CB n°3 - Diagonalisation - Sujet 1

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Justifier la réponse.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

On a : $\chi_A = X(X-2)(X+5)$. Le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples. On en déduit que la matrice A est diagonalisable.

2. $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

On a : $\chi_B = (X-4)(X-2)^2$.

De plus, $B - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}(B - 2\mathrm{I}_3) = 2$, d'où : $\dim(E_2) < m(2)$.

On en déduit que la matrice B n'est pas diagonalisable.

3. $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

On a : $\chi_C = (X-3)(X-1)^2$.

De plus, $C - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}(C - \mathrm{I}_3) = 1$, d'où : $\dim(E_1) = m(1) = 2$ et $\dim(E_3) = m(3) = 1$.

On en déduit que la matrice C est diagonalisable.

CB n°3 - Diagonalisation - Sujet 2

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Justifier la réponse.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

On a : $\chi_A = (X+4)(X-2)^2$.

De plus, $A - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & -7 & 1 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}(A - 2\mathrm{I}_3) = 2$, d'où : $\dim(E_2) < m(2)$.

On en déduit que la matrice A n'est pas diagonalisable.

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

On a : $\chi_B = X(X-2)(X+5)$. Le polynôme caractéristique de B est scindé à racines simples.

On en déduit que la matrice B est diagonalisable.

3. $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

On a : $\chi_C = (X+1)(X-2)^2$.

De plus, $C - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}(C - 2\mathrm{I}_3) = 1$, d'où : $\dim(E_2) = m(2) = 2$ et $\dim(E_{-1}) = m(-1) = 1$.

On en déduit que la matrice C est diagonalisable.