CB N°11 - SURFACES - CORRECTION

Exercice 1

On considère la surface S paramétrée par $\begin{cases} x(u,v) = u^2 + uv \\ y(u,v) = u^3 - v^2 \\ z(u,v) = u^3 + 1 \end{cases}$

1. S est-elle régulière ?

On note φ le paramétrage de S.

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} 2u+v \\ 3u^2 \\ 3u^2 \end{pmatrix}$ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ -2v \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} 6u^2v \\ 3u^3 \\ -2v(2u+v) - 3u^3 \end{pmatrix}$.

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u = v = 0$.

On en déduit que S admet un point singulier, elle n'est donc pas régulière.

2. Déterminer l'équation du plan tangent à S au point $A(u = 1, v = 1)$.

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(1,1) \wedge \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(1,1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$, donc l'équation du plan tangent en $A(2,0,2)$ est :
$6(x-2) + 3y - 9(z-2) = 0$, soit encore : $2x + y - 3z + 2 = 0$

Exercice 2

On considère la surface Σ d'équation cartésienne

$$z^2 - 4xz^2 - xz + y + 3 = 0$$

1. Montrer que Σ est une surface réglée.

$\Sigma = \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}} \Delta_\lambda$ où $\Delta_\lambda : \begin{cases} -\lambda(4\lambda+1)x + y + 3 + \lambda^2 = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$.

Σ est la réunion de droites, c'est donc une surface réglée.

Autre méthode :

On peut paramétrer la surface avec $\psi : \begin{cases} x = t \\ y = -3 - \lambda^2 + t\,\lambda(4\lambda+1) \\ z = \lambda \end{cases}$

On reconnait un paramétrage de surface réglée.

2. Justifier que le point A de coordonnées $(1,1,1)$ est un point régulier de Σ, et déterminer une équation cartésienne du plan tangent à Σ en A.

On note $F(x,y,z) = z^2 - 4xz^2 - xz + y + 3$. $\overrightarrow{\text{Grad}}F(x,y,z) = \begin{pmatrix} -4z^2 - z \\ 1 \\ 2z - 8xz - x \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$ donc Σ est régulière, et en particulier A est un point régulier de Σ.

$\overrightarrow{\text{Grad}}F(A) = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ donc l'équation du plan tangent en A est : $-5(x-1) + (y-1) - 7(z-1) = 0$, soit encore $5x - y + 7z - 11 = 0$.

Exercice 3

Donner une équation cartésienne de la surface de révolution engendrée par la rotation de la courbe $C : \begin{cases} x = \cos t \\ y = t \\ z = \sin t \end{cases}$ autour de la droite (Oy).
Quelle est la nature de cette surface ?

On note Σ la surface recherchée. L'axe (Oy) est dirigé par $\overrightarrow{j}$ et passe par O.
$M(x, y, z) \in \Sigma \Leftrightarrow \exists M_0(t) \in C, \begin{cases} OM = OM_0 \\ \overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{j} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 t + t^2 + \sin^2 t \\ y - t = 0 \end{cases}$.

On en déduit $\Sigma : x^2 + z^2 = 1$.

Il s'agit d'un cylindre.

Exercice 4

Former une équation cartésienne du cône de sommet $S(3, 0, 3)$ et de directrice d'équations $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ y = z \end{cases}$.

On note Σ le cône recherché et C la directrice.
$M(x, y, z) \in \Sigma \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, S + t\overrightarrow{SM} \in C \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} (3 + t(x - 3))^2 + (ty)^2 - 2(3 + t(x - 3)) = 0 \\ ty = 3 + t(z - 3) \end{cases}$
$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} t(y - z + 3) = 3 \\ t^2((x - 3)^2 + y^2) + 4t(x - 3) + 3 = 0 \end{cases}$
On obtient $\Sigma : 3x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 4xz - 2yz - 6x - 6y + 6z = 0$.