CB n°6 - Systèmes différentiels - Sujet 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) - z(t) + t\mathrm{e}^t \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t) - z(t) + t\mathrm{e}^t \\ z'(t) = -x(t) - y(t) + 3z(t) + t\mathrm{e}^t \end{cases}$$

Soit $X'(t) = A\ X(t) + B(t)$, l'écriture matricielle du système différentiel avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} t\mathrm{e}^t \\ t\mathrm{e}^t \\ t\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

Réduisons la matrice A. On a $\chi_A = \det(XI_3 - A) = (X-1)(X-4)^2$ et donc χ_A est scindé et $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 4\}$. On a aussi $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_4(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

On conclut que A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ puis $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

On pose $Y(t) = (P^{-1}\ X)(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$, et on obtient :

$$\begin{aligned} X'(t) = A\ X(t) + B(t) &\iff (P^{-1}X)'(t) = D(P^{-1}X)(t) + P^{-1}B(t) \\ &\iff Y'(t) = D\ Y(t) + P^{-1}\ B(t) \\ &\iff \begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + t\mathrm{e}^t \\ y_2'(t) = 4y_2(t) \\ y_3'(t) = 4y_3(t) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y_1(t) = \left(\alpha + \dfrac{t^2}{2}\right)\mathrm{e}^t \\ y_2(t) = \beta\mathrm{e}^{4t} \\ y_3(t) = \gamma\mathrm{e}^{4t} \end{cases} \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

où l'on a résolu la première EDL1 par la variation de la constante et les deux autres quasi-immédiatement. Enfin,

$$X(t) = P\ Y(t) \iff \begin{cases} x(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ y(t) = y_1(t) + y_3(t) \\ z(t) = y_1(t) - y_1(t) - y_3(t) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système différentiel est donc

$$S = \left(t \mapsto \frac{t^2}{2}\ \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \mapsto \mathrm{e}^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t \mapsto \mathrm{e}^{4t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

CB n°6 - Systèmes différentiels - Sujet 2

Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = x(t) + 2y(t) + 2z(t) + te^{5t} \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) + 2z(t) + te^{5t} \\ z'(t) = 2x(t) + 2y(t) + z(t) + te^{5t} \end{array}\right.$$

Soit $X'(t) = A\ X(t) + B(t)$, l'écriture matricielle du système différentiel avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} te^{5t} \\ te^{5t} \\ te^{5t} \end{pmatrix}$$

Réduisons la matrice A. On a $\chi_A = \det(XI_3 - A) = (X-5)(X+1)^2$ et donc χ_A est scindé et $\text{Sp}(A) = \{-5, 1\}$. On a aussi $E_5(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

On conclut que A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ puis $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

On pose $Y(t) = (P^{-1}\ X)(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$, et on obtient :

$$\begin{aligned} X'(t) = A\ X(t) + B(t) &\iff (P^{-1}X)'(t) = D(P^{-1}X)(t) + P^{-1}B(t) \\ &\iff Y'(t) = D\ Y(t) + P^{-1}\ B(t) \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} y_1'(t) = 5y_1(t) + te^{5t} \\ y_2'(t) = -y_2(t) \\ y_3'(t) = -y_3(t) \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} y_1(t) = \left(\alpha + \dfrac{t^2}{2}\right) \mathrm{e}^{5t} \\ y_2(t) = \beta \mathrm{e}^{-t} \\ y_3(t) = \gamma \mathrm{e}^{-t} \end{array}\right. \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

où l'on a résolu la première EDL1 par la variation de la constante et les deux autres quasi-immédiatement.
Enfin,

$$X(t) = P\ Y(t) \iff \left\{\begin{array}{l} x(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ y(t) = y_1(t) + y_3(t) \\ z(t) = y_1(t) - y_1(t) - y_3(t) \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions du système différentiel est donc

$$S = \left(t \mapsto \frac{t^2}{2}\ \mathrm{e}^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \text{Vect}\left(t \mapsto \mathrm{e}^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$