- ES-S1 - - 2018-2019 -

– Correction - Algèbre –

EXERCICE

Dans $\mathbb{R}[X]$, on définit

$$\forall P,Q\in\mathbb{R}[X],\quad (P|Q)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)Q\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout $P,Q\in\mathbb{R}[X]$, $(P|Q)\in\mathbb{R}$.
Pour $P,Q\in\mathbb{R}[X]$,

$$\overline{(P|Q)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{P\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)Q\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)Q\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\mathrm{d}t$$

puisque P et Q sont à coefficients réels. Puis par le changement de variable $u=-t$, on obtient

$$\overline{(P|Q)}=(P|Q)$$

et par suite $(P|Q)\in\mathbb{R}$.

2. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
La symétrie et la bilinéarité sont évidentes.
Caractères positif et défini :
Si $P\in\mathbb{R}[X]$,

$$(P|P)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)P\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\overline{P\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|P\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right|^2\mathrm{d}t\geq 0$$

et

$$(P|P)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|P\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right|^2\mathrm{d}t=0\iff t\mapsto\left|P\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right|^2\ \text{ est nulle sur }\ [-\pi,\pi]$$

(puisque positive, continue et d'intégrale nulle sur $[-\pi,\pi]$).
En particulier, P admet une infinité de racines, et par suite $P=0$.

3. Montrer que $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}[X]$ pour ce produit scalaire.
Soit $m,n\in\mathbb{N}$ tels que $m\neq n$. Alors :

$$(X^m|X^n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(m-n)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(m-n)}}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

et

$$||X^m||^2=(X^m|X^m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t=1$$

Ainsi la base $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée.

PROBLEME

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels (respectivement complexes), I_n la matrice unité et O_n la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$).
Si $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$), on note $\det(A)$ le déterminant de A et $\mathrm{tr}(A)$ la trace de A, égale à la somme de ses éléments diagonaux : $\mathrm{tr}(A)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}$.
Si $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$), le polynôme caractéristique de A est $\chi_A=\det(X\mathrm{I}_n-A)$.

Partie 1 : réduction des matrices carrées réelles d'ordre 2

Soit A une matrice carrée réelle de taille 2, c'est à dire $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Généralités

a. Montrer que $\chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A)$.

En posant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, un calcul rapide donne

$$\chi_A = \det\left(X\mathrm{I}_2 - A\right) = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{vmatrix} = X^2 - (a+b)X + (ad-bc) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A)$$

b. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si

$$\operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A) \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad \exists \lambda_0 \in \mathbb{C},\ A = \lambda_0 \mathrm{I}_2$$

Le discriminant du polynôme caractéristique est $\Delta = \operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A)$.
A diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ si, et seulement si, χ_A scindé dans $\mathbb{C}$ et les sous-espaces propres ont pour dimension la multiplicité de la valeur propre.
Or χ_A scindé dans $\mathbb{C}$ on a donc deux possibilités :

- $\rightsquigarrow$ soit χ_A admet deux racines distinctes (ce qui correspond à $\Delta \neq 0$), et par conséquent A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$;
- $\rightsquigarrow$ soit χ_A admet une racine double $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ (ce qui correspond à $\Delta = 0$), et dans ce cas, A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ si, et seulement si, A est semblable à $\lambda_0 I_2$, et lui est donc égale.

c. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A) > 0 \qquad \text{ou} \qquad \exists \lambda_0 \in \mathbb{R},\ A = \lambda_0 \mathrm{I}_2$$

De manière analogue, le discriminant du polynôme caractéristique est $\Delta = \operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A)$.
A diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, χ_A scindé dans $\mathbb{R}$ et les sous-espaces propres ont pour dimension la multiplicité de la valeur propre.
Or χ_A scindé dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\Delta \geq 0$, et dans ce cas, on a deux possibilités :

- $\rightsquigarrow$ soit χ_A admet deux racines distinctes (ce qui correspond à $\Delta > 0$), et par conséquent A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$;
- $\rightsquigarrow$ soit χ_A admet une racine double $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ (ce qui correspond à $\Delta = 0$), et dans ce cas, A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, A est semblable à $\lambda_0 I_2$, et lui est donc égale.

2. Applications

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ \left\{\begin{array}{l} u_{k+1} = 4u_k - 2v_k \\ v_{k+1} = u_k + v_k \end{array}\right. \qquad (\star)$$

On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $X_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$.

a. Trouver une matrice A dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout entier naturel k, $X_{k+1} = AX_k$.
Pour tout entier naturel k, $X_{k+1} = AX_k$ où

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b. Soit k dans $\mathbb{N}$. Exprimer X_k en fonction de A, X_0 et k.
Par récurrence immédiate, pour tout entier naturel k,

$$X_k = A^k X_0$$

c. Prouver que A est diagonalisable puis déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, inversible telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

$\chi_A = (X-2)(X-3)$. Donc A, d'ordre 2, admet deux valeurs propres distinctes, et par suite A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On trouve alors, par exemple,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

d. Soit k dans $\mathbb{N}$. Exprimer les coefficients de A^k en fonction de k.
De manière classique, pour tout entier naturel k, $A^k = PD^kP^{-1}$. Par le pivot de Gauss, par exemple, on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, puis, comme $D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$, on trouve

$$A^k = \begin{pmatrix} 2.3^k - 2^k & -2.3^k + 2^{k+1} \\ 3^k - 2^k & -3^k + 2^{k+1} \end{pmatrix}$$

e. En déduire l'expression de u_k et v_k en fonction de k.
De $X_k = A^k X_0$, on tire, pour tout entier naturel k,

$$u_k = 3.2^k - 2.3^k \quad \text{et} \quad v_k = 3.2^k - 3^k$$

f. Proposer un programme Python qui permette de calculer et d'afficher directement les 10 premiers termes des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à partir des relations $(\star)$ définissant ces suites.

```
U = [1]
V = [2]
print("u[",0,"] = ",U[0])
print("v[",0,"] = ",V[0])
n = 10
for k in range(1,n):
    U.append( 4 * U[k-1] - 2 * V[k-1] )
    V.append( U[k-1] + V[k-1] )
    print("u[",k,"] = ",U[k])
    print("v[",k,"] = ",V[k])
```

Partie 2 : réduction des matrices carrées d'ordre 3

On définit la matrice J par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer J^2 et J^3.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Préciser J^k en fonction de k.
On trouve

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J^3 = I_3$$

Puis, pour $k \in \mathbb{N}$, on a $k = 3q + r$ où $q \in \mathbb{N}$, et $r \in \{0,1,2\}$ est le reste de la division euclidienne de k par 3, et ainsi

$$J^k = J^{3q+r} = (J^3)^q J^r = J^r$$

2. On note j le nombre complexe égal à $\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. Rappeler sans justification la valeur de $1+j+j^2$.
Sachant que $j^3 = 1$, on a ;

$$1+j+j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0$$

3. Déterminer le polynôme caractéristique de J ainsi que ses valeurs propres.
Un calcul simple (et rapide) donne

$$\chi_J = X^3 - 1$$

et

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(J) = \{1, j, j^2\}$$

On peut aussi remarquer que $j^2 = \overline{j}$.

4. Déterminer une matrice inversible P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telle que :

$$J = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & \overline{j} \end{pmatrix} P^{-1}$$

D'abord, J, d'ordre 3, admet trois valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$ donc J est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.
On trouve rapidement $E_1(J) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, puis $E_j(J) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{j^2}(J) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}\right)$.
On obtient donc, par exemple,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

et on a

$$J = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & \overline{j} \end{pmatrix} P^{-1}$$

A noter que l'on ne demande pas le calcul de P^{-1}.

5. Soient trois nombres complexes a, b et c. On pose

$$A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

a. Exprimer $A(a,b,c)$ en fonction de a, b, c et des matrices I_3, J et J^2.
On a clairement

$$A(a,b,c) = a\mathrm{I}_3 + bJ + cJ^2$$

b. En déduire que $A(a,b,c)$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ dans une base indépendante du choix des valeurs des complexes a, b et c.
On a $J = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & \overline{j} \end{pmatrix}$ donc $J^2 = PD^2P^{-1}$, et par suite,

$$A(a,b,c) = a\mathrm{I}_3 + bJ + cJ^2 = aP\mathrm{I}_3P^{-1} + bPDP^{-1} + cPD^2P^{-1} = P(a\mathrm{I}_3 + bD + cD^2)P^{-1}$$

avec

$$a\mathrm{I}_3 + bD + cD^2 = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+bj+cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+bj^2+cj \end{pmatrix}$$

qui est diagonale. Par conséquent, $A(a,b,c)$ est semblable à une matrice diagonale, et donc par définition, est diagonalisable au moyen de la matrice P qui ne dépend pas du choix des valeurs des complexes a, b et c.

c. Préciser les valeurs propres de la matrice $A(a,b,c)$.
De la question précédente,

$$\mathrm{Sp}(A(a,b,c)) = \{a+b+c, a+bj+cj^2, a+bj^2+cj\}$$

d. Exprimer le déterminant de $A(a,b,c)$ en fonction de a, b, c et du nombre complexe j sous la forme d'un produit.
Dans $\mathbb{C}$, le déterminant de $A(a,b,c)$ est égal au produit des valeurs propres donc

$$\det(A(a,b,c)) = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)$$

6. On pose $E = \left\{A(a,b,c)\ ,\quad (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\right\}$.

a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.
On peut remarquer que

$$E = \mathrm{Vect}\{\mathrm{I}_3, J, J^2\}$$

donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

b. Donner la dimension de E en justifiant avec soin.
$E = \mathrm{Vect}\{\mathrm{I}_3, J, J^2\}$ donc (I_3, J, J^2) engendre E.
On vérifie aisément qu'il s'agit d'une famille libre de E. Par suite, c'est une base de E et donc

$$\dim(E) = 3$$