# CB N°8 - FONCTIONS A PLUSIEURS VARIABLES - SUJET 1

## Exercice 1

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^3+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

**1.** Montrer que la fonction $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^2$.
D'après les théorèmes généraux, $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$, et pour $(x,y) \neq (0,0)$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2y^4}{(x^3+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2yx^6}{(x^3+y^2)^2}$$

En $(0,0)$, on a : $\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$
On en déduit que $f$ admet des dérivées partielles par rapport à ses deux variables en $(0,0)$ qui sont nulles.
On a de plus, pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$ :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = \frac{3\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} y^4}{\left(\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2 + y^2\right)^2} \leq 3\left\|\left(x^{\frac{3}{2}}, y\right)\right\|^{\frac{4}{3}} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = \frac{2\left|x^{\frac{3}{2}}\right|^4 |y|}{\left(\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2 + y^2\right)^2} \leq 2\left\|\left(x^{\frac{3}{2}}, y\right)\right\| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^2$.

**2.** La fonction $f$ est-elle de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}_+^2$ ?
On a : $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ . On en déduit que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$ existe et vaut 0.
D'autre part, pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{2x^9 - 6x^6y^2}{(x^3+y^2)^3}$ ;
Ainsi, pour $t \neq 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,0) = 2 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 2 \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$
On en déduit que $f$ n'est pas de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}_+^2$.

## Exercice 2

Etudier les extrema locaux de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + \dfrac{1}{3}y^3 + 3x^2y + y^2x - x - y$, et préciser si les éventuels extrema sont globaux.
$f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale en ses variables.
Ses points critiques sont : $A_1 = (0,1)$, $A_2 = (0,-1)$, $A_3 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$, $A_4 = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right)$.
On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ : $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+6y & 6x+2y \\ 6x+2y & 2x+2y \end{pmatrix}$.
$\det(H_f(A_1)) > 0$ et $\mathrm{tr}(H_f(A_1)) > 0$ donc $f$ admet un minimum local en $A_1$ ;
$\det(H_f(A_2)) > 0$ et $\mathrm{tr}(H_f(A_2)) < 0$ donc $f$ admet un maximum local en $A_2$ ;
$\det(H_f(A_3)) < 0$ donc $A_3$ est un point col ;
$\det(H_f(A_4)) < 0$ donc $A_4$ est un point col ;
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x,0) = \pm\infty$ donc les extrema ne sont pas globaux.

**Exercice 3**

Résoudre sur $U \subset \mathbb{R}^2$ (que l'on n'explicitera pas) l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y^2,$$

à l'aide du changement de variable $(u = xy, v = x - y)$.
On pose $f(x,y) = g(u,v)$ ; on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\dfrac{\partial g}{\partial u} - \dfrac{\partial g}{\partial v}$.
Ainsi, après changement de variable l'équation devient :

$$\frac{\partial g}{\partial v} = v$$

On en déduit les solutions sur $U$ : $(x,y) \mapsto \dfrac{(x-y)^2}{2} + K(xy)$, où $K$ est une fonction de classe $C^1$ sur son domaine.

---

# CB N°8 - FONCTIONS A PLUSIEURS VARIABLES - SUJET 2

**Exercice 1**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^3} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

**1.** Montrer que la fonction $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^2$.

**2.** La fonction $f$ est-elle de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}_+^2$ ?

On obtient les réponses en échangeant $x$ et $y$ dans l'exercice 1 du sujet 1.

**Exercice 2**

Etudier les extrema locaux de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy^2 - 2x^2y - 3x + 3y$, et préciser si les éventuels extrema sont globaux.
$f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale en ses variables.
Ses points critiques sont : $A_1 = (0,1), A_2 = (0,-1), A_3 = \left(2\sqrt{\dfrac{3}{23}}, -\sqrt{\dfrac{3}{23}}\right), A_4 = \left(-2\sqrt{\dfrac{3}{23}}, \sqrt{\dfrac{3}{23}}\right)$.
On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ : $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-4y & -4x+6y \\ -4x+6y & 6x-6y \end{pmatrix}$.
$\det(H_f(A_1)) < 0$ donc $A_1$ est un point col ;
$\det(H_f(A_2)) < 0$ donc $A_2$ est un point col ;
$\det(H_f(A_3)) > 0$ et $\mathrm{tr}(H_f(A_3)) > 0$ donc $f$ admet un minimum local en $A_3$ ;
$\det(H_f(A_4)) > 0$ et $\mathrm{tr}(H_f(A_4)) < 0$ donc $f$ admet un maximum local en $A_4$ ;
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x,0) = \pm\infty$ donc les extrema ne sont pas globaux.

**Exercice 3**

Résoudre sur $U \subset \mathbb{R}^2$ (que l'on n'explicitera pas) l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2,$$

à l'aide du changement de variable $(u = xy, v = x)$.

On pose $f(x, y) = g(u, v)$ ; on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\dfrac{\partial g}{\partial u}$.
Ainsi, après changement de variable l'équation devient :

$$\frac{\partial g}{\partial v} = v$$

On en déduit les solutions sur $U$ : $(x, y) \mapsto \dfrac{x^2}{2} + K(xy)$, où $K$ est une fonction de classe $C^1$ sur son domaine.