⋆ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse ⋆

Math. - CC 2 - S2 - Analyse

vendredi 21 avril 2017 - Durée 1 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

On considère l'application g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g : (x,t) \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)} & \text{si } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. a. La fonction g est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

b. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g par rapport à chacune de ses variables sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

2. On considère la fonction réelle F définie par :

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} g(x,t)\mathrm{d}t$$

a. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

c. Former une équation différentielle vérifiée par F sur $]0,+\infty[$.

d. En déduire une expression simple de $F(x)$ pour tout réel x. On donne : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Exercice 2

On considère l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = xy(x-y) \quad \cdots \quad (E)$$

1. Montrer que l'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (u,v) = (xy, x+y) \end{array} \right.$ établit une bijection de l'ensemble $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > y\}$ sur $D' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ v^2 > 4u\}$.

2. Justifier que φ définit un changement de variables admissible de D sur D' (c'est-à-dire que φ est une bijection de D sur D' avec φ et φ^{-1} de classe C^1 sur D et D' respectivement).

3. En déduire les solutions de E définies sur D.

Fin de l'énoncé d'analyse