CB n° 10 - FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES - Sujet 1

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textbf{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2)$.

a. Montrer que f admet 4 points critiques.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. En calculant $f(x,x)$, montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

c. Montrer que f admet un minimum local en $(4,0)$.

3. Déterminer, à l'aide du changement de variable $(u,v) = \left(x, \dfrac{y}{x}\right)$, toutes les fonctions $f \in C^1\left(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$ telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x}$$

CB n°10 - FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES - Sujet 2

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2} & \textbf{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textbf{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Montrer que f est $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$.

a. Montrer que f admet 3 points critiques. (On admettra que $x^3 + y^3 = 0 \iff x + y = 0$)

b. En calculant $f(x,x)$ et $f(x,0)$, montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

c. Montrer que f admet un minimum local en $(2,-2)$.

3. Déterminer, à l'aide du changement de variable $(u,v) = (x+y, xy)$, toutes les fonctions $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y^2$$