CB N°6 - FONCTIONS A PLUSIEURS VARIABLES - SUJET 1

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

D'après les théorèmes généraux, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, comme quotient de fonctions de classe C^1, le dénominateur ne s'annulant pas.

Dérivées partielles d'ordre 1 de f en $(0,0)$:

$$\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t^2-0}{t}\underset{t\to0}{\longrightarrow}0$$

f admet donc une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à sa première variable en $(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.

$$\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0-0}{t}=0$$

f admet donc une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à sa deuxième variable en $(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Dérivées partielles d'ordre 1 de f en $(x,y)\neq(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-2yx^4}{(x^2+y^2)^2}$$

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|\leqslant\frac{2|x|^5+4|x|^3|y|^2}{(x^2+y^2)^2}\leqslant\frac{6\,\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4}\leqslant 6\,\|(x,y)\|\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

La dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable est donc continue en $(0,0)$.

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{-2yx^4}{(x^2+y^2)^2}\right|\leqslant\frac{2|y||x|^4}{(x^2+y^2)^2}\leqslant\frac{2\,\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4}\leqslant 2\,\|(x,y)\|\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

La dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable est donc continue en $(0,0)$.

Finalement, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2. La fonction f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

D'après les théorèmes généraux, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0-0}{t}=0$$

Et, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{-8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

Pour tout $t\neq0$, on a : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(t,t)=-1$ donc $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(t,t)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$.

La fonction f n'est donc pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 2

Etudier les extrema locaux des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$:

1. $(x,y) \mapsto y^2 - x^2 + x^3 + x^2 y + \frac{1}{3}y^3$

La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, car elle est polynomiale.

Ses dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$ sont définies par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x + 3x^2 + 2xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x^2 + y^2.$$

On en déduit que les points critiques sont définis par :

$$\left\{\begin{array}{l} x(-2+3x+2y) = 0 \\ 2y + x^2 + y^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x = \frac{2}{3}(1-y) \\ 13y^2 + 10y + 4 = 0 \end{array}\right. .$$

On en conclut qu'il y a deux points critiques :

$$O(0,0) \text{ et } A(0,-2).$$

On a : $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2 + 6x + 2y$, $\quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x$, $\quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 + 2y$.

On en déduit :

$$H_f(0) = M = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M) < 0,$$

donc $(0,0)$ est un point col.

$$H_f(A) = N = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(N) > 0,$$

de plus, $\operatorname{tr}(N) < 0$; on en déduit que f admet un maximum local en A.

2. $(x,y) \mapsto x^4 + y^3 - 3y - 2$

La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, car elle est polynomiale.

Ses dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$ sont définies par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3.$$

On en déduit que les points critiques sont définis par :

$$\left\{\begin{array}{l} x^3 = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{array}\right. .$$

On en conclut qu'il y a deux points critiques :

$$A(0,1), \text{ et } B(0,-1).$$

Remarque : Le déterminant de la matrice hessienne est nul pour chaque point critique.

Etude en $(0,1)$: Pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, on a : $f(h,1+k) - f(0,1) = h^4 + k^3 + 3k^2 = h^4 + k^2(k+3)$.
Ainsi, pour (h,k) au voisinage de $(0,0)$ (il suffit d'avoir $k+3 \geq 0$), $f(h,1+k) - f(0,1) \geq 0$.
On en déduit que f admet un minimum local en $(0,1)$.

Etude en $(0,-1)$: Pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, on a : $f(h,-1+k) - f(0,-1) = h^4 + k^3 - 3k^2$.
Pour tout $h \neq 0$, on a : $f(h,-1) - f(0,-1) = h^4 > 0$,
et pour $0 < k < 3$, $f(0,-1+k) - f(0,-1) = k^2(k-3) < 0$.
On en déduit que $(0,-1)$ est un point col.

CB N°6 - FONCTIONS A PLUSIEURS VARIABLES - SUJET 2

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2. La fonction f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2

Etudier les extrema locaux des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$:

1. $(x,y) \mapsto x^2 - y^2 + y^3 + y^2x + \dfrac{1}{3}x^3$

2. $(x,y) \mapsto y^4 + x^3 - 3x - 2$

Pour obtenir le corrigé de ce sujet, il suffit d'intervertir x et y dans tous les exercices du sujet 1 !