⋆ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse ⋆

Math. - CC 2 - S2 - Analyse

vendredi 29 mars 2019 - Durée 2 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = y^2 - x^2y + x^2$$

1. Etudier les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

2. On considère l'ensemble suivant :

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

a. Représenter rapidement K.

b. Montrer que K est fermé et borné. On admettra que K est fermé.

c. Déterminer les extrema de f sur K.

Exercice 2

1. Soient $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et $f : \left| \begin{array}{rcl}]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x^2+y^2)\ln(x) + \varphi(x^2+y^2) \end{array} \right.$

a. Exprimer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ à l'aide de la dérivée de φ.

b. Exprimer simplement $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2. On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = xy + \frac{y^3}{x}, \quad (x,y) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R} \qquad (1)$$

Pour résoudre (1), on passe des coordonnées cartésiennes (x,y) aux coordonnées polaires (r,θ).
On note $f(x,y) = F(r,\theta)$.

a. Montrer que (1) est équivalente à l'équation aux dérivées partielles en les variables r et θ :

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -r^2 \tan\,\theta$$

b. En déduire une famille de fonctions solutions de l'équation aux dérivées partielles (1).

T.S.V.P.

Exercice 3

Le but de l'exercice est de calculer
$$J = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
On note
$$F : x \mapsto \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$.

2. Montrer que
$$\forall (x,t) \in]-1,+\infty[\times[0,1],\ \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)} = \frac{-x}{(1+x^2)(1+xt)} + \frac{x+t}{(1+x^2)(1+t^2)}$$

3. En déduire l'expression de $F'(x)$ pour $x \in]-1,+\infty[$.

4. Montrer que pour $x > -1$:
$$F(x) = \frac{\ln(2)}{2}\mathrm{Arctan}(x) + \frac{\pi}{8}\ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

5. En déduire une valeur de J.

Exercice 4

Le but de l'exercice est de calculer
$$K = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$
On note :
$$G : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t$$

1. Montrer que G est continue sur $[0,+\infty[$.

2. Montrer que G est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

3. Montrer que G est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle :
$$y - y' = \frac{K}{\sqrt{x}}$$

4. En déduire l'expression de $G(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$.

5. Montrer que $G(0) = \pi$.

6. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$ (on pourra utiliser un encadrement).

7. En déduire la valeur de K.

Fin de l'énoncé d'analyse