⋆ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse ⋆

Math. - CC 3 - S1 - Analyse

vendredi 14 décembre 2018 - Durée 1 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Partie 1

1. Soit y une fonction de la variable réelle t.
Donner la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' = 0 \qquad (\mathscr{E}_c)$$

2. On considère la série entière $\sum_{p\geq 0}(-1)^p t^{2p}$.
Donner son rayon de convergence et sa somme lorsqu'elle est définie.

3. On considère la série entière $\sum_{p\geq 0}(-1)^p t^{2p+1}$.
Donner son rayon de convergence et sa somme lorsqu'elle est définie.

Partie 2

On considère l'équation différentielle :

$$(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0 \qquad (\mathscr{E}_h)$$

1. a. Montrer que f est une solution de $(\mathscr{E}_h)$ si, et seulement si, $\varphi : t \mapsto (1+t^2)f(t)$ est une fonction affine de t (on pensera à calculer sa dérivée seconde).

b. Montrer que $\left\{t \mapsto \frac{1}{1+t^2}, t \mapsto \frac{t}{1+t^2}\right\}$ est une base de l'espace des solutions de $(\mathscr{E}_h)$.

2. Dans cette question, on propose une autre méthode pour déterminer les solutions de l'équation homogène $(\mathscr{E}_h)$.
On recherche les solutions de $(\mathscr{E}_h)$ développables en série entière au voisinage de 0, sous la forme
$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, de rayon de convergence $R > 0$, et où les a_n, $n \in \mathbb{N}$, sont des réels.

a. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation de récurrence entre a_{n+2} et a_n.

b. Pour tout entier naturel p, exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p, a_0 et a_1.

c. En déduire une expression simplifiée de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ au voisinage de 0.

Partie 3

Résoudre l'équation différentielle :

$$(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = \frac{1}{1+t^2} \qquad (\mathscr{E})$$

Fin de l'énoncé d'analyse