- CC2-S2 - - 2020-2021 -

– Correction - Géométrie –

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation cartésienne

$$z = (y - 2\sqrt{2}\,x)\,y$$

ainsi que la surface paramétrée Σ définie par

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\,uv \\ y = (u+v)^2 \\ z = (u^2-v^2)^2 \end{cases}, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

On note $M(u,v)$ le point de Σ de paramètres u et v.

1. A propos de $\mathscr{S}$

a. i. Quelle est la nature de l'intersection de $\mathscr{S}$ avec un plan d'équation $y = \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$?
On ne demande pas les caractéristiques.
L'intersection de $\mathscr{S}$ avec un plan d'équation $y = \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ a pour système d'équations cartésiennes $\begin{cases} z = (y-2\sqrt{2}x)y \\ y = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2}\alpha x = Z - \alpha^2 = 0 \\ y - \alpha = 0 \end{cases}$.
Il s'agit donc de l'intersection de deux plans non parallèles et par conséquent d'une droite.

ii. Qu'en déduit-on pour $\mathscr{S}$?
Réciproquement, tout point de $\mathscr{S}$ de coordonnées (x,y,z) est sur la droite précédente correspondant à $\alpha = y$. $\mathscr{S}$ est donc la réunion de ces droites, et par suite, $\mathscr{S}$ est une surface réglée.

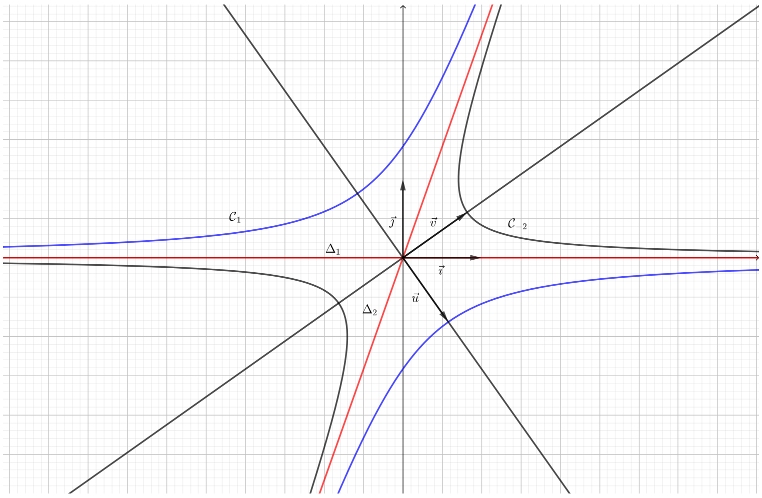
b. Quelle est la nature de l'intersection de $\mathscr{S}$ avec un plan d'équation $x = \beta$, où $\beta \in \mathbb{R}$?
On ne demande pas les caractéristiques.
L'intersection de $\mathscr{S}$ avec un plan d'équation $x = \beta$, où $\beta \in \mathbb{R}$ a pour système d'équations cartésiennes $\begin{cases} z = (y-2\sqrt{2}x)y \\ x = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y^2 - 2\sqrt{2}\beta y \\ x = \beta \end{cases}$.
Il s'agit donc d'une parabole du plan d'équation $x = \beta$

c. i. Quelles sont la nature et les caractéristiques de l'intersection $\mathscr{C}_\gamma$ de $\mathscr{S}$ avec un plan d'équation $z = \gamma$, où $\gamma \in \mathbb{R}$? Distinguer différents cas suivant les valeurs de γ.
$\mathscr{C}_\gamma$ a pour système d'équations cartésiennes $\begin{cases} z = (y-2\sqrt{2}x)y \\ z = \gamma \end{cases}$ $\begin{cases} -2\sqrt{2}xy + y^2 = \gamma \\ z = \gamma \end{cases}$.
Il s'agit donc d'une conique du plan d'équation $z = \gamma$.
On pose alors $A = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$. A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée directe.
Le spectre de A est $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2\}$, ensuite $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$ puis $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.
On pose $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et on trouve que, dans le repère $(O_\gamma;\ \vec{u},\ \vec{v})$ du plan $z = \gamma$, où $O_\gamma = (0,0,\gamma)$, $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1, -\sqrt{2}\right)$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}, 1\right)$, $\mathscr{C}_\gamma$ a pour équation réduite

$$2X^2 - Y^2 = \gamma$$

Il s'agit :
- si $\gamma > 0$, d'une hyperbole d'axe focal $(O_\gamma;\ \vec{u})$
- si $\gamma < 0$, d'une hyperbole d'axe focal $(O_\gamma;\ \vec{v})$
- si $\gamma = 0$, de la réunion des droites $\Delta_1 \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ et $\Delta_2 \begin{cases} y = 2\sqrt{2}x \\ z = 0 \end{cases}$ dans le repère $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

ii. On note O_γ le point de coordonnées $(0, 0, \gamma)$. Tracer, **au verso du sujet**, les courbes $\mathscr{C}_\gamma$ dans le repère $\left(O_\gamma;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$ pour $\gamma \in \{-2, 0, 1\}$.
On pourra confondre les points O_γ et tracer les 3 courbes dans le même repère.



d. Montrer que $\mathscr{S}$ est régulière et déterminer une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$ en un point M_0 de $\mathscr{S}$ de coordonnées (x_0, y_0, z_0). Cette équation ne devra pas dépendre de z_0.
Notons F l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ F(x,y,z) = \left(y - 2\sqrt{2}\ x\right)\ y - z$. F est C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \operatorname{grad}(F)(x,y,z) = \left(-2\sqrt{2}y, 2y - 2\sqrt{2}x, -1\right) \neq (0,0,0)$ par conséquent $\mathscr{S}$ est régulière.
$\mathscr{S}$ admet en tout point M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) un plan tangent dont $\left(-2\sqrt{2}y_0, 2y_0 - 2\sqrt{2}x_0, -1\right)$ est un vecteur normal normal. Ceci nous conduit à l'équation cartésienne :

$$\left(-2\sqrt{2}y_0\right)(x - x_0) + \left(2y_0 - 2\sqrt{2}x_0\right)(y - y_0) + (-1)(z - z_0) = 0$$

puis, comme $z_0 = \left(y_0 - 2\sqrt{2}\ x_0\right)\ y_0$, on obtient

$$2\sqrt{2}y_0 x + 2\left(\sqrt{2}x_0 - y_0\right) y + z - 2\sqrt{2}x_0 y_0 + y_0^2 = 0$$

e. Dans le cas particulier où M_0 est le point O, préciser la position relative de $\mathscr{S}$ et du plan tangent.
Pour $M_0 = O$, le plan tangent a pour équation cartésienne $z = 0$. On sait déjà que l'intersection de $\mathscr{S}$ et de ce plan tangent est la réunion des droites Δ_1 et Δ_2.
Par ailleurs, on peut remarquer que $\mathscr{S}$ est aussi définie par le paramétrage cartésien $(x,y) \mapsto\ (x, y, f(x,y))$ où $f(x,y) = \left(y - 2\sqrt{2}\ x\right)\ y$, et au passage conclure que $\mathscr{C}_\gamma$ est la ligne de niveau γ de f.
La position relative de $\mathscr{S}$ et de $z = 0$ est donc donnée par le signe de $f(x,y)$ lorsque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
La règle des signes nous permet de dire que :
$\rightsquigarrow$ ce signe est positif sur la réunion des domaines délimités par Δ_1 et Δ_2 contenant $\mathscr{C}_1$, et par suite $\mathscr{S}$ est au dessus de $z = 0$;
$\rightsquigarrow$ ce signe est négatif sur la réunion des domaines délimités par Δ_1 et Δ_2 contenant $\mathscr{C}_{-2}$, et par suite $\mathscr{S}$ est en dessous de $z = 0$.
On peut même démontrer que O est un point selle de $\mathscr{S}$.

2. Comparaison entre $\mathscr{S}$ et Σ

a. Vérifier que $\Sigma \subset \mathscr{S}$.
Soient $M(u,v)$ un point de Σ, et (x,y,z) ses coordonnées dans $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
Alors $\left(y - 2\sqrt{2}\ x\right)\ y = \left((u+v)^2 - 4uv\right)(u+v)^2 = (u-v)^2(u+v)^2 = (u^2 - v^2)^2 = z$ et ainsi $M(u,v)$ est aussi un point de $\mathscr{S}$, ce qui montre bien que $\Sigma \subset \mathscr{S}$.

b. A-t-on $\Sigma = \mathscr{S}$?
Comme $\mathscr{C}_{-2} \subset \mathscr{S}$ et que les points de $\mathscr{C}_{-2}$ vérifient $z = -2$, on peut conclure que $\Sigma \neq \mathscr{S}$ puisque $(u^2 - v^2)^2 \geq 0$.

3. $\boxed{\text{A propos de } \Sigma}$

a. Déterminer la nature géométrique de l'ensemble des points non réguliers de Σ.
Σ admet un paramétrage de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
On a $\dfrac{\partial M}{\partial u}(u,v) = \left(\sqrt{2}v, 2(u+v), 4u(u^2-v^2)\right)$ et $\dfrac{\partial M}{\partial v}(u,v) = \left(\sqrt{2}u, 2(u+v), -4v(u^2-v^2)\right)$.
Leur produit vectoriel donne $\vec{n}(u,v) = \dfrac{\partial M}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial M}{\partial v}(u,v) = -2\sqrt{2}\,(u^2-v^2)\,\left(2\sqrt{2}(u+v)^2, -2(u^2+v^2), 1\right)$.
Ce dernier est nul si, et seulement si, $u^2 - v^2 = 0$. Les points non réguliers de Σ sont donc les points $M(u,-u),\ u \in \mathbb{R}$ et $M(u,u),\ u \in \mathbb{R}$ soit encore la réunion des courbes paramétrées $u \mapsto \left(\sqrt{2}u^2, 4u^2, 0\right)$ et $u \mapsto \left(-\sqrt{2}u^2, 0, 0\right)$.

La première est la demi-droite d'équations $\begin{cases} y = 2\sqrt{2}x \\ z = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ et la deuxième est la demi-droite d'équations $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$ qui sont respectivement incluses dans Δ_2 et Δ_1.

b. Soit $M(u,v)$ un point régulier de Σ. Déterminer, en fonction des paramètres u et v, une équation cartésienne du plan tangent à Σ au point $M(u,v)$.
Le plan tangent à Σ en $M(u,v)$ régulier passe par $M(u,v)$ et admet $\vec{n}(u,v)$ pour vecteur normal.
Il admet donc pour équation cartésienne :

$$2\sqrt{2}(u+v)^2 x - 2(u^2+v^2)y + z + (u^2-v^2)^2 = 0$$