- ES-S1 - - 2018-2019 -

– Correction - Analyse –

Exercice 1

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre en la fonction inconnue y de la variable x :

$$(\mathscr{E}_\lambda) \quad x(x+1)y''(x)+(2x+1)y'(x)-\lambda(\lambda+1)y(x)=0,$$

où λ désigne un paramètre réel.

1. Etant donné $\lambda\in\mathbb{R}$, comparer les équations $(\mathscr{E}_\lambda)$ et $(\mathscr{E}_{-\lambda-1})$.
$(\mathscr{E}_\lambda)$ et $(\mathscr{E}_{-\lambda-1})$ sont identiques.
On supposera dans la suite que $\lambda \geq -\dfrac{1}{2}$.
Dans la suite, y désigne un fonction de la variable x, admettant un développement en série entière $y(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ au voisinage de 0.

2. Montrer que pour que y soit solution de $(\mathscr{E}_\lambda)$, il faut et il suffit que l'on ait pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$a_{n+1}=\frac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2}a_n$$

y admet un développement en série entière au voisinage de 0, donc sur ce voisinage, y est de classe C^∞ et on a : $y'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n-1}$ et $y''(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$.
y est solution de $(\mathscr{E}_\lambda)$ si, et seulement si ;
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-1}+2\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n-1}-\lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n=0$
ce qui équivaut à : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n(n-1)+2n-\lambda(\lambda+1))a_n+((n+1)n+n+1)a_{n+1}\right]x^n=0.$
Par unicité du développement en série entière, cela équivaut à :

$$\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}=\frac{\lambda^2+\lambda-n^2-n}{(n+1)^2}a_n=\frac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2}a_n$$

3. a. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda\in\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ pour que l'équation $(\mathscr{E}_\lambda)$ admette des solutions polynomiales de degré donné $d\in\mathbb{N}$.
y est une solution polynomiale de degré d si et seulement si $a_d\neq 0$ et pour tout $n>d, a_n=0$.
La formule établie précédemment montre (à l'aide d'une récurrence immédiate) que si l'un des coefficients est nuls, les suivants le sont tous. Ainsi, y est une solution polynomiale de degré d si, et seulement si : $\dfrac{(\lambda+d+1)(\lambda-d)}{(d+1)^2}=0$, d'où $\lambda=d$.

b. Lorsque c'est le cas, montrer qu'il existe une unique solution polynomiale de $(\mathscr{E}_\lambda)$ de degré d, que nous noterons φ_d, telle que $\varphi_d(0)=1$.
La condition $\varphi_d(0)=1$ revient à imposer $a_0=1$.
L'égalité $a_{n+1}=\dfrac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2}a_n$ pour tout $n\in[\![0,d-1]\!]$ assure l'unicité.
Remarque : on peut montrer par récurrence que $a_n=\dbinom{n+d}{n}\dbinom{d}{n}$.

c. Expliciter la fonction polynôme φ_1.
$\varphi_1(x) = 1 + 2x$.

d. Déterminer les coefficients $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ tels que :

$$\frac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{(2x+1)^2}.$$

$$\frac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{2x+1}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(2x+1)^2}$$

En déduire la solution générale de l'équation $(\mathscr{E}_1)$ sur $]0, +\infty[$.

La fonction φ_1 ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. On cherche une solution de $(\mathscr{E}_1)$ sous la forme $y = h\varphi_1$.
y est solution de $(\mathscr{E}_1)$ si et seulement si : $x(x+1)h''\varphi_1 + 2x(x+1)h'\varphi_1' + (2x+1)h'\varphi_1 = 0$,
ce qui équivaut à h' solution de l'équation différentielle : $(E) : x(x+1)(2x+1)y' + (8x^2+8x+1)y = 0$.
On en déduit qu'il existe $C_1 \in \mathbb{R}$, tel que pour $x > 0, h'(x) = \dfrac{C_1}{x(x+1)(2x+1)^2}$, puis qu'il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour $x > 0$: $h(x) = C_1\left(\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + \dfrac{2}{2x+1}\right) + C_2$.
Finalement, les solutions de $(\mathscr{E}_1)$ sur $]0, +\infty[$ sont :

$$x \mapsto C_2(1+2x) + C_1\left((1+2x)\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + 2\right)$$

4. On se place dans le cas où $\lambda \geq -\dfrac{1}{2}, \lambda \notin \mathbb{N}$.

a. On suppose que y est une solution non identiquement nulle de $(\mathscr{E}_\lambda)$.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$.
Le fait que y soit non identiquement nulle revient à supposer (par une récurrence immédiate) que $a_0 \neq 0$ et, dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$ car $\lambda \notin \mathbb{N}$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\dfrac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$; la règle de d'Alembert permet de conclure que le rayon de convergence de la série est 1.

b. Montrer qu'il existe une unique solution de $(\mathscr{E}_\lambda)$ que nous noterons φ_λ, développable en série entière sur $]-1, 1[$ et telle que $\varphi_\lambda(0) = 1$.
La condition $\varphi_\lambda(0) = 1$ revient à imposer $a_0 = 1$. Les coefficients a_n sont alors uniquement déterminés par la relation $a_{n+1} = \dfrac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2}a_n$; d'où l'unicité de la fonction φ_λ.
De plus, une récurrence immédiate montre que tous les coefficients sont non nuls, et un produit télescopique donne : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(\lambda+k+1)(\lambda-k)}{(k+1)^2} = \dfrac{1}{(n!)^2} \prod\limits_{k=0}^{n-1} (\lambda+k+1)(\lambda-k)$.
La série entière dont les coefficients sont a_n a pour rayon de convergence 1, et sa somme vérifie $(\mathscr{E}_\lambda)$ sur $]-1, 1[$ d'où l'existence de φ_λ.

c. Expliciter le développement en série entière de la fonction $\varphi_{-\frac{1}{2}}$.
La fonction $\varphi_{-\frac{1}{2}}$ est entièrement déterminée par les coefficients a_n qui valent, $a_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$a_n = \dfrac{1}{2^{2n}(n!)^2} \prod\limits_{k=0}^{n-1} (2k+1)(-1-2k) = (-1)^n \left(\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\right)^2$.

Exercice 2

1. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t$ convergent.

$t \mapsto \ln(\sin(t))$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc localement intégrable sur cet intervalle.
Au voisinage de 0 : $\ln(\sin(t)) \underset{0}{\sim} \ln(t)$, les deux fonctions étant de signe constant sur $]0,1]$.
$\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale de référence convergente, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t$ converge.
La fonction $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$ établit une bijection de classe C^1 entre $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Le théorème de changement de variable donne $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)(-\mathrm{d}t)$ de même nature (convergentes d'après ce qui précède). On a donc la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos(t)\mathrm{d}t$.

On notera $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t$

2. A l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$$

La fonction $t \mapsto \pi - t$ établit une bijection de classe C^1 entre $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.
Le théorème de changement de variable donne I et $\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(\pi - t))(-\mathrm{d}t)$ de même nature, donc convergentes, et par suite égales. Ainsi, $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$.

3. A l'aide d'un changement de variable, trouver une relation entre $I + J$ et I.
I et J étant des intégrales convergentes, on a par linéarité :
$I + J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(t)\cos(t)\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)\mathrm{d}t.$
La fonction $t \mapsto 2t$ établit une bijection de classe C^1 entre $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $]0, \pi]$. Le théorème de changement de variable donne $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\frac{1}{2}\mathrm{d}t$ de même nature.
On a montré précédemment que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t$ convergent (et valent I), on en déduit que $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t$ converge, et par suite (à l'aide de la relation de Chasles) que :
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t\right) = I.$
Finalement, on a : $I + J = I - \ln(2) \times \frac{\pi}{2}$.

4. A l'aide d'un changement de variable montrer que $I = J$.
Le changement de variable $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$ effectué à la question **1** donne $I = J$.

5. Déduire de ce qui précède la valeur de I et J.
$I = J = -\ln(2) \times \frac{\pi}{2}$.

Exercice 3

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \\ z'(t) = x(t) + z(t) \end{cases}$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Le système est équivalent à $(S) : X' = AX$.
Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$. Il est scindé donc A est trigonalisable.
On a : $E_1 = \text{Vect}\{(0,1,0)\}$ et $E_2 = \text{Vect}\{(1,1,1)\}$.
$\dim(E_2) \neq m(2)$ donc A n'est pas diagonalisable.
Considérons la famille $\{(0,1,0),(1,1,1),(1,0,0)\}$; son déterminant vaut 1, elle forme donc une base de $\mathbb{R}^3$.
A est donc semblable à une matrice de la forme $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, telle que $AP = PB$ où $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Le produit matriciel donne $a = 0$ et $b = 1$.
On pose $Z = P^{-1}X = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, X est solution de (S) si, et seulement si Z est solution de $Z' = BZ$ c'est-à-dire :
$\begin{cases} z_1' = z_1 \\ z_2' = 2z_2 + z_3 \\ z_3' = 2z_3 \end{cases}$.
La première et la troisième équations se résolvent immédiatement.
Les solutions sont $z_1 : t \mapsto C_1 \mathrm{e}^t$ et $z_3 : t \mapsto C_3 \mathrm{e}^{2t}$, avec $(C_1, C_3) \in \mathbb{R}^2$.
La deuxième équation s'écrit donc $z_2' = 2z_2 + C_3 \mathrm{e}^{2t}$.
Les solutions de l'équation homogène $z_2' = 2z_2$ sont $t \mapsto C_2 \mathrm{e}^{2t}$, avec $C_2 \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière de la forme $t \mapsto ate^{2t}$, et on trouve $a = C_3$.
Finalement, il existe $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour $t \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} z_1(t) = C_1 \mathrm{e}^t \\ z_2(t) = (C_2 + C_3 t)\mathrm{e}^{2t} \\ z_3(t) = C_3 \mathrm{e}^{2t} \end{cases}$.
On trouve les solutions du système initial en faisant le produit PZ :
$\begin{cases} x(t) = (C_2 + C_3 + C_3 t)\mathrm{e}^{2t} \\ y(t) = C_1 \mathrm{e}^t + (C_2 + C_3 t)\mathrm{e}^{2t} \\ z(t) = (C_2 + C_3 t)\mathrm{e}^{2t} \end{cases}$, $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$.