基础博弈论

主讲：李林静 研究员

中国科学院自动化研究所
多模态人工智能系统全国重点实验室
互联网大数据与安全信息学研究中心(iBASIC)
中国科学院大学人工智能学院

北京 · 雁栖湖

2023-4-4

课程内容

- 博弈案例
  - 智猪博弈、公地悲剧、田忌赛马
  - 拍卖
- 博弈论
  - 选择与效用
  - 完全信息静态、完全信息动态
  - 不完全信息静态、不完全信息动态
- 博弈论与人工智能

课程内容

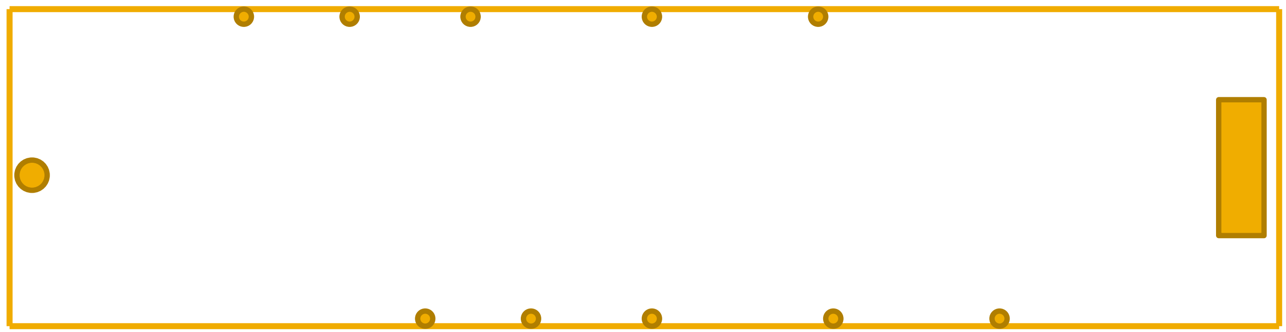
- 博弈案例
  - 智猪博弈、公地悲剧、田忌赛马
  - 拍卖
- 博弈论
  - 选择与效用
  - 完全信息静态、完全信息动态
  - 不完全信息静态、不完全信息动态
- 博弈论与人工智能

非合作博弈

- 普适解概念：均衡(Equilibrium)
- 基本思路：
  - 各参与方的策略构成一种状态
  - 在此状态下任何一方都没有单方面改变现有策略的意愿

例：智猪博弈(Boxed Pig Game)

某研究所设计了一种验证智能是如何产生的装置



按钮发光时，按下按钮自动在食槽投放10个单位的食物

大猪按钮，小猪得4个单位，大猪得6个单位

小猪按钮，大猪得9个单位，小猪得1个单位

一起按钮，大猪得7个单位，小猪得3个单位

按钮及相应的跑动会消耗2个单位

例：智猪博弈(Boxed Pig Game)

- 构造博弈矩阵

		小猪	
		等待	按钮
大猪	等待		
	按钮		

例：智猪博弈(Boxed Pig Game)

- 构造博弈矩阵

		小猪	
		等待	按钮
大猪	等待	0, 0	
	按钮		

例：智猪博弈(Boxed Pig Game)

- 构造博弈矩阵

		小猪	
		等待	按钮
大猪	等待	0, 0	9, 1
	按钮		

例：智猪博弈(Boxed Pig Game)

- 构造博弈矩阵

		小猪	
		等待	按钮
大猪	等待	0, 0	9, -1
	按钮		

例：智猪博弈(Boxed Pig Game)

- 构造博弈矩阵

		小猪	
		等待	按钮
大猪	等待	0, 0	9, -1
	按钮	6, 4	

例：智猪博弈(Boxed Pig Game)

- 构造博弈矩阵

		小猪	
		等待	按钮
大猪	等待	0, 0	9, -1
	按钮	4, 4	

例：智猪博弈(Boxed Pig Game)

- 构造博弈矩阵

		小猪	
		等待	按钮
大猪	等待	0, 0	9, -1
	按钮	4, 4	7, 3

例：智猪博弈(Boxed Pig Game)

- 构造博弈矩阵

		小猪	
		等待	按钮
大猪	等待	0, 0	9, -1
	按钮	4, 4	5, 1

例：智猪博弈(Boxed Pig Game)

- 优势策略(dominant strategy)
- 劣势策略(dominated strategy)

		小猪	
		等待	按钮
大猪	等待	0, 0	9, -1
	按钮	4, 4	5, 1

- “等待”是小猪的优势策略
- “按钮”是小猪的劣势策略

在博弈中，劣势策略不应该被使用

例：智猪博弈(Boxed Pig Game)

- 简化的博弈矩阵

		小猪
		等待
大猪	等待	0, 0
	按钮	4, 4

状态 (按钮，等待) 构成智猪博弈的一个“均衡”

例：智猪博弈(Boxed Pig Game)

- 均衡的含义？

		小猪	
		等待	按钮
大猪	等待	0, 0	9, -1
	按钮	4, 4	5, 1

- 状态：(按钮，等待)
  - 给定大猪去“按钮”，小猪的最优策略是“等待”
  - 给定小猪只“等待”，大猪的最优策略是“按钮”

  - 大猪、小猪 均不会改变自己的策略

例：智猪博弈(Boxed Pig Game)

- 均衡的含义？

		小猪	
		等待	按钮
大猪	等待	0, 0	9, -1
	按钮	4, 4	5, 1

- 状态：(等待，等待)
  - 给定大猪只“等待”，小猪的最优策略是“等待”
  - 给定小猪只“等待”，大猪的最优策略是“按钮”

  - 大猪将自己的策略从“等待”改变为“按钮”

例：智猪博弈(Boxed Pig Game)

- 均衡的含义？

		小猪	
		等待	按钮
大猪	等待	0, 0	9, -1
	按钮	4, 4	5, 1

- 状态：(等待，按钮)
  - 给定大猪只“等待”，小猪的最优策略是“等待”
  - 给定小猪去“按钮”，大猪的最优策略是“等待”

  - 小猪将自己的策略从“按钮”改变为“等待”

例：智猪博弈(Boxed Pig Game)

- 均衡的含义？

		小猪	
		等待	按钮
大猪	等待	0, 0	9, -1
	按钮	4, 4	5, 1

- 状态：(按钮，按钮)
  - 给定大猪去“按钮”，小猪的最优策略是“等待”
  - 给定小猪去“按钮”，大猪的最优策略是“等待”
  - 大小猪都将自己的策略从“按钮”改变为“等待”

例：智猪博弈(Boxed Pig Game)

- 最优反应(Best response)

		小猪	
		等待	按钮
大猪	等待	0, 0	9, -1
	按钮	4, 4	5, 1

- BR(按钮，等待) = (按钮，等待)
- BR(按钮，按钮) = (等待，等待)
- BR(等待，等待) = (按钮，等待)
- BR(等待，按钮) = (等待，等待)

均衡 (状态、点) 是最优反应的不动点

例：公地悲剧

N个牧民，共同拥有一块草场，可自由放牧。

除牧草外，养一只羊的额外成本为$c = 4$。

羊的价格跟该草场上羊的总数s相关，$p(s)=100 - s$。

每个牧民应饲养多少只羊？

$N = 1$（垄断经营）

收益：$v(s) = p(s)s - cs$

最优条件：$v'(s) = p(s) + p'(s)\, s - c = 100 - 2s - 4=0$

最优牧羊量：$s^* = 48$

最大收益：$v(s^*) = (100 - 48 - 4)\times 48 = 2304$

Garrett Hardin, *The tragedy of the commons*, Science (New Series), Vol. 162, No. 3859, pp. 1243-1248, Dec. 1968.

例：公地悲剧 (N = 2)

两牧民分别养 s_1 和 s_2 只羊，草场上总羊数 $s_1 + s_2$

		牧民2					
		0	1	2	3	4	⋯
牧民1	0	0,0					
	1						
	2						
	3						
	4						
	⋮						

例：公地悲剧 ($N = 2$)

两牧民分别养 s_1 和 s_2 只羊，草场上总羊数 $s_1 + s_2$

收益：

$$v_1(s_1, s_2) = p(s_1 + s_2)\, s_1 - cs_1$$

$$v_2(s_1, s_2) = p(s_1 + s_2)\, s_2 - cs_2$$

最优条件：

$$p(s_1 + s_2) + p'(s_1 + s_2)\, s_1 - c = 0$$

$$p(s_1 + s_2) + p'(s_1 + s_2)\, s_2 - c = 0$$

$$100 - (s_1 + s_2) - s_1 - 4 = 0,\ 100 - (s_1 + s_2) - s_2 - 4 = 0$$

$$2s_1{}^* + s_2{}^* = 96$$

$$s_1{}^* + 2s_2{}^* = 96$$

$$(s_1{}^*, s_2{}^*) = (32, 32)$$

例：公地悲剧 (N = 2)

$(s_1^*, s_2^*) = (32, 32)$

牧民1

$$100 - (s_1 + s_2) - s_1 - 4 = 0$$

$$100 - (s_1 + 32) - s_1 - 4 = 0$$

$$s_1^* = 32$$

牧民2

$$100 - (s_1 + s_2) - s_2 - 4 = 0$$

$$100 - (32 + s_2) - s_2 - 4 = 0$$

$$s_2^* = 32$$

牧民1，牧民2 都不会单方面改变牧羊的数量

草场上总羊数64>48

两牧民总收益 $v(64) = (100 - 64 - 4)\times 64 = 2048 < 2304$

例：公地悲剧 (N = 2)

$(s_1, s_2) = (40, 26)$

牧民1

$$100 - (s_1 + s_2) - s_1 - 4 = 0$$

$$100 - (s_1 + 26) - s_1 - 4 = 0$$

$$s_1{}^* = 35$$

牧民2

$$100 - (s_1 + s_2) - s_2 - 4 = 0$$

$$100 - (40 + s_2) - s_2 - 4 = 0$$

$$s_2{}^* = 28$$

牧民1，牧民2 都会改变牧羊的数量

例：公地悲剧 (N = 2)

$(s_1, s_2) = (35, 28)$

牧民1

$$100 - (s_1 + s_2) - s_1 - 4 = 0$$

$$100 - (s_1 + 28) - s_1 - 4 = 0$$

$$s_1{}^* = 34$$

牧民2

$$100 - (s_1 + s_2) - s_2 - 4 = 0$$

$$100 - (35 + s_2) - s_2 - 4 = 0$$

$$s_2{}^* = 30.5$$

例：公地悲剧 (N = 2)

最优反应

s_2	32	26	28
s_1*	32	35	34

$$100 - (s_1 + s_2) - s_1 - 4 = 0$$

$$s_1^* = (96\text{-}s_2)/2 = 48 - s_2/2$$

s_1	32	40	35
s_2*	32	28	30.1

$$100 - (s_1 + s_2) - s_2 - 4 = 0$$

$$s_2^* = (96\text{-}s_1)/2 = 48 - s_1/2$$

$$(s_1^*, s_2^*) = (48, 48) - (s_1, s_2)/2$$

$$(32, 32) = (48, 48) - (32, 32)/2$$

均衡(状态、点)是最优反应的不动点

例：公地悲剧 (一般情形)

收益：$v_i(s_1, s_2, \ldots, s_N) = p(s_1 + s_2 + \ldots + s_N)\, s_i - cs_i$

最优条件：

$$p(s_1{}^* + s_2{}^* + \ldots + s_N{}^*) + p'(s_1{}^* + s_2{}^* + \ldots + s_N{}^*)\, s_i{}^* - c = 0$$

$$100 - (s_1{}^* + s_2{}^* + \ldots + s_N{}^*) - s_i{}^* - 4 = 0$$

$$(N+1)s_i{}^* = 96$$

均衡牧羊量：

$$s_1{}^* + s_2{}^* + \ldots + s_N{}^* = 96 \times \frac{N}{N+1}$$

$$s_i{}^* = \frac{96}{N+1}$$

N	1	2	5	95	∞
牧羊数	48(48)	64(32)	80(16)	95(1)	96
总收益	2304 （2304）	2048 （1024）	1280 （256）	95 (1)	0

例：田忌赛马

齐将田忌善而客待之。

忌数与齐诸公子驰逐重射。

孙子见其马足不甚相远，马有上、中、下辈。

於是孙子谓田忌曰："君弟重射，臣能令君胜。"

田忌信然之，与王及诸公子逐射千金。

及临质，孙子曰："今以君之下驷与彼上驷，取君上驷与彼中驷，取君中驷与彼下驷。"

既驰三辈毕，而田忌一不胜而再胜，卒得王千金。

於是忌进孙子於威王。

威王问兵法，遂以为师。

史记·卷六十五 七十列传·孙子吴起列传第五

例：田忌赛马

		田忌					
		abc	acb	bac	bca	cab	cba
齐威王	ABC	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1
	ACB						
	BAC						
	BCA						
	CAB						
	CBA						

例：田忌赛马

		田忌					
		abc	acb	bac	bca	cab	cba
齐威王	ABC	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1
	ACB	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1
	BAC	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1
	BCA	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1
	CAB	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1
	CBA	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3

例：田忌赛马

田忌

		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
		abc	acb	bac	bca	cab	cba
齐威王 p_1	ABC	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1
p_2	ACB	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1
p_3	BAC	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1
p_4	BCA	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1
p_5	CAB	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1
p_6	CBA	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 1/6$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 1/6$$

例：田忌赛马

田忌

		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
		abc	acb	bac	bca	cab	cba
p_1	ABC	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1
p_2	ACB	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1
p_3	BAC	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1
p_4	BCA	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1
p_5	CAB	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1
p_6	CBA	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3

齐威王

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_w[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}] = {} & 3p_1q_1 + p_1q_2 + p_1q_3 + p_1q_4 - p_1q_5 + p_1q_6 && [\,p_1(3\ 1\ 1\ 1\ {-1}\ 1)(q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5\ q_6)^T\,] \\
& + p_2q_1 + 3p_2q_2 + p_2q_3 + p_2q_4 + p_2q_5 - p_2q_6 && [\,p_2(1\ 3\ 1\ 1\ 1\ {-1})(q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5\ q_6)^T\,] \\
& + p_3q_1 - p_3q_2 + 3p_3q_3 + p_3q_4 + p_3q_5 + p_3q_6 && [\,p_3(1\ {-1}\ 3\ 1\ 1\ 1)(q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5\ q_6)^T\,] \\
& - p_4q_1 + p_4q_2 + p_4q_3 + 3p_4q_4 + p_4q_5 + p_4q_6 && [\,p_4({-1}\ 1\ 1\ 3\ 1\ 1)(q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5\ q_6)^T\,] \\
& + p_5q_1 + p_5q_2 + p_5q_3 - p_5q_4 + 3p_5q_5 + p_6q_6 && [\,p_5(1\ 1\ 1\ {-1}\ 3\ 1)(q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5\ q_6)^T\,] \\
& + p_6q_1 + p_6q_2 - p_6q_3 + p_6q_4 + p_6q_5 + 3p_6q_6 && [\,p_6(1\ 1\ {-1}\ 1\ 1\ 3)(q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5\ q_6)^T\,]
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}_w[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}] = \boldsymbol{p}^T\mathbf{A}\boldsymbol{q} \qquad \mathbb{E}_t[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}] = \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{p}$$

例：田忌赛马

田忌

齐威王

		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
		abc	acb	bac	bca	cab	cba
p_1	ABC	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1
p_2	ACB	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1
p_3	BAC	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1
p_4	BCA	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1
p_5	CAB	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1
p_6	CBA	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3

$$\mathbb{E}_w[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}] = \boldsymbol{p}^T\mathbf{A}\boldsymbol{q}$$

$$\mathbb{E}_t[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}] = \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{p}$$

$$\max_{\boldsymbol{p}} \quad \boldsymbol{p}^T\mathbf{A}\boldsymbol{q}$$
$$\text{s.t.} \quad \mathbf{1}^T\boldsymbol{p} = 1, \boldsymbol{p} \geq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{1}^T\boldsymbol{q} = 1, \boldsymbol{q} \geq \mathbf{0}$$

$$\max_{\boldsymbol{q}} \quad \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{p}$$
$$\text{s.t.} \quad \mathbf{1}^T\boldsymbol{p} = 1, \boldsymbol{p} \geq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{1}^T\boldsymbol{q} = 1, \boldsymbol{q} \geq \mathbf{0}$$

例：田忌赛马

田忌

齐威王

		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
		abc	acb	bac	bca	cab	cba
p_1	ABC	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1
p_2	ACB	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1
p_3	BAC	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1
p_4	BCA	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1
p_5	CAB	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1
p_6	CBA	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3

$\mathbb{E}_w[\mathrm{ABC}, \boldsymbol{q}] = 3q_1 + q_2 + q_3 + q_4 - q_5 + q_6 = 2q_1 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 - 2q_5 = 2(q_1 - q_5) + 1$

$\mathbb{E}_w[\mathrm{ACB}, \boldsymbol{q}] = q_1 + 3q_2 + q_3 + q_4 + q_5 - q_6 = 2(q_2 - q_6) + 1$

$\mathbb{E}_w[\mathrm{BAC}, \boldsymbol{q}] = q_1 - q_2 + 3q_3 + q_4 + q_5 + q_6 = 2(q_3 - q_2) + 1$

$\mathbb{E}_w[\mathrm{BCA}, \boldsymbol{q}] = -q_1 + q_2 + q_3 + 3q_4 + q_5 + q_6 = 2(q_4 - q_1) + 1$

$\mathbb{E}_w[\mathrm{CAB}, \boldsymbol{q}] = q_1 + q_2 + q_3 - q_4 + 3q_5 + q_6 = 2(q_5 - q_4) + 1$

$\mathbb{E}_w[\mathrm{CBA}, \boldsymbol{q}] = q_1 + q_2 - q_3 + q_4 + q_5 + 3q_6 = 2(q_6 - q_3) + 1$

例：田忌赛马

		田忌 q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
		abc	acb	bac	bca	cab	cba
齐威王 p_1	ABC	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1
p_2	ACB	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1
p_3	BAC	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1
p_4	BCA	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1
p_5	CAB	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1
p_6	CBA	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3

$\mathbb{E}_w[\mathrm{ABC}, \boldsymbol{q}] = 3q_1 + q_2 + q_3 + q_4 - q_5 + q_6 = 2q_1 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 - 2q_5 = 2(q_1 - q_5) + 1$

$\mathbb{E}_w[\mathrm{ACB}, \boldsymbol{q}] = q_1 + 3q_2 + q_3 + q_4 + q_5 - q_6 = 2(q_2 - q_6) + 1$

$\mathbb{E}_w[\mathrm{BAC}, \boldsymbol{q}] = q_1 - q_2 + 3q_3 + q_4 + q_5 + q_6 = 2(q_3 - q_2) + 1$

$\mathbb{E}_w[\mathrm{BCA}, \boldsymbol{q}] = -q_1 + q_2 + q_3 + 3q_4 + q_5 + q_6 = 2(q_4 - q_1) + 1$

$\mathbb{E}_w[\mathrm{CAB}, \boldsymbol{q}] = q_1 + q_2 + q_3 - q_4 + 3q_5 + q_6 = 2(q_5 - q_4) + 1$

$\mathbb{E}_w[\mathrm{CBA}, \boldsymbol{q}] = q_1 + q_2 - q_3 + q_4 + q_5 + 3q_6 = 2(q_6 - q_3) + 1$

例：田忌赛马

田忌

		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
		abc	acb	bac	bca	cab	cba
p_1	ABC	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1
p_2	ACB	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1
p_3	BAC	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1
p_4	BCA	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1
p_5	CAB	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1
p_6	CBA	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3

齐威王

$$\mathbb{E}_w[\mathrm{ABC}, \boldsymbol{q}] = 3q_1 + q_2 + q_3 + q_4 - q_5 + q_6 = 2q_1 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 - 2q_5 = 2(q_1 - q_5) + 1$$

$$\mathbb{E}_w[\mathrm{ACB}, \boldsymbol{q}] = q_1 + 3q_2 + q_3 + q_4 + q_5 - q_6 = 2(q_2 - q_6) + 1$$

$$2(q_4 - q_5) + 1$$

$$\mathbb{E}_w[\mathrm{BAC}, \boldsymbol{q}] = q_1 - q_2 + 3q_3 + q_4 + q_5 + q_6 = 2(q_3 - q_2) + 1$$

$$\mathbb{E}_w[\mathrm{BCA}, \boldsymbol{q}] = -q_1 + q_2 + q_3 + 3q_4 + q_5 + q_6 = 2(q_4 - q_1) + 1$$

$$\mathbb{E}_w[\mathrm{CAB}, \boldsymbol{q}] = q_1 + q_2 + q_3 - q_4 + 3q_5 + q_6 = 2(q_5 - q_4) + 1$$

$$\mathbb{E}_w[\mathrm{CBA}, \boldsymbol{q}] = q_1 + q_2 - q_3 + q_4 + q_5 + 3q_6 = 2(q_6 - q_3) + 1$$

例：田忌赛马

田忌

		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
		abc	acb	bac	bca	cab	cba
p_1	ABC	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1
p_2	ACB	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1
p_3	BAC	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1
p_4	BCA	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1
p_5	CAB	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1
p_6	CBA	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3

齐威王

$\mathbb{E}_w[\mathrm{ABC}, \boldsymbol{q}] = 3q_1 + q_2 + q_3 + q_4 - q_5 + q_6 = 2q_1 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 - 2q_5 = 2(q_1 - q_5) + 1$

$\mathbb{E}_w[\mathrm{ACB}, \boldsymbol{q}] = q_1 + 3q_2 + q_3 + q_4 + q_5 - q_6 = 2(q_2 - q_6) + 1$

$\mathbb{E}_w[\mathrm{BAC}, \boldsymbol{q}] = q_1 - q_2 + 3q_3 + q_4 + q_5 + q_6 = 2(q_3 - q_2) + 1$

$\mathbb{E}_w[\mathrm{BCA}, \boldsymbol{q}] = -q_1 + q_2 + q_3 + 3q_4 + q_5 + q_6 = 2(q_4 - q_1) + 1$

$\mathbb{E}_w[\mathrm{CAB}, \boldsymbol{q}] = q_1 + q_2 + q_3 - q_4 + 3q_5 + q_6 = 2(q_5 - q_4) + 1$

$\mathbb{E}_w[\mathrm{CBA}, \boldsymbol{q}] = q_1 + q_2 - q_3 + q_4 + q_5 + 3q_6 = 2(q_6 - q_3) + 1$

$2(q_4 - q_5) + 1$

$q_4 = q_5$

$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6$

$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 1/6$

$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 1/6$

例：田忌赛马

- [1/6, 1/6]是均衡？
  - 若田忌按**1/6**等概率选择策略
    - 此时齐威王的收益与其策略无关
    - 即：齐威王任何两个策略的期望收益相等
    - 故齐威王没有单方面改变策略的意愿
  - 若齐威王按**1/6**等概率选择策略
    - 此时田忌的收益与其策略无关
    - 即：田忌任何两个策略的期望收益相等
    - 故田忌没有单方面改变策略的意愿

[1/6, 1/6] 是田忌赛马的一个混合策略均衡

均衡特性

- 纯策略 vs 纯策略

均衡特性

- 纯策略 vs 纯策略

		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
		abc	acb	bac	bca	cab	cba
p_1	ABC	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1
p_2	ACB	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1
p_3	BAC	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1
p_4	BCA	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1
p_5	CAB	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1
p_6	CBA	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3

均衡特性

- 纯策略 vs 纯策略

		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
		abc	acb	bac	bca	$\boxed{\text{cab}}$	cba
p_1	$\boxed{\text{ABC}}$	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1
p_2	ACB	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1
p_3	BAC	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1
p_4	BCA	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1
p_5	CAB	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1
p_6	CBA	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3

均衡特性

- 纯策略 vs 纯策略

		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
		abc	acb	bac	bca	$\boxed{\text{cab}}$	cba
p_1	$\boxed{\text{ABC}}$	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1
p_2	ACB	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1
p_3	BAC	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1
p_4	BCA	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1
p_5	CAB	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1
p_6	CBA	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3

均衡特性

- 纯策略 vs 纯策略

		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
		abc	acb	bac	bca	cab	cba
p_1	ABC	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1
p_2	ACB	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1
p_3	BAC	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1
p_4	BCA	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1
p_5	CAB	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1
p_6	CBA	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3

均衡特性

- 混合策略 vs 混合策略

		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
		abc	acb	bac	bca	$\boxed{\text{cab}}$	$\boxed{\text{cba}}$
p_1	$\boxed{\text{ABC}}$	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1
p_2	$\boxed{\text{ACB}}$	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1
p_3	BAC	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1
p_4	BCA	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1
p_5	CAB	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1
p_6	CBA	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3

均衡特性

- 混合策略 vs 混合策略

		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
		abc	acb	bac	bca	cab	cba
p_1	ABC	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1
p_2	ACB	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1
p_3	BAC	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1
p_4	BCA	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1
p_5	CAB	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1
p_6	CBA	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3

例：拍卖(Auction)

竞价拍卖

English，升价

Dutch，降价

暗标拍卖

一级价格

二级价格

- 四种机制期望收益等价
- 暗标二价，出价=真实估价 (Truth-telling)

例：拍卖(Auction)

- 暗标二价Truth-telling (Weakly dominant)
  - 某投标人对拍卖品的估价为v，报价x
  - 设其余投标人的最高报价为b

报价	$v>b$	$v=b$	$v<b$
$x>v$			
$x=v$			
$x<v$			

例：拍卖(Auction)

- 暗标二价Truth-telling (Weakly dominant)
  - 某投标人对拍卖品的估价为v，报价x
  - 设其余投标人的最高报价为b

报价	$v>b$	$v=b$	$v<b$
$x>v$			
$x=v$	$v-b$	0	0
$x<v$			

例：拍卖(Auction)

- 暗标二价Truth-telling (Weakly dominant)
  - 某投标人对拍卖品的估价为v，报价x
  - 设其余投标人的最高报价为b

报价	$v>b$	$v=b$	$v<b$
$x>v$	$v-b$	0	
$x=v$	$v-b$	0	0
$x<v$			

例：拍卖(Auction)

- 暗标二价Truth-telling (Weakly dominant)
  - 某投标人对拍卖品的估价为v，报价x
  - 设其余投标人的最高报价为b

报价	$v>b$	$v=b$	$v<b$
$x>v$	$v-b$	0	$v<x<b$
			$v<x=b$
			$v<b<x$
$x=v$	$v-b$	0	0
$x<v$			

例：拍卖(Auction)

- 暗标二价Truth-telling (Weakly dominant)
  - 某投标人对拍卖品的估价为v，报价x
  - 设其余投标人的最高报价为b

<table>
<tr><th>报价</th><th>$v \gt b$</th><th>$v=b$</th><th>$v \lt b$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$x \gt v$</td><td rowspan="3">$v-b$</td><td rowspan="3">0</td><td>$v \lt x \lt b$，0</td></tr>
<tr><td>$v \lt x=b$</td></tr>
<tr><td>$v \lt b \lt x$</td></tr>
<tr><td>$x=v$</td><td>$v-b$</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$x \lt v$</td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

例：拍卖(Auction)

- 暗标二价Truth-telling (Weakly dominant)
  - 某投标人对拍卖品的估价为v，报价x
  - 设其余投标人的最高报价为b

<table>
<tr><th>报价</th><th>$v>b$</th><th>$v=b$</th><th>$v<b$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$x>v$</td><td rowspan="3">$v-b$</td><td rowspan="3">0</td><td>$v<x<b$，0</td></tr>
<tr><td>$v<x=b$, $0/v-b$，≤ 0</td></tr>
<tr><td>$v<b<x$</td></tr>
<tr><td>$x=v$</td><td>$v-b$</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$x<v$</td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

例：拍卖(Auction)

- 暗标二价Truth-telling (Weakly dominant)
  - 某投标人对拍卖品的估价为v，报价x
  - 设其余投标人的最高报价为b

报价	$v>b$	$v=b$	$v<b$
$x>v$	v-b	0	$v<x<b$，0
			$v<x=b$, 0/v-b，≤ 0
			$v<b<x$, v-$b<0$
$x=v$	v-b	0	0
$x<v$			

例：拍卖(Auction)

- 暗标二价Truth-telling (Weakly dominant)
  - 某投标人对拍卖品的估价为v，报价x
  - 设其余投标人的最高报价为b

<table>
<tr><th>报价</th><th>$v>b$</th><th>$v=b$</th><th>$v<b$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$x>v$</td><td rowspan="3">$v-b$</td><td rowspan="3">0</td><td>$v<x<b$，0</td></tr>
<tr><td>$v<x=b$, $0/v-b$, ≤ 0</td></tr>
<tr><td>$v<b<x$, $v-b<0$</td></tr>
<tr><td>$x=v$</td><td>$v-b$</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$x<v$</td><td></td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">0</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

例：拍卖(Auction)

- 暗标二价Truth-telling (Weakly dominant)
  - 某投标人对拍卖品的估价为v，报价x
  - 设其余投标人的最高报价为b

<table>
<tr><th>报价</th><th>$v>b$</th><th>$v=b$</th><th>$v<b$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$x>v$</td><td rowspan="3">$v-b$</td><td rowspan="3">0</td><td>$v<x<b$，0</td></tr>
<tr><td>$v<x=b$, $0/v-b$, ≤ 0</td></tr>
<tr><td>$v<b<x$, $v-b<0$</td></tr>
<tr><td>$x=v$</td><td>$v-b$</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$x<v$</td><td>$v>x>b$</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">0</td></tr>
<tr><td>$v>x=b$</td></tr>
<tr><td>$v>b>x$</td></tr>
</table>

例：拍卖(Auction)

- 暗标二价Truth-telling (Weakly dominant)
  - 某投标人对拍卖品的估价为v，报价x
  - 设其余投标人的最高报价为b

<table>
<tr><th>报价</th><th>$v>b$</th><th>$v=b$</th><th>$v<b$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$x>v$</td><td rowspan="3">$v-b$</td><td rowspan="3">0</td><td>$v<x<b$, 0</td></tr>
<tr><td>$v<x=b$, $0/v-b$, ≤ 0</td></tr>
<tr><td>$v<b<x$, $v-b<0$</td></tr>
<tr><td>$x=v$</td><td>$v-b$</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$x<v$</td><td>$v>x>b$, $v-b$</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">0</td></tr>
<tr><td>$v>x=b$</td></tr>
<tr><td>$v>b>x$</td></tr>
</table>

例：拍卖(Auction)

- 暗标二价Truth-telling (Weakly dominant)
  - 某投标人对拍卖品的估价为v，报价x
  - 设其余投标人的最高报价为b

<table>
<tr><th>报价</th><th>$v>b$</th><th>$v=b$</th><th>$v<b$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$x>v$</td><td rowspan="3">$v-b$</td><td rowspan="3">0</td><td>$v<x<b$，0</td></tr>
<tr><td>$v<x=b$, 0/$v-b$，≤ 0</td></tr>
<tr><td>$v<b<x$, $v-b<0$</td></tr>
<tr><td>$x=v$</td><td>$v-b$</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$x<v$</td><td>$v>x>b$, $v-b$</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">0</td></tr>
<tr><td>$v>x=b$, 0/$v-b$, $\leq v-b$</td></tr>
<tr><td>$v>b>x$</td></tr>
</table>

例：拍卖(Auction)

- 暗标二价Truth-telling (Weakly dominant)
  - 某投标人对拍卖品的估价为v，报价x
  - 设其余投标人的最高报价为b

<table>
<tr><th>报价</th><th>$v>b$</th><th>$v=b$</th><th>$v<b$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$x>v$</td><td rowspan="3">$v-b$</td><td rowspan="3">0</td><td>$v<x<b$，0</td></tr>
<tr><td>$v<x=b$, $0/v-b$, ≤ 0</td></tr>
<tr><td>$v<b<x$, $v-b<0$</td></tr>
<tr><td>$x=v$</td><td>$v-b$</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$x<v$</td><td>$v>x>b$, $v-b$</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">0</td></tr>
<tr><td>$v>x=b$, $0/v-b$, $\leq v-b$</td></tr>
<tr><td>$v>b>x$, 0</td></tr>
</table>

概念总结

- 均衡
- 博弈矩阵

- 优势策略、劣势策略
- 混合策略
- 最优反应

- 证明某策略组合是均衡的方法
- 计算混合策略的方法

作业

I \ II	a	b	c	d	e
T	2 0	4 2	3 1	5 0	0 3
B	7 1	4 0	5 4	0 1	8 0