Math. - CC 2 - Correction

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2-x^2}+x}{2}\right)$$

1. Donner le domaine de définition de f.

Il faut $2-x^2 \geq 0$ donc $x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ et $\left|\frac{\sqrt{2-x^2}+x}{2}\right| \leq 1$.

$\left|\frac{\sqrt{2-x^2}+x}{2}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2-x^2}+x\right)^2 \leq 4 \Leftrightarrow x\sqrt{2-x^2} \leq 1$.

Si $x \in [-\sqrt{2}, 0]$ cette inégalité est vérifiée, sinon, elle équivaut à $x^2(2-x^2) \leq 1$ c'est-à-dire $(x^2-1)^2 \geq 0$ qui est toujours vérifiée.

En conclusion le domaine de définition de f est $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.

2. Exprimer simplement $f\left(\sqrt{2}\sin(a)\right)$, pour $a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$f\left(\sqrt{2}\sin(a)\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2-2\sin^2(a)}+\sqrt{2}\sin(a)}{2}\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}|\cos(a)|+\sqrt{2}\sin(a)}{2}\right)$.

Pour $a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(a) \geq 0$ donc $f\left(\sqrt{2}\sin(a)\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(a)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(a)\right) = \text{Arcsin}\left(\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

On en déduit : $f\left(\sqrt{2}\sin(a)\right) = \begin{cases} a+\frac{\pi}{4} & \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{4} \\ \pi - \left(a+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} - a & \text{si} \quad \frac{\pi}{4} < a \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

3. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ sur son domaine de définition.

On déduit de la question précédente que $f(x) = \begin{cases} \text{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\pi}{4} & \text{si} \quad -\sqrt{2} \leq x \leq 1 \\ \frac{3\pi}{4} - \text{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) & \text{si} \quad 1 < x \leq \sqrt{2} \end{cases}$

EXERCICE 2

Soit $e^{i\theta}$, $\theta \in]-\pi, \pi[$ un nombre complexe différent de -1.

1. Mettre le nombre complexe $Z = \frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$ sous forme trigonométrique.

$$Z = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{3\pi}{2}} & \text{si} \quad \theta \in [0, \pi[\\ -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{2}} & \text{si} \quad \theta \in]-\pi, 0] \end{cases}$$

2. En déduire le module et l'argument du nombre complexe z tel que

$$\frac{2+iz}{2-iz} = e^{i\theta}$$

$\frac{2+iz}{2-iz} = e^{i\theta} \Leftrightarrow \left((z \neq -2i) \wedge \left(z = 2i\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}\right)\right) \Leftrightarrow \left(z = 2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ donc

$|z| = 2\left|\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$ et $\begin{cases} \arg(z) \equiv 0\ [2\pi] & \text{si} \quad \theta \in [0, \pi[\\ \arg(z) \equiv \pi\ [2\pi] & \text{si} \quad \theta \in]-\pi, 0] \end{cases}$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$(2+\mathrm{i}z)^5 = (2-\mathrm{i}z)^5$$
On remarque que -1 n'est pas solution de l'équation.
$((2+\mathrm{i}z)^5 = (2-\mathrm{i}z)^5) \Leftrightarrow \left(z \neq -2\mathrm{i} \wedge \left(\dfrac{2+\mathrm{i}z}{2-\mathrm{i}z}\right)^5 = 1\right) \Leftrightarrow \left(z \neq -2\mathrm{i} \wedge \exists k \in [\![0,4]\!], \dfrac{2+\mathrm{i}z}{2-\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}\right)$
$\Leftrightarrow \left(\exists k \in [\![0,4]\!], z = 2\tan\left(\dfrac{k\pi}{5}\right)\right)$

4. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation
$$\left(\mathrm{i}z^2 + (2-\mathrm{i})z - 2\right)^5 = \left(-\mathrm{i}z^2 + (2+\mathrm{i})z - 2\right)^5$$
Considérons le trinôme $\mathrm{i}z^2 + (2-\mathrm{i})z - 2$; $\Delta = 3 + 4\mathrm{i} = (2+\mathrm{i})^2$.
On en déduit que $\mathrm{i}z^2 + (2-\mathrm{i})z - 2 = \mathrm{i}(z-1)(z-2\mathrm{i}) = (z-1)(\mathrm{i}z+2)$.

Considérons le trinôme $-\mathrm{i}z^2 + (2+\mathrm{i})z - 2$; $\Delta = 3 - 4\mathrm{i} = (2-\mathrm{i})^2$.
On en déduit que $-\mathrm{i}z^2 + (2+\mathrm{i})z - 2 = -\mathrm{i}(z-1)(z+2\mathrm{i}) = (z-1)(-\mathrm{i}z+2)$.

Ainsi, $\left(\mathrm{i}z^2 + (2-\mathrm{i})z - 2\right)^5 = \left(-\mathrm{i}z^2 + (2+\mathrm{i})z - 2\right)^5 \Leftrightarrow (z-1)^5(\mathrm{i}z+2)^5 = (z-1)^5(2-\mathrm{i}z)^5$.
Les solutions sont donc 1 et $2\tan\left(\dfrac{k\pi}{5}\right)$, pour $k \in [\![0,4]\!]$.

EXERCICE 3

Etant donné $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\mathrm{i}\}$, on considère
$$f(z) = \frac{z+\mathrm{i}}{z-2\mathrm{i}}$$
On se place dans le plan complexe.
On note A le point d'affixe $-\mathrm{i}$, B le point d'affixe $2\mathrm{i}$, et M le point d'affixe z. On a $f(z) = \dfrac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}$.

Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que :

1. $f(z) \in \mathbb{R}$.
$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{BM}}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (A = M) \vee \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) \equiv 0[\pi]$.
Les points solutions sont donc les points de la droite (AB) privée du point B.

2. $f(z)$ est un imaginaire pur.
$f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{BM}}} \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow (A = M) \vee \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.
Les points solutions sont donc les points du cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B.

3. $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$.
$f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AM}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} z_{\overrightarrow{BM}} \Leftrightarrow$ AMB est un triangle équilatéral direct.
La résolution de $\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-2\mathrm{i}} = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donne pour unique solution $z = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

EXERCICE 4

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I =]0, +\infty[$ et
$$(E_n) : \quad xy' + ny = \frac{1}{1+x^2}$$

PARTIE 1 : Résolution de (E_n)

On note (H_n) l'équation homogène associée à (E_n).

1. Résoudre (H_n) sur I.
Les solutions de (H_n) sur I sont de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{-n\ln(x)} = \dfrac{C}{x^n}$ où $C \in \mathbb{R}$.

2. Résolution de (E_0)

a. Déterminer les réels a et b tels que

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx}{1+x^2}$$

$\dfrac{1}{x(1+x^2)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$

b. En déduire les solutions de (E_0).

(E_0) : $\quad xy' = \dfrac{1}{1+x^2}$

On a donc y solution de (E_0) sur I si, et seulement si pour tout $x \in I$:

$y(x) = \displaystyle\int^x \frac{1}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t = \int^x \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

3. Résoudre (E_1).

On cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme $y_1 = \lambda h$ où $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est solution de (H_1).

y_1 solution de (E_1) sur I si, et seulement si pour tout $x \in I$

$x(\lambda'(x)h(x) + \lambda(x)h'(x)) + \lambda(x)h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ ce qui équivaut, puisque h est solution de (H_1) à :

$\lambda'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ d'où $\lambda(x) = \mathrm{Arctan}(x) + K, K \in \mathbb{R}$ et par suite $y_1(x) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}$.

On en déduit que les solutions de (E_1) sur I sont de la forme $x \mapsto \dfrac{C + \mathrm{Arctan}(x)}{x}, C \in \mathbb{R}$.

4. Résolution de (E_n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\forall x \geq 0, \quad F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions de (E_n) sur I sont les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto \frac{F_n(x) + C}{x^n}, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière de (E_n) sous la forme $y_n = \lambda h_n$ où $h_n : x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ est solution de (H_n).

y_n solution de (E_n) sur I si, et seulement si pour tout $x \in I$

$x(\lambda'(x)h_n(x) + \lambda(x)h_n'(x)) + \lambda(x)h_n(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ ce qui équivaut, puisque h_n est solution de (H_n) à :

$\lambda'(x) = \dfrac{x^n}{x(1+x^2)} = \dfrac{x^{n-1}}{1+x^2} = F_n'(x)$.

On en déduit que $y_n : x \mapsto \dfrac{F_n(x)}{x^n}$ est une solution de (E_n) et par suite que les solutions de (E_n) sont de la forme attendue.

PARTIE 2 : Forme explicite des solutions de (E_n)

1. Démontrer que pour $n \geq 1$, on a :

$$\forall x > 0, \quad F_n(x) + F_{n+2}(x) = \frac{x^n}{n}$$

Pour $n \geq 1$ et $x > 0$ on a : $F_n(x) + F_{n+2}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^{n-1} + t^{n+1}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^{n-1}(1+t^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t = \frac{x^n}{n}$.

2. a. Calculer $F_1(x)$ pour tout $x > 0$.

Pour $x > 0$, $\quad F_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \mathrm{Arctan}(x)$

b. Calculer $F_2(x)$ pour tout $x > 0$.

Pour $x > 0$, $\quad F_2(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

3. a. Etablir que

$$\forall n \geq 2, \quad \forall x > 0, \quad F_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2}\ln(1+x^2) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-1-k}\frac{x^{2k}}{2k}$$

Pour $n \geq 2$, on note P_n : "$\forall x > 0, \quad F_{2n}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2}\ln(1+x^2) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-1-k}\dfrac{x^{2k}}{2k}$"

Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \geq 2$:

$\rightsquigarrow$ Initialisation : D'après la question **1** de la **Partie 2**, on a pour tout $x > 0, F_2(x) + F_4(x) = \dfrac{x^2}{2}$ d'où $F_4(x) = -\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + \dfrac{x^2}{2}$.
Ainsi la propriété est vérifiée pour $n = 2$.

$\rightsquigarrow$ Hérédité : Soit $n \geq 2$. On suppose que P_n est vraie. Pour $x > 0$, on a :
$F_{2n}(x) + F_{2n+2}(x) = \dfrac{x^{2n}}{2n}$ donc d'après l'hypothèse de récurrence :
$F_{2(n+1)} = \dfrac{x^{2n}}{2n} - \left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{2}\ln(1+x^2) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-1-k}\dfrac{x^{2k}}{2k}\right) = \dfrac{(-1)^{n+2}}{2}\ln(1+x^2) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\dfrac{x^{2k}}{2k}$
donc la propriété P_{n+1} est vraie.
Par principe de récurrence on a P_n vraie pour tout entier $n \geq 2$.

b. Etablir que

$$\forall n \geq 1, \quad \forall x > 0, \quad F_{2n+1}(x) = (-1)^n \text{Arctan}(x) + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Pour $n \geq 1$, on note P_n : "$\forall x > 0, \quad F_{2n+1}(x) = (-1)^n \text{Arctan}(x) + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}\dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$"

Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \geq 1$:

$\rightsquigarrow$ Initialisation : D'après la question **1** de la **Partie 2**, on a pour tout $x > 0, F_1(x) + F_3(x) = x$ d'où $F_3(x) = -\text{Arctan}(x) + x$.
Ainsi la propriété est vérifiée pour $n = 1$.

$\rightsquigarrow$ Hérédité : Soit $n \geq 1$. On suppose que P_n est vraie. Pour $x > 0$, on a :
$F_{2n+1}(x) + F_{2n+3}(x) = \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ donc d'après l'hypothèse de récurrence :
$F_{2n+3} = \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} - (-1)^n \text{Arctan}(x) + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}\dfrac{x^{2k+1}}{2k+1} = (-1)^{n+1}\text{Arctan}(x) + \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$
donc la propriété P_{n+1} est vraie.
Par principe de récurrence on a P_n vraie pour tout entier $n \geq 1$.

4. Résoudre (E_3) et (E_4).
En utilisant les résultats établis à la question **4** de la **Partie 1**, on obtient les solutions suivantes :
Pour (E_3) $\quad y : x \mapsto \dfrac{-\text{Arctan}(x) + x + C}{x^3}, \quad C \in \mathbb{R}$.
Pour (E_4) $\quad y : x \mapsto \dfrac{-\ln(1+x^2) + x^2 + C}{2x^4}, \quad C \in \mathbb{R}$.