CB n°5 - Espaces préhilbertiens - Sujet 1

Pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

1. Questions préliminaires d'analyse.

a. Justifier que pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ converge.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I_n = \dfrac{n}{2} I_{n-1}$.

c. Calculer I_0, et en déduire I_1, I_2, I_3 et I_4.

2. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3. Déterminer une base orthonormée de $\text{Vect}\{X^0, X\}$ pour ce produit scalaire.

4. Calculer la distance de X^2 à $\text{Vect}\{X^0, X\}$.

CB n°5 - Espaces préhilbertiens - Sujet 2

Pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3t} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

1. Questions préliminaires d'analyse.

a. Justifier que pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3t} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ converge.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-3t}\mathrm{d}t$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I_n = \dfrac{n}{3} I_{n-1}$.

c. Calculer I_0, et en déduire I_1, I_2, I_3 et I_4.

2. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3. Déterminer une base orthonormée de $\text{Vect}\{X^0, X\}$ pour ce produit scalaire.

4. Calculer la distance de X^2 à $\text{Vect}\{X^0, X\}$.