⋆ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse ⋆

Math. - CC 2 - S1 - Analyse

vendredi 4 décembre 2020 - Durée 1 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

PARTIE 1

Dans cette partie, α désigne un réel quelconque.

1. A l'aide de la règle de d'Alembert, déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$.

On notera R_α ce nombre et f_α la somme de la série entière, c'est-à-dire pour tout $x \in]-R_\alpha, R_\alpha[$:

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

2. Justifier que f_α est de classe C^∞ sur $]-R_\alpha, R_\alpha[$.

3. Montrer que pour tout $x \in]-R_\alpha, R_\alpha[$, $f_\alpha(x) + f_\alpha(-x) = 2^{1-\alpha} f_\alpha(x^2)$.

4. Etablir une relation entre $f'_{\alpha+1}(x)$ et $f_\alpha(x)$, pour tout $x \in]-R_\alpha, R_\alpha[$.

5. Justifier que pour tout réel $x \in]-R_\alpha, R_\alpha[$:

$$f_{\alpha+1}(x) = \int_0^x \frac{f_\alpha(t)}{t} \mathrm{d}t$$

6. Expliciter f_0 et retrouver f_1 et f_{-1} en utilisant les résultats établis dans les questions précédentes.

PARTIE 2

Dans cette partie $\alpha = 2$, et on note $f_2 = S$.

1. Justifier que S est définie sur $[-1, 1]$.

2. On considère la fonction φ définie sur $]0, 1[$ par

$$\varphi(x) = S(x) + S(1-x) + \ln(x)\ \ln(1-x)$$

a. Justifier que φ est de classe C^1 sur $]0, 1[$.

b. Calculer $S'(x)$ pour $x \in]0, 1[$.

c. En déduire que φ est constante sur $]0, 1[$.

3. Pour $x \in [0, 1]$, et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2}$.

a. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], |S(x) - S_N(x)| < \varepsilon$.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in [1-r, 1], |S_n(x) - S_n(1)| < \varepsilon$.

c. Déduire des deux questions précédentes que S est continue en 1.

4. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[, \varphi(x) = S(1)$.

5. En admettant que $S(1) = \frac{\pi^2}{6}$, en déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$.

Fin de l'énoncé d'analyse