Math. - CC 1 - Correction

EXERCICE 1

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ x + y - 2z = -2 \\ 2x + 3y - 4z = -1 \end{cases}$ $S = \{(-1, 3, 2)\}$; **2.** $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 3y - 2z = 1 \\ x + 2y + 3z = -1 \end{cases}$ $S = \left\{ \left(-\frac{1}{5} - z, -\frac{2}{5} - z, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$

EXERCICE 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x suivante

$$1 - \sqrt{2}\sin(2x) \geq 2$$

On a les équivalences suivantes :

$\left(1 - \sqrt{2}\sin(2x) \geq 2\right) \iff \left(-\sqrt{2}\sin(x) \geq 1\right) \iff \left(\sin(2x) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \iff \left(2x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]\right)$

La dernière équivalence peut s'obtenir à l'aide du cercle trigonométrique.
On conclut que l'ensemble des solutions est :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{3\pi}{8} + k\pi, -\frac{\pi}{8} + k\pi\right]$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x suivante

$$\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = -1$$

On a les équivalences suivantes :

$\left(\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = -1\right) \iff \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) = -\frac{1}{2}\right) \iff \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x) = -\frac{1}{2}\right) \iff$
$\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \iff \left(x - \frac{\pi}{6} \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi] \textbf{ ou } x - \frac{\pi}{6} \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]\right)$

La dernière équivalence peut s'obtenir à l'aide du cercle trigonométrique.
On conclut que l'ensemble des solutions est :

$$\left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

EXERCICE 3

Soit $a \in \mathbb{R}$, f_a la fonction définie par

$$f_a(x) = \ln(x^2 - ax + 4)$$

et C_a sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Donner, suivant les valeurs de a, le domaine de définition D_a de f_a.

On a $D_a = \left\{x \in \mathbb{R},\ x^2 - ax + 4 > 0\right\}$. Il suffit donc de trouver le signe de $x^2 - ax + 4$ sur $\mathbb{R}$. Or le discriminant de $x^2 - ax + 4$ est $\Delta = a^2 - 16$. Dès lors, on dispose de trois cas :

$\leadsto$ Si $|a| > 4$ alors $\Delta > 0$ et $D_a = \left]-\infty, \frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{2}\right[\cup \left]\frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{2}, +\infty\right[$

$\leadsto$ Si $|a| = 4$ alors $\Delta = 0$ et $D_a = \left]-\infty, \frac{a}{2}\right[\cup \left]\frac{a}{2}, +\infty\right[$

$\leadsto$ Si $|a| < 4$ alors $\Delta < 0$ et $D_a = \mathbb{R}$

2. Comparer $f_a(x)$ et $f_{-a}(-x)$. Que peut-on en déduire pour C_a et C_{-a} ?
Si $x \in D_a$ alors $-x \in D_{-a}$ et réciproquement.
De plus, $f_{-a}(-x) = \ln((-x)^2 - a(-x) + 4) = \ln(x^2 - ax + 4) = f_a(x)$.
On peut conclure que C_a et C_{-a} sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

3. On suppose $a = 4$. La fonction ln est représentée graphiquement dans le repère fourni en annexe.

a. Montrer que

$$\forall x \in D_4,\ \ f_4(x) = 2\ln|x-2|$$

Soit $x \in D_4$. On a $f_4(x) = \ln(x^2 - 4x + 4) = \ln(-x-2)^2) = \ln(|x-2|^2) = 2\ln|x-2|$.

b. Représenter alors graphiquement C_4 dans le repère fourni en annexe. **On justifiera.**
C_4 est la réunion des courbes représentatives de $x \mapsto\ 2\ln(x-2)$ et $x \mapsto\ 2\ln(2-x)$. Pour la première courbe, on effectue une translation de $C_{\ln}$ de vecteur $2\vec{\imath}$, puis, au compas, on double l'ordonnée de chaque point de la translatée. La seconde est obtenue à partir de la première par la symétrie d'axe $x = 2$.

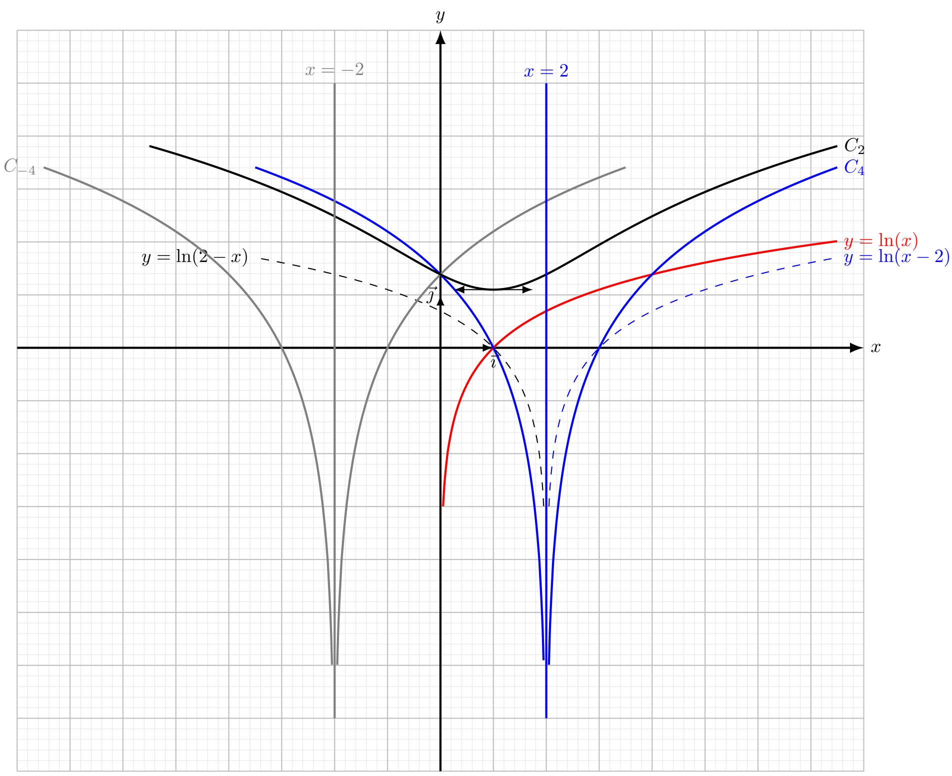
c. Enfin, représenter graphiquement C_{-4} dans le même repère fourni en annexe. **On justifiera.**
D'après 2., C_{-4} et C_4 sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

4. On suppose maintenant que $-4 < a < 4$.

a. Déterminer le tableau de variation complet de f_a. On déterminera les limites aux bornes de D_a.
f_a est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ (composition) et $f_a'(x) = \dfrac{2x-a}{x^2-ax+4}$ dont le signe est celui de $2x - a$.
Dès lors, le tableau de variations de f_a en découle :

x	$-\infty$		$\frac{a}{2}$		$+\infty$
$f_a'(x)$		-	0	+	
f_a	$+\infty$	$\searrow$	$\ln\left(\dfrac{16-a^2}{4}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

b. Représenter alors graphiquement C_2 dans le même repère fourni en annexe.



Partie I : Somme des puissances p-èmes des n premiers entiers

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose :

$$K(n,p) = \sum_{k=1}^{n} k^p$$

1. Après avoir justifié que $K(n+1,p+1) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^{p+1}$, montrer que

$$K(n+1,p+1) = 1 + \sum_{q=0}^{p+1} \binom{p+1}{q} K(n,q)$$

$K(n+1,p+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k^{p+1} = \sum_{i=0}^{n}(1+i)^{p+1}$ en effectuant le changement $k = i+1$. On a donc :

$K(n+1,p+1) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^{p+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{q=0}^{p+1}\binom{p+1}{q} k^q$

$= 1 + \sum_{q=0}^{p+1}\binom{p+1}{q}\sum_{k=1}^{n} k^q = 1 + \sum_{q=0}^{p+1}\binom{p+1}{q} K(n,q)$

2. En déduire que

$$\sum_{q=0}^{p}\binom{p+1}{q} K(n,q) = (n+1)^{p+1} - 1$$

On a $K(n+1,p+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k^{p+1} = \sum_{k=1}^{n} k^{p+1} + (n+1)^{p+1} = K(n,p+1) + (n+1)^{p+1}$.

D'après ce qui précède, on a donc :

$1 + \sum_{q=0}^{p+1}\binom{p+1}{q} K(n,q) = K(n,p+1) + (n+1)^{p+1}$ d'où :

$1 + \sum_{q=0}^{p}\binom{p+1}{q} K(n,q) + K(n,p+1) = K(n,p+1) + (n+1)^{p+1}$ ce qui donne le résultat attendu.

3. a. Déterminer $K(n,0)$.

$K(n,0) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$

b. En déduire les valeurs de $K(n,1), K(n,2)$ et $K(n,3)$.

Le résultat de la question **2** donne :

$\binom{2}{0} K(n,0) + \binom{2}{1} K(n,1) = (n+1)^2 - 1$ d'où $K(n,1) = \dfrac{(n+1)^2 - 1 - n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$\binom{3}{0} K(n,0) + \binom{3}{1} K(n,1) + \binom{3}{2} K(n,2) = (n+1)^3 - 1$ d'où :

$K(n,2) = \dfrac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - n - 3\dfrac{n(n+1)}{2}\right) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\binom{4}{0} K(n,0) + \binom{4}{1} K(n,1) + \binom{4}{2} K(n,2) + \binom{4}{3} K(n,3) = (n+1)^4 - 1$ d'où :

$K(n,3) = \dfrac{1}{4}\left((n+1)^4 - 1 - n - 4\dfrac{n(n+1)}{2} - 6\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Partie II : Somme des cubes des n premiers entiers

On considère une suite de nombres réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$x_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n > 0, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} x_k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1}^3 = 2S_n x_{n+1} + x_{n+1}^2$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :
$x_{n+1}^3 = \sum_{k=0}^{n+1} x_k^3 - \sum_{k=0}^{n} x_k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n+1} x_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = (S_n + x_{n+1})^2 - S_n^2 = 2S_n x_{n+1} + x_{n+1}^2$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = n$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n : (x_n = n)$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie.
Initialisation : Par hypothèse, $x_0 = 0$ donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![0, n]\!], P_k$ est vraie.
D'après la question précédente, on a $x_{n+1}^3 = 2S_n x_{n+1} + x_{n+1}^2$.
D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ on a donc $x_{n+1}^3 - n(n+1)x_{n+1} - x_{n+1}^2 = 0$ ce qui équivaut à $x_{n+1}\left(x_{n+1}^2 - x_{n+1} - n(n+1)\right) = 0$.
Par hypothèse, $x_{n+1} \neq 0$ on en déduit que $x_{n+1}^2 - x_{n+1} - n(n+1) = 0$.
Le discriminant de ce trinôme du second degré est $\Delta = (2n+1)^2$ d'où l'on déduit ses racines : $n+1$ et $-n$.
Comme par hypothèse $x_{n+1} > 0$, on en déduit que $x_{n+1} = n+1$. Ainsi P_{n+1} est vraie.
Par principe de récurrence, P_n est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Réciproquement, en remarquant que pour $n \in \mathbb{N}$, $\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + 2\sum_{0\leq i<j\leq n} ij$, montrer que la suite des entiers vérifie les conditions de l'énoncé.
On a $x_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, x_n = n > 0$. De plus :
$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + 2\sum_{0\leq i<j\leq n} ij = \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=0}^{j-1} i = \sum_{k=0}^{n} k^2 + 2\sum_{j=1}^{n} j\frac{(j-1)j}{2} = \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{j=1}^{n} j^3 - \sum_{j=1}^{n} j^2$ d'où
$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} j^3 = \sum_{j=0}^{n} j^3$

4. Retrouver $K(n, 3)$.

On a pour $n \in \mathbb{N} : K(n,3) = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 = S_n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.