CB n°1 - Compléments d'algèbre linéaire - Sujet 1

1. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer la nature des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à A et B, ainsi que leurs éléments caractéristiques.

$A^2 = A$ donc A est la matrice de la projection p sur $\text{Im}(p) = \text{Vect}\{(0,1,1),(1,1,0)\}$ parallèlement à $\text{Ker}(p) = \text{Vect}\{(1,1,1)\}$.

$B^2 = \text{I}_3$ donc B est la matrice de la symétrie s par rapport à $\text{Ker}(s - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}\{(1,1,-1)\}$.

2. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + z = 0\}$, $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - y = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$

a. Déterminer des bases de F et de G.

$F = \text{Vect}\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$, et $G = \text{Vect}\{(1,1,-2)\}$.

b. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

On note $f_1 = (1,0,-1)$, $f_2 = (0,1,0)$ et $g = (1,1,-2)$.
La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
On en déduit que la famille (f_1, f_2, g) est libre, de cardinal 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$; F et G sont supplémentaires.

c. Donner la matrice dans la base canonique de la projection sur F parallèlement à G.

$$A = P\text{Mat}_{(f_1,f_2,g)}(p)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

CB N°1 - Compléments d'algèbre linéaire - Sujet 2

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer la nature des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à A et B, ainsi que leurs éléments caractéristiques.

$A^2 = I_3$ donc A est la matrice de la symétrie s par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\{(1,1,-1)\}$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$.

$B^2 = B$ donc B est la matrice de la projection p sur $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\{(1,0,2),(1,1,1)\}$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}\{(1,0,1)\}$.

2. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + z = 0\}$, $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y + z = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$.

a. Déterminer des bases de F et de G.

$F = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$, et $G = \mathrm{Vect}\{(0,1,-1)\}$.

b. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

On note $f_1 = (1,0,-1)$, $f_2 = (0,1,0)$ et $g = (0,1,-1)$.
La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
On en déduit que la famille (f_1, f_2, g) est libre, de cardinal 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$;
F et G sont supplémentaires.

c. Donner la matrice dans la base canonique de la symétrie par rapport à F, parallèlement à G.

$$A = P\mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,g)}(p)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$