⋆ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse ⋆

Math. - CC 1 - S2 - Géométrie

vendredi 12 mars 2021 - Durée 1 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

EXERCICE 1

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère l'hyperbole H d'équation $xy = 1$.
Pour un point M de H, la normale en M à H recoupe H en un point N.

1. Déterminer le repère de Frenet au point M de H.

2. Calculer la courbure en M

3. Déterminer les coordonnées de Ω, centre de courbure en M de H.

4. Montrer que $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{M\Omega}$ et en déduire une construction graphique simple du centre de courbure.

EXERCICE 2

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on note $\mathscr{C}$ la conique d'équation

$$9x^2 + 16y^2 - 24xy + 20x - 110y + 50 = 0$$

1. Donner l'équation réduite de $\mathscr{C}$ dans un repère $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ que l'on précisera.

2. Justifier que dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ la courbe $\mathscr{C}$ admet l'une des représentations paramétriques suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = \dfrac{t^2}{2} \\ y(t) = t \end{array}\right. \qquad \text{ou} \qquad \left\{\begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2} \end{array}\right.$$

*On prendra dans la suite la représentation paramétrique qui correspond au repère $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ choisi à la question **1**.*

3. Déterminer la famille des normales à $\mathscr{C}$, notées $(N_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

4. a. Déterminer l'enveloppe $\mathscr{E}$ de $(N_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

b. Qu'a-t-on ainsi trouvé ?

5. Déterminer le rayon de courbure de $\mathscr{C}$, et retrouver le résultat précédent.

6. Déterminer l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{E}$.

7. Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{E}$ dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Fin de l'énoncé de géométrie