$\star$ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse $\star$

Math. - CC 1 - S2 - Analyse

vendredi 12 mars 2021 - Durée 1 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

EXERCICE 1

On cherche les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, vérifiant :

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = a \ , \qquad a \in \mathbb{R}$$

1. On note $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(u,v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$. Montrer que

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{a}{2}$$

2. En déduire les solutions de l'équation initiale.

EXERCICE 2

1. a. $\boxed{\textbf{Convergence}}$

On pose $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ et $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$.

i. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad t^n \mathrm{e}^{-t^2} \underset{t \to +\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

ii. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale J_n est convergente.

iii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.

iv. En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ est convergente.

b. $\boxed{\textbf{Calcul}}$

Pour la suite, on admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

i. Établir à l'aide d'une intégration par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2} I_n$.

ii. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\quad I_{2p+1} = 0$.

iii. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\quad I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$.

2. $\boxed{\textbf{Recherche des extrema}}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2 (t-y)^2 \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$$

a. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}^2$ et que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2 y^2$.

b. Montrer que F possède trois points critiques sur $\mathbb{R}^2$ qui sont $(0,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

c. Déterminer, lorsqu'ils existent, les extremum locaux de F sur $\mathbb{R}^2$.

Fin de l'énoncé d'analyse