

ENGENHARIA ELETROTÉCNICA E DE COMPUTADORES

Propagação e Radiação de Ondas Eletromagnéticas

Apontamentos PROE

(Alguns tópicos )



MAGNETIC DISCUSSION

João Gonçalves

Autores:

João Gonçalves : 99995

⇒ jrazevedogoncalves@tecnico.ulisboa.pt

Teresa Nogueira : 100029

⇒ maria.teresa.ramos.nogueira@tecnico.ulisboa.pt

Novembro 2023

Guia para a Leitura deste Resumo

Este resumo foi elaborado para facilitar o estudo e a compreensão dos conceitos fundamentais em *Propagação e Radiação de Ondas Eletromagnéticas*. Para aproveitar ao máximo este material, recomenda-se:

- **Leitura Sequencial:** Embora cada seção (ou quase todas) seja auto-contida, uma leitura sequencial ajudará a construir uma compreensão progressiva dos conceitos, desde os mais básicos até aos mais complexos.
- **Uso de Recursos Complementares:** Recomenda-se a consulta de livros, artigos e outros materiais adicionais sugeridos nas notas. Estes oferecem perspectivas diferentes e aprofundadas sobre os tópicos abordados.
- **Complemento às Aulas:** É importante ressaltar que este resumo serve como um complemento às aulas e não como um substituto. As aulas proporcionam uma experiência de aprendizagem com oportunidades para discussão e de esclarecimento de dúvidas.

Em termos de notação, tudo o que tiver mais do que uma dimensão será representado a negrito (i.e., vetores, matrizes, ...). Vetores unitários (ou versores) são representados a negrito e têm um chapéu em cima (e.g., $\hat{\mathbf{u}}$).

Contribuições e relatos de quaisquer inconsistências ou erros encontrados são bem-vindos através de *issues* no .

Resultados da Análise de Fourier

Série de Fourier

A série de Fourier de uma função periódica $f(t)$ com período T é uma expansão em termos de funções seno e cosseno que são ortogonais no intervalo $[0, T]$, e é dada por:

$$f(t) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right]$$

onde os coeficientes a_0 , a_n e b_n são calculados como:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (\text{valor médio/componente DC})$$
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

Estes coeficientes representam a amplitude das frequências no espectro de $f(t)$.

Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma ferramenta matemática fundamental que permite a análise de funções no domínio da frequência.

$$F(\omega) \equiv \mathcal{F}\{f(t)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{equação de análise})$$
$$f(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (\text{equação de síntese})$$

Algumas Identidades do Cálculo Vetorial

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

Rotacional do gradiente de um campo escalar é zero.

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi$$

Divergência do produto escalar por gradiente.

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) = \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi$$

Divergência do produto de gradientes escalares.

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi \nabla \cdot \mathbf{A}$$

Divergência do produto de um escalar por um vetor.

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{A} + \phi \nabla \times \mathbf{A}$$

Rotacional do produto de um escalar por um vetor.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

Divergência do rotacional de um vetor é zero.

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

Divergência do produto vetorial.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

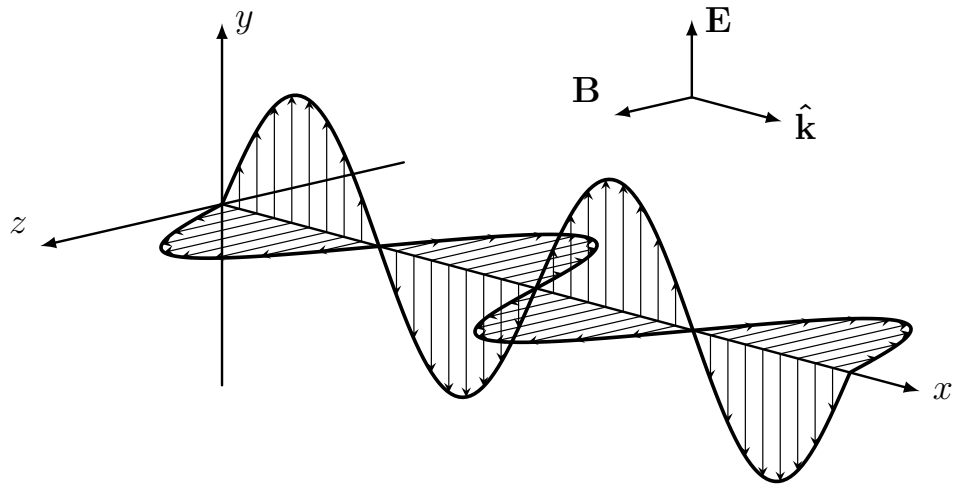
Rotacional do rotacional de um vetor.

CONTEÚDOS

1	Conceitos Fundamentais	2
1.1	Equações de Maxwell	2
1.1.1	Conservação de Carga	2
1.2	Relações Constitutivas e Meios Materiais	3
1.2.1	Eletrodinâmica Macroscópica	4
1.2.2	Modelos Simples de Dielétricos e Condutores	5
1.2.3	Material Genérico	6
1.3	Ondas Planas	7
1.3.1	Equações de Onda livres de Fontes	7
1.3.2	Regime Harmônico no Tempo	8
1.3.3	Propriedade das Ondas Planas	8
1.3.4	Ondas Planas em Meios sem Perdas	9
1.3.5	Ondas Planas em Meios com Perdas	10
1.3.6	Polarização das Ondas	13
1.4	Energia Eletromagnética e o Vetor de Poynting	16
1.4.1	Potência injetada	16
1.4.2	Teorema de Poynting	16
1.4.3	Vetor de Poynting em Regimes Harmônicos no Tempo	18
1.4.4	Vetor de Poynting para Ondas Plana	18
1.5	Reflexão e Refração	20
1.5.1	Condições de Fronteira	20
1.5.2	Incidência em Interfaces Planas	21
1.5.3	Polarização das Ondas Refletidas e Transmitidas	23
1.5.4	Reflexão Interna Total	26
	Referências	27

CAPÍTULO 1

CONCEITOS FUNDAMENTAIS



≡ CONTEÚDOS

1.1	Equações de Maxwell	2
1.2	Relações Constitutivas e Meios Materiais	3
1.3	Ondas Planas	7
1.4	Energia Eletromagnética e o Vetor de Poynting	16
1.5	Reflexão e Refração	20

1.1 Equações de Maxwell

É necessário um conjunto de quatro vetores para descrever os fenómenos do campo eletromagnético:

- o campo elétrico, \mathbf{E} (unidades: V/m, volt por metro)
- o campo de indução magnética, \mathbf{B} (unidades: T, tesla)
- o campo de deslocamento elétrico, \mathbf{D} (unidades: C/m², coulomb por metro quadrado)
- o campo magnético, \mathbf{H} (unidades: A/m, ampère por metro)

Para fenómenos eletromagnéticos variáveis no tempo consideraram-se as equações de Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{(Lei de Indução)} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{ext} & \text{(Lei de Gauss)} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{ext} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \text{(Lei de Ampère com a correção de Maxwell)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{(Lei de Gauss para o magnetismo)} \end{cases}$$

As quantidades ρ_{ext} [C/m³] e \mathbf{J}_{ext} [A/m²] representam a densidade de carga volumétrica e a densidade de corrente elétrica (fluxo de carga) de quaisquer cargas externas (ou seja, excluindo quaisquer cargas e correntes de polarização induzidas no meio).

As densidades de carga e corrente, ρ_{ext} e \mathbf{J}_{ext} , podem ser consideradas como as fontes dos campos eletromagnéticos. Em problemas de propagação de ondas, estas densidades estão localizadas no espaço; por exemplo, estão restritas a fluir numa antena. Os campos elétricos e magnéticos gerados são irradiados a partir destas fontes e podem propagar-se para grandes distâncias até às antenas recetoras.

Longe de geradores (*sources*), i.e., em regiões do espaço livres de fontes (*source-free regions*), as equações de Maxwell tomam uma forma mais simples, em que se considera que $\rho_{ext} = 0$ e $\mathbf{J}_{ext} = 0$.

O mecanismo qualitativo pelo qual as equações de Maxwell originam campos eletromagnéticos que se propagam pode ser visualizado com o seguinte exemplo:

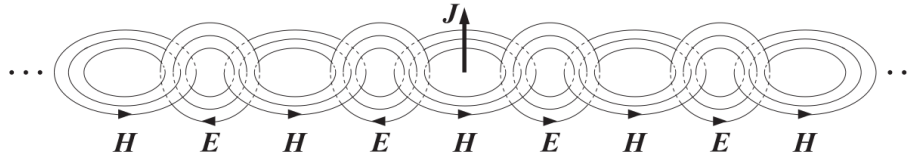


Fig. 1.1: Propagação do campo eletromagnético [1]

✓ Checkpoint 1

Uma corrente \mathbf{J} que varia no tempo numa antena linear gera um campo magnético \mathbf{H} circulante e também variável no tempo. Este campo magnético, através da lei de Faraday, origina um campo elétrico \mathbf{E} circulante, que, segundo a lei de Ampère, gera um campo magnético, e assim por diante. Os campos elétricos e magnéticos interligados propagam-se para longe da fonte de corrente.

1.1.1 Conservação de Carga

Maxwell adicionou o termo da corrente de deslocamento à lei de Ampère para garantir a conservação da carga. De facto, ao tomarmos a divergência de ambos os lados da lei de Ampère e usando a lei de Gauss $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$, obtemos:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J}_{ext} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot \mathbf{J}_{ext} + \frac{\partial \rho_{ext}}{\partial t}$$

Usando a identidade vetorial $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$, obtemos a forma diferencial da lei de conservação da carga:

$$\boxed{\frac{\partial \rho_{ext}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{ext} = 0} \quad \text{(conservação da carga)}$$

1.2 Relações Constitutivas e Meios Materiais

As densidades de fluxo elétrico e magnético, \mathbf{D} e \mathbf{B} , estão relacionadas com as intensidades de campo \mathbf{E} e \mathbf{H} através das chamadas *relações constitutivas*, cuja forma precisa depende do material no qual os campos existem. No vácuo, assumem a sua forma mais simples:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{array}} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ [F/m]} \\ \mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [H/m]} \end{cases}$$

onde ε_0 e μ_0 são a permissividade e permeabilidade do vácuo, respetivamente.

A partir de ε_0 e μ_0 , podemos definir outras duas constantes, nomeadamente, a velocidade da luz e a impedância característica do vácuo:

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ [m/s]}, \quad \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 120\pi \text{ [\Omega]}}$$

A forma mais simples das relações constitutivas é para dielétricos simples, homogêneos e isotrópicos, e para materiais magnéticos:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{array}}$$

Esta relação é tipicamente válida para frequências mais baixas. A permissividade ε e a permeabilidade μ estão relacionadas com as suscetibilidades elétrica e magnética dos materiais, i.e.,

$$\boxed{\begin{array}{l} \varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi) \\ \mu = \mu_0(1 + \chi_m) \end{array}}$$

As suscetibilidades χ e χ_m são medidas das propriedades de polarização elétrica e magnética do material. Por exemplo, temos para a densidade do fluxo elétrico:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0(1 + \chi) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

onde $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$ representa a polarização dielétrica do material, isto é, o momento dipolar elétrico médio por unidade de volume. Num material magnético, temos:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) = \mu_0(1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

onde $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ é a magnetização, isto é, o momento magnético médio por unidade de volume. A velocidade da luz no material e a impedância característica são:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

A permissividade e a permeabilidade relativa, e o índice de refração de um material são definidos por:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi, \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m, \quad n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$

Podemos relacionar a velocidade da luz e a impedância do material com os correspondentes valores no vácuo:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c_0}{n}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = \eta_0 \frac{\mu_r}{n} = \eta_0 \frac{n}{\varepsilon_r}$$

Para um material não magnético, temos $\mu = \mu_0$ ou $\mu_r = 1$, e a impedância simplifica para $\eta = \eta_0/n$.

De uma forma mais geral, as relações constitutivas podem ser não homogêneas, anisotrópicas, não lineares, dependentes da frequência (dispersivas) ou todas as anteriores.

Em *materiais não homogêneos*, a permissividade depende da localização dentro do material:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

Em *materiais anisotrópicos*, ε depende das direções x , y , z e as relações constitutivas podem ser escritas em forma de matriz (ou tensor):

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

A anisotropia é uma propriedade inerente da estrutura atômica/molecular do dielétrico. Também pode ser causada pela aplicação de campos externos.

Em *materiais não lineares*, ε pode depender da magnitude E do campo elétrico aplicado na forma:

$$\mathbf{D} = \varepsilon(E)\mathbf{E}, \quad \text{onde} \quad \varepsilon(E) = \varepsilon + \varepsilon_2 E^2 + \varepsilon_3 E^3 + \dots$$

Uma consequência típica da não linearidade é causar harmônicas de ordem superior.

Materiais com uma constante dielétrica dependente da frequência, $\varepsilon(\omega)$, são referidos como *dispersivos*. A dependência da frequência surge porque quando um campo elétrico variável no tempo é aplicado, a resposta de polarização do material não pode ser instantânea. Tal resposta dinâmica pode ser descrita pela relação constitutiva convolucional (e causal):

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(t - t')\mathbf{E}(\mathbf{r}, t')dt'$$

que se torna multiplicativa no domínio da frequência:

$$\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\omega)\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$$

Na realidade, todos os materiais são dispersivos. Contudo, $\varepsilon(\omega)$ tipicamente exibe uma forte dependência de ω apenas para certas frequências.

1.2.1 Eletrodinâmica Macroscópica

As densidades ρ_{ext} e \mathbf{J}_{ext} representam as cargas e correntes externas ou livres num meio material. A polarização induzida \mathbf{P} e a magnetização \mathbf{M} podem ser tornadas explícitas nas equações de Maxwell através das relações constitutivas:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

Assim, podemos escrever as equações de Maxwell em termos dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}_{ext} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

Identificamos assim as densidades de corrente e carga devido à polarização do material como:

$$\mathbf{J}_{pol} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad \rho_{pol} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

Da mesma forma, a quantidade $\mathbf{J}_{mag} = \nabla \times \mathbf{M}$ pode ser identificada como a corrente de magnetização.

Para um meio dielétrico e condutor (e.g., plasma), acresce-se à lei de Ampère a componente $\mathbf{J}_{cond} = \sigma \mathbf{E}$. As densidades totais de corrente e carga, num meio material genérico, são:

$$\mathbf{J}_{tot} = \underbrace{\mathbf{J}_{ext}}_{\text{macro currents}} + \underbrace{\mathbf{J}_{cond} + \mathbf{J}_{pol} + \mathbf{J}_{mag}}_{\text{micro currents}} = \mathbf{J}_{ext} + \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}$$

$$\rho_{tot} = \rho + \rho_{pol} = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

e podem ser considerados como as fontes dos campos.

✓ Checkpoint 2

Estas relações satisfazem as equações de Maxwell macroscópicas,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{ext} + \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

A resposta material (dipolar) está "oculta" nos vetores de polarização e magnetização \mathbf{P} e \mathbf{M} , respetivamente.

1.2.2 Modelos Simples de Dielétricos e Condutores

Um modelo simples para as propriedades dielétricas de um material pode ser obtido considerando o movimento de um eletrão ligado na presença de um campo elétrico aplicado. À medida que o campo elétrico tenta separar o eletrão do núcleo positivamente carregado, cria-se um momento de dipolo elétrico. A média deste momento de dipolo ao longo do volume do material dá origem a um momento de dipolo macroscópico por unidade de volume.

Um modelo simples para a dinâmica do deslocamento \mathbf{r} do eletrão ligado é o seguinte (onde $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} - k\mathbf{r} - m\Gamma\dot{\mathbf{r}} \quad (\text{modelo Drude-Lorentz})$$

onde assumimos que o campo elétrico está a atuar na direção \mathbf{r} e que existe uma força restauradora tipo-mola devido à ligação do eletrão ao núcleo, e uma força de atrito proporcional à velocidade do eletrão.

A constante da mola k está relacionada à frequência de ressonância da mola pela relação $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, ou $k = m\omega_0^2$. Assim, podemos reescrever a equação como:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \Gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}$$

O termo friccional $\Gamma\dot{\mathbf{r}}$ surge de colisões que tendem a desacelerar o eletrão. O parâmetro Γ é uma medida da taxa de colisões por unidade de tempo, e, portanto, $\tau = 1/\Gamma$ representará o tempo médio entre colisões.

✓ Checkpoint 3

A ideia básica deste modelo é que o campo elétrico aplicado tende a separar cargas positivas de cargas negativas, criando assim um momento de dipolo elétrico. Neste sentido, o modelo contém as características básicas de outros tipos de polarização em materiais.

Meio Dielétrico Dispersivo

O campo elétrico aplicado pode ter qualquer dependência temporal. Em particular, se assumirmos que é sinusoidal com frequência ω , então, a equação modelo terá a solução $\mathbf{r} = \text{Re}\{\underline{\mathbf{r}}e^{j\omega t}\}$, onde o fasor $\underline{\mathbf{r}}$ deve satisfazer:

$$-\omega^2\underline{\mathbf{r}} + j\omega\Gamma\underline{\mathbf{r}} + \omega_0^2\underline{\mathbf{r}} = \frac{e}{m}\underline{\mathbf{E}} \implies \underline{\mathbf{r}} = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma}\underline{\mathbf{E}}$$

Podemos encontrar assim a polarização por unidade de volume no domínio da frequência, $\underline{\mathbf{P}}$. Supondo que existem N dipolos elementares por unidade de volume e admitindo o momento de dipolo elétrico individual $\underline{\mathbf{p}} = e\underline{\mathbf{r}}$, vem:

$$\underline{\mathbf{P}} = N\underline{\mathbf{p}} = Ne\underline{\mathbf{r}} = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma} \underline{\mathbf{E}} \equiv \varepsilon_0\chi(\omega)\underline{\mathbf{E}}$$

A densidade do fluxo elétrico será: $\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon_0\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{P}} = \varepsilon_0(1 + \chi(\omega))\underline{\mathbf{E}} = \varepsilon(\omega)\underline{\mathbf{E}}$, onde a permitividade efetiva $\varepsilon(\omega)$ é:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma} \right) \quad \text{onde} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}} \quad (\text{frequência de plasma})$$

este modelo para $\varepsilon(\omega)$ é conhecido como um “dielétrico de Lorentz”.

! Nota 1

As partes real e imaginária de $\varepsilon(\omega)$ caracterizam as propriedades *refrativas* e *absorventes* do material. Por convenção, definimos a parte imaginária com o sinal negativo (porque usamos a dependência temporal $e^{j\omega t}$):

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega), \quad \text{onde}$$

$$\varepsilon'(\omega) = \text{Re}\{\varepsilon(\omega)\} = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\text{Im}\{\varepsilon(\omega)\} = \frac{\varepsilon_0\omega_p^2\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}$$

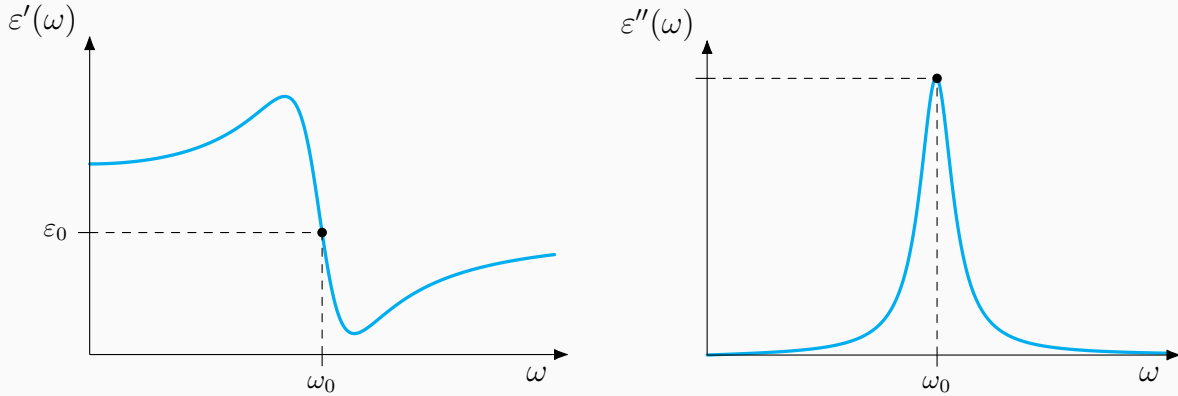


Fig. 1.2: Partes real e imaginária da permitividade efetiva $\varepsilon(\omega)$.

A componente ε' representa a permitividade sem perdas, i.e., $\varepsilon' = \varepsilon_0\varepsilon_r$. ε'' é a componente imaginária da permitividade atribuída às cargas ligadas e relaxamento dipolar, que originam perdas de energia indistinguíveis das perdas devido à condução de cargas.

Meio Condutor Dispersivo

As propriedades de condutividade de um material são descritas pela lei de Ohm. Para derivar esta lei do nosso modelo simples, usamos a relação $\mathbf{J} = \rho\dot{\mathbf{r}}$, onde a densidade de carga de condução é $\rho = Ne$. Consequentemente,

$$\underline{\mathbf{J}} = \rho(j\omega\underline{\mathbf{r}}) = \frac{j\omega Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma} \underline{\mathbf{E}} \equiv \sigma(\omega)\underline{\mathbf{E}}$$

e, portanto, identificamos a condutividade $\sigma(\omega)$:

$$\sigma(\omega) = \frac{j\omega Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma} = \frac{j\omega\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma} \xrightarrow{\text{para } \omega_0=0} \sigma(\omega) = \frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\Gamma + j\omega} \quad \text{“modelo de Drude”}$$

Notamos que $\sigma(\omega)/j\omega$ é essencialmente a suscetibilidade elétrica considerada anteriormente. De facto, temos $\underline{\mathbf{J}} = j\omega\underline{\mathbf{P}}$, e portanto, $\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{J}}/j\omega = (\sigma(\omega)/j\omega)\underline{\mathbf{E}}$. Segue-se que $\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0 = \sigma(\omega)/j\omega$, e

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma} = \varepsilon_0 + \frac{\sigma(\omega)}{j\omega}$$

1.2.3 Material Genérico

Para descrever um material com ambas as propriedades dielétricas e condutivas, podemos tomar a suscetibilidade como a soma de dois termos, um que descreve as cargas polarizadas ligadas e o outro as cargas de condução livres. Assumindo parâmetros diferentes $\{\omega_0, \omega_p, \Gamma\}$ para cada termo, obtemos a permitividade total:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left[1 + \chi_d(\omega) + \chi_c(\omega) \right] = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0\omega_{dp}^2}{\omega_{d0}^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma_d} + \frac{\varepsilon_0\omega_{cp}^2}{\omega_{c0}^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma_c}$$

Agrupando os dois primeiros termos em $\varepsilon_d(\omega)$ e denotando o terceiro por $\sigma_c(\omega)/j\omega$, obtemos a permitividade efetiva total do material:

$$\boxed{\varepsilon(\omega) = \varepsilon_d(\omega) + \frac{\sigma_c(\omega)}{j\omega}} \quad (\text{permitividade efetiva total})$$

✓ Checkpoint 4

Semelhante a $\underline{\mathbf{D}}$ e $\underline{\mathbf{E}}$, a indução e o campo magnético estão ligados por uma permeabilidade magnética complexa $\mu(\omega)$ tal que $\underline{\mathbf{B}} = \mu(\omega)\underline{\mathbf{H}}$. Substituindo $\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon(\omega)\underline{\mathbf{E}}$ e $\underline{\mathbf{B}} = \mu(\omega)\underline{\mathbf{H}}$ nas equações macroscópicas de Maxwell, descobre-se que:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu(\omega)\underline{\mathbf{H}}, \quad \nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}}_{ext} + j\omega\varepsilon(\omega)\underline{\mathbf{E}},$$

onde $\varepsilon(\omega)$ é a permitividade complexa equivalente acima, que inclui as contribuições das correntes de condução e das correntes de polarização.

Admitindo $\varepsilon_d(\omega) = \varepsilon'_d(\omega) - j\varepsilon''_d(\omega)$, como visto anteriormente, e assumindo que a condutividade $\sigma_c(\omega)$ é real para a gama de frequências de interesse, podemos definir $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega)$, onde:

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon'_d(\omega), \quad \varepsilon''(\omega) = \varepsilon''_d(\omega) + \frac{\sigma_c(\omega)}{\omega}$$

Uma maneira conveniente de quantificar as perdas é através da tangente de perdas (*loss tangent*) definida em termos das partes real e imaginária da permitividade efetiva:

$$\tan \theta = \frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon'(\omega)} \quad \text{onde } \theta \text{ é o ângulo de perdas.}$$

1.3 Ondas Planas

1.3.1 Equações de Onda livres de Fontes

Para meios isotrópicos padrão (sem dispersão), numa região isenta de fontes onde $\rho = 0$ e $\underline{\mathbf{J}}_{ext} = 0$, as equações de Maxwell podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -\mu \frac{\partial \underline{\mathbf{H}}}{\partial t} \quad \nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \varepsilon \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}} = 0 \quad \nabla \cdot \underline{\mathbf{H}} = 0 \quad (1.2)$$

As equações diferenciais de primeira ordem podem ser unificadas numa única equação diferencial de segunda ordem, em $\underline{\mathbf{E}}$ ou em $\underline{\mathbf{H}}$. Aplicando o rotacional a (1.1) obtemos:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{E}}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \underline{\mathbf{H}}) \quad (1.3)$$

Por conseguinte, substituindo com a equação par em (1.1), obtemos:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{E}}) = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \quad (1.4)$$

Com recurso à identidade vetorial e admitindo a equação (1.2), é possível reescrever:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{E}}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}) - \nabla^2 \underline{\mathbf{E}} = -\nabla^2 \underline{\mathbf{E}} \quad (1.5)$$

Finalmente obtemos:

$$\boxed{\nabla^2 \underline{\mathbf{E}} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0} \quad \text{e de forma análoga} \quad \boxed{\nabla^2 \underline{\mathbf{H}} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{H}}}{\partial t^2} = 0} \quad (1.6)$$

! Nota 2

A equação de onda é de segunda ordem, nas coordenadas temporais e espaciais. Utilizamos ∇^2 para representar o operador *Laplaciano*; podemos, portanto, escrever as equações de (1.6) em cada coordenada do campo.

Uma equação de onda unidimensional genérica tem a forma e solução como se apresenta:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0 \implies \boxed{\mathbf{u} = f(x - ct) + g(x + ct)} \quad (\text{variação espacial em apenas uma das direções})$$

1.3.2 Regime Harmónico no Tempo

Dado que as equações de Maxwell são equações diferenciais lineares, variações temporais sinusoidais impostas pelo gerador de funções com uma frequência específica produzirão variações sinusoidais de \mathbf{E} e \mathbf{H} com a mesma frequência no estado estacionário.

O campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ em regime harmónico pode ser reescrito em termos da amplitude complexa na forma de fasor $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ na forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\} \quad (1.7)$$

As amplitudes complexas dos campos satisfazem as equações de Maxwell independentes do tempo:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \underline{\mathbf{B}} \quad \nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}}_{ext} + j\omega \underline{\mathbf{D}} \quad (1.8)$$

e por conseguinte

$$\boxed{\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \mu \underline{\mathbf{H}} \quad \nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}}_{ext} + j\omega \varepsilon \underline{\mathbf{E}}} \quad (1.9)$$

1.3.3 Propriedade das Ondas Planas

As ondas planas são a solução mais simples das equações de Maxwell. Por definição, um campo de onda plana é descrito por:

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (1.10)$$

O termo $e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ é conhecido como fator de propagação, pois determina a variação espacial dos campos. É expresso em termos das coordenadas do ponto de observação $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e em termos do vetor de onda fundamental $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$.

É conveniente escrever o fator de propagação em termos de um vetor unitário $\hat{\mathbf{d}}$ e um fator k denominado número de onda. Em meios isotrópicos, $\hat{\mathbf{d}}$ determina a direção de propagação da onda.

$$\boxed{e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{-jk\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}}} \quad (1.11)$$

O comprimento de onda λ é a distância pela qual a fase da onda sinusoidal muda por 2π radianos. Uma vez que o fator de propagação $e^{-jk\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}}$ acumula uma fase de k radianos por metro, temos por definição que $k\lambda = 2\pi$. O comprimento de onda λ pode ser expresso através da frequência da onda em hertz, $f = \omega/2\pi$, como se segue:

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{f}} \quad (1.12)$$

! Nota 3

Se o meio de propagação for o espaço livre, usamos os valores de vácuo dos parâmetros $\{\varepsilon, \mu, c, \eta\}$, ou seja, $\{\varepsilon_0, \mu_0, c_0, \eta_0\}$. O comprimento de onda no espaço livre e o número de onda correspondente são:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{c_0}{f}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c_0} \quad (1.13)$$

Num dielétrico com índice de refração $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$, a velocidade da luz c , o comprimento de onda λ e a impedância característica η são todos reduzidos por um factor de n em comparação com os valores no espaço livre, enquanto que o número de onda k é aumentado por um factor de n :

$$c = \frac{c_0}{n}, \quad \eta = \frac{\eta_0}{n}, \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n}, \quad k = nk_0 \quad (1.14)$$

1.3.4 Ondas Planas em Meios sem Perdas

Em materiais uniformes não dispersivos, com ε, μ independentes de $\mathbf{r} = (x, y, z)$. As ondas planas satisfazem as equações de Maxwell sem fonte ($\mathbf{J} = 0$), definidas em (1.9).

A variação no espaço de uma onda plana é controlada pelo fator de propagação $e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$. Assim:

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{\mathbf{E}} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\underline{\mathbf{E}}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\underline{E}_x, \underline{E}_y, \underline{E}_z) = \left(\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z}, \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}, \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (1.15)$$

Recorrendo ao cálculo das derivadas em todas as componente:

$$-j \left(\underline{E}_{0z} k_y - \underline{E}_{0y} k_z, \underline{E}_{0x} k_z - \underline{E}_{0z} k_x, \underline{E}_{0y} k_x - \underline{E}_{0x} k_y \right) \cdot e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (1.16)$$

$\uparrow (k_x, k_y, k_z) \times (\underline{E}_{0x}, \underline{E}_{0y}, \underline{E}_{0z})$

Consequentemente,

$$-j\mathbf{k} \times \underline{\mathbf{E}}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -j\mathbf{k} \times \underline{\mathbf{E}} \quad (1.17)$$

É então possível reescrever as equações de Maxwell:

$$\mathbf{k} \times \underline{\mathbf{E}} = \omega\mu\underline{\mathbf{H}} \quad \mathbf{k} \times \underline{\mathbf{H}} = -\omega\varepsilon\underline{\mathbf{E}} \quad (1.18)$$

✓ Checkpoint 5

A equação à esquerda implica que $\underline{\mathbf{H}}$ é perpendicular a ambos \mathbf{k} e $\underline{\mathbf{E}}$. Similarmente, a equação à direita mostra que $\underline{\mathbf{E}}$ é perpendicular a ambos \mathbf{k} e $\underline{\mathbf{H}}$. Assim, os três vetores são mutuamente perpendiculares e dizemos que a onda é eletromagnética transversal (*transverse electromagnetic*, TEM). Formalmente podemos escrever:

$$\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{E}} = \mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{H}} = 0 \quad \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{H}} = 0 \quad (1.19)$$

Os vetores $\underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{H}}, \mathbf{k}$ ou, analogamente¹, $\underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{d}}$ formam uma base direita do espaço. As oscilações do campo são perpendiculares à direção de propagação.

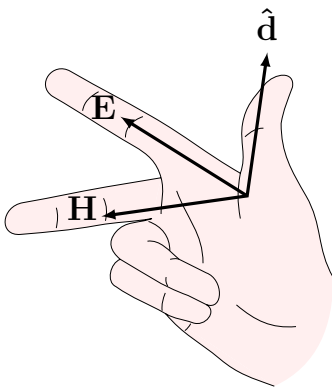


Fig. 1.3: Base direita do espaço.

Substituindo $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = n \cdot \omega/c$ em (1.18) e utilizando $k = \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{d}}$, obtemos a seguinte relação explícita entre os campos e a direção de propagação da onda:

$$\underline{\mathbf{H}} = -\frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{d}} \times \underline{\mathbf{E}}, \quad \underline{\mathbf{E}} = \eta \underline{\mathbf{H}} \times \hat{\mathbf{d}} \quad (1.20)$$

O produto vetorial roda efetivamente o campo relevante por 90°.

! Nota 4

Esta relação é sempre válida para ondas planas em meios uniformes não dispersivos!

A ligação entre a frequência angular e o número de onda implica que também existe uma ligação entre os períodos de tempo e espaço da onda. Podemos escrever:

$$\frac{\overset{\text{período temporal}}{T}}{\lambda} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{k} \frac{n}{c} = \lambda \frac{n}{c} \quad (1.21)$$

\uparrow período espacial

¹É conveniente escrever o vetor de onda em termos de um vetor unitário (ou versor) $\hat{\mathbf{d}}$ e um escalar k : $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{d}}$. O escalar k é o número de onda. Em meios isotrópicos padrão, o vetor $\hat{\mathbf{d}}$ determina a direção de propagação da onda. [2]

? Exercício 1

Considere uma onda plana que se propaga pelo vácuo, descrita por:

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{jk_0 y}, \quad \text{onde } \underline{\mathbf{E}}_0 = E_0 \hat{\mathbf{x}}$$

Determine o campo magnético da onda no domínio do tempo.

Solução: O campo elétrico instantâneo pode ser calculado através de:

$$\mathbf{E}(y, t) = \text{Re}\{\underline{\mathbf{E}} e^{j\omega t}\} = E_0 \hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t + k_0 y)$$

Por conseguinte, sabemos que a relação explícita entre os campos e a direção de propagação é dada por:

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{\eta_0} \hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{E}$$

Tomando a fórmula do fator de propagação, $e^{-jk_0 \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{d}}}$, é possível escrever:

$$\begin{aligned} -\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{d}} &= y && \text{para qualquer } (x, y, z) \\ -(x, y, z) \cdot (d_x, d_y, d_z) &= -xd_x - yd_y - zd_z \end{aligned}$$

Por inspeção direta, sabendo que $\hat{\mathbf{d}}$ é um versor, obtemos:

$$\begin{cases} d_x = 0 \\ d_y = -1 \\ d_z = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\hat{\mathbf{d}} = -\hat{\mathbf{y}}}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(y, t) &= -\frac{1}{\eta_0} \hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{E}(y, t) \\ &= -\frac{1}{\eta_0} \hat{\mathbf{y}} \times [E_0 \hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t + k_0 y)] \\ &= \boxed{\frac{1}{\eta_0} E_0 \hat{\mathbf{z}} \cos(\omega t + k_0 y)} \end{aligned}$$

■

1.3.5 Ondas Planas em Meios com Perdas

Vimos anteriormente que as perdas de potência podem surgir devido à condução e/ou polarização no material. Uma onda que se propaga num meio com perdas estabelecerá uma corrente de condução e uma corrente de deslocamento (polarização), onde ambas causam perdas ôhmicas.

Podemos estender a discussão da secção anterior considerando os resultados obtidos em 1.2.3, nomeadamente:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_d(\omega) + \frac{\sigma_c(\omega)}{j\omega} \quad (1.22)$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu(\omega)\underline{\mathbf{H}}, \quad \nabla \times \underline{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon(\omega)\underline{\mathbf{E}} \quad (1.23)$$

para uma região no espaço isenta da contribuição de fontes externas ($\underline{\mathbf{J}}_{ext} = 0$).

É então necessário que se verifiquem as relações:

$$\underline{\mathbf{H}} = -\frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{d}} \times \underline{\mathbf{E}}, \quad \underline{\mathbf{E}} = \eta \underline{\mathbf{H}} \times \hat{\mathbf{d}}, \quad (1.24)$$

que levantam a definição da impedância característica e número de onda para meios dispersivos:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu(\omega)}{\varepsilon(\omega)}} = \sqrt{\frac{\mu(\omega)}{\varepsilon_d(\omega) + \sigma_c(\omega)/j\omega}}, \quad (1.25)$$

$$k = \omega \sqrt{\mu(\omega)\varepsilon(\omega)} = \omega \sqrt{\mu(\omega) \left[\varepsilon_d(\omega) + \frac{\sigma_c(\omega)}{j\omega} \right]} \quad (1.26)$$

Assim, os campos de uma onda plana são

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{-\gamma \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}}, \quad \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}}_0 e^{-\gamma \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}}, \quad (1.27)$$

onde se define a *constante de propagação* complexa $\gamma = jk = \alpha + j\beta$.

Da constante de propagação γ destacam-se os parâmetros α e β , conhecidos como constante de atenuação e constante de fase, respetivamente, ambos em unidades de m^{-1} .

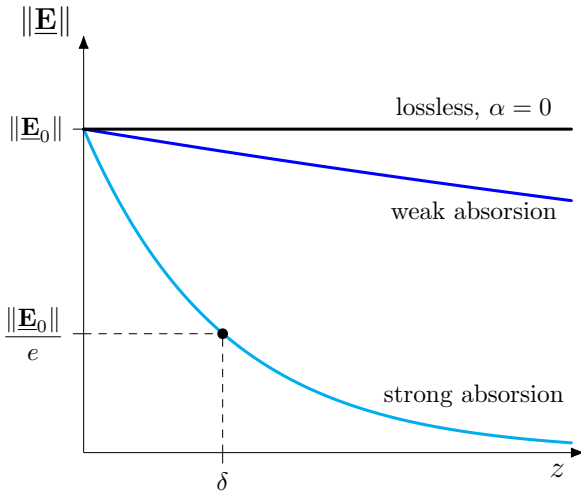


Fig. 1.4: Amplitude máxima de oscilação em função da distância de propagação [2]. Escolheu-se z para o exemplo.

O módulo da amplitude máxima de oscilação decai exponencialmente com a distância de propagação. Isto segue da definição em (1.27), onde $\underline{\mathbf{E}}_0$ é multiplicado pelos fatores

$e^{-\alpha \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}}$ (regime exponencial), $e^{-j\beta \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}}$ (regime sinusoidal).

O módulo $\|\underline{\mathbf{E}}\|$ é obtido por:

$$\|\underline{\mathbf{E}}_0\| e^{-\alpha \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}} \quad (1.28)$$

Definimos a *profundidade de penetração* (*skin depth*) como:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \quad (1.29)$$

A profundidade de penetração fornece uma estimativa aproximada da distância que uma onda pode penetrar dentro de um meio material antes de ser praticamente absorvida (i.e., decaia para $\sim 37\%$ da amplitude original).

Exercício 2

Para a frequência de oscilação de 1MHz, um material é caracterizado pela permissividade relativa $\varepsilon_r = 2.5$, pela permeabilidade relativa $\mu_r = 1$, e pela condutividade $\sigma = 4 \times 10^{-5}$.

Determine: a) a tangente de perdas, b) a constante de atenuação, c) a constante de fase.

Solução: A tangente de perdas é definida em termos das partes real e imaginária da permissividade efetiva:

$$\tan \theta = \frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon'(\omega)} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon'(\omega) = \varepsilon'_d(\omega) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \\ \varepsilon''(\omega) = \varepsilon''_d(\omega) + \frac{\sigma_c(\omega)}{\omega} = \frac{\sigma_c(\omega)}{\omega} \end{cases}$$

↑ Omitimos a componente da polarização

Assim,

$$\tan \theta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r} = 0.288$$

Ainda, $\gamma = jk = \alpha + j\beta$, logo:

$$k = \omega \sqrt{\mu(\omega)\varepsilon(\omega)} = \sqrt{\mu(\omega)\varepsilon'_d(\omega)} \cdot \sqrt{1 - j \tan \theta} = 0.0334 - j4.7 \times 10^{-3} [\text{m}^{-1}]$$

$$\gamma = jk = 4.7 \times 10^{-3} + j0.0334$$

↑ $\alpha + j\beta$, respetivamente

Bons condutores e Bons Dielétricos

Consideremos a dispersão de $\varepsilon(\omega)$ e $\mu(\omega)$ negligenciável de forma a podermos escrever a constante de propagação e a impedância intrínseca da onda da seguinte forma:

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu \left(\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \right)} = j\omega \sqrt{\mu \varepsilon} \sqrt{1 + \frac{\sigma}{j\omega \varepsilon}} \quad (1.30)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma}{j\omega \varepsilon}}} \quad (1.31)$$

Tanto a impedância quanto a constante de propagação são governadas pelo parâmetro $\sqrt{1 + \frac{\sigma}{j\omega \varepsilon}}$

- Caso $\sigma = 0$ o material torna-se não dispersivo e é dito *dielétrico perfeito*.
- Caso $\sigma \neq 0$ mas $\sigma/\omega\varepsilon \ll 1$ o material é dito *bom dielétrico*. (1.30) e (1.31) podem ser escritas como

$$\gamma_{\text{good dielectric}} \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} + j \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \quad \eta_{\text{good dielectric}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega \varepsilon} \right) \quad (1.32)$$

- Caso $\sigma/\omega\varepsilon \gg 1$ o material é dito *bom condutor* e:

$$\gamma_{\text{good conductor}} \approx \sqrt{\frac{\sigma \omega \mu}{2}} (1 + j) \quad \eta_{\text{good conductor}} \approx \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} (1 + j) \quad (1.33)$$

? Exercício 3

Um forno de micro-ondas trabalha à frequência de 2.5GHz. Nesta frequência um bife de lombo tem a permi-tividade complexa $30(1 - j0.3)\varepsilon_0$.

- Qual o comprimento das micro-ondas no bife?
- Qual a profundidade de penetração (pelicular) das micro-ondas no bife?
- Se o bife é colocado num prato de plástico com $\varepsilon = (1.1 - j2 \times 10^{-4})\varepsilon_0$ e espessura 3mm, explique como este procedimento afeta o aquecimento do bife pelas micro-ondas.

Solução: Admitimos que:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad \beta = \text{Re}\{k\}$$

Por sua vez, recorrendo ao cálculo de k , para o qual $k = \beta - j\alpha$ (por definição)

$$k = \omega \sqrt{\mu(\omega) \varepsilon(\omega)} = \omega \sqrt{\mu_0 \cdot 30(1 - j0.3)\varepsilon_0} = 289.89 - j42.55$$

Finalmente:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 21.67 \text{ mm}$$

A profundidade de penetração é dada por:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = 2.35 \text{ cm}$$

Assumindo agora que $\varepsilon = (1.1 - j2 \times 10^{-4})\varepsilon_0$ admitimos que

$$\tan \theta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} = \frac{2 \times 10^{-3}}{1.1} \ll 1 \quad (\text{bom dielétrico}) \rightarrow \begin{cases} \gamma \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} + j \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \\ \delta = \frac{1}{\alpha} = 200 \text{ m} \end{cases}$$

Como o prato possui apenas 3 mm e $\delta = 200\text{m}$. A dissipação de energia é negligenciável, i.e, há baixa absorção/reflexão de energia pelo prato. O procedimento não afeta significativamente o aquecimento do bife.

1.3.6 Polarização das Ondas

Uma oscilação do campo eletromagnético não é totalmente determinada pela amplitude do campo. Devido à natureza vetorial do campo, existe um grau de liberdade adicional relacionado com a direção do espaço ao longo da qual o campo oscila. Este grau de liberdade é conhecido como a *polarização do campo*.

A curva fechada determinada pela evolução temporal de $\mathbf{E}(t) = \text{Re}\{\underline{\mathbf{E}}e^{j\omega t}\}$, num ciclo completo de tempo (com período $T = 2\pi/\omega$) é a *curva de polarização*. É simples demonstrar que a curva de polarização é sempre planar, uma vez que está no plano gerado pelos vetores ortogonais $\mathbf{E}' = \text{Re}\{\underline{\mathbf{E}}\}$ e $\mathbf{E}'' = \text{Im}\{\underline{\mathbf{E}}\}$.

As propriedades de polarização da onda plana são determinadas pelas magnitudes relativas e fases das constantes complexas \underline{A} e \underline{B} . Escrevendo-as nas suas formas polares $\underline{A} = Ae^{j\phi_A}$ e $\underline{B} = Be^{j\phi_B}$, onde A e B são magnitudes positivas, obtemos:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}} &= (\underline{A}\hat{\mathbf{y}} + \underline{B}\hat{\mathbf{x}})e^{-jkz} \\ &= [Ae^{j\phi_A}\hat{\mathbf{y}} + Be^{j\phi_B}\hat{\mathbf{x}}]e^{-jkz}\end{aligned}\quad (1.34)$$

Extraindo a parte real e definindo $\mathbf{E}(z, t) = \text{Re}\{\underline{\mathbf{E}}e^{j\omega t}\} = E_x(z, t)\hat{\mathbf{x}} + E_y(z, t)\hat{\mathbf{y}}$, encontramos as componentes reais em x e y :

$$\begin{aligned}E_y(z, t) &= A \cos(\omega t - kz + \phi_A) \\ E_x(z, t) &= B \cos(\omega t - kz + \phi_B)\end{aligned}\quad (1.35)$$

Para determinar a polarização da onda, consideramos a dependência temporal destes campos num ponto fixo ao longo do eixo z , digamos em $z = 0$:

$$\begin{aligned}E_y(t) &= A \cos(\omega t + \phi_A) \\ E_x(t) &= B \cos(\omega t + \phi_B)\end{aligned}\quad (1.36)$$

Definimos a fase relativa $\phi = \phi_A - \phi_B$. Após alguma manipulação algébrica obtemos uma equação quadrática para as componentes E_x e E_y , que descreve uma elipse no plano E_x, E_y :

$$\left(\frac{E_y(t)}{B}\right)^2 \sin^2 \phi_A + \left(\frac{E_x(t)}{A}\right)^2 \sin^2 \phi_B - 2 \cos \phi \frac{E_x(t)E_y(t)}{AB} = \sin^2 \phi \quad (1.37)$$

A trajetória do campo obtém-se através da omissão de t . A expressão é simplificada para

$$\frac{E_x^2}{A^2} + \frac{E_y^2}{B^2} - 2 \cos \phi \frac{E_x E_y}{AB} = \sin^2 \phi \quad (1.38)$$

↑
Elipse de polarização

✓ Checkpoint 6

Dependendo dos valores das três quantidades A, B, ϕ , esta elipse de polarização pode ser uma elipse, um círculo ou uma linha reta.

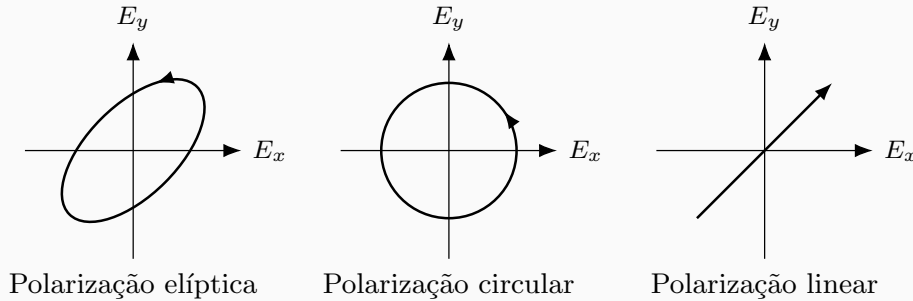


Fig. 1.5: Tipos de polarização.

Para obter a *polarização linear*, definimos $\phi = 0$ ou $\phi = \pi$, o que corresponde a $\phi_A = \phi_B = 0$ ou $\phi_A = 0, \phi_B = -\pi$, de modo que as amplitudes dos fasores sejam $\underline{\mathbf{E}}_0 = \hat{\mathbf{y}}A \pm \hat{\mathbf{x}}B$. A Eq. (1.38) degenera em:

$$\frac{E_x^2}{B^2} + \frac{E_y^2}{A^2} \pm \frac{2E_x E_y}{AB} = 0 \rightarrow \left(\frac{E_x}{B} \pm \frac{E_y}{A} \right)^2 = 0 \quad (1.39)$$

e consequentemente,

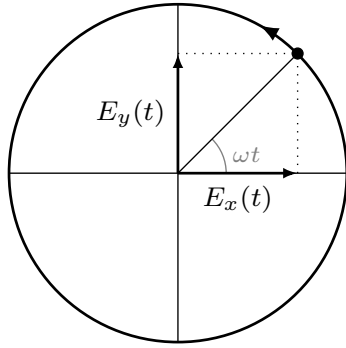
$$E_y = \pm \frac{A}{B} E_x \quad (1.40)$$

↑ reta de declive $\pm B/A$

Para obter *polarização circular*, definimos $A = B = R$ e $\phi = \pm\pi/2$. Neste caso, a elipse de polarização torna-se a equação de uma circunferência:

$$\frac{E_x^2}{B^2} + \frac{E_y^2}{A^2} = 1 \Rightarrow E_x^2 + E_y^2 = R^2 \quad (1.41)$$

O sentido de rotação, em conjunto com a direção de propagação, define a polarização circular à esquerda/direita. Para o caso, $\phi_a = -\pi/2$ e $\phi_b = 0$, temos $\phi = \phi_a - \phi_b = -\pi/2$ e amplitude complexa $\underline{\mathbf{E}}_0 = A(\hat{\mathbf{x}} - j\hat{\mathbf{y}})$.



Então,

$$E_x(t) = A \cos(\omega t)$$

$$E_y(t) = A \cos(\omega t - \pi/2) = A \sin(\omega t)$$

Para determinar o sentido de rotação recorremos à evolução temporal do campo elétrico na curva de polarização. Calculando $\mathbf{E}(t=0)$ e $\mathbf{E}(t=0^+)$:

$$t=0: \begin{cases} E_x(0) = A \\ E_y(0) = 0 \end{cases} \quad t=0^+: \begin{cases} E_x(0^+) \approx A \\ E_y(0^+) \approx 0^+ \end{cases}$$

O campo gira no sentido anti-horário no plano xy .

Fig. 1.6: Polarização circular.

! Nota 5

Para decidir se a polarização circular é à direita ou à esquerda, usamos a convenção da IEEE [3]:

- Enrolar os dedos da mão esquerda e direita em punho e apontar ambos os polegares na direção de propagação.
- Se os dedos da mão direita (esquerda) enrolam na direção de rotação do campo elétrico, então a polarização é à direita (esquerda).

Portanto, neste exemplo, como o campo se move na direção de z e gira no sentido anti-horário, a polarização será à direita.

Caso $A \neq B$ e $\phi = \pm\pi/2$, obtemos uma *polarização elíptica*². A Eq. (1.38) será agora:

$$\frac{E_x^2}{B^2} + \frac{E_y^2}{A^2} = 1 \quad (1.42)$$

Rácio de Polarização

Em resumo, definindo a amplitude complexa $\underline{\mathbf{E}} = E_1 \hat{\mathbf{u}}_1 + E_2 \hat{\mathbf{u}}_2$, tal que o par de versores $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2)$ forme uma base ortogonal do plano perpendicular à direção de propagação $\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{u}}_1 \times \hat{\mathbf{u}}_2$, podemos estabelecer o *rácio de polarização*:

$$p = \frac{E_2}{E_1} \equiv |p|e^{j\phi} \quad (1.43)$$

²A análise da orientação da polarização é análoga à da polarização circular.

✓ Checkpoint 7

A amplitude $|p|$ e a fase ϕ da razão de polarização determinam completamente a polarização da onda de acordo com as seguintes regras:

- Se $\phi = \pm\pi/2$ e $|p| = 1$, a onda tem polarização circular.
- Se $\phi = 0$ ou $\phi = \pi$ ou $|p| = 0$ ou $|p| = \infty$, a onda tem polarização linear.
- Se nenhuma das condições acima se verifica, então o estado de polarização é elíptico.

Além disto, o ângulo ϕ controla o sentido de rotação, de modo que para $0 < \phi < \pi$ a onda está polarizada para a esquerda, enquanto para $-\pi < \phi < 0$ a onda está polarizada para a direita. É de sublinhar que este resultado só é válido quando a direção de propagação é $\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{u}}_1 \times \hat{\mathbf{u}}_2$.

A mesma análise poderá ser feita com o campo \mathbf{H} , naturalmente.

? Exercício 4

O fasor do campo magnético associado a uma onda plana e uniforme é dado por:

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{10^{-3}}{120\pi} (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}) e^{jky}$$

- Determine o estado de polarização da onda.
- Diga qual o sentido de rotação.
- Esboce a curva de polarização.

Solução: Extraindo a parte real e definindo $\mathbf{H}(y, t) = \text{Re}\{\underline{\mathbf{H}}e^{j\omega t}\} = H_x(y, t)\hat{\mathbf{x}} + H_z(y, t)\hat{\mathbf{z}}$, encontramos as componentes reais em x e y :

$$\begin{aligned} H_z(y, t) &= \frac{10^{-3}}{120\pi} \cos(\omega t + ky - \pi/2) \\ H_x(y, t) &= \frac{10^{-3}}{120\pi} \cos(\omega t + ky) \end{aligned} \quad (1.44)$$

Para determinar a polarização da onda, consideramos a dependência temporal do campo num ponto fixo ao longo do eixo y , digamos em $y = 0$:

$$\begin{aligned} H_z(t) &= \frac{10^{-3}}{120\pi} \cos(\omega t - \pi/2) = \frac{10^{-3}}{120\pi} \sin(\omega t) \\ H_x(t) &= \frac{10^{-3}}{120\pi} \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (1.45)$$

Como $\phi = 0 - (-\pi/2) = \pi/2$ a equação de polarização é dada por:

$$H_x^2 + H_z^2 = 10^{-6}/(120\pi)^2 \quad (\text{Polarização circular})$$

Para determinar o sentido de rotação recorreremos à evolução temporal do campo elétrico na curva de polarização. Calculando $\mathbf{H}(t = 0)$ e $\mathbf{H}(t = 0^+)$:

$$t = 0 : \begin{cases} H_x(0) = \frac{10^{-3}}{120\pi} \\ H_z(0) = 0 \end{cases} \quad t = 0^+ : \begin{cases} H_x(0^+) \approx \frac{10^{-3}}{120\pi} \\ H_z(0^+) \approx 0^+ \end{cases}$$

O campo gira no sentido anti-horário no plano xz . A polarização é à direita por congruência com a regra da mão direita (nomeadamente, os dedos da mão direita enrolam na direção de rotação do campo magnética, com o polegar a apontar na direção de propagação).



1.4 Energia Eletromagnética e o Vetor de Poynting

As ondas eletromagnéticas transportam potência eletromagnética. A energia é transportada através do espaço até pontos recetores distantes por meio de ondas eletromagnéticas.

Consideremos um volume V delimitado pela sua superfície de fronteira Σ . A região dentro de V contém materiais arbitrários. O volume poderá conter fontes de campo modeladas por uma densidade de corrente externa \mathbf{J} . Definiremos \mathcal{E}_{EM} como a energia armazenada no campo eletromagnético no volume V e no instante t :

$$\frac{d\mathcal{E}_{EM}}{dt} = \mathcal{P}_{ext} - \mathcal{P}_{dis} - \mathcal{P}_{\Sigma} \quad (1.46)$$

- \mathcal{P}_{ext} descreve a potência injetada no volume V (contribui para o aumento de energia em V).
- \mathcal{P}_{dis} descreve a energia dissipada (por unidade de tempo) nos materiais na forma de calor.
- \mathcal{P}_{Σ} descreve o fluxo de potência de V para o exterior através da fronteira Σ (caso positivo [negativo], existe um fluxo de energia a sair do [entrar no] volume V).

1.4.1 Potência injetada

Consideremos agora uma carga pontual com velocidade \mathbf{v} . Na presença de um campo, a partícula está sujeita à força de Lorentz $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. A potência instantânea transferida do campo para a carga é dada por³ $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$:

$$\mathcal{P}_{\text{field} \rightarrow \text{charge}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (1.47)$$

Admitindo um volume dV na região fonte, a carga total dentro de dV será dada por $dQ = \rho_{ext} dV$ onde ρ_{ext} é a densidade de carga. A potência transferida das cargas em dV para o campo é:

$$d\mathcal{P}_{\text{charge in } dV \rightarrow \text{field}} = -dQ \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = -dV \mathbf{E} \cdot \rho_{ext} \mathbf{v} \quad (1.48)$$

↑ densidade de corrente

A densidade de corrente e a densidade de carga relacionam-se mediante $\mathbf{J}_{ext} = \rho_{ext} \mathbf{v}$; é então possível reescrever (1.48) de modo a que $d\mathcal{P}_{ext} = -dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{ext}$. A potência total transferida das fontes externas para o campo é:

$$\mathcal{P}_{\text{charge in } dV \rightarrow \text{field}} \equiv \mathcal{P}_{ext} = - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{ext} dV \quad (1.49)$$

1.4.2 Teorema de Poynting

Para obter a lei de conservação de energia é necessário avaliar a divergência de $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Este vetor é denominado por *vetor de Poynting* (letra \mathbf{S}), e é representado em unidades de $[\text{W}/\text{m}^2]$.

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}} \quad (1.50)$$

Recorrendo às equações de Maxwell macroscópicas, e assumindo materiais não dispersivos (para os quais μ e ε são independentes da frequência),

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.51)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{ext} + \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.52)$$

e à seguinte identidade vetorial:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (1.53)$$

É possível obter:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mu \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) - \varepsilon \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{ext} - \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \quad (1.54)$$

³O campo magnético não contribui para a potência porque a força magnética é sempre perpendicular à velocidade da partícula.

Subsequentemente, recorrendo à regra da cadeia para a derivada,

$$\mu \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H}^2), \quad \varepsilon \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}^2) \quad (1.55)$$

A equação (1.54) pode então ser escrita como

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 \right) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{ext} - \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \quad (1.56)$$

↑ density of electromagnetic energy, W_{EM}

A forma integral da equação acima é obtida integrando ambos os lados sobre o volume de interesse:

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 \right) dV + \mathcal{P}_{ext} - \int_V \sigma (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) dV \quad (1.57)$$

Finalmente, recorrendo ao teorema da divergência, de modo a transformar o integral de volume num integral sobre a fronteira da superfície:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV = \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (1.58)$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário normal à superfície e direcionado para o exterior de V . Combinando as duas últimas equações, obtemos o *teorema de Poynting*:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_V W_{EM} dV = \mathcal{P}_{ext} - \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA - \int_V \sigma (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) dV} \quad (1.59)$$

✓ Checkpoint 8

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V W_{EM} dV = \mathcal{P}_{ext} - \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA - \mathcal{P}_{dis} \quad \frac{\partial \mathcal{E}_{EM}}{\partial t} = \mathcal{P}_{ext} - \mathcal{P}_{\Sigma} - \mathcal{P}_{dis}$$

↑ net power flowing through the boundary

O *teorema de Poynting* afirma que a potência total que flui para *dentro* de uma superfície fechada em qualquer instante de tempo é igual à soma das taxas de aumento das energias elétrica e magnética armazenadas e da potência injetada dentro do volume fechado. Caso se contabilizasse a energia dissipada, teríamos ainda o fator:

$$\mathcal{P}_{dis} = \int_V \sigma (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) dV \quad (\text{perdas em forma de calor devido a correntes de condução})$$

! Nota 6

\mathbf{S} determina o fluxo de energia eletromagnética no espaço. Quando \mathbf{S} é uniforme e perpendicular à superfície, a potência que atravessa a superfície Σ é dada por:

$$P_{\Sigma} = \|\mathbf{S}\| \cdot A$$

sendo A a área da superfície.

1.4.3 Vetor de Poynting em Regimes Harmônicos no Tempo

Admitindo uma excitação harmônica no tempo, o campo elétrico pode ser expresso como:

$$\mathbf{E} = \text{Re}\{\underline{\mathbf{E}}e^{j\omega t}\} = \frac{1}{2}[\underline{\mathbf{E}}e^{j\omega t} + \underline{\mathbf{E}}^*e^{-\omega t}] \quad (1.60)$$

Analogamente para o campo magnético:

$$\mathbf{H} = \text{Re}\{\underline{\mathbf{H}}e^{j\omega t}\} = \frac{1}{2}[\underline{\mathbf{H}}e^{j\omega t} + \underline{\mathbf{H}}^*e^{-\omega t}] \quad (1.61)$$

Consequentemente o vetor de Poynting é dado por:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{4}[\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* + \underline{\mathbf{E}}^* \times \underline{\mathbf{H}}] + \frac{1}{4}[\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}e^{j2\omega t} + \underline{\mathbf{E}}^* \times \underline{\mathbf{H}}^*e^{-j2\omega t}] \quad (1.62)$$

O vetor de Poynting médio é obtido através da sua integração ao longo de um período de oscilação.

$$\mathbf{S}_{\text{av}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}(t) dt = \frac{1}{4}[\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* + \underline{\mathbf{E}}^* \times \underline{\mathbf{H}}] \quad (1.63)$$

que também pode ser escrito como:

$$\mathbf{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*\} \quad (1.64)$$

O vetor de Poynting médio determina o fluxo de potência média. Assim, a potência média no tempo que atravessa uma certa superfície Σ é dada por:

$$\mathcal{P}_{\Sigma, \text{av}} = \int_{\Sigma} (\mathbf{S}_{\text{av}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) d\mathbf{A}. \quad (1.65)$$

1.4.4 Vetor de Poynting para Ondas Plana

Para uma onda plana eletromagnética num meio isotrópico, temos:

$$\mathbf{E} = \eta \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{d}}, \quad \mathbf{H} = -\frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{E}. \quad (1.66)$$

Assim, o vetor de Poynting médio (densidade de potência) pode ser expresso como:

$$\mathbf{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \text{Re}\left\{\mathbf{E} \times \left[-\frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{E}^*\right]\right\}. \quad (1.67)$$

Usando a identidade vetorial $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ e recordando que o campo é transversal $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{d}} = 0$, descobre-se que

$$\mathbf{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \text{Re}\left\{\hat{\mathbf{d}} \frac{1}{\eta^*} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*\right\}, \quad (1.68)$$

o que também pode ser expresso como:

$$\mathbf{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \text{Re}\left\{\frac{1}{\eta}\right\} \|\underline{\mathbf{E}}\|^2 \hat{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\eta\} \|\underline{\mathbf{H}}\|^2 \hat{\mathbf{d}} \quad (1.69)$$

Admitimos que $\text{Re}\left\{\frac{1}{\eta^*}\right\} = \text{Re}\left\{\frac{1}{\eta}\right\}$. A segunda identidade é uma consequência da relação $|\mathbf{E}| = |\eta| |\mathbf{H}|$. Para materiais sem perdas, a impedância intrínseca é real e, portanto, o vetor de Poynting pode ser expresso como:

$$\mathbf{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\eta} \|\underline{\mathbf{E}}\|^2 \hat{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} \eta \|\underline{\mathbf{H}}\|^2 \hat{\mathbf{d}}. \quad (\text{materiais sem perdas}). \quad (1.70)$$

O vetor de Poynting está alinhado com $\hat{\mathbf{d}}$. Assim, em materiais isotrópicos, a energia flui na direção de propagação da onda.

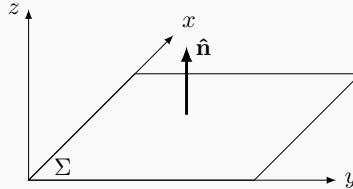
? Exercício 5

Considere a onda plana descrita pelo fasor:

$$\underline{\mathbf{E}} = E_0 \hat{\mathbf{y}} e^{-jk_0 z}$$

a) Determine \mathbf{S} e \mathbf{S}_{av}

b) Se $E_0 = 1\text{V/m}$ determine a potência média que atravessa a superfície na figura abaixo:



Solução: Reconhecemos que:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

O campo elétrico instantâneo pode ser calculado através de:

$$\mathbf{E} = \text{Re}\{\underline{\mathbf{E}}e^{j\omega t}\} = E_0 \hat{\mathbf{y}} \cos(\omega t - k_0 z)$$

e o campo magnético por:

Por inspeção do fasor do campo elétrico, $\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{z}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{\eta_0} \hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{E} = \frac{E_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} \cos(\omega t - k_0 z) \\ &= -\frac{E_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t - k_0 z) \end{aligned}$$

Válido para meios sem perdas

Finalmente,

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= -\frac{E_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t - k_0 z) \times E_0 \hat{\mathbf{y}} \cos(\omega t - k_0 z) \\ &= -\frac{E_0^2}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \cos^2(\omega t - k_0 z) \end{aligned}$$

O cálculo de \mathbf{S}_{av} resulta em:

$$\mathbf{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\eta_0} |\underline{\mathbf{E}}|^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\eta_0} |E_0|^2$$

120π

Por fim, a potência média que atravessa a superfície é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\Sigma, \text{av}} &= \int_{\Sigma} (\mathbf{S}_{\text{av}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA = \|\mathbf{S}_{\text{av}}\| \cdot A \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\eta_0} |E_0|^2 \cdot A = \boxed{1.33 \text{ mW}} \end{aligned}$$

Tal como explicitado na Nota 6, sendo \mathbf{S} uniforme e perpendicular à superfície, o cálculo da potência média degenera no produto da norma do \mathbf{S}_{av} com a área da superfície.

1.5 Reflexão e Refração

1.5.1 Condições de Fronteira

As condições de fronteira para os campos eletromagnéticos na interação entre dois meios materiais são dadas abaixo:

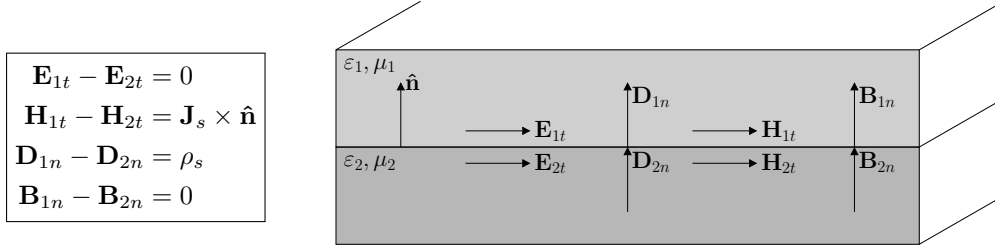


Fig. 1.7: Condições de fronteira entre dois meios materiais

onde \hat{n} é um vetor unitário normal à fronteira (ou interface), que aponta do meio-2 para o meio-1.

As quantidades ρ_s , \mathbf{J}_s são quaisquer *cargas de superfície externas* e *densidades de corrente de superfície* na superfície de fronteira e são medidas em unidades de $[\text{C}/\text{m}^2]$ e $[\text{A}/\text{m}]$.

Cada vetor pode ser decomposto como a soma de uma parte tangencial à superfície e uma parte perpendicular a ela, isto é, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_n$. Utilizando a identidade vetorial,

$$\mathbf{E} = \hat{n} \times (\mathbf{E} \times \hat{n}) + \hat{n}(\hat{n} \cdot \mathbf{E}) = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_n$$

identificamos estas duas partes como:

$$\mathbf{E}_t = \hat{n} \times (\mathbf{E} \times \hat{n}), \quad \mathbf{E}_n = \hat{n}(\hat{n} \cdot \mathbf{E})$$

Por outras palavras, as componentes *tangenciais* do campo \mathbf{E} são contínuas através da interface; a diferença das componentes *tangenciais* do campo \mathbf{H} são iguais às densidades de corrente da superfície; a diferença das componentes *normais* da densidade de fluxo \mathbf{D} são iguais à densidade de carga da superfície; e as componentes *normais* da densidade de fluxo magnético \mathbf{B} são contínuas.

! Nota 7

É relevante salientar que a continuidade dos campos tangenciais numa interface garante a continuidade da componente normal do vetor de Poynting na interface, se considerarmos $\mathbf{J}_s = 0$ temos:

$$\mathbf{S}_1 \cdot \hat{n} = (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{n} = (\mathbf{E}_{1t} \times \mathbf{H}_{1t}) \cdot \hat{n} = (\mathbf{E}_{2t} \times \mathbf{H}_{2t}) \cdot \hat{n} = \mathbf{S}_2 \cdot \hat{n}.$$

Isto é, a interface não pode absorver a energia da onda.

! Nota 8

É relevante analisar as condições de fronteira numa interface com um condutor elétrico perfeito (PEC) [2]. Um condutor elétrico perfeito é um material idealizado com condutividade elétrica $\sigma \rightarrow +\infty$. Como a corrente de condução é $\mathbf{J}_{\text{cond}} = \sigma \mathbf{E}$, o campo elétrico dentro de um condutor perfeito deve anular-se. Assim, um material PEC ideal comporta-se como um espelho perfeito e é impenetrável pela luz. Consequentemente, o campo elétrico na interface com um material PEC deve desaparecer:

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t} = 0 \quad (\text{interface PEC})$$

Note-se que o campo magnético tangencial \mathbf{H}_{1t} (avaliado fora do material) não desaparece. Determina uma densidade de corrente de superfície na fronteira do PEC.

1.5.2 Incidência em Interfaces Planas

Nesta secção focamos a nossa atenção na incidência de ondas planas em interfaces que separam dois meios materiais.

Incidência Normal

A direção de propagação da onda incidente, $\hat{\mathbf{d}}^i$, é perpendicular à superfície da interface. Nestes moldes, os campos da onda incidente são:

$$\underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} = \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{inc}} e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^i \cdot \mathbf{r}}, \quad \underline{\mathbf{H}}^{\text{inc}} = \frac{1}{\eta_1} \hat{\mathbf{d}}^i \times \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{inc}} e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^i \cdot \mathbf{r}} \quad (1.71)$$

através das relações apresentadas 1.3.5.

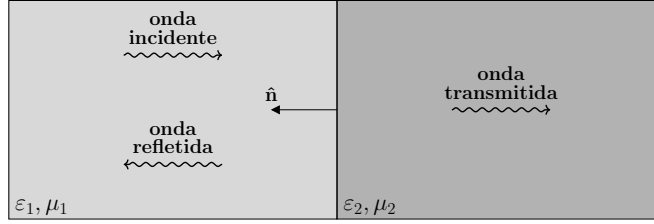


Fig. 1.8: Incidência normal numa interface plana

Como seria de esperar intuitivamente, a onda incidente irá gerar uma onda transmitida no meio 2 e uma onda refletida no meio 1, com direções de propagação $\hat{\mathbf{d}}^t = \hat{\mathbf{d}}^i$ e $\hat{\mathbf{d}}^r = -\hat{\mathbf{d}}^i$. Podemos escrever os campos respetivos:

$$\underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}} = \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{ref}} e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^r \cdot \mathbf{r}}, \quad \underline{\mathbf{H}}^{\text{ref}} = \frac{1}{\eta_1} \hat{\mathbf{d}}^r \times \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{ref}} e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^r \cdot \mathbf{r}} \quad (1.72)$$

$$\underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}} = \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{tx}} e^{-\gamma_2 \hat{\mathbf{d}}^t \cdot \mathbf{r}}, \quad \underline{\mathbf{H}}^{\text{tx}} = \frac{1}{\eta_2} \hat{\mathbf{d}}^t \times \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{tx}} e^{-\gamma_2 \hat{\mathbf{d}}^t \cdot \mathbf{r}} \quad (1.73)$$

Estes campos obedecem às condições de fronteira anunciadas anteriormente, uma vez que as ondas planas são transversais⁴, i.e.,

$$\underline{\mathbf{E}} = \begin{cases} \underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} + \underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}} & \text{antes da interface} \\ \underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}} & \text{depois da interface} \end{cases} \quad \underline{\mathbf{H}} = \begin{cases} \underline{\mathbf{H}}^{\text{inc}} + \underline{\mathbf{H}}^{\text{ref}} & \text{antes da interface} \\ \underline{\mathbf{H}}^{\text{tx}} & \text{depois da interface} \end{cases} \quad (1.74)$$

que se reduz às relações:

$$\underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} + \underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}} = \underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}}, \quad \frac{1}{\eta_1} \hat{\mathbf{d}}^i \times (\underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} - \underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}}) = \frac{1}{\eta_2} \hat{\mathbf{d}}^i \times \underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}} \quad (1.75)$$

Removendo o produto externo da segunda relação, vem que

$$\underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} + \underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}} = \underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}}, \quad \frac{1}{\eta_1} (\underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} - \underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}}) = \frac{1}{\eta_2} \underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}}. \quad (1.76)$$

É conveniente definir a componente refletida e transmitida em função da componente incidente:

$$\underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}} = \rho \underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} \quad \underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}} = \tau \underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} \quad (1.77)$$

onde ρ é definido como coeficiente de reflexão e τ como coeficiente de transmissão. Da equação 1.75, vem que

$$\boxed{\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2}} \quad \boxed{\tau = 1 + \rho = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}} \quad (1.78)$$

Nota: As componentes do campo são avaliadas na interface!

⁴Nesta situação, $\underline{\mathbf{E}}$ e $\underline{\mathbf{H}}$ são paralelos (tangenciais) à interface.

**Nota 9**

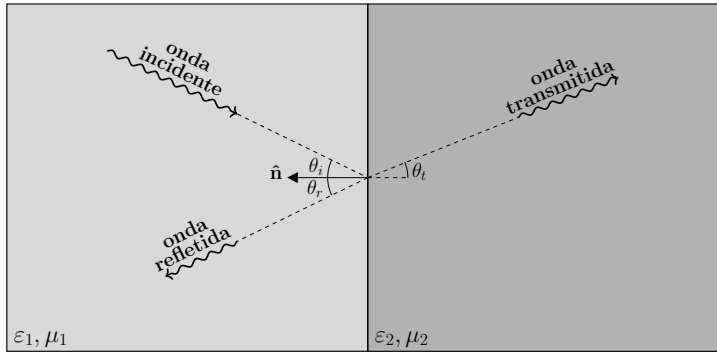
- Quando as impedâncias dos dois materiais são idênticas ($\eta_2 = \eta_1$), não há onda refletida e a onda incidente é totalmente transmitida para o segundo meio. Neste caso, diz-se que os materiais estão “adaptados”.
- A situação oposta ocorre quando o meio 2 é um condutor elétrico perfeito (PEC). Como a impedância intrínseca de um condutor perfeito desaparece ($\eta_{PEC} = \eta_2 = 0$), o coeficiente de reflexão nesse caso torna-se $\rho_{PEC} = -1$. Isso confirma que um condutor perfeito comporta-se como um espelho perfeito.

Incidência Oblíqua

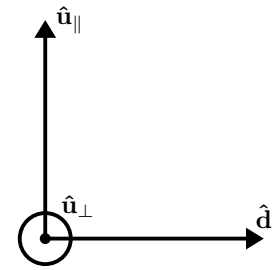
Numa situação mais geral, a onda incidente poderá atingir a interface numa direção oblíqua. Neste caso, é necessário ter em consideração o ângulo de incidência θ_i , de reflexão θ_r e de transmissão θ_t . Isto pode ser feito à custa do vetor unitário normal à interface, $\hat{\mathbf{n}}$.

$$-\hat{\mathbf{d}}^i \cdot \hat{\mathbf{n}} = \cos \theta_i \quad \hat{\mathbf{d}}^r \cdot \hat{\mathbf{n}} = \cos \theta_r \quad \hat{\mathbf{d}}^t \cdot \hat{\mathbf{n}} = \cos \theta_t \quad (1.79)$$

Definimos também o *plano de incidência*, gerado pelos vetores $\hat{\mathbf{d}}^i$ e $\hat{\mathbf{n}}$.



(a) Interação entre dois meios

(b) Relação entre os vetores unitários, $\hat{\mathbf{u}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \hat{\mathbf{d}}$.**Fig. 1.9:** Incidência oblíqua numa interface plana

Uma vez que os campos da onda incidente oscilam num plano transversal a $\hat{\mathbf{d}}^i$ ($\mathbf{E}^{\text{inc}} \cdot \hat{\mathbf{d}}^i = 0$), é conveniente introduzir dois vetores unitários, $\hat{\mathbf{u}}_{\parallel}$ e $\hat{\mathbf{u}}_{\perp}$, que geram este plano. Por construção, os vetores unitários cumprem a seguinte condição:

$$\hat{\mathbf{u}}_{\parallel}^i \times \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \hat{\mathbf{d}}^i \quad (1.80)$$

Note-se que o vetor $\hat{\mathbf{u}}_{\perp}$ é perpendicular ao plano de incidência, enquanto o vetor $\hat{\mathbf{u}}_{\parallel}^i$ é paralelo ao plano de incidência, de acordo com as notações.

O campo incidente pode ser escrito em termos de $\hat{\mathbf{u}}_{\parallel}$ e $\hat{\mathbf{u}}_{\perp}$ da seguinte forma:

$$\underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} = \underline{E}_{\parallel}^i \hat{\mathbf{u}}_{\parallel}^i + \underline{E}_{\perp}^i \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \quad (1.81)$$

onde as componentes $\underline{E}_{\parallel}^i$ e \underline{E}_{\perp}^i são as componentes paralela e perpendicular do campo, respetivamente.

Uma construção similar pode ser feita para os campos $\underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}}$ e $\underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}}$,

$$\hat{\mathbf{u}}_{\parallel}^r \times \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \hat{\mathbf{d}}^r \quad \hat{\mathbf{u}}_{\parallel}^t \times \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \hat{\mathbf{d}}^t \quad (1.82)$$

que leva às decomposições seguintes:

$$\underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}} = \underline{E}_{\parallel}^r \hat{\mathbf{u}}_{\parallel}^r + \underline{E}_{\perp}^r \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \quad \underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}} = \underline{E}_{\parallel}^t \hat{\mathbf{u}}_{\parallel}^t + \underline{E}_{\perp}^t \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \quad (1.83)$$

Lei de Snell

Nesta secção viramos a nossa atenção para o ângulo de incidência θ_i e o ângulo de transmissão θ_t . Podemos relacionar estes ângulos através das condições de fronteira já enunciadas.

Os campos associados às ondas planas incidentes, refletidas e transmitidas são:

$$\underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} = \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{inc}} e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^i \cdot \mathbf{r}} \quad \underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}} = \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{ref}} e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^r \cdot \mathbf{r}} \quad \underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}} = \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{tx}} e^{-\gamma_2 \hat{\mathbf{d}}^t \cdot \mathbf{r}} \quad (1.84)$$

Impõe-se a continuidade das componentes do campo tangentes à interface e verifica-se que:

$$\left[\underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} + \underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}} \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} = \underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}} \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\underline{\mathbf{E}}_0^{\text{inc}} e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^i \cdot \mathbf{r}} + \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{ref}} e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^r \cdot \mathbf{r}} - \underline{\mathbf{E}}_0^{\text{tx}} e^{-\gamma_2 \hat{\mathbf{d}}^t \cdot \mathbf{r}} \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0. \quad (1.85)$$

onde $\hat{\mathbf{t}}$ é uma direção genérica paralela à interface. Esta relação deve ser válida para qualquer ponto \mathbf{r} da interface, ou seja, os fatores de fase devem ser iguais entre si:

$$\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^i \cdot \mathbf{r} = \gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^r \cdot \mathbf{r} = \gamma_2 \hat{\mathbf{d}}^t \cdot \mathbf{r}, \quad (1.86)$$

e assim $\hat{\mathbf{d}}^i$, $\hat{\mathbf{d}}^r$ e $\hat{\mathbf{d}}^t$ devem estar todos no mesmo plano, i.e., devem estar no plano de incidência [1ª Lei de Snell].

Podemos escrever a relação de continuidade para as componentes tangenciais em termos dos ângulos de incidência, reflexão e transmissão. A projeção de $\hat{\mathbf{d}}^i$, $\hat{\mathbf{d}}^r$ e $\hat{\mathbf{d}}^t$ na interface é $\sin \theta_i$, $\sin \theta_r$, e $\sin \theta_t$, respetivamente, de onde resulta

$$\gamma_1 \sin \theta_i = \gamma_1 \sin \theta_r = \gamma_2 \sin \theta_t \quad (1.87)$$

Esta relação pode ser reescrita sob a forma da 2ª Lei de Snell (reflexão e refração):

$$\boxed{\theta_i = \theta_r}, \quad \boxed{n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t}, \quad \text{onde } n_1 = \sqrt{\varepsilon_{r1} \mu_{r1}} \text{ e } n_2 = \sqrt{\varepsilon_{r2} \mu_{r2}}. \quad (1.88)$$

1.5.3 Polarização das Ondas Refletidas e Transmitidas

Na incidência oblíqua (ou normal), a polarização das ondas refletidas e transmitidas altera-se em relação à incidente, podendo mudar de circular para elíptica e inverter a rotação.

Existem dois estados de polarização específicos (*eigen-polarization*) — paralelo e perpendicular ao plano de incidência — que se conservam após a interação com a interface. Caso a onda incidente seja polarizada paralela ou perpendicularmente, as ondas refletidas e transmitidas mantêm essa característica, correspondendo, respetivamente, às polarizações magnética transversal (TM) e elétrica transversal (TE).

Uma onda incidente genérica pode ser considerada como a sobreposição de uma onda com polarização paralela e uma onda com polarização perpendicular. Assim, podemos escrever os campos como:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} &= \left(E_{0\parallel}^i \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} + E_{0\perp}^i \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \right) e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^i \cdot \mathbf{r}}, \\ \underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}} &= \left(\rho_{\parallel} E_{0\parallel}^i \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} + \rho_{\perp} E_{0\perp}^i \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \right) e^{-\gamma_1 \hat{\mathbf{d}}^r \cdot \mathbf{r}}, \\ \underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}} &= \left(\tau_{\parallel} E_{0\parallel}^i \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} + \tau_{\perp} E_{0\perp}^i \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \right) e^{-\gamma_2 \hat{\mathbf{d}}^t \cdot \mathbf{r}}. \end{aligned}} \quad (1.89)$$

Sem perda de generalidade, supõe-se que a origem do sistema de coordenadas está contida na interface do material.

Para a componente polarizada paralelamente (\parallel), o coeficiente de reflexão e o coeficiente de transmissão são:

$$\rho_{\parallel} = \frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}, \quad \tau_{\parallel} = \frac{\eta_2}{\eta_1} (1 + \rho_{\parallel}). \quad (1.90)$$

Para a polarizada perpendicularmente (\perp), o coeficiente de reflexão e o coeficiente de transmissão são:

$$\rho_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}, \quad \tau_{\perp} = 1 + \rho_{\perp} \quad (1.91)$$

É interessante analisar como os coeficientes de reflexão ρ_{\parallel} e ρ_{\perp} variam com o ângulo de incidência. Para uma interface entre dois meios sem perdas, meio 1 com $\varepsilon_{r1} = 1$ e meio 2 com $\varepsilon_{r1} = 9$, obtemos a seguinte evolução:

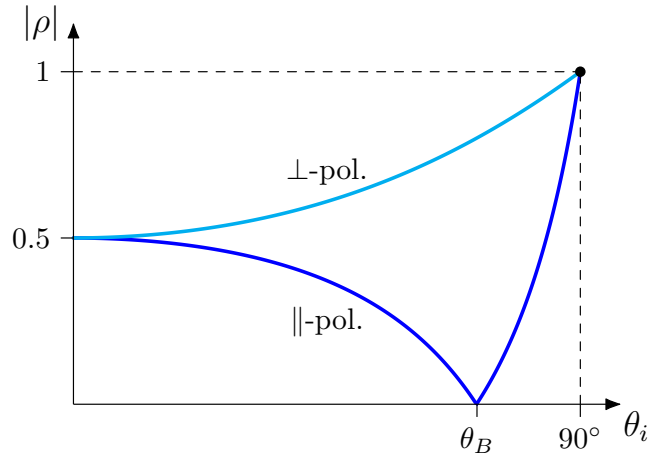


Fig. 1.10: Amplitude do coeficiente de reflexão em função do ângulo de incidência [2]

Retiramos as seguintes conclusões:

- Para a incidência normal, as amplitudes de $|\rho_{||}|$ e $|\rho_{\perp}|$ são iguais.
- Com o aumento do ângulo de incidência, $|\rho_{\perp}|$ aumenta monotonicamente, enquanto $|\rho_{||}|$ diminui até ao ângulo de Brewster, θ_B .
- Para $\theta_i = \theta_B$, o coeficiente $|\rho_{||}|$ é zero (assumindo ausência de perdas nos materiais).
- Para ângulos maiores que θ_B , a magnitude de $|\rho_{||}|$ volta a aumentar.
- Na incidência tangencial, onde $\theta_i \rightarrow 90^\circ$, ambos os coeficientes $|\rho_{||}|$ e $|\rho_{\perp}|$ tendem para um, o que indica uma reflexão total pela interface.

! Nota 10

É útil caracterizar $\rho_{||}$ e ρ_{\perp} quando o meio 2 é um condutor elétrico perfeito. Como discutido anteriormente, um condutor perfeito tem impedância $\eta_{PEC} = \eta_2 = 0$. Assim, para um condutor perfeito os dois coeficientes de reflexão são independentes do ângulo de incidência:

$$\rho_{\perp PEC} = -1, \quad \rho_{|| PEC} = +1. \quad (1.92)$$

Ângulo de Brewster[†]

Podemos obter uma expressão analítica para o ângulo de Brewster mantendo as suposições de meios sem perdas da secção anterior. Basta resolver a equação

$$\rho_{||} = \frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t} = 0 \iff \eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t = 0 \implies \frac{1}{n_1} \cos \theta_i = \frac{1}{n_2} \cos \theta_t \quad (1.93)$$

Através da 2ª Lei de Snell, obtemos uma segunda equação que nos permitirá obter θ_i explicitamente:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (1.94)$$

Após uma simples manipulação algébrica pode ser visto que:

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (1.95)$$

[†]Uma relação geométrica curiosa é que, para $\theta_i = \theta_B$, os vetores $\hat{\mathbf{d}}^r$ e $\hat{\mathbf{u}}^i_{||}$ são paralelos. Isto pode ser verificado observando que a condição de Brewster pode ser vista como $n_1 \sin \theta_B = n_2 \cos \theta_B$. Segundo a 2ª Lei de Snell, $n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \theta_t$. Portanto, a condição de Brewster implica que $\cos \theta_B = \sin \theta_t$, o que só é possível se $\theta_B = 90^\circ - \theta_t$.

? Exercício 6

Considere uma onda eletromagnética plana circularmente polarizada para a direita, que se propaga no ar e incide numa camada dielétrica plana de grandes dimensões caracterizada por,

$$\sigma = 0, \quad \mu_r = 1, \quad \varepsilon_r = 5$$

Suponha que o ângulo de incidência é de 45° e que a densidade de potência da onda incidente junto à superfície de separação é de 10 W/m^2 .

- Caracterize a onda refletida, quanto ao seu estado de polarização.
- Determine a densidade de potência da onda refletida.

Solução: Vamos definir o ar como meio 1 e a camada dielétrica como meio 2. Assim,

$$\text{meio 1: } \begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_0, \mu_1 = \mu_0 \\ n_1 = \sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}} = 1 \\ \eta_1 = \eta_0 \approx 377.0 \text{ } [\Omega] \end{cases} \quad \text{meio 2: } \begin{cases} \varepsilon_2 = 5\varepsilon_0, \mu_2 = \mu_0 \\ n_2 = \sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}} = \sqrt{5} \\ \eta_2 = \eta_0/n_2 \approx 168.6 \text{ } [\Omega] \end{cases}$$

Uma vez que a onda incidente tem polarização circular para a direita, o rácio de polarização é

$$p_{\text{inc}} = \frac{E_2^{\text{inc}}}{E_1^{\text{inc}}} = e^{-j\pi/2} \implies E_2 = -jE_1$$

Podemos escrever a onda incidente como:

$$\underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}} = E_0(\hat{\mathbf{u}}_{\perp} - j\hat{\mathbf{u}}_{\parallel}) e^{-jk_0\hat{\mathbf{d}}^i \cdot \mathbf{r}}$$

Uma vez que $\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{inc}} = \|\underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}}\|^2/(2\eta_1)\hat{\mathbf{d}}^i$, podemos descobrir o valor de E_0 através da norma:

$$\|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{inc}}\| = \frac{\|\underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}}\|^2}{2\eta_1} \iff 2\eta_1 \|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{inc}}\| = \|\underline{\mathbf{E}}^{\text{inc}}\| = 2E_0^2 \implies E_0 = 61.4 \text{ [V/m]}$$

Podemos finalmente escrever as equações dos campos refletido e transmitido:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}^{\text{ref}} &= E_0(\rho_{\perp}\hat{\mathbf{u}}_{\perp} - j\rho_{\parallel}\hat{\mathbf{u}}_{\parallel}) e^{-jk_0\hat{\mathbf{d}}^r \cdot \mathbf{r}} \\ \underline{\mathbf{E}}^{\text{tx}} &= E_0(\tau_{\perp}\hat{\mathbf{u}}_{\perp} - j\tau_{\parallel}\hat{\mathbf{u}}_{\parallel}) e^{-jn_2k_0\hat{\mathbf{d}}^t \cdot \mathbf{r}} \end{aligned}$$

Uma vez que $\theta_i = \pi/4$ e $\theta_t = \arcsin(n_1/n_2 \cdot \sin\theta_i)$, os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned} \rho_{\perp} &= \frac{\eta_2 \cos\theta_i - \eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} = -\frac{1}{2} & \rho_{\parallel} &= \frac{\eta_1 \cos\theta_i - \eta_2 \cos\theta_t}{\eta_1 \cos\theta_i + \eta_2 \cos\theta_t} = \frac{1}{4} \\ \tau_{\perp} &= 1 + \rho_{\perp} = \frac{1}{2} & \tau_{\parallel} &= \frac{\eta_2}{\eta_1}(1 + \rho_{\parallel}) = \frac{\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

Nestes moldes, podemos calcular a polarização das ondas refletida e transmitida:

$$p_{\text{ref}} = \frac{E_2^{\text{ref}}}{E_1^{\text{ref}}} = \overset{\text{pol. elíptica eq.}}{2e^{j\pi/2}}, \quad p_{\text{tx}} = \frac{E_2^{\text{tx}}}{E_1^{\text{tx}}} = \overset{\text{pol. elíptica dir.}}{0.89e^{-j\pi/2}}$$

Segue o cálculo da densidade de potência de ambas:

$$\|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{ref}}\| = \|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{inc}}\| \left(\frac{|\rho_{\perp}|^2 + |\rho_{\parallel}|^2}{2} \right) = 1.56 \text{ kW/m}^2, \quad \|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{tx}}\| = \|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{inc}}\| \frac{\eta_1}{\eta_2} \left(\frac{|\tau_{\perp}|^2 + |\tau_{\parallel}|^2}{2} \right) = 6.29 \text{ kW/m}^2$$

↑ válido apenas quando a onda inc. tem pol. circular! ↑

Nota: % potência refletida = $\|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{ref}}\|/\|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{inc}}\|$, mas % potência transmitida = $(1 - \|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{ref}}\|/\|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{inc}}\|)$ e **não** $\|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{tx}}\|/\|\mathbf{S}_{\text{av}}^{\text{inc}}\|$, atenção!

1.5.4 Reflexão Interna Total

O ângulo incidente para o qual o ângulo de transmissão é igual a 90° é denominado de ângulo crítico e pode ser obtido através da Lei de Snell:

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (1.96)$$

Quando o ângulo de incidência excede o ângulo crítico a onda sofre **reflexão interna total**, de modo que toda a energia incidente é totalmente refletida de volta para o meio de incidência.

Para $\theta_i > \theta_c$, os coeficientes de reflexão (para materiais sem perdas) têm exatamente amplitude unitária para ambas as polarizações:

$$\theta_i = \theta_r \quad |\rho_{\parallel}| = |\rho_{\perp}| = 1, \quad (\text{reflexão interna total}) \quad (1.97)$$

Este resultado pode ser depreendido para a polarização perpendicular. Admitindo $\cos \theta_t = -jC$ encontra-se que:

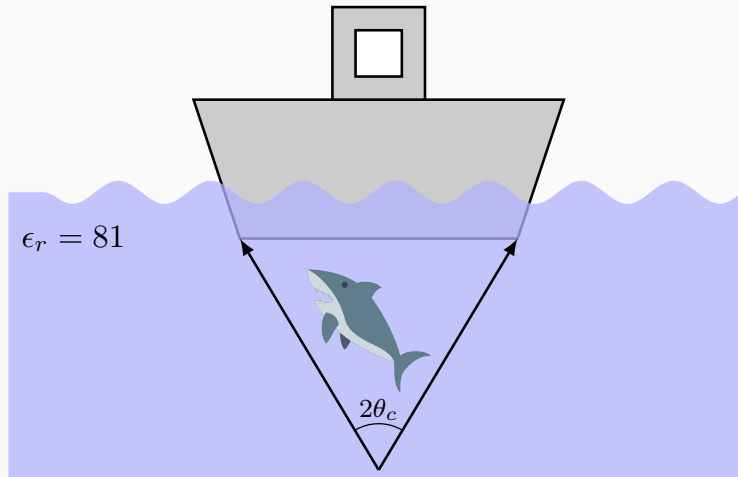
$$\rho_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 jC}{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 jC}. \quad (1.98)$$

Como o numerador e denominador da fração estão relacionados pela conjugação complexa, é imediato que $|\rho_{\perp}| = 1$.

Uma argumentação semelhante pode ser feita para $|\rho_{\parallel}|$.

? Exercício 7

Um tubarão nada debaixo de um barco circular de diâmetro D , conforme a figura apresentada. Determine o menor ângulo $2\theta_c$ dum cone imaginário dentro do qual o peixe pode nadar sem ser visto por um observador à superfície da água.



Solução: Para o peixe nadar dentro do cone sem ser visto, o ângulo dos feixes de luz que formam o cone têm de ser tais que ao incidirem entre a fronteira água/ar ocorre reflexão total, assim:

$$\theta_{\text{cone}} \geq \theta_c, \quad \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_{\text{ar}}}{n_{\text{água}}}\right) = 6.38^\circ$$

Consequentemente,

$$\theta_{\text{cone}} = 6.38^\circ$$

Referências

- [1] S. J. Orfanidis. *Electromagnetic Waves and Antennas*, 2008.
- [2] M. Silveirinha. *Lecture Notes (PROE)*, 2023.
- [3] IEEE. IEEE Standard Definitions of Terms for Antennas. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, AP-31, pt.II:5, 1983. Revised IEEE Std 145-1993.
- [4] D. M. Pozar. *Microwave Engineering*. Wiley, 4th edition, 2012. ISBN 9780470631553.
- [5] D. K. Cheng. *Field and Wave Electromagnetics*. Addison-Wesley, 2002.
- [6] *Sebenta de PROE*. Secção de Folhas da AEIST, 2002.
- [7] G. Keiser. *Optical Fiber Communications*. McGraw, 2000.
- [8] J. W. Arthur. The Evolution of Maxwell's Equations from 1862 to the Present Day. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 55(3):61, 2013. ISSN 1045-9243/2013. doi: 10.1109/MAP.2013.6529325.
- [9] A. Kwan, J. Dudley, and E. Lantz. Who really discovered Snell's law? *Physics World*, 15(4):64, apr 2002. doi: 10.1088/2058-7058/15/4/44. URL <https://dx.doi.org/10.1088/2058-7058/15/4/44>.