# CB n° 11 - GEOMETRIE DANS L'ESPACE - Sujet 1

## EXERCICE 1

Soit $\mathscr{S}$ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

**1.** Déterminer les points réguliers de $\mathscr{S}$.
Soit $F : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$.
$F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ puisque polynomiale, et le gradient de $F$ existe en tout point $(x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, et vaut : $\overrightarrow{\text{grad}}F(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$. Comme $(0, 0, 0) \in \mathscr{S}$, tous les points de $\mathscr{S}$ sont réguliers sauf $(0, 0, 0)$.

**2.** Démontrer qu'en un point régulier $M(a, b, c)$ une équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ est

$$ax + by - cz = 0$$

Soit $M(a, b, c)$ un point régulier de $\mathscr{S}$. Alors $\mathscr{S}$ admet en $M$ un plan tangent d'équation cartésienne $2a(x - a) + 2b(y - b) - 2c(z - c) = 0$, c'est à dire $ax + by - cz - (a^2 + b^2 - c^2) = 0$ ou encore ( puisque $a^2 + b^2 - c^2 = 0$) : $ax + by - cz = 0$

## EXERCICE 2

Soit $\Sigma$ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2) = 0$$

**1.** Démontrer que $\Sigma$ est régulière.
Soit $F : (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2)$.
$F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ puisque polynomiale, et le gradient de $F$ existe en tout point $(x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, et vaut : $\overrightarrow{\text{grad}}F(x, y, z) = (4x(x^2 + y^2 + z^2 + 3) - 32x, 4y(x^2 + y^2 + z^2 + 3) - 32y, 4z(x^2 + y^2 + z^2 + 3))$.
Ainsi, $\overrightarrow{\text{grad}}F(x, y, z) = \vec{0}$ si, et seulement si : $\begin{cases} 4x(x^2 + y^2 - 5) = 0 \\ 4y(x^2 + y^2 - 5) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
Si $x^2 + y^2 - 5 \neq 0$, alors on en déduit que $x = y = z = 0$, mais $(0, 0, 0) \notin \Sigma$.
Si $x^2 + y^2 - 5 = 0$ et $z = 0$, alors $F(x, y, z) = -16 \neq 0$, et donc $(x, y, z) \notin \Sigma$.
On peut conclure que tous les points de $\Sigma$ sont réguliers, c'est à dire que $\Sigma$ est régulière.

**2.** Donner en $A(3, 0, 0)$ une équation du plan tangent à $\Sigma$.
$A(3, 0, 0)$ est un point de $\Sigma$ donc est régulier. $\overrightarrow{\text{grad}}F(A) = (48, 0, 0)$, donc $\Sigma$ admet en $M$ un plan tangent d'équation $x - 3 = 0$

## EXERCICE 3

Soit $\Gamma$ la courbe paramétrée : $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t + 1 \\ z = t^2 - t + 1 \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$

**1.** Montrer que $\Gamma$ est plane. Déterminer $\vec{u}$, un vecteur normal au plan contenant $\Gamma$.
On a immédiatement $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t) - y(t) - z(t) = -2$ donc la courbe $\Gamma$ est incluse dans le plan d'équation $x - y - z = -2$ dont $\vec{u}(1, -1, -1)$ est un vecteur normal.

**2.** Déterminer un paramétrage puis une équation cartésienne du cylindre $\mathscr{C}$ de section droite $\Gamma$, c'est à dire de directrice $\Gamma$ et de direction normale au plan contenant $\Gamma$.

$M(X,Y,Z) \in \mathscr{C} \iff \begin{cases} X = t^2 + \lambda \\ Y = t + 1 - \lambda \\ Z = t^2 - t + 1 - \lambda \end{cases} \quad (t,\lambda) \in \mathbb{R}^2$ qui constitue un paramétrage de $\mathscr{C}$.

De plus, $\begin{cases} X = t^2 + \lambda \\ Y = t + 1 - \lambda \\ Z = t^2 - t + 1 - \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} X = t^2 + \lambda \\ Y = t + 1 - \lambda \\ X - Y - Z = 3\lambda - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{X - Y - Z + 2}{3} \\ t = \dfrac{X + 2Y - Z - 1}{3} \\ X = t^2 + \lambda \end{cases}$

On en déduit que $\mathscr{C}$ a pour équation cartésienne :

$$(X + 2Y - Z - 1)^2 = 3(2X + Y + Z - 2)$$

---

# CB N° 11 - GEOMETRIE DANS L'ESPACE - SUJET 2

## EXERCICE 1

Soit $\mathscr{S}$ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$x^2 - y^2 + z^2 = 0$$

**1.** Déterminer les points réguliers de $\mathscr{S}$.
Soit $F : (x,y,z) \mapsto x^2 + -^2 + z^2$.
$F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ puisque polynomiale, et le gradient de $F$ existe en tout point $(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$, et vaut : $\overrightarrow{\text{grad}}F(x,y,z) = (2x, -2y, 2z)$. Comme $(0,0,0) \in \mathscr{S}$, tous les points de $\mathscr{S}$ sont réguliers sauf $(0,0,0)$.

**2.** Démontrer qu'en un point régulier $M(a,b,c)$ une équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ est

$$ax - by + cz = 0$$

Soit $M(a,b,c)$ un point régulier de $\mathscr{S}$. Alors $\mathscr{S}$ admet en $M$ un plan tangent d'équation cartésienne $2a(x-a) - 2b(y-b) + 2c(z-c) = 0$, c'est à dire $ax - by + cz - (a^2 - b^2 + c^2) = 0$ ou encore ( puisque $a^2 - b^2 + c^2 = 0$) : $ax - by + cz = 0$

## EXERCICE 2

Soit $\Sigma$ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2 - 16(x^2 + y^2) = 0$$

**1.** Démontrer que $\Sigma$ est régulière.
Soit $F : (x,y,z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2 - 16(x^2 + y^2)$.
$F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ puisque polynomiale, et le gradient de $F$ existe en tout point $(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$, et vaut : $\overrightarrow{\text{grad}}F(x,y,z) = (4x(x^2 + y^2 + z^2 + 1) - 32x, 4y(x^2 + y^2 + z^2 + 1) - 32y, 4z(x^2 + y^2 + z^2 + 1))$.

Ainsi, $\overrightarrow{\text{grad}}F(x,y,z) = \vec{0}$ si, et seulement si : $\begin{cases} 4x(x^2 + y^2 - 7) = 0 \\ 4y(x^2 + y^2 - 7) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Si $x^2 + y^2 - 7 \neq 0$, alors on en déduit que $x = y = z = 0$ mais $(0,0,0) \notin \Sigma$.
Si $x^2 + y^2 - 7 = 0$ et $z = 0$, alors $F(x,y,z) = -48 \neq 0$, et donc $(x,y,z) \notin \Sigma$.
On peut conclure que tous les points de $\Sigma$ sont réguliers, c'est à dire que $\Sigma$ est régulière.

**2.** Donner en $A(1,0,\sqrt{2})$ une équation du plan tangent à $\Sigma$.
$A(1,0,\sqrt{2})$ est un point de $\Sigma$ donc est régulier. $\overrightarrow{\text{grad}}(A) = (-16,0,16\sqrt{2})$, donc $\Sigma$ admet en $M$ un plan tangent d'équation $-x+z\sqrt{2}-1=0$.

## EXERCICE 3

Soit $\Gamma$ la courbe paramétrée

$$\left\{\begin{array}{l} x = t^2 \\ y = t+1 \\ z = -t^2-t+1 \end{array}\right. \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

**1.** Montrer que $\Gamma$ est plane. Déterminer $\vec{u}$, un vecteur normal au plan contenant $\Gamma$.
On a immédiatement $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t)+y(t)+z(t) = 2$ donc la courbe $\Gamma$ est incluse dans le plan d'équation $x+y+z=2$ dont $\vec{u}(1,1,1)$ est un vecteur normal.

**2.** Déterminer un paramétrage puis une équation cartésienne du cylindre $\mathscr{C}$ de section droite $\Gamma$, c'est à dire de directrice $\Gamma$ et de direction normale au plan contenant $\Gamma$.

$$M(X,Y,Z) \in \mathscr{C} \iff \left\{\begin{array}{l} X = t^2+\lambda \\ Y = t+1+\lambda \\ Z = -t^2-t+1+\lambda \end{array}\right. \quad (t,\lambda) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{qui constitue un paramétrage de } \mathscr{C}.$$

De plus, $$\left\{\begin{array}{l} X = t^2+\lambda \\ Y = t+1+\lambda \\ Z = -t^2-t+1+\lambda \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} X = t^2+\lambda \\ Y = t+1+\lambda \\ X+Y+Z = 2+3\lambda \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{X+Y+Z-2}{3} \\ t = \dfrac{-X+2Y-Z-1}{3} \\ X = t^2+\lambda \end{array}\right.$$

On en déduit que $\mathscr{C}$ a pour équation cartésienne

$$3(2X-Y-Z+2) = (-X+2Y-Z-1)^2$$