CB n° 10 - FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES - SUJET 1

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textbf{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Les théorèmes généraux donnent f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.
De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2}$, et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^2y^2(y^2+3x^2)}{(x^2+y^2)^2}$.
Etude en $(0,0)$:
$\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable en $(0,0)$, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq \dfrac{2||(x,y)||^6}{||(x,y)||^4} = 2||(x,y)||^2$, d'où :
$\forall \varepsilon > 0, ||(x,y)|| \leq \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2}} \Rightarrow \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leq \varepsilon$. On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$.
$\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc f admet une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable en $(0,0)$, et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq \dfrac{4||(x,y)||^6}{||(x,y)||^4} = 4||(x,y)||^2$, d'où :
$\forall \varepsilon > 0, ||(x,y)|| \leq \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \Rightarrow \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| \leq \varepsilon$. On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$.
On peut conclure que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2)$.

a. Montrer que f admet 4 points critiques.
f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, comme fonction polynomiale. Ainsi le gradient et la matrice hessienne de f existent en tout point de $\mathbb{R}^2$.
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{\text{grad}}(f)(x,y) = (3x^2 - 12x, 3y^2 + 12y)$ et $\overrightarrow{\text{grad}}(f)(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 12x = 0 \\ 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$.
Par suite, f admet 4 points critiques qui sont $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,-4)$ et $(4,-4)$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. En calculant $f(x,x)$, montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x,x) = 2x^3$. Si $x > 0$, $f(x,x) > f(0,0) = 0$, et si $x < 0$, $f(x,x) < f(0,0) = 0$.
On conclut que f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

c. Montrer que f admet un minimum local en $(4,0)$.
La matrice hessienne en $(4,0)$ est $H = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$. Comme $\det(H) > 0$ et $\text{tr}(H) > 0$, on en déduit que f admet un minimum local en $(4,0)$.

3. Déterminer, à l'aide du changement de variable $(u,v) = \left(x, \dfrac{y}{x}\right)$, toutes les fonctions $f \in C^1\left(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$ telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x}$$

En posant $f(x,y) = F(u,v) = F\left(x, \dfrac{y}{x}\right)$, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial F}{\partial v}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial F}{\partial v}$$

L'équation devient alors $\dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \dfrac{v}{u}$, avec $F \in C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On en déduit que : $\forall (u,v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, F(u,v) = v\ln(u) + \lambda(v)$, avec $\lambda \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Finalement : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{y}{x}\ln(x) + \lambda\left(\dfrac{y}{x}\right)$, avec $\lambda \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

CB N°10 - FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES - SUJET 2

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2} & \textbf{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textbf{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Montrer que f est $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Les théorèmes généraux donnent f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.

De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x^2y^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2x^5y}{(x^2+y^2)^2}$.

Etude en $(0,0)$:

$\forall t \in \mathbb{R}^*, \dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable en $(0,0)$, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq \dfrac{4||(x,y)||^6}{||(x,y)||^4} = 4||(x,y)||^2$, d'où :

$\forall \varepsilon > 0, ||(x,y)|| \leq \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \Rightarrow \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leq \varepsilon$. On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$.

$\forall t \in \mathbb{R}^*, \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc f admet une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable en $(0,0)$, et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq \dfrac{2||(x,y)||^6}{||(x,y)||^4} = 2||(x,y)||^2$, d'où :

$\forall \varepsilon > 0, ||(x,y)|| \leq \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2}} \Rightarrow \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| \leq \varepsilon$. On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$.

On peut conclure que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$.

a. Montrer que f admet 3 points critiques. (On admettra que $x^3 + y^3 = 0 \iff x + y = 0$)

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, comme fonction polynomiale. Ainsi le gradient et la matrice hessienne de f existent en tout point de $\mathbb{R}^2$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{\text{grad}}(f)(x,y) = (4x^3 - 8(x-y), 4y^3 + 8(x-y))$ et $\overrightarrow{\text{grad}}(f)(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x(x^2-4) = 0 \end{cases}$.

Par suite f admet 3 points critiques qui sont $(0,0)$, $(2,-2)$ et $(-2,2)$.

b. En calculant $f(x,x)$ et $f(x,0)$, montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x,x) = 2x^4$ donc pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x,x) > f(0,0) = 0$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x,0) = x^4 - 4x^2 \underset{x \to 0}{\sim} -4x^2$ donc, sur un voisinage de 0 privé de 0, $f(x,0) < f(0,0) = 0$.

c. Montrer que f admet un minimum local en $(2,-2)$.
La matrice hessienne en $(2,-2)$ est $H = \begin{pmatrix} 40 & 8 \\ 8 & 40 \end{pmatrix}$. Comme $\det(H) > 0$ et $\operatorname{tr}(H) > 0$, on en déduit que f admet un minimum local en $(2,-2)$.

3. Déterminer, à l'aide du changement de variable $(u,v) = (x+y, xy)$, toutes les fonctions $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y^2$$

En posant $f(x,y) = F(u,v) = F\left(x+y, xy\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + y\frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} + x\frac{\partial F}{\partial v} \end{aligned}$$

L'équation devient alors, pour $x \neq y$, $\dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) = u$, avec $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

On en déduit que : $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, F(u,v) = \dfrac{u^2}{2} + \lambda(v)$, avec $\lambda \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Finalement : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{2} + \lambda(xy)$, avec $\lambda \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.