)$ 必定与价格向量p成比例。如果 $\nabla u(x^*) \gg 0$，就等价于对于任何两种商品l和k，有：

$$\frac{\partial u(x^*)/\partial x_l}{\partial u(x^*)/\partial x_k} = \frac{p_l}{p_k}$$

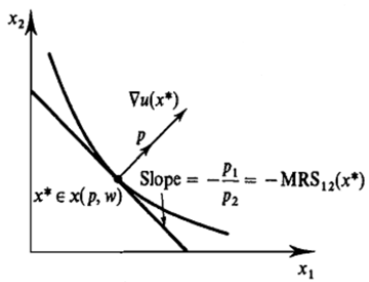
消费者需求理论

UMP与需求函数

库恩-塔克(必要)条件

这里的 $\frac{\partial u(x^*)/\partial x_l}{\partial u(x^*)/\partial x_k}$ 代表的是在 x^* 点上，商品l对商品k的**边际替代率(MRS, Marginal Rate of Substitution)**。

它表明了，如果想让消费者在边际上减少一单位商品l的消费，我们应该补偿给他多少单位商品k。



消费者的无差异曲线在 x^* 点的斜率恰好是 $-MRS_{12}(x^*)$

K-T条件表明，在内部最优解上，消费者的任何两种商品的边际替代率必定等于他们的价格之比，价格之比代表它们的边际交换率

如果不是这样，消费者有办法让自己的状况变得更好：如果

$$[\partial u(x^*)/\partial x_l]/[\partial u(x^*)/\partial x_k] > (p_l/p_k)$$

则增加 dx_l 单位的商品l的消费，同时减少 $(p_l/p_k)dx_l$ 单位商品k的消费，不仅可行，而且能够产生更高的效用。这是由于：

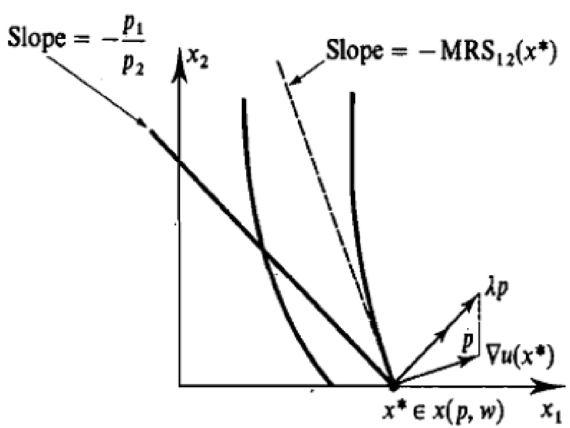
$$[\partial u(x^*)/\partial x_l]dx_l - [\partial u(x^*)/\partial x_k](p_l/p_k)dx_l > 0$$

消费者需求理论

UMP与需求函数

库恩-塔克(必要)条件

同样考虑L=2的情况，如果消费者的最优消费束位于消费集的边角上。



这种情况下，$x_2^* = 0$，梯度向量不需要同价格向量成比例。

一阶条件表明：对于那些最优需求为0的商品l：

$$\partial u_l(x^*) / \partial x_l \le \lambda p_l$$

对于那些最优需求大于0的商品l：

$$\partial u_l(x^*) / \partial x_l = \lambda p_l$$

右图中就有 $MRS_{12}(x^*) > p_1 / p_2$

与内部最优解不同，边角最优解上边际替代率和价格之比不相等，因为消费者无法进一步减少商品2的消费和相应增加商品1的消费。

消费者需求理论

UMP与需求函数

库恩-塔克(必要)条件

K-T条件中的拉格朗日乘子 λ 实际上给出了放松最大化问题中的约束条件的边际值或称影子值。

因此，λ 等于在最优点上消费者的**边际效用值。**

消费者需求理论

UMP与需求函数

库恩-塔克(必要)条件

假设需求函数x(p,w)是可微的，且 $x(p,w) \gg 0$ 。根据链式法则，w的边际增加引起的效用变化为： $\nabla u(x(p,w)) \cdot D_w x(p,w)$，其中 $D_w x(p,w) = [\partial x_1(p,w)/\partial w, \ldots, \partial x_L(p,w)/\partial w]$

根据 $\nabla u(x^*) = \lambda p$，可得：

$$\nabla u(x(p,w)) \cdot D_w x(p,w) = \underline{\lambda p \cdot D_w x(p,w) = \lambda}$$

根据瓦尔拉斯法则，$p \cdot x(p,w) = w$
对于所有的w都成立，因此可以得到

$$p \cdot D_w x(p,w) = 1$$

财富的边际增加引起的效用边际变化，即消费者的财富的边际效用（Marginal Utility of Wealth），恰好为拉格朗日乘子

消费者需求理论

UMP与需求函数

从柯布-道格拉斯条件效用函数推导需求函数

在L=2的情况下，**柯布-道格拉斯效用函数**的形式为 $u(x_1,x_2)=kx_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$，其中，$\alpha\in(0,1)$ 且k>0。

这个效用函数在所有的 $(x_1,x_2)\gg 0$ 上都是递增的。同时也是一次齐次的。

将该函数进行递增变换，得到 $\alpha\ln x_1+(1-\alpha)\ln x_2$ ，这是一个严格拟凹函数，我们将其作为消费者的效用函数。这样，效用最大化问题可以表达为：

$$\begin{aligned}\max_{x_1,x_2}\ &\alpha\ln x_1+(1-\alpha)\ln x_2\\ \text{s.t.}\ \ &p_1x_1+p_2x_2=w.\end{aligned}$$

消费者需求理论

UMP与需求函数

从柯布-道格拉斯条件效用函数推导需求函数

$$\max_{x_1,x_2} \ \alpha \ln x_1 + (1-\alpha)\ln x_2$$

$$\text{s.t.} \quad p_1x_1 + p_2x_2 = w.$$

由于$\ln 0 = -\infty$，因此最优选择 $(x_1(p,w), x_2(p,w))$ 严格为正并且满足一阶条件：

$$\frac{\alpha}{x_1} = \lambda p_1 \qquad \frac{1-\alpha}{x_2} = \lambda p_2 \quad \Rightarrow \quad p_1x_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha} p_2x_2$$

又因为需要满足预算约束 $p \cdot x(p,w) = w$，可得 $p_1x_1 = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}(w - p_1x_1)$

总而可以解出x_1，并进一步带入预算约束求出x_2

$$x_1(p,w) = \frac{\alpha w}{p_1}, \qquad x_2(p,w) = \frac{(1-\alpha)w}{p_2}.$$

在柯布-道格拉斯效用函数下，无论价格P是多少，消费者在每种商品上的支出分别是财富的固定比例。

消费者需求理论

间接效用函数

对于每个 $(p,w) \gg 0$，UMP的效用值可以用 $v(p,w) \in \mathbb{R}$ 表示。它等于 $u(x^*)$，其中 $x^* \in x(p,w)$ 是任意的。函数v(p,w)被称为间接效用函数。它具有非常好的性质：

命题 3.D.3： 假设定义在消费集 $X = \mathbb{R}_+^L$ 上的偏好关系 $\succsim$ 是局部非饱和的，该偏好关系能用连续的效用函数 $u(\cdot)$ 表示。间接效用函数 $v(p,w)$：

（i）是零次齐次的。

（ii）关于 w 严格递增和关于任何商品 l 的价格 p_l 非递增。

（iii）拟凸的；也就是说，集合 $\{(p,w): v(p,w) \le \bar{v}\}$ 对于任何 $\bar{v}$ 都是凸的 [十一]。

（iv）关于 p 和 w 连续。

消费者需求理论

间接效用函数

证明拟凸性

假设有 $v(p,w)\le\bar{v}$ 和 $v(p',w')\le\bar{v}$。对于任何的 $\alpha\in[0,1]$，考虑新的财富组合

$$(p'',w'')=(\alpha p+(1-\alpha)p',\alpha w+(1-\alpha)w')$$

证明拟凸性，就需要证明 $v(p'',w'')\le\bar{v}$。等价于证明对于任何满足 $p''\cdot x\le w''$ 的x，都有 $u(x)\le\bar{v}$。由 $p''\cdot x\le w''$ 可知:

$$\alpha p\cdot x+(1-\alpha)p'\cdot x\le\alpha w+(1-\alpha)w'$$

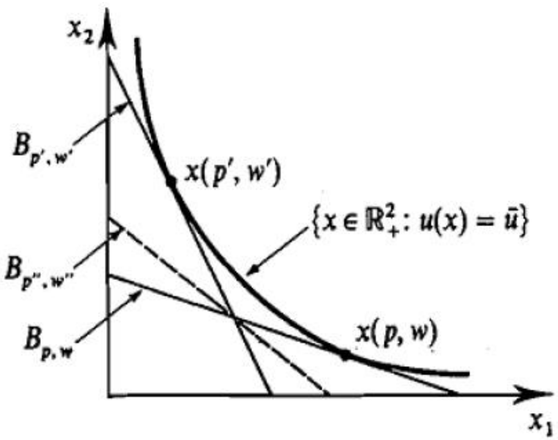
因此，要么 $p\cdot x\le w$ 要么 $p'\cdot x\le w'$，或者二者都成立。如果前者成立，则意味着 $u(x)\le v(p,w)\le\bar{v}$；如果后者成立，则意味着 $u(x)\le v(p',w')\le\bar{v}$，因此证明了v(p,w)拟凸性。

消费者需求理论

间接效用函数

间接效用函数的拟凸性

对于L=2的情况。价格和财富的组合(p,w)和 (p', w') 分别对应了瓦尔拉斯预算集，并生成了相同的最大效用值 $\bar{u}$ 。与 $(p'', w'') = (\alpha p + (1-\alpha) p', \alpha w + (1-\alpha) w')$ 对应的预算线是图中的虚线，它的预算线必然位于初始两个价格财富组合的预算线之间。从图可以看出，它的约束下，所能达到的效用值必定不能大于 $\bar{u}$



间接效用函数取决于代表偏好关系的具体的效用函数。如果v(p,w)是当前消费者的效用函数为u(·)时的间接效用函数，那么我们可以把这个间接效用函数用效用函数u来表示。

消费者需求理论

间接效用函数

柯布-道格拉斯效用函数的间接效用函数

假设我们的效用函数为：$u(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + (1-\alpha)\ln x_2$

将上面得到的最优解 $x_1(p,w)$ 和 $x_2(p,w)$ 代入u(x)，可得

$$\begin{aligned} v(p,w) &= u(x(p,w)) \\ &= [\alpha \ln \alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha)] + \ln w - \alpha \ln p_1 - (1-\alpha)\ln p_2 \end{aligned}$$