CB N°2 - INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES - SUJET 1

EXERCICE 1

Donner la nature des intégrales suivantes (en cas de convergence, on ne demande pas de les calculer) :

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t, \quad \text{et} \quad \int_0^1 \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$$

$f : t \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc localement intégrable ; elle est également positive.
En $+\infty$: $\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$. $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est une intégrale de Riemann divergente, donc par comparaison de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.
En 0 : $\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \underset{0}{\sim} -\ln(t)$. $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale de référence convergente, donc $\int_0^1 -\ln(t)\mathrm{d}t$ converge, et par comparaison de fonctions positives, $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge.

EXERCICE 2

Etablir la convergence et calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^{2t}}$$

$t \mapsto \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2t}}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc localement intégrable.
En posant $u = \mathrm{e}^{2t}$, il vient $\mathrm{d}u = 2\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$ d'où $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{2u}$;
$\varphi : u \mapsto \frac{\ln u}{2}$ est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$, et établit une bijection entre $[1,+\infty[$ et $[0,+\infty[$.
Le théorème de changement de variable donne :
$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^{2t}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2u(1+u)}$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.
On a : $\frac{1}{u(u+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u^2}$; $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc par comparaison de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2u(1+u)}$ converge, de même que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^{2t}}$.
On a : $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^{2t}} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2u(1+u)} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right) \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{u}{1+u}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{\ln(2)}{2}$.

EXERCICE 3

1. Etablir la convergence et calculer

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$$

$t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{(1+t)^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$, donc localement intégrable.
On pose, pour $t \geq 1$: $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \dfrac{-1}{1+t}$; u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur $[1,+\infty[$, le théorème d'intégration par parties donne, pour $x \geq 1$:

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t &= \left[\frac{-\ln(t)}{1+t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} = \frac{-\ln(x)}{1+x} + \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{-\ln(x)}{1+x} + \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)\end{aligned}$$

On a ainsi établi la convergence de l'intégrale, et sa valeur.

2. A l'aide d'un changement de variable, en déduire la convergence et la valeur de

$$\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

En posant $u = t^2$, il vient $\mathrm{d}u = 2t\mathrm{d}t$.
$\varphi : u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$ et établit une bijection entre $[1,+\infty[$ et $[1,+\infty[$.
En remarquant que pour $t \geq 1, \ln(t) = \dfrac{1}{2}\ln(t^2)$, le théorème de changement de variable donne :
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$ de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{4}\frac{\ln(u)}{(1+u)^2}\mathrm{d}u$ avec égalité en cas de convergence.
Le résultat précédent donne donc : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = \frac{\ln(2)}{4}$.

CB N°2 - Intégrales généralisées - Sujet 2

EXERCICE 1

Donner la nature des intégrales suivantes (en cas de convergence, on ne demande pas de les calculer) :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t)}, \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}-1\right) \mathrm{d}t$$

$f : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(1+t)}$ est continue sur $]0,1]$ donc localement intégrable ; elle est également positive.
En 0 : $\dfrac{1}{\ln(1+t)} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t}$. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est une intégrale de Riemann divergente, donc par comparaison de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

$g : t \mapsto \left(\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}-1\right)$ est continue sur $[1,+\infty[$ donc localement intégrable ; elle est également positive.
En $+\infty$: $\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}-1\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2t^2}$. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc par comparaison de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ converge.

EXERCICE 2

Etablir la convergence et calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2+\mathrm{e}^t}$$

$t \mapsto \dfrac{1}{2+\mathrm{e}^t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc localement intégrable.
En posant $u = \mathrm{e}^t$, il vient $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^t\mathrm{d}t$ d'où $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{u}$;
$\varphi : u \mapsto \ln u$ est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$ et établit une bijection entre $[1,+\infty[$ et $[0,+\infty[$.
Le théorème de changement de variable, donne :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2+\mathrm{e}^t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(2+u)}$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.
On a : $\dfrac{1}{u(u+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u^2}$; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc par comparaison de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(2+u)}$ converge, de même que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2+\mathrm{e}^t}$.
On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2+\mathrm{e}^t} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(2+u)} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{2+u}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{u}{2+u}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{\ln(3)}{2}$.

EXERCICE 3

1. Etablir la convergence et calculer

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$$

$t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{(1+t)^2}$ est continue sur $]0,1]$, donc localement intégrable.

On pose, pour $t>0$, $u(t)=\ln(t)$ et $v(t)=\dfrac{-1}{1+t}$; u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur $]0,1]$.

ATTENTION ! $\lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t) = +\infty$ donc le théorème d'intégration par parties pour les intégrales impropres ne s'applique pas !!!

Pour $x>0$, le théorème d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\int_x^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t &= \left[\frac{-\ln(t)}{1+t}\right]_x^1 + \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} = \frac{\ln(x)}{1+x} + \int_x^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\ln(x)}{1+x} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) = -\ln(2) - \frac{x\ln(x)}{1+x} + \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\ln(2)\end{aligned}$$

On a ainsi établi la convergence de l'intégrale, et sa valeur.

2. A l'aide d'un changement de variable, en déduire la convergence et la valeur de

$$\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

En posant $u=t^2$, il vient $\mathrm{d}u = 2t\mathrm{d}t$.
$\varphi : u \mapsto \sqrt{u}$ est C^1 sur $[0,1]$ et établit une bijection entre $]0,1]$ et $]0,1]$.
En remarquant que pour $t>0, \ln(t) = \dfrac{1}{2}\ln(t^2)$, le théorème de changement de variable donne :
$\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$ de même nature que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4}\frac{\ln(u)}{(1+u)^2}\mathrm{d}u$ avec égalité en cas de convergence.
Le résultat précédent donne donc : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = -\frac{\ln(2)}{4}$.