CB N°4 - Séries entières - Sujet 1

EXERCICE 1

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \frac{n^3}{n!} z^n$

On a : $\left|\frac{(n+1)^3 n!}{n^3 (n+1)!}\right| \sim \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La règle de d'Alembert donne le rayon de convergence égal à $+\infty$.

2. $\sum \mathrm{e}^{-3n} z^{2n}$

On a : $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\frac{\mathrm{e}^{-3(n+1)} z^{2(n+1)}}{\mathrm{e}^{-3n} z^{2n}}\right| = \mathrm{e}^{-3}|z|^2$.

D'après le critère de d'Alembert, si $|z^2|\mathrm{e}^{-3} < 1$ (c'est-à-dire $|z| < \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$), alors la série est absolument convergente et si $|z^2|\mathrm{e}^{-3} > 1$ (c'est-à-dire $|z| > \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$) la série est divergente.

On en déduit que le rayon de convergence est $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$

3. $\sum \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n z^n$

Soit $r > 0$; on a : $\left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) r\right)^n = \mathrm{e}^{n\left(\ln(r) + \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)} = \mathrm{e}^{n\left(\ln(r) + \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}$.

Ainsi, la suite $\left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n r^n\right)$ est bornée si et seulement si $r < 1$ (sinon elle a pour limite $+\infty$).

On en déduit que le rayon de convergence de la série est 1.

4. $\sum \frac{1}{2^n} z^{n^2}$

Soit $r > 0$; on a : $\frac{1}{2^n} r^{n^2} = \mathrm{e}^{n^2\left((\ln(r) - \frac{\ln(2)}{n}\right)}$.

Ainsi, la suite $\left(\frac{1}{2^n} r^{n^2}\right)$ est bornée si et seulement si $r \leq 1$ (sinon elle a pour limite $+\infty$).

On en déduit que le rayon de convergence de la série est 1.

EXERCICE 2

Déterminer les rayons de convergence et les sommes des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n} x^n$

La règle de d'Alembert donne immédiatement un rayon de convergence égal à $\frac{1}{2}$, et d'après le cours, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n} = -\ln(1 - 2x)$.

2. $\sum_{n\geq 0} \frac{2n^2 - 1}{n!} x^n$

La règle de d'Alembert donne immédiatement un rayon de convergence égal à $+\infty$.

Pour tout entier n, on a : $\frac{2n^2 - 1}{n!} = \frac{2n(n-1) + 2n - 1}{n!}$.

Le rayon de convergence de la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est $+\infty$, ainsi, pour tout réel x, on a :
$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2-1}{n!}x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^n}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = (2x^2+2x-1)\mathrm{e}^x$.

EXERCICE 3

Donner les développements en série entière au voisinage de 0 des fonctions suivantes, et préciser les rayons de convergence :

1. $x \mapsto \frac{1}{2+x^2}$

Pour tout réel x tel que $\frac{x^2}{2} < 1$, c'est-à-dire $|x| < \sqrt{2}$, on a d'après le cours :
$\frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^{2n}$.
Le critère de d'Alembert pour les séries numériques donne la convergence de la série pour $|x| < \sqrt{2}$ et la divergence pour $|x| > \sqrt{2}$, ce qui donne une rayon de convergence égal à $\sqrt{2}$.

2. $x \mapsto \ln(2x^2 - 7x + 3)$

Pour tout réel x, on a : $2x^2 - 7x + 3 = (3-x)(1-2x) = 3\left(1 - \frac{x}{3}\right)(1-2x)$.

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, on a d'après le cours :

$\ln(2x^2-7x+3) = \ln(3) + \ln\left(1-\frac{x}{3}\right) + \ln(1-2x) = \ln 3 - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3^n} + 2^n\right)\frac{x^n}{n}$.

De plus, $\left(\frac{1}{3^n} + 2^n\right) \sim 2^n$, donc la série a le même rayon de convergence que la série $\sum \frac{2^n x^n}{n}$; la règle de d'Alembert donne immédiatement ce rayon égal à $\frac{1}{2}$.

CB N°4 - Séries entières - Sujet 2

EXERCICE 1

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \frac{e^n}{n!} z^n$

On a : $\left| \frac{e^{n+1} n!}{e^n (n+1)!} \right| \sim \frac{e}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. La règle de d'Alembert donne le rayon de convergence égal à $+\infty$.

2. $\sum e^{2n} z^{3n}$

On a : $\forall z \in \mathbb{C}^*, \left| \frac{e^{2(n+1)} z^{3(n+1)}}{e^{2n} z^{3n}} \right| = e^2 |z|^3$.

D'après le critère de d'Alembert, si $|z^3| e^2 < 1$ (c'est-à-dire $|z| < e^{-\frac{2}{3}}$), alors la série est absolument convergente et si $|z^3| e^2 > 1$ (c'est-à-dire $|z| > e^{-\frac{2}{3}}$) la série est divergente.
On en déduit que le rayon de convergence est $e^{-\frac{2}{3}}$

3. $\sum \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n z^n$

Soit $r > 0$; on a : $\left(\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) r\right)^n = e^{n\left(\ln(r) + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right)} = e^{n\left(\ln(r) - \frac{2}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}$.

Ainsi, la suite $\left(\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n r^n\right)$ est bornée si et seulement si $r \leq 1$ (sinon elle a pour limite $+\infty$).
On en déduit que le rayon de convergence de la série est 1.

4. $\sum \frac{1}{3^n} z^{n^3}$

Soit $r > 0$; On a : $\frac{1}{3^n} r^{n^3} = e^{n^3\left(\ln(r) - \frac{\ln(3)}{n^2}\right)}$.

Ainsi, la suite $\left(\frac{1}{3^n} r^{n^3}\right)$ est bornée si et seulement si $r \leq 1$ (sinon elle a pour limite $+\infty$).
On en déduit que le rayon de convergence de la série est 1.

EXERCICE 2

Déterminer les rayons de convergence et les sommes des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n}{n} x^n$

La règle de d'Alembert donne immédiatement un rayon de convergence égal à $\frac{1}{3}$, et d'après le cours, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x)^n}{n} = -\ln(1 - 3x)$.

2. $\sum_{n \geq 0} \frac{2 - n^2}{n!} x^n$

La règle de d'Alembert donne immédiatement un rayon de convergence égal à $+\infty$.
Pour tout entier n, on a : $\frac{2 - n^2}{n!} = \frac{-n(n-1) - n + 2}{n!}$.

Le rayon de convergence de la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est $+\infty$, ainsi, pour tout réel x, on a :
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2-n^2}{n!}x^n = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = (-x^2-x+2)\mathrm{e}^x.$

EXERCICE 3

Donner les développements en série entière au voisinage de 0 des fonctions suivantes, et préciser les rayons de convergence :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{2-x^3}$

Pour tout réel x tel que $\left|\dfrac{x^3}{2}\right| < 1$, c'est-à-dire $|x| < \sqrt[3]{2}$, on a d'après le cours :
$\displaystyle\frac{1}{2-x^3} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^3}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{2^{n+1}}.$
Le critère de d'Alembert pour les séries numériques donne la convergence de la série pour $|x| < \sqrt[3]{2}$ et la divergence pour $|x| > \sqrt[3]{2}$, ce qui donne une rayon de convergence égal à $\sqrt[3]{2}$.

2. $x \mapsto \ln(3x^2-5x+2)$

Pour tout réel x, on a : $3x^2-5x+2 = (1-x)(2-3x) = 2(1-x)\left(1-\dfrac{3x}{2}\right)$.

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right[$, on a :

$\displaystyle\ln(3x^2-5x+2) = \ln(2) + \ln(1-x) + \ln\left(1-\frac{3}{2}x\right) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1\right)\frac{x^n}{n}.$

De plus, $\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 1\right) \sim \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$, donc la série a le même rayon de convergence que la série $\sum \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^n x^n}{n}$; la règle de d'Alembert donne immédiatement ce rayon égal à $\dfrac{2}{3}$.