CB n°3 - Réduction - Sujet 1

EXERCICE 1

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.
Si oui, donner la matrice diagonale qui leur est semblable.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 5 & -8 & 5 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- $\chi_A = (X-4)(X^2+X+2)$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$. A n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
- $\chi_B = (X-1)(X-2)(X+3)$ est scindé à racines simples donc B est diagonalisable, semblable à $\mathrm{diag}(1, 2, -3)$.
- $\chi_C = (X-2)^2(X-1)$; $C - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  Ainsi, $\mathrm{rg}(C - 2\mathrm{I}_3)=1$ donc $\dim(E_2(C)) = 2 = m(2)$. De plus, $\dim(E_1(C)) = 1 = m(1)$.
  Le polynôme caractéristique est scindé, et les dimensions des espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes. On en déduit que C est diagonalisable, semblable à $\mathrm{diag}(1, 2, 2)$.

EXERCICE 2

Soient $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe une matrice inversible P, **que l'on déterminera**, telle que

$$M = PTP^{-1}$$

On note f l'endomorphisme canoniquement associé à M.
$\det(M - \mathrm{I}_3) = \det(M - 2\mathrm{I}_3) = 0$; on en déduit que 1 et 2 sont valeurs propres de M.
Le polynôme caractéristique de M admet au moins deux racines et il est de degré 3, il est donc scindé dans $\mathbb{R}$, et M est trigonalisable.
De plus, la trace est un invariant de similitude, et $\mathrm{tr}(M) = 5$, on en déduit que f admet une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, dans une base (u, v, w), telle que $u \in E_1(f)$ et $v \in E_2(f)$.
$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}((1, 0, -1))$; on prend $u = ((1, 0, -1))$.
$\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}((0, 1, 2))$; on prend $v = ((0, 1, 2))$.
M semblable à T si, et seulement s'il existe $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\{u, v, w\}$ est libre et $f(w) = v + 2w$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ -x + 2y - z = 1 \\ 2y - z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ 2y - z = 2 \end{cases}$$

$w = (1, 1, 0)$ convient, car $\det(u, v, w) \neq 0$.

Finalement, $M = PTP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

CB n°3 - Réduction - Sujet 2

EXERCICE 1

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.
Si oui, donner la matrice diagonale qui leur est semblable.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\chi_A = X(X-1)(X-2)$ est scindé à racines simples donc A est diagonalisable, semblable à $\mathrm{diag}(0,1,2)$.
- $\chi_B = (X-2)(X^2-2X+10)$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$. B n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
- $\chi_C = (X-2)^2(X+1)$; $C - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  Ainsi, $\mathrm{rg}(C-2\mathrm{I}_3)=1$ donc $\dim(E_2(C)) = 2 = m(2)$. De plus, $\dim(E_{-1}(C)) = 1 = m(-1)$.
  Le polynôme caractéristique est scindé, et les dimensions des espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes. On en déduit que C est diagonalisable, semblable à $\mathrm{diag}(-1,2,2)$.

EXERCICE 2

Soient $M = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe une matrice inversible P, **que l'on déterminera**, telle que

$$M = PTP^{-1}$$

$\det(M+\mathrm{I}_3) = \det(M-2\mathrm{I}_3) = 0$; on en déduit que -1 et 2 sont valeurs propres de M.
Le polynôme caractéristique de M admet au moins deux racines et il est de degré 3, il est donc scindé dans $\mathbb{R}$, et C est trigonalisable.
De plus, la trace est un invariant de similitude, et $\mathrm{tr}(M) = 3$, on en déduit que f admet une matrice de la forme $\begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, dans une base (u,v,w), telle que $u \in E_{-1}(f)$ et $v \in E_2(f)$.
$\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\,((1,0,-1))$; on prend $u = ((1,0,-1))$.
$\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\,((0,2,1))$; on prend $v = ((0,2,1))$.
M semblable à T si, et seulement s'il existe $w = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\{u,v,w\}$ est libre et $f(w) = v+2w$.

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x-3y+6z=0 \\ 4x-2y+4z=2 \\ -x+2y-4z=1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y+2z=0 \\ y-2z=1 \end{array} \right. ;$$

$w = (1,1,0)$ convient car $\det(u,v,w) \neq 0$.

Finalement, $M = PTP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.