CB N°6 - EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES - SUJET 1

Exercice 1

On étudie sur $I = \mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle suivante :

$$(L)\ :\ t^3y'' + ty' - y = 2t^3 + t^2.$$

1. Déterminer une solution polynômiale non nulle de l'équation homogène (H) associée à (L).
La fonction $h = t \mapsto t$ est une solution particulière de (H).

2. En déduire l'ensemble des solutions de (L).
On cherche une solution sous la forme $y(t) = t\lambda(t)$ et en remplaçant dans (L), on obtient l'équation :

$$t^2\lambda'' + (2t+1)\lambda' = 2t + 1$$

On en déduit que $z = \lambda'$ vérifie l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$t^2z' + (2t+1)z = 2t + 1.$$

On résout cette équation et on trouve $z(t) = K\dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2} + 1$, $\in \mathbb{R}$, puis on intègre pour obtenir :

$$\lambda(t) = -Ke^{\frac{1}{t}} + t + B, \quad (K, B) \in \mathbb{R}^2.$$

La solution générale est donc :

$$y : t \mapsto (Ae^{\frac{1}{t}} + t + B)t, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 2

Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = 3z(t) \end{cases}$$

Soit $Y'(t) = A\,Y(t)$, l'écriture matricielle du système différentiel avec

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On a $\chi_A = \det(XI_3 - A) = (X-1)(X-3)^2$ et donc χ_A est scindé et $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 3\}$.
On trouve $E_1 = \mathrm{Vect}\{(1, -1, 0)\}$ et $E_3 = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 0\}$, ainsi $\dim(E_3) \neq m(3)$.
On conclut que A n'est pas diagonalisable, mais elle est trigonalisable.

On trouve $A = PTP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On pose $Z(t) = (P^{-1}\ Y)(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix}$, et on obtient :

$$\begin{aligned} Y'(t) = A\ Y(t) &\iff (P^{-1}Y)'(t) = T(P^{-1}Y)(t) \\ &\iff Z'(t) = T\ Z(t) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} z_1'(t) = z_1(t) \\ z_2'(t) = 3z_2(t) + z_3(t) \\ z_3'(t) = 3z_3(t) \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} z_1(t) = C_1 \mathrm{e}^t \\ z_2(t) = \mathrm{e}^{3t}(C_2 + C_3 t) \\ z_3(t) = C_3 \mathrm{e}^{3t} \end{array} \right. \qquad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Enfin,

$$Y(t) = P\ Z(t) \iff \left\{ \begin{array}{l} x(t) = z_1(t) + z_2(t) \\ y(t) = -z_1(t) + z_2(t) \\ z(t) = z_3(t) \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions du système différentiel est donc
$S = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \mapsto \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \mapsto \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

CB N°6 - Equations différentielles - Sujet 2

Exercice 1

On étudie sur $I = \mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle suivante :

$$(L)\ :\ t^2y'' + ty' - y = t^2.$$

1. Déterminer une solution polynômiale non nulle de l'équation homogène (H) associée à (L).
La fonction $h = t \mapsto t$ est une solution particulière de (H).

2. En déduire l'ensemble des solutions de (L).
On cherche une solution sous la forme $y(t) = t\lambda(t)$ et en remplaçant dans (L), on obtient l'équation :

$$t^3\lambda'' + 3t^2\lambda' = t^2.$$

On en déduit que $z = \lambda'$ vérifie l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$tz' + 3z = 1.$$

On résout cette équation et on trouve $z(t) = \dfrac{K}{t^3} + \dfrac{1}{3}$, $K \in \mathbb{R}$, puis on intègre pour obtenir :

$$\lambda(t) = \frac{-K}{2t^2} + \frac{t}{3} + B, \qquad (K, B) \in \mathbb{R}^2.$$

La solution générale est donc :

$$y : t \mapsto \frac{A}{t} + \frac{1}{3}t^2 + Bt, \qquad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 2

Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) - z(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) - z(t) \\ z'(t) = z(t) \end{cases}$$

Soit $Y'(t) = A\,Y(t)$, l'écriture matricielle du système différentiel avec

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $\chi_A = \det(X\mathrm{I}_3 - A) = (X-1)^2(X-3)$ et donc χ_A est scindé et $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 3\}$.
On trouve $E_1 = \mathrm{Vect}\{(1,1,0)\}$ et $E_3 = \mathrm{Vect}\{(1,-1,0\}$, ainsi $\dim(E_1) \neq m(1)$.
On conclut que A n'est pas diagonalisable, mais elle est trigonalisable.
On trouve $A = PTP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose $Z(t) = (P^{-1}\ Y)(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix}$, et on obtient :

$$\begin{aligned} Y'(t) = A\ Y(t) &\Longleftrightarrow (P^{-1}Y)'(t) = T(P^{-1}Y)(t) \\ &\Longleftrightarrow Z'(t) = T\ Z(t) \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_1'(t) = 3z_1(t) \\ z_2'(t) = z_2(t) - z_3(t) \\ z_3'(t) = z_3(t) \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_1(t) = C_1 \mathrm{e}^{3t} \\ z_2(t) = \mathrm{e}^t(C_2 - C_3 t) \qquad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3 \\ z_3(t) = C_3 \mathrm{e}^t \end{array} \right. \end{aligned}$$

Enfin,

$$Y(t) = P\ Z(t) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(t) = z_1(t) + z_2(t) \\ y(t) = -z_1(t) + z_2(t) \\ z(t) = z_3(t) \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions du système différentiel est donc
$S = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \mapsto \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \mapsto \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ 1 \end{pmatrix} \right)$