CB n°4 - ESPACES PREHILBERTIENS - Sujet 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$, la famille $\left(P_0 = X^0, P_1 = X, P_2 = X^2\right) \in E^3$ et le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}\{P_0, P_1, P_2\}$.

On définit sur E^2 l'application suivante :

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2. Montrer que, pour tout polynôme $P \in E$, on a :

$$\left(\int_0^1 tP(t)dt\right)^2 \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 P^2(t)dt.$$

3. Déterminer une base orthonormale (Q_0, Q_1, Q_2) de F.

4. Déterminer $p_F\left(X^3\right)$.

CB n°4 - ESPACES PREHILBERTIENS - Sujet 2

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$, la famille $\left(P_0 = X^0, P_1 = X, P_2 = X^2\right) \in E^3$ et le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}\{P_0, P_1, P_2\}$.

On définit sur E^2 l'application suivante :

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2. Montrer que, pour tout polynôme $P \in E$, on a :

$$\left(\int_{-1}^1 tP(t)dt\right)^2 \leqslant \frac{2}{3}\int_{-1}^1 P^2(t)dt.$$

3. Déterminer une base orthonormale (Q_0, Q_1, Q_2) de F.

4. Déterminer $p_F\left(X^3 + X^4\right)$.