- CC1-S2 - - 2018-2019 -

– Correction - Géométrie –

Exercice 1

On se place dans le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit $\mathscr{C}$ la conique d'équation cartésienne

$$y^2 - \sqrt{3}xy - 2\sqrt{3}x + \left(4 - 3\sqrt{3}\right)y + 6 - 6\sqrt{3} = 0$$

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer les valeurs propres de A. Trouver deux vecteurs propres $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $(\vec{u},\vec{v})$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$.

A est symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormée directe.
On a $\chi_A = (X - \frac{3}{2})(X + \frac{1}{2})$ puis $\mathrm{Sp}(A) = \left\{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$.
On trouve $E_{-\frac{1}{2}}(A) = \mathrm{Ker}\left(A + \frac{1}{2}\mathrm{I}_2\right) = \mathrm{Vec}\left(\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}\right)$, puis on prend $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.
Les sous-espaces propres étant orthogonaux, $\vec{v} = \left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est tel que la famille de vecteurs propres $(\vec{u},\vec{v})$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$.

b. Quelle isométrie de $\mathbb{R}^2$ transforme le base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ en la base $(\vec{u},\vec{v})$?

$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$ donc l'isométrie en question est la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$.

2. Déterminer la nature de la conique ainsi que ses éléments caractéristiques.
$\det(A) < 0$, on en déduit que la conique est du genre hyperbole.
Si on note $f : (x,y) \mapsto y^2 - \sqrt{3}xy - 2\sqrt{3}x + \left(4 - 3\sqrt{3}\right)y + 6 - 6\sqrt{3}$, les coordonnées de son centre dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont données par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

On trouve le point Ω de coordonnées $(-3,-2)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Une équation de la conique dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ est :$-\frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{4}Y^2 = f(-3,-2)$ c'est-à-dire :

$$\frac{X^2}{2^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

Finalement, $\mathscr{C}$ est l'hyperbole de centre Ω, telle que, dans le repère $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$, les sommets sont $A(2,0)$ et $A'(-2,0)$, et les asymptotes sont $\Delta :\ Y = \frac{1}{\sqrt{3}}X$ et $\Delta' :\ Y = -\frac{1}{\sqrt{3}}X$.

Autre méthode :

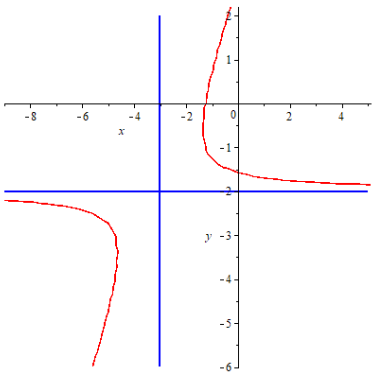
On pose $X = PX_1$ avec $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ce qui nous donne $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}y_1 \\ y = \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y_1 \end{cases}$, et ainsi

$$\begin{aligned} y^2 - \sqrt{3}xy - 2\sqrt{3}x + \left(4 - 3\sqrt{3}\right)y + 6 - 6\sqrt{3} = 0 &\iff -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}y_1^2 - \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)x_1 + \left(3\sqrt{3} - \frac{9}{2}\right)y_1 + 6 - 6\sqrt{3} = 0 \\ &\iff -\frac{1}{2}\left(x_1 + 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y_1 + \sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)^2 = -2 \\ &\iff \frac{\left(x_1 + 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2^2} - \frac{\left(y_1 + \sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1 \end{aligned}$$

Dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, si on pose Ω le point de coordonnées $\left(-1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3} + \dfrac{3}{2}\right)$, alors on retrouve que l'équation réduite de la conique $\mathscr{C}$ dans le repère $(\Omega; \vec{u}, \vec{v})$ est

$$\frac{X^2}{2^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

3. Tracer la conique $\mathscr{C}$ dans le repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On prendra $\sqrt{3} \approx 1,\ 732$.



Exercice 2

Soit E un espace euclidien. On suppose $\dim(E) \geq 2$.
On note $(u|v)$ le produit scalaire des vecteurs u et v, et $\|u\|$ la norme du vecteur u.
On se donne un vecteur w de E de norme 1 et, pour tout réel $\alpha \neq 0$, on pose , pour tout $x \in E$:

$$f_\alpha(x) = x + \alpha(x|w)w$$

1. Vérifier que f_α est un endomorphisme de E.
$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f_\alpha\left(x + \lambda y\right) = x + \lambda y + \alpha\left(x + \lambda y|w\right)w = x + \lambda y + \alpha(x|w)w + \lambda\alpha(y|w)w = f_\alpha(x) + \lambda f_\alpha(y)$ et donc f_α est linéaire.
De plus, comme $\forall x \in E,\ f_\alpha(x) = x + \alpha(x|w)w \in \text{Vect}\{x, w\} \subset E$, on peut en déduire que f_α est un endomorphisme de E.

2. Montrer que pour tous réels non nuls α, β, on a :

$$f_\alpha \circ f_\beta = f_\beta \circ f_\alpha$$

$$\begin{aligned}\forall x \in E,\ f_\alpha \circ f_\beta(x) &= x + \beta(x|w)w + \alpha\left(x + \beta(x|w)w|w\right)w \\ &= x + \beta(x|w)w + \alpha(x|w)w + \alpha\beta(x|w)\underbrace{(w|w)}_{=1}w \\ &= x + (\beta + \alpha + \alpha\beta)(x|w)w \\ &= f_{\beta+\alpha+\alpha\beta}(x) \\ &= f_\beta \circ f_\alpha(x)\end{aligned}$$

3. Montrer que pour tous vecteurs x et y, on a

$$(x|f_\alpha(y)) = (f_\alpha(x)|y)$$

On a $(x|f_\alpha(y)) = (x|y + \alpha(y|w)w) = (x|y) + \alpha(y|w)\,(x|w)$ et
$(f_\alpha(x)|y) = (y|f_\alpha(x)) = (y|x + \alpha(x|w)w) = (y|x) + \alpha(x|w)\,(y|w)$, donc $(x|f_\alpha(y)) = (f_\alpha(x)|y)$.

4. Vérifier que w est un vecteur propre de f_α.
$f_\alpha(w) = w + \alpha\underbrace{(w|w)}_{=1}w = w + \alpha w = (1+\alpha)w$. De plus, comme w est de norme 1, on en déduit que $w \neq 0$.
Ainsi w est un vecteur propre de f_α associé à la valeur propre $1+\alpha$.

5. a. Montrer que 1 est valeur propre de f_α.
Il s'agit de montrer que $\operatorname{Ker}(f_\alpha - \operatorname{Id}_E)$ n'est pas réduit au vecteur nul.
Soit $x \in E$ alors $(f_\alpha - \operatorname{Id}_E)(x) = x + \alpha(x|w)w - x = \alpha(x|w)w$.
Comme $\alpha \neq 0$ et $w \neq 0$, on conclut que $x \in \operatorname{Ker}(f_\alpha - \operatorname{Id}_E)$ si, et seulement si $(x|w) = 0$, ce qui équivaut à $\operatorname{Ker}(f_\alpha - \operatorname{Id}_E) = (\operatorname{Vect}(w))^\perp$ qui est donc une hyperplan de E.
Ainsi $\operatorname{Ker}(f_\alpha - \operatorname{Id}_E)$ est de dimension $n-1 \geq 1$, car $\dim(E) \geq 2$.
1 est bien valeur propre de f_α.

b. Quel est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 ?
On a montré dans la question précédente que $E_1(f_\alpha) = (\operatorname{Vect}(w))^\perp$ (et qu'il est de dimension $n-1$.)

c. L'endomorphisme f_α est-il diagonalisable ?
On déduit de ce qui précède que f_α admet au moins deux valeurs propres distinctes 1 et $1+\alpha$ (puisque $\alpha \neq 0$) de multiplicités respectives au moins égale à $n-1$ et 1.
Comme $\dim(E) = n$, on en déduit que les seules valeurs propres de f_α sont 1 et $1+\alpha$ de multiplicités respectives $n-1$ et 1, et ainsi la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E. On conclut que f_α est diagonalisable.

Remarque : On peut également utiliser le fait que f_α est un endomorphisme symétrique réel (question 3) pour conclure qu'il est diagonalisable.

6. Pour quelles valeurs de α l'endomorphisme f_α est-il inversible ? Calculer dans ce cas son inverse.

$$\begin{aligned}f_\alpha \text{ inversible} &\iff 0 \notin \operatorname{Sp}(f_\alpha) \\ &\iff 1+\alpha \neq 0 \\ &\iff \alpha \neq -1\end{aligned}$$

D'après la question 3, pour $\alpha \neq -1$, on cherche β tel que $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\beta+\alpha+\alpha\beta} = \operatorname{Id}_E$; ceci équivaut à $\beta+\alpha+\alpha\beta = 0$, c'est à dire $\beta = -\dfrac{\alpha}{1+\alpha}$. On conclut que $\forall \alpha \neq -1,\ (f_\alpha)^{-1} = f_{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}$.

7. Pour quelles valeurs de α l'endomorphisme f_α est-il une isométrie ? Caractériser dans ce cas cet endomorphisme.

$$\begin{aligned}\forall x\in E,\ \|f_\alpha(x)\|=\|x\| &\iff \forall x\in E,\ (f_\alpha(x)|f_\alpha(x))=(x|x)\\ &\iff \forall x\in E,\ 2\alpha(x|w)^2+\alpha^2(x|w)^2=0\\ &\iff \forall x\in E,\ (2\alpha+\alpha^2)\,(x|w)^2=0\\ &\iff 2\alpha+\alpha^2=0\\ &\iff \alpha=-2\,(\text{car } \alpha\neq 0)\end{aligned}$$

Compte tenu des questions précédentes, $\mathrm{Sp}\,(f_{-2})=\{1,-1\}$, 1 est de multiplicité $n-1$ alors que -1 est de multiplicité 1. Par conséquent, f_{-2} est la réflexion par rapport à l'hyperplan $(\mathrm{Vect}(w))^\perp$.

8. En utilisant la question 3, montrer que si F est un sous-espace vectoriel stable par f_α, alors $F^\perp$ est également stable par f_α.

Soit $x\in F^\perp$. Montrons que $f_\alpha(x)\in F^\perp$:

Soit $y\in F$, on a : $(f_\alpha(x)|y)=(x|f_\alpha(y))=\left(\underbrace{f_\alpha(y)}_{\in F}|\underbrace{x}_{\in F^\perp}\right)=0.$

<u>Remarque :</u> Pour les questions 5)c), 6 et 7, on peut au préalable déterminer la matrice que f_α dans une base orthonormée adaptée à la décomposition $E=\mathrm{Vect}(w)\oplus(\mathrm{Vect}(w))^\perp$ qui est $\begin{pmatrix}1+\alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

On ainsi que f_α est diagonalisable, que f_α est inversible si, et seulement si, $\alpha\neq -1$ et que c'est une isométrie si, et seulement si, $|1+\alpha|=1$, c'est à dire $\alpha=-2$ puisque $\alpha\neq 0$.

Exercice 3

On considère la courbe paramétrée Γ admettant pour représentation paramétrique :

$$\varphi : t\mapsto \begin{cases} x(t)=t+\dfrac{1}{2t^2}\\ y(t)=\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{t}\end{cases},t\in\mathbb{R}^*$$

1. Déterminer $\varphi\left(\dfrac{1}{t}\right)$ en fonction de $\varphi(t)$, et en déduire que l'on peut réduire le domaine d'étude de l'arc paramétré à $[-1,0[\cup]0,1]$.

On précisera quelle transformation permet d'obtenir la courbe en entier.

Pour $t\neq 0$, on a : $\begin{cases} x\left(\dfrac{1}{t}\right)=y(t)\\ y\left(\dfrac{1}{t}\right)=x(t)\end{cases}$.

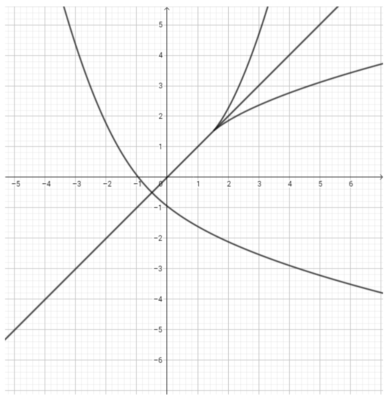
On en déduit que l'on peut réduire le domaine d'étude de l'arc paramétré à $[-1,0[\cup]0,1]$.
On obtient le reste de la courbe à l'aide d'une symétrie par rapport à la droite d'équation $y=x$.

2. Etudier φ et tracer Γ dans un repère orthonormé.

$\begin{cases} x'(t)=\dfrac{t^3-1}{t^3}\\ y(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2}\end{cases}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

t	-1		0		1
$x'(t)$	2	$+$	‖	-	0
x	$-1/2$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$3/2$
$y'(t)$	-2	-	‖	-	0
y	$-1/2$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$3/2$

Pour $t = 1$, on a un point singulier. $x''(1) = 3$ et $y''(1) = 3$; on en déduit qu'il s'agit d'un rebroussement. L'axe de symétrie permet de dire qu'il est de première espèce.
$\frac{y}{x} \underset{0}{\sim} 2t$. On en déduit que $\lim_{t \to 0} \left| \frac{y}{x} \right| = 0$, puis que la courbe admet une branche parabolique de direction (Ox).
On obtient la courbe suivante :



Exercice 4

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On considère la courbe paramétrée $\mathscr{C}$ admettant pour représentation paramétrique :

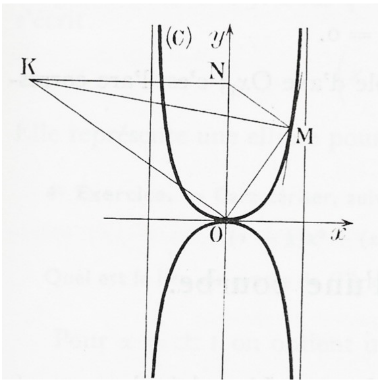
$$\begin{cases} x(t) = a \sin t \\ y(t) = a \dfrac{\sin^2 t}{\cos t} \end{cases}, \text{ où } a \in \mathbb{R}_+^*$$

1. a. Justifier que l'on peut réduire le domaine d'étude de l'arc paramétré à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Les fonctions x et y sont 2π-périodiques, on peut donc réduire l'étude de l'arc à un intervalle de longueur 2π, et on aura l'intégralité de la courbe.
x est impaire, et y est paire. On peut donc étudier l'arc sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, le reste de la courbe s'obtenant à l'aide d'une symétrie d'axe (Oy).
Enfin, $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$. On peut donc étudier l'arc sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, la courbe correspondant à $t \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ s'obtenant à l'aide d'une symétrie d'axe (Ox).

b. Etudier l'arc paramétré, puis tracer $\mathscr{C}$ pour $a = 2$.
$\begin{cases} x'(t) = a \cos t \\ y(t) = a \dfrac{2 \sin t \cos^2 t + \sin^3 t}{\cos^2 t} = a \dfrac{\sin t (1 + \cos^2 t)}{\cos^2 t} \end{cases}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

t	0		$\pi/2$
$x'(t)$		$+$	0
x	0	$\nearrow$	a
$y'(t)$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe admet une tangente horizontale pour $t = 0$ et une asymptote d'équation $x = a$.
On obtient la courbe suivante :



2. Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on note $M(t)$ le point de $\mathscr{C}$ de coordonnées $(x(t), y(t))$.

a. Exprimer $OM(t)$ à l'aide de a et de t.

$OM(t) = a\sqrt{\sin^2 t + \dfrac{\sin^4 t}{\cos^2 t}} = a\sqrt{\dfrac{\sin^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}{\cos^2 t}} = a\tan t$, car $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b. La perpendiculaire à $(OM(t))$ en $M(t)$ coupe $(0y)$ en N. Montrer que $MN = a$.

On note α l'angle $\left(\overrightarrow{OM(t)}, \vec{j}\right)$. On a : $\tan(\alpha) = \dfrac{x(t)}{y(t)} = \dfrac{\cos t}{\sin t} = \dfrac{1}{\tan t}$.

On a également (dans le triangle OMN rectangle en M) : $\tan(\alpha) = \dfrac{MN}{OM}$. On en déduit que $MN = a$.

c. Montrer que la perpendiculaire en O à $(OM(t))$, la parallèle à (Ox) en N et la normale à $\mathscr{C}$ en $M(t)$ sont concourantes.

La perpendiculaire en O à $(OM(t))$ a pour équation : $x(t)x + y(t)y = 0$, c'est à dire : $\cos t\, x + \sin t\, y = 0$, car $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos t \sin t \neq 0$.

Le point N a pour ordonnée $\dfrac{a}{\cos t}$ (qui est donnée par exemple avec le théorème de Pythagore dans le triangle OMN). La parallèle à (Ox) en N a donc pour équation $y = \dfrac{a}{\cos t}$.

La perpendiculaire en O à $(OM(t))$ et la parallèle à (Ox) en N s'interceptent en le point K de coordonnées $\left(\dfrac{-a\sin t}{\cos^2 t}, \dfrac{a}{\cos t}\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{MK}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{-a\sin t(1+\cos^2 t)}{\cos^2 t}, a\cos t\right)$; il est donc normal à la tangente à la courbe en M (dont un vecteur directeur est donné par $(x'(t), y'(t))$). On en déduit que la normale à $\mathscr{C}$ en $M(t)$ passe par K.