CB n°5 - Espaces préhilbertiens réels - Sujet 1

EXERCICE 1

Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]$, on note

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2. φ est-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$?

3. On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire φ. On note $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) = 0\}$

a. Donner une base de F.

b. Expliciter la projection orthogonale sur F du polynôme X^2.

EXERCICE 2

On se place dans $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour $(f, g) \in E^2$, on note :

$$\psi(f, g) = \int_0^1 \left(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\right) \mathrm{d}t$$

1. Montrer que ψ est un produit scalaire sur E.

2. On note $F = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E, f'' = f\}$, et on munit E du produit scalaire ci-dessus.

a. Montrer que F et G sont orthogonaux (on pourra utiliser une intégration par parties).

b. Justifier que $f_1 : t \mapsto \mathrm{e}^t$ et $f_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ forment une base orthogonale de G.

c. Cette base est-elle orthonormée ?

d. Montrer que pour tout $f \in E$, il existe $g \in G$ tel que $f - g \in F$.

e. Que peut-on en déduire pour F et G ?

CB n°5 - Espaces préhilbertiens réels - Sujet 2

EXERCICE 1

Pour $(f,g) \in \left(C^2([0,1],\mathbb{R})\right)^2$, on note :

$$\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $E = C^2([0,1],\mathbb{R})$.

2. On note $F = \{f \in E, f'' = f\}$

a. Justifier que $f_1 : t \mapsto \mathrm{e}^t$ et $f_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ forment une base orthogonale de F.

b. Expliciter la projection orthogonale sur F pour le produit scalaire φ de la fonction $t \mapsto t^2$.

EXERCICE 2

On note $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P(1) = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$, et en donner une base.

2. Pour $(P,Q) \in E^2$, on note

$$\psi(P,Q) = -\int_0^1 (P(x)Q''(x) + P''(x)Q(x))\mathrm{d}x$$

a. Montrer que ψ définit un produit scalaire sur E (on pourra utiliser une intégration par parties).

b. ψ définit-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$? Justifier la réponse.

c. Donner une base orthonormée de E pour le produit scalaire ψ.