CB n°1 - Compléments d'algèbre linéaire - Sujet 1

1. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer la nature des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à A et B, ainsi que leurs éléments caractéristiques.

$A^2 = I_3$ donc A est la matrice de la symétrie s par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\{(2,0,1)\}$.

$B^2 = B$ donc B est la matrice de la projection p sur $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\{(1,2,2),(1,0,1)\}$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$.

2. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$, $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = 0 \text{ et } y = z\}$

a. Déterminer des bases de F et de G.
$F = \mathrm{Vect}\{(1,1,0),(-1,0,1)\}$, et $G = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$.

b. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
On note $f_1 = (1,1,0)$, $f_2 = (-1,0,1)$ et $g = (1,1,1)$.
La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
On en déduit que la famille (f_1, f_2, g) est libre, de cardinal 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$; F et G sont supplémentaires.

c. Donner la matrice dans la base canonique de la projection sur F parallèlement à G.

$$A = P\mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,g)}(p)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

CB N°1 - Compléments d'algèbre linéaire - Sujet 2

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer la nature des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à A et B, ainsi que leurs éléments caractéristiques.

$A^2 = A$ donc A est la matrice de la projection p sur $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\{(1,0,1),(2,1,1)\}$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}\{(2,0,1)\}$.

$B^2 = I_3$ donc B est la matrice de la symétrie s par rapport à $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$.

2. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+2y-z=0\}$, $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y-2z=0 \text{ et } x=y\}$.

a. Déterminer des bases de F et de G.

$F = \mathrm{Vect}\{(1,0,1),(0,1,2)\}$, et $G = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$.

b. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

On note $f_1 = (1,0,1)$, $f_2 = (0,1,2)$ et $g = (1,1,1)$.

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On en déduit que la famille (f_1, f_2, g) est libre, de cardinal 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$; F et G sont supplémentaires.

c. Donner la matrice dans la base canonique de la symétrie par rapport à F, parallèlement à G.

$$A = P\mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,g)}(s)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$