CB n°5 - Espaces préhilbertiens - Sujet 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)(1+t^2)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

⇝ Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)(1+t^2)$ est continue sur $[-1,1]$, donc $\varphi(P,Q) \in \mathbb{R}$.

⇝ φ est clairement symétrique et, par linéarité de l'intégrale, linéaire par rapport à sa deuxième variable, donc bilinéaire.

⇝ Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. La fonction $t \mapsto P(t)^2(1+t^2)$ est continue et positive sur $[-1,1]$ donc par positivité de l'intégrale, $\varphi(P,P) \geq 0$; de plus, on a :
$(\varphi(P,P) = 0) \Leftrightarrow (\forall t \in [-1,1], P(t)^2(1+t^2) = 0) \Leftrightarrow (\forall t \in [-1,1], P(t) = 0)$.
Ainsi, si $\varphi(P,P) = 0$, alors le polynôme P admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

Finalement, φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive, c'est un produit scalaire.
On notera par la suite $\varphi(P,Q) = (P|Q)$.

2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Remarquons tout d'abord que pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}$:

$$(X^n|X^m) = \int_{-1}^{1} t^{n+m} + t^{2+n+m}\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } n+m \text{ est impair} \\ \dfrac{2}{n+m+1} + \dfrac{2}{n+m+3} & \text{si } n+m \text{ est pair} \end{cases}$$

On notera (P_0, P_1, P_2) la base orthonormée.

⋆ $(X^0|X^0) = \dfrac{8}{3}$; on prend donc $P_0 = \sqrt{\dfrac{3}{8}}X^0$.

⋆ $X - \underbrace{(X|P_0)}_{0}P_0 = X$ et $(X|X) = \dfrac{16}{15}$; on prend $P_1 = \dfrac{\sqrt{15}}{4}X$.

⋆ $X^2 - (X^2|P_0)P_0 - \underbrace{(X^2|P_1)}_{0}P_1 = X^2 - \dfrac{2}{5}$ et $\left(X^2 - \dfrac{2}{5}|X^2 - \dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{136}{525}$.

On prend $P_2 = \sqrt{\dfrac{525}{136}}\left(X^2 - \dfrac{2}{5}\right)$.

3. Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

$\mathbb{R}_1[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, admettant pour base orthonormée (P_0, P_1) pour le produit scalaire φ. On en déduit que, dans $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathbb{R}_1[X]^\perp = \mathrm{Vect}\{P_2\}$.

Pour déterminer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$, deux méthodes :

∗ En utilisant la formule : $d\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right) = \|X^2 - p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)\|$.

On a : $p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = (X^2|P_0)P_0 + (X^2|P_1)P_1 = \dfrac{2}{5}$, donc $d\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right) = \|X^2 - \dfrac{2}{5}\| = \sqrt{\dfrac{136}{525}}$ (qui a déjà été calculé !).

∗ En utilisant la formule $d\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right) = \|p_{\mathbb{R}_1[X]^\perp}(X^2)\|$.

On a : $d\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right) = \|(X^2|P_2)P_2)\| = |(X^2|P_2)| = \sqrt{\dfrac{136}{525}}$

CB N°5 - Espaces préhilbertiens - Sujet 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)(1-t^2)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

$\rightsquigarrow$ Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)(1-t^2)$ est continue sur $[-1,1]$, donc $\varphi(P,Q) \in \mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ φ est clairement symétrique et, par linéarité de l'intégrale, linéaire par rapport à sa deuxième variable, donc bilinéaire.

$\rightsquigarrow$ Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. La fonction $t \mapsto P(t)^2(1-t^2)$ est continue et positive sur $[-1,1]$ donc par positivité de l'intégrale, $\varphi(P,P) \geq 0$; de plus, on a :
$(\varphi(P,P)=0) \Leftrightarrow (\forall t \in [-1,1], P(t)^2(1-t^2)=0) \Leftrightarrow (\forall t \in]-1,1[, P(t)=0)$.
Ainsi, si $\varphi(P,P)=0$, alors le polynôme P admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

Finalement, φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive, c'est un produit scalaire.
On notera par la suite $\varphi(P,Q) = (P|Q)$.

2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Remarquons tout d'abord que pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}$:

$$(X^n|X^m) = \int_{-1}^{1} t^{n+m} - t^{2+n+m}\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } n+m \text{ est impair} \\ \dfrac{2}{n+m+1} - \dfrac{2}{n+m+3} & \text{si } n+m \text{ est pair} \end{cases}$$

On notera (P_0, P_1, P_2) la base orthonormée.

- $\star$ $(X^0|X^0) = \dfrac{4}{3}$, on prend donc $P_0 = \sqrt{\dfrac{3}{4}}X^0$.
- $\star$ $X - \underbrace{(X|P_0)}_{0}P_0 = X$ et $(X|X) = \dfrac{4}{15}$; on prend $P_1 = \dfrac{\sqrt{15}}{2}X$.
- $\star$ $X^2 - (X^2|P_0)P_0 - \underbrace{(X^2|P_1)}_{0}P_1 = X^2 - \dfrac{1}{5}$ et $\left(X^2 - \dfrac{1}{5}|X^2 - \dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{32}{525}$.

  On prend $P_2 = \sqrt{\dfrac{525}{32}}\left(X^2 - \dfrac{1}{5}\right)$.

3. Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

$\mathbb{R}_1[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, admettant pour base orthonormée (P_0, P_1) pour le produit scalaire φ. On en déduit que, dans $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathbb{R}_1[X]^{\perp} = \mathrm{Vect}\{P_2\}$.

Pour déterminer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$, deux méthodes :

- $*$ En utilisant la formule : $d\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right) = \|X^2 - p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)\|$.

  On a : $p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = (X^2|P_0)P_0 + (X^2|P_1)P_1 = \dfrac{1}{5}$, donc $d\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right) = \|X^2 - \dfrac{1}{5}\| = \sqrt{\dfrac{32}{525}}$ (qui a déjà été calculé).
- $*$ En utilisant la formule $d\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right) = \|p_{\mathbb{R}_1[X]^{\perp}}(X^2)\|$.

  On a : $d\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right) = \|(X^2|P_2)P_2\| = |(X^2|P_2)| = \sqrt{\dfrac{32}{525}}$