- CC1-S2 - - 2018-2019 -

– Correction Analyse –

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = y^2 - x^2y + x^2$$

1. Etudier les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$ sont $O(0,0)$, $A_1\left(\sqrt{2},1\right)$ et $A_2\left(-\sqrt{2},1\right)$.

La matrice hessienne de f en (a,b) est $H_f(a,b) = \begin{pmatrix} -2b+2 & -2a \\ -2a & 2 \end{pmatrix}$.

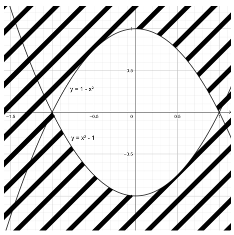
$\hookrightarrow$ $\det(H_f(0,0))>0$ et $\mathrm{Tr}(H_f(0,0)) > 0$, donc f admet un minimum local en O.
$\hookrightarrow$ $\det(H_f(\pm\sqrt{2},1)) < 0$ donc A_1 et A_2 sont des points cols.

2. On considère l'ensemble suivant :

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

a. Représenter rapidement K.

K est la partie non hachurée, délimitée par les deux paraboles d'équations $y = x^2 - 1$ et $y = 1 - x^2$.



b. Montrer que K est fermé et borné.
Soit $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K convergeant vers (x,y).
$\forall n \in \mathbb{N}, x_n^2 - 1 \leq y_n \leq 1 - x_n^2$, donc par passage à la limite : $x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2$.
Ainsi, $(x,y) \in K$ donc par caractérisation séquentielle des fermés, K est fermé.
Soit $(x,y) \in K$. On a : $-1 \leq x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2 \leq 1$ donc $|y| \leq 1$ et $x^2 - 1 \leq 1 - x^2$ d'où $x^2 \leq 1$.
On en déduit que pour tout $(x,y) \in K, \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2}$, donc K est borné.

c. Déterminer les extrema de f sur K.

K étant un ensemble fermé borné, et f étant continue sur K, on sait que f est bornée sur K et atteint ses bornes, soit en un point critique de $\overset{\circ}{K}$, soit à la frontière de K.

$\rightsquigarrow$ Le seul extremum local de f dans $\overset{\circ}{K}$ est atteint en O et vaut $f(0,0) = 0$.
$\rightsquigarrow$ Etude à la frontière de K :
$(x,y) \in \mathrm{Fr}(K)$ si, et seulement si $x \in [-1,1]$, et $y = x^2 - 1$ ou $y = 1 - x^2$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x, x^2-1) = 1$.
- Soit $g : x \mapsto f(x, 1-x^2) = 2x^4 - 2x^2 + 1$. Une étude (rapide) de g sur $[-1,1]$ donne le maximum de g égal à 1, atteint pour $x = -1, x = 0$ et $x = 1$. Son minimum est $\frac{1}{2}$, atteint pour $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Finalement, le minimum de f sur K est 0, atteint en $(0,0)$ et le maximum de f sur K est 1, atteint en de nombreux points de la frontière de K (dont $(0,1)$ par exemple).

Exercice 2

1. Soient $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et $f : \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x^2+y^2)\ln(x)+\varphi(x^2+y^2) \end{array} \right.$

a. Exprimer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ à l'aide de la dérivée de φ.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\ln(x) + \dfrac{x^2+y^2}{x} + 2x\varphi'(x^2+y^2)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\ln(x) + 2y\varphi'(x^2+y^2)$

b. Exprimer simplement $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

$y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y(x^2+y^2)}{x} = xy + \dfrac{y^3}{x}$

2. On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = xy + \frac{y^3}{x}, \quad (x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R} \qquad (1)$$

Remarque : C'est celle obtenue dans la question précédente !

Pour résoudre (1), on passe des coordonnées cartésiennes (x,y) aux coordonnées polaires (r,θ).
On note $f(x,y) = F(r,\theta)$.

a. Montrer que (1) est équivalente à l'équation aux dérivées partielles en les variables r et θ :

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -r^2\tan\,\theta$$

On remarque tout d'abord que comme $x\in]0,+\infty[$, on a $r\in]0,+\infty[$ et $\theta \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

La règle de la chaîne donne :

$\dfrac{\partial F}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y} = -y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Par ailleurs, $xy + \dfrac{y^3}{x} = r^2\cos\theta\sin\theta + \dfrac{r^2\sin^3\theta}{\cos\theta} = r^2\dfrac{\sin\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{\cos\theta} = r^2\tan\theta$.

On a donc bien le résultat attendu.

b. En déduire une famille de fonctions solutions de l'équation aux dérivées partielles (1).

Les solutions de l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial F}{\partial \theta} = -r^2\tan\,\theta$ sont les fonctions de la forme :
$(r,\theta)\mapsto r^2\ln(\cos\theta) + \psi(r)$, où ψ est une fonction dérivable de r, et $(r,\theta)\in]0,+\infty[\times\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

On en déduit que les fonctions de la forme :

$f : (x,y)\mapsto (x^2+y^2)\ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \psi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ sont solutions de (1).

Remarque :

On a : $(x^2+y^2)\ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \psi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = (x^2+y^2)\ln(x) - \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) + \psi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

En posant $\varphi(t) = -\dfrac{1}{2}t\ln(t) + \psi(t)$, on obtient les fonctions de la forme $f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x) + \varphi(x^2+y^2)$ qui sont celles vues dans la première question !

Exercice 3

Le but de l'exercice est de calculer

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

On note

$$F : x \mapsto \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$.

On note f la fonction définie sur $]-1,+\infty[\times[0,1]$ par $f(x,t) = \dfrac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$.

Pour $(x,t) \in]-1,+\infty[\times[0,1]$, on a $1+xt > 1-t \geq 0$, donc d'après les théorèmes généraux, f est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[\times[0,1]$.

Comme on intègre sur un compact, toutes les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégral sont acquises, et on en déduit que F est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$.

De plus, la formule de Leibniz donne :

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad F'(x) = \int_0^1 \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

.

2. Montrer que

$$\forall (x,t) \in]-1,+\infty[\times[0,1], \ \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)} = \frac{-x}{(1+x^2)(1+xt)} + \frac{x+t}{(1+x^2)(1+t^2)}$$

$\forall (x,t) \in]-1,+\infty[\times[0,1], \dfrac{-x}{(1+x^2)(1+xt)} + \dfrac{x+t}{(1+x^2)(1+t^2)} = \dfrac{-x(1+t^2)+(x+t)(1+xt)}{(1+x^2)(1+xt)(1+t^2)} = \dfrac{t}{(1+xt)(1+t^2)}$

3. En déduire l'expression de $F'(x)$ pour $x \in]-1,+\infty[$.

D'après les deux questions précédentes, pour $x \in]-1,+\infty[$ on a :

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{1}{1+x^2}\int_0^1 \left(\frac{-x}{1+xt} + \frac{x}{1+t^2} + \frac{t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{1+x^2}\left[-\ln(1+xt) + x\mathrm{Arctan}(t) + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 \\
&= \frac{-\ln(1+x)}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\times\frac{\pi}{4} + \frac{1}{1+x^2}\times\frac{\ln(2)}{2}
\end{aligned}$$

4. Montrer que pour $x > -1$:

$$F(x) = \frac{\ln(2)}{2}\mathrm{Arctan}(x) + \frac{\pi}{8}\ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

On a $F(0) = 0$, donc pour $x > -1$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x F'(x)\mathrm{d}x$.

La fonction donnée est la primitive de F' qui s'annule en 0, c'est donc bien F.

5. En déduire une valeur de J.

D'après les questions précédentes, on a : $J = F(1) = \dfrac{\ln(2)}{2}\mathrm{Arctan}(1) + \dfrac{\pi}{8}\ln(2) - J$.

On en déduit :

$$J = \frac{\pi}{8}\times\ln(2)$$

Exercice 4

Le but de l'exercice est de calculer

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$$

On note :

$$G : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)} \mathrm{d}t$$

1. Montrer que G est continue sur $[0, +\infty[$.

On note g la fonction définie sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par $g(x, t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$.

- Pour $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- Pour $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Hypothèse de domination :

  $\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[,\ |f(x, t)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t)} = \varphi(t)$ (car $-xt \leq 0$ donc $0 < \mathrm{e}^{-xt} \leq 1$).

  $\rightsquigarrow$ φ est continue sur $]0, +\infty[$, donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$.
  $\rightsquigarrow$ Etude en 0 :
  $\varphi(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$, donc par comparaison à une intégrale de Riemann intégrable, φ est intégrable sur $]0, 1]$.
  $\rightsquigarrow$ Etude en $+\infty$:
  $\varphi(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$, donc par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, φ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
  Finalement, φ est positive et intégrable sur $]0, +\infty[$.

Le théorème de continuité sous le signe intégral donne que G est continue sur $[0, +\infty[$.

2. Montrer que G est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

- Le travail de la question précédente permet de dire que pour $x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- Pour $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, et $\forall (x, t) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$,
  $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \dfrac{-t\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)} = \dfrac{-\sqrt{t}\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}$.
- Pour $x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- Hypothèse de domination :

  Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$ $(0 < a < b)$. On a $\forall (x, t) \in [a, b]\times]0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq \sqrt{t}\mathrm{e}^{-at} = \varphi_{a,b}(t)$.

  $\rightsquigarrow$ $\varphi_{a,b}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc localement intégrable.
  $\rightsquigarrow$ Etude en $+\infty$:
  $\varphi_{a,b}(t) \underset{t \to +\infty}{=} \circ\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ (par croissances comparées), donc par comparaison à une intégrale de Riemann convergent, $\varphi_{a,b}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
  Fialement, $\varphi_{a,b}$ est positive et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Le théorème de dérivation sous le signe intégral donne que G est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
De plus, la formule de Leibniz donne :

$$\forall x > 0,\ G'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)} \mathrm{d}t$$

3. Montrer que G est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$y - y' = \frac{K}{\sqrt{x}}$$

Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
G(x) - G'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{-t\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt} + t\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \\
&\underset{u=xt}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \frac{K}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

G est bien solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle : $y - y' = \dfrac{K}{\sqrt{x}}$.

4. En déduire l'expression de $G(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$.
On résout l'équation différentielle en utilisant la méthode de la variation de la constante et on trouve qu'il existe une constante réelle C telle que

$$\forall x > 0,\ G(x) = \left(C - K \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \right) \mathrm{e}^x$$

Ainsi, G étant continue en 0, on en déduit que $C - K \displaystyle\int_1^0 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = G(0)$. Finalement,

$$\forall x > 0,\ G(x) = \left(G(0) - K \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \right) \mathrm{e}^x$$

Cette égalité est encore valable pour $x = 0$.

Remarque : On a utilisé la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ (qui est nécessaire pour l'existence de K !)

5. Montrer que $G(0) = \pi$.

$$G(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t \underset{t=u^2}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u = \pi$$

6. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$ (on pourra utiliser un encadrement).
Par positivité de l'intégrale, on a pour $x > 0$:

$$0 \leq G(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \underset{u=tx}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{\frac{u}{x}}} \frac{\mathrm{d}u}{x} = \frac{K}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et ainsi par encadrement

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$$

7. En déduire la valeur de K.
$\forall x > 0,\ G(x) = \left(G(0) - K \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \right) \mathrm{e}^x$ et $G(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ceci n'est possible que si $G(0) - K \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est à dire $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{G(0)}{K}$.
Comme $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} K$, on en déduit que $K = \dfrac{G(0)}{K}$, puis

$$K = \sqrt{G(0)} = \sqrt{\pi}$$