Определение 13.4. *δ-функцией или функцией Дирака называется обобщённая функция $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, заданная по формуле*

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

и любого $\varepsilon > 0$ подчинённая условию $\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx = 1$. См. рис. 18.

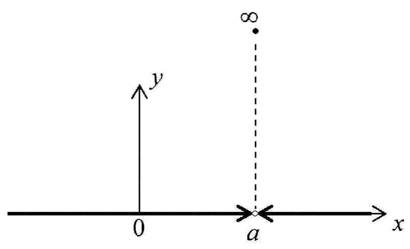

Рис. 18: Функция $y = \delta(x - a)$.

Свойства 13.5. *1) Для любого $c \in \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$, имеет место формула*

$$\int\limits_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \delta(x - c)dx = 1.$$

2) $u(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \delta(t)\, dt$.

3) $u'(x) = \delta(x)$.

4) Для любой непрерывной функции $f(x)$ любого $a \in \mathbb{R}$ имеет место тождество

$$f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a).$$

5) Для любой непрерывной функции $f(x)$ любого $a \in \mathbb{R}$ имеет место тождество

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - a)dx = f(a).$$

6) Для любой непрерывной функции $f(x)$ любого $a \in \mathbb{R}$ имеет место тождество

$$\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\delta(t - a)dt = f(a)u(x - a),$$