



ENGENHARIA ELETROTÉCNICA E DE COMPUTADORES

Propagação e Radiação de Ondas Eletromagnéticas

Apontamentos PROE

(Alguns tópicos Ω)



MAGNETIC DISCUSSION

João Gonçalves

Autores:

João Gonçalves : 99995

✉ jrazevedogoncalves@tecnico.ulisboa.pt

Teresa Nogueira : 100029

✉ maria.teresa.ramos.nogueira@tecnico.ulisboa.pt

Novembro 2023

Guia para a Leitura deste Resumo

Este resumo foi elaborado para facilitar o estudo e a compreensão dos conceitos fundamentais em *Propagação e Radiação de Ondas Eletromagnéticas*. Para aproveitar ao máximo este material, recomenda-se:

- **Leitura Sequencial:** Embora cada secção (ou quase todas) seja auto-contida, uma leitura sequencial ajudará a construir uma compreensão progressiva dos conceitos, desde os mais básicos até aos mais complexos.
- **Complemento às Aulas:** É importante ressaltar que este resumo serve como um complemento às aulas e aos recursos fornecidos na página da unidade curricular, uma vez que é baseado neste conjunto.
- **Uso de Recursos Complementares:** Recomenda-se a consulta de livros, artigos e outros materiais adicionais sugeridos nas notas. Estes oferecem perspetivas diferentes e aprofundadas sobre os tópicos abordados.

Em termos de notação, tudo o que tiver mais do que uma dimensão será representado a negrito (i.e., vetores, matrizes, ...). Vetores unitários (ou versores) são representados a negrito e têm um chapéu em cima (e.g., $\hat{\mathbf{u}}$). Tentámos manter a notação o mais concisa e consistente, no entanto, recomenda-se caução.

Contribuições e relatos de quaisquer inconsistências ou erros encontrados são bem-vindos através de *issues* no .

Resultados da Análise de Fourier

Série de Fourier

A série de Fourier de uma função periódica $f(t)$ com período T é uma expansão em termos de funções seno e cosseno que são ortogonais no intervalo $[0, T]$, e é dada por:

$$f(t) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right]$$

onde os coeficientes a_0 , a_n e b_n são calculados como:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (\text{valor médio/componente DC}) \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Estes coeficientes representam a amplitude das frequências no espectro de $f(t)$.

Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma ferramenta matemática fundamental que permite a análise de funções no domínio da frequência.

$$\begin{aligned} F(\omega) &\equiv \mathcal{F}\{f(t)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{equação de análise}) \\ f(t) &\equiv \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (\text{equação de síntese}) \end{aligned}$$

Algumas Identidades do Cálculo Vetorial

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

Rotacional do gradiente de um campo escalar é zero.

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi$$

Divergência do produto escalar por gradiente.

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) = \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi$$

Divergência do produto de gradientes escalares.

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi \nabla \cdot \mathbf{A}$$

Divergência do produto de um escalar por um vetor.

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{A} + \phi \nabla \times \mathbf{A}$$

Rotacional do produto de um escalar por um vetor.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

Divergência do rotacional de um vetor é zero.

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

Divergência do produto vetorial.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

Rotacional do rotacional de um vetor.

Valor Absoluto/Norma

Em matemática, uma *norma* consiste numa função que a cada vetor de um espaço vetorial associa um número real não-negativo. O conceito de norma está intuitivamente relacionado à noção geométrica de comprimento.

Dado um espaço vetorial X sobre o corpo \mathbb{K} dos números reais ou complexos, uma função $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ é definida como norma se, para quaisquer $x, y \in X$ e todo $\alpha \in \mathbb{K}$:

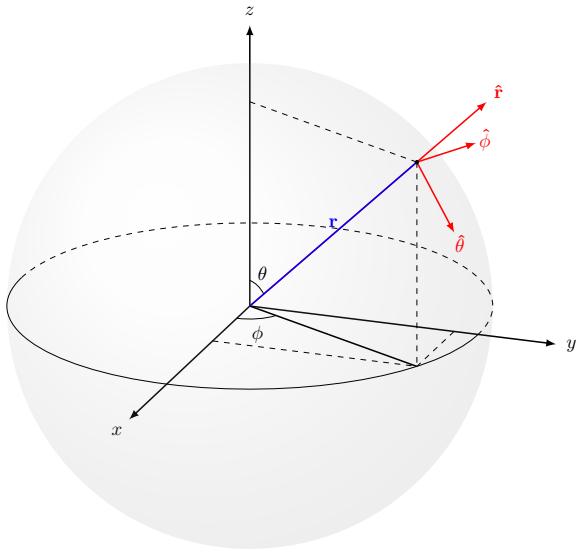
$$\begin{aligned}\|x\| = 0 &\iff x = 0_X && (\text{É definida positiva}) \\ \|\alpha x\| &= |\alpha| \|x\| && (\text{Homogeneidade positiva}) \\ \|xy\| &= \|x\| \|y\| && (\text{É multiplicativa}) \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| && (\text{É subaditiva})\end{aligned}$$

Coordenadas Esféricas

Em problemas de antenas, é conveniente usar coordenadas esféricicas (r, θ, ϕ) , com a origem do sistema de coordenadas tipicamente centrada na antena. Qualquer direção do espaço pode ser identificada com os ângulos (θ, ϕ) . O ângulo θ é o ângulo polar e é medido em relação à direção $+\hat{\mathbf{z}}$. O ângulo ϕ é o ângulo azimutal e é medido em relação à direção $+\hat{\mathbf{x}}$. O intervalo destes ângulos é:

$$0 < \theta < \pi, \quad 0 < \phi < 2\pi.$$

A distância em relação à origem é dada pela coordenada r .



Note-se que $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ dependem do ponto de observação. É possível fixar uma referência (*frame of reference*) associada aos versores $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ em qualquer ponto do espaço.

Estes versores formam uma base do espaço (*right-handed basis*) tal que:

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\theta} \times \hat{\phi}.$$

Onde o vetor unitário $\hat{\mathbf{r}}$ é um vetor radial; o vetor unitário $\hat{\phi}$ está contido no plano horizontal xOy ; o vetor unitário $\hat{\theta}$ está contido no plano vertical gerado por $\hat{\mathbf{r}}$ e por $\hat{\mathbf{z}}$.

As relações resultantes são:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y &= r \sin \theta \sin \phi & \theta &= \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \\ z &= r \cos \theta & \phi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\end{aligned}$$

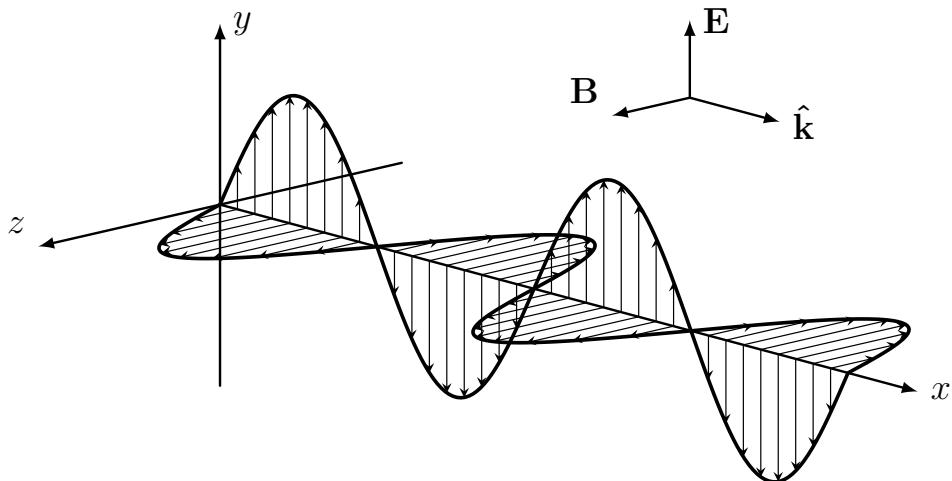
CONTEÚDOS

1 Conceitos Fundamentais	4
1.1 Equações de Maxwell	4
1.1.1 Conservação de Carga	4
1.2 Relações Constitutivas e Meios Materiais	5
1.2.1 Eletrodinâmica Macroscópica	6
1.2.2 Modelos Simples de Dielétricos e Condutores	7
1.2.3 Material Genérico	8
1.3 Ondas Planas	9
1.3.1 Equações de Onda livres de Fontes	9
1.3.2 Regime Harmônico no Tempo	10
1.3.3 Propriedade das Ondas Planas	10
1.3.4 Ondas Planas em Meios sem Perdas	11
1.3.5 Ondas Planas em Meios com Perdas	12
1.3.6 Velocidade de Grupo	15
1.3.7 Polarização das Ondas	16
1.4 Energia Eletromagnética e o Vetor de Poynting	19
1.4.1 Potência injetada	19
1.4.2 Teorema de Poynting	19
1.4.3 Vetor de Poynting em Regimes Harmônicos no Tempo	21
1.4.4 Vetor de Poynting para Ondas Plana	21
1.5 Reflexão e Refração	23
1.5.1 Condições de Fronteira	23
1.5.2 Incidência em Interfaces Planas	24
1.5.3 Polarização das Ondas Refletidas e Transmitidas	26
1.5.4 Reflexão Interna Total	29
1.6 Cheat Sheet (Parte 1)	30
2 Propagação Guiada	31
2.1 Propagação em Linhas de Transmissão	31
2.1.1 Guias de Ondas	31
2.1.2 Modelo Matemático	32
2.1.3 Regime Harmônico no Tempo	33
2.1.4 Impedância de Onda e Coeficiente de Reflexão	36
2.1.5 Interferência de Ondas e Coeficiente de Onda Estacionária	39
2.1.6 Fluxo de Potência nas Linhas de Transmissão	41
2.2 Introdução à Carta de Smith	42
2.2.1 Carta de Smith das Impedâncias	42
2.2.2 Carta de Smith das Admitâncias	47
2.3 Sistemas de Adaptação de Impedâncias	48
2.3.1 Máxima Transferência de Potência	48
2.3.2 Redes de Adaptação	49
2.3.3 Transformador de impedância de quarto de onda	50
2.4 Cheat Sheet (Parte 2)	57

3 Radiação	58
3.1 Dipolo Elétrico e Solução das Equações de Onda	58
3.1.1 Modelo do Dipolo Elétrico	58
3.1.2 Equação de Onda não-homogénea	60
3.1.3 Dipolo de Hertz	62
3.2 Parâmetros Fundamentais das Antenas	64
3.2.1 Campo Distante de uma Antena Genérica	64
3.2.2 Potência Irradiada	65
3.2.3 Ângulo Sólido	66
3.2.4 Intensidade de Radiação e Padrão de Radiação	67
3.2.5 Resistência de Radiação	69
3.2.6 Circuito Equivalente, Impedância de Antena e Eficiência	69
3.2.7 Irradiadores Isotrópicos, Ganho Direcional e Diretividade	71
3.2.8 Ganho de potência	72
3.3 Antenas Lineares de Dipolo	73
3.3.1 Região distante	73
3.3.2 Aproximação Sinusoidal para a Corrente	74
3.3.3 Altura Efetiva e Fator de Padrão	75
3.3.4 Potência e Resistência de Radiação e de Perdas	75
3.3.5 Dipolo Curto	76
3.3.6 Dipolo de Meio Comprimento de Onda	78
3.3.7 Impedância de Entrada	79
3.4 Cheat Sheet (Parte 3)	81
Referências	82

CAPÍTULO 1

CONCEITOS FUNDAMENTAIS



☰ Conteúdos

1.1	Equações de Maxwell	4
1.2	Relações Constitutivas e Meios Materiais	5
1.3	Ondas Planas	9
1.4	Energia Eletromagnética e o Vetor de Poynting	19
1.5	Reflexão e Refração	23
1.6	Cheat Sheet (Parte 1)	30

1.1 Equações de Maxwell

É necessário um conjunto de quatro vetores para descrever os fenómenos do campo eletromagnético:

- o campo elétrico, **E** (unidades: V/m, volt por metro)
- o campo de indução magnética, **B** (unidades: T, tesla)
- o campo de deslocamento elétrico, **D** (unidades: C/m², coulomb por metro quadrado)
- o campo magnético, **H** (unidades: A/m, ampère por metro)

Para fenómenos eletromagnéticos variáveis no tempo consideraram-se as equações de Maxwell:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{(Lei de Indução)} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{ext} & \text{(Lei de Gauss)} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{ext} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \text{(Lei de Ampère com a correção de Maxwell)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{(Lei de Gauss para o magnetismo)} \end{array} \right.$$

As quantidades ρ_{ext} [C/m³] e \mathbf{J}_{ext} [A/m²] representam a densidade de carga volumétrica e a densidade de corrente elétrica (fluxo de carga) de quaisquer cargas externas (ou seja, excluindo quaisquer cargas e correntes de polarização induzidas no meio).

As densidades de carga e corrente, ρ_{ext} e \mathbf{J}_{ext} , podem ser consideradas como as fontes dos campos eletromagnéticos. Em problemas de propagação de ondas, estas densidades estão localizadas no espaço; por exemplo, estão restritas a fluir numa antena. Os campos elétricos e magnéticos gerados são irradiados a partir destas fontes e podem propagar-se para grandes distâncias até às antenas receptoras.

Longe de geradores (*sources*), i.e., em regiões do espaço livres de fontes (*source-free regions*), as equações de Maxwell tomam uma forma mais simples, em que se considera que $\rho_{ext} = 0$ e $\mathbf{J}_{ext} = 0$.

O mecanismo qualitativo pelo qual as equações de Maxwell originam campos eletromagnéticos que se propagam pode ser visualizado com o seguinte exemplo:

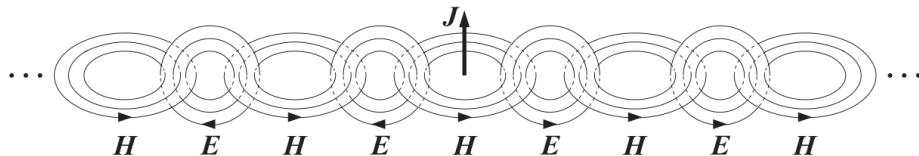


Fig. 1.1: Propagação do campo eletromagnético [1]



Checkpoint 1

Uma corrente **J** que varia no tempo numa antena linear gera um campo magnético **H** circulante e também variável no tempo. Este campo magnético, através da lei de Faraday, origina um campo elétrico **E** circulante, que, segundo a lei de Ampère, gera um campo magnético, e assim por diante. Os campos elétricos e magnéticos interligados propagam-se para longe da fonte de corrente.

1.1.1 Conservação de Carga

Maxwell adicionou o termo da corrente de deslocamento à lei de Ampère para garantir a conservação da carga. De facto, ao tomarmos a divergência de ambos os lados da lei de Ampère e usando a lei de Gauss $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$, obtemos:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J}_{ext} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot \mathbf{J}_{ext} + \frac{\partial \rho_{ext}}{\partial t}$$

Usando a identidade vetorial $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$, obtemos a forma diferencial da lei de conservação da carga:

$$\frac{\partial \rho_{ext}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{ext} = 0$$

(conservação da carga)

1.2 Relações Constitutivas e Meios Materiais

As densidades de fluxo elétrico e magnético, \mathbf{D} e \mathbf{B} , estão relacionadas com as intensidades de campo \mathbf{E} e \mathbf{H} através das chamadas *relações constitutivas*, cuja forma precisa depende do material no qual os campos existem. No vácuo, assumem a sua forma mais simples:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H}\end{aligned}} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} [\text{F/m}] \\ \mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} [\text{H/m}]\end{cases}$$

onde ε_0 e μ_0 são a permitividade e permeabilidade do vácuo, respectivamente.

A partir de ε_0 e μ_0 , podemos definir outras duas constantes, nomeadamente, a velocidade da luz e a impedância característica do vácuo:

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 [\text{m/s}], \quad \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 120\pi [\Omega]}$$

A forma mais simples das relações constitutivas é para dielétricos simples, homogéneos e isotrópicos, e para materiais magnéticos:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}\end{aligned}}$$

Esta relação é tipicamente válida para frequências mais baixas. A permitividade ε e a permeabilidade μ estão relacionadas com as suscetibilidades elétrica e magnética dos materiais, i.e.,

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_0(1 + \chi_e) \\ \mu &= \mu_0(1 + \chi_m)\end{aligned}}$$

As suscetibilidades χ_e e χ_m são medidas das propriedades de polarização elétrica e magnética do material. Por exemplo, temos para a densidade do fluxo elétrico:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0(1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

onde $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ representa a polarização dielétrica do material, isto é, o momento dipolar elétrico médio por unidade de volume. Num material magnético, temos:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) = \mu_0(1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

onde $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ é a magnetização, isto é, o momento magnético médio por unidade de volume. A velocidade da luz no material e a impedância característica são:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

A permitividade e a permeabilidade relativa, e o índice de refração de um material são definidos por:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi_e, \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m, \quad n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$

Podemos relacionar a velocidade da luz e a impedância do material com os correspondentes valores no vácuo:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c_0}{n}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = \eta_0 \frac{\mu_r}{n} = \eta_0 \frac{n}{\varepsilon_r}$$

Para um material não magnético, temos $\mu = \mu_0$ ou $\mu_r = 1$, e a impedância simplifica para $\eta = \eta_0/n$.

De uma forma mais geral, as relações constitutivas podem ser não homogéneas, anisotrópicas, não lineares, dependentes da frequência (dispersivas) ou todas as anteriores.

Em *materiais não homogéneos*, a permitividade depende da localização dentro do material:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

Em *materiais anisotrópicos*, ε depende das direções x, y, z e as relações constitutivas podem ser escritas em forma de matriz (ou tensor):

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

A anisotropia é uma propriedade inerente da estrutura atómica/molecular do dielétrico. Também pode ser causada pela aplicação de campos externos.

Em *materiais não lineares*, ε pode depender da magnitude E do campo elétrico aplicado na forma:

$$\mathbf{D} = \varepsilon(E)\mathbf{E}, \quad \text{onde } \varepsilon(E) = \varepsilon + \varepsilon_2 E^2 + \varepsilon_3 E^3 + \dots$$

Uma consequência típica da não linearidade é causar harmónicas de ordem superior.

Materiais com uma constante dielétrica dependente da frequência, $\varepsilon(\omega)$, são referidos como *dispersivos*. A dependência da frequência surge porque quando um campo elétrico variável no tempo é aplicado, a resposta de polarização do material não pode ser instantânea. Tal resposta dinâmica pode ser descrita pela relação constitutiva convolucional (e causal):

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(t-t')\mathbf{E}(\mathbf{r}, t')dt'$$

que se torna multiplicativa no domínio da frequência:

$$\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\omega)\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$$

Na realidade, todos os materiais são dispersivos. Contudo, $\varepsilon(\omega)$ tipicamente exibe uma forte dependência de ω apenas para certas frequências.

1.2.1 Eletrodinâmica Macroscópica

As densidades ρ_{ext} e \mathbf{J}_{ext} representam as cargas e correntes externas ou livres num meio material. A polarização \mathbf{P} e a magnetização \mathbf{M} podem ser tornadas explícitas nas equações de Maxwell através das relações constitutivas:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

Assim, podemos escrever as equações de Maxwell em termos dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0\mathbf{J}_{ext} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

Identificamos assim as densidades de corrente e carga devido à polarização do material como:

$$\mathbf{J}_{pol} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad \rho_{pol} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

Da mesma forma, a quantidade $\mathbf{J}_{mag} = \nabla \times \mathbf{M}$ pode ser identificada como a corrente de magnetização.

Para um meio dielétrico e condutor (e.g., plasma), acresce-se à lei de Ampère a componente $\mathbf{J}_{cond} = \sigma\mathbf{E}$. As densidades totais de corrente e carga, num meio material genérico, são:

$$\mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J}_{ext} + \mathbf{J}_{cond} + \mathbf{J}_{pol} + \mathbf{J}_{mag} = \mathbf{J}_{ext} + \sigma\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}$$

macro currents

micro currents

$\rho_{tot} = \rho + \rho_{pol} = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P}$

e podem ser considerados como as fontes dos campos.

✓ Checkpoint 2

Estas relações satisfazem as equações de Maxwell macroscópicas,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{ext} + \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

A resposta material (dipolar) está "oculta" nos vetores de polarização e magnetização \mathbf{P} e \mathbf{M} , respectivamente.

1.2.2 Modelos Simples de Dielétricos e Condutores

Um modelo simples para as propriedades dielétricas de um material pode ser obtido considerando o movimento de um eletrão ligado na presença de um campo elétrico aplicado. À medida que o campo elétrico tenta separar o eletrão do núcleo positivamente carregado, cria-se um momento de dipolo elétrico. A média deste momento de dipolo ao longo do volume do material dá origem a um momento de dipolo macroscópico por unidade de volume.

Um modelo simples para a dinâmica do deslocamento \mathbf{r} do eletrão ligado é o seguinte (onde $\ddot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} - k\mathbf{r} - m\Gamma\dot{\mathbf{r}} \quad (\text{modelo Drude-Lorentz})$$

onde assumimos que o campo elétrico está a atuar na direção \mathbf{r} e que existe uma força restauradora tipo-mola devido à ligação do eletrão ao núcleo, e uma força de atrito proporcional à velocidade do eletrão.

A constante da mola k está relacionada à frequência de ressonância da mola pela relação $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, ou $k = m\omega_0^2$. Assim, podemos reescrever a equação como:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \Gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}$$

O termo friccional $\Gamma\dot{\mathbf{r}}$ surge de colisões que tendem a desacelerar o eletrão. O parâmetro Γ é uma medida da taxa de colisões por unidade de tempo, e, portanto, $\tau = 1/\Gamma$ representará o tempo médio entre colisões.

✓ Checkpoint 3

A ideia básica deste modelo é que o campo elétrico aplicado tende a separar cargas positivas de cargas negativas, criando assim um momento de dipolo elétrico. Neste sentido, o modelo contém as características básicas de outros tipos de polarização em materiais.

Meio Dielétrico Dispersivo

O campo elétrico aplicado pode ter qualquer dependência temporal. Em particular, se assumirmos que é sinusoidal com frequência ω , então, a equação modelo terá a solução $\mathbf{r} = \text{Re}\{\underline{\mathbf{r}}e^{j\omega t}\}$, onde o fasor $\underline{\mathbf{r}}$ deve satisfazer:

$$-\omega^2\underline{\mathbf{r}} + j\omega\Gamma\underline{\mathbf{r}} + \omega_0^2\underline{\mathbf{r}} = \frac{e}{m}\underline{\mathbf{E}} \implies \underline{\mathbf{r}} = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma}\underline{\mathbf{E}}$$

Podemos encontrar assim a polarização por unidade de volume no domínio da frequência, $\underline{\mathbf{P}}$. Supondo que existem N dipolos elementares por unidade de volume e admitindo o momento de dipolo elétrico individual $\underline{\mathbf{p}} = e\underline{\mathbf{r}}$, vem:

$$\underline{\mathbf{P}} = N\underline{\mathbf{p}} = Ne\underline{\mathbf{r}} = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma} \underline{\mathbf{E}} \equiv \varepsilon_0\chi_e(\omega)\underline{\mathbf{E}}$$

A densidade do fluxo elétrico será: $\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon_0\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{P}} = \varepsilon_0(1 + \chi_e(\omega))\underline{\mathbf{E}} = \varepsilon(\omega)\underline{\mathbf{E}}$, onde a permitividade efetiva $\varepsilon(\omega)$ é:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma} \right) \quad \text{onde} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}} \quad (\text{frequência de plasma})$$

este modelo para $\varepsilon(\omega)$ é conhecido como um "dielétrico de Lorentz".

! Nota 1

As partes real e imaginária de $\varepsilon(\omega)$ caracterizam as propriedades *refrativas* e *absorventes* do material. Por convenção, definimos a parte imaginária com o sinal negativo (porque usamos a dependência temporal $e^{j\omega t}$):

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega), \quad \text{onde}$$

$$\varepsilon'(\omega) = \text{Re}\{\varepsilon(\omega)\} = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \quad \varepsilon''(\omega) = -\text{Im}\{\varepsilon(\omega)\} = \frac{\varepsilon_0\omega_p^2\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}$$

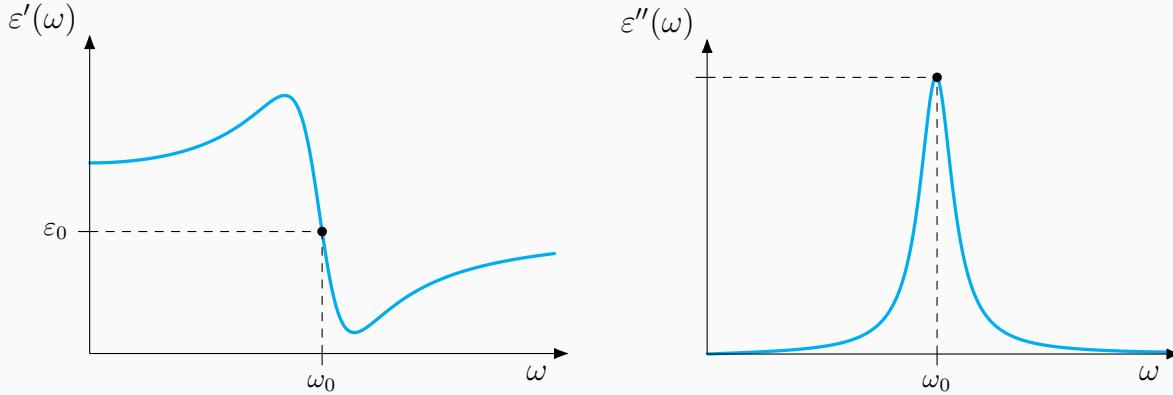


Fig. 1.2: Partes real e imaginária da permitividade efetiva $\varepsilon(\omega)$.

A componente ε' representa a permitividade sem perdas, i.e., $\varepsilon' = \varepsilon_0\varepsilon_r$. ε'' é a componente imaginária da permitividade atribuída às cargas ligadas e relaxamento dipolar, que originam perdas de energia indistinguíveis das perdas devido à condução de cargas.

Meio Condutor Dispersivo

As propriedades de condutividade de um material são descritas pela lei de Ohm. Para derivar esta lei do nosso modelo simples, usamos a relação $\mathbf{J} = \rho\dot{\mathbf{r}}$, onde a densidade de carga de condução é $\rho = Ne$. Consequentemente,

$$\underline{\mathbf{J}} = \rho(j\omega\underline{\mathbf{E}}) = \frac{j\omega Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma} \underline{\mathbf{E}} \equiv \sigma(\omega)\underline{\mathbf{E}}$$

e, portanto, identificamos a condutividade $\sigma(\omega)$:

$$\sigma(\omega) = \frac{j\omega Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma} = \frac{j\omega\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma} \xrightarrow{\omega_0=0} \sigma(\omega) = \frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\Gamma + j\omega} \quad \text{"modelo de Drude"}$$

Notamos que $\sigma(\omega)/j\omega$ é essencialmente a suscetibilidade elétrica considerada anteriormente. De facto, temos $\underline{\mathbf{J}} = j\omega\underline{\mathbf{P}}$, e portanto, $\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{J}}/j\omega = (\sigma(\omega)/j\omega)\underline{\mathbf{E}}$. Segue-se que $\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0 = \sigma(\omega)/j\omega$, e

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma} = \varepsilon_0 + \frac{\sigma(\omega)}{j\omega}$$

1.2.3 Material Genérico

Para descrever um material com ambas as propriedades dielétricas e condutivas, podemos tomar a suscetibilidade como a soma de dois termos, um que descreve as cargas polarizadas ligadas e o outro as cargas de condução livres. Assumindo parâmetros diferentes $\{\omega_0, \omega_p, \Gamma\}$ para cada termo, obtemos a permitividade total:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left[1 + \chi_d(\omega) + \chi_c(\omega) \right] = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0\omega_{dp}^2}{\omega_{d0}^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma_d} + \frac{\varepsilon_0\omega_{cp}^2}{\omega_{c0}^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma_c}$$

Agrupando os dois primeiros termos em $\varepsilon_d(\omega)$ e denotando o terceiro por $\sigma_c(\omega)/j\omega$, obtemos a permitividade efetiva total do material:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_d(\omega) + \frac{\sigma_c(\omega)}{j\omega} \quad (\text{permitividade efetiva total})$$

Checkpoint 4

Semelhante a $\underline{\mathbf{D}}$ e $\underline{\mathbf{E}}$, a indução e o campo magnético estão ligados por uma permeabilidade magnética complexa $\mu(\omega)$ tal que $\underline{\mathbf{B}} = \mu(\omega)\underline{\mathbf{H}}$. Substituindo $\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon(\omega)\underline{\mathbf{E}}$ e $\underline{\mathbf{B}} = \mu(\omega)\underline{\mathbf{H}}$ nas equações macroscópicas de Maxwell, descobre-se que:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu(\omega)\underline{\mathbf{H}}, \quad \nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \mathbf{J}_{ext} + j\omega\varepsilon(\omega)\underline{\mathbf{E}},$$

onde $\varepsilon(\omega)$ é a permitividade complexa equivalente acima, que inclui as contribuições das correntes de condução e das correntes de polarização.

Admitindo $\varepsilon_d(\omega) = \varepsilon'_d(\omega) - j\varepsilon''_d(\omega)$, como visto anteriormente, e assumindo que a condutividade $\sigma_c(\omega)$ é real para a gama de frequências de interesse, podemos definir $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega)$, onde:

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon'_d(\omega), \quad \varepsilon''(\omega) = \varepsilon''_d(\omega) + \frac{\sigma_c(\omega)}{\omega}$$

Uma maneira conveniente de quantificar as perdas é através da tangente de perdas (*loss tangent*) definida em termos das partes real e imaginária da permitividade efetiva:

$$\tan \theta = \frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon'(\omega)} \quad \text{onde } \theta \text{ é o ângulo de perdas.}$$

1.3 Ondas Planas

1.3.1 Equações de Onda livres de Fontes

Para meios isotrópicos padrão (sem dispersão), numa região isenta de fontes onde $\rho = 0$ e $\mathbf{J}_{ext} = 0$, as equações de Maxwell podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -\mu \frac{\partial \underline{\mathbf{H}}}{\partial t} \quad \nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \varepsilon \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}} = 0 \quad \nabla \cdot \underline{\mathbf{H}} = 0 \quad (1.2)$$

As equações diferenciais de primeira ordem podem ser unificadas numa única equação diferencial de segunda ordem, em $\underline{\mathbf{E}}$ ou em $\underline{\mathbf{H}}$. Aplicando o rotacional a (1.1) obtemos:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{E}}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \underline{\mathbf{H}}) \quad (1.3)$$

Por conseguinte, substituindo com a equação par em (1.1), obtemos:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{E}}) = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \quad (1.4)$$

Com recurso à identidade vetorial e admitindo a equação (1.2), é possível reescrever:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{E}}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}) - \nabla^2 \underline{\mathbf{E}} = -\nabla^2 \underline{\mathbf{E}} \quad (1.5)$$

Finalmente obtemos:

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{E}} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{e de forma análoga} \quad \nabla^2 \underline{\mathbf{H}} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{H}}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.6)$$

Nota 2

A equação de onda é de segunda ordem, nas coordenadas temporais e espaciais. Utilizamos ∇^2 para representar o operador *Laplaciano*; podemos, portanto, escrever as equações de (1.6) em cada coordenada do campo.

Uma equação de onda unidimensional genérica tem a forma e solução como se apresenta:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0 \implies \mathbf{u} = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (\text{variação espacial em apenas uma das direções})$$

1.3.2 Regime Harmônico no Tempo

Dado que as equações de Maxwell são equações diferenciais lineares, variações temporais sinusoidais impostas pelo gerador de funções com uma frequência específica produzirão variações sinusoidais de \mathbf{E} e \mathbf{H} com a mesma frequência no estado estacionário.

O campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ em regime harmônico pode ser reescrito em termos da amplitude complexa na forma de fasor $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ na forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\} \quad (1.7)$$

As amplitudes complexas dos campos satisfazem as equações de Maxwell independentes do tempo:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \underline{\mathbf{B}} \quad \nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}}_{ext} + j\omega \underline{\mathbf{D}} \quad (1.8)$$

e por conseguinte

$$\boxed{\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \mu \underline{\mathbf{H}} \quad \nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}}_{ext} + j\varepsilon \omega \underline{\mathbf{E}}} \quad (1.9)$$

1.3.3 Propriedade das Ondas Planas

As ondas planas são a solução mais simples das equações de Maxwell. Por definição, um campo de onda plana é descrito por:

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{-jk\cdot\mathbf{r}} \quad \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}}_0 e^{-jk\cdot\mathbf{r}} \quad (1.10)$$

O termo $e^{-jk\cdot\mathbf{r}}$ é conhecido como fator de propagação, pois determina a variação espacial dos campos. É expresso em termos das coordenadas do ponto de observação $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e em termos do vetor de onda fundamental $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$.

É conveniente escrever o fator de propagação em termos de um vetor unitário $\hat{\mathbf{d}}$ e um fator k denominado número de onda. Em meios isotrópicos, $\hat{\mathbf{d}}$ determina a direção de propagação da onda.

$$\boxed{e^{-jk\cdot\mathbf{r}} = e^{-jk\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}}} \quad (1.11)$$

O comprimento de onda λ é a distância pela qual a fase da onda sinusoidal muda por 2π radianos. Uma vez que o fator de propagação $e^{-jk\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}}$ acumula uma fase de k radianos por metro, temos por definição que $k\lambda = 2\pi$. O comprimento de onda λ pode ser expresso através da frequência da onda em hertz, $f = \omega/2\pi$, como se segue:

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{f}} \quad (1.12)$$

! Nota 3

Se o meio de propagação for o espaço livre, usamos os valores de vácuo dos parâmetros $\{\varepsilon, \mu, c, \eta\}$, ou seja, $\{\varepsilon_0, \mu_0, c_0, \eta_0\}$. O comprimento de onda no espaço livre e o número de onda correspondente são:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{c_0}{f}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c_0} \quad (1.13)$$

Num dielétrico com índice de refração $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$, a velocidade da luz c , o comprimento de onda λ e a impedância característica η são todos reduzidos por um factor de n em comparação com os valores no espaço livre, enquanto que o número de onda k é aumentado por um factor de n :

$$c = \frac{c_0}{n}, \quad \eta = \frac{\eta_0}{n}, \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n}, \quad k = nk_0 \quad (1.14)$$

1.3.4 Ondas Planas em Meios sem Perdas

Em materiais uniformes não dispersivos, com ϵ, μ independentes de $\mathbf{r} = (x, y, z)$. As ondas planas satisfazem as equações de Maxwell sem fonte ($\mathbf{J} = 0$), definidas em (1.9).

A variação no espaço de uma onda plana é controlada pelo fator de propagação $e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$. Assim:

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{\mathbf{E}} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\underline{\mathbf{E}}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\underline{\mathbf{E}}_x, \underline{\mathbf{E}}_y, \underline{\mathbf{E}}_z) = \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{E}}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}_y}{\partial z}, \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}_z}{\partial x}, \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}_x}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (1.15)$$

Recorrendo ao cálculo das derivadas em todas as componentes:

$$-j(E_{0z}k_y - E_{0y}k_z, E_{0x}k_z - E_{0z}k_x, E_{0y}k_x - E_{0x}k_y) \cdot e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (1.16)$$

$\uparrow (k_x, k_y, k_z) \times (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$

Consequentemente,

$$-j\mathbf{k} \times \underline{\mathbf{E}}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -j\mathbf{k} \times \underline{\mathbf{E}} \quad (1.17)$$

É então possível reescrever as equações de Maxwell:

$$\mathbf{k} \times \underline{\mathbf{E}} = \omega\mu\underline{\mathbf{H}} \quad \mathbf{k} \times \underline{\mathbf{H}} = -\omega\varepsilon\underline{\mathbf{E}} \quad (1.18)$$

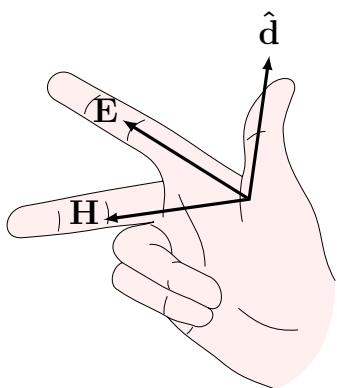


Checkpoint 5

A equação à esquerda implica que $\underline{\mathbf{H}}$ é perpendicular a ambos \mathbf{k} e $\underline{\mathbf{E}}$. Similarmente, a equação à direita mostra que $\underline{\mathbf{E}}$ é perpendicular a ambos \mathbf{k} e $\underline{\mathbf{H}}$. Assim, os três vetores são mutuamente perpendiculares e dizemos que a onda é eletromagnética transversal (*transverse electromagnetic*, TEM). Formalmente podemos escrever:

$$\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{E}} = \mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{H}} = 0 \quad \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{H}} = 0 \quad (1.19)$$

Os vetores $\underline{\mathbf{E}}$, $\underline{\mathbf{H}}$, \mathbf{k} ou, analogamente¹, $\underline{\mathbf{E}}$, $\underline{\mathbf{H}}$, $\hat{\mathbf{d}}$ formam uma base direita do espaço. As oscilações do campo são perpendiculares à direção de propagação.



Substituindo $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = n\omega/c$ em (1.18) e utilizando $k = \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{d}}$, obtemos a seguinte relação explícita entre os campos e a direção de propagação da onda:

$$\underline{\mathbf{H}} = -\frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{d}} \times \underline{\mathbf{E}}, \quad \underline{\mathbf{E}} = \eta \underline{\mathbf{H}} \times \hat{\mathbf{d}} \quad (1.20)$$

O produto vetorial roda efetivamente o campo relevante por 90°.

Nota 4

Esta relação é sempre válida para ondas planas em meios uniformes não dispersivos!

Fig. 1.3: Base direita do espaço.

A ligação entre a frequência angular e o número de onda implica que também existe uma ligação entre os períodos de tempo e espaço da onda. Podemos escrever:

$$\frac{T}{\lambda} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{k} \frac{n}{c} = \lambda \frac{n}{c} \quad (1.21)$$

↑ período temporal
↑ período espacial

¹É conveniente escrever o vetor de onda em termos de um vetor unitário (ou versor) $\hat{\mathbf{d}}$ e um escalar k : $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{d}}$. O escalar k é o número de onda. Em meios isotrópicos padrão, o vetor $\hat{\mathbf{d}}$ determina a direção de propagação da onda. [2]

Exercício 1

Considere uma onda plana que se propaga pelo vácuo, descrita por:

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{jk_0 y}, \quad \text{onde } \underline{\mathbf{E}}_0 = E_0 \hat{\mathbf{x}}$$

Determine o campo magnético da onda no domínio do tempo.

Solução: O campo elétrico instantâneo pode ser calculado através de:

$$\mathbf{E}(y, t) = \operatorname{Re}\{\underline{\mathbf{E}} e^{j\omega t}\} = E_0 \hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t + k_0 y)$$

Por conseguinte, sabemos que a relação explícita entre os campos e a direção de propagação é dada por:

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{\eta_0} \hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{E}$$

Tomando a fórmula do fator de propagação, $e^{-jk_0 \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{d}}}$, é possível escrever:

$$\begin{aligned} -\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{d}} &= y \\ -(x, y, z) \cdot (d_x, d_y, d_z) &= \boxed{-xd_x - yd_y - zd_z} \end{aligned}$$

para qualquer (x, y, z)

Por inspeção direta, sabendo que $\hat{\mathbf{d}}$ é um vedor, obtemos:

$$\begin{cases} d_x = 0 \\ d_y = -1 \\ d_z = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\hat{\mathbf{d}} = -\hat{\mathbf{y}}}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(y, t) &= -\frac{1}{\eta_0} \hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{E}(y, t) \\ &= -\frac{1}{\eta_0} \hat{\mathbf{y}} \times [E_0 \hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t + k_0 y)] \\ &= \boxed{\frac{1}{\eta_0} E_0 \hat{\mathbf{z}} \cos(\omega t + k_0 y)} \end{aligned}$$

■

1.3.5 Ondas Planas em Meios com Perdas

Vimos anteriormente que as perdas de potência podem surgir devido à condução e/ou polarização no material. Uma onda que se propaga num meio com perdas estabelecerá uma corrente de condução e uma corrente de deslocamento (polarização), onde ambas causam perdas óhmicas.

Podemos extender a discussão da secção anterior considerando os resultados obtidos em 1.2.3, nomeadamente:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_d(\omega) + \frac{\sigma_c(\omega)}{j\omega} \quad (1.22)$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \mu(\omega) \underline{\mathbf{H}}, \quad \nabla \times \underline{\mathbf{H}} = j\omega \varepsilon(\omega) \underline{\mathbf{E}} \quad (1.23)$$

para uma região no espaço isenta da contribuição de fontes externas ($\underline{\mathbf{J}}_{ext} = 0$).

É então necessário que se verifiquem as relações:

$$\underline{\mathbf{H}} = -\frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{d}} \times \underline{\mathbf{E}}, \quad \underline{\mathbf{E}} = \eta \underline{\mathbf{H}} \times \hat{\mathbf{d}}, \quad (1.24)$$

que levantam a definição da impedância característica e número de onda para meios dispersivos:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu(\omega)}{\varepsilon(\omega)}} = \sqrt{\frac{\mu(\omega)}{\varepsilon_d(\omega) + \sigma_c(\omega)/j\omega}}, \quad (1.25)$$

$$k = \omega \sqrt{\mu(\omega)\varepsilon(\omega)} = \omega \sqrt{\mu(\omega) \left[\varepsilon_d(\omega) + \frac{\sigma_c(\omega)}{j\omega} \right]} \quad (1.26)$$

Assim, os campos de uma onda plana são

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{-\gamma \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}}, \quad \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}}_0 e^{-\gamma \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}}, \quad (1.27)$$

onde se define a *constante de propagação* complexa $\gamma = jk = \alpha + j\beta$.

Da constante de propagação γ destacam-se os parâmetros α e β , conhecidos como constante de atenuação e constante de fase, respectivamente, ambos em unidades de m^{-1} .

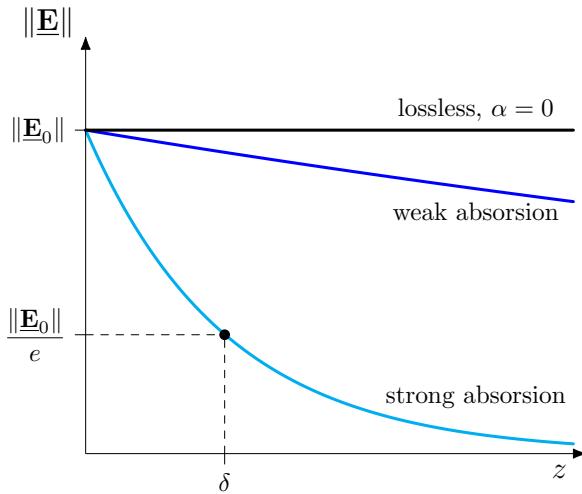


Fig. 1.4: Amplitude máxima de oscilação em função da distância de propagação [2]. Escolheu-se z para o exemplo.

O módulo da amplitude máxima de oscilação decai exponencialmente com a distância de propagação. Isto segue da definição em (1.27), onde $\underline{\mathbf{E}}_0$ é multiplicado pelos fatores

$$e^{-\alpha \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}} \text{ (regime exponencial)}, \quad e^{-j\beta \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}} \text{ (regime sinusoidal).}$$

O módulo $\|\underline{\mathbf{E}}\|$ é obtido por:

$$\|\underline{\mathbf{E}}_0\| e^{-\alpha \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}} \quad (1.28)$$

Definimos a *profundidade de penetração (skin depth)* como:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \quad (1.29)$$

A profundidade de penetração fornece uma estimativa aproximada da distância que uma onda pode penetrar dentro de um meio material antes de ser praticamente absorvida (i.e., decaia para $\sim 37\%$ da amplitude original).

Exercício 2

Para a frequência de oscilação de 1MHz, um material é caracterizado pela permitividade relativa $\varepsilon_r = 2.5$, pela permeabilidade relativa $\mu_r = 1$, e pela condutividade $\sigma = 4 \times 10^{-5}$.

Determine: a) a tangente de perdas, b) a constante de atenuação, c) a constante de fase.

Solução: A tangente de perdas é definida em termos das partes real e imaginária da permitividade efetiva:

$$\tan \theta = \frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon'(\omega)} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon'(\omega) = \varepsilon'_d(\omega) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \\ \varepsilon''(\omega) = \varepsilon''_d(\omega) + \frac{\sigma_c(\omega)}{\omega} = \frac{\sigma_c(\omega)}{\omega} \end{cases}$$

↑ Omitimos a componente da polarização

Assim,

$$\boxed{\tan \theta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r} = 0.288}$$

Ainda, $\gamma = jk = \alpha + j\beta$, logo:

$$k = \omega \sqrt{\mu(\omega)\varepsilon(\omega)} = \sqrt{\mu(\omega)\varepsilon'_d(\omega)} \cdot \sqrt{1 - j \tan \theta} = 0.0334 - j4.7 \times 10^{-3} [\text{m}^{-1}]$$

$$\gamma = jk = 4.7 \times 10^{-3} + j0.0334$$

↑ $\alpha + j\beta$, respectivamente

Bons condutores e Bons Dielétricos

Consideremos a dispersão de $\varepsilon(\omega)$ e $\mu(\omega)$ negligenciável de forma a podermos escrever a constante de propagação e a impedância intrínseca da onda da seguinte forma:

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu \left(\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \right)} = j\omega \sqrt{\mu \varepsilon} \sqrt{1 + \frac{\sigma}{j\omega \varepsilon}} \quad (1.30)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma}{j\omega \varepsilon}}} \quad (1.31)$$

↑
Tanto a impedância quanto a constante de propagação
são governadas pelo parâmetro $\sqrt{1 + \frac{\sigma}{j\omega \varepsilon}}$

- Caso $\sigma = 0$ o material torna-se não dispersivo e é dito *dieletrico perfeito*.
- Caso $\sigma \neq 0$ mas $\sigma/\omega\varepsilon \ll 1$ o material é dito *bom dielétrico*. (1.30) e (1.31) podem ser escritas como

$$\gamma_{\text{good dielectric}} \approx \left[\frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} + j \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \right] \quad \eta_{\text{good dielectric}} \approx \left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon} \right) \right] \quad (1.32)$$

- Caso $\sigma/\omega\varepsilon \gg 1$ o material é dito *bom condutor* e:

$$\gamma_{\text{good conductor}} \approx \left[\sqrt{\frac{\sigma \omega \mu}{2}} (1 + j) \right] \quad \eta_{\text{good conductor}} \approx \left[\sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} (1 + j) \right] \quad (1.33)$$

Exercício 3

Um forno de micro-ondas trabalha à frequência de 2.5GHz. Nesta frequência um bife de lombo tem a permissividade complexa $30(1 - j0.3)\varepsilon_0$.

- Qual o comprimento das micro-ondas no bife?
- Qual a profundidade de penetração (pelicular) das micro-ondas no bife?
- Se o bife é colocado num prato de plástico com $\varepsilon = (1.1 - j2 \times 10^{-4})\varepsilon_0$ e espessura 3mm, explique como este procedimento afeta o aquecimento do bife pelas micro-ondas.

Solução: Admitimos que:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad \beta = \text{Re}\{k\}$$

Por sua vez, recorrendo ao cálculo de k , para o qual $k = \beta - j\alpha$ (por definição)

$$k = \omega \sqrt{\mu(\omega)\varepsilon(\omega)} = \omega \sqrt{\mu_0 \cdot 30(1 - j0.3)\varepsilon_0} = 289.89 - j42.55$$

Finalmente:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 21.67 \text{ mm}$$

A profundida de penetração é dada por:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = 2.35 \text{ cm}$$

Assumindo agora que $\varepsilon = (1.1 - j2 \times 10^{-4})\varepsilon_0$ admitimos que

$$\tan \theta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{2 \times 10^{-3}}{1.1} \ll 1 \quad (\text{bom dielétrico}) \rightarrow \begin{cases} \gamma \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} + j \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \\ \delta = \frac{1}{\alpha} = 200 \text{ m} \end{cases}$$

Como o prato possui apenas 3 mm e $\delta = 200\text{m}$. A dissipação de energia é negligenciável, i.e., há baixa absorção/reflexão de energia pelo prato. O procedimento não afeta significativamente o aquecimento do bife.

1.3.6 Velocidade de Grupo

Na propagação de ondas eletromagnéticas, a velocidade de grupo desempenha um papel preponderante na determinação da rapidez com que a energia de uma onda se propaga através de um meio. Contrariamente à velocidade de fase, que se refere à velocidade a que se propaga a fase de uma onda, a velocidade de grupo está intimamente ligada à propagação do envelope do pulso eletromagnético.

Dedução

Consideremos uma onda eletromagnética descrita por uma função de onda real, em que a relação entre a frequência angular (ω) e o número de onda (β) é dada pela relação de dispersão do meio. Para um pulso composto por um grupo de ondas de várias frequências, a velocidade de fase e de grupo podem ser expressas como:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\beta} \quad (\text{velocidade de fase}) \quad (1.34)$$

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (\text{velocidade de grupo}) \quad (1.35)$$

Para deduzir a fórmula da velocidade de grupo, começamos pela representação geral de uma onda modulada em amplitude,

$$E_{in}(t) = E_0(t) \cos(\omega_c t), \quad (1.36)$$

onde a amplitude de valor real $E_0(t)$ (a envolvente) varia lentamente no tempo e contém a informação do sinal, e ω_c é a frequência angular da portadora.

Supondo que este sinal se propaga uma distância z dentro de um material dispersivo podemos obter $E_{out}(t)$ escrevendo o sinal de entrada como:

$$E_{in}(t) = \text{Re}\{E_{in,C}(t)\}, \text{ com } E_{in,C}(t) = E_0(t)e^{j\omega_c t}. \quad (1.37)$$

Podemos escrever a transformada de Fourier de $E_{in,C}(t)$ em termos da transformada de Fourier de $E_0(t)$ como $E_{in,C}(\omega) = E_0(\omega - \omega_c)$. Deduzimos, portanto, que o espectro de $E_{in,C}(t)$ está centrado na frequência da portadora.

Após a propagação por uma distância z no meio, o sinal de saída, para a excitação complexa $E_{in,C}(t)$, é regido pelo fator de propagação do material:

$$E_{out,C}(\omega) = e^{-\gamma(\omega)z} E_{in,C}(\omega) = e^{-\alpha(\omega)z} e^{-j\beta(\omega)z} E_{in,C}(\omega), \quad (1.38)$$

onde $\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$ é a constante de propagação complexa do material.

Uma vez que o espectro $E_{in,C}(\omega)$ está centrado na frequência da portadora $\omega = \omega_c$, podemos definir

$$\alpha(\omega) \approx \alpha(\omega_c), \quad \text{e} \quad \beta(\omega) \approx \beta(\omega_c) + (\omega - \omega_c) \frac{d\beta}{d\omega} \Big|_{\omega_c}.$$

Utilizamos uma aproximação de ordem zero para a constante de atenuação e uma aproximação de Taylor de primeira ordem para a constante de fase, o que é justificado pelo facto de o parâmetro β controlar o tempo de propagação.

Regressando ao domínio do tempo ao aplicar a transformada inversa de Fourier, o resultado é:

$$E_{out,C}(t) = e^{-\alpha_c z} e^{-j(\beta_c z - \omega_c t)} E_0\left(t - \frac{z}{v_g}\right) \implies E_{out}(t) = e^{-\alpha_c z} \cos(\omega_c t - \beta_c z) E_0\left(t - \frac{z}{v_g}\right) \quad (1.39)$$

com as notações abreviadas $\alpha_c = \alpha(\omega_c)$ e $\beta_c = \beta(\omega_c)$, e onde o parâmetro

$$v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{d\omega}{d\beta}$$

é conhecido como a velocidade de grupo.

Esta equação confirma que a forma do pulso de entrada se altera com a distância de propagação. De facto, $E_{out}(t)$ não é simplesmente uma versão atenuada e com atraso temporal do campo de entrada $E_{in}(t)$. Isto deve-se ao facto de que a portadora $\cos(\omega_c t - \beta_c z)$ é controlada pela velocidade de fase e não pela velocidade de grupo.

1.3.7 Polarização das Ondas

Uma oscilação do campo eletromagnético não é totalmente determinada pela amplitude do campo. Devido à natureza vetorial do campo, existe um grau de liberdade adicional relacionado com a direção do espaço ao longo da qual o campo oscila. Este grau de liberdade é conhecido como a *polarização do campo*.

A curva fechada determinada pela evolução temporal de $\mathbf{E}(t) = \text{Re}\{\underline{\mathbf{E}}e^{j\omega t}\}$, num ciclo completo de tempo (com período $T = 2\pi/\omega$) é a *curva de polarização*. É simples demonstrar que a curva de polarização é sempre planar, uma vez que está no plano gerado pelos vetores ortogonais $\mathbf{E}' = \text{Re}\{\underline{\mathbf{E}}\}$ e $\mathbf{E}'' = \text{Im}\{\underline{\mathbf{E}}\}$.

As propriedades de polarização da onda plana são determinadas pelas magnitudes relativas e fases das constantes complexas \underline{A} e \underline{B} . Escrevendo-as nas suas formas polares $\underline{A} = Ae^{j\phi_A}$ e $\underline{B} = Be^{j\phi_B}$, onde A e B são magnitudes positivas, obtemos:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}} &= (\underline{A}\hat{\mathbf{y}} + \underline{B}\hat{\mathbf{x}})e^{-jkz} \\ &= [Ae^{j\phi_A}\hat{\mathbf{y}} + Be^{j\phi_B}\hat{\mathbf{x}}]e^{-jkz}\end{aligned}\quad (1.40)$$

Extraindo a parte real e definindo $\mathbf{E}(z, t) = \text{Re}\{\underline{\mathbf{E}}e^{j\omega t}\} = E_x(z, t)\hat{\mathbf{x}} + E_y(z, t)\hat{\mathbf{y}}$, encontramos as componentes reais em x e y :

$$\begin{aligned}E_y(z, t) &= A \cos(\omega t - kz + \phi_A) \\ E_x(z, t) &= B \cos(\omega t - kz + \phi_B)\end{aligned}\quad (1.41)$$

Para determinar a polarização da onda, consideramos a dependência temporal destes campos num ponto fixo ao longo do eixo z , digamos em $z = 0$:

$$\begin{aligned}E_y(t) &= A \cos(\omega t + \phi_A) \\ E_x(t) &= B \cos(\omega t + \phi_B)\end{aligned}\quad (1.42)$$

Definimos a fase relativa $\phi = \phi_A - \phi_B$. Após alguma manipulação algébrica obtemos uma equação quadrática para as componentes E_x e E_y , que descreve uma elipse no plano E_x, E_y :

$$\left(\frac{E_y(t)}{B}\right)^2 \sin^2 \phi_A + \left(\frac{E_x(t)}{A}\right)^2 \sin^2 \phi_B - 2 \cos \phi \frac{E_x(t)E_y(t)}{AB} = \sin^2 \phi \quad (1.43)$$

A trajetória do campo obtém-se através da omissão de t . A expressão é simplificada para

$$\frac{E_x^2}{A^2} + \frac{E_y^2}{B^2} - 2 \cos \phi \frac{E_x E_y}{AB} = \sin^2 \phi \quad (1.44)$$

↑ Elipse de polarização



Checkpoint 6

Dependendo dos valores das três quantidades A, B, ϕ , esta elipse de polarização pode ser uma elipse, um círculo ou uma linha reta.

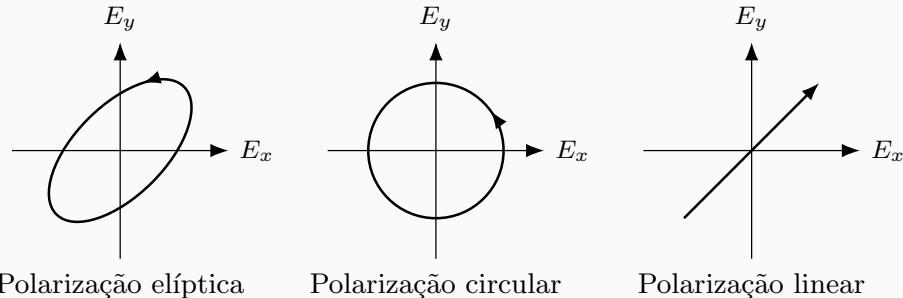


Fig. 1.5: Tipos de polarização.

Para obter a *polarização linear*, definimos $\phi = 0$ ou $\phi = \pi$, o que corresponde a $\phi_A = \phi_B = 0$ ou $\phi_A = 0, \phi_B = -\pi$, de modo que as amplitudes dos fasores sejam $\underline{E}_0 = \hat{\mathbf{y}}A \pm \hat{\mathbf{x}}B$. A Eq. (1.44) degenera em:

$$\frac{E_x^2}{B^2} + \frac{E_y^2}{A^2} \pm \frac{2E_x E_y}{AB} = 0 \rightarrow \left(\frac{E_x}{B} + \frac{E_y}{A} \right)^2 = 0 \quad (1.45)$$

e consequentemente,

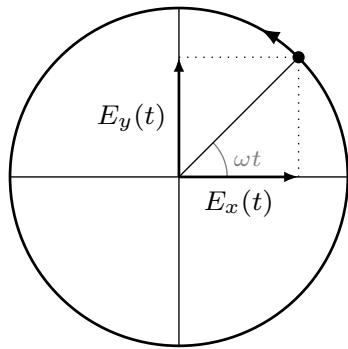
$$E_y = \pm \frac{A}{B} E_x \quad (1.46)$$

↑ reta de declive $\pm B/A$

Para obter *polarização circular*, definimos $A = B = R$ e $\phi = \pm\pi/2$. Neste caso, a elipse de polarização torna-se a equação de uma circunferência:

$$\frac{E_x^2}{B^2} + \frac{E_y^2}{A^2} = 1 \implies E_x^2 + E_y^2 = R^2 \quad (1.47)$$

O sentido de rotação, em conjunto com a direção de propagação, define a polarização circular à esquerda/direita. Para o caso, $\phi_a = -\pi/2$ e $\phi_b = 0$, temos $\phi = \phi_a - \phi_b = -\pi/2$ e amplitude complexa $\underline{E}_0 = A(\hat{\mathbf{x}} - j\hat{\mathbf{y}})$.



Então,

$$E_x(t) = A \cos(\omega t)$$

$$E_y(t) = A \cos(\omega t - \pi/2) = A \sin(\omega t)$$

Para determinar o sentido de rotação recorremos à evolução temporal do campo elétrico na curva de polarização. Calculando $\mathbf{E}(t=0)$ e $\mathbf{E}(t=0^+)$:

$$t=0 : \begin{cases} E_x(0) = A \\ E_y(0) = 0 \end{cases} \quad t=0^+ : \begin{cases} E_x(0^+) \approx A \\ E_y(0^+) \approx 0^+ \end{cases}$$

O campo gira no sentido anti-horário no plano xy .

Fig. 1.6: Polarização circular.

! Nota 5

Para decidir se a polarização circular é à direita ou à esquerda, usamos a convenção da IEEE [3]:

- Enrolar os dedos da mão esquerda e direita em punho e apontar ambos os polegares na direção de propagação.
- Se os dedos da mão direita (esquerda) enrolam na direção de rotação do campo elétrico, então a polarização é à direita (esquerda).

Portanto, neste exemplo, como o campo se move na direção de z e gira no sentido anti-horário, a polarização será à direita.

Caso $A \neq B$ e $\phi = \pm\pi/2$, obtemos uma *polarização elíptica*². A Eq. (1.44) será agora:

$$\frac{E_x^2}{B^2} + \frac{E_y^2}{A^2} = 1 \quad (1.48)$$

Rácio de Polarização

Em resumo, definindo a amplitude complexa $\underline{E} = \underline{E}_1 \hat{\mathbf{u}}_1 + \underline{E}_2 \hat{\mathbf{u}}_2$, tal que o par de versores $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2)$ forme uma base ortogonal do plano perpendicular à direção de propagação $\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{u}}_1 \times \hat{\mathbf{u}}_2$, podemos estabelecer o *rácio de polarização*:

$$p = \frac{E_2}{E_1} \equiv |p|e^{j\phi} \quad (1.49)$$

²A análise da orientação da polarização é análoga à da polarização circular.

Checkpoint 7

A amplitude $|p|$ e a fase ϕ da razão de polarização determinam completamente a polarização da onda de acordo com as seguintes regras:

- Se $\phi = \pm\pi/2$ e $|p| = 1$, a onda tem polarização circular.
- Se $\phi = 0$ ou $\phi = \pi$ ou $|p| = 0$ ou $|p| = \infty$, a onda tem polarização linear.
- Se nenhuma das condições acima se verifica, então o estado de polarização é elíptico.

Além disto, o ângulo ϕ controla o sentido de rotação, de modo que para $0 < \phi < \pi$ a onda está polarizada para a esquerda, enquanto para $-\pi < \phi < 0$ a onda está polarizada para a direita. É de sublinhar que este resultado só é válido quando a direção de propagação é $\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{u}}_1 \times \hat{\mathbf{u}}_2$.

A mesma análise poderá ser feita com o campo \mathbf{H} , naturalmente.

Exercício 4

O fasor do campo magnético associado a uma onda plana e uniforme é dado por:

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{10^{-3}}{120\pi} (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{j}\hat{\mathbf{y}}) e^{jky}$$

- Determine o estado de polarização da onda.
- Diga qual o sentido de rotação.
- Esboce a curva de polarização.

Solução: Extraindo a parte real e definindo $\mathbf{H}(y, t) = \text{Re}\{\underline{\mathbf{H}} e^{j\omega t}\} = H_x(y, t)\hat{\mathbf{x}} + H_z(y, t)\hat{\mathbf{z}}$, encontramos as componentes reais em x e y :

$$\begin{aligned} H_z(y, t) &= \frac{10^{-3}}{120\pi} \cos(\omega t + ky - \pi/2) \\ H_x(y, t) &= \frac{10^{-3}}{120\pi} \cos(\omega t + ky) \end{aligned} \quad (1.50)$$

Para determinar a polarização da onda, consideramos a dependência temporal do campo num ponto fixo ao longo do eixo y , digamos em $y = 0$:

$$\begin{aligned} H_z(t) &= \frac{10^{-3}}{120\pi} \cos(\omega t - \pi/2) = \frac{10^{-3}}{120\pi} \sin(\omega t) \\ H_x(t) &= \frac{10^{-3}}{120\pi} \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (1.51)$$

Como $\phi = 0 - (-\pi/2) = \pi/2$ a equação de polarização é dada por:

$$H_x^2 + H_z^2 = 10^{-6}/(120\pi)^2 \quad (\text{Polarização circular})$$

Para determinar o sentido de rotação recorremos à evolução temporal do campo elétrico na curva de polarização. Calculando $\mathbf{H}(t = 0)$ e $\mathbf{H}(t = 0^+)$:

$$t = 0 : \begin{cases} H_x(0) = \frac{10^{-3}}{120\pi} \\ H_z(0) = 0 \end{cases} \quad t = 0^+ : \begin{cases} H_x(0^+) \approx \frac{10^{-3}}{120\pi} \\ H_z(0^+) \approx 0^+ \end{cases}$$

O campo gira no sentido anti-horário no plano xz . A polarização é à direita por congruência com a regra da mão direita (nomeadamente, os dedos da mão direita enrolam na direção de rotação do campo magnético, com o polegar a apontar na direção de propagação).

1.4 Energia Eletromagnética e o Vetor de Poynting

As ondas eletromagnéticas transportam potência eletromagnética. A energia é transportada através do espaço até pontos recetores distantes por meio de ondas eletromagnéticas.

Consideremos um volume V delimitado pela sua superfície de fronteira Σ . A região dentro de V contém materiais arbitrários. O volume poderá conter fontes de campo modeladas por uma densidade de corrente externa \mathbf{J} . Definiremos \mathcal{E}_{EM} como a energia armazenada no campo eletromagnético no volume V e no instante t :

$$\frac{d\mathcal{E}_{EM}}{dt} = \mathcal{P}_{ext} - \mathcal{P}_{dis} - \mathcal{P}_\Sigma \quad (1.52)$$

- \mathcal{P}_{ext} descreve a potência injetada no volume V (contribui para o aumento de energia em V).
- \mathcal{P}_{dis} descreve a energia dissipada (por unidade de tempo) nos materiais na forma de calor.
- \mathcal{P}_Σ descreve o fluxo de potência de V para o exterior através da fronteira Σ (caso positivo [negativo], existe um fluxo de energia a sair do [entrar no] volume V).

1.4.1 Potência injetada

Consideremos agora uma carga pontual com velocidade \mathbf{v} . Na presença de um campo, a partícula está sujeita à força de Lorentz $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. A potência instantânea transferida do campo para a carga é dada por³ $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$:

$$\mathcal{P}_{\text{field} \rightarrow \text{charge}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (1.53)$$

Admitindo um volume dV na região fonte, a carga total dentro de dV será dada por $dQ = \rho_{ext} dV$ onde ρ_{ext} é a densidade de carga. A potência transferida das cargas em dV para o campo é:

$$d\mathcal{P}_{\text{charge in } dV \rightarrow \text{field}} = -dQ \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = -dV \mathbf{E} \cdot \underbrace{\rho_{ext} \mathbf{v}}_{\text{densidade de corrente}} \quad (1.54)$$

A densidade de corrente e a densidade de carga relacionam-se mediante $\mathbf{J}_{ext} = \rho_{ext} \mathbf{v}$; é então possível reescrever (1.54) de modo a que $d\mathcal{P}_{ext} = -dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{ext}$. A potência total transferida das fontes externas para o campo é:

$$\mathcal{P}_{\text{charge in } dV \rightarrow \text{field}} \equiv \mathcal{P}_{ext} = - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{ext} dV \quad (1.55)$$

1.4.2 Teorema de Poynting

Para obter a lei de conservação de energia é necessário avaliar a divergência de $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Este vetor é denominado por *vetor de Poynting* (letra \mathbf{S}), e é representado em unidades de [W/m^2].

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1.56)$$

Recorrendo às equações de Maxwell macroscópicas, e assumindo materiais não dispersivos (para os quais μ e ϵ são independentes da frequência),

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.57)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{ext} + \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.58)$$

e à seguinte identidade vetorial:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (1.59)$$

É possível obter:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mu \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) - \epsilon \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{ext} - \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \quad (1.60)$$

³O campo magnético não contribui para a potência porque a força magnética é sempre perpendicular à velocidade da partícula.

Subsequentemente, recorrendo à regra da cadeia para a derivada,

$$\mu \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H}^2), \quad \varepsilon \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}^2) \quad (1.61)$$

A equação (1.60) pode então ser escrita como

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 \right) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{ext} - \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \quad (1.62)$$

↑ density of electromagnetic energy, W_{EM}

A forma integral da equação acima é obtida integrando ambos os lados sobre o volume de interesse:

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 \right) dV + \mathcal{P}_{ext} - \int_V \sigma (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) dV \quad (1.63)$$

Finalmente, recorrendo ao teorema da divergência, de modo a transformar o integral de volume num integral sobre a fronteira da superfície:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV = \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (1.64)$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário normal à superfície e direcionado para o exterior de V . Combinando as duas últimas equações, obtemos o *teorema de Poynting*:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_V W_{EM} dV = \mathcal{P}_{ext} - \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA - \int_V \sigma (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) dV} \quad (1.65)$$



Checkpoint 8

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V W_{EM} dV = \mathcal{P}_{ext} - \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA - \mathcal{P}_{dis}$$

electromagnetic field energy

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{EM}}{\partial t} = \mathcal{P}_{ext} - \mathcal{P}_{\Sigma} - \mathcal{P}_{dis}$$

net power flowing through the boundary

O *teorema de Poynting* afirma que a potência total que flui para *dentro* de uma superfície fechada em qualquer instante de tempo é igual à soma das taxas de aumento das energias elétrica e magnética armazenadas e da potência injetada dentro do volume fechado. Caso se contabilizasse a energia dissipada, teríamos ainda o fator:

$$\mathcal{P}_{dis} = \int_V \sigma (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) dV \quad (\text{perdas em forma de calor devido a correntes de condução})$$



Nota 6

\mathbf{S} determina o fluxo de energia eletromagnética no espaço. Quando \mathbf{S} é uniforme e perpendicular à superfície, a potência que atravessa a superfície Σ é dada por:

$$P_{\Sigma} = \|\mathbf{S}\| \cdot A$$

sendo A a área da superfície.

1.4.3 Vetor de Poynting em Regimes Harmónicos no Tempo

Admitindo uma excitação harmónica no tempo, o campo elétrico pode ser expresso como:

$$\underline{\mathbf{E}} = \operatorname{Re}\{\underline{\mathbf{E}}e^{j\omega t}\} = \frac{1}{2}[\underline{\mathbf{E}}e^{j\omega t} + \underline{\mathbf{E}}^*e^{-\omega t}] \quad (1.66)$$

Analogamente para o campo magnético:

$$\underline{\mathbf{H}} = \operatorname{Re}\{\underline{\mathbf{H}}e^{j\omega t}\} = \frac{1}{2}[\underline{\mathbf{H}}e^{j\omega t} + \underline{\mathbf{H}}^*e^{-\omega t}] \quad (1.67)$$

Consequentemente o vetor de Poynting é dado por:

$$\mathbf{S} = \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{4}[\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* + \underline{\mathbf{E}}^* \times \underline{\mathbf{H}}] + \frac{1}{4}[\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}e^{j2\omega t} + \underline{\mathbf{E}}^* \times \underline{\mathbf{H}}^*e^{-j2\omega t}] \quad (1.68)$$

O vetor de Poynting médio é obtido através da sua integração ao longo de um período de oscilação.

$$\mathbf{S}_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}(t) dt = \frac{1}{4}[\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* + \underline{\mathbf{E}}^* \times \underline{\mathbf{H}}] \quad (1.69)$$

↑ parcela independente do tempo,
não afetada pela integração

que também pode ser escrito como:

$$\mathbf{S}_{av} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*\} \quad (1.70)$$

O vetor de Poynting médio determina o fluxo de potência média. Assim, a potência média no tempo que atravessa uma certa superfície Σ é dada por:

$$\mathcal{P}_{\Sigma,av} = \int_{\Sigma} (\mathbf{S}_{av} \cdot \hat{\mathbf{n}}) d\mathbf{A}. \quad (1.71)$$

1.4.4 Vetor de Poynting para Ondas Plana

Para uma onda plana eletromagnética num meio isotrópico, temos:

$$\underline{\mathbf{E}} = \eta \underline{\mathbf{H}} \times \hat{\mathbf{d}}, \quad \underline{\mathbf{H}} = -\frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{d}} \times \underline{\mathbf{E}}. \quad (1.72)$$

Assim, o vetor de Poynting médio (densidade de potência) pode ser expresso como:

$$\mathbf{S}_{av} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ \underline{\mathbf{E}} \times \left[-\frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{d}} \times \underline{\mathbf{E}}^* \right] \right\}. \quad (1.73)$$

Usando a identidade vetorial $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ e recordando que o campo é transversal $\underline{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{d}} = 0$, descobre-se que

$$\mathbf{S}_{av} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ \hat{\mathbf{d}} \frac{1}{\eta^*} \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{E}}^* \right\}, \quad (1.74)$$

o que também pode ser expresso como:

$$\mathbf{S}_{av} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ \frac{1}{\eta} \right\} \|\underline{\mathbf{E}}\|^2 \hat{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\eta\} \|\underline{\mathbf{H}}\|^2 \hat{\mathbf{d}} \quad (1.75)$$

Admitimos que $\operatorname{Re}\left\{ \frac{1}{\eta^*} \right\} = \operatorname{Re}\left\{ \frac{1}{\eta} \right\}$. A segunda identidade é uma consequência da relação $|\underline{\mathbf{E}}| = |\eta| |\underline{\mathbf{H}}|$. Para materiais sem perdas, a impedância intrínseca é real e, portanto, o vetor de Poynting pode ser expresso como:

$$\mathbf{S}_{av} = \frac{1}{2} \frac{1}{\eta} \|\underline{\mathbf{E}}\|^2 \hat{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} \eta \|\underline{\mathbf{H}}\|^2 \hat{\mathbf{d}}. \quad (\text{materiais sem perdas}). \quad (1.76)$$

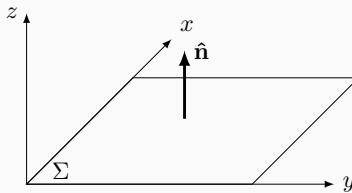
O vetor de Poynting está alinhado com $\hat{\mathbf{d}}$. Assim, em materiais isotrópicos, a energia flui na direção de propagação da onda.

Exercício 5

Considere a onda plana descrita pelo fasor:

$$\underline{\mathbf{E}} = E_0 \hat{\mathbf{y}} e^{-jk_0 z}$$

- a) Determine \mathbf{S} e \mathbf{S}_{av}
 b) Se $E_0 = 1\text{V/m}$ determine a potência média que atravessa a superfície na figura abaixo:



Solução: Reconhecemos que:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

O campo elétrico instantâneo pode ser calculado através de:

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re}\{\underline{\mathbf{E}} e^{j\omega t}\} = E_0 \hat{\mathbf{y}} \cos(\omega t - k_0 z)$$

e o campo magnético por:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta_0} \hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{E} = \frac{E_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} \cos(\omega t - k_0 z)$$

Por inspeção do fasor do campo elétrico, $\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{z}}$

$$= \left[-\frac{E_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t - k_0 z) \right]$$

↑
Válido para meios sem perdas

Finalmente,

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= -\frac{E_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t - k_0 z) \times E_0 \hat{\mathbf{y}} \cos(\omega t - k_0 z) \\ &= \boxed{-\frac{E_0^2}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \cos^2(\omega t - k_0 z)} \end{aligned}$$

O cálculo de \mathbf{S}_{av} resulta em:

$$\mathbf{S}_{av} = \frac{1}{2} \frac{1}{\eta_0} |\underline{\mathbf{E}}|^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\eta_0} |E_0|^2$$

↑ 120π

Por fim, a potência média que atravessa a superfície é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\Sigma,av} &= \int_{\Sigma} (\mathbf{S}_{av} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA = \|\mathbf{S}_{av}\| \cdot A \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\eta_0} |E_0|^2 \cdot A = \boxed{1.33 \text{ mW}} \end{aligned}$$

Tal como explicitado na Nota 6, sendo \mathbf{S} uniforme e perpendicular à superfície, o cálculo da potência média degenera no produto da norma do \mathbf{S}_{av} com a área da superfície.

1.5 Reflexão e Refração

1.5.1 Condições de Fronteira

As condições de fronteira para os campos eletromagnéticos na interação entre dois meios materiais são dadas abaixo:

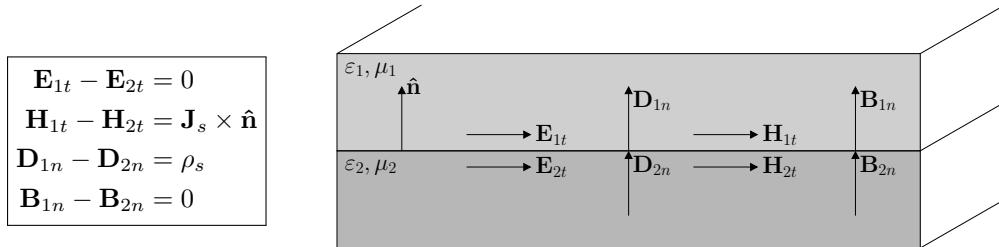


Fig. 1.7: Condições de fronteira entre dois meios materiais

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário normal à fronteira (ou interface), que aponta do meio-2 para o meio-1.

As quantidades ρ_s , \mathbf{J}_s são quaisquer *cargas de superfície externas* e *densidades de corrente de superfície* na superfície de fronteira e são medidas em unidades de $[C/m^2]$ e $[A/m]$.

Cada vetor pode ser decomposto como a soma de uma parte tangencial à superfície e uma parte perpendicular a ela, isto é, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_n$. Utilizando a identidade vetorial,

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) + \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}) = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_n$$

identificamos estas duas partes como:

$$\mathbf{E}_t = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}), \quad \mathbf{E}_n = \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E})$$

Por outras palavras, as componentes *tangenciais* do campo \mathbf{E} são contínuas através da interface; a diferença das componentes *tangenciais* do campo \mathbf{H} são iguais às densidades de corrente da superfície; a diferença das componentes *normais* da densidade de fluxo \mathbf{D} são iguais à densidade de carga da superfície; e as componentes *normais* da densidade de fluxo magnético \mathbf{B} são contínuas.

! Nota 7

É relevante salientar que a continuidade dos campos tangenciais numa interface garante a continuidade da componente normal do vetor de Poynting na interface, se considerarmos $\mathbf{J}_s = 0$ temos:

$$\mathbf{S}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = (\mathbf{E}_{1t} \times \mathbf{H}_{1t}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = (\mathbf{E}_{2t} \times \mathbf{H}_{2t}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{S}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

Isto é, a interface não pode absorver a energia da onda.

! Nota 8

É relevante analisar as condições de fronteira numa interface com um condutor elétrico perfeito (PEC) [2]. Um condutor elétrico perfeito é um material idealizado com condutividade elétrica $\sigma \rightarrow +\infty$. Como a corrente de condução é $\mathbf{J}_{\text{cond}} = \sigma \mathbf{E}$, o campo elétrico dentro de um condutor perfeito deve anular-se. Assim, um material PEC ideal comporta-se como um espelho perfeito e é impenetrável pela luz. Consequentemente, o campo elétrico na interface com um material PEC deve desaparecer:

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t} = 0 \quad (\text{interface PEC})$$

Note-se que o campo magnético tangencial \mathbf{H}_{1t} (avaliado fora do material) não desaparece. Determina uma densidade de corrente de superfície na fronteira do PEC.

1.5.2 Incidência em Interfaces Planas

Nesta secção focamos a nossa atenção na incidência de ondas planas em interfaces que separam dois meios materiais.

Incidência Normal

A direção de propagação da onda incidente, $\hat{\mathbf{d}}^i$, é perpendicular à superfície da interface. Nestes moldes, os campos da onda incidente são:

$$\underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} = \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{inc}} e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^i \cdot \mathbf{r}}, \quad \underline{\mathbf{H}}^{\text{inc}} = \frac{1}{\eta_1} \hat{\mathbf{d}}^i \times \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{inc}} e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^i \cdot \mathbf{r}} \quad (1.77)$$

através das relações apresentadas 1.3.5.

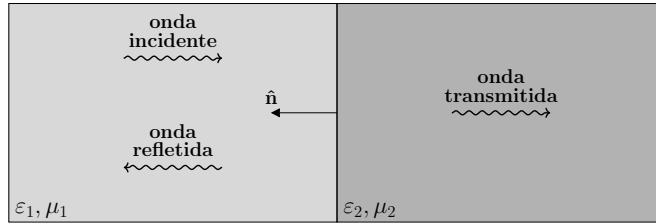


Fig. 1.8: Incidência normal numa interface plana

Como seria de esperar intuitivamente, a onda incidente irá gerar uma onda transmitida no meio 2 e uma onda refletida no meio 1, com direções de propagação $\hat{\mathbf{d}}^t = \hat{\mathbf{d}}^i$ e $\hat{\mathbf{d}}^r = -\hat{\mathbf{d}}^i$. Podemos escrever os campos respetivos:

$$\underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}} = \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{ref}} e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^r \cdot \mathbf{r}}, \quad \underline{\mathbf{H}}^{\text{ref}} = \frac{1}{\eta_1} \hat{\mathbf{d}}^r \times \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{ref}} e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^r \cdot \mathbf{r}} \quad (1.78)$$

$$\underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}} = \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{tx}} e^{-\gamma_2 \hat{\mathbf{d}}^t \cdot \mathbf{r}}, \quad \underline{\mathbf{H}}^{\text{tx}} = \frac{1}{\eta_2} \hat{\mathbf{d}}^t \times \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{tx}} e^{-\gamma_2 \hat{\mathbf{d}}^t \cdot \mathbf{r}} \quad (1.79)$$

Estes campos obedecem às condições de fronteira anunciadas anteriormente, uma vez que as ondas planas são transversais⁴, i.e.,

$$\underline{\mathbf{E}} = \begin{cases} \underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} + \underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}} & \text{antes da interface} \\ \underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}} & \text{depois da interface} \end{cases} \quad \underline{\mathbf{H}} = \begin{cases} \underline{\mathbf{H}}^{\text{inc}} + \underline{\mathbf{H}}^{\text{ref}} & \text{antes da interface} \\ \underline{\mathbf{H}}^{\text{tx}} & \text{depois da interface} \end{cases} \quad (1.80)$$

que se reduz às relações:

$$\underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} + \underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}} = \underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}}, \quad \frac{1}{\eta_1} \hat{\mathbf{d}}^i \times (\underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} - \underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}}) = \frac{1}{\eta_2} \hat{\mathbf{d}}^i \times \underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}} \quad (1.81)$$

Removendo o produto externo da segunda relação, vem que

$$\underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} + \underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}} = \underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}}, \quad \frac{1}{\eta_1} (\underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} - \underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}}) = \frac{1}{\eta_2} \underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}}. \quad (1.82)$$

É conveniente definir a componente refletida e transmitida em função da componente incidente:

$$\underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}} = \rho \underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} \quad \underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}} = \tau \underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} \quad (1.83)$$

onde ρ é definido como coeficiente de reflexão e τ como coeficiente de transmissão. Da equação 1.81, vem que

$$\boxed{\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2}} \quad \boxed{\tau = 1 + \rho = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}} \quad (1.84)$$

Nota: As componentes do campo são avaliadas na interface!

⁴Nesta situação, $\underline{\mathbf{E}}$ e $\underline{\mathbf{H}}$ são paralelos (tangenciais) à interface.

! Nota 9

- Quando as impedâncias dos dois materiais são idênticas ($\eta_2 = \eta_1$), não há onda refletida e a onda incidente é totalmente transmitida para o segundo meio. Neste caso, diz-se que os materiais estão “adaptados”.
- A situação oposta ocorre quando o meio 2 é um condutor elétrico perfeito (PEC). Como a impedância intrínseca de um condutor perfeito desaparece ($\eta_{PEC} = \eta_2 = 0$), o coeficiente de reflexão nesse caso torna-se $\rho_{PEC} = -1$. Isso confirma que um condutor perfeito comporta-se como um espelho perfeito.

Incidência Oblíqua

Numa situação mais geral, a onda incidente poderá atingir a interface numa direção oblíqua. Neste caso, é necessário ter em consideração o ângulo de incidência θ_i , de reflexão θ_r e de transmissão θ_t . Isto pode ser feito à custa do vetor unitário normal à interface, $\hat{\mathbf{n}}$.

$$-\hat{\mathbf{d}}^i \cdot \hat{\mathbf{n}} = \cos \theta_i \quad \hat{\mathbf{d}}^r \cdot \hat{\mathbf{n}} = \cos \theta_r \quad \hat{\mathbf{d}}^t \cdot \hat{\mathbf{n}} = \cos \theta_t \quad (1.85)$$

Definimos também o *plano de incidência*, gerado pelos vetores $\hat{\mathbf{d}}^i$ e $\hat{\mathbf{n}}$.

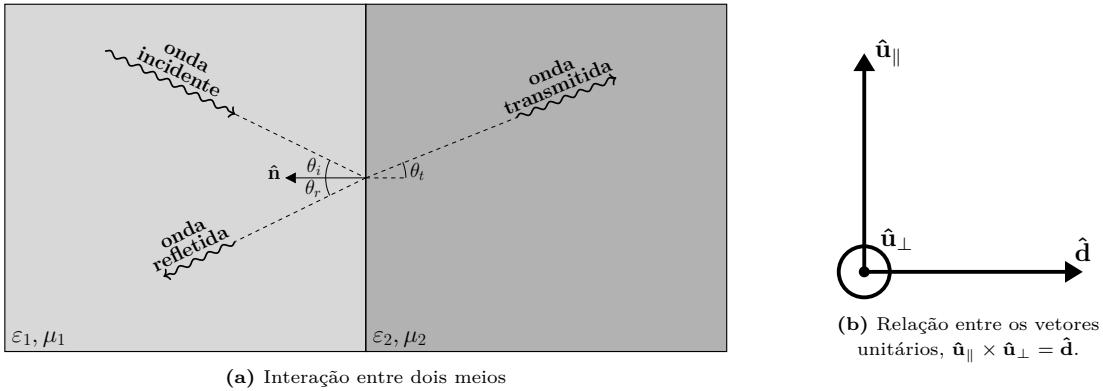


Fig. 1.9: Incidência oblíqua numa interface plana

Uma vez que os campos da onda incidente oscilam num plano transversal a $\hat{\mathbf{d}}^i$ ($\underline{\mathbf{E}}^{inc} \cdot \hat{\mathbf{d}}^i = 0$), é conveniente introduzir dois vetores unitários, $\hat{\mathbf{u}}_{\parallel}$ e $\hat{\mathbf{u}}_{\perp}$, que geram este plano. Por construção, os vetores unitários cumprem a seguinte condição:

$$\hat{\mathbf{u}}_{\parallel}^i \times \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \hat{\mathbf{d}}^i \quad (1.86)$$

Note-se que o vetor $\hat{\mathbf{u}}_{\perp}$ é perpendicular ao plano de incidência, enquanto o vetor $\hat{\mathbf{u}}_{\parallel}^i$ é paralelo ao plano de incidência, de acordo com as notações.

O campo incidente pode ser escrito em termos de $\hat{\mathbf{u}}_{\parallel}$ e $\hat{\mathbf{u}}_{\perp}$ da seguinte forma:

$$\underline{\mathbf{E}}^{inc} = \underline{\mathbf{E}}_{\parallel}^i \hat{\mathbf{u}}_{\parallel}^i + \underline{\mathbf{E}}_{\perp}^i \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \quad (1.87)$$

onde as componentes $\underline{\mathbf{E}}_{\parallel}^i$ e $\underline{\mathbf{E}}_{\perp}^i$ são as componentes paralela e perpendicular do campo, respetivamente.

Uma construção similar pode ser feita para os campos $\underline{\mathbf{E}}^{ref}$ e $\underline{\mathbf{E}}^{tx}$,

$$\hat{\mathbf{u}}_{\parallel}^r \times \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \hat{\mathbf{d}}^r \quad \hat{\mathbf{u}}_{\parallel}^t \times \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \hat{\mathbf{d}}^t \quad (1.88)$$

que leva às decomposições seguintes:

$$\underline{\mathbf{E}}^{ref} = \underline{\mathbf{E}}_{\parallel}^r \hat{\mathbf{u}}_{\parallel}^r + \underline{\mathbf{E}}_{\perp}^r \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \quad \underline{\mathbf{E}}^{tx} = \underline{\mathbf{E}}_{\parallel}^t \hat{\mathbf{u}}_{\parallel}^t + \underline{\mathbf{E}}_{\perp}^t \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \quad (1.89)$$

Lei de Snell

Nesta secção viramos a nossa atenção para o ângulo de incidência θ_i e o ângulo de transmissão θ_t . Podemos relacionar estes ângulos através das condições de fronteira já enunciadas.

Os campos associados às ondas planas incidentes, refletidas e transmitidas são:

$$\underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} = \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{inc}} e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^i \cdot \mathbf{r}} \quad \underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}} = \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{ref}} e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^r \cdot \mathbf{r}} \quad \underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}} = \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{tx}} e^{-\gamma_2 \hat{\mathbf{d}}^t \cdot \mathbf{r}} \quad (1.90)$$

Impõe-se a continuidade das componentes do campo tangentes à interface e verifica-se que:

$$[\underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} + \underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}}] \cdot \hat{\mathbf{t}} = \underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}} \cdot \hat{\mathbf{t}} \iff [\underline{\mathbf{E}}_0^{\text{inc}} e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^i \cdot \mathbf{r}} + \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{ref}} e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^r \cdot \mathbf{r}} - \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{tx}} e^{-\gamma_2 \hat{\mathbf{d}}^t \cdot \mathbf{r}}] \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0. \quad (1.91)$$

onde $\hat{\mathbf{t}}$ é uma direção genérica paralela à interface. Esta relação deve ser válida para qualquer ponto \mathbf{r} da interface, ou seja, os fatores de fase devem ser iguais entre si:

$$\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^i \cdot \mathbf{r} = \gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^r \cdot \mathbf{r} = \gamma_2 \hat{\mathbf{d}}^t \cdot \mathbf{r}, \quad (1.92)$$

e assim $\hat{\mathbf{d}}^i$, $\hat{\mathbf{d}}^r$ e $\hat{\mathbf{d}}^t$ devem estar todos no mesmo plano, i.e., devem estar no plano de incidência [1ª Lei de Snell].

Podemos escrever a relação de continuidade para as componentes tangenciais em termos dos ângulos de incidência, reflexão e transmissão. A projeção de $\hat{\mathbf{d}}^i$, $\hat{\mathbf{d}}^r$ e $\hat{\mathbf{d}}^t$ na interface é $\sin \theta_i$, $\sin \theta_r$, e $\sin \theta_t$, respectivamente, de onde resulta

$$\gamma_1 \sin \theta_i = \gamma_1 \sin \theta_r = \gamma_2 \sin \theta_t \quad (1.93)$$

Esta relação pode ser reescrita sob a forma da 2ª Lei de Snell (reflexão e refração):

$$\boxed{\theta_i = \theta_r}, \quad \boxed{n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t}, \text{ onde } n_1 = \sqrt{\varepsilon_{r1} \mu_{r1}} \text{ e } n_2 = \sqrt{\varepsilon_{r2} \mu_{r2}}. \quad (1.94)$$

1.5.3 Polarização das Ondas Refletidas e Transmitidas

Na incidência oblíqua (ou normal), a polarização das ondas refletidas e transmitidas altera-se em relação à incidente, podendo mudar de circular para elíptica e inverter a rotação.

Existem dois estados de polarização específicos (*eigen-polarization*) — paralelo e perpendicular ao plano de incidência — que se conservam após a interação com a interface. Caso a onda incidente seja polarizada paralela ou perpendicularmente, as ondas refletidas e transmitidas mantêm essa característica, correspondendo, respetivamente, às polarizações magnética transversal (TM) e elétrica transversal (TE).

Uma onda incidente genérica pode ser considerada como a sobreposição de uma onda com polarização paralela e uma onda com polarização perpendicular. Assim, podemos escrever os campos como:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} &= \left(E_{0\parallel}^i \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} + E_{0\perp}^i \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \right) e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^i \cdot \mathbf{r}}, \\ \underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}} &= \left(\rho_{\parallel} E_{0\parallel}^i \hat{\mathbf{u}}_{\parallel}^r + \rho_{\perp} E_{0\perp}^i \hat{\mathbf{u}}_{\perp}^r \right) e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^r \cdot \mathbf{r}}, \\ \underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}} &= \left(\tau_{\parallel} E_{0\parallel}^i \hat{\mathbf{u}}_{\parallel}^t + \tau_{\perp} E_{0\perp}^i \hat{\mathbf{u}}_{\perp}^t \right) e^{-\gamma_2 \hat{\mathbf{d}}^t \cdot \mathbf{r}}. \end{aligned}} \quad (1.95)$$

Sem perda de generalidade, supõe-se que a origem do sistema de coordenadas está contida na interface do material.

Para a componente polarizada paralelamente (\parallel), o coeficiente de reflexão e o coeficiente de transmissão são:

$$\rho_{\parallel} = \frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}, \quad \tau_{\parallel} = \frac{\eta_2}{\eta_1} (1 + \rho_{\parallel}). \quad (1.96)$$

Para a polarizada perpendicularmente (\perp), o coeficiente de reflexão e o coeficiente de transmissão são:

$$\rho_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}, \quad \tau_{\perp} = 1 + \rho_{\perp} \quad (1.97)$$

É interessante analisar como os coeficientes de reflexão ρ_{\parallel} e ρ_{\perp} variam com o ângulo de incidência. Para uma interface entre dois meios sem perdas, meio 1 com $\varepsilon_{r1} = 1$ e meio 2 com $\varepsilon_{r2} = 9$, obtemos a seguinte evolução:

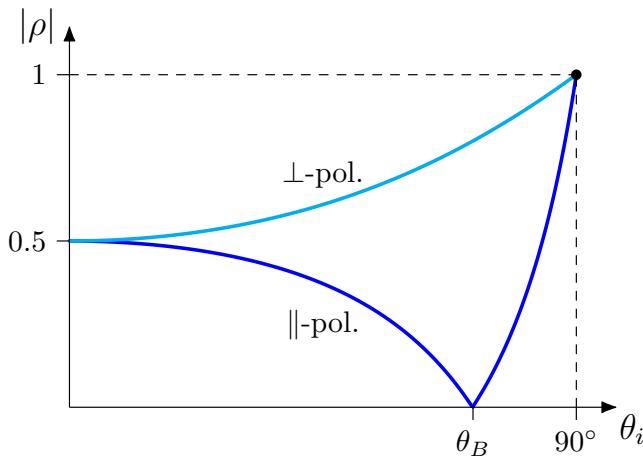


Fig. 1.10: Amplitude do coeficiente de reflexão em função do ângulo de incidência [2]

Retiramos as seguintes conclusões:

- Para a incidência normal, as amplitudes de $|\rho_{||}|$ e $|\rho_{\perp}|$ são iguais.
- Com o aumento do ângulo de incidência, $|\rho_{\perp}|$ aumenta monotonicamente, enquanto $|\rho_{||}|$ diminui até ao ângulo de Brewster, θ_B .
- Para $\theta_i = \theta_B$, o coeficiente $|\rho_{||}|$ é zero (assumindo ausência de perdas nos materiais).
- Para ângulos maiores que θ_B , a magnitude de $|\rho_{||}|$ volta a aumentar.
- Na incidência tangencial, onde $\theta_i \rightarrow 90^\circ$, ambos os coeficientes $|\rho_{||}|$ e $|\rho_{\perp}|$ tendem para um, o que indica uma reflexão total pela interface.

! Nota 10

É útil caracterizar $\rho_{||}$ e ρ_{\perp} quando o meio 2 é um condutor elétrico perfeito. Como discutido anteriormente, um condutor perfeito tem impedância $\eta_{PEC} = \eta_2 = 0$. Assim, para um condutor perfeito os dois coeficientes de reflexão são independentes do ângulo de incidência:

$$\rho_{\perp PEC} = -1, \quad \rho_{|| PEC} = +1. \quad (1.98)$$

Ângulo de Brewster[†]

Podemos obter uma expressão analítica para o ângulo de Brewster mantendo as suposições de meios sem perdas da secção anterior. Basta resolver a equação

$$\rho_{||} = \frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t} = 0 \iff \eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t = 0 \implies \frac{1}{n_1} \cos \theta_i = \frac{1}{n_2} \cos \theta_t \quad (1.99)$$

Através da 2^a Lei de Snell, obtemos uma segunda equação que nos permitirá obter θ_i explicitamente:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (1.100)$$

Após uma simples manipulação algébrica pode ser visto que:

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

(1.101)

[†]Uma relação geométrica curiosa é que, para $\theta_i = \theta_B$, os vetores $\hat{\mathbf{d}}^r$ e $\hat{\mathbf{u}}^i_{||}$ são paralelos. Isto pode ser verificado observando que a condição de Brewster pode ser vista como $n_1 \sin \theta_B = n_2 \cos \theta_B$. Segundo a 2^a Lei de Snell, $n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \theta_t$. Portanto, a condição de Brewster implica que $\cos \theta_B = \sin \theta_t$, o que só é possível se $\theta_B = 90^\circ - \theta_t$.

Exercício 6

Considere uma onda eletromagnética plana circularmente polarizada para a direita, que se propaga no ar e incide numa camada dielétrica plana de grandes dimensões caracterizada por,

$$\sigma = 0, \quad \mu_r = 1, \quad \varepsilon_r = 5$$

Suponha que o ângulo de incidência é de 45° e que a densidade de potência da onda incidente junto à superfície de separação é de 10 W/m^2 .

- Caracterize a onda refletida, quanto ao seu estado de polarização.
- Determine a densidade de potência da onda refletida.

Solução: Vamos definir o ar como meio 1 e a camada dielétrica como meio 2. Assim,

$$\begin{aligned} \text{meio 1: } & \begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_0, \mu_1 = \mu_0 \\ n_1 = \sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}} = 1 \\ \eta_1 = \eta_0 \approx 377.0 [\Omega] \end{cases} & \text{meio 2: } & \begin{cases} \varepsilon_2 = 5\varepsilon_0, \mu_2 = \mu_0 \\ n_2 = \sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}} = \sqrt{5} \\ \eta_2 = \eta_0/n_2 \approx 168.6 [\Omega] \end{cases} \end{aligned}$$

Uma vez que a onda incidente tem polarização circular para a direita, o rácio de polarização é

$$p_{\text{inc}} = \frac{\underline{E}_2^{\text{inc}}}{\underline{E}_1^{\text{inc}}} = e^{-j\pi/2} \implies \underline{E}_2 = -j\underline{E}_1$$

Podemos escrever a onda incidente como:

$$\underline{E}^{\text{inc}} = E_0(\hat{\mathbf{u}}_\perp - j\hat{\mathbf{u}}_\parallel) e^{-jk_0\hat{\mathbf{d}}^i \cdot \mathbf{r}}$$

Uma vez que $\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{inc}} = \|\underline{E}^{\text{inc}}\|^2/(2\eta_1)$, podemos descobrir o valor de E_0 através da norma:

$$\|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{inc}}\| = \frac{\|\underline{E}^{\text{inc}}\|^2}{2\eta_1} \iff 2\eta_1 \|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{inc}}\| = \|\underline{E}^{\text{inc}}\|^2 = 2E_0^2 \implies E_0 = 61.4 \text{ [V/m]}$$

Podemos finalmente escrever as equações dos campos refletido e transmitido:

$$\begin{aligned} \underline{E}^{\text{ref}} &= E_0(\rho_\perp \hat{\mathbf{u}}_\perp - j\rho_\parallel \hat{\mathbf{u}}_\parallel) e^{-jk_0\hat{\mathbf{d}}^r \cdot \mathbf{r}} \\ \underline{E}^{\text{tx}} &= E_0(\tau_\perp \hat{\mathbf{u}}_\perp - j\tau_\parallel \hat{\mathbf{u}}_\parallel) e^{-jn_2 k_0 \hat{\mathbf{d}}^t \cdot \mathbf{r}} \end{aligned}$$

Uma vez que $\theta_i = \pi/4$ e $\theta_t = \arcsin(n_1/n_2 \cdot \sin \theta_i)$, os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned} \rho_\perp &= \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = -\frac{1}{2} & \rho_\parallel &= \frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t} = \frac{1}{4} \\ \tau_\perp &= 1 + \rho_\perp = \frac{1}{2} & \tau_\parallel &= \frac{\eta_2}{\eta_1}(1 + \rho_\parallel) = \frac{\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

Nestes moldes, podemos calcular a polarização das ondas refletida e transmitida:

$$p_{\text{ref}} = \frac{\underline{E}_2^{\text{ref}}}{\underline{E}_1^{\text{ref}}} = 2e^{j\pi/2}, \quad p_{\text{tx}} = \frac{\underline{E}_2^{\text{tx}}}{\underline{E}_1^{\text{tx}}} = 0.89e^{-j\pi/2}$$

Segue o cálculo da densidade de potência de ambas:

$$\|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{ref}}\| = \|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{inc}}\| \left(\frac{|\rho_\perp|^2 + |\rho_\parallel|^2}{2} \right) = 1.56 \text{ kW/m}^2, \quad \|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{tx}}\| = \|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{inc}}\| \frac{\eta_1}{\eta_2} \left(\frac{|\tau_\perp|^2 + |\tau_\parallel|^2}{2} \right) = 6.29 \text{ kW/m}^2$$

↑ válido apenas quando a onda inc. tem pol. circular! ↑

Nota: % potência refletida = $\|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{ref}}\|/\|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{inc}}\|$, mas % potência transmitida = $(1 - \|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{ref}}\|/\|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{inc}}\|)$ e não $\|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{tx}}\|/\|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{inc}}\|$, atenção!

1.5.4 Reflexão Interna Total

O ângulo incidente para o qual o ângulo de transmissão é igual a 90° é denominado de ângulo crítico e pode ser obtido através da Lei de Snell:

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (1.102)$$

Quando o ângulo de incidência excede o ângulo crítico a onda sofre **reflexão interna total**, de modo que toda a energia incidente é totalmente refletida de volta para o meio de incidência.

Para $\theta_i > \theta_c$, os coeficientes de reflexão (para materiais sem perdas) têm exatamente amplitude unitária para ambas as polarizações:

$$\rho_i = \rho_r \quad |\rho_{\parallel}| = |\rho_{\perp}| = 1, \quad (\text{reflexão interna total}) \quad (1.103)$$

Este resultado pode ser depreendido para a polarização perpendicular. Admitindo $\cos \theta_t = -jC$ encontra-se que:

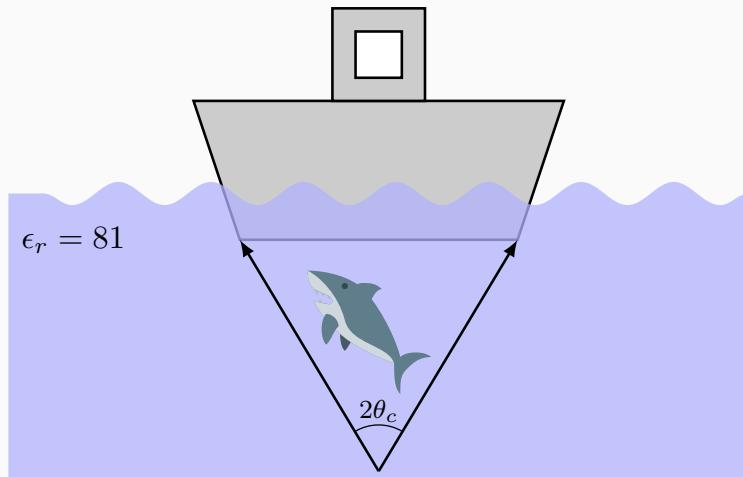
$$\rho_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 jC}{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 jC}. \quad (1.104)$$

Como o numerador e denominador da fração estão relacionados pela conjugação complexa, é imediato que $|\rho_{\perp}| = 1$.

Uma argumentação semelhante pode ser feita para $|\rho_{\parallel}|$.

Exercício 7

Um tubarão nada debaixo de um barco circular de diâmetro D , conforme a figura apresentada. Determine o menor ângulo $2\theta_c$ dum cone imaginário dentro do qual o peixe pode nadar sem ser visto por um observador à superfície da água.



Solução: Para o peixe nadar dentro do cone sem ser visto, o ângulo dos feixes de luz que formam o cone têm de ser tais que ao incidirem entre a fronteira água/ar ocorre reflexão total, assim:

$$\theta_{\text{cone}} \geq \theta_c, \quad \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_{\text{ar}}}{n_{\text{água}}}\right) = 6.38^\circ$$

Consequentemente,

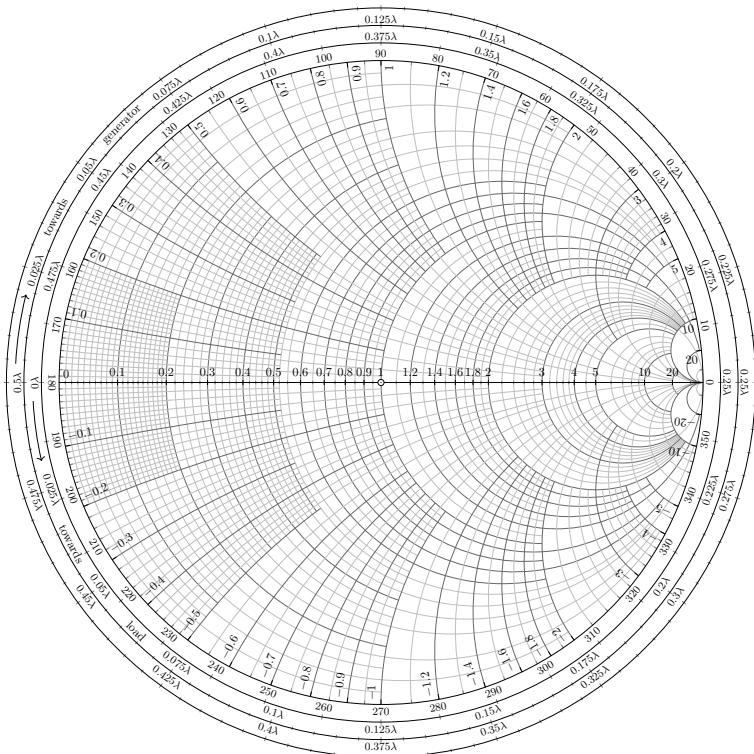
$$\theta_{\text{cone}} = 6.38^\circ$$

CHEAT SHEET PROE (PARTE 1)

$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\}$	$\varepsilon_{\text{ef}}(\omega) \cong \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}, \quad \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0; \quad \mu(\omega) \cong \mu$	$\underline{\mathbf{E}}_0^{\text{ref}} = \rho \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{inc}}$	$\underline{\mathbf{E}}_0^{\text{tx}} = \tau \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{inc}}$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{ext}} + \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\gamma = j\omega \sqrt{\mu \left(\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \right)} = j\omega \sqrt{\mu \varepsilon} \sqrt{1 + \frac{\sigma}{j\omega \varepsilon}}$	$\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \quad \tau = 1 + \rho = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$	
$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \underline{\mathbf{B}}, \quad \nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}}_{\text{ext}} + j\omega \varepsilon_{\text{ef}}(\omega) \underline{\mathbf{E}}$	$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma}{j\omega \varepsilon}}}$	$\hat{\mathbf{u}}_{\parallel}^l \times \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \hat{\mathbf{d}}^l, \quad l = i, r, t$	
$\varepsilon_{\text{ef}}(\omega) = \varepsilon_d(\omega) + \frac{\sigma_c(\omega)}{j\omega} = \varepsilon'_{\text{ef}}(\omega) - j\varepsilon''_{\text{ef}}(\omega)$	$\gamma = j\omega \sqrt{\mu \varepsilon}, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$	$\underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} = \left(\underline{\mathbf{E}}_{0\parallel}^i \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} + \underline{\mathbf{E}}_{0\perp}^i \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \right) e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^i \cdot \mathbf{r}},$	
$\tan \theta_{\text{loss}} = \frac{\varepsilon''_{\text{ef}}(\omega)}{\varepsilon'_{\text{ef}}(\omega)} = \frac{\omega \varepsilon''_d(\omega) + \sigma_c(\omega)}{\omega \varepsilon'_d(\omega)} \cong \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_r \varepsilon_0}$	$\bullet \quad \sigma = 0:$	$\underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}} = \left(\rho \left(\underline{\mathbf{E}}_{0\parallel}^i \hat{\mathbf{u}}_{\parallel}^r + \rho_{\perp} \underline{\mathbf{E}}_{0\perp}^i \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \right) e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^r \cdot \mathbf{r}},$	
	$\bullet \quad \sigma \neq 0, \sigma/\omega \varepsilon \ll 1:$	$\underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}} = \left(\tau_{\parallel} \underline{\mathbf{E}}_{0\parallel}^i \hat{\mathbf{u}}_{\parallel}^t + \tau_{\perp} \underline{\mathbf{E}}_{0\perp}^i \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \right) e^{-\gamma_2 \hat{\mathbf{d}}^t \cdot \mathbf{r}}.$	
		$\rho_{\parallel} = \frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}, \quad \tau_{\parallel} = \frac{\eta_2}{\eta_1} (1 + \rho_{\parallel})$	
		$\rho_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}, \quad \tau_{\perp} = 1 + \rho_{\perp}$	
		$\theta_i = \theta_r \quad n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$	
		$n_1 \sin \theta_B = n_2 \cos \theta_B$	
		$\theta_B = \arctan \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \rightarrow \rho_{\parallel} = 0$	
		$\theta_i \geq \theta_c \implies \rho_{\parallel} = \rho_{\perp} = 1$	
$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{f}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}},$	$\gamma_{\text{g.d.}} \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} + j \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\mu \varepsilon \varepsilon_r}, \quad \eta_{\text{g.d.}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega \varepsilon} \right)$		
$c = \frac{c_0}{n}, \quad \eta = \frac{\eta_0}{n}, \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n}, \quad k = nk_0$	$\gamma_{\text{g.c.}} \approx \sqrt{\frac{\sigma \omega \mu}{2}} (1 + j), \quad \eta_{\text{g.c.}} \approx \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} (1 + j)$		
$\eta = \frac{\ \mathbf{E}\ }{\ \mathbf{H}\ } = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$	$x \ll 1: \quad 1/\sqrt{1+x} \approx 1-x, \quad \sqrt{1+x} \approx 1+x/2$		
$\mathbf{J}_{\text{ext}} = 0 \implies \mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \eta \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{d}}$	$\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{u}}_1 \times \hat{\mathbf{u}}_2 \rightarrow \frac{\underline{\mathbf{E}}_2}{\underline{\mathbf{E}}_1} = p e^{j\phi}$		
	$\circlearrowleft \quad \phi = \pm \pi/2 \text{ e } p = 1$		
	$\rightarrow \phi = 0, \phi = \pi, p = 0, p = \infty$		
	$\circlearrowleft \quad 0 < \phi < \pi$		
	$\circlearrowleft \quad -\pi < \phi < 0$		
$\gamma = jk = \alpha + j\beta, \quad \delta_{\text{skin}} = \frac{1}{\alpha}$	$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_{ph}}{f}$		
	$\eta = \sqrt{\frac{\mu(\omega)}{\varepsilon_{\text{ef}}(\omega)}}, \quad k = \omega \sqrt{\mu(\omega) \varepsilon_{\text{ef}}(\omega)}, \quad v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$		
$\mathbf{J}_{\text{ext}} = 0 \implies \underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{d}} \times \underline{\mathbf{E}}, \quad \underline{\mathbf{E}} = \eta \underline{\mathbf{H}} \times \hat{\mathbf{d}},$			
$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad [\text{W/m}^2]$	$\mathcal{P}_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \stackrel{\text{def}}{=} \ \mathbf{S}\ \cdot A$		
$\varepsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ [F/m]}, \quad \mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [H/m]}$	$\mathbf{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{1}{\eta} \right\} \ \underline{\mathbf{E}}\ ^2 \hat{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\eta\} \ \underline{\mathbf{H}}\ ^2 \hat{\mathbf{d}}$		
$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ [m/s]}, \quad \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 120\pi \text{ [\Omega]}$			
		$\% \mathcal{P}_{\text{ref}} = \frac{\ \mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{ref}}\ }{\ \mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{inc}}\ } \times 100\%$	
		$\% \mathcal{P}_{\text{tx}} = (100\% - \% \mathcal{P}_{\text{ref}})$	
			[†] João Gonçalves 99995, Teresa Nogueira 100029, nov. 23 https://github.com/Kons-5/IST-PROE-Notes

CAPÍTULO 2

PROPAGAÇÃO GUIADA



 Conteúdos

2.1	Propagação em Linhas de Transmissão	31
2.2	Introdução à Carta de Smith	42
2.3	Sistemas de Adaptação de Impedâncias	48
2.4	Cheat Sheet (Parte 2)	57

2.1 Propagação em Linhas de Transmissão

A teoria das linhas de transmissão constitui um elo fundamental entre a análise de campos eletromagnéticos e os fundamentos da teoria de circuitos, assumindo assim um papel crucial na análise de circuitos e dispositivos que operam em frequências de micro-ondas. A propagação de ondas ao longo das linhas de transmissão pode ser conceptualizada tanto como uma extensão lógica da teoria de circuitos quanto como uma aplicação direcionada das equações de Maxwell. Neste capítulo, exploramos ambas as perspetivas, demonstrando como a propagação de ondas nas linhas de transmissão é caracterizada por conjuntos de equações que apresentam grande semelhança com as utilizadas para descrever a propagação de ondas planas abordadas no primeiro capítulo.

2.1.1 Guias de Ondas

Os guias de onda são infraestruturas projetadas para “canalizar” o fluxo de energia eletromagnética ao longo de uma trajetória predefinida. Estas estruturas podem apresentar-se sob duas formas: fechadas, quando há uma blindagem que protege os campos eletromagnéticos de interferências alheias, ou abertas, caso em que são suscetíveis a efeitos indesejados de diafonia (*cross-talk*).

Neste capítulo, o foco recai sobre uma categoria específica de guias de onda denominada “linhas de transmissão”, caracterizadas por guiarem a propagação através de dois ou mais condutores não interligados, separados por um dielétrico homogéneo, cuja constante dielétrica é invariável ($\epsilon = \text{const.}$).

Exemplos de linhas de transmissão incluem as linhas bifilares e os cabos coaxiais, representando, respectivamente, as configurações abertas e fechadas. Num cenário ideal, tanto os condutores quanto o meio dielétrico são considerados isentos de perdas.

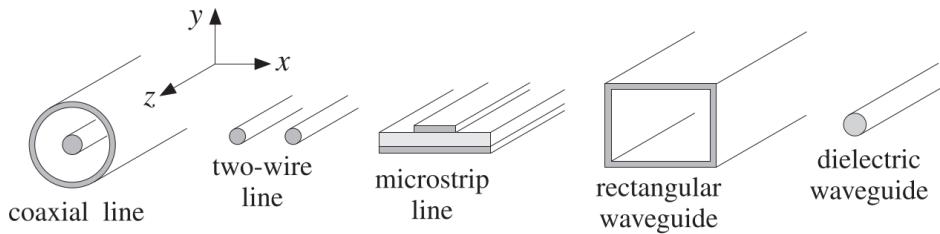


Fig. 2.1: Exemplos de guias de ondas [1]

Na prática, a escolha da estrutura é ditada por: (i) a banda de frequência de operação pretendida, (ii) o montante de potência a ser transferido e (iii) o nível de perdas na transmissão que se pode tolerar.

Os cabos coaxiais são comuns em conexões RF até 3 GHz, acima das quais as perdas se tornam proibitivas, chegando a 50 dB/100 m a 10 GHz. A potência suportada por estes cabos varia com a frequência devido ao aquecimento dos condutores e do dielétrico, com limites típicos de um quilowatt a 100 MHz e 200 W a 2 GHz. Existem cabos especiais para frequências até 40 GHz.

A operação em modo único é crítica em altas frequências, o que implica uma redução dos diâmetros dos condutores para evitar modos superiores, limitando a potência transmissível.

Linhos de dois fios são evitados em micro-ondas por não serem blindados, ao contrário das linhas de *microstrip*, usadas em circuitos integrados de micro-ondas. Guias de onda retangulares são preferidos para transferir alta potência acima de 3 GHz, com atenuações de 4 dB/100 m a 5 GHz.

As fibras ópticas operam em frequências óticas e infravermelhas, permitindo uma largura de banda muito ampla. As suas perdas são muito baixas, tipicamente, 0.2 dB/km. A potência transmitida é da ordem dos miliwatts.

É fundamental reconhecer que os campos eletromagnéticos numa linha de transmissão apresentam uma natureza semelhante à estática. Por esta razão, a propagação de ondas numa linha constituída por dois condutores pode ser modelada de forma rigorosa em termos de uma tensão v e uma corrente i . Ou seja, na maioria dos casos, pode-se abstrair da natureza vetorial do campo eletromagnético e estudar os fenómenos de onda recorrendo à teoria de circuitos.

2.1.2 Modelo Matemático

Abordagem de Parâmetros Distribuídos

Uma linha de transmissão é frequentemente representada como uma linha de dois fios, já que as linhas de transmissão (para propagação de ondas eletromagnéticas transversais [TEM]) possuem sempre pelo menos dois condutores. Um dado segmento de linha de comprimento infinitesimal pode ser modelado como um circuito de elementos concentrados (*lumped*), onde R , L , G e C são quantidades por unidade de comprimento definidas da seguinte forma:

R = resistência em série por unidade de comprimento, para ambos os condutores, em Ω/m .

L = indutância em série por unidade de comprimento, para ambos os condutores, em H/m.

G = condutância em paralelo por unidade de comprimento, em S/m.

C = capacidade em paralelo por unidade de comprimento, em F/m.

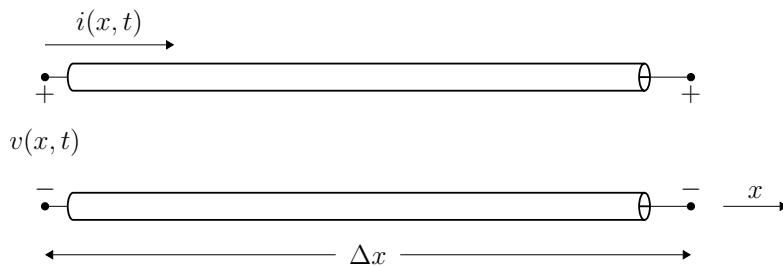


Fig. 2.2: Definição da corrente e tensão

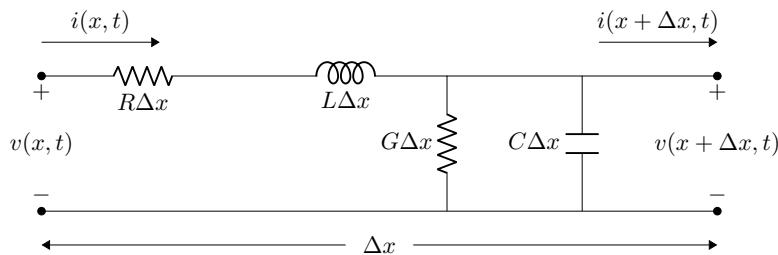


Fig. 2.3: Circuito equivalente de parâmetros concentrados.

Estes elementos estão relacionados com a energia armazenada no campo eletromagnético (L e C) e com a dissipação no dielétrico (G). A indutância L depende do fluxo magnético criado pela corrente que flui nos condutores. A capacitância C depende do acoplamento das cargas nos dois condutores. Finalmente, a condutância G caracteriza a corrente de fuga no dielétrico.

Através da aplicação das leis das malhas à Fig. 2.3 podemos escrever:

$$\begin{aligned} v(x + \Delta x, t) - v(x, t) &= -R\Delta x i(x, t) - L\Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \\ i(x + \Delta x, t) - i(x, t) &= -G\Delta x v(x + \Delta x, t) - C\Delta x \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Que por sua vez pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \frac{v(x + \Delta x, t) - v(x, t)}{\Delta x} &= -Ri(x, t) - L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \\ \frac{i(x + \Delta x, t) - i(x, t)}{\Delta x} &= -Gv(x + \Delta x, t) - C \frac{\partial v(x + \Delta x, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Tomando o limite $\Delta x \rightarrow 0$, para o qual o tamanho do segmento de linha se torna infinitesimal obtemos:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = -Ri(x,t) - L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -Gv(x,t) - C \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}. \quad (2.3)$$


 Estas equações denominam-se por
equações do telégrafo (*telegrapher equations*)

2.1.3 Regime Harmônico no Tempo

Admitindo excitação harmônica, a tensão e a corrente são descritas através de fasores de amplitude complexa:

$$v(x, t) = \operatorname{Re}\{\underline{V}(x)e^{j\omega t}\} \quad i(x, t) = \operatorname{Re}\{\underline{I}(x)e^{j\omega t}\} \quad (2.4)$$

As amplitudes complexas satisfazem as equações do telégrafo no domínio da frequência:

$$\frac{d\underline{V}}{dx}(x) = -(R + j\omega L) \underline{I}(x), \quad \frac{d\underline{I}}{dx}(x) = -(G + j\omega C) \underline{V}(x) \quad (2.5)$$

$\uparrow Z_l \quad \uparrow Y_l$

As equações canônicas no domínio da frequência podem ser obtidas derivando ambos os lados:

$$\frac{d}{dx} \frac{d\underline{V}}{dx} = -Z_l \frac{d\underline{I}}{dx} = -Z_l(-Y_l)\underline{V} = Z_l Y_l \underline{V} \quad (2.6)$$

onde $\gamma = \sqrt{Z_l Y_l}$ corresponde à constante de propagação, dada por:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{Z_l Y_l} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (2.7)$$

onde α é o fator de atenuação e β a constante de fase.

Assim, a amplitude complexa da tensão satisfaz a equação diferencial linear ordinária:

$$\frac{d^2\underline{V}(x)}{dx^2} - \gamma^2 \underline{V}(x) = 0 \quad (2.8)$$

\uparrow Equação de onda

e similarmente para a corrente:

$$\frac{d^2\underline{I}(x)}{dx^2} - \gamma^2 \underline{I}(x) = 0 \quad (2.9)$$

Recorrendo à solução da equação de onda obtemos:

$$\begin{aligned} \underline{V}(x) &= \underline{V}_0^+ e^{-\gamma x} + \underline{V}_0^- e^{\gamma x} \equiv \underline{V}^+(x) + \underline{V}^-(x) \\ \underline{I}(x) &= \underline{I}_0^+ e^{-\gamma x} + \underline{I}_0^- e^{\gamma x} \equiv \underline{I}^+(x) + \underline{I}^-(x) \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde o termo $e^{-\gamma x}$ representa a propagação da onda no sentido $+\hat{x}$, e o termo $e^{\gamma x}$ representa a propagação da onda no sentido $-\hat{x}$. Utilizando as equações em (2.5) podemos reescrever a corrente da seguinte forma:

$$\underline{I}(x) = \frac{1}{Z_0} (\underline{V}^+ e^{-\gamma x} - \underline{V}^- e^{\gamma x}) \quad (2.11)$$

Subsequentemente, a impedância característica, Z_0 , pode ser definida como:

$$Z_0 = \frac{Z_l}{\gamma} = \sqrt{\frac{Z_l}{Y_l}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (2.12)$$



Checkpoint 9

À semelhança da discussão sobre ondas planas, encontramos que o comprimento de onda na linha é

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}, \quad (2.13)$$

e a velocidade de fase é

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\beta} = \lambda f = v_g \quad (2.14)$$

Linhas sem Perdas

Para uma linha sem perdas, a resistência distribuída e a condutância desaparecem: $R = G = 0$. Neste caso, a constante de propagação γ é um número puramente imaginário,

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC} \quad (\text{linha sem perdas}). \quad (2.15)$$

de modo que a onda propaga ao longo da linha sem atenuação ($\alpha = 0$). A constante de fase β varia linearmente com a frequência. Consequentemente, para uma linha sem perdas a impedância característica é real e independente da frequência:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\text{linha sem perdas}). \quad (2.16)$$

A tensão na linha pode ser escrita como:

$$V(x) = V_0^+ e^{-j\beta x} + V_0^- e^{j\beta x}. \quad (2.17)$$

Admitindo um cenário onde a onda V_0^- tem amplitude nula. Então, a tensão no domínio do tempo é dada por:

$$v(x, t) = \operatorname{Re}\{V_0^+ e^{-j\beta x} e^{j\omega t}\}. \quad (2.18)$$

Supondo que V_0^+ é um número real positivo, pode-se escrever:

$$v(x, t) = V_0^+ \cos(\omega t - \beta x) \quad (2.19)$$

↑ Travelling wave

Este tipo de onda é conhecido como “onda propagante” em que a velocidade de fase é dada por:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \neq v_g \quad (2.20)$$

Linhas com Perdas

Na presença de dissipação $R \neq 0$ ou $G \neq 0$, a constante de propagação ganha uma parte real, de modo que a constante de atenuação α é não nula. Nesse caso, a onda propagante é descrita por

$$v(x, t) = \operatorname{Re}\left\{V_0^+ e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)}\right\}, \quad (2.21)$$

o que se reduz a:

$$v(x, t) = V_0^+ e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x). \quad (2.22)$$

Por inspeção, deduzimos que, devido à absorção do material, a amplitude da onda torna-se cada vez menor à medida que se propaga ao longo da linha.

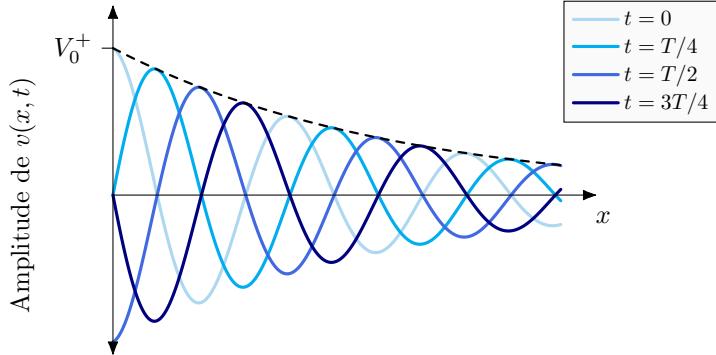


Fig. 2.4: Evolução da amplitude da tensão numa linha com perdas.

Em linhas de transmissão de micro-ondas e RF que são utilizadas na prática, verifica-se que as perdas são reduzidas uma condição essencial para que estas possuam utilidade prática significativa. Face a perdas pequenas, é possível recorrer a simplificações nas expressões dos parâmetros gerais da linha de transmissão, $\gamma = \alpha + j\beta$ e Z_0 .

Exercício 8

Verifique que para R e G pequenos se tem $\alpha = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$ e $\beta = \omega \sqrt{LC}$

Solução: Admitindo que a constante de propagação é dada por:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

Podemos desenvolver o seguinte:

$$\begin{aligned} \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} &= \sqrt{RG + j\omega CR + j\omega LG - \omega^2 CL} \\ &= \sqrt{RG - \omega^2 CL + j\omega(CR + LG)} = \sqrt{1 + \omega \frac{CR + LG}{j\omega^2 CL}} \\ &\quad \uparrow \text{Admitindo } R = G \ll 1, RG \approx 0 \end{aligned}$$

Reconhecendo que para $x \ll 1$, $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$, podemos reescrever:

$$\sqrt{1 + \frac{CR + LG}{j\omega^2 CL}} \approx 1 + \omega \frac{CR + LG}{2j\omega^2 CL} = \frac{CR + LG}{2\sqrt{CL}} + j\omega \sqrt{CL}$$

Finalmente, por comparação com a constante de propagação, obtemos:

$$\alpha = \frac{CR + LG}{2\sqrt{CL}} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \beta = \omega \sqrt{LC} \quad (\text{Low-loss Line})$$

■

Exercício 9

a) Verifique que se $\frac{G}{C} = \frac{R}{L}$ (condição de Heaviside) então a impedância característica da linha é real.

b) Verifique que quando a condição de Heaviside é cumprida a linha não introduz distorções i.e., preserva a forma dos sinais transmitidos.

Solução: Se β não for função linear da frequência, então a velocidade de fase $v_{ph} = \omega/\beta$ variará com a frequência. Tal implica que as várias componentes de frequência de um sinal de banda larga viajarão com diferentes velocidades de fase e assim chegarão ao final da linha de transmissão em tempos ligeiramente diferentes. Isto levará a *dispersão*, uma distorção do sinal, que é geralmente um efeito indesejável. Existe, no entanto, um caso especial, de linha com perdas que possui uma constante de fase linear com a frequência. Tal linha é chamada de linha *sem distorção*, e é caracterizada por parâmetros de linha que satisfazem a relação

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}.$$

Assim analisando a impedância intrínseca de onda:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C} \cdot \frac{R/L + j\omega}{G/C + j\omega}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

? Exercício 9 continued

Subsequentemente, analisando a constante de propagação, γ ,

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \\ &= \sqrt{(j\omega L)(j\omega C) \left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right) \left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)} \\ &= j\omega\sqrt{LC} \sqrt{1 - j\left(\frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C}\right) - \frac{RG}{\omega^2 LC}}\end{aligned}$$

Por aplicação da condição de Heaviside, obtemos:

$$\begin{aligned}\gamma &= j\omega\sqrt{LC} \sqrt{1 - j\left(2\frac{R}{\omega L}\right) - \frac{R^2}{\omega^2 L^2}} \\ &= j\omega\sqrt{LC} \left(1 - j\frac{R}{\omega L}\right) = \boxed{R\sqrt{\frac{C}{L}} + j\omega\sqrt{LC}}\end{aligned}$$

Por comparação com $\gamma = \alpha + j\beta$ deduzimos que:

$$\alpha = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \beta = \omega\sqrt{LC} \quad (\text{Distortionless Line})$$

o que demonstra que $\beta = \omega\sqrt{LC}$ é agora uma função linear da frequência. Depreendemos também que a constante de atenuação, $\alpha = R\sqrt{C/L}$, não depende da frequência, de modo que todos os componentes de frequência de um sinal serão atenuados de igual forma (na realidade, R é geralmente uma função fraca da frequência). Assim, a linha sem distorção não é livre de perdas, mas é capaz de passar um pulso ou envelope de modulação sem distorção. Para obter uma linha de transmissão com parâmetros que satisfaçam esta ideia, é necessário que L sofra um incremento, consequência da adição de bobinas em série espaçadas periodicamente ao longo da linha. ■

2.1.4 Impedância de Onda e Coeficiente de Reflexão

Todos os conceitos fundamentais de reflexão e transmissão se traduzem para o caso das linhas de transmissão. Podemos definir a *impedância de onda* e o *coeficiente de reflexão* num ponto genérico x ao longo da linha:

$$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = Z_0 \frac{V^+(x) + V^-(x)}{V^+(x) - V^-(x)}, \quad \rho_V(x) = \frac{V^-(x)}{V^+(x)} = \rho_{V0} e^{2\gamma x}. \quad (2.23)$$

Para evitar ambiguidade na notação, denotamos a impedância característica por Z_0 . Segue-se que $Z(x)$ e $\rho_V(x)$ estão relacionados por:

$$\boxed{Z(x) = Z_0 \frac{1 + \rho_V(x)}{1 - \rho_V(x)}}, \quad \boxed{\rho_V(x) = \frac{Z(x) - Z_0}{Z(x) + Z_0}}. \quad (2.24)$$

Para uma onda que se move para a frente, as condições $\rho_V(x) = 0$ e $Z(x) = Z_0$ são equivalentes. As equações de $Z(x)$ e $\rho_V(x)$ entre dois pontos $\{x_1, x_2\}$ ao longo da linha separados pela distância $d = x_2 - x_1$ são dadas por:

$$\boxed{Z_1 = Z_0 \frac{Z_2 + Z_0 \tanh(\gamma d)}{Z_0 + Z_2 \tanh(\gamma d)}} \iff \boxed{\rho_{V1} = \rho_{V2} e^{-2\gamma d}}. \quad (2.25)$$

onde temos as relações entre $\{Z_1, Z_2\}$ e $\{\rho_{V1}, \rho_{V2}\}$:

$$Z_1 = Z_0 \frac{1 + \rho_{V1}}{1 - \rho_{V1}}, \quad Z_2 = Z_0 \frac{1 + \rho_{V2}}{1 - \rho_{V2}}. \quad (2.26)$$

! Nota 11

Para uma linha sem perdas temos que $\gamma = j\beta$, o que resulta na simplificação de 2.25,

$$Z_1 = Z_0 \frac{Z_2 + jZ_0 \tan(\beta d)}{Z_0 + jZ_2 \tan(\beta d)}, \quad (2.27)$$

uma vez que:

$\cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$	$\sinh(v) = \frac{e^v - e^{-v}}{2}$	$\tanh(w) = \frac{\sinh(w)}{\cosh(w)} = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}}$
$\cos(u) = \frac{e^{ju} + e^{-ju}}{2}$	$\sin(v) = \frac{e^{jv} - e^{-jv}}{2j}$	$\tan(w) = \frac{\sin(w)}{\cos(w)} = \frac{e^{jw} - e^{-jw}}{j(e^{jw} + e^{-jw})}$
$\therefore \cos(u) = \cosh(ju)$	$\therefore j \sin(v) = \sinh(jv)$	$\therefore j \tan(w) = \tanh(jw)$

A relação entre as ondas de tensão e corrente nos pontos x_1 e x_2 é obtida pela matriz de propagação:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma d) & Z_0 \sinh(\gamma d) \\ \sinh(\gamma d)/Z_0 & \cosh(\gamma d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{matriz de transferência}) \quad (2.28)$$

! Nota 12

Para uma linha sem perdas resulta na simplificação:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta d) & jZ_0 \sin(\beta d) \\ j \sin(\beta d)/Z_0 & \cos(\beta d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Da mesma forma, podemos relacionar as tensões para frente/trás nos pontos x_1 e x_2 :

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_1^+ \\ \underline{V}_1^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j\beta d} & 0 \\ 0 & e^{-j\beta d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_2^+ \\ \underline{V}_2^- \end{bmatrix} \quad (\text{matriz de propagação}) \quad (2.30)$$

Segue-se de 2.10 que $\underline{V}_1^\pm, \underline{V}_2^\pm$ estão relacionados a $\{\underline{V}_1, \underline{I}_1\}$ e $\{\underline{V}_2, \underline{I}_2\}$ por:

$$\underline{V}_1^\pm = \frac{1}{2}(\underline{V}_1 \pm Z_0 \underline{I}_1), \quad \underline{V}_2^\pm = \frac{1}{2}(\underline{V}_2 \pm Z_0 \underline{I}_2) \quad (2.31)$$

Em certas situações, como no design de *stub tuners* para a adaptação de uma linha de transmissão a uma carga, é mais prático trabalhar com as *admitâncias de onda*. Definindo $Y_0 = 1/Z_0$, $Y_1 = 1/Z_1$, e $Y_2 = 1/Z_2$, verifica-se que as admitâncias cumprem exatamente a mesma relação de propagação que as impedâncias:

$$Y_1 = \frac{Y_2 + Y_0 \tanh(\gamma d)}{Y_0 + Y_2 \tanh(\gamma d)} \quad (2.32)$$

Algumas Propriedades da Impedância de Onda

Em situações em que a linha está adaptada ($Z_2 = Z_0$), a equação 2.25 reduz-se para:

$$Z_1 = Z_0 \frac{Z_0 + Z_0 \tanh(\gamma d)}{Z_0 + Z_0 \tanh(\gamma d)} = Z_0 \quad (2.33)$$

este resultado indica-nos que para uma carga adaptada, a impedância é independente do ponto de observação, a quantidade proporcional a $d = x_2 - x_1$ é cancelada. Isto implica que não existe reflexão, i.e., $\rho_V|_{\text{matched}} = 0$.

Podemos ainda fazer alguns reparos interessantes sobre a impedância de onda, nomeadamente:

$$\boxed{\begin{aligned} d = \frac{\lambda}{2} &\implies Z_1 = Z_2, \quad \rho_{V1} = \rho_{V2} \\ d = \frac{\lambda}{4} &\implies Z_1 = \frac{Z_0^2}{Z_2}, \quad \rho_{V1} = -\rho_{V2} \end{aligned}} \quad (2.34)$$

! Nota 13

A impedância Z_1 é periódica, com período $\lambda/2$, i.e., para uma linha de comprimento l , se lhe adicionarmos troços de comprimentos $n\lambda/2$ obtemos o mesmo valor de Z_1 , i.e.,

$$Z_1 \Big|_{d=l} = Z_1 \Big|_{d=l+n\frac{\lambda}{2}}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2.35)$$

Para cargas passivas, o coeficiente de reflexão restringe-se a

$$0 \leq |\rho_V| \leq 1. \quad (2.36)$$

Alguns casos particulares interessantes são:

$$\begin{aligned} Z_2 = 0 &\quad (\text{curto-circuito}) \implies \rho_V = -1 \\ Z_2 \rightarrow +\infty &\quad (\text{linha em vazio}) \implies \rho_V = +1 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Linha de Transmissão Alimentada e Gerador Adaptado

A tensão e a corrente nos terminais do gerador que alimenta a linha de transmissão satisfazem:

$$V_1 = V_g - Z_g I_1. \quad (2.38)$$

V_1 e I_1 são as tensões e as correntes no ponto de entrada da linha. Assim, podem ser decompostas:

$$V_1 = V_1^+ + V_1^-, \quad I_1 = \frac{V_1^+}{Z_0} - \frac{V_1^-}{Z_0}. \quad (2.39)$$

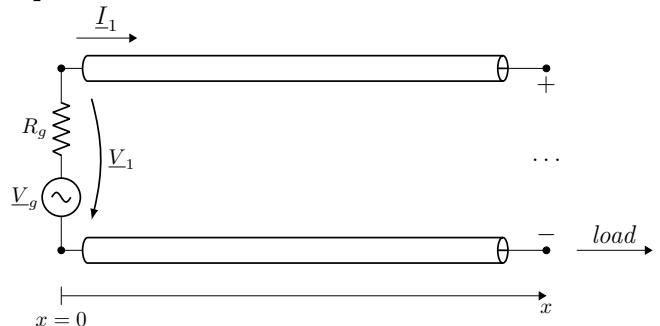


Fig. 2.5: Linha de transmissão alimentada por um gerador.

Nesta situação, V_1^+, V_1^- são restringidos à relação:

$$V_1^+ + V_1^- = V_g - \frac{Z_g}{Z_0}(V_1^+ - V_1^-). \quad (2.40)$$

Diz-se que o gerador está adaptado à linha quando a sua impedância coincide com a impedância característica da linha $Z_g = Z_0$. A restrição acima fornece o resultado útil:

$$V_1^+ = \frac{V_g}{2}, \quad \text{quando } Z_g = Z_0. \quad (2.41)$$

Para um gerador adaptado, a onda emitida pelo gerador é independente da carga.

No caso geral, a onda emitida pelo gerador depende da carga devido ao efeito de múltiplas reflexões. Especificamente, temos que:

$$V_1^+ = \frac{V_g}{1 + Z_g/Z_0 + (1 - Z_g/Z_0)\rho_{V1}}, \quad (2.42)$$

aqui ρ_{V1} é o coeficiente de reflexão no ponto de entrada da linha.

2.1.5 Interferência de Ondas e Coeficiente de Onda Estacionária

Interferência Construtiva e Destrutiva

A tensão numa linha de transmissão é geralmente uma sobreposição de duas ondas que se propagam em sentidos opostos: $\underline{V}^+(x)$ e $\underline{V}^-(x)$. A sobreposição das ondas cria um padrão de interferência:

- Quando as duas ondas estão em fase, as amplitudes somam-se, o que resulta numa amplitude mais forte.
- Inversamente, quando as ondas estão em oposição de fase, a amplitude de oscilação é diminuída.

Assim, os máximos de onda ocorrem quando $\underline{V}^+(x)$ e $\underline{V}^-(x)$ estão em fase, enquanto os mínimos de onda ocorrem quando $\underline{V}^+(x)$ e $\underline{V}^-(x)$ estão em oposição de fase.

A amplitude complexa $\underline{V}^-(x)$ está relacionada com a amplitude complexa $\underline{V}^+(x)$ através do coeficiente de reflexão:

$$\underline{V}^-(x) = \rho_V(x)\underline{V}^+(x). \quad (2.43)$$

A diferença de fase é determinada por:

$$\arg(\underline{V}^-(x)) - \arg(\underline{V}^+(x)) = \arg(\rho_V(x)). \quad (2.44)$$

Claramente, as duas ondas estão em fase quando $\rho_V(x)$ é um número positivo (interferência construtiva), e estão em oposição de fase quando o coeficiente de reflexão $\rho_V(x)$ é um número negativo (interferência destrutiva).

Uma vez que a amplitude de oscilação $|\underline{V}(x)|$ varia ao longo da linha, podemos definir o máximo e o mínimo como:

$$V_{\max} = \max |\underline{V}(x)|, \quad V_{\min} = \min |\underline{V}(x)|, \quad (2.45)$$

onde $|\underline{V}(x)| = |\underline{V}^+(x) + \underline{V}^-(x)| = |\underline{V}^+(x)| \cdot |1 + \rho_V(x)|$.



Checkpoint 10

Para linhas sem perdas (ou com perdas negligenciáveis, $\alpha \simeq 0 \implies \gamma = j\beta$) temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} |V^+(x)| &= |\underline{V}^+ e^{-j\beta x}| = \text{const.} = |V_0^+|, \\ |\rho_V(x)| &= |\rho_V e^{j2\beta x}| = \text{const.} = |\rho_{V0}|. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Deduzimos que os módulos $|V^+|$ e $|\rho_V|$ são independentes de x num regime sem perdas.

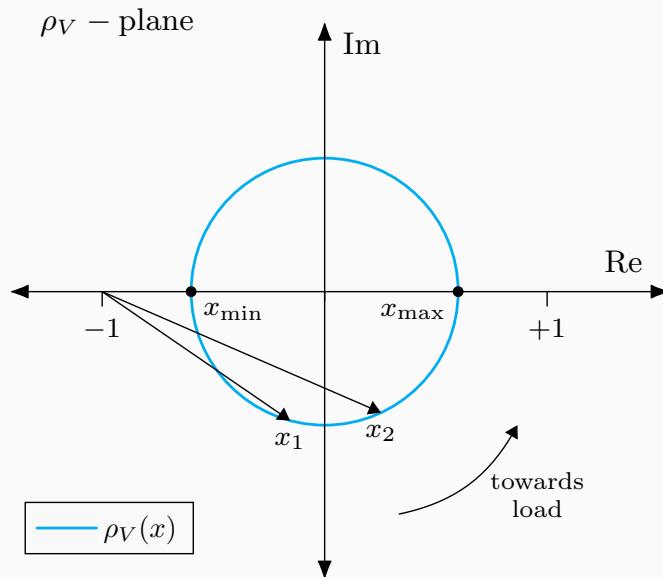


Fig. 2.6: Plano do coeficiente de reflexão.

✓ Checkpoint 10 continued

A visualização gráfica do coeficiente de reflexão é uma ferramenta importante. Para tal, representamos na figura acima o lugar geométrico de $\rho_V(x)$ no plano complexo. Cada ponto na linha de transmissão é mapeado para um ponto na circunferência de raio constante

$$|\rho_V| = |\rho_{V_0}| = \text{const.}$$

Um deslocamento na linha na direção da carga corresponde a uma rotação anti-horária ao longo da circunferência. Podemos reparar, da relação apresentada anteriormente, $|\underline{V}(x)| = |\underline{V}^+(x)| \cdot |1 + \rho_V(x)| = |\rho_V(x) - (-1)|$, que $|\underline{V}(x)|/|\underline{V}^+(x)|$ é a distância entre o ponto $-1 + j0$ e $\rho_V(x)$ no plano complexo.

É geometricamente evidente que esta distância é maximizada quando $\rho_V(x)$ é um número positivo e é minimizada quando $\rho_V(x)$ é um número negativo (como discutido anteriormente):

$$\begin{cases} \text{Máximo de tensão: } V_{\max} = |\underline{V}^+|(1 + |\rho_V|), & \text{quando } \rho_V \text{ é positivo;} \\ \text{Mínimo de tensão: } V_{\min} = |\underline{V}^+|(1 - |\rho_V|), & \text{quando } \rho_V \text{ é negativo.} \end{cases} \quad (2.47)$$

A partir de $\rho_V(x) = \rho_{V_0}e^{j2\beta x}$, vemos que os máximos/mínimos de tensão consecutivos estão distanciados por:

$$2\beta d = 2\pi \implies d = \frac{\lambda}{2},$$

isto é, por meia comprimento de onda. Faz-se o reparo que um deslocamento $x \rightarrow x + \lambda/2$ ao longo da linha corresponde a uma rotação completa ao longo da circunferência no plano complexo.

Onda Estacionária

Nesta secção vamos obter uma expressão analítica para amplitude da tensão. Por conveniência, vamos definir $\rho_{V_0} = |\rho_V|e^{j\theta}$. Assim,

$$\begin{aligned} \underline{V}(x) &= \underline{V}^+(x) + \underline{V}^-(x) \\ &= \underline{V}^+(x)[1 + \rho_V(x)] \\ &= \underline{V}_0^+ e^{-j\beta x} (1 + |\rho_V| e^{j(\theta + 2\beta x)}) \end{aligned} \quad (2.48)$$

com módulo dado por:

$$|\underline{V}(x)| = |\underline{V}_0^+| \sqrt{1 + |\rho_V|^2 + 2|\rho_V| \cos(\theta + 2\beta x)}. \quad (2.49)$$

Estas expressões são válidas para meios sem perdas (ou $\alpha \approx 0$).

A variação temporal da onda é dada por:

$$v(x, t) = \text{Re}\{\underline{V}(x)e^{j\omega t}\}. \quad (2.50)$$

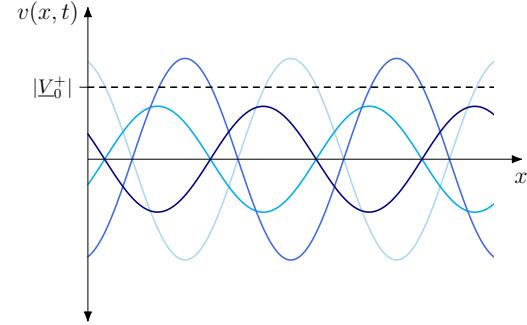


Fig. 2.7: Exemplo de uma onda estacionária, para os parâmetros $|\underline{V}_0^+| = 1 \text{ V}$, $|\rho_V| = 0.5$ e $\theta = \pi/4 = 45^\circ$.

Relação de Ondas Estacionárias

Por definição, a relação de ondas estacionárias (*standing wave ratio*, SWR), é a razão entre o máximo e o mínimo da tensão na linha:

$$\text{SWR} \equiv \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{1 + |\rho_V|}{1 - |\rho_V|}. \quad (2.51)$$

O SWR caracteriza o nível de reflexões na linha de transmissão. Podemos verificar que: $1 \leq \text{SWR} < +\infty$.

O valor mínimo de SWR, $\text{SWR} = 1$, corresponde a uma linha terminada com uma carga adaptada, ou seja, com reflexões mínimas (não existe onda refletida). Por outro lado, o valor máximo de SWR, $\text{SWR} \rightarrow +\infty$, corresponde a uma linha terminada com uma carga reativa e está associado a uma onda completamente estacionária ($|\rho_V| = 1$).

Estes resultados têm implicações imediatas, uma vez que SWR baixos traduzem uma maior transferida de potência para a carga, e o contrário para SWR altos, que indicam uma maior quantidade de energia refletida, o que resulta em perdas e potencialmente interferências devido às ondas refletidas.

2.1.6 Fluxo de Potência nas Linhas de Transmissão

Nesta secção voltamos a nossa atenção para o fluxo de potência nas linhas de transmissão. Num ponto genérico x , a potência (média-temporal) transferida na direção $+\hat{x}$ é dada pela fórmula da teoria de circuitos*:

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\underline{V}(x)\underline{I}^*(x)\}, \quad (2.52)$$

aqui, o asterisco sobreescrito denota o conjugado. Utilizando as decomposições em 2.10,

$$\underline{V}(x) = \underline{V}^+(x) + \underline{V}^-(x), \quad \underline{I}(x) = \frac{\underline{V}^+(x)}{Z_0} - \frac{\underline{V}^-(x)}{Z_0},$$

podemos escrever a potência como:

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ \frac{|\underline{V}^+(x)|^2}{Z_0^*} - \frac{|\underline{V}^-(x)|^2}{Z_0^*} + \frac{1}{Z_0^*} \left[\overbrace{\underline{V}^{+*}(x)\underline{V}^-(x)}^A - \overbrace{\underline{V}^+(x)\underline{V}^{-*}(x)}^{A^*} \right] \right\}.$$

Regime sem Perdas

Para uma linha sem perdas, Z_0 é real. Além disto, as amplitudes de \underline{V}^+ e \underline{V}^- são constantes ao longo da linha:

$$|\underline{V}^\pm(x)| = |\underline{V}_0^\pm e^{\mp j\beta x}| = \text{const.} = |\underline{V}_0^\pm|.$$

Portanto, o fluxo de potência em qualquer ponto x pode ser expresso como:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ - \mathcal{P}^- = \mathcal{P}^+(1 - |\rho_V|^2) \quad [\text{independente de } x, \text{ não há perdas}], \quad \text{com} \quad \mathcal{P}^+ = \frac{1}{2} \frac{|\underline{V}_0^+|^2}{Z_0}, \quad \mathcal{P}^- = \frac{1}{2} \frac{|\underline{V}_0^-|^2}{Z_0},$$

uma vez que o último termo é da forma $c(A - A^*)$, $c \in \mathbb{R}$, que resulta num imaginário puro.

Os termos $\mathcal{P}^+, \mathcal{P}^-$ têm uma interpretação física imediata: determinam a potência transportada pelas ondas “para frente” e “para trás”. Os dois termos somam-se com sinais diferentes porque as duas ondas têm sentidos opostos.

Regime com Perdas

Considere-se um cenário onde a potência fornecida à carga (\mathcal{P}_2) é uma especificação. Definimos \mathcal{P}_1 como a potência transferida do gerador para a linha. A diferença entre \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 é a potência dissipada na linha (\mathcal{P}_{dis}):

$$\mathcal{P}_{\text{dis}} = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 \quad (2.53)$$

Para determinar \mathcal{P}_{dis} , notamos que para dissipaçāo suficientemente fraca:

$$\mathcal{P}_1 \approx \frac{1}{2} |\underline{V}_1^+|^2 (1 - |\rho_{V1}|^2), \quad \mathcal{P}_2 \approx \frac{1}{2} |\underline{V}_2^+|^2 (1 - |\rho_{V2}|^2). \quad (2.54)$$

As amplitudes das ondas incidentes e os coeficientes de reflexão na entrada e na carga relacionam-se como:

$$|\underline{V}_2^+| = |\underline{V}_1^+| e^{-\alpha d}, \quad |\rho_{V2}| = |\rho_{V1}| e^{2\alpha d}, \quad (2.55)$$

onde α é a constante de atenuação da linha. Usando estes resultados e uma aproximação de Taylor de $e^{\alpha d}$,

$$\frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}_2} = \frac{(1 - e^{-4\alpha d} |\rho_{V2}|^2)}{e^{-2\alpha d} (1 - |\rho_{V2}|^2)} = \frac{e^{2\alpha d} + e^{-2\alpha d} |\rho_{V2}|^2}{1 - |\rho_{V2}|^2} \approx \boxed{1 + 2\alpha d \frac{1 + |\rho_{V2}|^2}{1 - |\rho_{V2}|^2}}. \quad (2.56)$$

Uma vez que $|\rho_{V2}| = (\text{SWR} - 1)/(\text{SWR} + 1)$, podemos chegar à relação útil:

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{dis}} = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 \simeq \mathcal{P}_2 \cdot \alpha d \left(\text{SWR} + \frac{1}{\text{SWR}} \right)}. \quad (2.57)$$

*O fator de 1/2 aparece uma vez que utilizamos as amplitudes e não os valores eficazes.

2.2 Introdução à Carta de Smith

O diagrama de Smith é uma representação gráfica do plano do coeficiente de reflexão com uma grelha curvilínea de círculos de resistência constante e círculos de reatância constante desenhados dentro de um círculo unitário.

2.2.1 Carta de Smith das Impedâncias

A carta/diagrama de impedâncias consiste na representação das curvas de *impedância constante* no plano de coeficiente de reflexão (ρ_V). Como já previamente visto, existe uma relação direta entre a impedância e o coeficiente de reflexão:

$$z = \frac{1 + \rho_V}{1 - \rho_V} \iff \rho_V = \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (2.58)$$

z é denominada de *impedância normalizada* (ou impedância reduzida), definida como a razão entre Z_x (em qualquer ponto da linha) e a impedância característica da linha, Z_0 .

$$z = r + jx = \frac{Z_x}{Z_0}. \quad (2.59)$$

Construímos o gráfico derivando o *locus* das curvas $r = \text{const.}$ e $x = \text{const.}$ no plano ρ_V . Assim, escrevemos o coeficiente de reflexão em termos das suas partes real e imaginária:

$$\rho_V = u + jv, \quad \text{aqui } u \equiv \text{Re}\{\rho_V\} \text{ e } v \equiv \text{Im}\{\rho_V\}. \quad (2.60)$$

partindo de $z = (1 + \rho_V)/(1 - \rho_V)$, admitimos:

$$r + jx = \frac{1 + u + jv}{1 - u - jv} = \frac{(1 + u)^2 + v^2}{(1 - u)^2 + v^2} - j \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2}. \quad (2.61)$$

Assim, o *locus* de $r = \text{const.}$ é determinado pelos pontos (u, v) tais que:

$$r = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2}, \quad (2.62)$$

enquanto que o *locus* de $x = \text{const.}$ é determinado pelos pontos tais que:

$$x = \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2}. \quad (2.63)$$

Ambos os *locus*, correspondem a uma família de circunferências no plano ρ_V . Após alguma manipulação algébrica é possível mostrar que as condições anteriores são equivalentes a:

$$u^2 - \frac{2r}{1+r}u + v^2 = \frac{1-r}{1+r}, \quad (u-1)^2 + \frac{2v}{x} = 0 \quad (2.64)$$



Checkpoint 11

Completando os “quadrados” no lado esquerdo das equações, encontramos:

$$\left(u - \frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{(1+r)^2} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{locus de } r = \text{const.} \end{matrix} \quad (u-1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{locus de } x = \text{const.} \end{matrix} \quad (2.65)$$

- O *locus* $r = \text{const.}$ consiste nas circunferências centradas em $(u, v) = \left(\frac{r}{1+r}, 0\right)$ com raio $\frac{1}{1+r}$.
- O *locus* $x = \text{const.}$ consiste nas circunferências centradas em $(u, v) = \left(1, \frac{1}{x}\right)$ com raio $\frac{1}{|x|}$.

✓ Checkpoint 11 continued

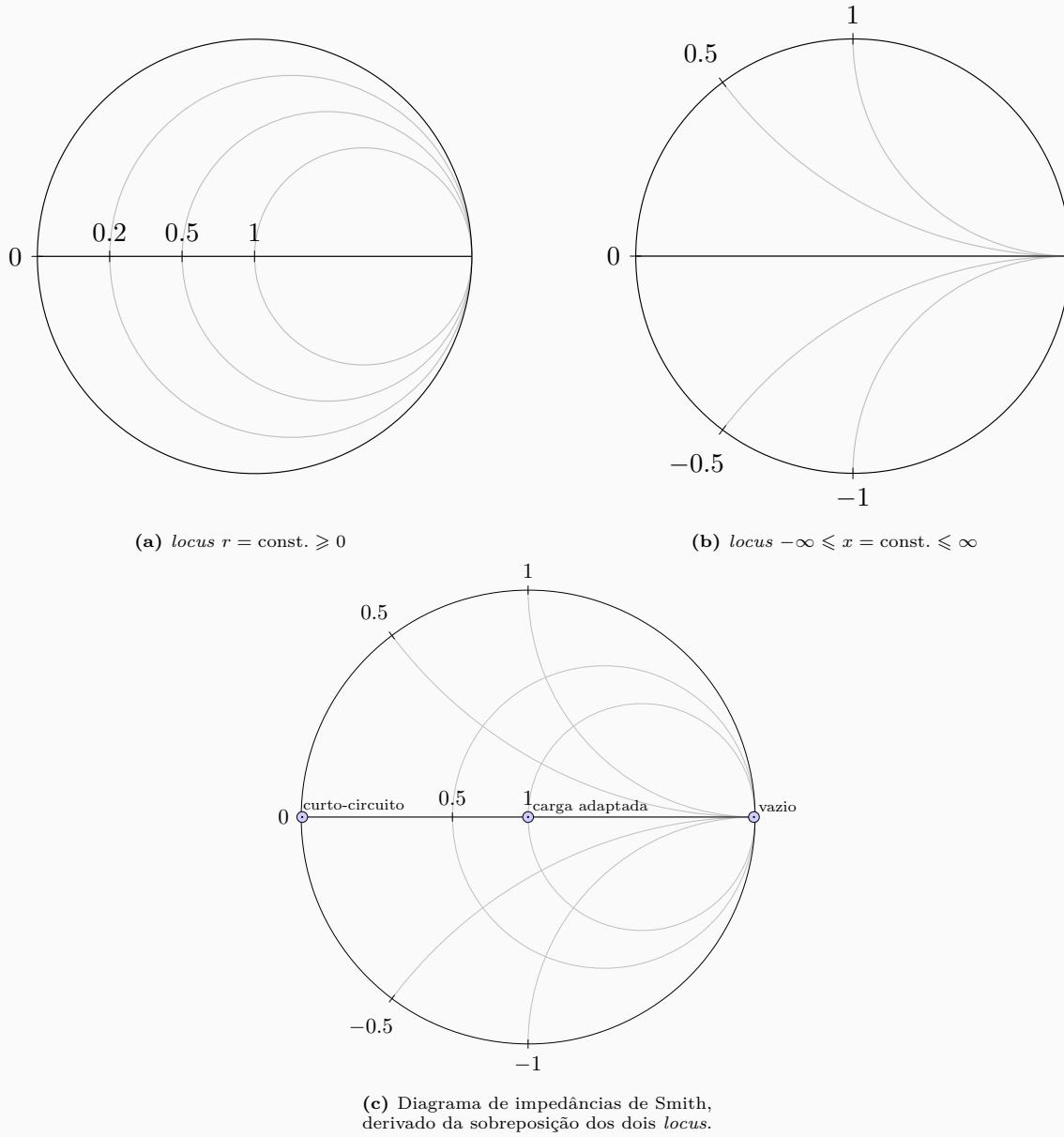


Fig. 2.8: Dedução da Carta de Smith das Impedâncias.

Qualquer impedância passiva está associada a um coeficiente de reflexão tal que $|\rho_V| \leq 1$. A região de interesse para problemas práticos é o interior da circunferência $r = 0$. O diagrama de Smith representa um vasto conjunto de curvas $r = \text{const.}$ e $x = \text{const.}$ dentro desta região. A carga adaptada ($\rho_V = 0$) é mapeada para o centro do gráfico.

Impedância, Coeficiente de Reflexão e SWR

É possível identificar uma dada impedância reduzida $z = r_0 + jx_0$ no diagrama de impedâncias. Tal é alcançado através da identificação das curvas $r = r_0$ e $x = x_0$ no gráfico. A interseção destas duas curvas fornece o *locus* de z . Da mesma forma, dado um ponto genérico no gráfico, é possível ler as coordenadas $r = r_0$ e $x = x_0$, associadas a este ponto e determinar a impedância reduzida.

Impedância

O diagrama de Smith é uma representação das curvas $z = \text{const.}$ no plano ρ_V , o *locus* de z coincide com a representação de ρ_V no plano complexo. Supondo uma impedância reduzida de:

$$z = 0.5 + 1j \quad (2.66)$$

A respetiva ilustração gráfica é visualizada na Fig. 2.9.

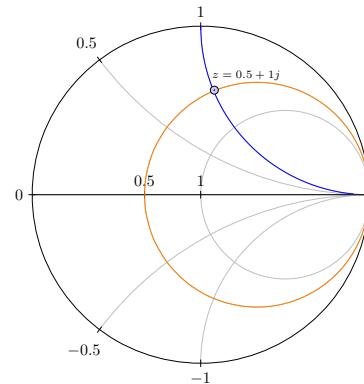


Fig. 2.9: Representação de $z = 0.5 + 1j$ no diagrama.

Coeficiente de Reflexão e SWR

A circunferência centrada na origem que contém o ponto z é conhecida como a circunferência de $\text{SWR} = \text{const.}$. Todos os pontos da linha de transmissão são mapeados para esta circunferência.

- A amplitude de $|\rho_V|$ corresponde à “distância” do *locus* de impedância em relação ao centro do diagrama de Smith.
- A fase do coeficiente de reflexão, $\arg(\rho_V)$, é determinada pelo ângulo formado entre o *locus* da impedância e o eixo horizontal.

Estes valores são obtidos utilizando uma escala horizontal auxiliar localizada na parte inferior do diagrama e uma escala angular circular em volta do diagrama, respetivamente. Similarmente o SWR da linha pode ser calculada utilizando outra escala horizontal na parte inferior do gráfico.

! Nota 14

É importante notar que para obter $|\rho_V|$ e o SWR, deve-se primeiro determinar a interseção da circunferência $\text{SWR} = \text{const.}$ com o eixo horizontal negativo. A interseção é então projetada na escala horizontal desejada.

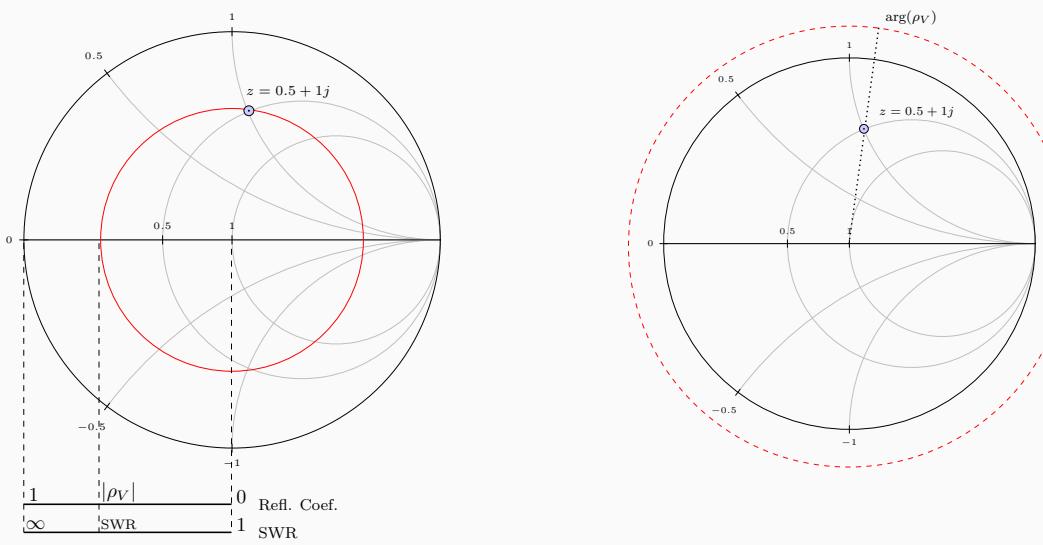
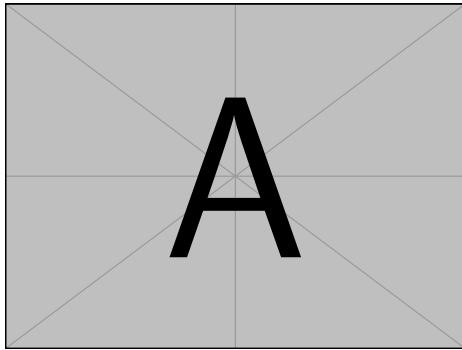


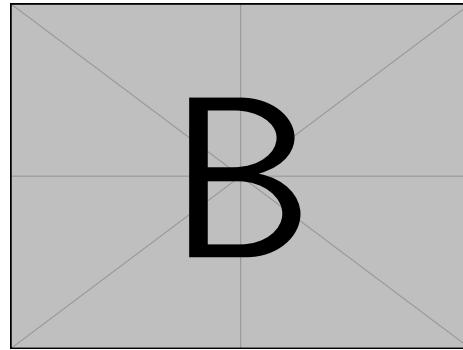
Fig. 2.10: Visualização gráfica dos parâmetros da linha de transmissão.

Deslocamento ao longo da linha

Um deslocamento ao longo da linha corresponde a uma rotação do coeficiente de reflexão no plano complexo. O *locus* do coeficiente de reflexão no plano complexo corresponde à circunferência $\rho_V(x) = \rho_{V0}e^{j2\beta x}$. Esta circunferência é a circunferência SWR = const.



(a) Deslocamento no sentido do gerador.



(b) Deslocamento no sentido da carga.

Fig. 2.11: Visualização gráfica do deslocamento na linha

Nota 15

Assim, para a circunferência $\text{SWR} = \text{const.}:$

- Um deslocamento no sentido do gerador corresponde a uma rotação com os ponteiros do relógio.
- Um deslocamento no sentido da carga corresponde a uma rotação contra os ponteiros do relógio.
- Uma rotação completa no diagrama corresponde a um deslocamento de 0.5λ na linha. Consequentemente, pontos na linha que estão separados por múltiplos inteiros de 0.5λ são mapeados para o mesmo ponto do gráfico.

Tensão e Corrente

A tensão e a corrente na linha de transmissão podem ser relacionadas ao coeficiente de reflexão da seguinte forma:

$$\underline{V} = \underline{V}^+(1 + \rho_V), \quad \underline{I} = \frac{\underline{V}^+}{Z_0}(1 - \rho_V). \quad (2.67)$$

Os termos $1 + \rho_V$ e $1 - \rho_V$ podem ser graficamente determinados com a ajuda do diagrama de Smith:

- $1 + \rho_V$ Começa no ponto de curto-circuito e termina no *locus* da impedância.
- $1 - \rho_V$ Começa no ponto de circuito aberto e termina no *locus* da impedância.

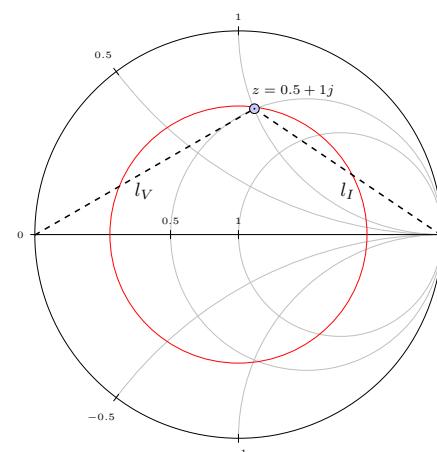
Formalmente, estas propriedades podem ser expressas matematicamente como:

$$1 + \rho_V = l_V/l_0 e^{j\theta_V}, \quad 1 - \rho_V = l_I/l_0 e^{-j\theta_I} \quad (2.68)$$

Os ângulos θ podem ser encontrado utilizando a escala angular embutida no gráfico. l_0 é o raio do diagrama de Smith, unitário em unidades normalizadas.

É também importante esclarecer que:

$$\frac{|\underline{V}|}{|\underline{V}^+|} = \frac{l_V}{l_0}, \quad \frac{|\underline{I}|}{|\underline{I}^+|} = \frac{l_I}{l_0} \quad (2.69)$$

**Fig. 2.12:** Representação da tensão e corrente no diagrama.

Finalmente, os máximos e mínimos da tensão e corrente são caracterizados por um ρ_V real: O ponto na circunferência $SWR = \text{const.}$ com ρ_V positivo (negativo) está no eixo horizontal positivo (negativo).

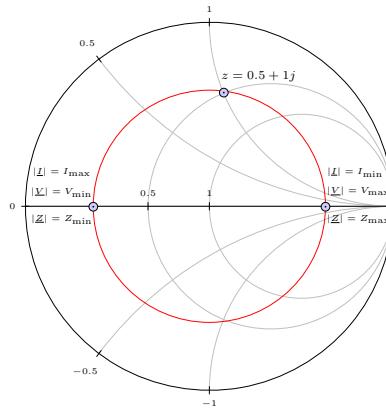


Fig. 2.13: Localização dos máximos e mínimos da corrente, tensão e impedância



Exercício 10

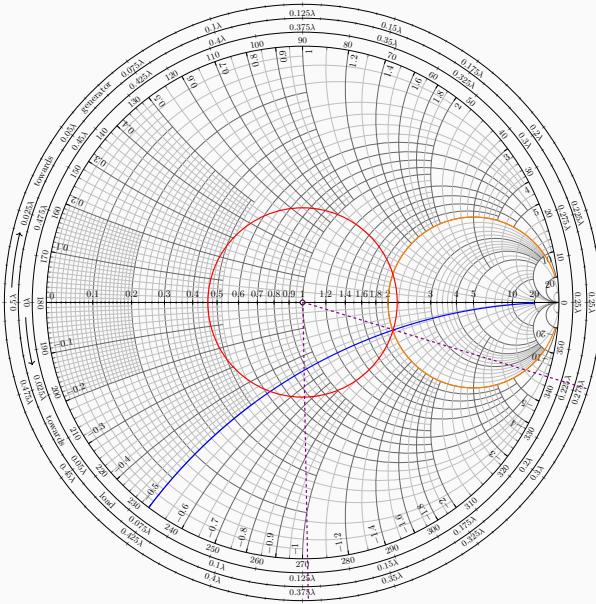
A impedância normalizada $z = 2 - j0.5$ dista 0.6λ da entrada de uma linha de transmissão sem perdas. Usando o diagrama de Smith calcule:

- a impedância normalizada na entrada da linha.
- a distância da entrada ao ponto de tensão máxima mais próximo.
- a distância da carga ao ponto de tensão mínima.
- o coeficiente de onda estacionária.

Solução: A impedância normalizada na entrada da linha corresponde a um deslocamento na linha no sentido do gerador (sentido horário). Admitindo que:

$$0.6\lambda = 0.5\lambda + 0.1\lambda$$

e sabendo que um deslocamento de 0.5λ mapeia a impedância para o mesmo ponto do gráfico, basta apenas analisar o deslocamento de 0.1λ :



? Exercício 10 continued

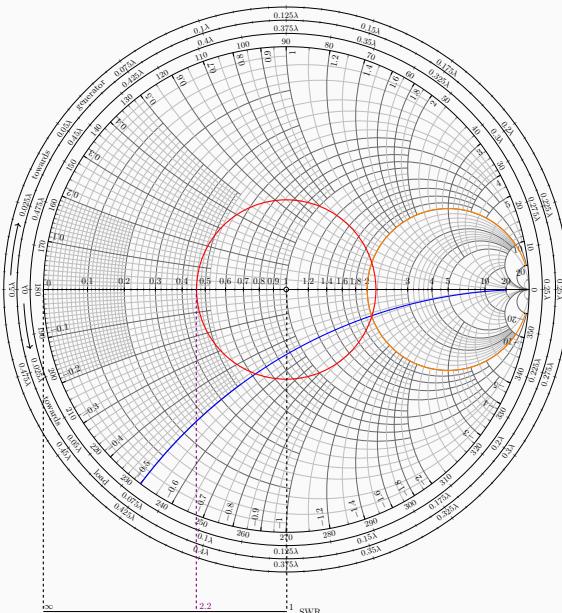
O ponto de tensão máximo corresponde à interseção da circunferência $\text{SWR} = \text{const.}$ com o eixo horizontal positivo. Admitindo o sentido da carga (anti-horário) temos:

$$(0.374 - 0.25)\lambda = 0.124\lambda$$

O ponto de tensão mínima corresponde à interseção da circunferência $\text{SWR} = \text{const.}$ com o eixo horizontal negativo. A distância da carga ao ponto de tensão mínima subentende o sentido do gerador (horário), assim:

$$(0.5 - 0.374)\lambda = 0.226\lambda$$

O coeficiente de onda estacionária é obtido por inspeção da projeção do ponto de interseção entre o eixo horizontal e a circunferência $\text{SWR} = \text{const.}$ na escala horizontal respetiva ao coeficiente:



O coeficiente medido indica que $\text{SWR} = 2.2$ linear.

2.2.2 Carta de Smith das Admitâncias

A carta de Smith pode ser usada para admitâncias normalizadas da mesma forma que é usada para impedâncias normalizadas, e pode ser usada para converter entre impedâncias e admitâncias. A técnica posterior baseia-se no facto de que, em forma normalizada, a impedância equivalente de uma carga z_L conectada a uma linha de $\lambda/4$ é:

$$z_{in} = \frac{1}{z_L} \quad (2.70)$$

Uma vez que uma revolução completa em torno da carta de Smith corresponde a um comprimento de linha de $\lambda/2$, uma transformação de $\lambda/4$ é equivalente a uma rotação de 180°

! Nota 16

A representação de z no gráfico da impedância corresponde a um ponto diametralmente oposto à representação de y no gráfico da admitância. Em particular, os locais do ponto de circuito aberto (ou de curto-circuito) nos gráficos de impedância e admitância diferem por uma rotação de 180° . Além disso, a representação da tensão (corrente ou impedância) máxima (ou mínima) nos dois gráficos difere por uma rotação de 180° .

2.3 Sistemas de Adaptação de Impedâncias

- A potência máxima é entregue quando a carga é adaptada à linha (assumindo que o gerador está adaptado), minimizando as perdas de potência na linha de alimentação.
- A adaptação de impedâncias em componentes receptores sensíveis (antena, amplificador de baixo ruído, etc.) pode melhorar a relação sinal-ruído do sistema.
- A adaptação de impedâncias numa rede de distribuição de energia pode reduzir erros de amplitude e fase.

Desde que a impedância da carga tenha uma parte real positiva, é sempre possível encontrar uma rede de adaptação.

2.3.1 Máxima Transferência de Potência

O objetivo primário da adaptação de impedâncias é assegurar a transferência máxima de potência entre componentes ajustando os seus valores de impedância.

Admitindo um gerador ideal de resistência interna $R_g + jX_g$, a tensão de circuito aberto \underline{V}_g é proporcional ao campo elétrico incidente. A impedância do gerador equivalente é conhecida como a impedância da antena e depende do tipo de antena, das suas dimensões e da frequência. A potência extraída da onda incidente depende da carga ($Z_L = R_L + jX_L$). Para calcular P_L , supomos que a corrente na carga é:

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{V}_g}{Z_g + Z_L} \quad (2.71)$$

A potência fornecida à carga é:

$$P_L = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\underline{V}_L \underline{I}_L^*\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{Z_L\} |\underline{I}_L|^2 \quad (2.72)$$

Em termos dos parâmetros do gerador pode ser escrito como:

$$P_L = \frac{|\underline{V}_g|^2}{2} \frac{R_L}{(R_L + R_g)^2 + (X_L + X_g)^2}. \quad (2.73)$$

Os parâmetros do gerador são fixos: dependem do tipo de antena e das propriedades do campo incidente. Assim, P_L pode ser considerado como uma função dos parâmetros de carga R_L , X_L . P_L atinge o seu máximo quando $X_L + X_g = 0$. Para $X_L + X_g = 0$, a potência fornecida à carga reduz-se a:

$$P_L = \frac{|\underline{V}_g|^2}{2} \frac{R_L}{(R_L + R_g)^2}. \quad (2.74)$$

É evidente que a função $\frac{R_L}{(R_L + R_g)^2}$ é positiva e desaparece para $R_L = 0$ e $R_L \rightarrow +\infty$.

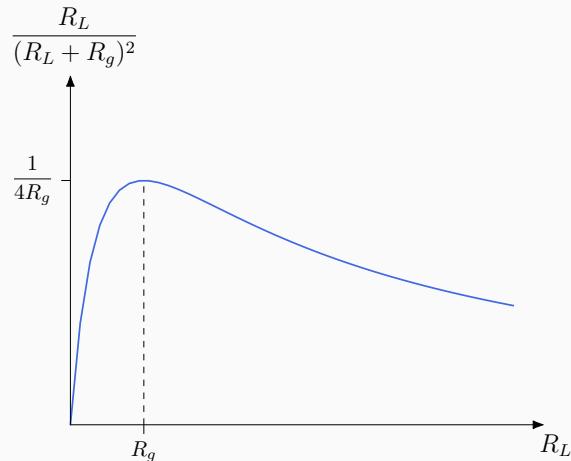


Checkpoint 12

O máximo é atingido quando $R_L = R_g$. A potência extraída do gerador (potência extraída da onda incidente) é maximizada quando a carga é *conjugadamente* adaptada à impedância do gerador:

$$P_{L,\max} = P_a = \frac{|\underline{V}_g|^2}{8R_g} \quad Z_L = Z_g^* = R_g - jX_g$$

A potência P_a definida pela equação acima é a potência disponível (*available*) no gerador.



2.3.2 Redes de Adaptação

Uma rede de adaptação consiste num sistema projetado para maximizar a transferência de potência entre uma fonte e uma carga. Idealmente, a rede de adaptação deve ser sem perdas, garantindo que não extrai potência do próprio gerador. Para alcançar uma transferência de potência eficiente e minimizar a perda de sinal.

Para alcançar uma transferência eficiente de potência e minimizar reflexões, a rede de adaptação transforma a impedância da carga na impedância conjugada do gerador, $Z_L \rightarrow Z_g^*$. Desta forma, a rede de adaptação assegura que toda a potência disponível no gerador é transferida para a carga ($P_L = P_a$).

Apresentamos uma primeira intuição na Fig. 2.14.

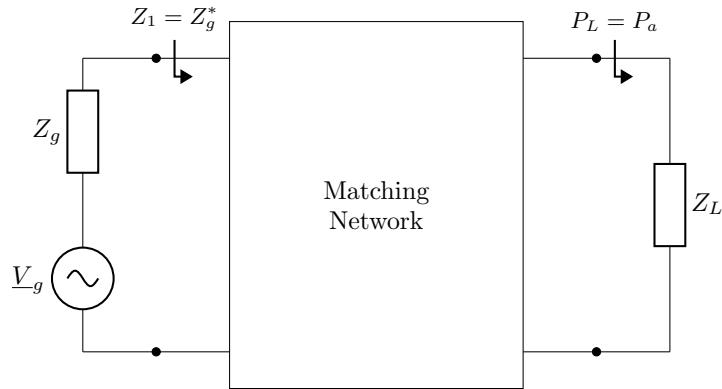


Fig. 2.14: Rede de adaptação.

Para frequências baixas é comum a utilização de componentes como condensadores, bobinas e transformadores.

Para altas frequências, as soluções anteriores são impraticáveis, e redes baseadas em elementos distribuídos — especificamente, soluções que utilizam linhas de transmissão — são mais comuns.

Concentremo-nos num cenário em que um gerador fornece potência a uma carga através de uma linha de transmissão.

A maneira mais óbvia de resolver o problema de adaptação de impedâncias é colocar **uma rede** de adaptação imediatamente **após o gerador**, como ilustrado na Fig. 2.15 (configuração I). O propósito desta rede de adaptação é garantir que $Z'_1 = Z_g^*$.

No entanto, para linhas longas, esta configuração não é apropriada: (i) o design da rede de adaptação depende do comprimento da linha porque Z_1 varia com l ; (ii) mesmo que o gerador esteja adaptado ao resto do sistema, a própria linha é tipicamente desadaptada da carga, levando a problemas operacionais com reflexões.

Isto leva a que:

- Uma linha operada com reflexões é mais sensível ao efeito das perdas. Como demonstrado, a potência dissipada numa linha de transmissão é governada pelo SWR: $P_{\text{dis}} \approx P_L \cdot \alpha d(\text{SWR} + 1/\text{SWR})$.
- Para um P_L fixo, a tensão de pico (V_{\max}) numa linha operada com reflexões é maior do que numa linha operada sem reflexões. A tensão de pico não pode exceder um certo valor (V_{DB}), determinado pelo fenômeno de “ruptura dielétrica” (*dielectric breakdown*). Ultrapassar este limite compromete a integridade do dielétrico.

Por estas razões, é desejável operar a linha sem reflexões. Isto é conseguido através da configuração II, apresentada na Fig. 2.15, em que são utilizadas **duas redes de adaptação**:

- A função da rede de adaptação junto à carga é adaptar a carga à linha, isto é, transformar Z_L em Z'_0 . Nessas circunstâncias, a impedância equivalente na entrada da linha é $Z_1 = Z_0$.
- A função da rede de adaptação junto ao gerador é adaptar a linha ao gerador, ou seja, transformar $Z_1 = Z_0$ em $Z'_1 = Z_g^*$.

As duas redes garantem que a linha é operada sem reflexões e com transferência máxima de potência do gerador para a carga.

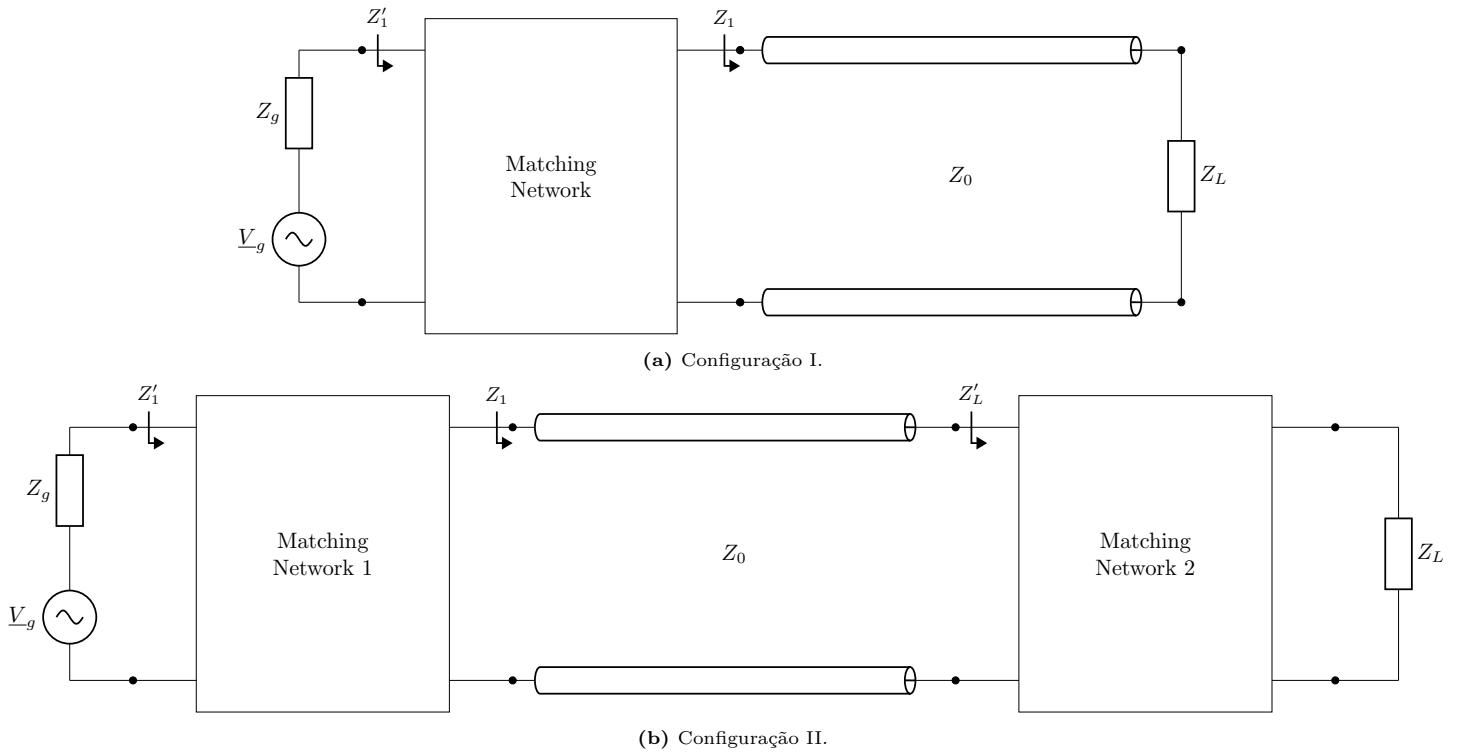


Fig. 2.15: Redes de adaptação para altas frequências.

2.3.3 Transformador de impedância de quarto de onda

Carga Real

A rede de adaptação mais simples consiste numa linha com um quarto do comprimento de onda. A impedância à entrada de uma linha com $l = \lambda/4$ e impedância característica Z_0 é dada por:

$$Z_{in} = \frac{Z_{0T}^2}{Z_L}. \quad (2.75)$$

Assim, uma carga resistiva ($Z_L = R_L$) pode ser adaptada a uma linha de transmissão com impedância característica Z_0 quando a impedância característica do transformador (Z_{0T}) satisfaz:

$$Z_{0T} = \sqrt{Z_0 R_L} \quad (2.76)$$

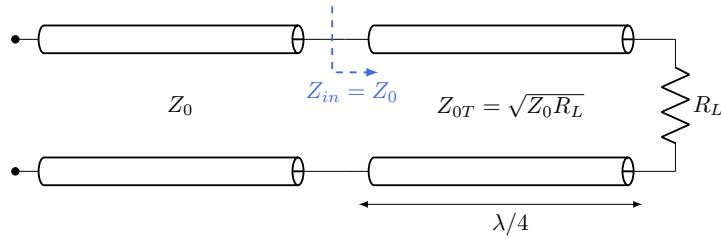


Fig. 2.16: Adaptação de uma carga resistiva a uma linha

! Nota 17

A adaptação é alcançada para uma única frequência de operação. Quando a frequência é desviada da frequência de operação, a adaptação torna-se imperfeita. Os transformadores de impedância são assim tipicamente caracterizados por uma largura de banda de operação.

A solução descrita pode ser generalizada para o problema da adaptação de duas linhas de transmissão diferentes com impedâncias Z_{01} e Z_{02} . Neste contexto, a impedância do transformador é $Z_{0T} = \sqrt{Z_{01}Z_{02}}$. Quando as linhas estão adaptadas, uma onda que se propaga na linha 1 pode ser transmitida para a linha 2 sem gerar reflexões na linha 1. Se a linha 1 está adaptada à linha 2, então a linha 2 também está adaptada à linha 1:

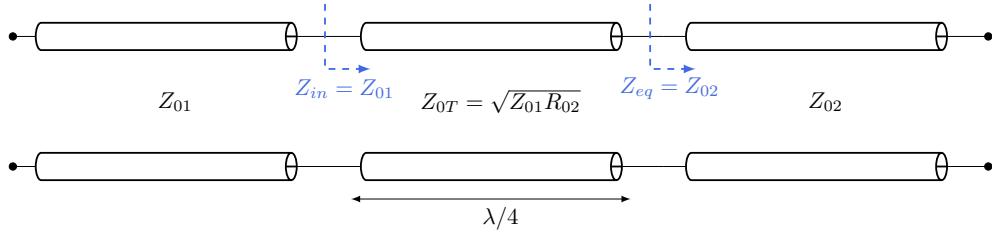


Fig. 2.17: Adaptação de duas linhas de transmissão.

O coeficiente de onda estacionária pode ser representado como uma função da frequência. Na frequência de *design*, f_0 , para a qual $l_T = \lambda/4$, o coeficiente de onda estacionária tem o valor mínimo ($\text{SWR} = 1$). Quando a frequência é desviada de f_0 , a reflexão aumenta. A largura de banda da rede de adaptação é tipicamente definida pela condição $\text{SWR} \leq 2$ (isto é equivalente a dizer que $|\rho_V| \leq 1/3$).

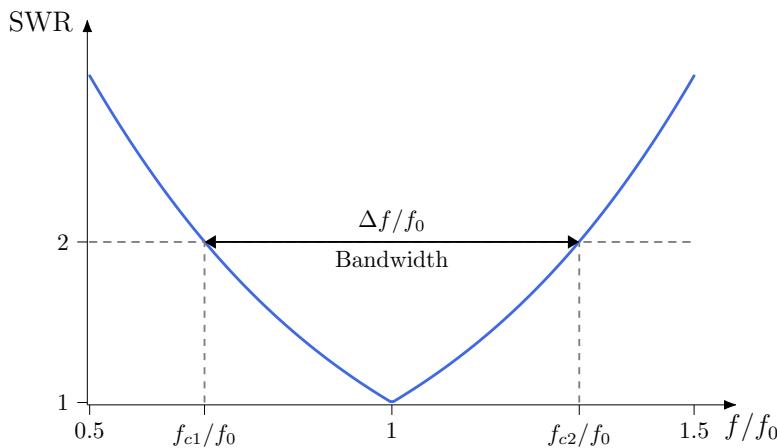


Fig. 2.18: Evolução do SWR num transformador de impedância de quarto de onda em função da frequência.

Se assumirmos que a frequência de operação está próxima da frequência f_0 ,

$$|\rho_V| \approx \frac{|Z_L - Z_0|}{2\sqrt{Z_0 Z_L}} |\cos(\theta)|, \text{ para } \theta \approx \frac{\pi}{2}.$$

Para ondas TEM, temos:

$$\theta = \beta l = \frac{2\pi f}{v_{ph}} \frac{v_{ph}}{4f_0} = \frac{\pi f}{2f_0}$$

Nota: A largura de banda fracional é normalmente expressa como uma percentagem, $100\Delta f/f_0\%$. A largura de banda do transformador aumenta à medida que Z_L se aproxima de Z_0 .

Carga Genérica

O transformador pode ser generalizado para cargas arbitrárias (complexas) $Z_L = R_L + jX_L$. Para tal é inserida uma linha com comprimento d entre a secção do transformador de quarto de onda e a carga, de modo a transformar a impedância de carga complexa Z_L numa carga de valor real R_{eq} . A impedância de uma linha (Z_x) é real nos pontos onde a amplitude da tensão atinge um máximo ou um mínimo. Assim, a distância d deve ser tal que à entrada da linha adicional (com comprimento d) tenhamos um máximo de tensão ou um mínimo de tensão.

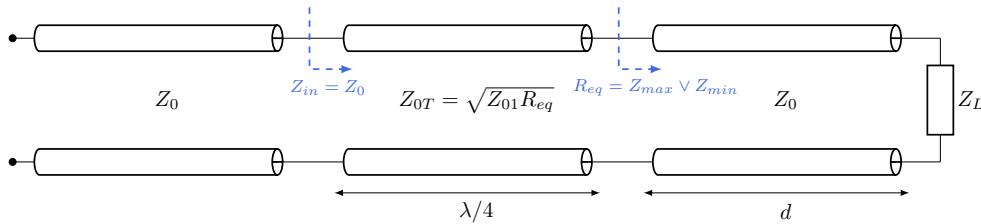


Fig. 2.19: Adaptação de uma linha genérica.

Para encontrarmos o comprimento d fazemos uso da Carta de Smith. A solução que maximiza a largura de banda é a associada à linha de menor comprimento (fator de decisão entre Z_{\min} e Z_{\max}), $d := \min(\text{dist. min}, \text{dist. max})$.

Exercício 11

I. Considere um cabo coaxial, sem perdas, de comprimento 9.9 m e impedância característica 50Ω . Este cabo é alimentado por um gerador com tensão em vazio 400 V, impedância interna 50Ω e frequência da portadora $f_0 = 100$ MHz. A impedância reduzida $0.2 + 0.85j$ corresponde à impedância medida a 6.2 m da carga. Considere que a velocidade de propagação em todas as linhas é igual a c_0 . Use a Carta de Smith na resolução de todas as alíneas, exceto a d).

- Calcule o coeficiente de onda estacionária, o coeficiente de reflexão da tensão na carga e a impedância da carga do cabo.
- Calcule a tensão e a corrente na carga.

II. Pretende-se adaptar o cabo coaxial utilizando um transformador de impedâncias com um troço de quarto de comprimento de onda.

- Calcule a distância à carga do ponto de inserção do troço de transformador (d), o seu comprimento (l_T) e a sua impedância característica (Z_{0T}).
- Calcule a potência entregue à carga, antes e depois de introduzir o sistema de adaptação de impedâncias. Comente o resultado obtido.
- Esboce o andamento da amplitude da tensão ao longo dos troços de cabo coaxial não adaptados.

Solução: Por inspeção direta do diagrama, após traçada a circunferência do coeficiente de onda estacionária constante, obtemos:

$$\text{SWR} = 9, \quad |\rho_L| = 0.8$$

Por conseguinte, reconhecemos que:

$$\lambda = \frac{c}{f} = 3 \text{ m}$$

Adquirido o comprimento de onda podemos converter a distância da carga dada bem como o comprimento da linha de transmissão:

$$6.2 \text{ m} = 2.067\lambda = 4 \times 0.5\lambda + 0.067\lambda = 0.067\lambda \quad l = 9.9 \text{ m} = 3.3\lambda$$

\uparrow 4 rotações em torno do diagrama

Por inspeção do diagrama deduzimos a impedância normalizada, dada pela reta que interseca a posição 0.453λ (azul claro na Carta de Smith):

$$0.067\lambda + 0.386\lambda = 0.453\lambda \rightarrow z_L = 0.12 + 0.3j \quad (\text{sentido carga})$$

\uparrow posição da impedância
0.2 + 0.85j no diagrama

Ainda na reta azul, obtemos o argumento do coeficiente de reflexão, quando interseca a escala circular dos ângulos.

$$\arg(\rho_L) = 146^\circ \rightarrow \rho_L = 0.8e^{j146^\circ}$$

A tensão e a corrente na carga possuem a seguinte forma:

$$\underline{V}_L = \underline{V}_L^+ (1 + \rho_L), \quad \underline{I}_L = \underline{I}_L^+ (1 - \rho_L).$$

Como estamos perante uma linha sem perdas, podemos afirmar que $|\underline{V}_L^+|$ é constante ao longo da linha. Por outro lado, estamos perante um gerador adaptado, assim:

$$\underline{V}_{in}^+ = \frac{\underline{V}_g}{2} = 200 \text{ [V]} \rightarrow \underline{V}_L^+ = |\underline{V}_{in}^+|e^{-j\beta l} = 200e^{-j108^\circ}$$

Subsequentemente, $1 + \rho_L$ é obtido através da reta verde à esquerda no diagrama:

$$|1 + \rho_L| = l_V/l_0 = 0.56, \quad \arg(1 + \rho_L) = 53^\circ$$

? Exercício 11 continued

Finalmente,

$$V_L = 112.5e^{-55^\circ} [\text{V}]$$

A corrente é obtida de forma análoga com base na reta verde à direita. Admitindo que:

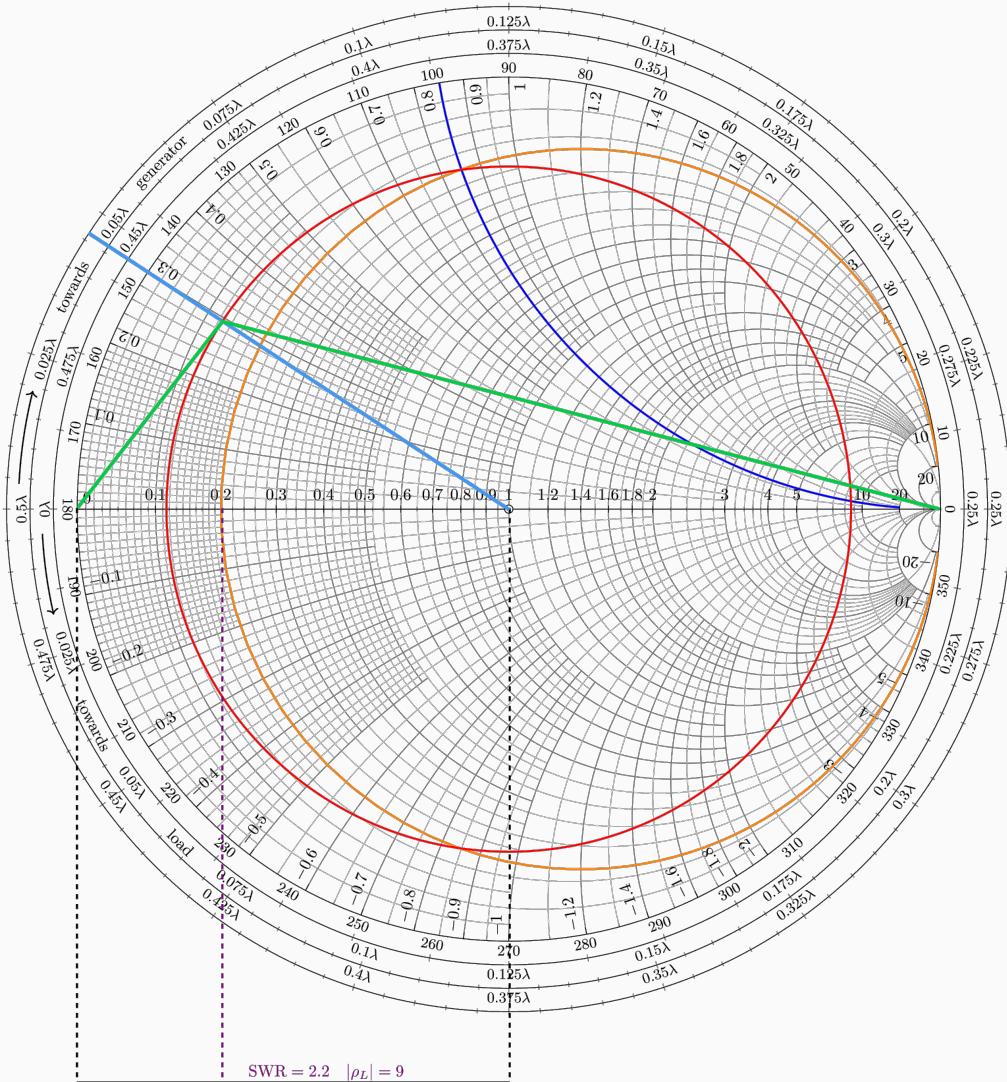
$$I_L^+ = \frac{V_L^+}{Z_0} = 4e^{-j108^\circ} [\text{A}]$$

e obtendo $1 - \rho_L$ por inspeção do diagrama:

$$|1 - \rho_L| = l_I/l_0 = 1.72, \quad \arg(1 - \rho_L) = 75.3^\circ$$

Deduzimos:

$$I_L = 6.9e^{-130^\circ} [\text{A}]$$



Para adaptar o cabo, necessitamos de deduzir o comprimento do troço adicional d , já que a carga é complexa. Para tal calculamos a distância ao primeiro máximo e mínimo da impedância (supondo o sentido do gerador) e escolhemos o que maximizar a largura de banda (nomeadamente a que possuir menor distância) assim:

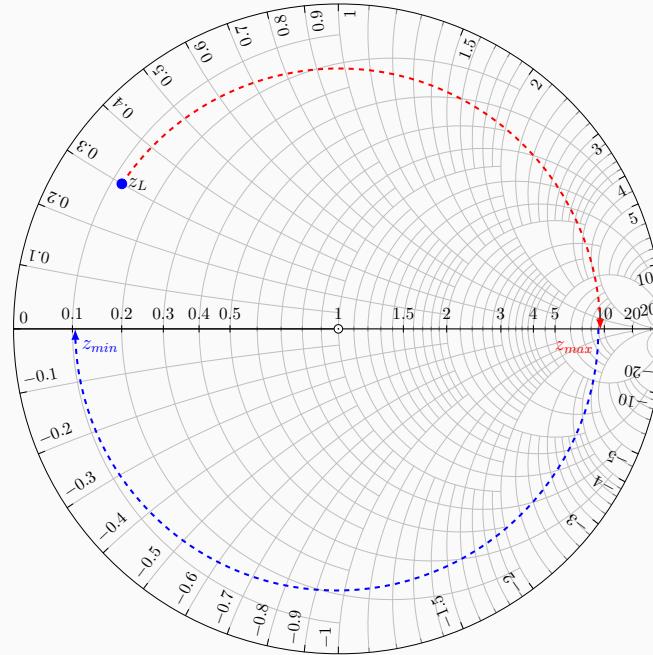
$$z_{max} = \text{SWR}, \quad d = (0.25 - 0.047)\lambda = 0.203\lambda$$

$$z_{min} = 1/\text{SWR}, \quad d = (0.25 - 0.047 + 0.25)\lambda = 0.453\lambda$$

? Exercício 11 continued

Por inspeção, o troço escolhido será o de z_{max} . É assim possível deduzir os restantes parâmetros:

$$d = 0.203\lambda = 0.609 \text{ m}, \quad l_T = \lambda/4 = 0.75 \text{ m}, \quad Z_{0T} = \sqrt{Z_0 Z_{max}} = Z_0 \sqrt{\text{SWR}} = 150\Omega$$



O fluxo de potência, num regime sem perdas, em qualquer ponto x pode ser expresso como:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ - \mathcal{P}^- = \mathcal{P}^+(1 - |\rho_V|^2) \quad \rightarrow \quad \mathcal{P}^+ = \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0}, \quad \mathcal{P}^- = \frac{1}{2} \frac{|V_0^-|^2}{Z_0}$$

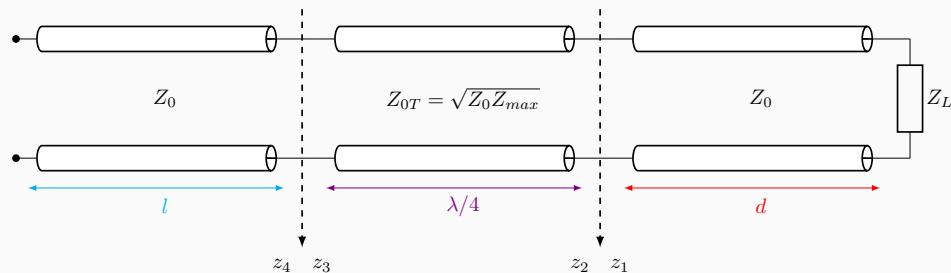
Antes da adaptação, deduzimos que $|\rho_L| = 0.8$ e $|V_L^+| = 200 \text{ V}$, consequentemente:

$$\mathcal{P}^+(1 - |\rho_V|^2) = [144 \text{ V}]$$

Após a adaptação, não existem reflexões, o coeficiente de reflexão da linha é nulo e o coeficiente de onda estacionária unitário, é expectável que a potência seja maximizada:

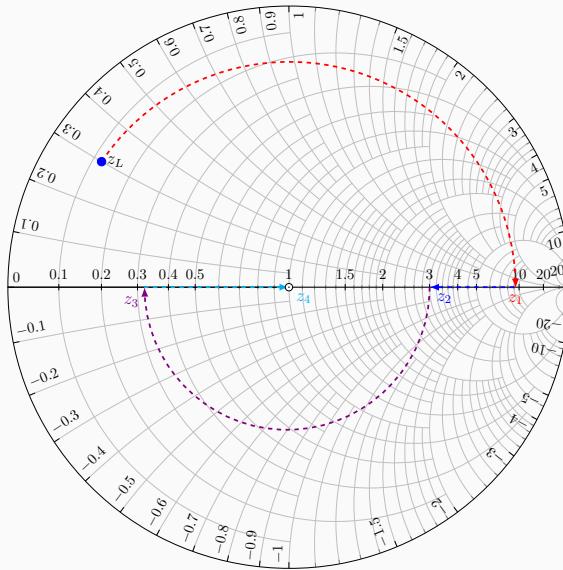
$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ = [400 \text{ V}]$$

O andamento da amplitude da tensão ao longo dos troços do cabo está dependente da evolução da impedância ao longo da linha. Observando a seguinte figura:



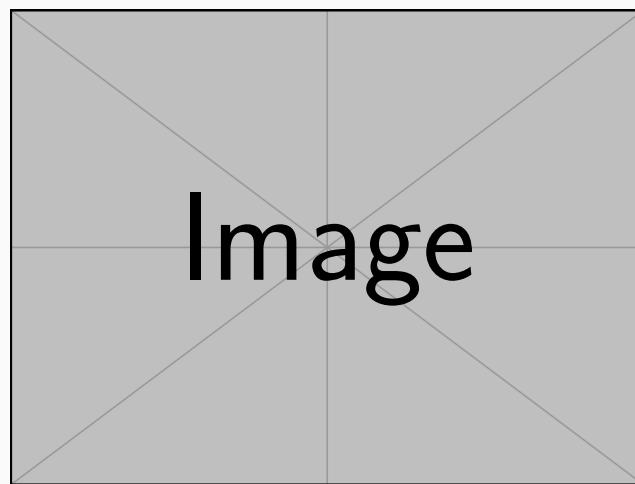
Podemos observar a evolução na carta de Smith:

? Exercício 11 continued



Começando na carga, depreendemos cinco momentos na evolução da impedância ao longo da linha:

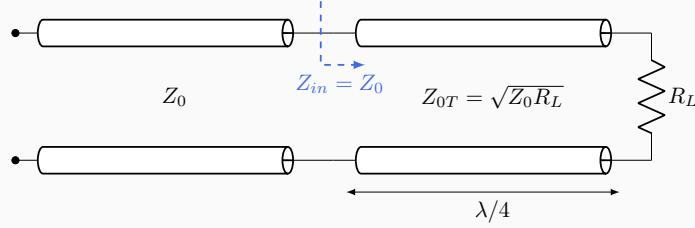
1. Avançando na direção do gerador, no troço d a impedância percorre o arco tracejado vermelho no diagrama até atingir o seu máximo, cuja impedância reduzida é $z_1 = 9$.
2. Ao passar para o segmento do transformador, a impedância sofre uma mudança de base, uma vez que a impedância característica é $Z_{0T} = 3Z_0 = 150 \Omega$. Consequentemente a impedância reduzida no início do troço do transformador passa a ser, $z_2 = 3$.
3. No troço $\lambda/4$ a impedância percorre o arco tracejado violeta no diagrama até atingir o seu mínimo em $z_3 = 0.33$.
4. Finalmente, na transição para o segmento adaptado, l , a impedância reduzida passa a ser unitária.



Exercício 12

- Dimensione um transformador de um quarto-de-comprimento de onda que permita ligar uma linha de 50Ω a uma carga de 100Ω , garantindo máxima transferência de potência. A frequência de trabalho é 1 GHz.
- Determine o coeficiente de onda estacionária na linha à frequência de 1 GHz.
- Determine o coeficiente de onda estacionária na linha à frequência de 1.1 GHz.

Solução: Queremos adaptar uma linha com $Z_0 = 50 \Omega$ a uma carga $Z_L = 100 \Omega$ (real).



Para a frequência de design $f_0 = 1$ GHz, temos $\lambda_0 = c/f_0 = 30$ cm. Isto leva a que o transformador de quarto de onda seja projetado com comprimento $l_T = \lambda_0/4 = 7.5$ cm. Para que à entrada do transformador $Z_{in} = Z_0$, fazemos uso de uma propriedade muito conhecida destas linhas:

$$Z_{in} = \frac{Z_{0T}^2}{Z_L}$$

Isto leva à conclusão que a impedância característica do transformador deverá ser $Z_{0T} = \sqrt{Z_0 Z_L} = 70.71 \Omega$. Nestes moldes, i.e., para uma frequência de operação $f = f_0 = 1$ GHz é trivial verificar que não ocorrem reflexões na linha adaptada.

$$|\rho_V| = \left| \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} \right| = 0$$

Isto indica um coeficiente de onda estacionária unitário (SWR = 1).

Para uma frequência de operação ligeiramente acima de f_0 , já não se verifica uma linha perfeitamente adaptada. Note-se que para $f = 1.1$ GHz, o comprimento de onda passa para

$$\lambda' = \frac{c}{f} = 27.27 \text{ cm}$$

Assim, l_T já não cumpre o critério de quarto de onda,

$$l_T = 7.5 \text{ cm} = 0.275 \lambda'$$

A linha não se encontra perfeitamente adaptada e existem reflexões, o que se reflete num SWR = 1.1, obtido com a ajuda da carta de Smith.

$$z'_{in} = 0.75 - j0.15 \quad (\text{base } Z_{0T}) \implies z'_{in} = 1.05 - j0.21 \quad (\text{base } Z_0)$$

O coeficiente de reflexão tem módulo constante na linha, uma vez que trabalhamos com linhas sem perdas:

$$|\rho_V| = \left| \frac{Z'_{in} - Z_0}{Z'_{in} + Z_0} \right| = \left| \frac{z'_{in} - 1}{z'_{in} + 1} \cdot \frac{Z_0}{Z_0} \right|^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{0.05^2 + 0.21^2}}{\sqrt{2.05^2 + 0.21^2}} \approx 0.105$$

Assim,

$$\therefore \text{SWR} = \frac{1 + |\rho_V|}{1 - |\rho_V|} \approx 1.117$$

■

CHEAT SHEET PROE (PARTE 2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} &= -Ri(x,t) - L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= -Gv(x,t) - C \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{Z_l Y_l} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

$$Z_0 = \frac{Z_l}{\gamma} = \sqrt{\frac{Z_l}{Y_l}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

$$\begin{aligned} \omega L \gg R, \quad \omega C \gg G: \\ \alpha \approx \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \beta \approx \omega \sqrt{LC}. \end{aligned}$$

$$x \ll 1: \quad 1/\sqrt{1+x} \approx 1-x, \quad \sqrt{1+x} \approx 1+x/2$$

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \alpha = R\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \beta = \omega\sqrt{LC}.$$

$$\begin{aligned} \underline{V}(x) &= \underline{V}_0^+ e^{-\gamma x} + \underline{V}_0^- e^{\gamma x} = \underline{V}^+(x) + \underline{V}^-(x) \\ \underline{I}(x) &= \frac{\underline{V}_0^+}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{V}_0^-}{Z_0} e^{\gamma x} = \underline{I}^+(x) + \underline{I}^-(x) \end{aligned}$$

$$0 \leq |\rho_V| \leq 1$$

$$d = x_2 - x_1:$$

$$\rho_{V1} = \rho_{V2} e^{-2\gamma d} \iff \rho_{V2} = \rho_{V1} e^{2\gamma d}$$

$$Z_1 = Z_0 \frac{Z_2 + Z_0 \tanh(\gamma d)}{Z_0 + Z_2 \tanh(\gamma d)}, \quad Y_1 = \frac{Y_2 + Y_0 \tanh(\gamma d)}{Y_0 + Y_2 \tanh(\gamma d)}$$

$$\begin{aligned} Z_2 = Z_0 &\implies Z_1 = Z_0, \quad \rho_V(x)|_{\text{matched}} = 0. \\ Z_2 = 0 &\implies \rho_{V\text{c.c.}} = -1 \\ Z_2 \rightarrow +\infty &\implies \rho_{V\text{o.c.}} = +1 \end{aligned}$$

$$\gamma = j\beta, \quad Z_0 \in \mathbb{R}_{>0}$$

$$|\underline{V}^+(x)| = \text{const.}, \quad |\rho_V(x)| = \text{const.}$$

$$Z_1 = Z_0 \frac{Z_2 + jZ_0 \tan(\beta d)}{Z_0 + jZ_2 \tan(\beta d)}, \quad \rho_{V1} = \rho_{V2} e^{-j2\beta d}.$$

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta d) & jZ_0 \sin(\beta d) \\ j \sin(\beta d)/Z_0 & \cos(\beta d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} d = \lambda/2: \quad Z_1 &= Z_2, \quad \rho_{V1} = \rho_{V2} \\ d = \lambda/4: \quad Z_1 &= Z_0^2/Z_2, \quad \rho_{V1} = -\rho_{V2} \end{aligned}$$

$$\boxed{Z_1|_{d=l} = Z_1|_{d=l+n\frac{\lambda}{2}}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}}$$

$$\underline{V}_1 = \underline{V}_g - Z_g \underline{I}_1,$$

$$\underline{V}_1^+ = \frac{V_g}{1 + Z_g/Z_0 + (1 - Z_g/Z_0)\rho_{V1}}.$$

If $Z_g = Z_0$, then $\underline{V}_1^+ = \underline{V}_g/2$.

$$\begin{aligned} V_{\max} &= \max[\underline{V}(x)], \quad V_{\min} = \min[\underline{V}(x)]. \\ \text{SWR} &\equiv \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{1 + |\rho_V|}{1 - |\rho_V|} \implies |\rho_V| = \frac{\text{SWR} - 1}{\text{SWR} + 1} \\ Z_{\max} &= \text{SWR} \cdot Z_0, \quad Z_{\min} = Z_0/\text{SWR} \end{aligned}$$

$$P_L = \frac{|V_g|^2}{2} \frac{R_L}{(R_L + R_g)^2 + (X_L + X_g)^2}$$

$$P_{L,\max} = P_a = \frac{|V_g|^2}{8R_g}, \quad \text{for } Z_L = Z_g - jX_g.$$

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} \rightarrow l_T = \frac{\lambda_0}{4} \rightarrow Z_{0T} = \sqrt{Z_0 Z_L}, \quad Z_L \in \mathbb{R}_{>0}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\underline{V}(x) \underline{I}^*(x)\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ \frac{|\underline{V}^+(x)|^2}{Z_0^*} - \frac{|\underline{V}^-(x)|^2}{Z_0^*} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{Z_0^*} [\underline{V}^{+\ast}(x) \underline{V}^-(x) - \underline{V}^+(x) \underline{V}^{-\ast}(x)] \right\}. \end{aligned}$$

$$\gamma = j\beta, \quad Z_0 \in \mathbb{R}_{>0}$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ - \mathcal{P}^- = \mathcal{P}^+(1 - |\rho_{V2}|^2),$$

$$\mathcal{P}^+ = \frac{1}{2} \frac{|\underline{V}^+|^2}{Z_0}, \quad \mathcal{P}^- = \frac{1}{2} \frac{|\underline{V}^-|^2}{Z_0}.$$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$$\mathcal{P}_1 \approx \frac{1}{2} \frac{|\underline{V}_1^+|^2}{Z_0} (1 - |\rho_{V1}|^2), \quad \mathcal{P}_2 \approx \frac{1}{2} \frac{|\underline{V}_2^+|^2}{Z_0} (1 - |\rho_{V2}|^2).$$

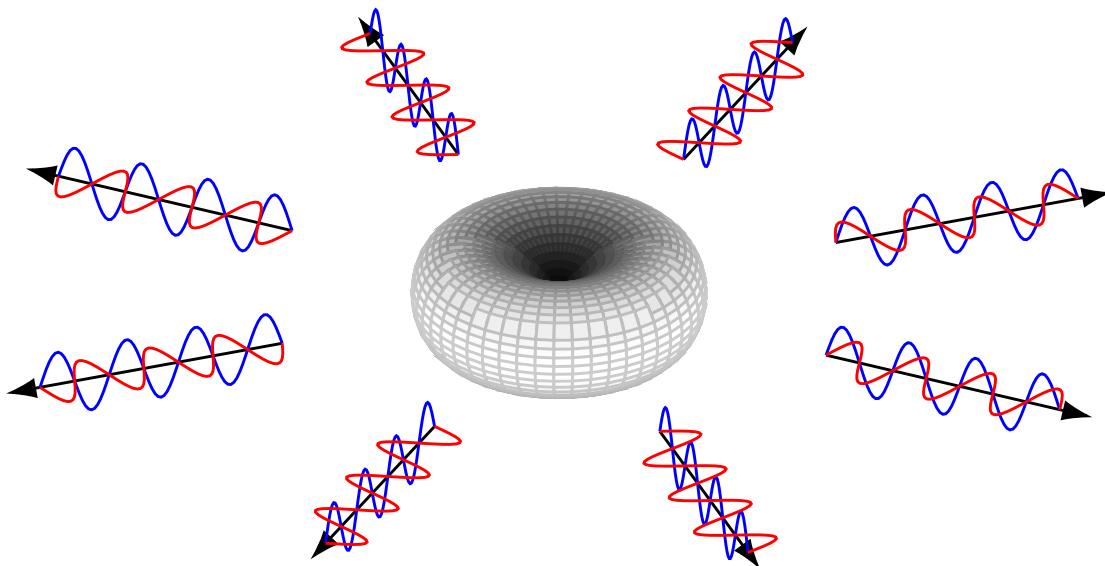
$$\frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}_2} = \frac{(1 - e^{-4\alpha d} |\rho_{V2}|^2)}{e^{-2\alpha d} (1 - |\rho_{V2}|^2)} = \frac{e^{2\alpha d} + e^{-2\alpha d} |\rho_{V2}|^2}{1 - |\rho_{V2}|^2}$$

$$\approx 1 + 2\alpha d \frac{1 + |\rho_{V2}|^2}{1 - |\rho_{V2}|^2}.$$

$$\mathcal{P}_{\text{dis}} = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 \approx \mathcal{P}_2 \cdot \text{ad}\left(\text{SWR} + \frac{1}{\text{SWR}}\right)$$

CAPÍTULO 3

RADIAÇÃO



☰ Conteúdos

3.1	Dipolo Elétrico e Solução das Equações de Onda	58
3.2	Parâmetros Fundamentais das Antenas	64
3.3	Antenas Lineares de Dipolo	73
3.4	Cheat Sheet (Parte 3)	81



História 1

1. A génese da teoria da radiação remonta ao trabalho revolucionário de James Clerk Maxwell no século XIX.
2. Os primeiros esforços atingiram o seu auge com a validação experimental das previsões de Maxwell por Heinrich Hertz.
3. Hertz gerou e detetou ondas eletromagnéticas em laboratório, comprovando a existência destas e a sua capacidade de viajar pelo espaço.
4. Esta confirmação experimental foi um marco decisivo no avanço da teoria do eletromagnetismo e preparou o terreno para as aplicações práticas futuras da radiação.
5. Durante o século XX, a teoria das antenas ganhou destaque à medida que investigadores e engenheiros procuravam desenhar e aperfeiçoar dispositivos capazes de radiar ou receber sinais eletromagnéticos de forma eficaz.
6. As contribuições de Guglielmo Marconi e os progressos na tecnologia radar durante a Segunda Guerra Mundial aprofundaram o conhecimento sobre as antenas.
7. O contínuo aperfeiçoamento da compreensão das antenas e da radiação reformulou o cenário das telecomunicações modernas.
8. A teoria da radiação descreve a interação complexa entre os campos eletromagnéticos e o movimento de partículas carregadas.
9. Um princípio fundamental é que apenas cargas aceleradas podem emitir radiação, visto que tal ocorre à custa da variação da energia cinética destas.
10. A conservação de energia impede a emissão de radiação quando a velocidade da carga se mantém constante.

A radiação de ondas eletromagnéticas é descrita pelas equações de Maxwell, com o movimento das cargas modelado pela densidade de corrente \mathbf{J} :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.1)$$

3.1 Dipolo Elétrico e Solução das Equações de Onda

3.1.1 Modelo do Dipolo Elétrico

O dipolo eletromagnético mais simples consiste num dipolo elétrico oscilante. Para construir um modelo matemático para o dipolo, focamos a nossa atenção numa carga pontual isolada q . A carga é caracterizada uma densidade de carga ρ e por uma densidade de corrente \mathbf{J} . Uma vez que a corrente descreve o transporte da carga, estas grandezas relacionam-se como:

$$\mathbf{J}_{\text{point charge}} = \rho \mathbf{v}, \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ é a velocidade e $\mathbf{r}' = (x_0, y_0, z_0)$ é a trajetória com dependência implícita do tempo. A densidade de carga para uma partícula pontual é concentrada num único ponto, i.e.,

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0) \\ \infty, & \text{se } (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0). \end{cases} \quad (3.3)$$

Além disto, a carga total (q) é dada pelo integral de ρ sobre todo o espaço:

$$\iiint \rho(x, y, z) dx dy dz = q. \quad (3.4)$$

A densidade de carga é determinada por uma função do tipo delta:

$$\rho(x, y, z) = q\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) = q\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (3.5)$$

Por definição, $\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \equiv \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$. Note-se que o integral de $\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ sobre todo o espaço é precisamente um.

Podemos definir então a densidade de corrente para uma carga pontual como:

$$\mathbf{J}_{\text{point charge}} = q \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (3.6)$$

Uma vez que o dipolo elétrico, a nível microscópico, consiste em duas cargas com sinais opostos separados por uma distância, podemos definir o momento dipolar como:

$$\mathbf{P} = q\mathbf{r}^+ - q\mathbf{r}^-, \quad (3.7)$$

que leva à definição da densidade de corrente total associada ao dipolo:

$$\mathbf{J}_{\text{dip}} = q \frac{d\mathbf{r}^+}{dt} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}^+) - q \frac{d\mathbf{r}^-}{dt} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}^-). \quad (3.8)$$

Para deduzirmos o modelo da corrente do dipolo elétrico munimo-nos da aproximação de que uma das cargas é muito mais pesada ($-q$) que a outra ($+q$) para que possamos ignorar o seu movimento $\dot{\mathbf{r}}^- \approx 0$ (intuitivamente podemos pensar em $-q$ como o núcleo atómico, que é muito mais pesado que a carga $+q$ de um eletrão). Escrevemos a densidade de corrente do dipolo como:

$$\mathbf{J}_{\text{dip}} \approx q \frac{d\mathbf{r}^+}{dt} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}^+) \quad (3.9)$$

Salientamos que os termos $\dot{\mathbf{P}}$ e \mathbf{r}^+ variam no tempo. Porém, é típica a aproximação

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}^+) \approx \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}^-) = \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \quad (3.10)$$

em que se considera a carga mais pesada em repouso na origem do referencial ($\mathbf{r}^- \equiv 0$).

Este conjunto de aproximação culmina no modelo da densidade de corrente do dipolo elétrico que consideramos:

$$\mathbf{J}_{\text{dip}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \quad (\text{dipolo microscópico centrado na origem}). \quad (3.11)$$



Checkpoint 13

Mesmo que o modelo de dipolo microscópico seja relevante a um nível fundamental, é menos útil para aplicações de antena. No entanto, um dipolo microscópico pode ser imitado à escala macroscópica através de um fio curto alimentado por uma corrente variável no tempo. Esta configuração é conhecida como “dipolo de Hertz”.

As cargas $\pm Q$ são agora as cargas armazenadas nas extremidades do fio. A carga Q no topo do fio está relacionada com a corrente como:

$$i = \frac{dQ}{dt}. \quad (3.12)$$

Além disso, o momento dipolar elétrico é dado pela carga Q multiplicada pelo comprimento do fio dl . Para um fio orientado ao longo da direção $\hat{\mathbf{z}}$ temos (segundo o mesmo raciocínio que anteriormente):

$$\mathbf{P} = Q dl \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.13)$$

Utilizando este resultado na equação 3.11, verifica-se que um dipolo de Hertz na origem pode ser modelado pela distribuição de corrente:

$\mathbf{J}_{\text{Hertz}} = i dl \hat{\mathbf{z}} \delta(\mathbf{r})$

(dipolo de Hertz centrado na origem). (3.14)

3.1.2 Equação de Onda não-homogénea

Nesta subsecção discutimos como uma dada distribuição de correntes e cargas pode gerar e irradiar ondas eletromagnéticas. Tipicamente, a distribuição de corrente é localizada numa região do espaço (por exemplo, correntes numa antena unifilar). A fonte de corrente gera campos eletromagnéticos, que podem propagar-se para distâncias longe da localização da fonte.

Campos e Potenciais Eletromagnéticos

É conveniente trabalhar com os potenciais elétricos e magnéticos em vez dos campos \mathbf{E} e \mathbf{H} em si. Basicamente, duas das equações de Maxwell permitem-nos introduzir esses potenciais; então, as outras duas, escritas em termos desses potenciais, tomam uma forma simples de equação de onda. As duas equações de Maxwell,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.15)$$

implicam a existência dos potenciais magnéticos e elétricos $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ e $\phi(\mathbf{r}, t)$, tais que os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} são obtidos por

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.} \quad (3.16)$$

Transformação de Gauge e Condição de Lorenz

A liberdade na seleção dos potenciais* permite-nos impor algumas restrições convenientes. Em problemas de radiação, é costume impor a condição de Lorenz:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0} \quad (\text{condição de Lorenz}). \quad (3.17)$$

Referimo-nos também a isto como *gauge de Lorenz* ou *gauge de radiação*. Sob a transformação de gauge,

$$\boxed{\phi' = \phi - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f} \quad (\text{transformação de gauge}), \quad (3.18)$$

os potenciais transformados \mathbf{A}' e ϕ' podem ser escolhidos para satisfazer a condição de Lorenz com uma escolha apropriada da função $f(\mathbf{r}, t)$; isto é, escolhendo $f(\mathbf{r}, t)$ para ser a solução da equação de onda não-homogénea:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \nabla^2 f = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (3.19)$$

Equações de Onda para Potenciais

Incorporando as equações 3.15 e 3.16 nas restantes duas equações de Maxwell, obtemos as formas equivalentes das equações de onda para os potenciais:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi &= \frac{\rho}{\epsilon} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} &= \mu \mathbf{J} \end{aligned}} \quad (\text{equações de onda}). \quad (3.20)$$

Para resumir, as densidades ρ , \mathbf{J} podem ser pensadas como as fontes que geram os potenciais ϕ , \mathbf{A} , a partir dos quais os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} podem ser obtidos (3.16). A condição de Lorenz é compatível com as equações de onda e implica a conservação da carga:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3.21)$$

*Os potenciais \mathbf{A} e ϕ não são definidos de forma única. Por exemplo, podem ser alterados pela adição de constantes. É possível estabelecer mais um grau de liberdade através da *invariância de gauge* das equações de Maxwell. Para qualquer função escalar $f(\mathbf{r}, t)$, a transformação de gauge deixa os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} invariantes[1].

Potenciais Causais

O resultado principal que demostramos nesta subsecção indica que se as densidades da fonte, ρ e \mathbf{J} , são conhecidas, as soluções causais (atrasadas no tempo) das equações de onda (em 3.20) são dadas por:

$$\boxed{\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &= \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - r/c)}{4\pi\epsilon r} d^3\mathbf{r}' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \int_V \frac{\mu\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - r/c)}{4\pi r} d^3\mathbf{r}'\end{aligned}} \quad (\text{potenciais causais}), \quad (3.22)$$

onde $r = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$ é a distância do ponto de observação \mathbf{r} à fonte em \mathbf{r}' . Integraremos sobre um volume localizado, V , onde ρ e \mathbf{J} são não-nulos.

Para provar o resultado de 3.22, consideramos primeiro a solução para a seguinte equação de onda escalar impulsionada por uma fonte pontual localizada na origem:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = f(\mathbf{r}', t) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.23)$$

onde $f(\mathbf{r}', t)$ é uma função arbitrária do tempo e $\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ é a função delta tridimensional.

A solução causal da equação 3.23 é dada por[†]

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{f(\mathbf{r}', t')}{4\pi r} = \frac{f(\mathbf{r}', t - r/c)}{4\pi r} = f\left(t - \frac{r}{c}\right)g(r), \quad \text{onde } g(r) = \frac{1}{4\pi r}, \quad (3.24)$$

com $t' = t - r/c$ e $r = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$. A função $g(r)$ é reconhecida como a função de Green para o problema eletrostático de Coulomb e satisfaz:

$$\nabla g = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2}, \quad \nabla^2 g = -\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.25)$$

onde $\hat{\mathbf{r}}$ é o vetor unitário radial.

De forma genérica, podemos integrar sobre todo o volume V sobre o qual $f(\mathbf{r}', t)$ é não-nula. Para a soma das fontes temos:

$$f(\mathbf{r}, t) = \int_V f(\mathbf{r}', t) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}', \quad (3.26)$$

e a correspondente soma de soluções:

$$u(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{f(\mathbf{r}', t - r/c)}{4\pi r} d^3\mathbf{r}'. \quad (3.27)$$

Assim, esta é a solução causal para a equação geral de onda:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = f(\mathbf{r}, t) \quad (3.28)$$

Os potenciais causais (3.22) são casos especiais da equação geral de onda para

$$f(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)/\epsilon \quad \text{e} \quad f(\mathbf{r}, t) = \mu\mathbf{J}(\mathbf{r}, t).$$

Excitação Harmônica no Tempo e Fator de Propagação

Como estamos focados em ondas de frequência única, assumimos uma dependência temporal sinusoidal $e^{j\omega t}$ para todas as variáveis. Por exemplo:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \underline{\phi}(\mathbf{r})e^{j\omega t}, \quad \rho(\mathbf{r}, t) = \underline{\rho}(\mathbf{r})e^{j\omega t}, \quad \text{etc.} \quad (3.29)$$

Assim, as soluções causais[‡] tornam-se:

$$\underline{\phi}(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\underline{\rho}(\mathbf{r}')e^{-jkr}}{4\pi\epsilon r} d^3\mathbf{r}', \quad \underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mu\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}')e^{-jkr}}{4\pi r} d^3\mathbf{r}', \quad \text{onde } k = \frac{\omega}{c}. \quad (3.30)$$

[†]A solução anti-causal (avançada no tempo) é dada por $u(\mathbf{r}, t) = f(t + r/c)g(r)$.

[‡]Estas soluções são integrais de valor principal[1].

Estas são as soluções para as equações de Helmholtz:

$$\nabla^2 \underline{\phi} + k^2 \underline{\phi} = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \nabla^2 \underline{\mathbf{A}} + k^2 \underline{\mathbf{A}} = -\mu \underline{\mathbf{J}}, \quad (3.31)$$

que podem ser escritas na forma convolucional

$$\begin{aligned} \underline{\phi}(\mathbf{r}) &= \int_V \frac{1}{\varepsilon} \underline{\rho}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}', \\ \underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) &= \int_V \mu \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \end{aligned} \quad (3.32)$$

através da função de Green para a equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta^{(3)}(\mathbf{r}), \quad G(\mathbf{r}) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}. \quad (3.33)$$

Substituindo $\partial/\partial t$ por $j\omega$, transformamos a condição de Lorenz em:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} + j\omega \mu \varepsilon \underline{\phi} = 0. \quad (3.34)$$

Similarmente, o campo elétrico e magnético ficam

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}} &= -\nabla \underline{\phi} - j\omega \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{\mathbf{A}}. \end{aligned}} \quad (3.35)$$

Com a ajuda da condição de Lorenz podemos exprimir o campo elétrico completamente através do vetor potencial $\underline{\mathbf{A}}$, i.e.,

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega \mu \varepsilon} \nabla (\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}) - j\omega \underline{\mathbf{A}} = \frac{1}{j\omega \mu \varepsilon} [\nabla (\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}) - k^2 \underline{\mathbf{A}}] \quad (3.36)$$

onde utilizamos a relação $\omega^2 \mu \varepsilon = \omega^2/c^2 = k^2$.



Checkpoint 14

Sumariamente, após calcular $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$ através de 3.30, podemos obter os campos através de

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}} &= \frac{1}{j\omega \mu \varepsilon} [\nabla (\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}) - k^2 \underline{\mathbf{A}}] \\ \underline{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{\mathbf{A}} \end{aligned}} \quad (3.37)$$

num regime harmônico sinusoidal.

Podemos ainda representar o campo elétrico através de uma forma alternativa:

$$\boxed{\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega \mu \varepsilon} [\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{A}}) - \mu \underline{\mathbf{J}}]} \quad (3.38)$$

Este resultado é obtido ao considerar a Lei de Ampere e resolvendo em ordem a $\underline{\mathbf{E}}$.

3.1.3 Dipolo de Hertz

Nesta secção obtemos resultados concretos para o nosso modelo do dipolo de Hertz. Estes resultados serão a base para a discussão contida nas secções seguintes e de outros modelos simples que consideraremos adiante.

Equação de Onda para o Dipolo de Hertz

Como discutido na secção anterior, a maneira mais simples de calcular os campos eletromagnéticos é através da introdução de um vetor auxiliar \mathbf{A} (vetor potencial).

Trabalhamos no domínio da frequência, uma vez que assumimos uma variação harmónica no tempo do dipolo de excitação da corrente:

$$i = \operatorname{Re}\{\underline{I}e^{j\omega t}\}.$$

Isto leva à densidade de corrente:

$$\mathbf{J}_{\text{Hertz}} = \underline{I} dl \hat{\mathbf{z}} \delta(\mathbf{r}).$$

Da discussão anterior, o vetor $\underline{\mathbf{A}}$ é solução da equação:

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{A}} + k^2 \underline{\mathbf{A}} = -\mu \mathbf{J}_{\text{Hertz}},$$

com representação analítica dada por

$$\boxed{\underline{\mathbf{A}} = \mu \underline{I} dl \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \hat{\mathbf{z}}.} \quad (3.39)$$

Obtido o *ansatz*[§], estamos nas condições de construir os campos eletromagnéticos

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}} &= \frac{1}{j\omega\varepsilon} (\nabla \times \underline{\mathbf{H}} - \mathbf{J}_{\text{Hertz}}) \\ \underline{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{\mathbf{A}}. \end{aligned}} \quad (3.40)$$

Campos Irradiados pelo Dipolo de Hertz

Para obtermos as formas explícitas dos campos eletromagnéticos irradiados pelo dipolo de Hertz, é conveniente mudar as coordenadas para um sistema esférico. Assim, notamos que:

$$\hat{\mathbf{z}} = (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\phi})\hat{\phi} = \cos\theta\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\hat{\theta}. \quad (3.41)$$

Portanto, o vetor potencial pode ser reescrito como:

$$\underline{\mathbf{A}} = A_r \hat{\mathbf{r}} + A_\theta \hat{\theta}, \quad (3.42)$$

onde $A_r = A_z \cos\theta$, $A_\theta = -A_z \sin\theta$, $A_\phi = 0$ e $A_z = \mu \underline{I} dl e^{-jkr}/(4\pi r)$.

Para calcularmos o campo magnético basta calcular o rotacional de $\underline{\mathbf{A}}$ em coordenadas esféricas:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{A}} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\theta} & r \sin\theta \hat{\phi} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\phi \\ A_r & rA_\theta & r \sin\theta A_\phi \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\theta} & r \sin\theta \hat{\phi} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & 0 \\ A_z \cos\theta & -rA_z \sin\theta & 0 \end{vmatrix}, \quad (3.43)$$

que resulta num campo magnético com apenas componente azimutal:

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (-rA_z \sin\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta} (A_z \cos\theta) \right] \hat{\phi}. \quad (3.44)$$

Substituindo o $A_z = \mu \underline{I} dl e^{-jkr}/(4\pi r)$ em 3.44, concluimos

$$\boxed{\underline{\mathbf{H}} = \underline{H}_\phi \hat{\phi}, \quad \underline{H}_\phi = jk \underline{I} dl \sin\theta \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left[1 + \frac{1}{jkr} \right].} \quad (3.45)$$

Após uma análise semelhante é possível chegar ao campo elétrico através de $\underline{\mathbf{E}} = \nabla \times \underline{\mathbf{H}}/(j\omega\varepsilon)$ (sem fontes, $\underline{\mathbf{J}} \equiv 0$):

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{E}_r \hat{\mathbf{r}} + \underline{E}_\theta \hat{\theta}, \quad \boxed{\underline{E}_r = \eta \underline{I} dl \frac{\cos\theta}{r} \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left[1 + \frac{1}{jkr} \right], \quad \underline{E}_\theta = j\eta k \underline{I} dl \sin\theta \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left[1 + \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right].} \quad (3.46)$$

[§]“Derived from German, meaning «initial placement» or «approach», an *ansatz* is a foundational concept in physics and mathematics. It represents an educated guess or a proposed form of a solution to a complex problem or set of equations. This approach is not a random guess; rather, it is based on intuition, experience, and the known properties of the system under study. The *ansatz* simplifies the problem, making it more tractable, and is then validated or refined through further analysis or empirical evidence.”[??]

3.2 Parâmetros Fundamentais das Antenas

3.2.1 Campo Distante de uma Antena Genérica

É possível estender algumas propriedades do dipolo de Hertz para uma antena genérica. Supondo que a antena está localizada perto da origem e confinada numa região de dimensão L . A região de campo distante é definida pelas condições:

$$r \gg L, \quad r \gg \lambda_0, \quad r > 2L^2/\lambda_0. \quad (3.47)$$

Subsequentemente, na região de zona distante, os campos são ortogonais à direção radial $\hat{\mathbf{r}}$:

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \Big|_{\text{far-field}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0, \quad \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \Big|_{\text{far-field}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0. \quad (3.48)$$

Em coordenadas esféricas, possuem a forma:

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \Big|_{\text{far-field}} = \underline{E}_\theta \hat{\theta} + \underline{E}_\phi \hat{\phi}, \quad \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \Big|_{\text{far-field}} = \underline{H}_\theta \hat{\theta} + \underline{H}_\phi \hat{\phi}. \quad (3.49)$$



Checkpoint 15

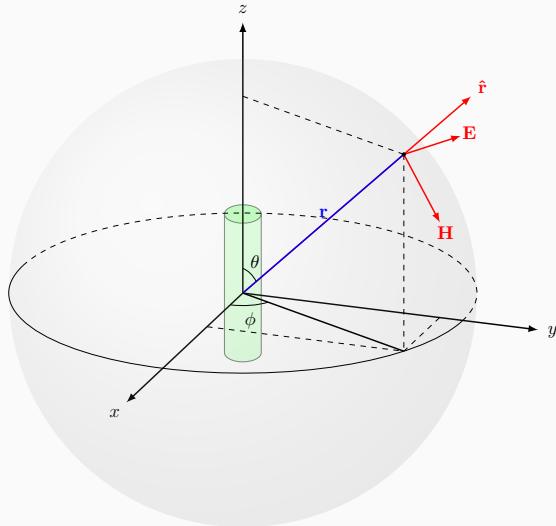


Fig. 3.1: Relação geométrica dos campos na região de zona distante.

- $\hat{\mathbf{r}}$ é a direção de observação, que depende de (θ, ϕ) :

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.50)$$

- Os campos eletromagnéticos estão ligados à direção de observação $\hat{\mathbf{r}}$ de modo análogo ao caso do dipolo de Hertz:

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \Big|_{\text{far-field}} = \eta_0 \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \Big|_{\text{far-field}} \times \hat{\mathbf{r}}, \quad \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \Big|_{\text{far-field}} = \frac{1}{\eta_0} \hat{\mathbf{r}} \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \Big|_{\text{far-field}} \quad (3.51)$$

- As amplitudes dos campos satisfazem:

$$|\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})| \Big|_{\text{far-field}} = \eta_0 |\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})| \Big|_{\text{far-field}} \quad (3.52)$$

- O vetor de Poynting na zona distante pode ser escrito como:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) \Big|_{\text{far-field}} = \frac{\|\underline{\mathbf{E}}\|^2}{2\eta_0} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\|\underline{\mathbf{H}}\|^2 \eta_0}{2} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.53)$$

Na zona distante, o fluxo de energia ocorre ao longo da direção radial. Para uma antena genérica, o campo elétrico na zona distante pode sempre ser expresso como:

$$\underline{\mathbf{E}}|_{\text{far-field}} = j\mu_0 k_0 \underline{I}_0 \mathbf{h}_e(\theta, \phi) \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \quad (3.54)$$

1. \underline{I}_0 é a corrente no ponto de alimentação da antena.
2. $\mathbf{h}_e(\theta, \phi)$ é um parâmetro direcional que depende do tipo de antena e da frequência de operação. É conhecido como a *altura efetiva (vetorial)* da antena. A altura efetiva tem unidades de metro.

A fórmula acima estabelece que o campo elétrico na zona distante é uma onda esférica com amplitude adaptada pelo fator direcional $\mathbf{h}_e(\theta, \phi)$.

Como $\mathbf{E}|_{\text{far-field}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$, a altura efetiva pode ser expressa como:

$$\boxed{\mathbf{h}_e(\theta, \phi) = h_{e,\theta} \hat{\theta} + h_{e,\phi} \hat{\phi}} \quad (3.55)$$

Para um dipolo de Hertz, a altura efetiva tem a forma $\mathbf{h}_e = h_\theta \hat{\theta}$:

$$\boxed{\mathbf{h}_e|_{\text{Hertz dipole}} = dl \sin \theta \hat{\theta}} \quad (3.56)$$

3.2.2 Potência Irradiada

A potência irradiada por uma antena é obtida integrando o fluxo do vetor de Poynting médio \mathbf{S}_{av} sobre uma superfície arbitrária Σ que envolve a antena. A potência irradiada é dada por

$$\mathcal{P}_{rad} = \iint_{\Sigma} \mathbf{S}_{av} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (3.57)$$

No regime harmónico, o resultado do integral é independente da forma da superfície Σ . Pode-se tomar Σ como uma superfície esférica com raio R suficientemente grande, garantindo a validade da aproximação da zona distante para os campos. Neste caso, o vetor normal coincide com o vetor radial: $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$. Assim, a potência irradiada pode ser expressa como:

$$\boxed{\mathcal{P}_{rad} = \iint_{r=R} S_r dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S_r \sin \theta r^2 d\theta d\phi} \quad (3.58)$$

onde S_r é a componente radial do vetor de Poynting na zona distante. A segunda identidade advém do facto que em coordenadas esféricas, $dS = \sin \theta r^2 d\theta d\phi$.

Na zona distante, $S_r r^2$ depende apenas da direção de observação (θ, ϕ) , ou seja, é independente da distância r até à antena.

$$\boxed{U(\theta, \phi) \equiv S_r r^2|_{\text{far-field}} = \frac{\eta_0 |\underline{I}_0|^2}{2} \left(\frac{k_0}{4\pi} \right)^2 \|\mathbf{h}_e(\theta, \phi)\|^2} \quad (3.59)$$

A função $U(\theta, \phi)$ é conhecida como a *intensidade da radiação* e é um parâmetro direcional. A potência irradiada pode ser expressa em termos de $U(\theta, \phi)$ como:

$$\mathcal{P}_{rad} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U(\theta, \phi) \sin \theta d\phi d\theta \quad (3.60)$$

Aplicando as fórmulas ao dipolo de Hertz, tal que $h_\theta|_{\text{Hertz dipole}} = dl \sin \theta$, encontramos a intensidade de radiação correspondente:

$$\boxed{U|_{\text{Hertz dipole}} = \frac{\eta_0 |\underline{I}_0|^2}{8} \left(\frac{dl}{\lambda_0} \right)^2 \sin^2 \theta = U_{max} \sin^2 \theta} \quad (3.61)$$

Subsequentemente, a potência radiada pelo dipolo de Hertz é dada por:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{rad} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U_{max} \sin^2 \theta \sin \theta d\phi d\theta = 2\pi U_{max} \int_0^\pi \sin \theta \sin^2 \theta d\theta \\
 &\quad \boxed{\downarrow u = \cos \theta, du = -\sin \theta d\theta} \\
 &= 2\pi U_{max} \int_0^\pi \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta \\
 &= -2\pi U_{max} \int_{-1}^1 u^2 - 1 du = -2\pi U_{max} \left(\frac{u^3}{3} - 1 \right) \Big|_{-1}^1 \\
 &= 2\pi U_{max} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3} U_{max}
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

A potência pode ainda ser escrita explicitamente em termos da corrente:

$$\boxed{\mathcal{P}_{rad} \Big|_{\text{Hertz dipole}} = \frac{\pi}{3} \eta_0 |I_0|^2 \left(\frac{dl}{\lambda_0} \right)^2} \tag{3.63}$$

3.2.3 Ângulo Sólido

O conceito de *ângulo sólido* está intimamente ligado à noção de um “sector”, que compreende um conjunto de direções no espaço. Intuitivamente, pode-se definir o ângulo sólido Ω associado a um determinado sector como:

$$\Omega \approx \frac{\text{volume do sector}}{\text{volume de todo o espaço}}. \tag{3.64}$$

Uma construção semelhante é aplicável a ângulos num plano. A constante de proporcionalidade é fixada por convenção. Para ângulos sólidos, é tomada como 4π , de modo que:

$$\Omega = 4\pi \frac{\text{volume do sector}}{\text{volume de todo o espaço}}, \tag{3.65}$$

enquanto que para ângulos planos é tomada como 2π , e:

$$\alpha = 2\pi \frac{\text{área do sector}}{\text{área de todo o espaço}}. \tag{3.66}$$

O ângulo sólido varia no intervalo:

$$0 \leq \Omega \leq 4\pi \tag{3.67}$$

O maior ângulo sólido ($\Omega = 4\pi$) corresponde a um sector que inclui todas as direções no espaço. A unidade de ângulo sólido é o *esferorradiano* (steradian), abreviado como “sr”.

O ângulo sólido associado a um sector cónico pode alternativamente ser definido como a área da intersecção entre o sector e uma superfície esférica de raio unitário.

É útil considerar o sector definido pelas condições:

$$\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + d\theta \quad \phi_0 \leq \phi \leq \phi_0 + d\phi \tag{3.68}$$

O correspondente ângulo sólido infinitesimal $d\Omega$ é dado pela intersecção do sector com uma superfície esférica de raio unitário.

$$d\Omega = dl_1 dl_2 = \sin \theta_0 d\theta d\phi \tag{3.69}$$

Descartando o subscrito, podemos escrever o ângulo sólido infinitesimal associado a uma variação $(d\theta, d\phi)$ em torno da direção (θ, ϕ) como:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi \tag{3.70}$$

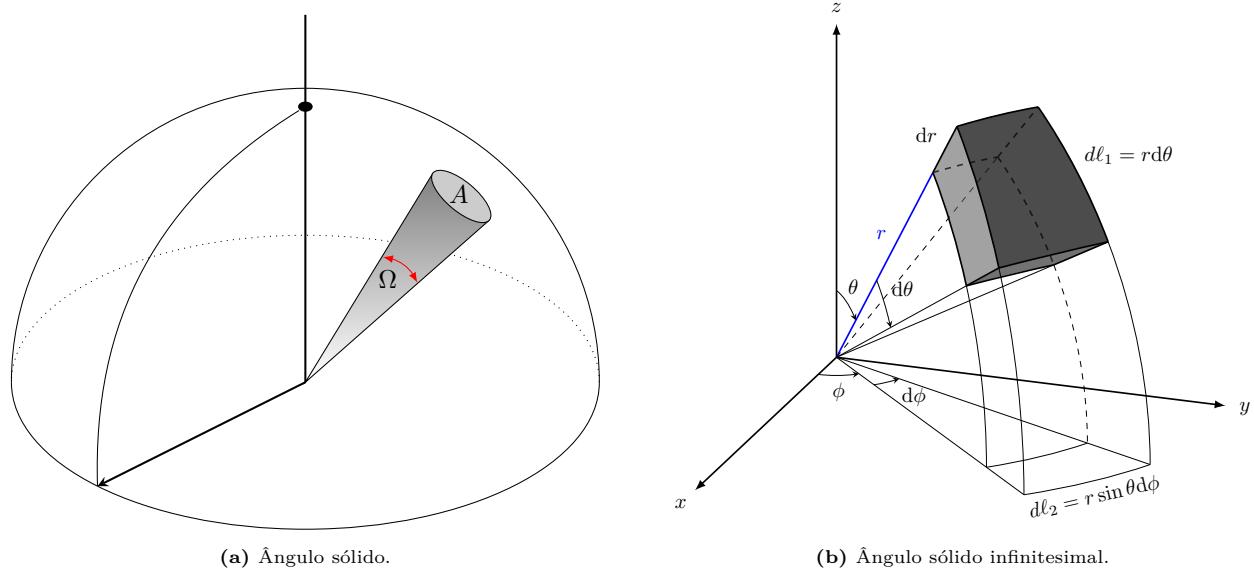


Fig. 3.2: Definições de ângulo sólido.

3.2.4 Intensidade de Radiação e Padrão de Radiação

É possível reescrever a fórmula da potência radiada como:

$$\mathcal{P}_{rad} = \iint_{\text{all solid angles}} U(\theta, \phi) d\Omega \quad (3.71)$$

Em particular, a potência emitida para o setor cônico na direção (θ, ϕ) com amplitude $d\Omega$ é dada por:

$$d\mathcal{P}_{rad} = U(\theta, \phi) d\Omega \quad (3.72)$$

A intensidade da radiação pode ser vista como a potência radiada por unidade de ângulo sólido:

$$U(\theta, \phi) = \frac{d\mathcal{P}_{rad}}{d\Omega} \quad (3.73)$$

A intensidade da radiação serve para caracterizar a força de radiação de uma antena numa direção específica no espaço. É frequentemente ilustrada na forma de um diagrama polar, comumente referido como o *padrão de radiação* da antena. Num padrão de radiação, a distância da origem ao longo de uma direção particular (θ, φ) é proporcional à intensidade da radiação nessa direção. Um padrão de radiação típico, consiste de um lóbulo principal e vários lóbulos laterais:

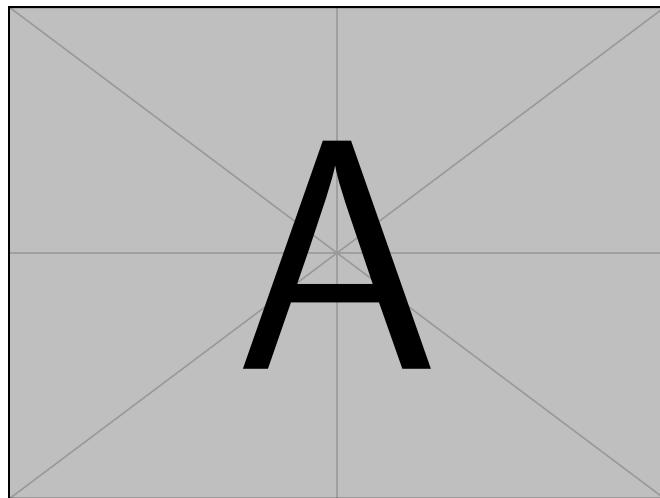


Fig. 3.3: Padrão de radiação.

O *half-power beamwidth* (HPBW) é definido como o ângulo entre as direções para as quais a intensidade de radiação cai para metade do seu valor máximo:

$$U_{\text{HPBW}} = \frac{U_{\max}}{2}, \text{ com } U_{\max} = \max U \quad (3.74)$$

O *sidelobe level* (SLL) é expresso como a razão do lóbulo lateral com a maior amplitude, $U_{s,\max}$, com a amplitude do lóbulo principal, denotado como U_{\max} :

$$\text{SLL} = \frac{U_{s,\max}}{U_{\max}}, \quad \text{SLL}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{U_{s,\max}}{U_{\max}} \right). \quad (3.75)$$

É desejável minimizar o nível do lóbulo lateral, visando um padrão de radiação com um lóbulo principal forte e bem definido e interferência mínima dos lóbulos laterais.

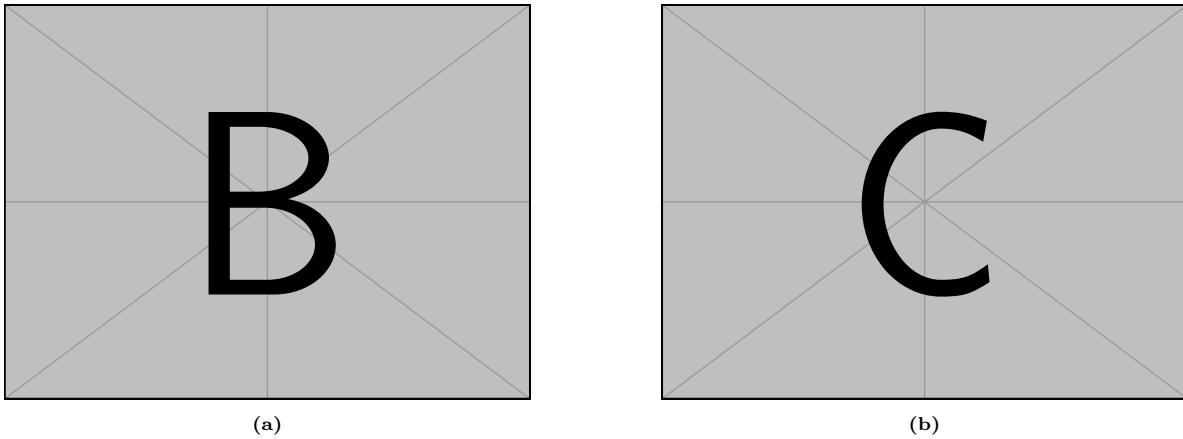


Fig. 3.4: Padrão de radiação para o dipolo de Hertz.

O padrão de radiação de um dipolo de Hertz é determinado pelo gráfico polar de $U_{\text{Hertz dip}} = U_{\max} \sin^2 \theta$. Como visto, a direção mais larga do diagrama alinha-se com $\theta = 90^\circ$, correspondendo à direção de radiação máxima do dipolo de Hertz. O HPBW do dipolo de Hertz pode ser deduzido resolvendo:

$$\frac{U_{\max}}{2} = U_{\max} \sin^2 \theta \quad (3.76)$$

As soluções são $\theta = 45^\circ$ e $\theta = 135^\circ$. Assim, o HPBW do dipolo de Hertz é:

$$135^\circ - 45^\circ = 90^\circ \rightarrow \boxed{\text{HPBW}_{\text{Hertz dip.}} = 90^\circ} \quad (3.77)$$

Adicionalmente, representar o padrão de radiação na forma de um gráfico polar 3D é útil, fornecendo uma visão abrangente das características de radiação da antena. Para um dipolo de Hertz, o padrão de radiação 3D correspondente assume a forma de um *doughnut* e exibe simetria rotacional contínua em torno do eixo do dipolo.

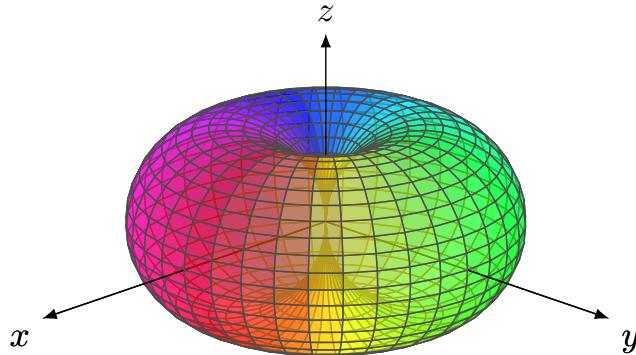


Fig. 3.5: Padrão de radiação 3D de um dipolo de Hertz.

3.2.5 Resistência de Radiação

A resistência de radiação, R_{rad} , é definida da seguinte forma:

$$\mathcal{P}_{rad} = \frac{1}{2} R_{rad} |\underline{I}_0|^2, \quad R_{rad} = \frac{2\mathcal{P}_{rad}}{|\underline{I}_0|^2} \quad (3.78)$$

A resistência à radiação é distinta da perda óhmica e está em vez disso relacionada à necessidade de contabilizar a força de recuo associada à emissão de energia eletromagnética. A relação surge porque os campos emitidos carregam momento linear, levando a uma força de recuo sobre as cargas oscilantes para manter a conservação do momento linear.

A força de recuo que atua numa carga pontual q é conhecida como a força de Abraham-Lorentz-Dirac, e é dada por:

$$\mathbf{F}_{rad} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{d\mathbf{a}}{dt} \quad (3.79)$$

A força de recuo é proporcional à derivada temporal da aceleração. Para um dipolo elétrico microscópico oscilante, a potência instantânea transferida para a carga oscilante pela força de recuo é:

A potência de recuo é dada por:

$$\mathcal{P}_{recuo} = \mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{v} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{v} \quad (3.80)$$

Reconhecendo que $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$, a potência pode ser escrita em termos do momento de dipolo elétrico como:

$$\mathcal{P}_{recuo} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{d^3\mathbf{P}}{dt^3} \cdot \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (3.81)$$

Para uma oscilação harmónica no tempo, a potência é dada por:

$$\mathcal{P}_{recuo} = -\frac{\omega^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3} |\mathbf{P}|^2 - \frac{\mu_0 \omega^2}{12\pi c} [\omega \mathbf{P}]^2 \quad (3.82)$$

A potência é negativa indicando que a força contribui para amortecer a oscilação do dipolo. A potência radiada por um dipolo microscópico pode ser encontrada da seguinte forma:

$$\mathcal{P}_{rad} = \frac{\pi}{3} \eta_0 |\underline{I}_0|^2 \left(\frac{dl}{\lambda_0} \right)^2 \rightarrow \mathcal{P}_{rad} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{\omega}{2\pi c} \right)^2 |\omega \mathbf{P}|^2 = \frac{\mu_0 \omega^2}{12\pi c} |\omega \mathbf{P}|^2 \quad (3.83)$$

$\mathcal{P}_{recuo} = -\mathcal{P}_{rad}$. É necessário fornecer a potência \mathcal{P}_{rad} para o dipolo para manter a oscilação contínua.

3.2.6 Circuito Equivalente, Impedância de Antena e Eficiência

Considere-se uma antena alimentada por uma linha de transmissão:

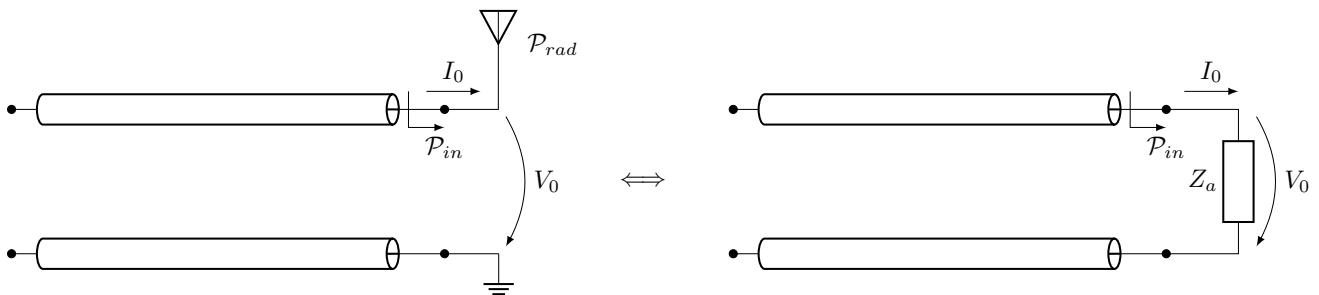


Fig. 3.6: Antena de transmissão alimentada por uma linha e circuito equivalente.

- A corrente de alimentação I_0 pode ser considerada como a excitação da antena.
- A tensão V_0 pode ser considerada como a resposta desenvolvida.

Uma vez que as equações de Maxwell são lineares, a relação entre V_0 e I_0 também é linear. Assim, no domínio da frequência, deve assumir a forma:

$$V_0 = Z_a I_0 \quad (3.84)$$

! Nota 18

Os conceitos desta secção serão desenvolvidos mais à frente (ver secção 3.3), apenas se apresenta uma intuição inicial neste ponto, uma vez que seguimos o ritmo das aulas.

Impedância

Definimos Z_a como a impedância da antena. A fórmula acima implica que — do ponto de vista dos terminais de alimentação — a antena transmissora é equivalente a uma carga de impedância. A impedância da antena pode ser decomposta num componente resistivo e um componente reativo: $Z_a = R_a + jX_a$.

A potência fornecida à antena pela linha de alimentação é conhecida como a potência de entrada e pode ser expressa em termos de V_0 e I_0 como:

$$\mathcal{P}_{in} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{V_0 I_0^*\} \quad (3.85)$$

É possível reescrever em termos da resistência da antena como:

$$\mathcal{P}_{in} = \frac{1}{2} R_a |I_0|^2 \quad (3.86)$$

A potência de entrada pode ser dividida em duas partes, a potência radiada, P_{rad} , e a potência de perda, \mathcal{P}_{loss} :

$$\mathcal{P}_{in} = P_{rad} + \mathcal{P}_{loss} \quad (3.87)$$

A potência de perda descreve a dissipação nos materiais que compõem a antena. É conveniente introduzir uma resistência de perda R_{loss} tal que a potência de perda e a corrente de alimentação satisfaçam:

$$\mathcal{P}_{loss} = \frac{1}{2} R_{loss} |I_0|^2 \quad (3.88)$$

Analogamente, a resistência da antena pode ser dividida em duas partes:

$$R_a = R_{rad} + R_{loss} \quad (3.89)$$

Para materiais sem perdas, é expectável que $R_a = R_{rad}$ (i.e., $R_{loss} = 0$).

Eficiência

A eficiência da antena é definida como a razão entre a potência radiada e a potência de entrada ou em termos das resistências:

$$e = \frac{\mathcal{P}_{rad}}{\mathcal{P}_{in}} = \frac{\mathcal{P}_{rad}}{\mathcal{P}_{rad} + \mathcal{P}_{loss}} \implies e = \frac{R_{rad}}{R_{in}} = \frac{R_{rad}}{R_{rad} + R_{loss}} \quad (3.90)$$

! Nota 19

Uma antena é considerada *ressonante* quando a sua reatância desaparece ($X_a = 0$). O termo ressonante denota a capacidade da antena de otimizar a troca de energia com o campo eletromagnético. Uma antena ressonante, quando alimentada por uma linha de transmissão com uma impedância característica de $Z_0 = R_a$, irradia eficientemente toda a energia propagando na linha (analogamente a uma *matched line*).

3.2.7 Irradiadores Isotrópicos, Ganho Direcional e Diretividade

Irradiadores Isotrópicos

Um irradiador isotrópico refere-se a uma antena idealizada que irradia ondas eletromagnéticas com a mesma intensidade em todas as direções do espaço. Por outras palavras, a intensidade da radiação de um irradiador isotrópico é independente da direção de observação:

$$U(\theta, \phi) = \text{const.} \equiv U_{iso}, \quad (\text{irradiador isotrópico}) \quad (3.91)$$

A potência radiada por um emissor isotrópico é dada por:

$$\mathcal{P}_{rad} = \iint_{\text{todos os ângulos sólidos}} U_{iso} d\Omega = U_{iso} \times 4\pi \quad (3.92)$$

Assim, a intensidade da radiação de um irradiador isotrópico pode ser escrita como:

$$U_{iso} = \frac{\mathcal{P}_{rad}}{4\pi} \quad (3.93)$$

Exercício 13

Um irradiador isotrópico tem uma intensidade de campo eléctrico $100I/r$ [V/m] na zona distante, onde r é a distância à antena e I é a corrente no ponto de alimentação. Determine a resistência de radiação da antena

Solução: Tal como explicitado acima, a intensidade da radiação de um irradiador isotrópico é independente da direção de observação. Assim a potência radiada por um emissor isotrópico é dada por:

$$\mathcal{P}_{rad} = \iint_{\text{todos os ângulos sólidos}} U_{iso} d\Omega = U_{iso} \times 4\pi$$

Recorrendo ao cálculo da intensidade de radiação:

$$\begin{aligned} U_{iso} &= S_r r^2 \\ &= \frac{||\mathbf{E}||^2}{2\eta_0} r^2 = \frac{10^4 I^2}{2\eta_0} \end{aligned}$$

Consequentemente, a potência de radiação é:

$$U_{iso} \times 4\pi = \frac{10^4 I^2}{2\eta_0} 4\pi = \frac{10^4 I^2}{60}$$

reescrevendo a potência em termos da resistência da antena:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{in} = \frac{1}{2} R_a |I|^2 \\ \frac{10^4}{60} = \frac{1}{2} R_a \end{cases} \rightarrow R_a = 333.3 \Omega$$

■

Ganho Direcional

O ganho direcional de uma antena numa dada direção (θ, φ) é a razão entre a intensidade da radiação da antena nessa direção e a intensidade da radiação de um irradiador isotrópico que irradia a mesma potência que a antena:

$$g(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{U_{iso}} = \frac{4\pi U(\theta, \phi)}{\mathcal{P}_{rad}} \quad (3.94)$$

A antena emite menos energia do que o irradiador isotrópico onde a gama direcional é $0 < g(\theta, \phi) < 1$, já que a energia é preferencialmente direcionada para a gama de direções onde $g(\theta, \phi) > 1$. O ganho direcional atua como um ponto de referência para a avaliação das propriedades direcionais das antenas.

Diretividade

A diretividade de uma antena é determinada pelo máximo do ganho direcional:

$$D = \max g(\theta, \phi) = \frac{4\pi U_{\max}}{\mathcal{P}_{\text{rad}}} \quad (3.95)$$

A diretividade é frequentemente expressa em dBi (o i vem de isotropico), de modo que $D_{\text{dBi}} = 10 \log_{10} D$.

! Nota 20

O vetor de Poynting na zona de campo distante pode ser expresso em termos do ganho direcional. Combinando $U(\theta, \phi) = S_{\text{av}} r^2$ com a definição do ganho direcional, é possível deduzir:

$$S_{\text{av}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{rad}}}{4\pi r^2} g(\theta, \phi) \quad (3.96)$$

Para um emissor isotrópico, a potência radiada é distribuída uniformemente sobre a superfície esférica com raio r e área $4\pi r^2$: $S_{\text{iso}} = \mathcal{P}_{\text{rad}} / 4\pi r^2$. Assim, o vetor de Poynting emitido pela antena na direção (θ, ϕ) está ligado ao vetor de Poynting emitido pelo irradiação isotrópico correspondente através do ganho direcional.

$$S_{\text{av}} = S_{\text{iso}} g(\theta, \phi) \quad (3.97)$$

3.2.8 Ganho de potência

Revela-se vantajoso expressar o vetor de Poynting em termos da potência de entrada da antena \mathcal{P}_{in} , englobando a potência dissipada dentro da antena. Esta conversão pode ser facilmente realizada substituindo $\mathcal{P}_{rad} = e\mathcal{P}_{in}$:

$$S_{\text{av}} = \frac{\mathcal{P}_{in}}{4\pi r^2} G(\theta, \phi) \quad (3.98)$$

Onde,

$$G(\theta, \phi) = eg(\theta, \phi) \quad (3.99)$$

é o ganho de potência da antena, que difere do ganho direcional por um fator de multiplicação representando a eficiência da antena. O valor máximo do ganho de potência, denotado como G_m , é referido como o ganho máximo e está relacionado com a diretividade como:

$$G_m = \max G(\theta, \phi) = eD \quad (3.100)$$

? Exercício 14

Considere uma antena com eficiência de 90% tal que na zona distante o campo magnético radiado é:

$$\mathbf{H} = H_0(\hat{\theta} - j\hat{\phi}) \sin \theta e^{-jk_0 r} / k_0 r$$

com $H_0 = 0.01$ A/m e k_0 o número de onda no ar. A frequência de oscilação é de 3GHz. Determine o ganho em potência.

Solução: Reconhecemos que o ganho em potência máximo é dado por:

$$G_m = eD$$

Subsequentemente, o ganho direcional é dado por:

$$D = 4\pi \frac{\max U(\theta, \phi)}{\mathcal{P}_{\text{rad}}}$$

? Exercício 14 continued

Desenvolvendo o cálculo da intensidade de radiação obtemos:

$$\begin{aligned} U(\theta, \phi) &= S_r r^2 \\ &= \frac{\eta_0 ||\mathbf{H}||^2}{2} r^2 \\ &= \frac{2\eta_0 H_0^2 \sin^2 \theta}{2k_0^2 r^2} r^2 = \frac{\eta_0 H_0^2}{k_0^2} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

U_{max}

Consequentemente:

$$D = 4\pi \frac{U_{max}}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi U_{max} \sin^3 \theta d\theta d\phi} = 2 \frac{1}{\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta} = \frac{3}{2}$$

Por fim, como a antena possui uma eficiência de 90%:

$$G_m = 1.35$$

■

3.3 Antenas Lineares de Dipolo

There once was a very smart but sadly blind duck. When it was still a small duckling it was renowned for its good vision. But sadly as the duck grew older it caught a sickness which caused its eyesight to worsen. It became so bad, that the duck couldn't read the notes it once took containing much of inline math. Only displayed equations remained legible. That annoyed the smart duck, as it wasn't able to do its research any longer. It called for its underduckling and said: "Go, find me the best eye ducktor there is. He shall heal me from my disease!"

"But my duck, how are you supposed to manage your daily routines without my visual guidance", replied the underduckling. The smart duck's face turned grim in anger. "You dare to talk back?" The underduckling blushed ashamed. How could he have objections after his duck gave strict orders? The underduckling was so embarrassed about his own behaviour he had to solve an equation.

After the equation was solved and the underduckling prepared his leave for the next day it fell asleep in a shaky mood. It did not know what the journey had prepared for him and if he was prepared enough for it. His sleep was restless. The dreams he had that night were not calm and bright as they used to be for an innocent underduckling.

3.3.1 Região distante

Na região distante, para a qual $r \gg L$, $r \gg \lambda_0$, $r > 2L^2/\lambda_0$. Os campos são dados por:

$$\underline{H}_\phi = j \frac{I_0 h_e(\theta)}{4\pi} \left(\frac{e^{-jk_0 r}}{r} \right) k_0 \sin \theta \text{ [A/m]}, \quad \underline{E}_\theta = j \frac{I_0 h_e(\theta)}{4\pi} \left(\frac{e^{-jk_0 r}}{r} \right) \eta_0 k_0 \sin \theta \text{ [V/m]}. \quad (3.101)$$

- \underline{E}_θ e \underline{H}_ϕ estão em quadratura de espaço e de fase temporal.
- $|\underline{E}_\theta|/|\underline{H}_\phi| = \eta_0$ é uma constante igual à impedância intrínseca do meio (que, neste caso, é o espaço livre).
- Os campos de zona distante têm as mesmas propriedades que as ondas planas.

Verifica-se ainda que a altura vetorial efetiva da antena dipolo é $\mathbf{h}_e = h_e(\theta)\hat{\theta}$. Consequentemente, a função $h_e(\theta)$ é conhecida como a altura efetiva (escalar) da antena dipolo[2], que definimos como:

$$h_e(\theta) = \sin \theta \int_{L/2}^{L/2} \frac{I(z')}{I_0} e^{j k z' \cos \theta} dz'. \quad (3.102)$$

3.3.2 Aproximação Sinusoidal para a Corrente

Recorrendo à equação de Hallén para o caso de uma *delta-gap*^[1], dada por:

$$\underline{V}(z) = \frac{jn}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} G(z - z') \underline{I}(z') dz' = C_1 \cos(k_0 z') + V_0 \sin(k_0 |z'|), \quad (3.103)$$

é possível formar a base para determinar a corrente numa antena linear. Através das soluções simplificadas da equação é possível justificar a aproximação sinusoidal da corrente.

Inspecionando[¶] $G_{approx}(z - z') = e^{-jkr}/r$, onde $r = |z - z'|$, admitimos que à medida que a variável de integração z' passa por z , o denominador explode, sendo o integral dominado pelo valor do integrando próximo a $z' = z$. Admitindo $h = L/2$ podemos escrever:

$$\frac{jn}{2\pi} \int_{-h}^h G_{approx}(z - z') \underline{I}(z') dz' \approx \underline{Z}(z) \underline{I}(z) \approx \bar{Z} \underline{I}(z) \quad (3.104)$$

onde $\underline{Z}(z)$ é o valor médio de $jnG_{approx}(z - z')/2\pi$ na vizinhança de $z' = z$. Esta quantidade varia lentamente com z e pode ser aproximada por uma constante, \bar{Z} . A equação de Hallén é reduzida para:

$$\underline{V}(z) = \bar{Z} \underline{I}(z) = C_1 \cos(k_0 z) + V_0 \sin(k_0 |z|) \quad (3.105)$$

A constante C_1 é fixada pela condição final $I(h) = 0$:

$$C_1 \cos(k_0 h) + V_0 \sin(k_0 h) = 0 \implies C_1 = -V_0 \frac{\sin(k_0 h)}{\cos(k_0 h)} \quad (3.106)$$

subsequentemente,

$$\begin{aligned} \bar{Z} \underline{I}(z) &= -V_0 \frac{1}{\cos(k_0 h)} \left[\sin(k_0 h) \cos(k_0 z) - \cos(k_0 h) \sin(k_0 |z|) \right] \\ &= \left[-V_0 \frac{1}{\cos(k_0 h)} \sin[k_0(h - |z|)] \right] \end{aligned} \quad (3.107)$$

Resolvendo em função de $\underline{I}(z')$, obtemos:

$$\underline{I}(z) = \underline{I}_0 \frac{\sin[k_0(h - |z|)]}{\sin(k_0 h)}, \text{ onde } \underline{I}_0 = -V_0 \frac{\sin(k_0 h)}{\bar{Z} \cos(k_0 h)} \quad (3.108)$$

Admitindo que $\underline{I}_m = \underline{I}_0 / \sin(k_0 h)$ concluímos que a aproximação sinusoidal da corrente[¶] é dada por:

$$\underline{I}(z') = \underline{I}_m \sin \left[k_0(L/2 - |z'|) \right]. \quad (3.109)$$

! Nota 21

Para um dipolo suficientemente longo, \underline{I}_m determina a corrente de pico:

$$|\underline{I}_m| = \max |\underline{I}(z')| \quad (3.110)$$

Para um dipolo com comprimento menor que meio comprimento de onda ($L < \lambda_0/2$), a corrente de pico é:

$$\max |\underline{I}(z')| = |\underline{I}_m| \sin \left(\frac{k_0 L}{2} \right) \quad (3.111)$$

[¶]“Approximate or reduced thin-wire kernel [...]”^[1]

^{||}O Prof. Mário Silveirinha apresenta uma dedução desta aproximação com base nas linhas de transmissão (estudadas na secção 2.1), pode ser encontrada nas notas das aulas TP ^[2]. Este tópico não é leccionado, é um tópico de estudo/pesquisa que despertou interesse.

3.3.3 Altura Efetiva e Fator de Padrão

No contexto da aproximação de corrente sinusoidal (eq. 3.109), a expressão explícita para a altura efetiva (escalar) pode ser articulada da seguinte forma:

$$h_e(\theta) = \frac{\sin \theta}{I_0} \int_{-L/2}^{L/2} I_m \sin \left[k_0 \left(\frac{L}{2} - |z'| \right) \right] e^{j k_0 z' \cos \theta} dz', \quad (3.112)$$

onde a corrente de alimentação é dada por:

$$I_0 = I_m \sin \left(\frac{k_0 L}{2} \right). \quad (3.113)$$

O integral pode ser avaliado como:

$$h_e(\theta) = \frac{2I_m}{I_0 k_0} P(\theta), \text{ com } P(\theta) = \frac{\cos \left(\frac{k_0 L}{2} \cos \theta \right) - \cos \left(\frac{k_0 L}{2} \right)}{\sin \theta}. \quad (3.114)$$

A função $P(\theta)$ é conhecida como o fator de padrão (*pattern factor*). A intensidade de radiação do dipolo (eq. 3.59) pode ser expressa em termos do fator de padrão como:

$$U(\theta) = \frac{\eta_0}{8\pi^2} |I_m|^2 |P(\theta)|^2. \quad (3.115)$$

O padrão de radiação do campo elétrico emitido é definido pelo fator de padrão, e é influenciado exclusivamente pela altura L do dipolo relativamente ao comprimento de onda no espaço livre (λ_0).

3.3.4 Potência e Resistência de Radiação e de Perdas

Potência e Resistência de Radiação

Através de

$$\iint |P(\theta)|^2 d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |P(\theta)|^2 \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi \int_0^\pi |P(\theta)|^2 \sin \theta d\theta, \quad (3.116)$$

obtemos:

$$\mathcal{P}_{rad} = \iint U(\theta) d\Omega = \frac{\eta_0}{4\pi} |I_m|^2 \int_0^\pi |P(\theta)|^2 \sin \theta d\theta. \quad (3.117)$$

A resistência de radiação da antena dipolo $R_{rad} = 2\mathcal{P}_{rad}/|I_0|^2$ é então:

$$R_{rad} = \frac{\eta_0}{2\pi} \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{k_0 L}{2} \right)} \int_0^\pi |P(\theta)|^2 \sin \theta d\theta. \quad (3.118)$$

Para um dipolo de meia onda ($k_0 L = \pi$) a resistência reduz-se a

$$(R_{rad})_{\lambda/2} = \frac{\eta_0}{2\pi} \int_0^\pi |P(\theta)|^2 \sin \theta d\theta \approx 60 \int_0^\pi |P(\theta)|^2 \sin \theta d\theta, \quad (3.119)$$

com

$$P(\theta) \Big|_{\lambda/2} = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta}. \quad (3.120)$$

Fazendo a integração numericamente, obtemos:

$$(R_{rad})_{\lambda/2} \approx 73.13 [\Omega]. \quad (3.121)$$

Procedendo de forma semelhante para $L = \lambda$ e $L = 3\lambda/2$, obtém-se:

$$(R_{rad})_\lambda \approx \infty, \quad (R_{rad})_{3\lambda/2} \approx 105.3 [\Omega]. \quad (3.122)$$

Potência e Resistência de Perdas

A resistência de perdas de uma antena linear pode ser facilmente calculada em termos da resistência do fio por unidade de comprimento R [Ω/m]. A potência dissipada numa secção de fio com comprimento infinitesimal é evidentemente:

$$d\mathcal{P}_{\text{loss}} = \frac{1}{2}(R dz')|\underline{I}(z')|^2 \quad (3.123)$$

A potência total dissipada é obtida por integração:

$$\mathcal{P}_{\text{loss}} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2}R|\underline{I}(z')|^2 dz' \quad (3.124)$$

A resistência de perdas é então dada por:

$$R_{\text{loss}} = \frac{2\mathcal{P}_{\text{loss}}}{|\underline{I}_0|^2} = \int_{-L/2}^{L/2} R \frac{|\underline{I}(z')|^2}{|\underline{I}_0|^2} dz' \quad (3.125)$$



Checkpoint 16

Para um dipolo de Hertz ($L = d/\lambda$), a corrente é constante (espacialmente), e portanto:

$$R_{\text{loss}} \Big|_{\text{Hertz dip.}} = R \cdot dl \quad (3.126)$$

Por outro lado, para um dipolo curto a corrente possui distribuição triangular. Pode-se demonstrar que neste caso:

$$R_{\text{loss}} \Big|_{\text{short dip.}} = R \frac{L}{3} \quad (3.127)$$

3.3.5 Dipolo Curto

É relevante analisar em detalhe a antena dipolo curta, para a qual $L \ll \lambda/2$. Para um dipolo curto que repousa no eixo zz , a aproximação de corrente sinusoidal produz:

$$\underline{I}(z') = \underline{I}_m \sin \left[k_0 \left(\frac{L}{2} - |z'| \right) \right] \approx \underline{I}_m k_0 \left(\frac{L}{2} - |z'| \right) \quad (3.128)$$

Na qual admitimos a aproximação de argumento pequeno $\sin \theta \approx \theta$. Assim, a distribuição de corrente para um dipolo curto é aproximadamente triangular:

$$\underline{I}(z') = \underline{I}_0 \left(1 - \frac{2|z'|}{L} \right) \quad (3.129)$$

Onde $I_0 = k_0 L \underline{I}_m / 2$, que é precisamente a corrente no ponto de alimentação. Para um dipolo curto $k_0 L \ll 1$ a altura efetiva é dada por:

$$h_e \approx \sin \theta \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\underline{I}(z')}{\underline{I}_0} dz' = \frac{L}{2} \sin \theta \quad (3.130)$$



Nota 22

A altura efetiva de um dipolo curto difere por um fator de 2 da altura efetiva do dipolo de Hertz. A diferença surge devido às diferentes distribuições de corrente dos dois irradiadores.

Evidentemente, o padrão de radiação do dipolo curto tem exatamente a mesma forma que o padrão de radiação do dipolo de Hertz. Em particular, o ganho direcional e a diretividade do dipolo curto são idênticos aos do dipolo de Hertz:

$$g \Big|_{\text{short-dipole}} = \frac{3}{2} \sin^2 \theta, \quad D \Big|_{\text{short-dipole}} = \frac{3}{2}. \quad (3.131)$$

Por outro lado, devido ao fator mencionado de 2, pode-se demonstrar que a resistência de radiação do dipolo curto difere por um fator de $1/2^2 = 1/4$ daquela do dipolo de Hertz:

$$R_{rad} \Big|_{\text{short-dipole}} = \frac{2\pi}{3} \eta_0 \left(\frac{L}{2\lambda_0} \right)^2 = 20\pi^2 \left(\frac{L}{\lambda_0} \right)^2 \quad (3.132)$$



Exercício 15

I. Considere um dipolo elétrico de Hertz (DEH) a funcionar em $f = 15$ kHz, de comprimento $L = \lambda/50$, formado por um condutor com resistência por unidade de comprimento $R = 5$ mΩ/m.

a) Calcule a eficiência do dipolo.

b) Determine a potência de alimentação do dipolo para uma amplitude do campo elétrico $E = 1$ mV/m, a uma distância $d = 200$ km, na direção de radiação máxima.

II. Considere que se retira ao DEH o respetivo carregamento capacitivo (ideal), passando a ter-se um dipolo elétrico curto (DEC).

c) Esboce a distribuição de corrente e o diagrama de radiação e calcule a eficiência.

d) Compare as seguintes características do DEH e do DEC: distribuição de corrente; resistência de radiação; eficiência; diagrama de radiação.

Solução: A eficiência do dipolo é dada por:

$$e = \frac{R_{rad}}{R_{rad} + R_{loss}}.$$

Para um dipolo de Hertz, a resistência de perdas e de radiação é dada por:

$$R_{rad} = 80\pi^2 \left(\frac{L}{\lambda_0} \right)^2 = [315.83 \text{ m}\Omega], \quad R_{loss} = R \cdot dl = R \cdot L = [2 \Omega].$$

A eficiência é

$$e \Big|_{\text{Hertz dip.}} = \frac{R_{rad}}{R_{rad} + R_{loss}} \Big|_{\text{Hertz dip.}} = 13.6\%.$$

A potência de alimentação, \mathcal{P}_{in} pode ser escrita em função da resistência da seguinte forma:

$$\mathcal{P}_{in} = \frac{1}{2}(R_{rad} + R_{loss})|I_0|^2.$$

Para determinar $|I_0|^2$ recorremos à expressão do campo elétrico na região distante, uma vez que se verificam as condições $r = d$, $r \gg L$, $r \gg \lambda_0$ e $r > 2L^2/\lambda_0$:

$$|\underline{E}_\theta| = \left| j \frac{I_0 h_e(\theta)}{4\pi} \left(\frac{e^{-jk_0 r}}{r} \right) \eta_0 k_0 \sin \theta \right| = \frac{\eta_0 k_0 |I_0| L}{4\pi r}.$$

$\boxed{h_e(\theta) = L}$

$\boxed{\sin \theta = 1, \text{ direção de radiação máxima}}$

Consequentemente,

$$|I_0| = \frac{|\underline{E}_\theta| 4\pi r}{\eta_0 k_0 L} = [53.05 \text{ A}].$$

Por fim, $\mathcal{P}_{in} = 3.26$ kW.

Para um dipolo elétrico curto (DEC) a resistência de radiação do dipolo curto difere por um fator de $1/4$ daquela do dipolo de Hertz:

$$R_{rad} \Big|_{\text{short dip.}} = \frac{2\pi}{3} \eta_0 \left(\frac{L}{2\lambda_0} \right)^2 = 20\pi^2 \left(\frac{L}{\lambda_0} \right)^2 = [78.95 \text{ m}\Omega].$$

? Exercício 15 continued

Por outro lado, como a corrente possui distribuição triangular, a resistência de perdas é dada por:

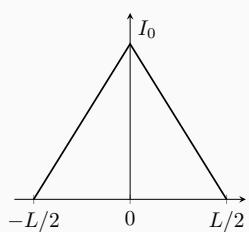
$$R_{\text{loss}} \Big|_{\text{short dip.}} = R \frac{L}{3} = \left[\frac{2}{3} \Omega \right].$$

A respetiva eficiência é

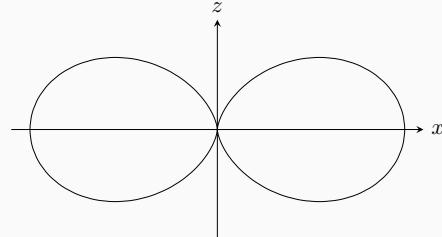
$$e \Big|_{\text{short dip.}} = \frac{R_{\text{rad}}}{R_{\text{rad}} + R_{\text{loss}}} \Big|_{\text{short dip.}} = 10.6\%.$$

Um dipolo elétrico curto é portanto um mau irradiação de potência eletromagnética devido à sua baixa resistência de radiação e baixa eficiência, comparativamente com o dipolo de Hertz.

A distribuição da corrente para um dipolo curto é aproximadamente triangular e o padrão de radiação do dipolo curto tem exatamente a mesma forma que o padrão de radiação do dipolo de Hertz:



(a) Distribuição da corrente.



(b) Padrão de radiação.

Fig. 3.7: Padrão de radiação e distribuição da corrente de um dipolo curto.

Contrariamente, a distribuição da corrente no dipolo de Hertz é considerada constante ao longo da antena linear.

■

3.3.6 Dipolo de Meio Comprimento de Onda

O dipolo de meia onda é particularmente interessante para aplicações devido às suas características de ressonância (irradiando ondas eletromagnéticas de forma eficiente e otimiza a transferência de energia).

Para um dipolo de meia-onda $L = \lambda_0/2$, a altura do dipolo satisfaaz $k_0 L = \pi$. Isto leva a:

$$\underline{I}_0 \Big|_{\lambda/2} = \underline{I}_m, \quad \text{e} \quad h_e(\theta) \Big|_{\lambda/2} = \frac{2}{k_0} P(\theta), \quad \text{com} \quad P(\theta) \Big|_{\lambda/2} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta}. \quad (3.133)$$

O campo elétrico na zona distante é dado por:

$$\underline{E}_\theta \Big|_{\lambda/2} \approx j\eta_0 \underline{I}_0 \Big|_{\lambda/2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \frac{e^{-jk_0 r}}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad |\underline{E}_\theta| \Big|_{\lambda/2} \approx \frac{60}{r} |\underline{I}_0| \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right|. \quad (3.134)$$

O ganho direcional é dado pela fórmula explícita:

$$g(\theta) = \frac{4\pi U(\theta)}{\mathcal{P}_{\text{rad}}} = \frac{4\pi \frac{\eta_0}{8\pi^2} |\underline{I}_m|^2 |P(\theta)|^2}{\frac{1}{2} R_{\text{rad}} |\underline{I}_0|^2} \quad \Rightarrow \quad g(\theta) \Big|_{\lambda/2} = \frac{\eta_0}{\pi R_{\text{rad}}} |P(\theta)|^2 = 1.64 \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right|^2. \quad (3.135)$$

O máximo da radiação ocorre para $\theta = 90^\circ$, de modo que a diretividade é:

$$D \Big|_{\lambda/2} = \max g(\theta) \Big|_{\lambda/2} = 1.64. \quad (3.136)$$

Assim, o dipolo de meia-onda é ligeiramente mais direcional que o dipolo de Hertz ($D_{\text{Hertz}} = 1.5$). A HPBW do dipolo de meia-onda é de 78° .

3.3.7 Impedância de Entrada

A impedância de entrada da antena dipolo é definida como a razão entre a tensão de entrada e a corrente de alimentação:

$$Z_a = R_a + jX_a = \frac{V_0}{I_0} \quad (3.137)$$

Aqui, R_a , X_a são, respectivamente, a resistência e a reatância da antena. A impedância de entrada da antena pode ser rigorosamente calculada usando métodos numéricos, por exemplo, a partir da solução da equação integral de Hallén.

Como já explicitado, a resistência de entrada R_a depende da resistência de radiação e da resistência de perdas:

$$R_a = R_{rad} + R_{loss} \quad (3.138)$$

Para uma antena sem perdas, a resistência da antena simplifica para $R_a = R_{rad}$. Para um dipolo curto, a resistência de entrada assemelha-se de perto à de um dipolo de Hertz, resultando

$$R_{rad} \Big|_{\text{dipolo curto}} \approx 0. \quad (3.139)$$

A variação da reatância X_a com L/λ_0 pode ser justificada usando a analogia da linha de transmissão em circuito aberto, ao dobrarmos os braços do dipolo, admitimos portanto um comprimento de linha idêntico a $l = L/2$:

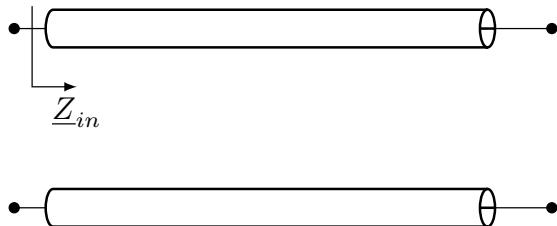


Fig. 3.8: Impedância de entrada.

Recorrendo à fórmula da transformação de impedâncias:

$$\underline{Z}_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta L/2)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta L/2)} = -jZ_0 \cot(\beta L/2) \quad (3.140)$$

Z_L = ∞, já que estamos a avaliar em circuito aberto.

Assim, a antena é ressonante quando a reatância cruza zero ($X_a|_{\text{dipolo}} = 0$). A primeira ressonância da antena ocorre para uma altura ligeiramente mais curta do que $L = 0.5\lambda_0$. Portanto, um dipolo “meia-onda” é ressonante.

! Nota 23

- Uma antena com $L \approx 1.5\lambda$ também é ressonante, mas é menos prática devido aos seus múltiplos lóbulos de radiação. Note-se que o dipolo com $L \approx 1.0\lambda$ exibe uma impedância de entrada extremamente elevada (tipicamente na ordem dos $M\Omega$), tornando-o um irradiador muito ineficiente.
- Para um dipolo curto, a reatância da antena X_a é caracterizada por um valor significativamente grande e negativo. Como $X_a < 0$, o dipolo curto comporta-se como um condensador, consistente com o facto de que o seu campo é predominantemente elétrico.

Exercício 16

Considere uma antena de dipolo com altura de 1 cm. A antena é alimentada por um gerador com impedância interna de 70Ω e tensão em aberto de 10kV. A frequência de oscilação é de 1 GHz. O rendimento da antena é de 90%. Determine a intensidade do vetor de Poynting radiado a uma distância de 5 km na direção de máxima radiação.

Solução: Reconhecemos que é possível expressar o vetor de Poynting em termos da potência de entrada da antena \mathcal{P}_{in} :

$$S_{av} = \frac{\mathcal{P}_{in}}{4\pi r^2} G(\theta, \phi) = \frac{\mathcal{P}_{in}}{4\pi r^2} G_m$$

\uparrow
G_m, direção de máxima radiação

O cálculo de \mathcal{P}_{in} é dado por:

$$\mathcal{P}_{in} = \frac{1}{2} R_a |\underline{I}_0|^2$$

O cálculo de $|\underline{I}_0|^2$ é realizado usando uma analogia com linhas de transmissão, supondo uma malha com fonte V_g e impedâncias Z_g e Z_a em série:

$$|\underline{I}_0|^2 = \frac{|V_g|^2}{|Z_a + Z_g|^2}$$

Por sua vez $Z_a = R_a + jX_a$. A linha em questão é um dipolo elétrico curto:

$$L \ll \lambda_0, \text{ com } \lambda_0 = 0.3 \text{ m e } L = 0.01 \text{ cm}$$

Subsequentemente R_a é dado por:

$$R_a = \frac{1}{e} R_r = \frac{1}{e} 20\pi^2 \left(\frac{L}{\lambda_0} \right)^2 = [0.22 \Omega]$$

e a reatância:

$$X_a = -Z_0 \cot(\beta L/2) = [-951.4 \Omega]$$

Consequentemente,

$$\mathcal{P}_{in} = [13.38 \text{ W}]$$

Por fim, sabemos que a diretividade do dipolo curto é idêntica aos do dipolo de Hertz, assim:

$$S_{av} = \frac{\mathcal{P}_{in}}{4\pi r^2} G_m = \frac{\mathcal{P}_{in}}{4\pi r^2} eD = [57.5 \text{ nW/m}^2]$$

■

CHEAT SHEET PROE (PARTE 3)

Near-field region (Fresnel)	Linear Dipoles
$\mathcal{P}_{rad} \equiv \iint \mathbf{S}_{av} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \stackrel{\text{f=f}}{=} \iint S_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi$	$I(z') = I_m \sin \left[k_0 (L/2 - z') \right], I_m = I_0 / \sin(k_0 L/2)$
$\nabla^2 \underline{\mathbf{A}} + k_0^2 \underline{\mathbf{A}} = -\mu_0 \underline{\mathbf{J}}_{\text{Hertz}}$, $\underline{\mathbf{A}} = \mu_0 I_0 dl \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \hat{\mathbf{z}}$.	$U(\theta, \phi) _{\text{far-field}} \equiv S_r r^2 = \frac{\eta_0 I_0 ^2}{2} \left(\frac{k_0}{4\pi} \right)^2 \ \mathbf{h}_e(\theta, \phi) \ ^2$ $\therefore \mathcal{P}_{rad} = \iint U(\theta, \phi) d\Omega, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi.$
$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} (\nabla \times \underline{\mathbf{H}} - \underline{\mathbf{J}}_{\text{Hertz}})$ $\underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \underline{\mathbf{A}}$.	$U(\theta, \phi) = \frac{d\mathcal{P}_{rad}}{d\Omega} [\text{W/sr}] \rightarrow \text{HPBW: } U(\theta, \phi) = U_{\max}/2.$ $\text{FNBW} = 2 \cdot \text{HPBW}, \quad \text{SLL} = U_{s,\max}/U_{\max}.$
$\underline{\mathbf{H}} = H_\phi \hat{\mathbf{r}}, \quad \underline{H}_\phi = jk_0 I_0 dl \sin \theta \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \left[1 + \frac{1}{jk_0 r} \right].$	$V_0 = Z_a I_0, \quad Z_a = R_a + jX_a, \quad X_a = -Z_0 \cot(k_0 L/2).$ $\mathcal{P}_{in} = \mathcal{P}_{rad} + \mathcal{P}_{loss}$
$\underline{\mathbf{E}} = \underline{E}_r \hat{\mathbf{r}} + \underline{E}_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad \underline{E}_r = \eta_0 I_0 dl \frac{\cos \theta}{r} \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \left[1 + \frac{1}{jk_0 r} \right],$	$\mathcal{P}_{in} = \frac{1}{2} \text{Re}\{V_0 I_0^*\} \rightarrow \mathcal{P}_{in} = \frac{1}{2} R_a I_0 ^2.$ $\mathcal{P}_{rad} = \frac{\eta_0}{4\pi} I_m ^2 \int_0^\pi P(\theta) ^2 \sin \theta d\theta$
$\underline{\mathbf{E}}_\theta = j\eta_0 k_0 I_0 dl \sin \theta \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \left[1 + \frac{1}{jk_0 r} + \frac{1}{(jk_0 r)^2} \right].$	$\mathcal{P}_{loss} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2} R I(z') ^2 dz', \quad R [\Omega/\text{m}].$
Far-field region (Fraunhofer)	$r \gg L, \quad r \gg \lambda_0, \quad r > 2L^2/\lambda_0.$
$\underline{\mathbf{E}} _{\text{far-field}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0, \quad \underline{\mathbf{H}} _{\text{far-field}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0.$ $\underline{\mathbf{E}} _{\text{far-field}} = \underline{E}_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + \underline{E}_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad \underline{\mathbf{H}} _{\text{far-field}} = \underline{H}_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + \underline{H}_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}.$	$R_{rad} = 2\mathcal{P}_{rad}/ I_0 ^2, \quad R_{loss} = 2\mathcal{P}_{loss}/ I_0 ^2.$ $R_{rad} = \frac{\eta_0}{2\pi} \sin^{-2} \left(\frac{k_0 L}{2} \right) \int_0^\pi P(\theta) ^2 \sin \theta d\theta.$ $R_{loss} = \int_{-L/2}^{L/2} R \frac{ I(z') ^2}{ I_0 ^2} dz', \quad R [\Omega/\text{m}].$
$\underline{\mathbf{E}} _{\text{far-f.}} = \eta_0 \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) _{\text{far-f.}} \times \hat{\mathbf{r}}, \quad \underline{\mathbf{H}} _{\text{far-f.}} = \frac{1}{r\eta_0} \hat{\mathbf{r}} \times \underline{\mathbf{E}} _{\text{far-f.}}$	$e = \frac{\mathcal{P}_{rad}}{\mathcal{P}_{in}} = \frac{\mathcal{P}_{rad}}{\mathcal{P}_{rad} + \mathcal{P}_{loss}}, \quad e = \frac{R_{rad}}{R_{in} + R_{loss}} = \frac{R_{rad}}{R_{rad} + R_{loss}}.$ $g(\theta, \phi) = \frac{U_{\theta, \phi}}{U_{iso}} = \frac{4\pi U_{\theta, \phi}}{\mathcal{P}_{rad}}, \quad D = \max g(\theta, \phi) = \frac{4\pi U_{\max}}{\mathcal{P}_{rad}}.$
$\left[\frac{\ \underline{\mathbf{E}}\ }{\ \underline{\mathbf{H}}\ } \right]_{\text{far}} = \eta_0, \quad \mathbf{S}_{av} _{\text{far}} = S_r \hat{\mathbf{r}} = \frac{\ \underline{\mathbf{E}}\ ^2}{2\eta_0} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\ \underline{\mathbf{H}}\ ^2 \gamma_{j0}}{2} \hat{\mathbf{r}}.$	$g(\theta) _{\lambda/2} = 1.64 \cos([\pi/2] \cos \theta) / \sin \theta ^2, \quad D _{\lambda/2} = 1.64.$ $\mathbf{h}_e(\theta, \phi) = h_{e,\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + h_{e,\phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}$

Linear Dipoles
$I(z') = I_m \sin \left[k_0 (L/2 - z') \right], \quad I_m = I_0 / \sin(k_0 L/2)$
$h_e(\theta) = \sin \theta \int_{-L/2}^{L/2} \frac{I(z')}{I_0} e^{jk_0 z'} \cos \theta dz'.$
$\text{Hertz dip. (} L = dl \text{)} \implies I(z') = I_0 = \text{const.}$
$h_e(\theta) \approx \sin \theta \int_{-L/2}^{L/2} \frac{I(z')}{I_0} dz' = dl \sin \theta.$
$L \ll \lambda_0 \implies I(z') \approx I_0 (1 - 2z'), \quad I_0 = I_m k_0 L/2.$
$P(\theta) = \frac{\cos([k_0 L/2] \cos \theta) - \cos(k_0 L/2)}{\sin \theta}.$
$h_e(\theta) = \frac{2I_m}{I_0 k_0} P(\theta), \quad U(\theta) = \frac{\eta_0}{8\pi^2} I_m ^2 P(\theta) ^2.$
$R_{rad} _{\text{Hertz dip.}} = \frac{2\pi}{3} \eta_0 \left(\frac{L}{\lambda_0} \right)^2 = 80\pi^2 \left(\frac{L}{\lambda_0} \right)^2$
$R_{rad} _{\text{short dip.}} = R_{rad} _{\text{Hertz dip.}} / 4 = 20\pi^2 \left(\frac{L}{\lambda_0} \right)^2$
$R_{rad} _{\lambda_0/2} \approx 60 \int_0^\pi P(\theta) ^2 \sin \theta d\theta$
$\frac{\text{Length (} L \text{)}}{\lambda_0} \frac{\text{Radiation Resistance (} R_{rad} \text{)}}{\lambda_0/2} \xrightarrow{\lambda_0 \rightarrow \infty} \frac{73.13}{105.3} \frac{[\Omega]}{[\Omega]}$
$g _{\text{short/H dip.}} = \frac{3}{2} \sin^2 \theta, \quad D _{\text{short/H dip.}} = \frac{3}{2}.$
$g(\theta) _{\lambda/2} = 1.64 \cos([\pi/2] \cos \theta) / \sin \theta ^2, \quad D _{\lambda/2} = 1.64.$

† João Gonçalves 99995, Teresa Nogueira 100029, jan. 24
<https://github.com/Kons5/IST-PROE-Notes>

Referências

- [1] S. J. Orfanidis. *Electromagnetic Waves and Antennas*, 2008.
- [2] M. Silveirinha. *Lecture Notes (PROE)*, 2023.
- [3] IEEE. IEEE Standard Definitions of Terms for Antennas. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, AP-31, pt.II:5, 1983. Revised IEEE Std 145-1993.
- [4] D. M. Pozar. *Microwave Engineering*. Wiley, 4th edition, 2012. ISBN 9780470631553.
- [5] D. K. Cheng. *Field and Wave Electromagnetics*. Addison-Wesley, 2002.
- [6] *Sebenta de PROE*. Secção de Folhas da AEIST, 2002.
- [7] G. Keiser. *Optical Fiber Communications*. McGraw, 2000.
- [8] J. W. Arthur. The Evolution of Maxwell's Equations from 1862 to the Present Day. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 55(3):61, 2013. ISSN 1045-9243/2013. doi: 10.1109/MAP.2013.6529325.
- [9] A. Kwan, J. Dudley, and E. Lantz. Who really discovered Snell's law? *Physics World*, 15(4):64, apr 2002. doi: 10.1088/2058-7058/15/4/44.
- [10] J. H. Bryant. Coaxial Transmission Lines, Related Two-Conductor Transmission Lines, Connectors, and Components: A U.S. Historical Perspective. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 32 (9):970–981, 1984. doi: 10.1109/TMTT.1984.1132810.
- [11] A. Muller, V. Asavei, A. Moldoveanu, E. Sanabria-Codesal, R. Khadar, C. Popescu, D. Dascalu, and A. Ioanescu. The 3D Smith Chart: From Theory to Experimental Reality. *IEEE Microwave Magazine*, 21(11): 22–35, 2020. doi: 10.1109/MMM.2020.3014984.
- [12] J. Hecht. Great Leaps of Light. *IEEE Spectrum*, 53:28–53, 02 2016. doi: 10.1109/MSPEC.2016.7419797.
- [13] C. A. Balanis. *Antenna Theory: Analysis and Design*. John Wiley & Sons, 4th edition, 2016. ISBN 978-1-118-64206-1.
- [14] K. F. Lee. *Principles of Antenna Theory*. John Wiley & Sons, 2nd edition, 1984. ISBN 978-0471901679.