- CC1-S2 - - 2020-2021 -

– Correction - Analyse –

EXERCICE 1

On cherche les fonctions $g:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, vérifiant :

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = a \ , \qquad a \in \mathbb{R}$$

1. On note $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(u,v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$. Montrer que

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{a}{2}$$

Par le théorème de composition, g étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ ainsi que $(u,v) \mapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$, on a :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)\frac{1}{2} + \frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{a}{2}$$

puisque g est solution sur $\mathbb{R}^2$ de $\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = a$.

2. En déduire les solutions de l'équation initiale.

$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{a}{2} \iff \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ f(u,v) = \frac{a}{2}u + \lambda(v)$ où $\lambda \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On peut donc conclure que g est solution de $\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = a$ si, et seulement si, $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) = \frac{a}{2}u + \lambda(v)$ où $\lambda \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Comme $\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$, on peut conclure que l'ensemble des solutions de l'équation $\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = a$ est

$$\left\{(x,y) \mapsto \ \frac{a}{2}(x+y) + \lambda(x-y),\ \lambda \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\right\}$$

EXERCICE 2

1. a. $\boxed{\textbf{Convergence}}$

On pose $J_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

i. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad t^n \mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Résulte du théorème des croissances comparées.

ii. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale J_n est convergente.

$t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc localement intégrable et $t^n \mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc, comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge (Riemann), on conclut par comparaison que J_n converge absolument, donc converge.

iii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.
Le changement de variable $u = -t$ (C^1, bijectif et strictement décroissant sur $\mathbb{R}$) transforme J_n en une intégrale de même nature, c'est à dire convergente ;
de plus on a l'égalité $J_n = \displaystyle\int_0^{-\infty} (-u)^n \mathrm{e}^{-u^2}(-\mathrm{d}u) = (-1)^n \int_{-\infty}^0 u^n \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u$.
En conséquence, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 u^n \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u$ converge, puis par somme, I_n converge.
On peut par ailleurs écrire que $I_n = ((-1)^n + 1)\, J_n$.

iv. En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est convergente.
$\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\exists p \in \mathbb{N}, (a_k)_{k\in[\![0,p]\!]} \in \mathbb{R}^{p+1}$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et, de ce qui précède, $\forall k \in [\![0,p]\!]$, I_k est convergente. On en déduit que par combinaison linéaire, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k I_k$ converge, ou encore $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est convergente.

b. $\boxed{\textbf{Calcul}}$

Pour la suite, on admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

i. Établir à l'aide d'une intégration par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2} I_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $u : t \mapsto t^{n+1}$ et $v : t \mapsto -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}$.
u, v sont C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc, d'après le théorème d'intégrations par parties : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+1}\, t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{n+1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$, soit encore

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$$

ii. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\quad I_{2p+1} = 0$.
Résulte de l'imparité de la fonction $t \mapsto t^{2p+1}\mathrm{e}^{-t^2}$ ou de $a)iii)$.

iii. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\quad I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$.
Une récurrence immédiate donne le résultat attendu à partir du $i)$, en notant que $I_0 = \sqrt{\pi}$.

2. $\boxed{\textbf{Recherche des extrema}}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

a. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}^2$ et que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad F(x,y) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}(x^2+4xy+y^2) + x^2y^2$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En posant $P = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}(X-x)^2(X-y)^2$ alors d'après $1)a)iv)$, F est bien définie sur $\mathbb{R}^2$.
De plus, $P = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(X^4 - (2x+2y)X^3 + (x^2+4xy+y^2)X^2 - (2x^2y+2xy^2)X + x^2y^2\right)$ donc, toujours d'après $1)a)iv)$, $F(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(I_4 - (2x+2y)I_3 + (x^2+4xy+y^2)I_2 - (2x^2y+2xy^2)I_1 + x^2y^2 I_0\right)$.
Enfin, en tenant compte de $1)b)$, on trouve bien

$$F(x,y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(x^2+4xy+y^2\right) + x^2y^2$$

b. Montrer que F possède trois points critiques sur $\mathbb{R}^2$ qui sont $(0,0)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Puisque F est polynomiale en les composantes de (x,y), on en déduit que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi le gradient et la matrice hessienne de f existent en tous points de $\mathbb{R}^2$.
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{\mathrm{Grad}}(F)(x,y) = (x+2y+2xy^2, y+2x+2yx^2)$ et

$$\overrightarrow{\mathrm{Grad}}(F)(x,y) = \overrightarrow{0} \iff \left\{ \begin{array}{l} x+2y+2xy^2 = 0 \\ y+2x+2yx^2 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x+2y+2xy^2 = 0 \\ (y-x)(1+2xy) = 0 \end{array} \right. .$$

Donc $\overrightarrow{\mathrm{Grad}}(F)(x,y) = \overrightarrow{0} \iff \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ 3x+2x^3 = 0 \end{array} \right.$ ou $\left\{ \begin{array}{l} 2xy = -1 \\ x+y = 0 \end{array} \right.$.

En conclusion, F admet 3 points critiques sur $\mathbb{R}^2$ qui sont bien $(0,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

c. Déterminer, lorsqu'ils existent, les extremum locaux de F sur $\mathbb{R}^2$.

La matrice hessienne de F en (x,y) est $H_F(x,y) = \begin{pmatrix} 1+2y^2 & 2+4xy \\ 2+4xy & 1+2x^2 \end{pmatrix}$. Dès lors :

$\rightsquigarrow$ $\det(H_F(0,0)) = -3 < 0$, donc F admet un point col en $(0,0)$.

$\rightsquigarrow$ $\det\left(H_F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = 4 > 0$ et $\mathrm{Tr}\left(H_F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = 4 > 0$, donc F admet un minimum local en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$\rightsquigarrow$ $F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ donc le point $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est de même nature que le précédent.

Une remarque pour terminer : $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$ et

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} + xy\right)^2 + \frac{1}{2}(x+y)^2 \geq 0$, ce qui fait que ce minimum est global.