Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Кафедра электронных вычислительных машин

Лабораторная работа №4
«Методы и процедуры принятия решений при многих критериях»
Вариант № 3

Выполнила
студент группы 950501:
Деркач А.В.

Проверил:
Туровец Н.О.

Минск 2022

1. Исходные данные для выполнения

Предлагаются шесть вариантов площадки для строительства нового предприятия. Характеристики площадок следующие.

Площадка	Пл1	Пл2	Пл3	Пл4	Пл5	Пл6
Уровень развития дорожной сети	средняя	плохая	развитая	развитая (немного лучше, чем для Пл3)	средняя	плохая
Энергоснабжение	хорошее	хорошее	плохое	среднее	очень хорошее	среднее
Затраты на под-готовку к строи-тельству, млн ден.ед.	3,5	2,5	3	3,5	3	2,0

Важность критериев оценивается двумя экспертами.

По мнению первого эксперта, наиболее важный критерий - затраты на подготовку к строительству, менее важны (и одинаково важны между собой) уровень развития дорожной сети и энергоснабжение.

По мнению второго эксперта, наиболее важный критерий - уровень развития дорожной сети, немного менее важный - затраты на подготовку к строительству, еще немного менее важный - энергоснабжение.

2. Выбор множества Парето

Выбор множества Парето-оптимальных решений (множества Парето) представляет собой отбор перспективных альтернатив, из которых затем отбирается одна (лучшая) альтернатива.

Множество Парето представляет собой множество альтернатив, обладающих следующим свойством: любая из альтернатив, входящих во множество Парето, хотя бы по одному критерию лучше любой другой альтернативы, входящей в это множество. Другими словами, ни одна из альтернатив, входящих во множество Парето, не уступает какой-либо другой альтернативе из этого множества по всем критериям. Поэтому множество Парето называют также множеством недоминируемых альтернатив: в нем отсутствуют альтернативы, явно (по всем критериям) отстающие от какой-либо другой альтернативы.

Выбор множества Парето производится следующим образом. *Все* альтернативы *попарно* сравниваются друг с другом *по всем критериям*. Если при сравнении каких-либо альтернатив (обозначим их как A_i и A_j) оказывается, что одна из них (например, A_j) *не лучше другой ни по одному критерию*, то ее можно исключить из рассмотрения. Исключенную альтернативу (в данном случае – альтернативу A_j) не требуется сравнивать с другими альтернативами, так как она явно неперспективна.

Как правило, во множество Парето входит несколько альтернатив. Поэтому выбор множества Парето не обеспечивает принятия окончательного решения (выбора одной лучшей альтернативы), однако позволяет сократить количество рассматриваемых альтернатив, т.е. упрощает принятие решения.

Выберем множества Парето:

Сравним альтернативы Пл1 и Пл2. По критерию “уровень развития дорожной сети” альтернатива Пл1 лучше, чем Пл2; по критерию “энергоснабжение” альтернативы одинаковы; по критерию “затраты на подготовку к строительству” Пл2 лучше, чем Пл1. Таким образом, ни одну из альтернатив исключить нельзя, так как по некоторым критериям лучше одна, а по другим – другая.

Сравним Пл1 и Пл3. По критерию “энергоснабжение” лучше Пл1, по двум другим критериям – Пл3. Ни одна из альтернатив не исключается.

Сравним Пл1 и Пл4. По критерию “энергоснабжение” лучше Пл1, по критерию “уровень развития дорожной сети” – Пл4 (по критерию “ затраты на подготовку к строительству” альтернативы одинаковы). Ни одна из альтернатив не исключается, так как (как и в предыдущих случаях) ни одна из них не уступает другой по всем критериям сразу.

Сравним Пл1 и Пл5. По критериям “энергоснабжение” и “затраты на подготовку к строительству” Пл5 лучше, чем Пл1. По критерию “уровень развития дорожной сети” они одинаковы. Таким образом, альтернативу Пл1 следует исключить из рассмотрения, так как она явно не лучшая из имеющихся. Сравнивать с Пл1 другие альтернативы не требуется.

Сравним Пл2 и Пл3. По критерию “уровень развития дорожной сети” лучше Пл3, по двум другим критериям – Пл2. Ни одна из альтернатив не исключается.

Аналогично сравниваются остальные альтернативы. Ни одна из них не исключается.

Таким образом, во множество Парето вошли альтернативы Пл2, Пл3, Пл4, Пл5 и Пл6. Именно из них будет затем выбираться лучшая альтернатива.

2. Первый способ анализа альтернатив

2.1 Методика экспресс-анализа альтернатив

Методика предназначена для отбора перспективных альтернатив. При этом перспективными считаются альтернативы, не имеющие существенных недостатков ни по одному из критериев.

Методика рассчитана на применение в задачах, в которых большинство критериев являются числовыми. Методика может применяться и для решения задач, в которых имеются качественные (выраженные в словесной форме) критерии; в этом случае для перехода к числовым оценкам применяются следующие процедуры:

− оценки по качественным критериям выражаются по пятибалльной шкале (“отлично”, “хорошо”, “удовлетворительно”, “плохо”, “очень плохо”), а затем выполняется переход к числовым оценкам с использованием **шкалы Харрингтона**. При этом оценке "отлично" соответствуют числовые оценки от 0,8 до 1; "хорошо" - от 0,63 до 0,8; "удовлетворительно" - от 0,37 до 0,63; "плохо" - от 0,2 до 0,37; "очень плохо" - от 0 до 0,2. Числовая оценка выставляется человеком: экспертом или лицом, принимающим решения (ЛПР). Например, если по некоторому критерию две альтернативы имеют оценку “хорошо”, но одна из них очень хорошая, а другая - немного хуже, то первой из альтернатив (лучшей) можно назначить оценку 0,8, а второй, например - 0,7;

− для оценок, имеющих вид "да-нет" (т.е. выражающих наличие или отсутствие некоторого показателя), обычно используются следующие числовые оценки: "да" - 0,67, "нет" - 0,33 (здесь предполагается, что оценка “да” более желательна, чем ”нет”).

Принцип работы методики экспресс-анализа альтернатив следующий. Для каждой альтернативы находится худшая оценка (из всех оценок данной альтернативы по критериям, используемым в задаче). Выбираются альтернативы, худшая оценка которых *не ниже* некоторой пороговой величины.

Составим таблицу после выбора множества Парето (см. таблицу 2.1.1)

Таблица 2.1.1 — Множество Парето

Площадка	**Пл2**	**Пл3**	**Пл4**	**Пл5**	**Пл6**
Уровень развития дорожной сети	плохая	развитая	развитая (немного лучше, чем для Пл3)	средняя	плохая
Энергоснабжение	хорошее	плохое	среднее	очень хорошее	среднее
Затраты на подготовку к строительству, млн ден.ед.	2,5	3	3,5	3	2,0

Обозначим оценки альтернатив по критериям как X_{ij}, i=1,...,M, j=1,...,N. Здесь M - количество критериев, N - количество альтернатив (в данной задаче M=3, N=5).

Выбор множества перспективных альтернатив на основе методики экспресс-анализа реализуется в следующем порядке.

1 Оценки альтернатив по критериям приводятся к безразмерному виду. Безразмерные оценки альтернатив P_{ij}, i=1,...,M, j=1,...,N, находятся следующим образом:

− для критериев, подлежащих максимизации, все оценки альтернатив по критерию делятся на максимальную из оценок по данному критерию:

$$P_{ij} = \frac{X_{ij}}{\max\limits_{j} X_{ij}};$$

– для критериев, подлежащих минимизации, из оценок по данному критерию выбирается минимальная, и она делится на все оценки альтернатив по данному критерию:

$$P_{ij} = \frac{\min\limits_{j} X_{ij}}{X_{ij}};$$

– для качественных (словесных) критериев выполняется переход к числовым оценкам по шкале Харрингтона.

Рассмотрим получение безразмерных оценок для данной задачи.

Безразмерные оценки по критерию "уровень развития дорожной сети" назначаются экспертом по шкале Харрингтона.

Аналогично находятся безразмерные оценки по критерию "энергоснабжение".

Критерий "затраты на подготовку к строительству" подлежит минимизации. Поэтому для него находится минимальная оценка (в данном примере она равна 2.0) и делится на все оценки по данному критерию. Например, для Пл2 безразмерная оценка по критерию "затраты на подготовку к строительству" находится следующим образом: 2.0 / 2.5 = 0,83.

Для данной задачи безразмерные оценки приведены в таблице 2.1.2.

Таблица 2.1.2 — Безмерные оценки альтернатив

Площадка	**Пл2**	**Пл3**	**Пл4**	**Пл5**	**Пл6**
Уровень развития дорожной сети	0.2	0.85	1	0.5	0.2
Энергоснабжение	0.7	0.25	0.5	1	0.5
Затраты на подготовку к строительству, млн ден.ед.	0.80	0.67	0.57	0.67	1

В результате перехода к безразмерным оценкам устранены различия исходных оценок, затруднявшие сравнение альтернатив. Безразмерные величины не измеряются в каких-либо единицах, поэтому их можно сравнивать друг с другом, складывать и т.д. Безразмерные оценки не различаются по диапазону значений: все они имеют значения в пределах от 0 до 1. Они не различаются также по направленности: чем больше безразмерная оценка, тем лучше (по любому критерию), и лучшее значение равно 1.

2 Для каждой альтернативы находится минимальная оценка, т.е. худшая из оценок данной альтернативы по всем критериям:

$$P_j = \min\limits_{i} P_{ij}, \qquad j = 1,\dots,N.$$

Например, для Пл2 эта оценка равна 0.2; она находится как минимальная из 0.2, 0.7 и 0.8.

Минимальные оценки приведены в таблице 2.1.3.

Таблица 2.1.3 — Минимальные оценки альтернатив

Альтернатива	**Пл2**	**Пл3**	**Пл4**	**Пл5**	**Пл6**
P_j	0.2	0.25	0.5	0.5	0.2

3 Выбирается пороговое значение минимальной оценки P_0. Эта величина назначается ЛПР или экспертом из субъективных соображений, например, в зависимости от количества альтернатив, которые требуется отобрать для дальнейшего анализа.

Пусть в данной задаче назначено $P_0 = 0.23$

4 Выбирается множество альтернатив, для которых $P_j > P_0$. Таким образом, для дальнейшего анализа отбираются альтернативы, у которых все оценки (в том числе худшая) не ниже предельной величины P_0.

В данной задаче отбираются альтернативы Пл3, Пл4, Пл5. Окончательный выбор производится на основе одного из методов, рассматриваемых ниже.

2.2 Методика скаляризации векторных оценок

Методика предназначена для выбора рациональной альтернативы из множества альтернатив, оцениваемых по нескольким критериям.

Как и методика экспресс-анализа альтернатив, данная методика рассчитана на решение задач, в которых решение принимается на основе числовых критериев (или может быть выполнен переход к таким критериям).

Основное преимущество этой методики – минимальный объем информации, которую требуется получить от ЛПР или эксперта для выбора решения, что позволяет практически полностью автоматизировать решение задачи. В то же время недостаточный учет субъективных суждений ЛПР является недостатком этой методики.

Методика основана на вычислении обобщенной оценки каждой альтернативы (с учетом оценок по всем критериям) и сопоставлении этих оценок.

В таблице 2.2.1 приведены оценки альтернатив, отобранных на основе выбора множества Парето и методики экспресс-анализа альтернатив.

Таблица 2.2.1 — Исходные данные

Площадка	**Пл3**	**Пл4**	**Пл5**
Уровень развития дорожной сети	развитая	развитая (немного лучше, чем для Пл3)	средняя
Энергоснабжение	плохое	среднее	очень хорошее
Затраты на подготовку к строительству, млн ден.ед.	3	3,5	3

Методика реализуется в следующем порядке.

1 Оценки альтернатив приводятся к безразмерному виду, как и в методике экспресс-анализа альтернатив. Безразмерные оценки альтернатив для данной задачи приведены в таблице 2.2.2.

Таблица 2.2.2 — Безмерные оценки альтернатив

Площадка	**Пл3**	**Пл4**	**Пл5**
Уровень развития дорожной сети	0.85	1	0.5
Энергоснабжение	0.25	0.5	1
Затраты на подготовку к строительству, млн ден.ед.	0.67	0.57	0.67

2 Определяются веса (оценки важности) критериев. В рассматриваемой методике веса находятся *на основе разброса оценок*. Веса определяются в следующем порядке:

− определяются средние оценки по каждому критерию:

$$\overline{P_i} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} P_{ij}, \qquad i=1,...,M,$$

где M - количество критериев;

N - количество альтернатив;

P_{ij} - безразмерные оценки.

Для данного примера: $\overline{P_1}$ = (0.85 + 1 + 0.5) / 3 = 0.78; $\overline{P_2}$ = (0.25 + 0.5 + 1) / 3 = 0.58; $\overline{P_3}$ = (0.67 + 0.57 + 0.67) / 3 = 0.64

− находятся величины разброса по каждому критерию:

$$R_i = \frac{1}{N \cdot \overline{P_i}} \sum_{j=1}^{N} \left| P_{ij} - \overline{P_i} \right|, \qquad i=1,...,M.$$

Для данного примера:

$$R_1 = \frac{|0.85 - 0.78| + |1 - 0.78| + |0.5 - 0.78|}{3 \cdot 0.78} = 0.24$$

$$R_2 = \frac{|0.25-0.58|+|0.5-0.58|+|1-0.58|}{3\cdot 0.58} = 0.48$$

$$R_3 = \frac{|0.67-0.64|+|0.57-0.64|+|0.67-0.64|}{3\cdot 0.64} = 0.07$$

– находится сумма величин разброса:

$$R = \sum_{i=1}^{M} R_i \ .$$

Для данного примера R = 0.24 + 0.48 + 0.07 = 0.79

– находятся веса критериев, отражающие разброс оценок:

$W_i = R_i/R,\qquad i=1,...,M.$

Для данного примера W_1 = 0.24 / 0.79 = 0.30; W_2 = 0.48 / 0.79 = 0.61; W_3 = 0.07 / 0.79 = 0.09

Чем больше разброс (различие) в оценках альтернатив по критерию, тем больше вес этого критерия. Таким образом, критерии, по которым оценки альтернатив существенно различаются, считаются более важными. Если оценки альтернатив по какому-либо критерию очень близки, то его вес будет небольшим, так как сравнение альтернатив при близких оценках не имеет смысла.

3 Находятся взвешенные оценки альтернатив (путем деления весов критериев на оценки по соответствующим критериям):

$E_{ij} = W_i / P_{ij},\qquad i=1,...,M, j=1,...,N.$

Взвешенные оценки для данного примера приведены в таблице 2.2.3.

Таблица 2.2.3 — Взвешенные безмерные оценки альтернатив

Площадка	**Пл3**	**Пл4**	**Пл5**
Уровень развития дорожной сети	0.35	0.30	0.60
Энергоснабжение	2.44	1.22	0.61
Затраты на подготовку к строительству, млн ден.ед.	0.13	0.16	0.13

Здесь, например, E_{11} = 0.30 / 0.85 = 0.35; E_{12} = 0.30 / 1 = 0.30; E_{13} = 0.30 / 0.5 = 0.60; E_{21} = 0.61 / 0.25 = 2.44, и т.д.

Чем большие значения принимают безразмерные оценки P_{ij}, тем меньше значения взвешенных оценок. Таким образом, чем *меньше* взвешенные оценки, тем *лучше* альтернатива.

4 Определяются комплексные оценки альтернатив (суммы взвешенных оценок):

$$E_j = \sum_{i=1}^{M} E_{ij}, \qquad j=1,...,N.$$

Для данного примера E_1 = 0.35 + 2.44 + 0.13 = 2.92 (комплексная оценка альтернативы Пл3); E_2 = 0.30 + 1.22 + 0.16 = 1.68 (Пл4); E_3 = 0.60 + 0.61 + 0.13 = 1.34 (Пл5).

Чем меньше комплексная оценка, тем лучше альтернатива. Таким образом, в данном примере лучшей площадкой для строительства нового предприятия является место, обозначенное как Пл5; несколько худший вариант – Пл4, самый худший – Пл3.

2.3 Методика сравнительной оценки двух альтернатив по степени доминирования

Методика предназначена для решения задач, в которых требуется выбрать лучшую из двух альтернатив. Такие задачи часто возникают, например, при проектировании технических систем, когда требуется выбрать лучший из двух вариантов системы: базовый (имеющийся) или новый (предлагаемый). Однако применение данной методики не ограничивается задачами проектирования.

Для применения данной методики все оценки альтернатив должны быть выражены в числовой форме.

Принцип работы методики следующий. Для каждой из двух сравниваемых альтернатив находится обобщенная оценка по всем критериям, по которым она превосходит другую альтернативу; при этом учитывается степень превосходства, а также важность критериев. Полученные обобщенные оценки сравниваются; выбирается альтернатива, имеющая большую оценку.

В таблице 2.3.1 приведены оценки альтернатив, отобранных на основе выбора множества Парето, методики экспресс-анализа альтернатив и методики скаляризации векторных оценок.

Таблица 2.3.1 — Исходные данные

Площадка	**Пл4**	**Пл5**
Уровень развития дорожной сети	развитая (немного лучше, чем для Пл3)	средняя
Энергоснабжение	среднее	очень хорошее
Затраты на подготовку к строительству, млн ден.ед.	3,5	3

По критерию "уровень развития дорожной сети" требуется перейти к числовым оценкам. Для этого воспользуемся шкалой Харрингтона. Пусть для проекта Пл4 по данному критерию назначена числовая оценка 1, а для Пл5 – оценка 0.5.

Аналогично для критерия ‘энергоснабжение”. Пусть для проекта Пл4 по данному критерию назначена числовая оценка 0.5, а для Пл5 – оценка 1.

Если при сравнении альтернатив по какому-либо критерию они имеют одинаковые оценки, то такой критерий не учитывается. В данной задаче таких критериев нет.

Методика реализуется в следующем порядке.

1 Выполняется ранжирование критериев по важности: наиболее важный критерий получает ранг 1, следующий по важности - 2, и т.д. Если какие-либо критерии близки по важности, им рекомендуется назначать одинаковые ранги. Обозначим ранги как R_i, i=1,...,M, где M - количество критериев.

Пусть в данной задаче критериям назначены следующие ранги: $R_1 = 2$, $R_2 = 2$, $R_3 = 1$. Ранги R_1 и R_2 равны, так как (по мнению ЛПР) критерии "уровень развития дорожной сети" и "энергоснабжение" примерно одинаковы по важности.

2 Выполняется переход от рангов к весам критериев. Веса находятся следующим образом: из всех рангов выбирается максимальный (в данном примере он равен 2), к нему прибавляется единица, и из полученного числа вычитаются ранги:

$$V_i = \max_i(R_i) + 1 - R_i, \qquad i=1,\dots,M.$$

Таким образом, чем важнее критерий, тем больше его вес.

Для данной задачи веса критериев следующие: $V_1 = 2 + 1 – 2 = 1$; $V_2 = 2 + 1 – 2 = 1$; $V_3 = 2 + 1 – 1 = 2$

3 Находятся отношения оценок альтернатив (степени доминирования) путем деления большей оценки по каждому критерию на меньшую:

$$S_i = \max(X_{i1}, X_{i2}) / \min(X_{i1}, X_{i2}), \qquad i=1,...,M,$$

где X_{i1}, X_{i2} - оценки двух сравниваемых альтернатив по i-му критерию.

Для данной задачи $S_1 = 1 / 0.5 = 2$; $S_2 = 1 / 0.5 = 2$; $S_3 = 3.5 / 3 = 1.17$

4 Находятся скорректированные степени доминирования альтернатив путем возведения степеней доминирования в степени, равные весам критериев:

$$C_i = S_i^{V_i}, \qquad i=1,\dots,M.$$

Таким образом учитывается важность критериев: чем больше вес критерия, тем больше соответствующая степень доминирования будет влиять на окончательную оценку.

Для данной задачи $C_1 = 2^1 = 2$; $C_2 = 2^1 = 2$; $C_3 = 1.17^2 = 1.37$

5 Для каждой из сравниваемых альтернатив находится оценка ее доминирования над другой альтернативой. Эта оценка вычисляется как произведение скорректированных степеней доминирования по всем критериям, по которым данная альтернатива лучше другой.

В данном примере проект Пл4 лучше проекта Пл5 по критерию "уровень развития дорожной сети". Оценка доминирования проекта Пл4 над Пл5 находится следующим образом: $D_1 = 2$

Проект Пл5 лучше, чем проект Пл4, по критериям "энергоснабжение" и "затраты на подготовку к строительству". Оценка доминирования Пл5 над Пл4: $D_2 = 2 \cdot 1.37 = 2.74$

6 Находится обобщенная оценка доминирования:

$D = D_1 / D_2$**.**

Если $D > 1$, то первая альтернатива (оценка которой указана в числителе) лучше второй; если $D < 1$, то вторая альтернатива превосходит первую. В данном примере $D = 2 / 2.74 = 0.73$. Таким образом, площадка Пл5 лучше, чем Пл4.

3. Второй способ анализа альтернатив

3.1 Метод предпочтений

Метод основан на ранжировании альтернатив, выполняемом группой экспертов. Каждый из экспертов (независимо от других) выполняет ранжирование альтернатив, т.е. указывает, какая из альтернатив, по его мнению, является лучшей, какая - следующей за ней, и т.д.

1 Каждому эксперту предлагается выполнить ранжирование альтернатив по предпочтению. В данном примере каждый эксперт присваивает номер 1 фактору, который (по его мнению) оказывает наибольшее влияние на рост производительности труда; 2 - следующему по важности фактору, и т.д. Оценки, указанные экспертами, сводятся в таблицу (матрицу) размером MxN, где M - количество экспертов, N- количество альтернатив (в данном примере - количество факторов роста производительности труда). Обозначим эти оценки как X_{ij}, i=1,...,M, j=1,...,N.

Ранжирование альтернатив по предпочтению представлено в таблице 3.1.1.

Таблица 3.1.1 — Матрица экспертных оценок для метода предпочтений

Эксперты	Альтернативы (факторы)		
	А1	А2	А3
1	2	2	1
2	1	3	2

2 Затем производится преобразование матрицы оценок по формуле:

$B_{ij} = N - X_{ij}$, $\quad i=1,...,M,\ j=1,...,N.$

Это означает, что каждая экспертная оценка вычитается из количества альтернатив.

Для данного примера получена матрица, приведенная в таблице 3.1.2.

Таблица 3.1.2 — Преобразованная матрица экспертных оценок для метода предпочтений

Эксперты	Альтернативы (факторы)		
	А1	А2	А3
1	1	1	2
2	2	0	1

3 После этого находятся суммы преобразованных оценок по каждой из альтернатив:

$$C_j = \sum_{i=1}^{M} B_{ij}, \qquad j=1,...,N.$$

В данном примере $C_1 = 1 + 2 = 3$; $C_2 = 1 + 0 = 1$; $C_3 = 2 + 1 = 3$.

4 Находится сумма всех оценок:

$$C = \sum_{j=1}^{N} C_j .$$

В данном примере $C = 3 + 1 + 3 = 7$

5 Затем находятся веса альтернатив:

$V_j = C_j/C$, $\quad j=1,...,N.$

В данном примере $V_1 = 3/7 = 0.429$; $V_2 = 1/7 = 0.143$; $V_3 = 3/7 = 0.429$

Чем больше вес, тем более предпочтительной является альтернатива (по мнению экспертов).

В данном примере самыми предпочтительными альтернативами являются уровень развития дорожной сети и затраты на подготовку к строительству; следующая по важности альтернатива – энергоснабжение.

3.2 Модифицированный алгоритм Кемени-Снелла

Рассматриваемый алгоритм предназначен для ранжирования альтернатив с учетом их оценок по нескольким критериям.

Основное преимущество алгоритма – возможность анализа и выбора альтернатив, оцениваемых по критериям различных видов: числовым, качественным, “да-нет” и т.д. Алгоритм также позволяет учитывать суждения ЛПР о важности критериев.

Алгоритм основан на ранжировании и попарном сравнении альтернатив по каждому критерию.

Составим таблицу после выбора множества Парето (см. таблицу 3.2.1)

Таблица 3.2.1 — Множество Парето

Площадка	**Пл2**	**Пл3**	**Пл4**	**Пл5**	**Пл6**
Уровень развития дорожной сети	плохая	развитая	развитая (немного лучше, чем для Пл3)	средняя	плохая
Энергоснабжение	хорошее	плохое	среднее	очень хорошее	среднее
Затраты на подготовку к строительству, млн ден.ед.	2,5	3	3,5	3	2,0

Выбор альтернативы на основе модифицированного алгоритма Кемени–Снелла реализуется в следующем порядке.

1 С помощью одного из методов экспертных оценок находятся веса критериев, представляющие собой числовые оценки их важности. В данном примере использовался метод приоритетов (см. подраздел 3.1)

2 Выполняется ранжирование альтернатив по каждому из критериев. При этом лучшая альтернатива по данному критерию получает оценку (ранг) 1, следующая за ней – оценку 2, и т.д. Если альтернативы по данному критерию одинаковы, то они получают *одинаковые* оценки. Результаты ранжирования сводятся в матрицу. Для данной задачи матрица ранжирований приведена в таблице 3.2.2.

Таблица 3.2.2 — Матрица ранжирований

	Пл2	Пл3	Пл4	Пл5	Пл6
К1	4	2	1	3	4
К2	2	4	3	1	3
К3	2	3	4	3	1

3 На основе ранжирования альтернатив по каждому из критериев составляется матрица парных сравнений. Всего составляется *М* таких матриц, где *М* - количество критериев. Матрицы заполняются по правилам, приведенным в таблице 3.2.3.

Таблица 3.2.3 — Правила заполнения матриц парных сравнений в модифицированном алгоритме Кемени-Снелла

R_{jk}^{i}	Значение
1	По i-му критерию j-я альтернатива лучше k-й
-1	По i-му критерию j-я альтернатива хуже k-й
0	По i-му критерию j-я и k-я альтернативы одинаковы

Здесь i - номер матрицы (номер критерия).

Для рассматриваемой задачи матрицы парных сравнений по критериям К1-К3 приведены в таблицах 3.2.4 – 3.2.6.

Таблица 3.2.4 — Парные сравнения по критерию К1

	Пл2	Пл3	Пл4	Пл5	Пл6
Пл2	—	-1	-1	-1	0
Пл3	1	—	-1	1	1
Пл4	1	1	—	1	1
Пл5	1	-1	-1	—	1
Пл6	0	-1	-1	-1	—

Таблица 3.2.5 — Парные сравнения по критерию К2

	Пл2	Пл3	Пл4	Пл5	Пл6
Пл2	—	1	1	-1	1
Пл3	-1	—	-1	-1	-1
Пл4	-1	1	—	-1	0
Пл5	1	1	1	—	1
Пл6	-1	1	0	-1	—

Таблица 3.2.6 — Парные сравнения по критерию К3

	Пл2	Пл3	Пл4	Пл5	Пл6
Пл2	—	1	1	1	-1
Пл3	-1	—	1	0	-1
Пл4	-1	-1	—	-1	-1
Пл5	-1	0	1	—	-1
Пл6	1	1	1	1	—

4 Составляется матрица потерь. Размерность матрицы - NxN, где N - количество альтернатив. Элементы матрицы потерь рассчитываются по следующей формуле:

$$R_{jk} = \sum_{i=1}^{M} V_i \cdot \left| R_{jk}^{i} - 1 \right|, \qquad j=1,...,N, \; k=1,...,N.$$

Матрица потерь для рассматриваемой задачи приведена в таблице 3.2.7.

Таблица 3.2.7 — Матрица потерь

	Пл2	Пл3	Пл4	Пл5	Пл6
Пл2	—	0.858	0.858	1.144	1.287
Пл3	1.144	—	1.144	0.715	1.144
Пл4	1.144	0.858	—	1.144	1.001
Пл5	0.858	1.287	0.858	—	0.858
Пл6	0.715	0.858	1.001	1.144	—

Приведем примеры расчета некоторых элементов матрицы потерь.

$R_{23} = V_1 \cdot |R_{23}^1 - 1| + V_2 \cdot |R_{23}^2 - 1| + V_3 \cdot |R_{23}^3 - 1| = 0.429 \cdot |-1 - 1| + 0.143 \cdot |1 - 1| + 0.429 \cdot |1 - 1| = 0.858$

$R_{36} = V_1 \cdot |R_{36}^1 - 1| + V_2 \cdot |R_{36}^2 - 1| + V_3 \cdot |R_{36}^3 - 1| = 0.429 \cdot |1 - 1| + 0.143 \cdot |-1 - 1| + 0.429 \cdot |-1 - 1| = 1.144$

Смысл элементов матрицы потерь следующий: чем больше элемент R_{jk}, тем больше отставание j-й альтернативы от k-й (тем хуже j-я альтернатива по сравнению с k-й).

5 Выполняется предварительное ранжирование альтернатив. Для этого находятся суммы строк матрицы потерь. Смысл этих сумм следующий: сумма j-й строки представляет собой оценку *отставания* j-й альтернативы от *всех остальных* альтернатив.

Альтернатива, которой соответствует *минимальная* сумма, предварительно считается *лучшей*. Строка и столбец этой альтернативы исключаются из матрицы потерь.

Суммирование строк матрицы потерь и исключение альтернатив выполняются до тех пор, пока не будет исключена вся матрица. Чем раньше исключена альтернатива, тем она лучше.

Выполним предварительное ранжирование для рассматриваемой задачи. Найдем суммы строк матрицы потерь:

$P_2 = 0.858 + 0.858 + 1.144 + 1.287 = 4.147$

$P_3 = 1.144 + 1.144 + 0.715 + 1.144 = 4.147$

$P_4 = 1.144 + 0.858 + 1.144 + 1.001 = 4.147$

$P_5 = 0.858 + 1.287 + 0.858 + 0.858 = 3.861$

$P_6 = 0.715 + 0.858 + 1.001 + 1.144 = 3.718$

Предварительно лучшей считается альтернатива Пл6. Она исключается из матрицы потерь. Сокращенная матрица потерь приведена в таблице 3.2.8.

Таблица 3.2.8 — Первая сокращенная матрица потерь

	Пл2	Пл3	Пл4	Пл5
Пл2	—	0.858	0.858	1.144
Пл3	1.144	—	1.144	0.715
Пл4	1.144	0.858	—	1.144
Пл5	0.858	1.287	0.858	—

Суммы строк этой матрицы: P_2 = 2.860; P_3 = 3.003; P_4 = 3.146; P_5 = 3.003. Исключается альтернатива Пл2. Вторая сокращенная матрица потерь приведена в таблице 3.2.9.

Таблица 3.2.9 — Вторая сокращенная матрица потерь

	Пл3	Пл4	Пл5
Пл3	—	1.144	0.715
Пл4	0.858	—	1.144
Пл5	1.287	0.858	—

Суммы строк этой матрицы: P_3 = 1.859; P_4 = 2.002; P_5 = 2.145. Исключается альтернатива Пл3. Третья сокращенная матрица потерь приведена в таблице 3.2.10.

Таблица 3.2.10 — Третья сокращенная матрица потерь

	Пл4	Пл5
Пл4	—	1.144
Пл5	0.858	—

Суммы строк этой матрицы: P_4 = 1.144; P_5 = 0.858. Лучшая альтернатива (из двух оставшихся) – Пл5.

Предварительное ранжирование альтернатив: Пл6, Пл2, Пл3, Пл5, Пл4.

6 Выполняется окончательное ранжирование альтернатив. Для этого альтернативы сравниваются попарно, начиная с конца предварительного ранжирования. Если сравниваются j-я и k-я альтернативы (при этом j-я альтернатива в предварительном ранжировании находится выше k-й) и выполняется условие $R_{jk} \le R_{kj}$ (где R_{jk} и R_{kj} - элементы матрицы потерь), то альтернативы остаются в ранжировании на прежних местах (j-я альтернатива лучше k-й). Если $R_{jk} > R_{kj}$, то альтернативы меняются местами (j-я альтернатива хуже k-й).

Выполним окончательное ранжирование для данной задачи.

Сравниваем Пл5 и Пл4. R_{54} = 0.858; R_{45} = 1.001. Так как $R_{54} < R_{45}$, альтернативы остаются на своих местах (Пл5 выше, чем Пл4).

Сравниваем Пл3 и Пл5. R_{35} = 0.715; R_{53} = 0.858. Так как $R_{35} < R_{53}$, альтернативы остаются на своих местах (Пл3 выше, чем Пл5).

Сравниваем Пл2 и Пл3. R_{23} = 0.858; R_{32} = 1.144. Так как $R_{23} < R_{32}$, альтернативы остаются на прежних местах (Пл2 выше, чем Пл3).

Сравниваем Пл6 и Пл2. R_{62} = 0.858; R_{26} = 1.287. Так как $R_{62} < R_{26}$, альтернативы остаются на прежних местах (Пл6 выше, чем Пл2).

Таким образом, окончательное ранжирование альтернатив следующее: Пл6, Пл2, Пл3, Пл5, Пл4. Лучший вариант строительства нового предприятия - площадка, обозначенная как Пл6.

3.3 Метод ЭЛЕКТРА

Метод предназначен для решения задач, в которых из имеющегося множества альтернатив требуется выбрать заданное количество лучших альтернатив с учетом их оценок по нескольким критериям, а также важности этих критериев.

Принцип работы метода следующий. Для каждой пары альтернатив ($А_j$ и $А_k$) выдвигается предположение (гипотеза) о том, что альтернатива $А_j$ лучше, чем $А_k$. Затем для каждой пары альтернатив находятся два индекса: индекс согласия (величина, подтверждающая предположение о превосходстве $А_j$ над $А_k$) и индекс несогласия (величина, опровергающая это предположение). На основе анализа этих индексов выбирается одна или несколько лучших альтернатив ("ядро" альтернатив).

В таблице 3.3.1 приведены оценки альтернатив, отобранных на основе выбора множества Парето, методики предпочтений и модифицированного алгоритма Кемени-Снелла.

Таблица 3.3.1 — Исходные данные

Площадка	**Пл2**	**Пл3**	**Пл6**
Уровень развития дорожной сети	плохая	развитая	плохая
Энергоснабжение	хорошее	плохое	среднее
Затраты на подготовку к строительству, млн ден.ед.	2,5	3	2,0

С помощью одного из методов экспертных оценок находятся веса критериев, представляющие собой числовые оценки их важности. В данном примере использовался метод приоритетов (см. подраздел 3.1)

Выбор лучших альтернатив по методу ЭЛЕКТРА реализуется в следующем порядке.

1 Оценки альтернатив приводятся к безразмерному виду. Эта операция может выполняться разными способами, например, так же, как в методике экспресс-анализа альтернатив (см. подраздел 2.1). Безразмерные оценки приведены в таблице 3.3.2.

Таблица 3.3.2 — Безразмерные оценки альтернатив

	Пл2	Пл3	Пл6
К1	0.20	0.85	0.20
К2	0.70	0.25	0.50
К3	0.80	0.67	1

2 Определяются индексы согласия C_{jk}, j=1,...,N, k=1,...,N (где N - количество альтернатив). Индекс согласия отражает степень согласия с предположением о том, что j-я альтернатива лучше k-й. В рассматриваемой реализации метода ЭЛЕКТРА индексы согласия находятся по формуле

$$C_{jk} = \sum_{i \in K^+} V_i, \qquad j=1,\ldots,N,\ k=1,\ldots,N,$$

где V_i - веса критериев;

K^+ - подмножество критериев, по которым j-я альтернатива не хуже k-й.

Таким образом, индекс согласия C_{jk} находится как сумма весов критериев, по которым j-я альтернатива *не хуже* k-й. Чем больше индекс согласия, тем более выражено превосходство j-й альтернативы над k-й.

Индексы согласия для данной задачи приведены в таблице 3.3.3.

Таблица 3.3.3 — Матрица индексов согласия

	Пл2	Пл3	Пл6
Пл2	—	0.572	0.572
Пл3	0.429	—	0.429
Пл6	0.858	0.572	—

Приведем примеры расчета индексов согласия. Найдем, например, индекс согласия C_{23} (оценку согласия с предположением о превосходстве альтернативы Пл2 над Пл3). Альтернатива Пл2 не хуже альтернативы Пл3 по критериям К2 (энергоснабжение) и К3 (затраты на подготовку к строительству). Их вес равен 0.143 и 0.429 соответственно; таким образом, C_{23} = 0.572. Аналогично найдем индекс согласия C_{32}. Альтернатива Пл3 не хуже альтернативы Пл2 только по критерию К1 (уровень развития дорожной сети). Его вес равен 0.429, поэтому C_{32} = 0.429. Остальные индексы согласия находятся по такому же принципу.

3 Определяются индексы несогласия D_{jk}, j=1,...,N, k=1,...,N. Индекс несогласия отражает степень несогласия с предположением о том, что j-я альтернатива лучше k-й. Индексы D_{jk} находятся по формуле:

$$D_{jk} = \max_{i \in K^-} (P_{ik} - P_{ij}), \qquad j=1,...,N,\ k=1,...,N,$$

где P_{ik}, P_{ij} - безразмерные оценки альтернатив (для данного примера они приведены в таблице 3.3.2);

K^- - подмножество критериев, по которым j-я альтернатива не превосходит k-ю.

Таким образом, индекс несогласия D_{jk} находится как максимальная из разностей оценок по критериям, по которым j-я альтернатива *не лучше* k-й. Чем больше индекс несогласия, тем менее выражено превосходство j-й альтернативы над k-й.

Индексы несогласия для данной задачи приведены в таблице 3.3.4.

Таблица 3.3.3 — Матрица индексов несогласия

	Пл2	Пл3	Пл6
Пл2	—	0.65	0.20
Пл3	0.45	—	0.33
Пл6	0.20	0.65	—

Приведем примеры расчета индексов несогласия. Найдем индекс несогласия D_{23} (оценку несогласия с предположением о превосходстве альтернативы Пл2 над Пл3).

Альтернатива Пл2 не имеет превосходства над Пл3 только по критерию К1. Разность оценок по этому критерию: 0.85 – 0.20 = 0.65. Таким образом, D_{23} = 0.65.

Аналогично найдем индекс несогласия D_{32}. Альтернатива Пл3 не имеет превосходства над Пл2 по критериям К2, К3. Разности безразмерных оценок по этим критериям следующие: 0.70 – 0.25 = 0.45; 0.80 – 0.67 = 0.13. Таким образом, D_{32} = 0.45.

4 Для каждой альтернативы находится предельное значение индекса согласия:

$$C_j = \min_k C_{jk}, \qquad j=1,...,N.$$

Таким образом, предельное значение индекса согласия для j-й альтернативы находится как *минимальный* элемент j-й строки матрицы индексов согласия. Эта величина отражает степень согласия с предположением о том, что j-я альтернатива имеет превосходство над всеми другими альтернативами.

Для рассматриваемого примера C_2 = 0.572; C_3 = 0.429; C_6 = 0.572.

5 Для каждой альтернативы находится предельное значение индекса несогласия:

$$D_j = \max_k D_{jk}, \qquad j=1,...,N.$$

Таким образом, предельное значение индекса несогласия для j-й альтернативы находится как *максимальный* элемент j-й строки матрицы индексов несогласия. Эта величина отражает степень несогласия с предположением о превосходстве j-й альтернативы над другими альтернативами.

Для рассматриваемого примера $D_2 = 0.65$; $D_3 = 0.45$; $D_6 = 0.65$.

6 Выделяются лучшие альтернативы (“ядро” альтернатив), удовлетворяющие условиям:

$C_j > C^*$,

$D_j < D^*$,

где C^*, D^* - пороговые значения индексов согласия и несогласия. Эти величины назначаются в зависимости от того, какое количество альтернатив требуется выбрать. Обычно сначала принимаются пороговые значения $C^* = 0.5$, $D^* = 0.5$; затем они изменяются в соответствии с количеством отбираемых альтернатив. Выбираются альтернативы, удовлетворяющие *обоим* условиям.

В рассматриваемом примере требуется выбрать *один* тип датчиков. Назначим пороговые значения $C^* = 0.4$, $D^* = 0.5$. Условию $C_j > C^*$ удовлетворяют альтернативы Пл2, Пл3 и Пл6, условию $D_j < D^*$ - альтернатива Пл3. Таким образом, выбирается альтернатива Пл3.