- CC2-S1 - - 2018-2019 -

— Correction - Analyse —

Partie 1

1. Soit y une fonction de la variable réelle t.
Donner la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' = 0 \qquad (\mathscr{E}_c)$$

L'ensemble des solutions de $(\mathscr{E}_c)$ est $S_{(\mathscr{E}_c)} = \{t \mapsto at+b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$ c'est à dire **l'ensemble des fonctions affines**.

2. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{p\geq 0}(-1)^p t^{2p}$.
Donner son rayon de convergence et sa somme lorsqu'elle est définie.
La série entière $\displaystyle\sum_{p\geq 0}(-1)^p t^{2p}$ est la série géométrique de raison $-t^2$ et de premier terme 1 ; elle converge si, et seulement si, $|-t^2| < 1$, c'est à dire $|t| < 1$. Son rayon de convergence vaut donc 1 et

$$\forall t \in]-1,1[,\ \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p t^{2p} = \frac{1}{1+t^2}$$

3. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{p\geq 0}(-1)^p t^{2p+1}$.
Donner son rayon de convergence et sa somme lorsqu'elle est définie.
La série entière $\displaystyle\sum_{p\geq 0}(-1)^p t^{2p+1}$ est la série géométrique de raison $-t^2$ et de premier terme t ; elle converge si, et seulement si, $|-t^2| < 1$, c'est à dire $|t| < 1$. Son rayon de convergence vaut donc 1 et

$$\forall t \in]-1,1[,\ \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p t^{2p+1} = \frac{t}{1+t^2}$$

Partie 2

On considère l'équation différentielle :

$$(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0 \qquad (\mathscr{E}_h)$$

1. a. Montrer que f est une solution de $(\mathscr{E}_h)$ si, et seulement si, $\varphi : t \mapsto (1+t^2)f(t)$ est une fonction affine de t (on pensera à calculer sa dérivée seconde).
Soit f une solution de $(\mathscr{E}_h)$. Alors $f \in D^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, ce qui équivaut à $\varphi \in D^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
De plus, $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = (1+t^2)f'(t) + 2tf(t)$ et $\varphi''(t) = (1+t^2)f''(t) + 4tf'(t) + 4f(t)$. Dès lors,

$$\begin{aligned} f \text{ est une solution de } (\mathscr{E}_h) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ (1+t^2)f''(t) + 4tf'(t) + 2f(t) = 0 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi''(t) = 0 \\ &\iff \varphi \in S_{\mathscr{E}_c} \end{aligned}$$

b. Montrer que $\left\{t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}, t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}\right\}$ est une base de l'espace des solutions de $(\mathscr{E}_h)$.
D'après ce qui précède, f est une solution de $(\mathscr{E}_h)$ si, et seulement si, $\varphi : t \mapsto (1+t^2)f(t)$ est une fonction affine. Par suite, f est une solution de $(\mathscr{E}_h)$ si, et seulement si, $\exists a,b \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ (1+t^2)f(t) = at+b$ ou encore $\exists a,b \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{at+b}{1+t^2} = \dfrac{b}{1+t^2} + \dfrac{at}{1+t^2}$.

On en déduit que $S_{\mathscr{E}_h} = \text{Vect}\{t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}, t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}\}$ puis comme la famille $\{t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}, t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}\}$ est libre, on conclut que c'est une base de $S_{\mathscr{E}_h}$.

Autre méthode :

On peut aussi dire que la famille proposée est libre, et que chaque fonction de la famille est solution de $(\mathscr{E}_h)$ (à vérifier). Par suite $\text{Vect}\{t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}, t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}\} \subset S_{\mathscr{E}_h}$. Comme on sait que $\dim(S_{\mathscr{E}_h}) = 2$, on conclut que $\text{Vect}\{t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}, t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}\} = S_{\mathscr{E}_h}$ et que $\{t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}, t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}\}$ est une base de $S_{\mathscr{E}_h}$.

2. Dans cette question, on propose une autre méthode pour déterminer les solutions de l'équation homogène $(\mathscr{E}_h)$. On recherche les solutions de $(\mathscr{E}_h)$ développables en série entière au voisinage de 0, sous la forme $y(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, de rayon de convergence $R > 0$, et où les a_n, $n \in \mathbb{N}$, sont des réels.

a. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation de récurrence entre a_{n+2} et a_n.

$t \mapsto y(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est C^∞ sur $]-R, R[$, puis par dérivation terme à terme, on obtient

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (\mathscr{E}_h) &\iff \forall t \in]-R, R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 4na_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n t^n = 0 \\
&\iff \forall t \in]-R, R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2+3n+2)a_n\right)t^n = 0 \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + \underbrace{(n^2+3n+2)}_{(n+2)(n+1)} a_n = 0 \quad (\text{ unicité du DSE(0)}) \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -a_n
\end{aligned}$$

b. Pour tout entier naturel p, exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p, a_0 et a_1.

On a $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+2} = -a_{2p}$ et $a_{2p+3} = -a_{2p+1}$, donc (a_{2p}) et (a_{2p+1}) sont deux suites géométriques de raison -1 et de premiers termes respectifs a_0 et a_1. On conclut que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad a_{2p} = (-1)^p a_0 \qquad \text{et} \qquad a_{2p+1} = (-1)^p a_1$$

c. En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ au voisinage de 0.

Pour $|t| < 1$, les deux séries géométriques $\sum a_{2p}t^{2p}$ et $\sum a_{2p+1}t^{2p+1}$ sont convergentes, et alors

$$\forall t \in]-1, 1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}t^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1}t^{2p+1} = a_0\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p t^{2p} + a_1\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p t^{2p+1} = \frac{a_0}{1+t^2} + \frac{a_1 t}{1+t^2}$$

(**d'après la partie 1**). On retrouve les résultats précédents mais uniquement sur $]-1, 1[$.

Partie 3

Résoudre l'équation différentielle :

$$(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = \frac{1}{1+t^2} \qquad (\mathscr{E})$$

D'après la partie 2, on connaît une solution (au moins) de l'équation homogène associée à $(\mathscr{E})$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, par exemple $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$. On peut donc appliquer la méthode de Lagrange, on recherchant une solution

de $(\mathscr{E})$ sous la forme $y(t) = \varphi(t)\dfrac{1}{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$ où $\varphi \in D^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
On a alors $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = (1+t^2)y(t)$, puis on en déduit, comme à la question **1a** de la **partie 2**, que :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (\mathscr{E}) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ (1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = \frac{1}{1+t^2} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi''(t) = \frac{1}{1+t^2} \end{aligned}$$

On a, sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \mathrm{Arctan}(t) + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$, puis $\displaystyle\int \mathrm{Arct}(t)\mathrm{d}t = t\mathrm{Arctan}(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$ (en intégrant par parties) donc les solutions de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ sont

$$t \mapsto \frac{1}{1+t^2}\left(C_1 t + C_2 + t\mathrm{Arctan}(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right),\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$