- CC2-S2 - - 2016-2017 -

– Correction - Géométrie –

EXERCICE 1

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on va noter T_t et N_t respectivement les tangentes et normales à P en $M(t)$.
On obtient alors :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{2} \\ y(t) = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = t \\ y'(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow T_t : \begin{vmatrix} x - \dfrac{t^2}{2} & t \\ y - t & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - ty + \frac{t^2}{2} = 0,$$

et :

$$N_t : \begin{vmatrix} x - \dfrac{t^2}{2} & -1 \\ y - t & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow tx + y - \frac{t^3}{2} - t = 0.$$

En utilisant le fait que la développée (D) est l'enveloppe des normales, on cherche (D) sous la forme :

$$\begin{cases} tx + y - \dfrac{t^3}{2} - t = 0 \\ x - \dfrac{3}{2}t^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2}t^2 + 1 \\ y = -t^3 \end{cases}$$

Autre méthode :
On peut paramétrer les normales par :

$$\begin{cases} x(\lambda) = \lambda \\ y(\lambda) = -t\lambda + \dfrac{t^3}{2} \end{cases}.$$

La développée (D) étant l'enveloppe des normales, on cherche (D) sous la forme :

$$t \mapsto \begin{cases} x(t) = \lambda(t) \\ y(t) = -t\lambda(t) + \dfrac{t^3}{2} + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = \lambda'(t) \\ y'(t) = -t\lambda'(t) - \lambda(t) + \dfrac{3t^2}{2} + 1 \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{vmatrix} -1 & \lambda'(t) \\ t & -t\lambda'(t) - \lambda(t) + \dfrac{3t^2}{2} + 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(t) = \frac{3}{2}t^2 + 1.$$

On trouve alors :

$$(D) : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \dfrac{3t^2}{2} + 1 \\ y(t) = -t\left(\dfrac{3}{2}t^2 + 1\right) + \dfrac{t^3}{2} + t = -t^3 \end{cases}.$$

2. On obtient $R(t) = -(t^2+1)^{3/2}$, et comme on a $\overrightarrow{N}(t) = \dfrac{-\overrightarrow{i} + t\overrightarrow{j}}{\sqrt{t^2+1}}$, on en déduit l'ensemble des centres de courbures (qui correspond à la développée) :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{(t^2+1)^{3/2}}{\sqrt{t^2+1}} = \dfrac{3t^2}{2} + 1 \\ y(t) = t - \dfrac{t(t^2+1)^{3/2}}{\sqrt{t^2+1}} = -t^3 \end{cases}$$

3. Les points d'intersection de (P) et de (D) vérifient :

$$\exists(t,t')\in\mathbb{R}^2,\begin{cases} x=\dfrac{t'^2}{2}=\dfrac{3t^2}{2}+1 \\ t=t'=-t^3\end{cases} \Rightarrow \frac{t^6}{2}=\frac{3}{2}t^2+1\Rightarrow (t^2+1)^2(t^2-2)=0\Rightarrow t=\pm\sqrt{2}.$$

On vérifie que (D) et (P) se coupent bien en deux points :

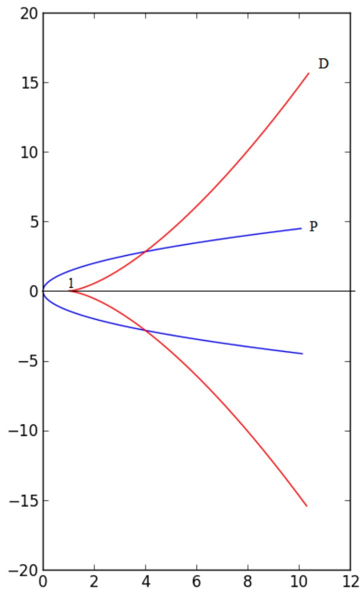
$$A(4,-2\sqrt{2})\quad \text{et}\quad A'(4,2\sqrt{2})$$

4. Tracé de (P) et de (D) :

Les deux courbes sont symétriques par rapport à l'axe (Ox), il suffit de les étudier pour $t\geqslant 0$.

Le point de (D) de paramètre $t=0$, qui admet pour coordonnées $(1,0)$, est un point de rebroussement de première espèce.

Les courbes (P) et (D) admettent respectivement des branches paraboliques quand $t\to\pm\infty$ de direction (Ox) et (Oy).



EXERCICE 2

1. a. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, en posant $v=-u$, on obtient :

$$\begin{cases} x(-t)=\displaystyle\int_0^{-t}\cos(u^2)du \underset{v=-u}{=} -\int_0^t \cos(v^2)du=-x(t) \\ y(-t)=\displaystyle\int_0^{-t}\sin(u^2)du \underset{v=-u}{=} -\int_0^t \sin(v^2)du=-y(t)\end{cases}$$

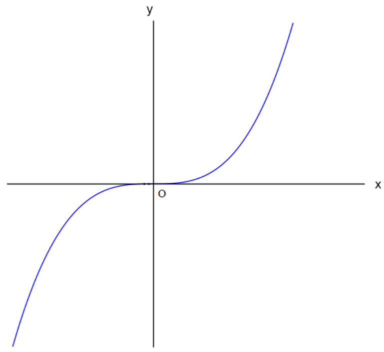
et on en déduit que la courbe Γ est symétrique par rapport au point O et qu'il suffit de l'étudier pour $t\in\mathbb{R}_+$.

b. Remarquons tout d'abord que la courbe Γ est régulière car on a :

$$\forall t\in\mathbb{R}_+,\quad \begin{cases} x'(t)=\cos(t^2) \\ y'(t)=\sin(t^2)\end{cases}$$

Les points de Γ à tangente verticale admettent alors pour paramètres $t=\pm\sqrt{\dfrac{\pi}{2}+k\pi}$, $\forall k\in\mathbb{N}$, et les points à tangente horizontale admettent pour paramètres $t=\pm\sqrt{k\pi}$, $\forall k\in\mathbb{N}$.

c. Etude de Γ au voisinage du point $M(0) = O$:



$$\begin{cases} x'(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{tangente horizontale.}$$

$$\begin{cases} x''(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'''(0) = 0 \\ y'''(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{on a une inflexion en } M(0).$$

2. a. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on obtient :

$$s(t) = \int_0^t \|\overrightarrow{f'}(u)\| du = \int_0^t du = t.$$

b. On trouve :

$$\overrightarrow{T}\begin{pmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{N}\begin{pmatrix} -\sin(t^2) \\ \cos(t^2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R(t) = \frac{1}{2t} \text{ pour } t \neq 0.$$

c. On obtient alors, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $R(t) = \dfrac{1}{2s(t)}$ ce qui veut dire que, quand t augmente, la longueur de la courbe augmente alors que le rayon diminue et tend vers 0. On en déduit que la courbe tend vers un point limite.

3. Variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur l'intervalle $[0, \sqrt{2\pi}]$:

t	0		$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$		$\sqrt{\pi}$		$\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$		$\sqrt{2\pi}$
x'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x	0	$\nearrow$			$\searrow$			$\nearrow$	
y'			$+$		0		$-$		
y	0		$\nearrow$		a_1		$\searrow$		$a_2 > 0$

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $v \in [0, \pi]$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{v + n\pi}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

la fonction *sinus* étant positive sur $[0, \pi]$, on obtient :

$$\int_0^\pi \frac{\sin v}{2\sqrt{(n+1)\pi}} dv \leqslant \int_0^\pi \frac{\sin v}{2\sqrt{v + n\pi}} dv \leqslant \int_0^\pi \frac{\sin v}{2\sqrt{n\pi}} dv,$$

ce qui nous donne alors :

$$\frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}} \leqslant \int_0^\pi \frac{\sin v}{2\sqrt{v + n\pi}} dv \leqslant \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

b. Posons, pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin v}{2\sqrt{v + n\pi}} dv$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^\pi \underbrace{\frac{\sin v}{2}}_{\geqslant 0} \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{v + (n+1)\pi}} - \frac{1}{\sqrt{v + n\pi}}}_{\leqslant 0} \right) dv \leqslant 0,$$

ce qui montre bien que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin v}{2\sqrt{v + n\pi}} dv$ est décroissante.

5. a. En posant $v = u^2$, puis $w = v - n\pi$, on obtient :

$$a_{n+1} - a_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(u^2)du = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}}dv = \int_0^{\pi} \frac{(-1)^n \sin(w)}{2\sqrt{w+n\pi}}dv = (-1)^n u_n.$$

Comme $u_n \geqslant 0$, on en déduit que $a_{n+1} - a_n$ est du signe de $(-1)^n$.
On obtient alors :

$$a_{2p+2} - a_{2p} = (a_{2p+2} - a_{2p+1}) + (a_{2p+1} - a_{2p}) = -u_{2p+1} + u_{2p} > 0,$$

puisque la suite de terme général u_n est décroissante.
On montre de même que $a_{2p+1} - a_{2p-1} < 0$.

b. Comme on a $|a_{n+1} - a_n| = u_n$, on déduit de la question **4.a** que $|a_{n+1} - a_n| \to 0$, ce qui implique que les suites $(a_{2p})_p$ et $(a_{2p+1})_p$ sont adjacentes (puisque l'on vient de montrer que $(a_{2p})_p$ est croissante et que $(a_{2p+1})_p$ est décroissante), donc qu'elles convergent vers une même limite L, ce qui montre bien que la suite (a_n) est également convergente vers ce réel L.

c. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$n(t) \leq \frac{t^2}{\pi} < n(t) + 1 \Rightarrow \pi n(t) \leq t^2 < \pi(n(t)+1) \Rightarrow 0 \leq t^2 - \pi n(t) < \pi,$$

ce qui nous donne alors :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\sqrt{\pi n(t)}}^{t} \sin(u^2)du \right| &= \left| \int_{\pi n(t)}^{t^2} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}}dv \right| \qquad \text{en posant } v = u^2 \\
&\leqslant \int_{\pi n(t)}^{t^2} \frac{1}{2\sqrt{v}}dv = t - \sqrt{\pi n(t)} = \frac{t^2 - \pi n(t)}{t + \sqrt{\pi n(t)}} \\
&\leqslant \frac{\pi}{t + \sqrt{\pi n(t)}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0
\end{aligned}$$

On en déduit que l'on a :

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t \sin(u^2)du = \int_0^{\sqrt{\pi n(t)}} \sin(u^2)du + \int_{\sqrt{\pi n(t)}}^{t} \sin(u^2)du \\
&= a_{n(t)} + \int_{\sqrt{\pi n(t)}}^{t} \sin(u^2)du \xrightarrow[t \to +\infty]{} L + 0
\end{aligned}$$

En admettant que $x(t)$ a également une limite L' quand t tend vers $+\infty$ et que $L = L' \cong 0,63$, on obtient :