Math. – ES 2 - S2 – Analyse-Probabilités

jeudi 23 mai 2019 - Durée 2 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

PROBLEME 1

On considère les fonctions F et G définies par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin(t)}{t}\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\cos(t)}{x}\mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout réel $t > 0$:

$$\frac{|\sin(t)|}{t} \leq 1$$

2. Montrer que F et G sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $[a, b]$. Que conclure ?

4. Pour tout réel $x > 0$, comparer $F'(x)$ et $G(x)$.
On pensera à remarquer que $G(x) = \lim\limits_{X\to+\infty}\left(\int_0^X \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin(t)}{x}\mathrm{d}t\right)$, afin de pouvoir intégrer par parties.

5. Montrer que pour tout réel $x > 0$:

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

6. Montrer que F a une limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$.

7. Déduire des questions précédentes l'expression de $F(x)$ pour tout réel $x > 0$.

8. On admet que

$$\lim_{x\to 0}\left(\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin(t)}{t}\mathrm{d}t\right) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin(t)}{t}\right)\mathrm{d}t$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$$

T.S.V.P.

PROBLEME 2

On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$$

1. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p.

a. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X > n)$.

b. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p. On note T le rang du premier succès obtenu :

$$T = \inf\{k \geq 1, X_k = 1\}$$

Montrer que T a la même loi que X.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p.

a. Rappeler le développement en série entière en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, ainsi que le rayon de convergence.

b. En déduire le développement en série entière en 0 de $g : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$, ainsi que le rayon de convergence.

c. Calculer la fonction génératrice de X.

d. En déduire la fonction génératrice de $X + Y$.

e. En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\mathbb{P}(X + Y = n) = p^2(n-1)(1-p)^{n-2}$.

f. Déterminer, pour $n \geq 2$ la loi de X sachant $X + Y = n$.

3. On considère toujours X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. On pose $T = \max(X, Y)$ et $Z = \min(X, Y)$. On pose $q = 1 - p$.

a. Exprimer $X + Y$ et $|X - Y|$ en fonction de Z et T.

b. Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = \dfrac{p}{1+q}$.

c. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z > n)$.

d. En déduire que Z suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

e. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T \leq n)$.

f. En déduire la loi de T.