

CB N°6 - SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS - SUJET 1

Résoudre le système différentiel suivant :

$$(S) : \begin{cases} x' = -3y + 2z + te^t \\ y' = -2x - y + 2z + e^t \\ z' = -x - 3y + 3z \end{cases}$$

On note $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.

(x, y, z) est solution du système (S) si, et seulement si Y est solution de l'équation différentielle

$$(E_1) : Y' = AY + B$$

On a : $\chi_A = (X - 2)(X - 1)(X + 1)$ scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

On trouve $A = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

On pose $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$. Y est solution de (E_1) si, et seulement si Z est solution de

$$(E_2) : Z' = DZ + P^{-1}B$$

Z est solution de (E_2) si, et seulement si $\begin{cases} z_1' = -z_1 + (1+t)e^t \\ z_2' = z_2 - te^t \\ z_3' = 2z_3 + e^t(t-1) \end{cases}$.

En résolvant les trois équations différentielles linéaires du premier ordre, on trouve :

$$\begin{cases} z_1 = C_1 e^{-t} + e^t \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \right) \\ z_2 = C_2 e^t - \frac{1}{2}t^2 e^t \\ z_3 = C_3 e^{2t} - t e^t \end{cases} \quad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$$

et par suite :

$$X = PZ = \begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^t + C_3 e^{2t} + e^t \left(-\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \right) \\ y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^t + e^t \left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \right) \\ z(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^t + C_3 e^{2t} - e^t \left(t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \right) \end{cases} \quad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$$

CB N°6 - SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS - SUJET 2

Résoudre le système différentiel suivant :

$$(S) : \begin{cases} x' = x - y + e^t \\ y' = x - y + z + e^t \\ z' = x - y + 2z \end{cases}$$

On note $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.

(x, y, z) est solution du système (S) si, et seulement si Y est solution de l'équation différentielle

$$(E_1) : Y' = AY + B$$

On a : $\chi_A = X(X-1)^2$ scindé, donc A est trigonalisable.

On a : $E_0(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ et $E_1(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$; de plus, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.

La dimension de E_1 n'est pas égale à la multiplicité de 1, donc A n'est pas diagonalisable. En complétant la famille de vecteurs propres par le premier vecteur de la base canonique, on obtient une base de \mathbb{R}^3

On trouve $A = PTP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

On pose $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$. Y est solution de (E_1) si, et seulement si Z est solution de

$$(E_2) : Z' = DZ + P^{-1}B$$

Z est solution de (E_2) si, et seulement si $\begin{cases} z_1' = z_3 + e^t \\ z_2' = z_2 - z_3 \\ z_3' = z_3 \end{cases}$.

En résolvant les trois équations différentielles linéaires du premier ordre, on trouve :

$$\begin{cases} z_1 = C_1 + e^t (C_3 + 1) \\ z_2 = C_2 e^t - C_3 t e^t \\ z_3 = C_3 e^t \end{cases} \quad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$$

et par suite :

$$X = PZ = \begin{cases} x(t) = C_1 + e^t (C_2 + 2C_3 + 1 - C_3 t) \\ y(t) = C_1 + e^t (C_3 + 1) \\ z(t) = e^t (-C_2 + C_3 t) \end{cases} \quad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$$