CB N°10 - INTEGRALES A PARAMETRE

EXERCICE 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\mathrm{d}t$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

On note $g : (x,t) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}$ définie sur $]0,+\infty[\times[0,+\infty[$.

- $\forall x \in]0,+\infty[, \forall t \in [0,+\infty[, |g(x,t)| \leq \mathrm{e}^{-xt}$, donc par comparaison à une intégrale de référence convergente, $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
- $\forall t \in [0,+\infty[, x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
- $\forall x \in]0,+\infty[, t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-t}{1+t}\mathrm{e}^{-xt}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$ $(a>0)$; $\forall x \in [a,b], \forall t \in [0,+\infty[, \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-at}$.

  La fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (c'est une intégrale de référence).

Le théorème de dérivation donne f de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

2. Donner une équation différentielle vérifiée par f.

La formule de Leibniz donne : $\forall x \in]0,+\infty[, f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-t}{1+t}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-t}{1+t}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ convergent donc, par linéarité des intégrales généralisées, on a :

$f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-(t+1)}{1+t}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = f(x) - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = f(x) - \frac{1}{x}$.

Ainsi f est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle : $y' - y = -\dfrac{1}{x}$.

EXERCICE 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{ixt}\mathrm{d}t$

1. Calculer $f(0)$.

On rappelle l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On note $\varphi : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$.

$\rightsquigarrow$ φ est positive et continue sur $]0,+\infty[$ donc localement intégrable.

$\rightsquigarrow$ En 0 : $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$; $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est une intégrale de Riemann convergente donc, par comparaison de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t$ converge.

$\rightsquigarrow$ En $+\infty$: Sur $[1,+\infty[, 0 \leq \varphi(t) \leq \mathrm{e}^{-t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est une intégrale de référence convergente donc, par comparaison de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$ converge.

Finalement, φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On a : $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$. On effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}$ (qui donne $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$)

bijectif de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$, et on obtient :
$f(0)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}2\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}$.

2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On note $g:(x,t)\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{ixt}$ définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.

- $\forall x\in\mathbb{R}, |g(x,t)|=\varphi(t)$ donc $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, d'après la question précédente.
- $\forall t\in]0,+\infty[, x\mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x\in\mathbb{R}, t\mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=i\sqrt{t}\mathrm{e}^{-t+ixt}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- $\forall x\in\mathbb{R}, \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|=\sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}$; La fonction $t\mapsto\sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc localement intégrable, et $\sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}=o_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, elle est donc intégrable sur $[0,+\infty[$.

Le théorème de dérivation donne f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que f est solution de l'équation différentielle

$$y'=\frac{i-x}{2(1+x^2)}\,y \quad (E)$$

La formule de Leibniz donne : $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} i\sqrt{t}\mathrm{e}^{-t+ixt}\mathrm{d}t$.

On considère les fonctions $u:t\mapsto\dfrac{-i\mathrm{e}^{-t(1-ix)}}{1-ix}$ et $v:t\mapsto\sqrt{t}$.

Elles sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[, \lim\limits_{+\infty} uv=0$ et on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} i\sqrt{t}\mathrm{e}^{-t+ixt}\mathrm{d}t$ converge donc le théorème d'intégration par parties donne :
$f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} i\sqrt{t}\mathrm{e}^{-t+ixt}\mathrm{d}t=\frac{i}{2(1-ix)}f(x)=\frac{i-x}{2(1+x^2)}f(x)$.

4. Résoudre (E) est en déduire l'expression de f.

On a : $\displaystyle\int\frac{i-x}{2(1+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{i}{2}\mathrm{Arctan}(x)-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+C,\ C\in\mathbb{R}$.

On en déduit (avec la question 1) que pour $x>0, f(x)=\sqrt{\pi}\,\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{i}{2}\mathrm{Arctan}(x)}}{\sqrt[4]{1+x^2}}$.