CB n°2 - Séries numériques - Intégrales généralisées - Sujet 1

EXERCICE 1

Convergence et calcul des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2}$

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3x+2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc localement intégrable.

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, donc par comparaison à une intégrale de Riemann positive convergente, f est intégrable sur $[1,+\infty[$. Par suite, f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x = \left[\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right]_0^{+\infty} = \ln(2).$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2\mathrm{e}^x+3}$

$f : x \mapsto \dfrac{1}{2\mathrm{e}^x+3}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc localement intégrable.

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$, donc par comparaison à une intégrale de référence positive convergente, f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2\mathrm{e}^x+3} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2+3\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}\ln(2+3\mathrm{e}^{-x})\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{2}\right).$

Remarque :

On peut également calculer cette intégrale en effectuant le changement de variable $t = \mathrm{e}^x$:

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2\mathrm{e}^x+3} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(2t+3)} = \frac{1}{3}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{2}{2t+3}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{t}{2t+3}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{2}\right).$

EXERCICE 2

Convergence et somme des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Pour tout $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$, on a, par télescopage :

$\displaystyle\sum_{n=2}^{p} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{p} ((\ln(n+1) - \ln(n)) - ((\ln(n) - \ln(n-1))) = \ln(p+1) - \ln(p) - \ln(2).$

$\displaystyle\lim_{p\to+\infty} (\ln(p+1) - \ln(p)) = \lim_{p\to+\infty} \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) = 0$, donc par passage à la limite, on obtient la convergence de la série, et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2).$

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{-n+2}{n!}$, sachant que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :
$\displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{-n+2}{n!} = \sum_{n=0}^{p} \frac{-n}{n!} + \sum_{n=0}^{p} \frac{2}{n!} = \sum_{n=1}^{p} \frac{-1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{p} \frac{2}{n!} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{-1}{k!} + \sum_{n=0}^{p} \frac{2}{n!}$.
Par passage à la limite, on obtient la convergence de la série et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-n+2}{n!} = -\mathrm{e} + 2\mathrm{e} = \mathrm{e}$.

EXERCICE 3

On considère la fonction
$$f : t \mapsto \frac{\ln t}{(1+t)^2}$$

1. Justifier que f est intégrable sur $[1, +\infty[$.
f est continue sur $[1, +\infty[$, donc localement intégrable.
Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{3}{2}} f(t) = 0$ donc $f(t) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$. Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

2. Calculer
$$\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

On pose $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \dfrac{-1}{1+t}$; u et v sont de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ (par croissances comparées).
Sachant que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge, le théorème d'intégration par parties donne :
$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{\ln(t)}{1+t}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \left[\ln\left(\frac{t}{1+t}\right)\right]_1^{+\infty} = \ln(2)$.

CB N°2 - Séries numériques - Intégrales généralisées - Sujet 2

EXERCICE 1

Convergence et calcul des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+10}$

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+10}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc localement intégrable.

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, donc par comparaison à une intégrale de Riemann positive convergente, f est intégrable sur $[1,+\infty[$. Par suite, f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+10} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+9} = \left[\frac{1}{3}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+1}{3}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right).$$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{3\mathrm{e}^x+2}$

$f : x \mapsto \dfrac{1}{3\mathrm{e}^x+2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc localement intégrable.

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{3}$, donc par comparaison à une intégrale de référence positive convergente, f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{3\mathrm{e}^x+2} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{3+2\mathrm{e}^{-x}} = \left[-\frac{1}{2}\ln(3+2\mathrm{e}^{-x})\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

Remarque :

On peut également calculer cette intégrale en effectuant le changement de variable $t = \mathrm{e}^x$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{3\mathrm{e}^x+2} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(3t+2)} = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{3}{3t+2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{t}{3t+2}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

EXERCICE 2

Convergence et somme des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)$

Pour tout $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$, on a, par télescopage :

$$\sum_{n=2}^{p} \ln\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right) = \sum_{n=2}^{p} ((\ln(n) - \ln(n+1)) - ((\ln(n-1) - \ln(n))) = \ln(p) - \ln(p+1) + \ln(2).$$

$\displaystyle\lim_{p\to+\infty} (\ln(p) - \ln(p+1)) = \lim_{p\to+\infty} \ln\left(\frac{p}{p+1}\right) = 0$, donc par passage à la limite, on obtient la convergence de la série, et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right) = \ln(2).$

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{2n-1}{n!}$, sachant que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=\mathrm{e}$.

Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on a :
$\displaystyle\sum_{n=0}^{p}\frac{2n-1}{n!}=\sum_{n=0}^{p}\frac{2n}{n!}-\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{n!}=\sum_{n=1}^{p}\frac{2}{(n-1)!}-\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{n!}=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{2}{k!}-\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{n!}$.
Par passage à la limite, on obtient la convergence de la série et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n-1}{n!}=2\mathrm{e}-\mathrm{e}=\mathrm{e}$.

EXERCICE 3

On considère la fonction
$$f : t\mapsto \frac{\ln t}{(1+t)^2}$$

1. Justifier que f est intégrable sur $]0,1]$.
f est continue sur $]0,1]$, donc localement intégrable. f est de plus de signe constant sur $]0,1]$. $f(t)\underset{0}{\sim}\ln(t)$; par comparaison à une intégrale de référence convergente, f est intégrable sur $]0,1]$.

2. Calculer
$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

Soit $\varepsilon\in]0,1[$.
On pose $u(t)=\ln(t)$ et $v(t)=\dfrac{-1}{1+t}$; u et v sont de classe C^1 sur $[\varepsilon,1]$. Le théorème d'intégration par parties donne :
$\displaystyle\int_\varepsilon^1 f(t)\mathrm{d}t=\left[-\frac{\ln(t)}{1+t}\right]_\varepsilon^1+\int_\varepsilon^1\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)}=\frac{\ln(\varepsilon)}{1+\varepsilon}+\int_\varepsilon^1\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\frac{\ln(\varepsilon)}{1+\varepsilon}+\left[\ln\left(\frac{t}{1+t}\right)\right]_\varepsilon^1=$
$\dfrac{-\varepsilon\ln(\varepsilon)}{1+\varepsilon}+\ln(1+\varepsilon)-\ln(2)$.
Par passage à la limite ($\varepsilon\to 0$), on obtient : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=-\ln(2)$.
Remarque : $\displaystyle\lim_0 uv=+\infty$; on ne pouvait donc pas appliquer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées.