$\star$ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse $\star$

Math. - CC 2 - S2 - Analyse

vendredi 7 mai 2021 - Durée 1 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

EXERCICE 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(1-itx)}\mathrm{d}t$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^p \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge. On la note I_p.

3. Déterminer une relation entre I_{p+1} et I_p, pour tout entier naturel p, et en déduire la valeur de I_p.

4. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et déterminer $f^{(p)}(x)$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathbb{R}$.

5. En déduire le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{p\geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$. La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

EXERCICE 2

Soient n et N deux entiers naturels non nuls. On lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N. On suppose que les différents lancers sont indépendants et que la probabilité qu'une boule tombe dans une case donnée est $\dfrac{1}{N}$.

Une case peut contenir plusieurs boules. On note T_n le nombre **de cases non vides** à l'issue des n lancers.

1. Déterminer, en fonction de n et N, les valeurs prises par la variable T_n (on distinguera les cas $n \leq N$ et $n > N$).

2. Donner la loi de T_1 et de T_2. Calculer leurs espérances.

3. On fixe désormais $n \geq 2$. Calculer $\mathbb{P}(T_n = 1)$ et $\mathbb{P}(T_n = n)$

4. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier $k \geq 1$:

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\,\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\,\mathbb{P}(T_n = k-1). \quad (\star\star)$$

5. On note G_n la fonction génératrice de la variable T_n.

a. Rappeler la définition de G_n. Montrer qu'ici G_n est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Rappeler le lien entre G_n et $\mathbb{E}(T_n)$.

c. En utilisant $(\star\star)$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2)G_n'(x) + xG_n(x)$$

d. En déduire que $\mathbb{E}(T_{n+1}) = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)\mathbb{E}(T_n) + 1$, puis que : $\mathbb{E}(T_n) = N\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^n\right)$.

6. Pour $1 \leq k \leq N$, on note Y_k le nombre de boules dans la case k et Z_k la variable valant 0 si la case k est vide, et 1 si elle contient au moins une boule.

a. Donner la loi de Y_k, puis celle de Z_k.

b. Les variables aléatoires $(Z_k)_{1\leq k\leq N}$ sont-elles mutuellement indépendantes ?

c. Exprimer T_n en fonction des variables aléatoires $(Z_k)_{1\leq k\leq N}$, et retrouver ainsi l'expression de $\mathbb{E}(T_n)$.

Fin de l'énoncé d'analyse