⋆ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse ⋆

Math. - CC 1 - S1 - Analyse

vendredi 16 octobre 2020 - Durée 1 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul et (H_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. a. A l'aide d'une comparaison somme/intégrale, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$$

b. En déduire un équivalent de H_n au voisinage de $+\infty$.

2. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

a. Montrer que la série de terme général u_n est convergente. On note γ sa somme.

b. En déduire que :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \circ(1)$$

EXERCICE 2

Soit a un réel strictement positif.

1. Montrer la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-kx}\sin(ax)\mathrm{d}x$.

Démontrer que cette intégrale converge, et que :

$$J_k = \frac{a}{a^2 + k^2}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $R_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} \frac{a}{a^2 + (k+1)^2}$.

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{e}^{-(n+1)x}\mathrm{d}x$$

4. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(ax)}{\mathrm{e}^x - 1}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. A l'aide d'une majoration de l'intégrale de la question **3.**, en déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + (k+1)^2}$$

Fin de l'énoncé d'analyse