CB N°4 - SÉRIES ENTIÈRES - SUJET 1

EXERCICE 1

Déterminer les rayons de convergence, notés R, des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n} z^n$

On a : $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \times \dfrac{n}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$. D'après le critère de d'Alembert, on a donc $R = 1$.

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) z^n$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sin\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)\right| \leq 1$.

Le rayon de convergence de la série $\sum z^n$ étant 1, par comparaison : $R \geq 1$.

De plus, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ est grossièrement divergente, donc $R \leq 1$.

En conclusion, $R = 1$.

3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^3 z^{3n}$

On a : $\forall n \geq 1, \forall z \in \mathbb{C}^*, \left|\dfrac{(n+1)^3 z^{3n+3}}{n^3 z^{3n}}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} |z^3|$.

Le critère de d'Alembert (pour les séries numériques), donne $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^3 z^{3n}$ absolument convergente si $|z^3| < 1$ (c'est-à-dire $|z| < 1$, donc $R \geq 1$), et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^3 z^{3n}$ non absolument convergente si $|z^3| > 1$ (c'est-à-dire $|z| > 1$, donc $R \leq 1$).

Finalement, $R = 1$.

4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{1}{n}}} - 1\right) z^n$

On a : $\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{1}{n}}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; $\forall n \geq 1, \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$. Le critère de d'Alembert donne le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} z^n$ égal à 1. Par comparaison, $R = 1$.

5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (2^n - 3^n) z^n$

On a : $|2^n - 3^n| \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^n$. Le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 3^n z^n$ est $\dfrac{1}{3}$ (c'est une série géométrique qui converge absolument si $|3z| < 1$ et diverge si $|3z| > 1$).

Par comparaison, $R = \dfrac{1}{3}$.

EXERCICE 2

Déterminer les rayons de convergence, notés R, et les sommes des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} 2^n z^n$

   Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\sum_{n\geq 0} 2^n z^n$ est une série géométrique, qui converge absolument si $|2z| < 1$, et diverge si $|2z| > 1$. On a donc $R = \frac{1}{2}$.

   Pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| < \frac{1}{2}$, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n = \frac{1}{1-2z}$.

2. $\sum_{n\geq 0} \frac{2n+1}{n!} z^n$

   On a : $\frac{2n+3}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Le critère de d'Alembert donne donc $R = +\infty$.

   Soit $p \in \mathbb{N}$. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{p} \frac{2n+1}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{p} \frac{2z^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{p} \frac{z^n}{n!} = 2z \sum_{n=0}^{p-1} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{p} \frac{z^n}{n!}$.

   Sachant que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$, on obtient, par passage à la limite :

   $(p \to +\infty)$ $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{n!} z^n = \mathrm{e}^z(2z+1)$.

CB N°4 - Séries entières - Sujet 2

EXERCICE 1

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 2} \frac{n}{\ln n} z^n$

On a : $\frac{n+1}{\ln(n+1)} \times \frac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$. D'après le critère de d'Alembert, on a donc $R = 1$.

2. $\sum_{n\geq 0} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) z^n$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right| \leq 1$.

Le rayon de convergence de la série $\sum z^n$ étant 1, par comparaison : $R \geq 1$.

De plus, la série $\sum_{n\geq 0} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ est grossièrement divergente, donc $R \leq 1$.

En conclusion, $R = 1$.

3. $\sum_{n\geq 0} n^2 z^{2n}$

On a : $\forall n \geq 1, \forall z \in \mathbb{C}^*, \left|\frac{(n+1)^2 z^{2n+2}}{n^2 z^{2n}}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} |z^2|$.

Le critère de d'Alembert (pour les séries numériques), donne $\sum_{n\geq 0} n^2 z^{2n}$ absolument convergente si $|z^2| < 1$ (c'est-à-dire $|z| < 1$, donc $R \geq 1$), et $\sum_{n\geq 0} n^2 z^{2n}$ non absolument convergente si $|z^2| > 1$ (c'est-à-dire $|z| > 1$, donc $R \leq 1$).

Finalement, $R = 1$.

4. $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{\sqrt{n}} z^n$

La série $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{\sqrt{n}}$ est grossièrement divergente, donc $R \leq 1$.

Soit $r \in]0,1[$. $\mathrm{e}^{\sqrt{n}} r^n = \mathrm{e}^{n\left(\ln r + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car $\ln r < 0$). Donc la suite $\left(\mathrm{e}^{\sqrt{n}} r^n\right)$ est bornée. On en déduit que $R \geq 1$.

En conclusion, $R = 1$.

5. $\sum_{n\geq 2} \left((-1)^n + \frac{1}{2^n}\right) z^n$

On a : $\left|(-1)^n + \frac{1}{2^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$. Donc, par comparaison, $R = 1$.

EXERCICE 2

Déterminer les rayons de convergence et les sommes des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} 3^n z^n$

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\sum_{n\geq 0} 3^n z^n$ est une série géométrique, qui converge absolument si $|3z| < 1$, et diverge si $|3z| > 1$. On a donc $R = \frac{1}{3}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| < \frac{1}{3}$, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n z^n = \frac{1}{1-3z}$.

2. $\sum_{n\geq 0} \frac{3n-1}{n!} z^n$

On a : $\frac{3n+2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{3n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Le critère de d'Alembert donne donc $R = +\infty$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{p} \frac{3n-1}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{p} \frac{3z^n}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{p} \frac{z^n}{n!} = 3z \sum_{n=0}^{p-1} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{p} \frac{z^n}{n!}$.

Sachant que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$, on obtient, par passage à la limite :

$(p \to +\infty)$ $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n-1}{n!} z^n = \mathrm{e}^z(3z-1)$.