Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского
Радиофизический факультет

Отчет по лабораторной работе №

Выполнили студенты группы

Нижний Новгород, 2018

Содержание

Исторические сведения

Возникновение теории вероятностей как науки относят к средним векам, когда появилась возможность и возникла необходимость изучения математическими методами азартных игр (таких как орлянка, кости, рулетка).

Самые ранние работы учёных в области теории вероятностей относятся к XVII веку. Первоначально её основные понятия не имели строго математического описания. Задачи, из которых позже выросла теория вероятностей представляли набор некоторых эмпирических фактов о свойствах реальных событий, которые формулировались с помощью наглядных описаний.

Исследуя прогнозирование выигрыша при бросании костей в письмах друг другу, Блез Паскаль и Пьер Ферма открыли первые вероятностные закономерности. Решением тех же задач занимался и Христиан Гюйгенс. При этом с перепиской Паскаля и Ферма он знаком не был и методику решения изобрёл самостоятельно.

Его статья, в которой он ввёл основные понятия теории вероятностей (понятие вероятности как величину шанса; математическое ожидание для дискретных случаев в виде цены шанса). В своей статье он использует (не сформулированные ещё в явном виде) теоремы сложения и умножения вероятностей. Статья была опубликована в печатном виде на двадцать лет раньше (1657 г.) издания писем Паскаля и Ферма (1679 г.).

Важный вклад в теорию вероятностей внёс Якоб Бернулли, он дал доказательство закона больших чисел в простейшем случае независимых испытаний. В первой половине XIX века теория вероятностей начинает применяться к анализу ошибок наблюдений; Лаплас и Пуассон доказали первые предельные теоремы.

Во второй половине XIX века основной вклад внесли русские учёные П. Л. Чебышёв, А. А. Марков и А. М. Ляпунов. В это время были доказаны закон больших чисел, центральная предельная теорема, а также разработана теория цепей Маркова.

Современный вид теория вероятностей получила благодаря аксиоматике, предложенной Андреем Николаевичем Колмогоровым. В результате теория вероятностей приобрела строгий математический вид и окончательно стала восприниматься как один из разделов математики. Википедия, Статья "Теория вероятностей".

Часть I
События и их вероятности

1. Элементы комбинаторики. Схемы шансов

2. События, операции над ними и σ-алгебры событий

3. Вероятность и её свойства

4. Способы задания и подсчёта вероятности

5. Независимые события

6. Условная вероятность

Пример. Игральную кость подбрасывают один раз. Известно, что выпало более трёх очков. Какова при этом вероятность того, что выпало чётное число очков?

Решение. $\Omega_1 = 4, 5, 6, A = 4, 6, P(A) = \mu(A)\mu(\Omega) = 3$.

Замечание 6.1. Пусть Ω – пространство элементарных событий и $B \subset \Omega$ – событие, отличное от невозможного, т.е. $B \neq \varnothing$. Пусть $A \subset \Omega$ – другое событие. Какова вероятность того, что произойдёт событие A, при условии, что событие B произошло? Слова *событие B произошло означают*, что новым пространством элементарных событий становится событие $\Omega_1 = B$ и его мера равна $\mu(\Omega_1) = \mu(B)$.

Слова *произойдёт событие A, если событие B произошло* означают ту часть события A, которая содержится в B, т.е. означают *произойдёт событие* $A \cap B$. Ясно, что $A \cap B \subset \Omega$ и $A \cap B \subset B = \Omega_1$.

Определение 6.2. Для того, чтобы подчеркнуть, что событие $A \cap B$ есть событие из нового пространства элементарных событий $\Omega_1 = B$ его обозначают $A|B$ и называют *событие A при условии, что событие B произошло.*

Очевидно, что $P(A|B) = \frac{\mu(A|B)}{\mu(B)}$. Вероятность $P(A|B)$ называется *условной вероятностью.*

Лемма 6.3. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Доказательство.

$$P(A|B) = \frac{\mu(A|B)}{\mu(B)} = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)} = \frac{\frac{\mu(A \cap B)}{\mu(\Omega)}}{\frac{\mu(B)}{\mu(\Omega)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

□

Следующая формула непосредственно следует из леммы 6.3 и традиционно называется *теоремой умножения*.

Теорема 6.4 (Теорема умножения для двух событий)**.** *Если* $P(B) > 0$, $P(A) > 0$, *то*

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A).$$

Теорема 6.5 (Теорема умножения для n событий)**.**

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}),$$

если все условные вероятности определены.

Доказательство. Доказать методом математической индукции. □

7. Формула полной вероятности и формулы Байеса

8. Биномиальное распределение

9. k-номинальное распределение

10. Гипергеометрическое распрделение

Часть II
Теория случайных величин

11. Случайные величины

12. Абсолютно непрерывные случайные величины

13. Функции Хевисайда и Дирака

14. Функции одной случайной величины

15. Случайные векторы и их распределения

16. Функции от двух случайных величин

17. Математическое ожидание

18. Дисперсия

19. Числовые характеристики зависимости случайных величин

Часть III

Законы больших чисел