CB N°7 - ISOMETRIES - SUJET 1

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ admettant pour matrices dans la base canonique :

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

A est la matrice de la réflexion par rapport au plan d'équation $2x + y = 0$

B est la matrice de la composée de la réflexion par rapport au plan d'équation $x + y + z = 0$ et de la rotation d'axe $\mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$ et d'angle $\dfrac{-2\pi}{3}$.

2. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la composée de la rotation d'axe $\mathrm{Vect}\{(1,-1,1)\}$, d'angle $\dfrac{-\pi}{3}$, et de la réflexion par rapport au plan d'équation $x - y + z = 0$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CB N°7 - ISOMETRIES - SUJET 2

a. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ admettant pour matrices dans la base canonique :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

A est la matrice de la rotation d'axe $\mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$ d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

B est la matrice de la réflexion par rapport au plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$.

b. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la composée de la rotation d'axe $\mathrm{Vect}\{(1,-1,0)\}$, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, et de la réflexion par rapport au plan d'équation $x - y = 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$