CB n°2 - Intégrales généralisées - Sujet 1

EXERCICE 1
Justifier que

$$\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$$

converge et la calculer.

EXERCICE 2
Justifier que

$$\int_0^{+\infty} \sin^2(t)\mathrm{d}t$$

diverge.

EXERCICE 3

1. Justifier, sans la calculer, la convergence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan(t)}}{t^2}\mathrm{d}t$$

2. Calculer alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan(t)}}{t^2}\mathrm{d}t$$

à l'aide d'une intégration par parties. On admettra que $\forall t \neq 0,\ \dfrac{1}{t(t^2+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{t^2+1}$.

EXERCICE 4
Soit

$$I = \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t$$

1. Justifier que I converge.

2. A l'aide du changement de variable $t = \mathrm{e}^{-x}$, montrer, après l'avoir justifié soigneusement, que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(x)}{1+2\,\mathrm{sh}^2(x)}\mathrm{d}x$$

On rappelle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \textbf{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

3. En déduire I.

CB n°2 - Intégrales généralisées - Sujet 2

EXERCICE 1
Soit $a > 0$. Justifier que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t$$

converge et la calculer.

EXERCICE 2
Justifier que

$$\int_0^{+\infty} \cos^2(t)\mathrm{d}t$$

diverge.

EXERCICE 3

1. Justifier, sans la calculer, la convergence de

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

2. Calculer alors

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

à l'aide d'une intégration par parties.

EXERCICE 4
Soit

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

1. Justifier que I converge.

2. A l'aide du changement de variable $x = \mathrm{e}^t$, montrer, après l'avoir justifié soigneusement, que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(t)}{1+2\,\mathrm{sh}^2(t)}\mathrm{d}t$$

On rappelle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(t) = \frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2} \quad \textbf{et} \quad \mathrm{sh}(t) = \frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}$$

3. En déduire I.