

Apontamentos de MSim

(Alguns tópicos 🐙)

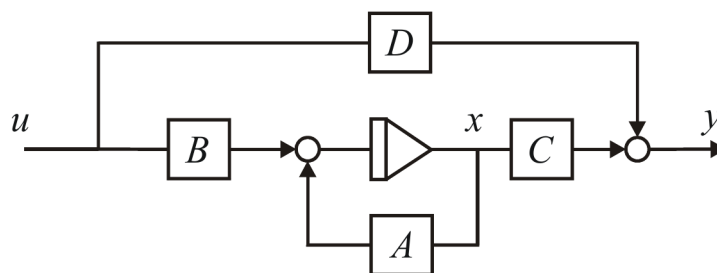


Imagem: *Linear time-invariant state space model* (Egeland & Gravdahl 2002)

Autores:

João Gonçalves : 99995

↔ jrazevedogoncalves@tecnico.ulisboa.pt

Teresa Nogueira : 100029

↔ maria.teresa.ramos.nogueira@tecnico.ulisboa.pt

Índice

1. Modelos de Espaço de Estados e Análise do Modelo	1
1.1 Modelos de espaço de estados	1
1.1.1 Conversão entre Modelo de Estado e Função de Transferência . .	2
1.1.2 Pólos e Zeros	2
1.1.3 Obtenção do Modelo de Estado através da Função de Transferência	3
1.1.3 a) Sistema sem Zeros	3
1.1.3 b) Sistema com Zeros	3
1.1.4 A equação homogênea e Notas sobre Álgebra Linear	4
1.1.5 Resposta no tempo de um SLIT não homogêneo (solução geral) .	6
1.2 Análise da Função de Transferência do Modelo de Estados	7
1.2.1 Teoremas do valor inicial e final	7
1.2.2 Resposta ao escalão unitário de sistemas LIT	7
1.2.2.1 Excesso de pólos-zeros	7
1.2.3 Sistemas de 2ª ordem (sem zeros)	8
1.2.4 Diagramas de Bode	8
2. Linearização de Sistemas Não Lineares	9
2.1 Phase Plane Analysis	11
3. Modelação Física	16
3.1 Sistemas Mecânicos de Translação	16
3.1.1 Relações fundamentais baseadas em princípios físicos	16
3.2 Sistemas Mecânicos de Rotação	17
3.2.2 Motor Corrente Contínua	18
3.2.2.1 Problema 1	18
3.2.2.2 Problema 2	19
3.2.2.3 Problema 3	20
3.2 Sistemas baseados em Mecânica Lagrangiana	21
3.2.1 Princípio de Hamilton	21
3.2.2 Equações de Euler-Lagrange	21
3.3 Sistemas Térmicos	22
3.3.1 Modos de transferência de energia	22
3.3.1.1 Transferência de energia por condução	22
3.3.1.2 Transferência de energia por convecção	22
3.3.1.2 Transferência de energia por radiação	22
4. Cadeias de Markov	23
4.1 Introdução às Cadeias de Markov e Teorema Básico do Limite	23
5. Modelos baseados em dados	24
5.1 Estimação de Parâmetros	24
5.2 Notação Matricial	25
5.3 Equação Normal	25
6. Sistemas Distribuídos	26
6.1 Problemas Representativos de PDE's	26
Referências	29

1. Modelos de Espaço de Estados e Análise do Modelo

→ Modelos de espaço de estados[1]

No caso geral, para Sistemas Lineares Contínuos temos:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

Em que as matrizes são:

- ▲ **A** - Matriz da Dinâmica (quadrada) - Define o comportamento dinâmico do Sistema, i.e. se é instável ou estável, e se é rápido ou lento. Essas características dependem dos valores próprios.
- ▲ **B** - Matriz da Entrada (normalmente matriz coluna) - Define o modo como a entrada (actuação) afeta o estado.
- ▲ **C** - Matriz de Saída (normalmente matriz linha) - É a relação entre o estado do sistema e a saída que se deseja escolher.
- ▲ **D** - Matriz de Saída direta (normalmente nula) - Define o modo como a entrada (actuação) afeta diretamente a saída; para sistemas causais é nula.

E os domínios são:

- ▲ Estados: $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ em que $n = \# \text{estados}$ (também chamada ordem do sistema)
- ▲ Entradas: $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ em que $m = \# \text{entradas}$ (normalmente 1)
- ▲ Saídas: $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ em que $p = \# \text{saídas}$ (normalmente 1)

Como tal, as matrizes têm as seguintes dimensões:

$$\mathbf{A} [n \times n] \quad \mathbf{B} [n \times m] \quad \mathbf{C} [p \times n] \quad \mathbf{D} [p \times m] \quad \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right]$$

Desta forma, o Modelo em Espaço de Estados toma a seguinte representação:

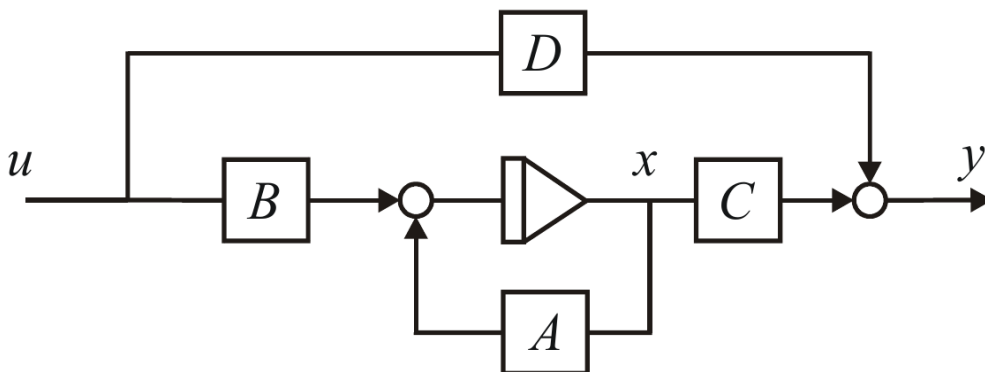


Fig. 1: Representação em Diagrama de Blocos do Modelo em Espaço de Estados (LIT).

→ Conversão entre Modelo de Estado e Função de Transferência

Partindo do Modelo em Espaço de Estados da secção anterior¹:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

E aplicando a Transformada de Laplace ($\mathcal{L}\{\cdot\}$) com condições iniciais nulas, obtém-se:

$$\begin{cases} s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \\ Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) \end{cases}$$

$$\therefore Y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)$$

E, como tal, é possível converter novamente para tempo contínuo usando a Transformada de Laplace Inversa ($\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$), i.e.:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)\}$$

Esta análise também permite definir a Função de Transferência (relação da entrada com a saída):

$$G(s) \triangleq \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B},$$

em que

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})]}{\det[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})]}$$

→ **Nota:** As soluções obtidas resultam do facto da condição inicial ser nula. Caso não se verificasse, não seria possível deduzir uma Função de Transferência, e ter-se-ia ainda:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}U(s))\}$$

□

→ Pólos e Zeros

Ao analisar a Função de Transferência, é possível observar os pólos e os zeros.

▲ Os pólos são, por definição, as raízes do denominador de $G(s)$, o chamado polinómio característico:

$$\det[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})] = 0$$

Os pólos, neste caso, apenas dependem da Matriz da Dinâmica.

▲ Os zeros são, por definição, as raízes do numerador de $G(s)$:

$$\mathbf{C} \text{adj}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})]\mathbf{B} = 0$$

Note-se que os zeros dependem não só da Matriz da Dinâmica mas também das Matrizes de Entrada e de Saída.

¹Daqui em diante, assume-se $\mathbf{D} \equiv \mathbf{0}$.

→ Obtenção do Modelo de Estado através da Função de Transferência

Tendo a Função de Transferência é possível obter o Modelo de Estado. Este modelo não é único, existem infinitas realizações de modelos, que podem ser obtidas umas das outras através de transformações.

★ Sistema sem Zeros:

Neste caso a Função de Transferência é do tipo:

$$G(s) = \frac{b_0}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

Uma realização possível é utilizar as variáveis de fase, i.e., começar por definir os estados (fases) como sendo:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \dot{x}_{n-1}(t) = y^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

E como tal, a derivada a última variável de fase é dada por:

$$\dot{x}_n(t) = y^{(n)}(t) = -a_1 x_n(t) - a_2 x_{n-1}(t) \dots - a_{n-1} x_1(t) + b_0 u(t)$$

Ou seja, temos a Matriz da Dinâmica na forma companheira e podemos definir um Modelo de Estados da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

E a Equação de Saída como:

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \mathbf{x}(t)$$

★ Sistema com Zeros:

Neste caso a Função de Transferência é do tipo:

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

(a equação anterior é assim definida para sistemas causais.)

É possível definir o sistema como uma parte sem zeros e outra com zeros:

$$\blacktriangle \text{ Parte sem zeros: } X_1(s) = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \cdot U(s)$$

$$\blacktriangle \text{ Parte com zeros: } Y(s) = X_1(s) \cdot (b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n)$$

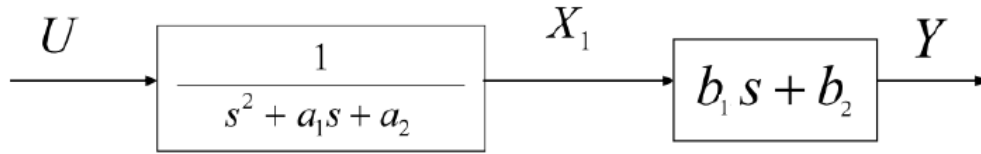


Fig. 2: Decomposição do sistema (LIT) numa parte com e noutra sem zeros.

A parte sem zeros resulta em:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

E, finalmente, a parte com zeros leva a que:

$$y(t) = [b_n \ b_{n-1} \ \dots \ b_2 \ b_1] \mathbf{x}(t)$$

→ **Nota:** No sistema com zeros a Matriz da Dinâmica manteve-se constante!

→ A equação homogénea

Relaxando o Modelo do sistema para que contenha apenas a Matriz da Dinâmica, obtém-se um Sistema mais simples. A solução desta equação desempenha um papel fundamental na solução da equação de estado (de sistemas lineares com entrada) e na compreensão da dinâmica local de muitos sistemas não lineares.

A estrutura da solução depende dos valores próprios e dos vetores próprios de \mathbf{A} . Assim:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

→ *Notas sobre Álgebra Linear:*

Sendo \mathbf{A} quadrada $[n \times n]$, é possível chegar à seguinte igualdade:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$$

▲ **Valores próprios:** λ_i são as soluções de $\det[(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})] = 0$.

▲ **Vetores próprios:** \mathbf{v}_i são as soluções de $(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_i = 0$ (são definidos a menos de uma razão de normalização).

Em que \mathbf{v}_i também se pode denominar por vetor de modo. Geralmente existem (podem não existir) n vetores próprios linearmente independentes. Caso existam podemos utilizar a diagonalização de matrizes para resolver a equação homogénea (veremos em seguida).

→ **Diagonalização de matrizes:**

Tendo n vetores próprios linearmente independentes então é possível definir a Matriz Modal $[n \times n]$, não singular (admite inversa):

$$\mathbf{M} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n]$$

Tendo também n valores próprios podemos definir uma Matriz Diagonal $[n \times n]$, que tem os valores próprios na sua diagonal principal:

$$\mathbf{\Lambda} \triangleq \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Assim, podemos escrever:

$$\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda} \implies \begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}\mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} \end{cases}$$

Podemos então fazer uma transformação ao modelo da equação homogénea em que se rodam as coordenadas para as coordenadas ortogonais definidas pelos vetores próprios:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}\mathbf{z}(t) \iff \mathbf{z}(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}(t)$$

Como:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{z}(t)$$

Vem que:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z}(t)$$

em que $\mathbf{\Lambda}$ é a Matriz Diagonal—definida acima—que contém os valores próprios.

Ficamos com um sistema facilmente resolúvel:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \lambda_1 z_1(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_n(t) = \lambda_n z_n(t) \end{cases}$$

Cuja solução (**que depende das condições iniciais**) é dada por:

$$\begin{cases} z_1(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ z_n(t) = k_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

Nas coordenadas originais $\mathbf{x}(t)$, verificamos então (**Decomposição Modal**):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}\mathbf{z}(t) = [\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = k_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + k_n \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t} = \sum_{i=1}^n k_i \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t}$$

Em que temos os n modos do sistema:

$$\mathbf{v}_i e^{\lambda_i t}$$

□

→ **Resposta no tempo de um SLIT não homogêneo (solução geral)**

Nos sistemas não homogêneos o estado não evolui livremente, i.e., não é apenas afetado pela dinâmica do sistema, mas também por uma entrada. Neste caso, a solução obtém-se através da solução da equação homogênea recorrendo ao **Princípio da Sobreposição**—tendo em conta a função de entrada $u(t)$.

Sendo o sistema descrito pela equação de estado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Obtém-se a evolução temporal:

→ **Fórmula da Variação das Constantes:**

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0}_{\text{Regime Livre}} + \underbrace{e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t_0-s)} \mathbf{B}u(s) ds}_{\text{Regime Forçado}}$$

Relembrando a Análise Diferencial, trivialmente se obtém a exponencial da Matriz da Dinâmica (Matriz de Transição).

→ **Notas sobre Análise Diferencial:**

▲ **Exponencial de uma matriz:**

$$e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \triangleq \mathbf{I} + \mathbf{A}(t-t_0) + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2(t-t_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{A}^n(t-t_0)^n}{n!}$$

▲ **Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ caso a matriz seja diagonalizável:**

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M} e^{\mathbf{\Lambda}t} \mathbf{M}^{-1}$$

em que $e^{\mathbf{\Lambda}t} \triangleq \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$.

▲ **Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ através da Transformada de Laplace:**

Aplicando a Transformada de Laplace à equação homogênea:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) \iff \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0$$

Aplicando a Transformada Inversa:

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}|_{t-t_0} \mathbf{x}_0$$

Desta forma:

$$e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \triangleq \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}|_{t-t_0}$$

▲ (...)

→ Análise da Função de Transferência do Modelo de Estados

Se $f(t)$ não contiver impulsos ou singularidades de ordem superior na origem e convergir para um valor constante quando $t \rightarrow +\infty$, então, aplicam-se os teoremas:

Teorema do Valor Inicial

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$$

Teorema do Valor Final

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

→ Resposta ao escalão unitário de sistemas LIT

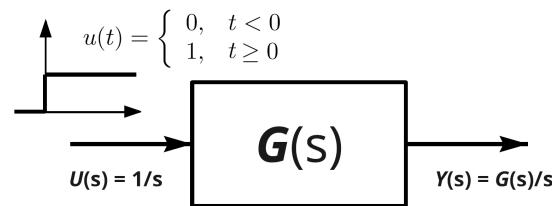


Fig. 3: Resposta do sistema ao degrau unitário.

▲ Valor final da resposta ao escalão unitário:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G(s)}{s} = G(0)$$

▲ Valor inicial da resposta ao escalão:

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \frac{G(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow +\infty} G(s)$$

▲ Valor inicial da derivada da resposta ao escalão unitário:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \dot{y}(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s(sY(s)) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s^2 \frac{G(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow +\infty} sG(s)$$

▲ Valor final da derivada da resposta ao escalão unitário:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{y}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s(sY(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{G(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

★ Excesso de polos-zeros (resposta ao escalão unitário)

$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} G(s)$	$\lim_{t \rightarrow 0} \dot{y}(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sG(s)$
<u>#pólos > #zeros</u>	<u>#pólos > #zeros + 1</u>
Resposta ao escalão contínua	Derivada da resposta contínua
<u>#pólos = #zeros</u>	<u>#pólos = #zeros + 1</u>
Resposta descontínua, com salto finito	Derivada da resposta descontínua, mas finita
<u>#pólos < #zeros</u>	<u>#pólos < #zeros + 1</u>
Resposta descontínua, com salto infinito	Derivada da resposta descont., infinita

§ **Nota:** caso um dos zeros se encontre no SPD, então temos um sistema de fase não mínima.

→ Sistemas de 2ª ordem (sem zeros)

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ζ - Determina a forma da resposta.

ω_n - Determina a escala de tempo.

Quando maior for ω_n maior é a largura de banda e mais rápido é o sistema.

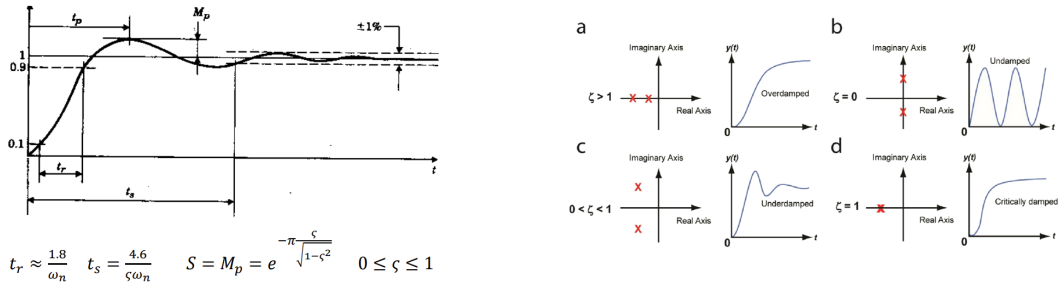


Fig. 4: Tipos de resposta de sistemas de segunda ordem sem zeros (★ resposta ao escalão unitário).

→ Diagramas de Bode

“The most useful technique for hand plotting was developed by H. W. Bode at Bell Laboratories between 1932 and 1942. The idea in Bode’s method is to plot magnitude curves using a logarithmic scale and phase curves using a linear scale. This strategy allows us to plot a high-order $G(j\omega)$ by simply adding the separate terms graphically.

$$\frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2}{\bar{s}_3 \bar{s}_4 \bar{s}_5} = \frac{r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2}}{r_3 e^{j\theta_3} r_4 e^{j\theta_4} r_5 e^{j\theta_5}} = \left(\frac{r_1 r_2}{r_3 r_4 r_5} \right) e^{j(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5)}$$

phases of the individual terms are added directly to obtain the phase of the composite expression, $G(j\omega)$. Furthermore, because

$$|G(j\omega)| = \frac{r_1 r_2}{r_3 r_4 r_5}$$

it follows that

$$\log_{10} |G(j\omega)| = \log_{10}(r_1) + \log_{10}(r_2) - \log_{10}(r_3) - \log_{10}(r_4) - \log_{10}(r_5).” [2]$$

Diagramas de Bode

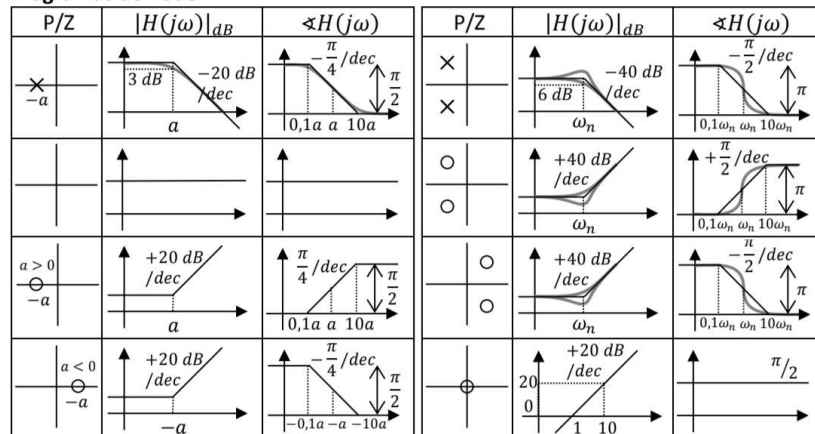


Fig. 5: Resposta assintótica—resposta em diagramas de Bode.

2. Linearização de Sistemas Não Lineares

A aproximação linear de uma função é o polinómio de Taylor de primeira ordem em torno do ponto de interesse. Em sistemas dinâmicos, é um método que permite (possivelmente) aferir a estabilidade local de pontos de equilíbrio de sistemas não lineares.

Seja $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, não linear. A equação geral para a linearização de uma função multivariável $f(\mathbf{x})$ num ponto \mathbf{p} é:

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{p}) + Df|_{\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})$$

onde \mathbf{x} é o vetor de variáveis e \mathbf{p} o ponto de interesse para a linearização.

“A good place to start analyzing the nonlinear system

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$$

is to determine its equilibrium points and describe its behavior near [this points]. (...) the local behavior of the nonlinear system near a hyperbolic equilibrium point \mathbf{p} is qualitatively determined by the behavior of the linear system

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

with the matrix $\mathbf{A} = Df(\mathbf{p})$, near the origin.

The linear function $\mathbf{A}\mathbf{x} = Df(\mathbf{p})\mathbf{x}$ is called the *linear part* of f at \mathbf{p} .”[3]

Def.: Ponto de equilíbrio (ou ponto crítico)[3]

A point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ is called an *equilibrium point* or *critical point* of $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ if $f(\mathbf{p}) = 0$. An equilibrium point \mathbf{p} is called a *hyperbolic equilibrium point* of $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ if none of the eigenvalues of the matrix $Df(\mathbf{p})$ have zero real part. The linear system $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ with the matrix $\mathbf{A} = Df(\mathbf{p})$ is called the *linearization* of $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ at \mathbf{p} .

“The Hartman-Grobman Theorem is another very important result in the local qualitative theory of ordinary differential equations. The theorem shows that near a hyperbolic equilibrium point \mathbf{p} , the nonlinear system

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$$

has the same qualitative structure as the linear system

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

with $\mathbf{A} = Df(\mathbf{p})$. Throughout this section we shall assume that the equilibrium point \mathbf{p} has been translated to the origin.”[3]

Definition 1 [3]

Two autonomous systems of differential equations such as $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ and $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ are said to be *topologically equivalent* in a neighborhood of the origin or to have the *same qualitative structure near the origin* if there is a homeomorphism H mapping an open set U containing the origin onto an open set V containing the origin which maps trajectories of $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ in U onto trajectories of $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ in V and preserves their orientation by time in the sense that if a trajectory is directed from \mathbf{p}_1 to \mathbf{p}_2 in U , then its image is directed from $H(\mathbf{p}_1)$ to $H(\mathbf{p}_2)$ in V . If the homeomorphism H preserves the parameterization by time, then the systems $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ and $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ are said to be *topologically conjugate* in a neighborhood of the origin.

Teo.: Teorema da Linearização (Hartman-Grobman)[3]

Let E be an open subset of \mathbb{R}^n containing the origin, let $f \in C^1(E)$, and let ϕ_t be the flow of the nonlinear system $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$. Suppose that $f(\mathbf{p}) = 0$ and that the matrix $\mathbf{A} = Df(\mathbf{p})$ has no eigenvalue with zero real part. Then there exists a homeomorphism H of an open set U containing the origin onto an open set V containing the origin such that for each $\mathbf{p} \in U$, there is an open interval $I_0 \subset \mathbb{R}$ containing zero such that for all $\mathbf{p} \in U$ and $t \in I_0$

$$H \circ \phi_t(\mathbf{p}) = e^{\mathbf{A}t} H(\mathbf{p});$$

i.e., H maps trajectories of $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ near the origin onto trajectories of $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ near the origin and preserves the parameterization by time.

→ Procedimentos:

- ▲ Calcular os pontos de equilíbrio
- ▲ Calcular a Matriz Jacobiana e aferir que pontos de equilíbrio são hiperbólicos. Invocar o Teorema da Linearização e justificar que linearizações representam qualitativamente o comportamento do sistema não linear na vizinhança dos pontos de equilíbrio respetivos.
- ▲ Traçar qualitativamente o retrato de fase para os pontos de equilíbrio hiperbólicos (*vide* Phase Plane Analysis).

→ Nota:

Para matrizes \mathbf{A} $[2 \times 2]$, os valores próprios são dados por:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\text{tr}[\mathbf{A}] \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\text{tr}[\mathbf{A}])^2 - 4\det[\mathbf{A}]}$$

Appendix A. Phase Plane Analysis

We discuss here, only very briefly, general autonomous second-order ordinary differential equations of the form

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y). \quad (\text{A.1})$$

We present the basic results which are required in the main text. There are many books which discuss phase plane analysis in varying depth, such as Jordan and Smith (1999) and Guckenheimer and Holmes (1983). A good, short and practical exposition of the qualitative theory of ordinary differential equation systems, including phase plane techniques, is given by Odell (1980). *Phase curves* or *phase trajectories* of (A.1) are solutions of

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}. \quad (\text{A.2})$$

Through any point (x_0, y_0) there is a unique curve except at *singular points* (x_s, y_s) where

$$f(x_s, y_s) = g(x_s, y_s) = 0.$$

Let $x \rightarrow x - x_s$, $y \rightarrow y - y_s$; then, $(0, 0)$ is a singular point of the transformed equation. Thus, without loss of generality we now consider (A.2) to have a singular point at the origin; that is,

$$f(x, y) = g(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, y = 0. \quad (\text{A.3})$$

If f and g are analytic near $(0, 0)$ we can expand f and g in a Taylor series and, retaining only the linear terms, we get

$$\frac{dx}{dy} = \frac{ax + by}{cx + dy}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}_{(0,0)} \quad (\text{A.4})$$

which defines the matrix A and the constants a , b , c and d . The linear form is equivalent to the system

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy. \quad (\text{A.5})$$

Solutions of (A.5) give the parametric forms of the phase curves; t is the parametric parameter.

Let λ_1 and λ_2 be the eigenvalues of A defined in (A.4); that is,

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}(a + d \pm [(a + d)^2 - 4 \det A]^{1/2}). \quad (\text{A.6})$$

Solutions of (A.5) are then

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \mathbf{v}_1 \exp[\lambda_1 t] + c_2 \mathbf{v}_2 \exp[\lambda_2 t], \quad (\text{A.7})$$

where c_1 and c_2 are arbitrary constants and $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ are the eigenvectors of A corresponding to λ_1 and λ_2 respectively; they are given by

$$\mathbf{v}_i = (1 + p_i^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ p_i \end{pmatrix}, \quad p_i = \frac{\lambda_i - a}{b}, \quad b \neq 0, \quad i = 1, 2. \quad (\text{A.8})$$

Elimination of t in (A.7) gives the phase curves in the (x, y) plane.

The form (A.7) is for distinct eigenvalues. If the eigenvalues are equal the solutions are proportional to $(c_1 + c_2 t) \exp[\lambda t]$.

Catalogue of (Linear) Singularities in the Phase Plane

(i) λ_1, λ_2 real and distinct:

(a) λ_1 and λ_2 have the same sign. Typical eigenvectors \mathbf{v}_1 and \mathbf{v}_2 are illustrated in Figure A.1(a). Suppose $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Then, from (A.7), for example, for $c_2 = 0, c_1 \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \mathbf{v}_1 \exp[\lambda_1 t],$$

so the solution in the phase plane simply moves along \mathbf{v}_1 towards the origin as $t \rightarrow \infty$ in the direction shown in Figure A.1(a) — along PO if $c_1 > 0$ and along QO if $c_1 < 0$.

From (A.7) every solution tends to $(0, 0)$ as $t \rightarrow \infty$ since, with $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, $\exp[\lambda_2 t] = o(\exp[\lambda_1 t])$ as $t \rightarrow \infty$ and so

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim c_1 \mathbf{v}_1 \exp[\lambda_1 t] \quad \text{as } t \rightarrow \infty.$$

Thus, close enough to the origin all solutions tend to zero along \mathbf{v}_1 as shown in Figure A.1(a). This is called a *node* (Type I) singularity. With $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ it is a stable node since all trajectories tend to $(0, 0)$ as $t \rightarrow \infty$. If $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ it is an unstable node; here $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ as $t \rightarrow -\infty$.

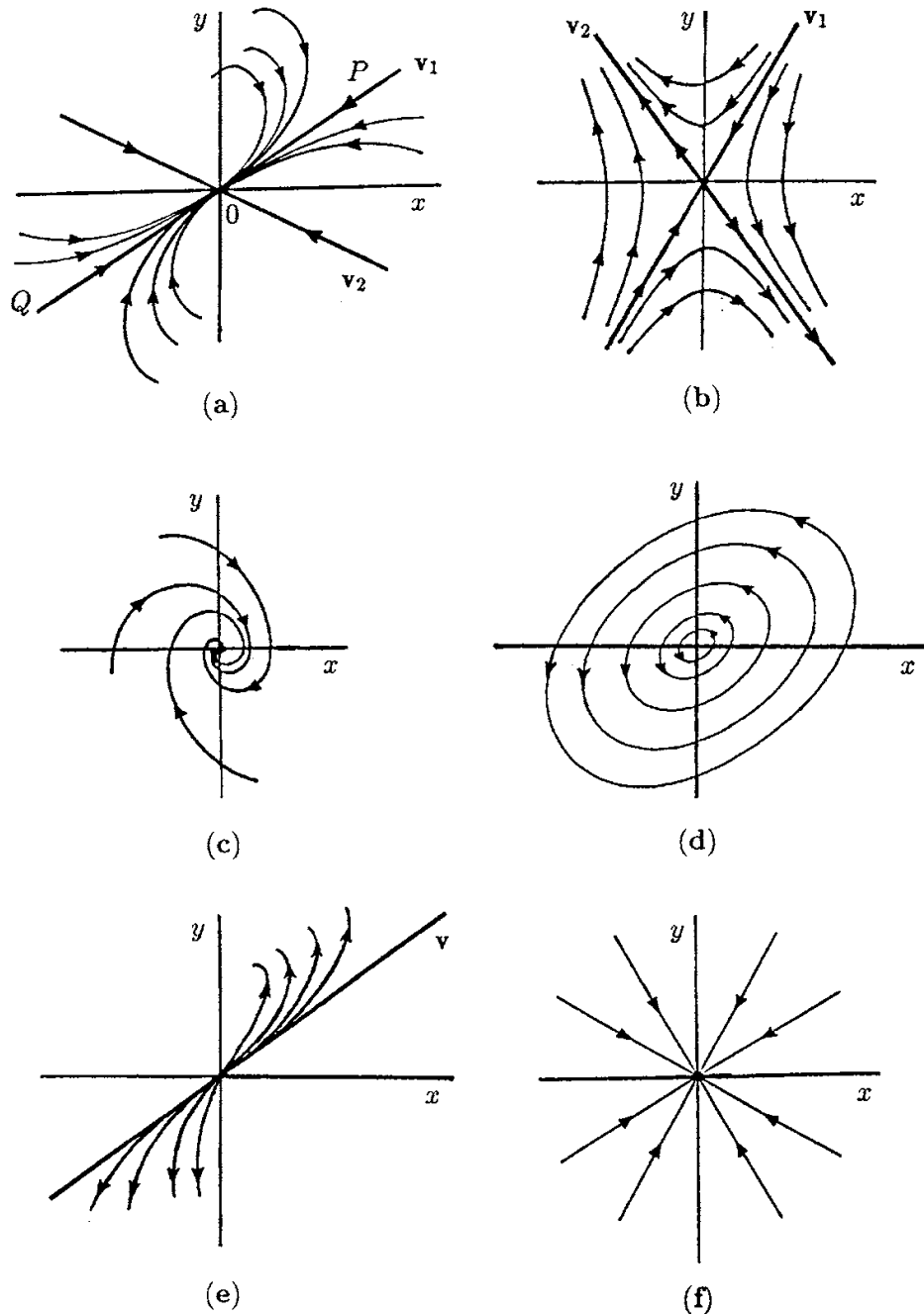


Figure A.1. Typical examples of the basic linear singularities of the phase plane solutions of (A.4). (a) Node (Type I): these can be stable (as shown) or unstable. (b) Saddle point: these are always unstable. (c) Spiral: these can be stable or unstable. (d) Centre: this is neutrally stable. (e) Node (Type II): these can be stable or unstable. (f) Star: these can be stable or unstable.

- (b) λ_1 and λ_2 have different signs. Suppose, for example, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ then $\mathbf{v}_1 \exp[\lambda_1 t] \rightarrow 0$ along \mathbf{v}_1 as $t \rightarrow \infty$ while $\mathbf{v}_2 \exp[\lambda_2 t] \rightarrow 0$ along \mathbf{v}_2 as $t \rightarrow -\infty$.

There are thus different directions on \mathbf{v}_1 and \mathbf{v}_2 : the solutions near $(0, 0)$ are as shown in Figure A.1(b). This is a *saddle point* singularity. It is always *unstable*: except strictly along \mathbf{v}_1 any small perturbation from $(0, 0)$ grows exponentially.

- (ii) λ_1, λ_2 complex: $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta, \beta \neq 0$. Solutions (A.7) here involve $\exp[\alpha t]$ $\exp[\pm i\beta t]$ which implies an oscillatory approach to $(0, 0)$.
- (a) $\alpha \neq 0$. Here we have a *spiral*, which is stable if $\alpha < 0$ and unstable if $\alpha > 0$; Figure A.1(c) illustrates a spiral singularity.
- (b) $\alpha = 0$. In this case the phase curves are ellipses. This singularity is called a *centre* and is illustrated in Figure A.1(d). Centres are not stable in the usual sense; a small perturbation from one phase curve does not die out in the sense of returning to the original unperturbed curve. The perturbation simply gives another solution. In the case of centre singularities, determined by the linear approximation to $f(x, y)$ and $g(x, y)$, we must look at the higher-order (than linear) terms to determine whether or not it is really a spiral and hence whether it is stable or unstable.

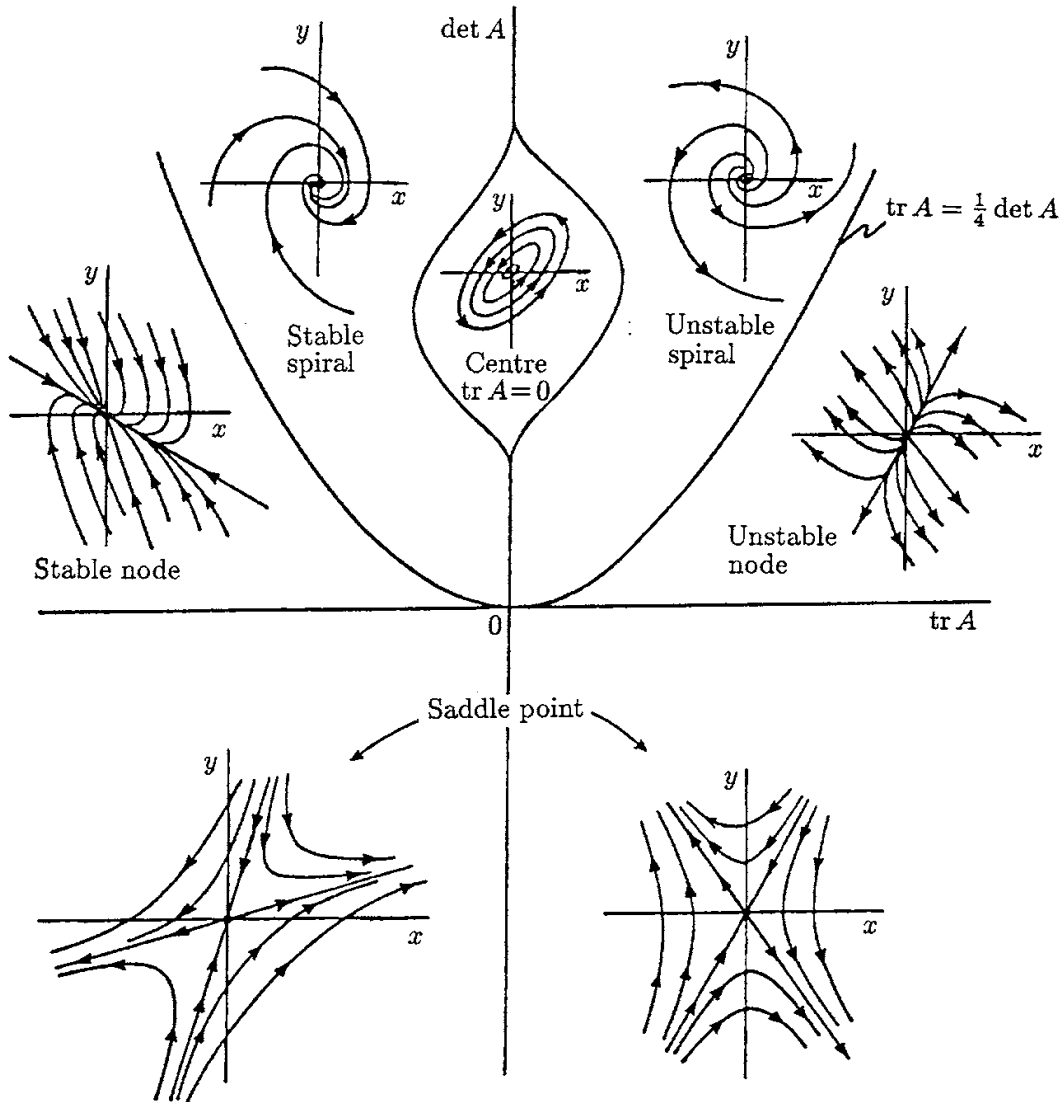


Figure A.2. Summary diagram showing how $\text{tr } A$ and $\det A$, where A is the linearisation matrix given by (A.4), determine the type of phase plane singularity for (A.1). Here $\det A = f_x g_y - f_y g_x$, $\text{tr } A = f_x + g_y$, where the partial derivatives are evaluated at the singularities, the solutions of $f(x, y) = g(x, y) = 0$.

- (iii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Here the eigenvalues are *not* distinct.
- (a) In general, solutions now involve terms like $t \exp[\lambda t]$ and there is only one eigenvector \mathbf{v} along which the solutions tend to $(0, 0)$. The t in $t \exp[\lambda t]$ modifies the solution away from $(0, 0)$. It is called a *node* (Type II) singularity, an illustration of which is given in Figure A.1(e).
 - (b) If the solutions do not contain the $t \exp[\lambda t]$ term we have a *star* singularity, which may be stable or unstable, depending on the sign of λ . Trajectories in the vicinity of a star singularity are shown in Figure A.1(f).

The singularity depends on a , b , c and d in the matrix A in (A.4). Figure A.2 summarises the results in terms of the trace and determinant of A .

If the system (A.1) possesses a confined set (that is, a domain on the boundary ∂B of which the vector $(dx/dt, dy/dt)$ points into the domain) enclosing a single singular point which is an unstable spiral or node then any phase trajectory cannot tend to the singularity with time, nor can it leave the confined set. The *Poincaré–Bendixson theorem* says that as $t \rightarrow \infty$ the trajectory will tend to a limit cycle solution. This is the simplest application of the theorem. If the sole singularity is a saddle point a limit cycle cannot exist; see, for example, Jordan and Smith (1999) for a proof of the theorem, its general application and some practical illustrations.

3. Modelação Física

→ Sistemas Mecânicos de Translação

“The cornerstone for obtaining a mathematical model, or the dynamic equations, for any mechanical system is Newton’s law

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = ma$$

where:

- F = the vector sum of all forces applied to each body in a system, newtons (N),
- p = linear momentum/translational momentum (kg ms^{-1}),
- v = velocity (ms^{-1}), the directional speed of an object in motion as an indication of its rate of change in position as observed from a particular frame of reference,
- a = the vector acceleration of each body with respect to an inertial reference frame (that is, one that is neither accelerating nor rotating with respect to the stars); often called inertial acceleration, ms^{-2} ,
- m = mass of the body, kg.”[2]

Molas Elásticas

Quando uma mola é comprimida ou esticada, reage com uma força que se opõe à compressão (ou à extensão). Força desta que, para molas lineares, é dada por:

$$f = -kx$$

Onde k é a constante de Hooke [N/m].

Atrito Viscoso

Elemento que dissipa energia. Quando existe uma diferença de velocidade entre dois corpos o atrito corresponde a uma força que contraria o movimento. No caso linear, o atrito é dado por:

$$f = -\beta\dot{x} = -\beta v$$

Nota → Atrito estático

“Static friction is also known as stiction and models the fact that in some cases the friction force is larger in magnitude for zero velocity than for a non-zero velocity. According to the stiction model the system sticks if the velocity is zero and $|F_t| < F_s$, and it breaks away if $|F_t| = F_s$ where $F_s > F_a$ ”[4]

⁰Para uma massa invariante no tempo, ou aproximadamente constante.

→ Sistemas Mecânicos de Rotação

O Momento de Inércia é o análogo da massa para a rotação. Quando um corpo em rotação com um Momento de Inércia J [Nms²] é atuado por um Binário T [Nm], adquire aceleração angular dada por

$$J\ddot{\theta} = T$$

Molas Elásticas

Quando a mola é desviada um ângulo θ em relação à posição de repouso, reage com um binário que se opõe ao movimento, dada para molas lineares por:

$$T = -K\theta$$

Onde k é a "constante da mola" [Nm/rads⁻¹].

Atrito Viscoso

Elemento que dissipa energia. Quando existe uma diferença de velocidade de rotação entre dois corpos o atrito corresponde a uma binário que contraria o movimento e que depende da velocidade angular. No caso linear, o atrito é dado por:

$$T = -\beta\dot{\theta} = -\beta\omega$$

Caixa de desmultiplicação

Uma caixa de desmultiplicação transforma o binário e a velocidade angular de acordo com as seguintes relações:

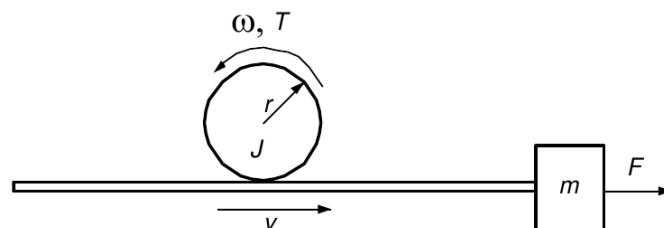
$$\omega_1 = \frac{1}{a}\omega_2 \quad T_1 = aT_2 \quad T_1\omega_1 = T_2\omega_2$$

Onde $a = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ é o inverso da razão de desmultiplicação da caixa.

Transformação da rotação em translação

Assumindo que não existe escorregamento, nem perdas energéticas, temos

$$v = \omega r, \quad F = \frac{1}{r}T$$



→ Motor de Corrente Contínua

Modelo do servomotor CC de íman permanente:

Binário do motor: Para um fluxo constante

$$\hookrightarrow T(t) = K_T i(t)$$

Tensão aos terminais do rotor:

$$\hookrightarrow e = K_e \omega$$

★ Escreva as equações que modelam o sistema na forma de um modelo de estado (sistema de equações diferenciais de 1^a ordem)

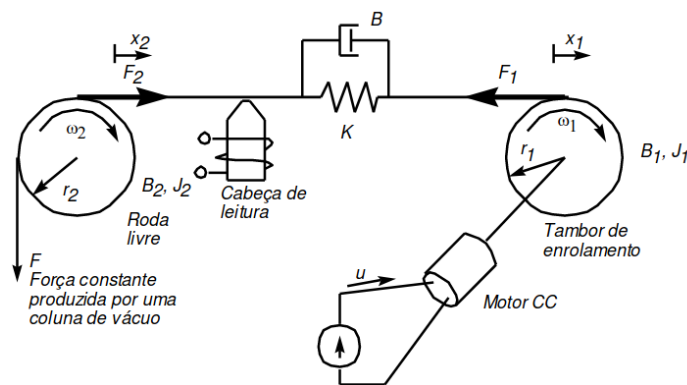


Fig. 6: P16 retirado da coletânea de exercícios.

T. de Enrolamento: de acordo com as equações subjacentes à mecânica de rotação

$$\hookrightarrow J_1 \dot{\omega}_1 = -F_1 r_1 - \beta_1 \omega_1 + T_{cc}$$

Roda Livre: novamente, de acordo com as equações subjacentes à mecânica de rotação

$$\hookrightarrow J_2 \dot{\omega}_2 = (F_2 - F) r_2 - \beta_2 \omega_2$$

Fita: (*vide* secção das molas elásticas)

$$\hookrightarrow \begin{cases} F_1 = K(x_1 - x_2) + \beta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ F_2 = -K(x_2 - x_1) - \beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases}$$

Motor CC: T_{cc} é o binário exercido pelo motor CC no Tambor de Enrolamento

$$\hookrightarrow T_{cc} = K_T u$$

Variáveis do referencial: a velocidade linear de um ponto da periferia de uma roda é o produto do raio da roda pela velocidade angular

$$\hookrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \omega_1 r_1 \\ \dot{x}_2 = \omega_2 r_2 \end{cases}$$

★ Escreva as equações que modelam o sistema e um modelo de estado na forma de um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem.

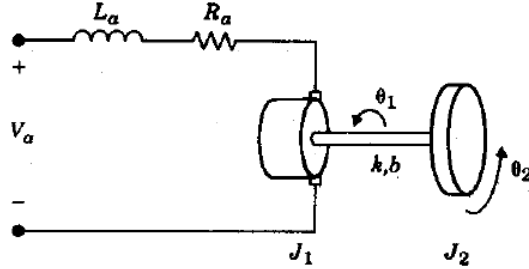


Fig. 7: P18 retirado da coletânea de exercícios. Motor elétrico que reboca uma carga com um modo dominante de vibração.

Motor: por aplicação da Lei das Malhas (KVL)

$$\hookrightarrow \text{KVL: } L_a \frac{di_a}{dt} + i_a R_a + e_a - V_A = 0 \iff \frac{di_a}{dt} = -\frac{K_e}{L_a} \dot{\theta}_1 - \frac{R_a}{L_a} i_a + V_A$$

Veio: com as equações subjacentes à mecânica de rotação

$$\hookrightarrow J_1 \ddot{\theta}_1 = -K(\theta_1 - \theta_2) - \beta(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + T_{cc}$$

Motor CC: T_{cc} é o binário exercido pelo motor CC no veio

$$\hookrightarrow T_{cc} = K_T i_a$$

Carga: de acordo com as equações subjacentes à mecânica de rotação

$$\hookrightarrow J_2 \ddot{\theta}_2 = -K(\theta_2 - \theta_1) - \beta(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)$$

Definem-se então os estados: $\mathbf{x} = [\theta_2 \quad \dot{\theta}_2 \quad \theta_1 \quad \dot{\theta}_1 \quad i_a]^T$

$$\therefore \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K}{J_2} & -\frac{\beta}{J_2} & \frac{K}{J_2} & \frac{\beta}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{K}{J_1} & \frac{\beta}{J_1} & -\frac{K}{J_1} & -\frac{\beta}{J_1} & K_T \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{K_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{L_a} \end{bmatrix} V_A$$

★ Defina um estado apropriado com a menor dimensão possível e escreva as respectivas equações de estado na forma matricial.

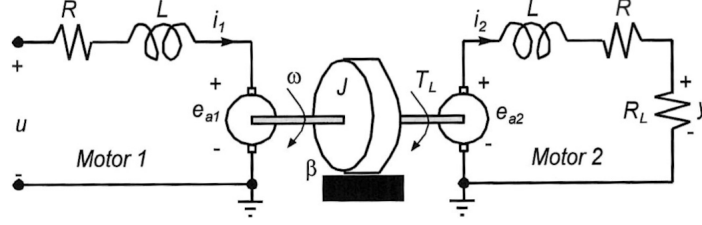


Fig. 8: Circuito eletromecânico equivalente de dois motores de corrente contínua de íman permanente, que têm os veios ligados solidariamente. $T_L = K_T i_1$ e $e_{ai} = K_{ei} \omega$

Motor 1: por aplicação da Lei das Malhas (KVL)

$$\hookrightarrow \text{KVL: } i_1 R + L \frac{di_1}{dt} + e_{a1} - u = 0 \iff \frac{di_1}{dt} = -\frac{R}{L} i_1 - \frac{K_{e1}}{L} \omega + \frac{1}{L} u$$

Motor 2: por aplicação, novamente, da Lei das Malhas (KVL)

$$\hookrightarrow \text{KVL: } L \frac{di_2}{dt} + i_2 R + i_2 R_L - e_{a2} = 0 \iff \frac{di_2}{dt} = \frac{K_{e2}}{L} \omega - \left(\frac{R + R_L}{L} \right) i_2$$

Roda: de acordo com as equações subjacentes à mecânica de rotação

$$\hookrightarrow J \dot{\omega} = T_L - \beta \omega \iff \dot{\omega} = -\frac{\beta}{J} \omega + \frac{K_T}{J} i_1$$

Definem-se então os estados: $\mathbf{x} = [\omega \quad i_1 \quad i_2]^T$

$$\therefore \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{J} & \frac{K_T}{J} & 0 \\ -\frac{K_{e1}}{L} & -\frac{R}{L} & 0 \\ \frac{K_{e2}}{L} & 0 & \frac{K_T}{J} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \quad 0 \quad R_L] \mathbf{x}$$

→ Sistemas baseados em Mecânica Lagrangiana

Princípio de Hamilton [5]

De todo o conjunto de configurações admissíveis que um sistema pode assumir ao evoluir de uma configuração 1 no instante t_1 para uma configuração 2 no instante t_2 , aquela que satisfaz as condições de equilíbrio dinâmico em cada instante é a que torna estacionário (mínimo) o integral da Lagrangiana[†] do sistema durante esse intervalo de tempo.

“Matematicamente, a condição de equilíbrio dinâmico corresponde a

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

em que δ representa a primeira variação de I . Não se trata de uma minimização clássica de uma função em relação a uma ou mais variáveis, pois das várias funções associadas às várias trajectórias possíveis, expressas pelo integral I , à sua minimização corresponde também uma função, que é a trajectória de equilíbrio. I não é uma função, mas antes uma função de funções, que se designa por funcional.”[5]

O princípio de Hamilton pode ser encarado como a integração no tempo do princípio dos trabalhos virtuais em dinâmica.

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta \overline{W}_{nc}) dt = 0, \quad \delta r_i(t_1) = \delta r_i(t_2) = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

em que $\delta \overline{W}_{nc}$ representa o trabalho virtual das forças não-conservativas. Esta expressão traduz o princípio de Hamilton generalizado[5].

→ Equações de Euler-Lagrange

É possível deduzir de uma forma muitíssimo elegante as equações de Lagrange através do princípio de Hamilton.

Equações de Euler-Lagrange [5]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

em que Q_k são as forças generalizadas não-conservativas.

“Note-se que basta conhecer-se a Lagrangiana do sistema, que é um escalar, e as forças externas aplicadas, para—de uma forma directa—se obterem as equações de equilíbrio dinâmico. Naturalmente, a expressão indica que se obtêm n equações, dado que o sistema tem n graus de liberdade.”[5]

Se não existirem forças externas aplicadas, o sistema encontrar-se-á em movimento livre e a equação simplifica-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

[†]“**Note-se** que a Lagrangiana, $L = T - V$, é uma medida do balanço entre a energia cinética e a energia potencial. Compreende-se, pois, que a integração no tempo dessa medida corresponde a uma situação de equilíbrio dinâmico.”[5]

→ Sistemas Térmicos

Os sistemas térmicos dizem respeito ao aquecimento de corpos e ao transporte de energia térmica.

A quantidade de calor Q [J] necessária para aquecer um corpo de massa m , levando-o de uma temperatura inicial T_1 à temperatura T_2 , é dado por:

$$Q = mc_p(T_2 - T_1)$$

em que c_p é o calor específico da substância de que é feito o corpo.

O fluxo de calor é dado por

$$q = \frac{dQ}{dt} [\text{W}]$$

O fluxo de calor afeta a temperatura de um corpo de acordo com

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C}q$$

em que $C = mc_p$ (em certos casos, a massa pode ser desconsiderada). Esta expressão obtém-se derivando a expressão que relaciona a quantidade de calor e a temperatura.

As equações diferenciais para a temperatura obtêm-se contabilizando os fluxos de calor que entram e saem do corpo (conservação de energia).

→ Modos de transferência de energia

★ Transferência de energia por condução

Um corpo (a T_2) encostado a outro com temperatura inferior, transfere energia para este com fluxo de calor dado por:

$$\text{Lei de Fourier: } q = \frac{1}{R}(T_2 - T_1)$$

em que R [$^{\circ}\text{C}/\text{J}/\text{s}$] é a resistência térmica.

★ Transferência de energia por convecção

A transferência de energia por convecção está associada ao transporte de massa num fluido que se desloca. Por vezes é razoável assumir (não existe um modelo geral simples):

$$q = c_r(T_2 - T_1), \quad c_r \in \mathbb{R}$$

★ Transferência de energia por radiação

Um corpo à temperatura absoluta T [K] radia uma potência q [W] dada pela lei de Stefan-Boltzman:

$$q = A\varepsilon\sigma T^4$$

onde A [m^2] é a área de exposição do corpo; $\varepsilon \in [0, 1]$ a emissividade do corpo; e σ a constante de Stefan-Boltzman ($\sigma = 5.670374419 \dots \cdot 10^{-8}$ [$\text{Js}^{-1}\text{m}^{-2}\text{K}^{-4}$]).

4. Cadeias de Markov

→ Introdução às Cadeias de Markov

Um dos principais objetivos da análise de Cadeias de Markov, é a determinação das probabilidades de encontrar a cadeia em vários estados, em específicos instantes de tempo. Definimos o *state probability vector* (vetor linha) como:

$$\boldsymbol{\pi}(k) = [\pi_1(k), \pi_2(k), \dots, \pi_N(k)]$$

onde $\pi_j(k) \triangleq \mathcal{P}\{X_k = x_j\}$ no instante k , para o espaço de estados $\mathcal{X} = \{x_j\}$, com $j = 1, \dots, N$. E, assim, por associação natural a um sistema dinâmico, a evolução do sistema é dada pela equação de transição de estados:

$$\boldsymbol{\pi}(k+1) = \boldsymbol{\pi}(k) \mathbf{P} \iff \boldsymbol{\pi}(k+n) = \boldsymbol{\pi}(k) \mathbf{P}^n \quad n = 1, 2, \dots$$

em que \mathbf{P} é matriz de transição (estocástica) que condensa o comportamento da Cadeia de Markov, de acordo com o(s) acontecimento(s) probabilístico(s).

→ **Steady-state analysis:** Qual é a probabilidade de encontrarmos a Cadeia de Markov no estado x_j "in the long run"²?

$$\pi_j = \lim_{k \rightarrow +\infty} \pi_j(k)$$

Se π_j existir, refere-se como *steady-state*, *equilibrium*, ou *stationary state probability*. Se existir para todos os estados, definimos o *stationary state probability vector* $\boldsymbol{\pi}$.

Def.: Cadeia de Markov regular[6]

Uma Cadeia de Markov diz-se regular, se existir um inteiro positivo m , tal que:

$$\mathbf{P}^m > \mathbf{0}.$$

Com base na definição supramencionada, invocamos o **Teorema Básico do Limite para Cadeias de Markov**[6], aplicável à Cadeia de Markov objetiva de estudo. Ergo, para $k \rightarrow +\infty$, $\mathbf{P}^k \rightarrow \mathbf{e} \boldsymbol{\pi} \implies \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P} \wedge \boldsymbol{\pi} \mathbf{e} = 1$, em que $\mathbf{e} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ e $\boldsymbol{\pi}$ pode ser revisto como vetor próprio da matriz estocástica \mathbf{P} , associado ao valor próprio $\lambda_0 = 1$ (→ "No other eigenvalue of \mathbf{P} has absolute value greater than 1."[6]).

Teo.: Teorema Básico do Limite para Cadeias de Markov[6]

Let \mathbf{P} be the transition matrix of a regular Markov chain. Then:

- ▲ There is a unique probability vector $\mathbf{p}^T > 0$ such that: $\mathbf{p}^T \mathbf{P} = \mathbf{p}^T$
- ▲ For any initial state i (corresponding to an initial probability vector equal to the i th coordinate vector \mathbf{e}_i^T the limit vector

$$\mathbf{v}^T = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbf{e}_i^T \mathbf{P}^m$$
 exists and is independent of i . Furthermore, \mathbf{v}^T is equal to the eigenvector \mathbf{p}^T .
- ▲ $\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbf{P}^m = \bar{\mathbf{P}}$, where $\bar{\mathbf{P}}$ is the $n \times n$ matrix, each of whose rows is equal to \mathbf{p}^T .

²"By "long run" we mean that the system (...) is allowed to operate for a sufficiently long period of time so that the state probabilities can reach some fixed values (...)." [7]

5. Modelos baseados em dados

→ Estimação de Parâmetros

Suponhamos uma relação teórica entre duas grandezas X e Y tal que $Y = \alpha X$. Procuramos estimar o valor de α com base em n pares de ensaios experimentais:

$$(X_i, Y_i), \quad i = 1, \dots, n$$

Para tal recorreremos ao princípio dos mínimos quadrados:

Princípio dos mínimos quadrados

A mathematical procedure for finding the best-fitting curve to a given set of points by minimizing the sum of the squares of the offsets ("the residuals") of the points from the curve.

De acordo com este critério, a estimativa é tal que minimiza a soma dos quadrados dos desvios. Supondo Y_i como o valor observado no ensaio i e αX_i o valor esperado, obtemos o seguinte funcional:

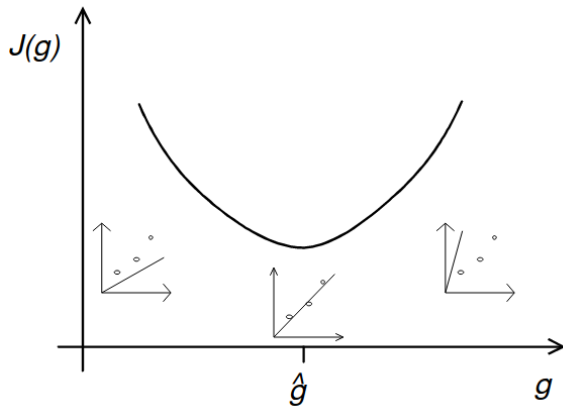


Fig. 9: Retas de ajuste mediante α .

$$J(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \alpha X_i)^2$$

O minimizante do funcional é obtido através da derivada em ordem ao parâmetro a estimar:

$$\dot{J}(\alpha) = \sum_{i=1}^n X_i (Y_i - \alpha X_i) = 0$$

A legitimidade do minimizante calculado é averiguada com recurso à segunda derivada³:

$$\ddot{J}(\alpha) > 0$$

Nota 1→ A multiplicação de J pelo escalar $1/2$ serve apenas para eliminar o termo 2 advindo da regra do expoente aquando a realização da derivada do funcional. Não influencia o cálculo do minimizante, já que estamos a igualar a derivada a 0.

Nota 2→ Para relações teóricas que envolvam a estimação de mais do que um parâmetro, a segunda derivada deixa de ser um escalar, a legitimidade é assegurada mediante a matriz, que deve ser definida positiva.

Def.: Matriz Definida Positiva

Se $\mathbf{A} [n \times n]$ é uma matriz definida positiva, então os elementos da diagonal de \mathbf{A} são estritamente positivos, ou seja, $a_{ii} > 0, i = 1, \dots, n$.

Nota: Todos os valores próprios de \mathbf{A} são positivos ($\lambda_i > 0, \forall i \in \mathbb{N}$).

³Assegura que a concavidade da curva do funcional está virada para cima, garantindo que $J(\alpha)$ seja um mínimo.

→ Notação Matricial

Supondo uma equação às diferenças do género:

$$y(t) = a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_0 u(t-1) + \dots + b_m u(t-1-m)$$

Define-se o vetor de parâmetros a estimar como:

$$\theta = [a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_1 \quad \dots \quad b_n]^T$$

E o regressor como:

$$\varphi(t-1) = [-y(t-1) \quad \dots \quad -y(t-n) \quad u(t-1) \quad \dots \quad u(t-1-m)]^T$$

O modelo deduzido pode ser escrito como:

$$y(t) = \varphi(t-1)\theta + \varepsilon(t) \rightarrow \text{Para } n \text{ observações}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n) \end{bmatrix}}_{Y_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(1) \\ \vdots \\ \varphi(n-1) \end{bmatrix}}_{\Phi} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \varepsilon(2) \\ \vdots \\ \varepsilon(n) \end{bmatrix}$$

Onde $\varepsilon(t)$ é um resíduo que traduz a existência de erros experimentais, que se assumem (tipicamente) pequenos, desprezáveis.

→ Equação Normal

Consequentemente, a estimativa dos mínimos quadrados do vetor parâmetros θ do modelo acima descrito é por:

$$\Phi^T \Phi \bar{\theta} = \Phi^T Y_e$$

Denominada equação normal. Se $\Phi^T \Phi$ existir e for invertível então a estimativa dos mínimos quadrados existe e é única.

6. Sistemas Distribuídos

→ Problemas Representativos de PDE's

Considere um troço de autoestrada em que se assumem verdadeiras as seguintes hipóteses:

- ☞ Os veículos só podem entrar no início do troço e sair no final do troço.
- ☞ Os veículos não podem sair nem entrar ao longo do troço.
- ☞ Supõe-se que os veículos são suficientemente numerosos para que a densidade de tráfego (número de veículos por unidade de comprimento) seja uma variável contínua.
- ☞ No troço, todos os veículos deslocam-se sempre com uma velocidade constante

Seja x a posição medida em Km a partir do início do troço e $\rho(x, t)$ a densidade de tráfego (*vehicle density*) no ponto de abcissa x , no instante t . Na prática, o que se mede é o fluxo de tráfego $q(x, t)$, dado pelo número de veículos por unidade de tempo que passam no ponto de abcissa x no instante t .

▲ Sejam dois pontos de abcissas $x_2 > x_1$. Mostre que a densidade e o fluxo de tráfego estão relacionados por:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = q(x_1, t) - q(x_2, t)$$

→ **Densidade de tráfego (Vehicle density):** “The number of vehicles in a unit length of the road at time t and position x . A quantity that is easily recorded by observation of traffic flow along a road is the flux of vehicles $q(x_i, t)$, defined as the number of vehicles that at time t pass a given point with coordinate x in a unit of time.”

O número de veículos num dado troço de autoestrada, caracterizado por dois pontos fixos x_1 e x_2 (onde $x_2 > x_1$), pode ser revisto como a diferença entre o fluxo de tráfego de entrada (x_1) e de saída (x_2) (já que “Os veículos só podem entrar no início do troço e sair no final do troço.”):

$$n^o \text{ de veículos} = q(x_1, t) - q(x_2, t)$$

A densidade de veículos no troço é a diferença de densidades entre o seu ponto inicial e final:

$$\rho(\Delta x, t) = \rho(x_2, t) - \rho(x_1, t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx$$

Subsequentemente, trivialmente se reconhece que densidade de tráfego está subjugada à variação do número de veículos dentro do troço. A *rate of change* da densidade de tráfego entre os dois pontos (caracterizada pela derivada em ordem ao tempo do integral supramencionado) pode então ser relacionada com a diferença de fluxos de entrada e saída, tal como explicitado no enunciado.

▲ Deduza uma equação às derivadas parciais para $\rho(x, t)$

É possível obter um modelo simplificado do sistema fazendo um balanço de densidade da tráfego num troço da autoestrada de comprimento Δx durante um intervalo Δt .

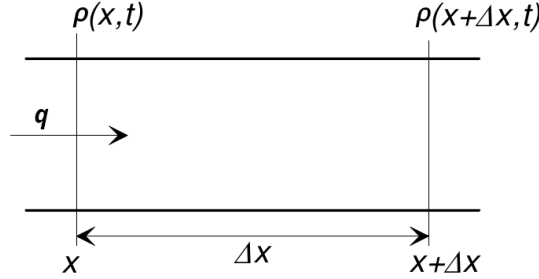


Fig. 10: Vizualização do balanço de densidade para um dado troço de autoestrada

$$\Delta x(\rho(x, t + \Delta t) - \rho(x, t)) = \Delta t(q(x, t) - q(x + \Delta x, t))$$

Como $q = v\rho$ onde v é uma velocidade constante, é possível admitir que:

$$\Delta x(\rho(x, t + \Delta t) - \rho(x, t)) = \Delta t \cdot v(\rho(x, t) - \rho(x + \Delta x, t))$$

Dividindo cada parcela da expressão por $\Delta x \Delta t$ e supondo que $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$ obtém-se o modelo na forma de uma equação às derivadas parciais:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = -v \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t)$$

▲ Por substituição na equação e verificação das condições iniciais, mostre que a solução da equação deduzida é:

$$\rho(x, t) = F(x - vt)$$

Em que $F(x) = \rho(x, 0)$ é a densidade inicial de tráfego.

→ Seguindo o método das características para PDE's quasilineares, a solução da equação pode ser vista como o deslocamento de veículos ao longo de um troço de autoestrada:

$$\rho(x, t) = F\left(x - \int_{t_0}^t v dt, t_0\right) = 0$$

Consequentemente, podemos provar a veracidade da solução através do uso da condição inicial:

$$\rho(x, 0) = F\left(x - \int_0^0 v dt, 0\right) = F(x)$$

▲ Mostre que ao longo das retas definidas no plano $[x, t]$ por $\frac{dx}{dt} = v$ a densidade de tráfego é constante. Escreva a solução que dá x como função de t para estas rectas (denominadas rectas características. A partir daqui demonstre a solução da equação às derivadas parciais dada na alínea anterior.

Avaliando a *rate of change* da densidade de tráfego ao longo do troço:

$$\frac{d}{dt}\rho(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}\rho(x, t) \cdot \frac{dx}{dt}$$

Facilmente se depreende que os dois termos da parcela direita da equação se anulam:

$$\frac{d}{dt}\rho(x, t) = -v \frac{\partial}{\partial x}\rho(x, t) + v \frac{\partial}{\partial x}\rho(x, t) = 0$$

Se a derivada total em ordem ao tempo (*rate of change*) é nula, então não ocorrem variações ao longo do tempo e a densidade de tráfego é constante. Recorrendo agora à solução obtida na alínea anterior, o mesmo resultado é evidente:

$$\frac{d}{dt}\rho(x, t) = \frac{d}{dt}F(x - t) = F(x - vt) \frac{d}{dt}(x - vt) = F(x - vt)(v - v) = 0$$

A densidade de tráfego é constante → A densidade de veículos no troço de autoestrada ao longo do tempo, para cada ponto de deslocamento é sempre a mesma.

▲ Considere um troço de autoestrada com 20km e que a velocidade de circulação é de 120km. Suponha que a densidade inicial de tráfego é definida por:

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} 25 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & x \notin [0, 2] \end{cases}$$

Represente graficamente a densidade de tráfego em função do tempo no final do troço. Suporte o seu resultado num desenho tridimensional no espaço

- A velocidade de circulação é constante, logo, a densidade de tráfego sofre um deslocamento linear para a direita ao longo do tempo.
- A densidade de tráfego não sofre alterações ao longo do troço de autoestrada, logo, a densidade de tráfego é idêntica à inicial para todos os pontos do troço.

O desenho tridimensional terá a seguinte forma:

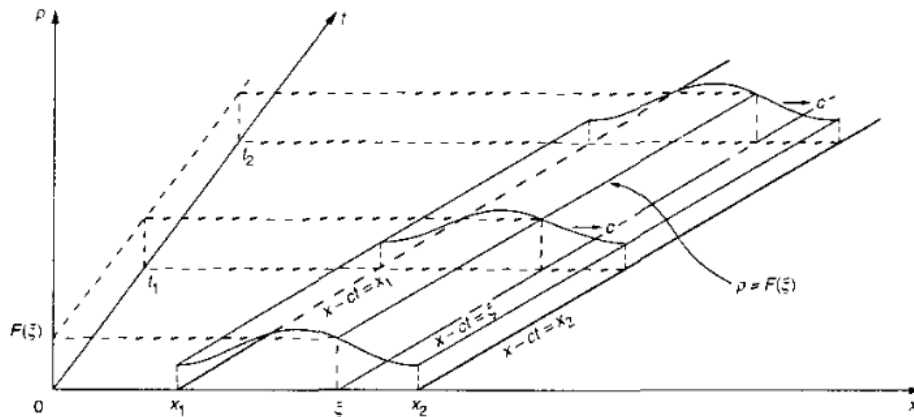


Fig. 11: Solução geral do problema: $x_1 = 0$ e $p(x, 0)$ igual à do enunciado.

Referências

- [1] João M. Lemos. *Controlo no Espaço de Estados*. IST Press, 2019. ISBN 978-989-8481-70-2. Chapters 2 & 3.
- [2] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Pearson, 7 edition, 2015. Chapters 1, 2, 3 & 6.
- [3] Lawrence Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in applied mathematics. Springer, 3rd edition, 2001. ISBN 978-1-4612-6526-9. Chapter 1 & 2.
- [4] Olav Egeland and Jan T. Gravdahl. *Modeling and Simulation for Automatic Control*. Marine Cybernetics, 2002. Chapters 1, 2, 3, 6, 7, 8 & 14.
- [5] Nuno M. M. Maia. *Introdução à dinâmica analítica*. IST Press, 2000. ISBN 978-989-8481-70-2. Chapters 3, 4 & 6.
- [6] David G. Luenberger. *Introduction to Dynamic Systems*, pages 224–253. John Wiley & Sons, 1979. ISBN 978-0-471-02594-8. Chapter 7.
- [7] Christos G. Cassandras and Stéphane Lafortune. *Introduction to Discrete Event Systems*, pages 369–428. Springer, 2 edition, 2008. ISBN 978-0-387-68612-7. Chapter 7.
- [8] J. D. Murray. *Mathematical Biology*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, 3rd edition, 2002. ISBN 978-0-387-22437-4. Chapters 1, 2, 3 & 10; Appendix A.
- [9] João M. Lemos. "Acetatos de Modelação e Simulação", 2022-2023. Acetatos 3A a 9 (algumas imagens et al.).