- CC2-S1 - - 2020-2021 -

– Correction - Algèbre –

1. On considère les matrices carrées

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$?
On trouve $\chi_A = (X-2)(X+1)(X-1)$ qui est scindé sur $\mathbb{R}$, puis $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1, 2\}$ et donc, comme les racines sont simples, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
On trouve par ailleurs $\chi_B = (X-4)(X-1)^2$ qui scindé sur $\mathbb{R}$, puis $\mathrm{Sp}(B) = \{1, 4\}$. 1 est racine double. De plus, $\mathrm{rg}(B - \mathrm{I}_3) = 1$ donc, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(B - \mathrm{I}_3)) = 2$ et donc B est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

b. Calculer A^2.
On trouve $A^2 = B$.

c. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
On détermine les sous-espaces propres de A. On trouve $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, puis on a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d. Retrouver sans calcul que B est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
On sait que $B = A^2$ donc, $B = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$. On conclut que B est semblable à D^2 qui est diagonale et réelle. Par définition, B est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

2. On considère maintenant un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. Pour un endomorphisme f de E, f^2 désigne $f \circ f$. La notation Id_E désigne l'endomorphisme identité de E.

a. Soit f, g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(f)$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Puis, $f(y) = f(g(x)) = f \circ g(x) = 0$ puisque $f \circ g = 0$. On conclut que $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(f)$.

b. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme **diagonalisable** de E. On désigne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, ses valeurs propres.

i. Montrer que

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (f - \alpha \mathrm{Id}_E) \circ (f - \beta \mathrm{Id}_E) = (f - \beta \mathrm{Id}_E) \circ (f - \alpha \mathrm{Id}_E)$$

Par linéarité de f, on a :
$(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \circ (f - \beta \mathrm{Id}_E) = f^2 - (\alpha + \beta) f + \alpha\,\beta \mathrm{Id}_E) = (f - \beta \mathrm{Id}_E) \circ (f - \alpha \mathrm{Id}_E)$

ii. Montrer que pour tout vecteur propre v de f

$$(f - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p \mathrm{Id}_E)(v) = 0$$

De la question précédente, on conclut que les endomorphismes $g_i = f - \lambda_i \mathrm{Id}_E$, $i \in [\![1, p]\!]$ commutent deux à deux. De plus, si v est un vecteur propre de f alors il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)(v) = g_i(v) = 0$. Par conséquent, $(f - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p \mathrm{Id}_E)(v) = g_1 \circ \cdots \circ g_p(v) = g_1 \circ \cdots \circ g_{i-1} \circ g_{i+1} \cdots \circ g_p \circ g_i(v) = 0$.

iii. Soit $x \in E$ un vecteur quelconque. En décomposant x dans une base bien choisie, montrer que

$$(f - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p \mathrm{Id}_E)(x) = 0$$

Puisque f est diagonalisable, il existe une base $\mathscr{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de E ($\dim(E) = n$) formée de vecteurs propres de f. Par conséquent, il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.
Par linéarité de l'endomorphisme $(f - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p \mathrm{Id}_E)$ et en tenant compte de la question précédente, on trouve bien $(f - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p \mathrm{Id}_E)(x) = 0$.

c. Soit α, β deux réels distincts. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme de E tel que

$$(f-\alpha \mathrm{Id}_E)\circ(f-\beta \mathrm{Id}_E)=0 \quad (\bigstar)$$

i. Déterminer deux réels a et b tels que $a\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)+b\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Id}_E$.
On a $a\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)+b\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)=(a+b)f-(a\alpha+b\beta)\,\mathrm{Id}_E=\mathrm{Id}_E$. Il suffit donc de trouver a et b tels que $a+b=0$ et $-(a\alpha+b\beta)=1$. On trouve, puisque $\alpha\neq\beta$, $a=\dfrac{1}{\beta-\alpha}$ et $b=-\dfrac{1}{\beta-\alpha}$.

ii. En déduire que $E=\mathrm{Im}\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Im}\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)$.
De la question précédente, on déduit que tout x de E s'écrit $x=y+z$ avec
$y=a\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)\,(x)\in\mathrm{Im}\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)$ et $z=b\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)\,(x)\in\mathrm{Im}\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)$.
Ainsi, $E\subset\mathrm{Im}\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Im}\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)$. L'inclusion contraire étant évidente, on conclut
$E=\mathrm{Im}\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Im}\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)$.

iii. Déduire de $(\bigstar)$ que $\mathrm{Im}\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)\subset\mathrm{Ker}\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)$ et que $\mathrm{Im}\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)\subset\mathrm{Ker}\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)$.
Les résultats des questions *a.* et *b.i.* permettent d'écrire que $\mathrm{Im}\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)\subset\mathrm{Ker}\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)$ et
$\mathrm{Im}\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)\subset\mathrm{Ker}\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)$.

iv. Montrer que $E=\mathrm{Ker}\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Ker}\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)$.
Les deux questions précédentes donnent :
$E=\mathrm{Im}\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Im}\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)\subset\mathrm{Ker}\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Ker}\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)\subset E$,
la dernière inclusion étant évidente.
On a donc bien $E=\mathrm{Ker}\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Ker}\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)$.

v. Montrer que $E=\mathrm{Ker}\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)\oplus\mathrm{Ker}\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)$.
Compte tenu de la question précédente, il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Ker}\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)=\{0\}$.
Soit alors $x\in\mathrm{Ker}\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Ker}\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)$. On a donc $(f-\alpha\mathrm{Id}_E)\,(x)=0$, c'est à dire $f(x)=\alpha x$ et aussi $(f-\beta\mathrm{Id}_E)\,(x)=0$, c'est à dire $f(x)=\beta x$. Par conséquent, $(\alpha-\beta)\,x=0$ puis $x=0$ car $\alpha\neq\beta$.
On a donc bien $E=\mathrm{Ker}\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)\oplus\mathrm{Ker}\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)$.

vi. En déduire que f est diagonalisable.
On en déduit que la concaténation d'une base $\mathscr{B}_\alpha$ de $\mathrm{Ker}\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)$ et d'une base $\mathscr{B}_\beta$ de $\mathrm{Ker}\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)$ forme une base $\mathscr{B}$ de E. Or les vecteurs de $\mathscr{B}_\alpha$ (respectivement $\mathscr{B}_\beta$) sont vecteurs propres de f pour la valeur propre α (respectivement β). On a donc une base $\mathscr{B}$ de E formée de vecteurs propres de f.
On peut conclure que f est diagonalisable.
Dans le cas particulier où l'un des deux noyaux $\mathrm{Ker}\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)$ ou $\mathrm{Ker}\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)$ est réduit au vecteur nul, on peut considérer que la base correspondante est vide, et par conséquent que f est une homothétie.