- CC1-S1 - - 2018-2019 -

– Correction - Analyse –

Exercice 1

Déterminer la nature et la somme éventuelle des séries de terme général :

1.

$$u_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n+2}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{1}{k}} - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{1}{k+2}} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{1}{k}} - \sum_{k=3}^{n+2} \mathrm{e}^{\frac{1}{k}} = \mathrm{e}^1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n+2}}$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} U_n = \mathrm{e} + \sqrt{\mathrm{e}}$.

On conclut que, par définition, $\sum \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n+2}}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n+2}} = \mathrm{e} + \sqrt{\mathrm{e}}$.

2.

$$w_n = a^{2n+1}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = a \sum_{k=0}^{n} (a^2)^k$.

On reconnaît la somme partielle d'indice n d'une série géométrique de raison a^2. Par conséquent :

Si $a^2 < 1$ alors $\sum a^{2n+1}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a^{2n+1} = \dfrac{a}{1-a^2}$.

Si $a^2 \geq 1$ alors $\sum a^{2n+1}$ diverge.

Exercice 2

Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

Pour cela, si on nomme U_n la somme partielle d'indice n, on étudiera (U_{2n}) et (U_{2n+1}).

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'une part, $U_{2n+2} - U_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{2n+2}}{\sqrt{2n+2}} + \dfrac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2n+2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} < 0$ et (U_{2n}) est décroissante.
- D'autre part, $U_{2n+3} - U_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = \dfrac{(-1)^{2n+3}}{\sqrt{2n+3}} + \dfrac{(-1)^{2n+2}}{\sqrt{2n+2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2n+2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2n+3}} > 0$ et (U_{2n+1}) est croissante.
- Enfin, $|U_{2n+1} - U_{2n}| = |u_{2n+1}| = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, donc $\lim_{n\to+\infty} |U_{2n+1} - U_{2n}| = 0$.

De ces trois points, on conclut que (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont adjacentes, puis qu'elles convergent vers la même limite et enfin, que ce dernier point implique que (U_n) est convergente. Donc par définition, $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

Exercice 3

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite de réels non nuls. On définit les suites (u_n) et (p_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \cdots a_n \qquad \textbf{et} \qquad a_n = 1 + u_n$$

Lorsque la suite (p_n) converge, on note p sa limite.

1. Donner un exemple de suite (a_n) telle que (p_n) converge vers 0.

Par exemple $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite constante égale à $\dfrac{1}{2}$ donne $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend bien vers 0.

2. Montrer que si (p_n) converge vers une limite p non nulle, alors (a_n) converge vers 1.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \neq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n \neq 0$. Et comme $\forall n \geq 2,\ a_n = \dfrac{p_n}{p_{n-1}}$, en passant à la limite qui existe puisque $p \neq 0$, on obtient bien $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{p}{p} = 1$.

3. On suppose dans cette question que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq n_0,\ a_n > 0 \qquad \text{et on pose} \qquad \forall n > n_0,\ q_n = \prod_{k=n_0+1}^{n} a_k$$

a. Pour $n > n_0$, exprimer q_n en fonction de p_n et de p_{n_0}.

$\forall n > n_0,\ p_n = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k = \prod\limits_{k=1}^{n_0} a_k \prod\limits_{k=n_0+1}^{n} a_k = p_{n_0} q_n$ puis $\forall n > n_0,\ q_n = \dfrac{p_n}{p_{n_0}}$.

b. Montrer que si la série $\sum\limits_{n\geq n_0} \ln(a_n)$ converge alors la suite (p_n) converge puis que $p \neq 0$.

$\forall n > n_0,\ \ln(q_n) = \sum\limits_{k=n_0+1}^{n} \ln(a_k)$.

Comme la série $\sum\limits_{n\geq n_0} \ln(a_n)$ converge, la suite de ses sommes partielles converge, et donc $(\ln(q_n))$ admet une limite finie l. La continuité de la fonction exponentielle implique que (q_n) converge e^l qui est un réel non nul.
Enfin, comme $\forall n > n_0,\ p_n = p_{n_0} q_n$, on conclut que (p_n) converge vers $p = p_{n_0}\mathrm{e}^l$ qui est non nul car $p_{n_0} \neq 0$.

c. On suppose que la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geq n_0} \ln(a_n)$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Que peut-on dire dans ces deux cas du comportement de la suite (p_n) ?

- Si la série $\sum\limits_{n\geq n_0} \ln(a_n)$ diverge vers $+\infty$, la suite de ses sommes partielles diverge vers $+\infty$, et donc $(\ln(q_n))$ diverge vers $+\infty$. Puis par composition, (q_n) diverge vers $+\infty$.
  Comme $\forall n > n_0,\ p_n = p_{n_0} q_n$, on conclut que (p_n) diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de $p_{n_0} \neq 0$.
- Si la série $\sum\limits_{n\geq n_0} \ln(a_n)$ diverge vers $-\infty$, la suite de ses sommes partielles diverge vers $-\infty$, et donc $(\ln(q_n))$ diverge vers $-\infty$. Puis par composition, (q_n) converge vers 0.
  Comme $\forall n > n_0,\ p_n = p_{n_0} q_n$, on conclut que (p_n) converge vers 0 par produit.

4. On suppose dans cette question que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq 0$.

Démontrer que la suite (p_n) converge vers $p > 0$, si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n \geq 0$ implique $a_n \geq 1$ et $p_n > 0$ puis $\ln(p_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1 + u_k)$.

$\Rightarrow$ Si on suppose que (p_n) converge vers p non nul, alors p étant un réel strictement positif et tous les termes de la suite étant strictement positifs, $(\ln(p_n))$ converge vers $\ln(p)$. Donc la suite des sommes partielles de la série $\sum \ln(1 + u_n)$ est convergente et son terme général tend vers 0. Donc (u_n) tend elle-même vers 0, et on peut écrire $\ln(1 + u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
Or tous les termes étant positifs, les séries correspondantes sont de même nature et $\sum u_n$ converge.

$\Leftarrow$ Si on suppose maintenant que $\sum u_n$ converge, alors (u_n) tend encore vers 0, donc l'équivalent précédent reste valable et la série $\sum \ln(1 + u_n)$ converge pour les mêmes raisons. Puis, la suite $(\ln(p_n))$ converge vers une limite l et (p_n) converge enfin vers $p = \mathrm{e}^l$ qui vérifie bien $p > 0$.

5. On suppose dans cette question que la série $\sum u_n$ converge.

a. Montrer que si la série $\sum u_n^2$ converge, alors la suite (p_n) converge et $p \neq 0$.

$\sum u_n$ converge donc (u_n) converge vers 0 et ainsi $\ln(a_n) = \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{=} u_n - \underbrace{\frac{u_n^2}{2} + \circ\left(u_n^2\right)}_{\epsilon_n}$.

Comme par hypothèse, $\sum u_n^2$ converge, alors $\sum \epsilon_n$ converge et donc, par linéarité, $\sum \ln(a_n)$ converge et par le 3.b, on conclut que (p_n) converge vers $p \neq 0$.

b. Montrer que si la série $\sum u_n^2$ diverge, alors la suite (p_n) converge et $p = 0$.

De la même manière, $\sum u_n$ converge donc (u_n) converge vers 0 et ainsi $\ln(a_n) = \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{=} u_n \underbrace{-\frac{u_n^2}{2} + \circ\left(u_n^2\right)}_{\epsilon_n}$. Comme par hypothèse, $\sum u_n^2$ diverge, alors $\epsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2}$ implique que $\sum \epsilon_n$ diverge vers $-\infty$ et donc, par linéarité, $\sum \ln(a_n)$ diverge vers $-\infty$ et par le 3.c, on conclut que (p_n) converge vers 0.

6. Etudier la convergence et déterminer alors la limite éventuelle de (p_n) dans les cas suivants :

a. $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

$\forall n \geq 1,\ u_n = \frac{1}{n} \geq 0$ donc $\sum u_n$ diverge et d'après le 4., (p_n) diverge (vers $+\infty$).
On peut aussi montrer (avec un télescopage) que $\forall n \geq 1,\ p_n = n+1$.

b. $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$\forall n \geq 1,\ u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ donc d'après l'exercice 2, $\sum u_n$ converge. De plus $\forall n \geq 1,\ u_n^2 = \frac{1}{n}$ et $\sum u_n^2$ diverge.
Donc d'après la question 5.b, (p_n) converge vers 0.