- CC2-S2 - - 2016-2017 -

– Correction - Analyse –

Exercice 1

On considère l'application g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g : (x,t) \mapsto \begin{cases} e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)} & \text{si } (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. a. $\forall t \neq 0, g(t,t) = e^{-(t^2+1)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} e^{-1} \neq 0$. On en déduit que g n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. Comme composée de fonctions usuelles, g admet des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à chacune de ses variables sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, et on a :
$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*, \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{2x}{t^2} e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t) = \left(-2t + \dfrac{2x^2}{t^3}\right) e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}$.

2. On considère la fonction réelle F définie par :

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} g(x,t)\mathrm{d}t$$

a.
- $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- $\forall t \in]0,+\infty[, x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in]0,+\infty[, |g(x,t)| \leq e^{-t^2}$.
  $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. En effet, elle est continue sur $[0,+\infty[$ donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$, et $e^{-t^2} = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc par comparaison d'une fonction positive à une fonction intégrable en $+\infty$, $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable en $+\infty$.

D'après le théorème de continuité des fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre, on en déduit que F est continue sur $\mathbb{R}$.

b.
- $\forall x \in]0,+\infty[, t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ d'après la question précédente.
- $\forall t \in]0,+\infty[, x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
- $\forall x \in]0,+\infty[, t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- $\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2, a<b, \forall x \in [a,b], \forall t \in]0,+\infty[, \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{2b}{t^2} e^{-\frac{a^2}{t^2}}$.
  Notons $\varphi : t \in]0,+\infty[\mapsto \dfrac{2b}{t^2} e^{-\frac{a^2}{t^2}}$.
  φ est continue sur $]0,+\infty[$ donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$.
  <u>En 0 :</u> $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = 0$ (par croissances comparées). Donc φ se prolonge par continuité en 0.
  <u>En $+\infty$:</u> $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2b}{t^2}$, donc par comparaison d'une fonction positive à une fonction intégrable en $+\infty$, φ est intégrable en $+\infty$.

D'après le théorème de dérivation des fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre, on en déduit que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
De plus, $\forall x > 0, F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$.

c. D'après ce qui précède, $\forall x \in]0,+\infty[, F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -\dfrac{2x}{t^2} e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}\mathrm{d}t$.
On a démontré que la fonction est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc on applique le théorème de changement de variable, avec $u = \dfrac{x}{t}$ (bijectif, de classe C^1), et on obtient :
$F'(x) = \displaystyle\int_{+\infty}^0 2e^{-\left(\frac{x^2}{u^2}+u^2\right)}\mathrm{d}u = -2F(x)$.
Ainsi F est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$.

d. D'après la question précédente, on a : $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x > 0, F(x) = C\mathrm{e}^{-2x}$.
D'après la question 1a. la fonction F est continue en 0 ; de plus elle est paire.
On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = F(0)\mathrm{e}^{-2|x|}$.
On a : $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2|x|}$.

Exercice 2

On considère l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x\tfrac{\partial f}{\partial x} - y\tfrac{\partial f}{\partial y} = xy(x-y) \quad \cdots \quad (E)$$

1. • Remarquons tout d'abord que, si $(x, y) \in D$, alors on a :

$$v^2 - 4u = (x+y)^2 - axy = (x-y)^2 > 0,$$

ce qui implique bien que $\varphi(D) \subset D'$.

• D'autre part, pour $(u, v) \in D'$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} u = xy \\ v = x + y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y = \sqrt{v^2 - 4u} \\ x + y = v \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{v + \sqrt{v^2-4u}}{2} \\ y = \dfrac{v - \sqrt{v^2-4u}}{2} \end{array}\right. ,$$

ce qui implique bien que φ établit une bijection de D sur D'.

2. On déduit immédiatement de la question précédente que φ et φ^{-1} sont de classe C^1 sur D et D' respectivement, donc que φ définit un changement de variables admissible de D sur D'.

3. Pour la résoudre (E) sur D, on effectue le changement de variables :

$$\varphi : (x, y) \mapsto (u, v) \text{ avec } u = xy \text{ et } v = x + y.$$

On pose donc $f(x, y) = F(xy, x+y)$, c'est-à-dire $f = F \circ \varphi$.
On trouve alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = y\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}$$

et :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = x\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} x\tfrac{\partial f}{\partial x} - y\tfrac{\partial f}{\partial y} = xy(x-y) \quad &\Leftrightarrow \quad (x-y)\frac{\partial F}{\partial v} = xy(x-y) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial v} = u \qquad (\text{car } x - y \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \quad F(u, v) = uv + C(u) \end{aligned}$$

où C est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
On a ainsi obtenu :

$$f(x, y) = xy(x+y) + C(xy).$$