CB N°10 - PROBABILITES -

Exercice 1

Une boîte contient des boules blanches en proportion b, des boules rouges en proportion r, et des boules vertes en proportion v.
Remarque : On a $b, r, v \in]0,1[$, et $b+r+v=1$.

On effectue des tirages successifs avec remise et **on s'arrête au premier changement de couleur**.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On note B_n (resp. R_n, V_n), l'événement "le tirage n donne une boule blanche (resp. rouge, verte)".
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Exprimer $(X=n)$ en fonction des B_i, R_i, V_i, pour $i \in [\![1,n]\!]$.
On a clairement

$$\forall n \geq 2,\ (X=n) = \underbrace{\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i\right) \bigcap \overline{B_n}\right)}_{B} \bigcup \underbrace{\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} R_i\right) \bigcap \overline{R_n}\right)}_{R} \bigcup \underbrace{\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} V_i\right) \bigcap \overline{V_n}\right)}_{V}$$

2. Déterminer la loi de X.
$X(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$ et $\forall n \in X(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=n) =& \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i\right) \bigcap \overline{B_n}\right) + \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} R_i\right) \bigcap \overline{R_n}\right) + \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} V_i\right) \bigcap \overline{V_n}\right)\\ =& b^n(1-b) + r^n(1-r) + v^n(1-v)\end{aligned}$$

du fait de l'incompatibilité deux à deux de B, R et V, et de l'indépendance des tirages.

3. Montrer que X admet une espérance et que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2$$

On rappelle que la série géométrique réelle a pour rayon de convergence 1, que sa somme est de classe C^∞ sur $]-1;1[$, et que les dérivées successives sont les sommes des séries dérivées, de même rayon de convergence, obtenues par dérivation terme à terme.
Ainsi $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ converge si, et seulement si, $|x|<1$, et $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
Puisque $1-b \in]-1;1[$ (resp. $1-r \in]-1;1[$, $1-v \in]-1;1[$), on conclut que $\sum_{n\geq 2} n(1-b)b^{n-1}$ (resp. $\sum_{n\geq 2} n(1-r)r^{n-1}$, $\sum_{n\geq 2} n(1-v)v^{n-1}$) converge, puis par somme, X admet une espérance. De plus,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) =& \sum_{n=2}^{+\infty} n(1-b)b^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(1-r)r^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(1-v)v^{n-1}\\ =& \frac{1-b}{(1-b)^2} - (1-b) + \frac{1-r}{(1-r)^2} - (1-r) + \frac{1-v}{(1-v)^2} - (1-v)\\ =& \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2\end{aligned}$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On relance ensuite cette pièce autant de fois que de *Pile* obtenus au cours de la première série de lancers.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de *Pile* obtenus au cours de la première série de lancers.
Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de *Pile* obtenus au cours de la seconde série de lancers.

1. Reconnaître la loi de X, et donner son espérance.
X suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$, et $\mathbb{E}(X) = \frac{n}{2}$.

2. Déterminer la loi du couple (X, Y).
$X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0; n]\!]$. Soit $(i, j) \in [\![0; n]\!]^2$. La loi de Y sachant $(X = i)$ est la loi $\mathscr{B}\left(i, \frac{1}{2}\right)$ donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left((X=i)\bigcap(Y=j)\right) &= \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}_{(X=i)}(Y=j) \\ &= \binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-i}\binom{i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(1-\frac{1}{2}\right)^{i-j} \\ &= \binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n\binom{i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^i\end{aligned}$$

avec par convention $\binom{i}{j} = 0$ si $j \notin [\![0; i]\!]$.

3. En déduire que Y suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$.
$Y(\Omega) = [\![0; n]\!]$. Soit $j \in [\![0; n]\!]$.
Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=j) &= \sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}\left((X=i)\bigcap(Y=j)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}_{(X=i)}(Y=j) \\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n\binom{i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \sum_{i=j}^{n}\frac{n!}{(n-i)!i!}\frac{i!}{(i-j)!j!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+i} \\ &= \frac{n!}{(n-j)!j!}\sum_{i=j}^{n}\frac{(n-j)!}{(n-i)!(i-j)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+i} \\ &= \binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+j}\sum_{i=0}^{n-j}\binom{n-j}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+j}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{n-j} \\ &= \binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{2j}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-j} \\ &= \binom{n}{j}\left(\frac{1}{4}\right)^j\left(\frac{3}{4}\right)^{n-j}\end{aligned}$$

On peut donc conclure que Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \dfrac{1}{4}\right)$.

4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
D'une part, $\mathbb{P}\Big((X=0)\bigcap(Y=1)\Big) = 0$,

et d'autre part, $\mathbb{P}(X=0) \times \mathbb{P}(Y=1) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times n\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} \neq 0$.

Donc $\mathbb{P}\Big((X=0)\bigcap(Y=1)\Big) \neq \mathbb{P}(X=0) \times \mathbb{P}(Y=1)$, et par suite, X et Y ne sont pas indépendantes.

5. Déterminer le nombre moyen de *Pile* obtenus au cours des deux séries de lancers.
$X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis donc X et Y admettent une espérance, et donc, par propriété, $X+Y$ admet une espérance.
De plus, $\mathbb{E}(X+Y)$ représente le nombre moyen de *Pile* obtenus au cours des deux séries de lancers.
Par linéarité,

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{n}{2} + \frac{n}{4} = \frac{3n}{4}$$