- CC1-S1 - - 2020-2021 -

– Correction - Analyse –

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul et (H_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. a. A l'aide d'une comparaison somme/intégrale, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$$

La fonction inverse étant décroissante sur $]0, +\infty[$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Ainsi, par la relation de Chasles, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_{n+1} - 1 \leq \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq H_n$.

On conclut que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$.

b. En déduire un équivalent de H_n au voisinage de $+\infty$.

On déduit du résultat précédent que pour $n \geq 2$, $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \dfrac{H_n}{\ln(n)} \leq \dfrac{1+\ln(n)}{\ln(n)}$.

Comme $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\dfrac{1+\ln(n)}{\ln(n)} = \dfrac{1}{\ln(n)} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$, puis que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

2. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

a. Montrer que la série de terme général u_n est convergente. On note γ sa somme.

On a $u_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2}\right) + \circ\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et donc $u_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.

Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum u_n$ converge, par comparaison de séries positives.

b. En déduire que :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \circ(1)$$

On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \gamma$, ce qu'on peut écrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + \circ(1)$.

Mais $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = H_n - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \underset{\text{téléscopage}}{=} H_n - \ln(n+1) = H_n - \ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$, on a alors $H_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + \circ(1)$

On conclut que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \circ(1)$.

EXERCICE 2

Soit a un réel strictement positif.

1. Montrer la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx$$

$x \mapsto \dfrac{\sin(ax)}{e^x - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc localement intégrable sur cet intervalle.

- En 0 : $\dfrac{\sin(ax)}{e^x - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{ax}{x} = a$, par conséquent, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx$ est faussement impropre donc converge.
- En $+\infty$: $\forall x \geq 1$, $\left|\dfrac{\sin(ax)}{e^x - 1}\right| \leq \dfrac{1}{e^x - 1} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}(e^x - 2)} \leq \dfrac{2}{e^x} = 2e^{-x}$.

  Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ est une intégrale de référence convergente, donc par comparaison $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx$ converge absolument, donc elle converge.

On peut alors conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx$ converge.
On a même montré que cette intégrale converge absolument.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kx} \sin(ax) dx$.
Démontrer que cette intégrale converge, et que :

$$J_k = \frac{a}{a^2 + k^2}$$

$x \mapsto e^{-kx}\sin(ax)$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc localement intégrable sur cet intervalle.
$\forall x \geq 0$, $\left|e^{-kx}\sin(ax)\right| \leq e^{-kx}$. Or, pour $k > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx$ est une intégrale de référence convergente, donc par comparaison $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kx}\sin(ax) dx$ converge absolument, donc elle converge.
De plus, pour $t \in [0, +\infty[$:

$$\int_0^t e^{-kx}\sin(ax) dx = \operatorname{Im}\left(\int_0^t e^{(-k+ia)x} dx\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{-k+ia}\left(e^{(-k+ia)t} - 1\right)\right)$$
$$= \frac{1}{k^2 + a^2}\left(e^{-kt}\left(-a\cos(at) - k\sin(at)\right) + a\right) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{k^2 + a^2}$$

(produit d'une fonction de limite nulle par une fonction bornée).

On obtient $J_k = \dfrac{a}{k^2 + a^2}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $R_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{a}{a^2 + (k+1)^2}$.
Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} e^{-(n+1)x} dx$$

Par linéarité des intégrales généralisées, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a}{a^2 + (k+1)^2} = \sum_{k=0}^{n} J_{k+1} = \int_0^{+\infty} \sin(ax)\left(\sum_{k=0}^{n} e^{-(k+1)x}\right) dx.$$

Comme on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{-(k+1)x} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{-x}\right)^{k+1} \underset{x\neq 0}{=} e^{-x}\frac{1 - \left(e^{-x}\right)^{n+1}}{1 - e^{-x}} = \frac{1 - \left(e^{-x}\right)^{n+1}}{e^x - 1}$,
on en déduit, toujours par linéarité des intégrales généralisées que

$$R_n = \int_0^{+\infty} \sin(ax)\left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1 - \left(e^{-x}\right)^{n+1}}{e^x - 1}\right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} e^{-(n+1)x} dx.$$

4. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(ax)}{e^x - 1}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme dit en 1., $x \mapsto \dfrac{\sin(ax)}{e^x - 1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et elle est prolongeable par continuité en 0 donc bornée sur $]0, 1]$. On a aussi montré que $\forall x \geq 1$, $\left|\dfrac{\sin(ax)}{e^x - 1}\right| \leq 2e^{-x} \leq 2$. On peut donc conclure que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(ax)}{e^x - 1}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

On note désormais M un majorant de la fonction $x \mapsto \left|\dfrac{\sin(ax)}{e^x - 1}\right|$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. A l'aide d'une majoration de l'intégrale de la question **3.**, en déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + (k+1)^2}$$

Tout d'abord, on a pour tout $x \geq 0$: $0 \leq \left|\dfrac{\sin(ax)}{e^x - 1} e^{-(n+1)x}\right| \leq \left|\dfrac{\sin(ax)}{e^x - 1}\right|$.

Par comparaison, le résultat établi à la question 1. permet d'en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} e^{-(n+1)x} dx$ est absolument convergente.

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} dx$ est une intégrale de référence convergente, on a de plus :

$|R_n| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(ax)}{e^x - 1} e^{-(n+1)x}\right| dx \leq \int_0^{+\infty} M e^{-(n+1)x} dx = M \left[\frac{-1}{n+1} e^{-(n+1)x}\right]_0^{+\infty} = \frac{M}{n+1}$.

Par le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} R_n = 0$. Ce que l'on peut écrire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a}{a^2 + (k+1)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx$.

On conclut que $\sum J_n$ converge (ce que l'on pouvait montrer directement à l'aide d'un équivalent) mais aussi que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + (k+1)^2}$$