- CC1-S1 - - 2016-2017 -

– Correction - Analyse –

Exercice 1

1. • La fonction $f : t \mapsto \sqrt{\tan t}$ est continue et donc localement intégrable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

• De plus, la fonction f est de signe constant (positif) avec :

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}},$$

on en déduit que I converge par comparaison à une intégrale de référence.

Remarque : on peut aussi effectuer le changement de variable

$$\left| \begin{array}{ccc} \left]0; \frac{\pi}{2}\right[& \to &]0; +\infty[\\ t & \mapsto & u = \tan t \end{array} \right.$$

qui est de classe C^1 et établit une bijection entre $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $]0; +\infty[$; il donne I de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{1+u^2} du$. Comme $\displaystyle\frac{\sqrt{u}}{1+u^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$, on conclut à la convergence de l'intégrale par comparaison à une intégrale de référence.

2. On trouve :

$$\frac{u^2}{1+u^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{u}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right)$$

3. Le changement de variable suivant :

$$\left| \begin{array}{ccc} \left]0; \frac{\pi}{2}\right[& \to &]0; +\infty[\\ t & \mapsto & u = \sqrt{\tan t} \end{array} \right.$$

qui est bien de classe C^1, et établit un bijection entre $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $]0; +\infty[$, nous donne :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4} \, du.$$

La question précédente nous donne alors :

$$\frac{2u^2}{1+u^4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{u}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right)$$

et les mises sous forme canonique :

$$u^2 \pm \sqrt{2}x + 1 = \left(u \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}$$

permettent d'intégrer et d'obtenir :

$$I = \lim_{x \to +\infty} I(x),$$

avec :

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int_0^x \frac{2u^2}{1+u^4}\,du = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^x \left(\frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1} - \frac{u}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)\,du \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^x \left(\frac{2u-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1} - \frac{2u+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)\,du \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{\left(u-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\left(u+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)\,du \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\sqrt{2}\left(u-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \arctan\left(\sqrt{2}\left(u+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right]_0^x \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right) + \arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)\right)
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$I = \frac{\ln 1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Exercice 2

1. En notant :

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx - \int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2}-x\right) f(\sin x)\,dx,$$

le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$ nous donne :

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t f(\cos t)\,dt$$

En remarquant alors que la fonction $t \mapsto t f(\cos t)$ est impaire, on en déduit que $I = 0$, ce qui nous donne l'égalité demandée.

2. On a ici $I_n = \displaystyle\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx$ pour $f : u \mapsto \dfrac{u^{2n}}{(1-u^2)^n + u^{2n}}$, donc la question précédente nous donne :

$$I_n = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}\,dx.$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}$ étant $\pi-$périodique, on obtient :

$$I_n = \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}\,dx.$$

En remarquant ensuite que le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$ et la $\pi-$périodicité de $x \mapsto \dfrac{\cos^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}$ nous donnent :

$$J_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}\,dx = K_n,$$

on obtient :

$$J_n + K_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}\,dx = \pi.$$

On trouve ainsi $J_n = K_n = \dfrac{\pi}{2}$, et donc finalement :

$$I_n = \frac{\pi^2}{4}.$$