CB n° 12 - PROBABILITES - Sujet 1

EXERCICE 1

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_n = \frac{x}{n(n+1)(n+2)}$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$$

2. Déterminer x pour que p_n définisse une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$.

Il faut $x > 0$ et $\sum_{n\geq 1} p_n$ convergente, avec $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n\geq 1}\left(\left(\frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n}\right)\right)$ est une somme télescopique convergente de somme $\frac{1}{4}$, donc $\sum_{n\geq 1} p_n$ converge et on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \frac{x}{4}$.

Finalement, p_n définit une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$ si, et seulement si $x = 4$.

3. Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant la loi $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet-elle une espérance ?

On a : $np_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{n^2}$, donc par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum_{n\geq 1} np_n$ est absolument convergente, et X admet donc une espérance finie.

4. On pose $Y = (X-3)^2$, où X suit la loi $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a. Déterminer la loi de Y.

On a : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $Y(\Omega) = \left\{n^2, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Pour $n = 0$: $\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{15}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}(Y=n^2) = \mathbb{P}((X-3)^2 = n^2) = \mathbb{P}(X-3=n) + \mathbb{P}(X-3=-n)$.

Pour $n = 1$: $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=4) + \mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{5}$.

Pour $n = 2$: $\mathbb{P}(Y=4) = \mathbb{P}(X=5) + \mathbb{P}(X=1) = \frac{24}{35}$.

Pour $n \geq 3$: $\mathbb{P}(Y=n^2) = \mathbb{P}(X=3+n) = \frac{4}{(n+3)(n+4)(n+5)}$.

b. Y admet-elle une espérance ?

D'après le théorème de transfert, si Y admet un espérance alors $\sum (n-3)^2\mathbb{P}(X=n)$ converge, or $(n-3)^2\mathbb{P}(X=n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{n}$, donc par comparaison à une série positive divergente, la série diverge, et Y n'admet pas une espérance finie.

EXERCICE 2

On lance (indéfiniment) une pièce déséquilibrée, Pile étant obtenu avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
On note X (resp. Y) la variable aléatoire qui donne le rang d'apparition du premier Pile (resp. Face).

1. Déterminer la loi de X.
X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.

2. Justifier (précisément) que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{2^{j-1}}{3^j} & \text{si } 1 = i < j \\ \frac{2}{3^i} & \text{si } 1 = j < i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n : "Obtenir Face au n-ième lancer".
Soit $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On cherche $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$.
Le premier jet donne soit Pile, soit Face, donc si ni i ni j ne vaut 1, la probabilité est nulle. De plus, on ne peut pas avoir Pile et Face au même lancer, donc si $i = j$ la probabilité est nulle.
Si $1 = i < j$, on a : $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \cdots \cap \overline{F_{j-1}} \cap F_j) = \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} \times \frac{1}{3} = \frac{2^{j-1}}{3^j}$
(d'après la formule des probabilités composées, avec des jets indépendants).
Si $1 = j < i$, on a : $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{i-1} \cap \overline{F_i}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3^i}$
(d'après la formule des probabilités composées, avec des jets indépendants).

3. Comment peut-on retrouver la loi de X ?

Soit $i \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j)$.

Si $i = 1$: $\mathbb{P}(X = 1) = \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{2^{j-1}}{3^j} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$.

Si $i \neq 1$: $\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(X = i, Y = 1) = \frac{2}{3^i}$.

On retrouve bien une loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.

4. Déterminer la covariance du couple (X, Y).
On a : $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

On rappelle que pour $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(XY = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\mathbb{P}(X = 1, Y = n) + \mathbb{P}(X = n, Y = 1)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) + \frac{2}{3}\left(\sum_{n=2}^{+\infty} n\frac{1}{3^{n-1}}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} - 1\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} - 1\right) = \frac{21}{6}.$$

De plus, $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$ et $\mathbb{E}(Y) = 3$, donc $\mathrm{cov}(X, Y) = -1$.

5. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$.
On a $S(\Omega) = [\![3, +\infty[\![$. Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$:

$\mathbb{P}(S = n) = \mathbb{P}(X = 1, Y = n - 1) + \mathbb{P}(Y = 1, X = n - 1) = \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^{n-1}}$.

CB N° 12 - PROBABILITES - SUJET 2

EXERCICE 1

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n = \frac{x}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+3}$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2(n+3)}$$

2. Déterminer x pour que p_n définisse une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$.

Il faut $x > 0$ et $\sum\limits_{n\geq 0} p_n$ convergente, avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\left(\frac{1}{2(n+3)} - \frac{1}{2(n+2)} \right) - \left(\frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)} \right) \right)$ est une somme télescopique convergente de somme $\frac{1}{4}$, donc $\sum\limits_{n\geq 0} p_n$ converge et on a : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = \frac{x}{4}$.

Finalement, p_n définit une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ si, et seulement si $x = 4$.

3. Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivant la loi $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une espérance ?

On a : $np_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{n^2}$, donc par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum\limits_{n\geq 0} np_n$ est absolument convergente, et X admet donc une espérance finie.

4. On pose $Y = (X-2)^2$, où X suit la loi $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a. Déterminer la loi de Y.

On a : $X(\Omega) = \mathbb{N}$, donc $Y(\Omega) = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$.

Pour $n = 0$: $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{15}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}(Y = n^2) = \mathbb{P}((X-2)^2 = n^2) = \mathbb{P}(X - 2 = n) + \mathbb{P}(X - 2 = -n)$.

Pour $n = 1$: $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{5}$.

Pour $n = 2$: $\mathbb{P}(Y = 4) = \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 0) = \frac{24}{35}$.

Pour $n \geq 3$: $\mathbb{P}(Y = n^2) = \mathbb{P}(X = 2 + n) = \frac{4}{(n+3)(n+4)(n+5)}$.

b. Y admet-elle une espérance ?

D'après le théorème de transfert, si Y admet un espérance alors $\sum (n-3)^2 \mathbb{P}(X = n)$ converge, or $(n-3)^2\mathbb{P}(X = n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{n}$, donc par comparaison à une série positive divergente, la série diverge, et Y n'admet pas une espérance finie.

EXERCICE 2

On lance (indéfiniment) une pièce déséquilibrée, Pile étant obtenu avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
On note X (resp. Y) la variable aléatoire qui donne le rang d'apparition du premier Pile (resp. Face).

1. Déterminer la loi de X.
X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

2. Justifier (précisément) que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{2}{3^j} & \text{si } 1 = i < j \\ \frac{2^{i-1}}{3^i} & \text{si } 1 = j < i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n : "Obtenir Face au n-ième lancer".
Soit $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On cherche $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$.
Le premier jet donne soit Pile, soit Face, donc si ni i ni j ne vaut 1, la probabilité est nulle. De plus, on ne peut pas avoir Pile et Face au même lancer, donc si $i = j$ la probabilité est nulle.
Si $1 = i < j$, on a : $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \cdots \cap \overline{F_{j-1}} \cap F_j) = \left(\frac{1}{3}\right)^{j-1} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3^j}$
(d'après la formule des probabilités composées, avec des jets indépendants).
Si $1 = j < i$, on a : $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{i-1} \cap \overline{F_i}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \times \frac{1}{3} = \frac{2^{i-1}}{3^i}$
(d'après la formule des probabilités composées, avec des jets indépendants).

3. Comment peut-on retrouver la loi de X ?
Soit $i \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j)$.
Si $i = 1$: $\mathbb{P}(X = 1) = \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{2}{3^j} = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$.
Si $i \neq 1$: $\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(X = i, Y = 1) = \frac{2^{i-1}}{3^i}$.
On retrouve bien une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

4. Déterminer la covariance du couple (X, Y).
On a : $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
On rappelle que pour $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \frac{1}{(1 - x)^2}$.

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbb{P}(XY = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\mathbb{P}(X = 1, Y = n) + \mathbb{P}(X = n, Y = 1) \right)$$

$$= \frac{2}{3} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right) + \frac{1}{3} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{(1 - \frac{1}{3})^2} - 1 \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(1 - \frac{2}{3})^2} - 1 \right) = \frac{21}{6}.$$

De plus, $\mathbb{E}(X) = 3$ et $\mathbb{E}(Y) = \frac{3}{2}$, donc $\text{cov}(X, Y) = -1$.

5. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$.
On a $S(\Omega) = [\![3, +\infty[\![$. Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$:
$\mathbb{P}(S = n) = \mathbb{P}(X = 1, Y = n - 1) + \mathbb{P}(Y = 1, X = n - 1) = \frac{2}{3^{n-1}} + \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}$.