CB n°6 - ISOMETRIES - CONIQUES - Sujet 1

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui, dans la base canonique ont pour matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A est la matrice de la rotation d'axe $\text{Vect}\{(1,-1,1)\}$, d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B est la matrice de la composée de la réflexion par rapport au plan d'équation $x - y + z = 0$ et de la rotation d'axe $\text{Vect}\{(1,-1,1)\}$ d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

2. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion par rapport au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + z = 0$.

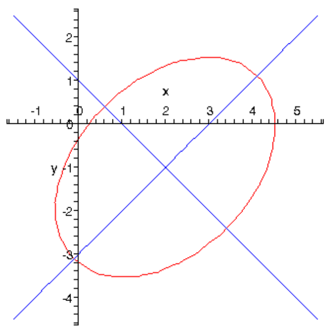
$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer la nature des coniques suivantes, et les représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

a. $13x^2 + 13y^2 - 62x + 46y - 10xy + 13 = 0$

C'est une ellipse de centre Ω de coordonnées $(2,-1)$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$, l'équation de l'ellipse est

$$\frac{1}{9}X^2 + \frac{1}{4}Y^2 = 1$$

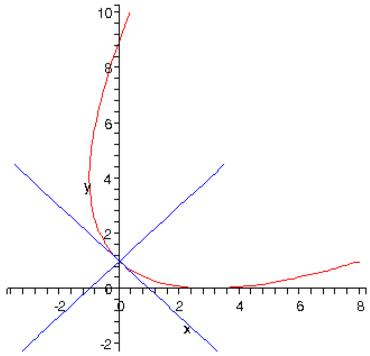


b. $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$

C'est une parabole. Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$, le sommet de la parabole S a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ce qui correspond aux coordonnées $(0, 1)$ dans le repère initial.

Dans le repère $(S, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation de la parabole est

$$X^2 = 4\sqrt{2}Y$$



CB n°6 - ISOMETRIES - CONIQUES - Sujet 2

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui, dans la base canonique ont pour matrice :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

A est la matrice de la composée de la réflexion par rapport au plan d'équation $x - y = 0$ et de la rotation d'axe $\text{Vect}\{(1,-1,0)\}$ d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

B est la matrice de la rotation d'axe $\text{Vect}\{(0,2,1)\}$, d'angle $\text{Arccos}\left(-\frac{2}{3}\right)$.

2. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion par rapport au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y = 0$.

$$M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer la nature des coniques suivantes, et les représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

a. $3x^2 + 3y^2 + 26x + 22y + 10xy + 43 = 0$

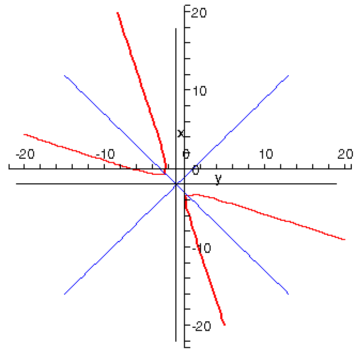
C'est une hyperbole de centre Ω de coordonnées $(-1,-2)$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$, l'équation de l'hyperbole est

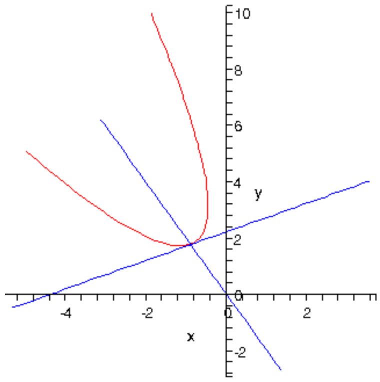
$$\frac{1}{4}Y^2 - X^2 = 1$$

b. $4x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y + 10 = 0$

C'est une parabole. Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{\imath} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}$, le sommet de la parabole S a pour coordonnées $(0,2)$, ce qui correspond aux coordonnées $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ dans le repère initial.
Dans le repère $(S, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation de la parabole est

$$X^2 = Y$$


20
10
x
-20
-10
0
10
20
0
y
-10
-20


10
8
6
4
y
2
0
-4
-2
0
2
x
-2