- CC1-S2 - - 2020-2021 -

– CORRECTION - GÉOMÉTRIE –

EXERCICE 1

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère l'hyperbole H d'équation $xy = 1$.
Pour un point M de H, la normale en M à H recoupe H en un point N.

1. Déterminer le repère de Frenet au point M de H.

Une représentation paramétrique de H est $\varphi : t \mapsto \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \dfrac{1}{t} \end{cases}$, $t \neq 0$.

On a $\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = -\dfrac{1}{t^2} \end{cases}$ et par suite : $\|\varphi'(t)\| = \dfrac{\sqrt{t^4+1}}{t^2}$ puis

$$\overrightarrow{T} \begin{pmatrix} \dfrac{t^2}{\sqrt{t^4+1}} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{t^4+1}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{N} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} \\ \dfrac{t^2}{\sqrt{t^4+1}} \end{pmatrix}$$

2. Calculer la courbure en M.

Si on note α l'inclinaison, on a : $\tan\alpha = \dfrac{y'}{x'} = -\dfrac{1}{t^2}$ puis, $(1+\tan^2\alpha)\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2}{t^3}$.

Enfin, $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \dfrac{2t^3}{(t^4+1)^{\frac{3}{2}}}$.

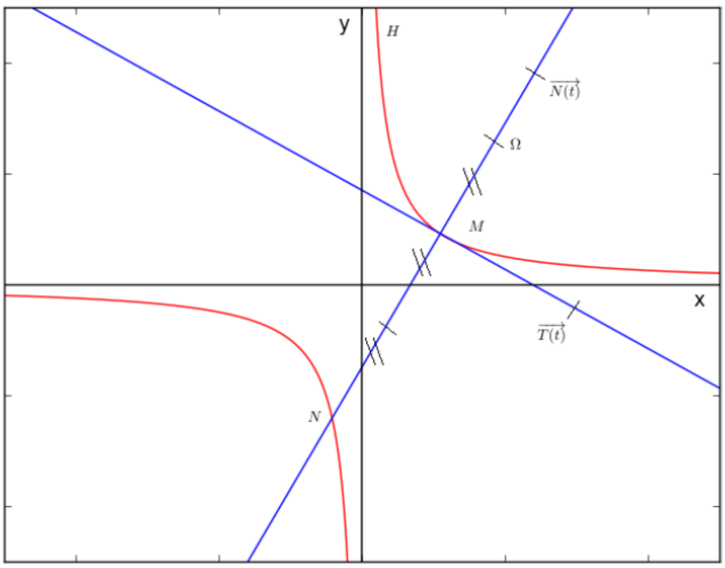
3. Déterminer les coordonnées de Ω, centre de courbure en M de H.

On a : $\Omega = M + R\overrightarrow{N}$, d'où : $\Omega \left| \begin{array}{l} \dfrac{3t^4+1}{2t^3} \\ \dfrac{t^4+3}{2t} \end{array} \right.$

4. Montrer que $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{M\Omega}$ et en déduire une construction graphique simple du centre de courbure.

Considérons le point $P = M - 2\overrightarrow{M\Omega}$. On a : $P \left| \begin{array}{l} -\dfrac{1}{t^3} \\ -t^3 \end{array} \right.$.

On en déduit que P est un point de H et comme de plus, $\overrightarrow{MP}$ est colinéaire à $\overrightarrow{M\Omega}$, c'est un point de la normale à H en M.
Comme il est différent de M, c'est le point N et on a bien $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{M\Omega}$.



EXERCICE 2

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on note $\mathscr{C}$ la conique d'équation

$$9x^2 + 16y^2 - 24xy + 20x - 110y + 50 = 0$$

1. Donner l'équation réduite de $\mathscr{C}$ dans un repère $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ que l'on précisera.

Soient $S = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 20 & -110 \end{pmatrix}$, et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
L'équation de la conique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ s'écrit : ${}^tXSX + LX + 50 = 0$.
La matrice S a pour déterminant 0, la conique est donc du type parabole.
0 étant une valeur propre de S, l'autre valeur propre est $\mathrm{tr}(S)$, c'est-à-dire 25.
Un vecteur propre associé à la valeur propre 0, est $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
On note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de coordonnées respectives $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ et $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$,
P la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v})$, et $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = {}^tPX$.
L'équation devient :

$$ {}^tX_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} X_1 + LPX_1 + 50 = 0$$

c'est-à-dire que l'équation de la parabole dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est : $25y_1^2 - 50x_1 - 100y_1 + 50 = 0$, ce qui s'écrit également

$$(y_1 - 2)^2 = 2(x_1 + 1)$$

On en déduit que le sommet Ω de la parabole a pour coordonnées $(-1, 2)$, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, et que l'équation réduite de la parabole dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est

$$Y^2 = 2X$$

2. Justifier que dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ la courbe $\mathscr{C}$ admet l'une des représentations paramétriques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \dfrac{t^2}{2} \\ y(t) = t \end{array} \right. \qquad \text{ou} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2} \end{array} \right.$$

Dans $(S, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $\mathscr{C}$ admet pour représentation paramétrique $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \dfrac{t^2}{2} \\ y(t) = t \end{array} \right.$

*On prendra dans la suite la représentation paramétrique qui correspond au repère $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ choisi à la question **1**.*

3. Déterminer la famille des normales à $\mathscr{C}$, notées $(N_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Un point de coordonnées (x, y) est sur N_t si et seulement si : $\begin{vmatrix} x - \dfrac{t^2}{2} & -y'(t) \\ y - t & x'(t) \end{vmatrix} = 0\,;$

On en déduit l'équation de (N_t) : $tx + y - \dfrac{t^3}{2} - t = 0$

4. a. Déterminer l'enveloppe $\mathscr{E}$ de $(N_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Un point de coordonnées (x, y) est sur $\mathscr{E}$ si, et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} tx + y - \dfrac{t^3}{2} - t = 0 \\ x - \dfrac{3}{2}t^2 - 1 = 0 \end{array} \right.$.

On en déduit la représentation paramétrique de $\mathscr{E}$: $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \dfrac{3}{2}t^2 \\ y = -t^3 \end{array} \right.$

b. Qu'a-t-on ainsi trouvé ?
On a déterminé l'enveloppe des normales à $\mathscr{C}$, c'est-à-dire la développée.

5. Déterminer le rayon de courbure de $\mathscr{C}$, et retrouver le résultat précédent.

En notant φ l'arc paramétré, on a : $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{1+t^2}$.

On note α l'inclinaison. On a : $\tan\alpha = \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{1}{t}$, puis $(1+\tan^2\alpha)\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{t^2}$.

Enfin, $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \dfrac{-1}{t^2\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{-1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Finalement, le rayon de courbure est $R = \dfrac{1}{\gamma} = -(t^2+1)^{\frac{3}{2}}$.

Les centres de courbures sont donc $\Omega = M + R\overrightarrow{N} \left| \begin{array}{l} 1+\dfrac{3}{2}t^2 \\ -t^3 \end{array}\right.$

6. Déterminer l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{E}$.

On a : $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{t^2}{2} = 1 + \dfrac{3}{2}u^2 \\ t = -u^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u^6 - 3u^2 - 2 = 0 \\ t = -u^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (u^2)^3 - 3(u^2) - 2 = 0 \\ t = -u^3 \end{array}\right.$

-1 est solution évidente de l'équation $X^3 - 3X - 2 = 0$ on en déduit que

$X^3 - 3X - 2 = (X+1)(X^2 - X - 2) = (X+1)^2(X-2)$, et donc $\left\{ \begin{array}{l} u = \pm\sqrt{2} \\ t = \mp 2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Les points d'intersection $\mathscr{C}$ et $\mathscr{E}$ sont donc $A \left| \begin{array}{l} 4 \\ 2\sqrt{2} \end{array}\right.$ et $B \left| \begin{array}{l} 4 \\ -2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

7. Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{E}$ dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.