- CC2-S1 - - 2020-2021 -

– Correction - Analyse –

PARTIE 1

Dans cette partie, α désigne un réel quelconque.

1. A l'aide de la règle de d'Alembert, déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$.

$\left|\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$. Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série est 1.

On notera R_α ce nombre et f_α la somme de la série entière, c'est-à-dire pour tout $x \in]-R_\alpha, R_\alpha[$:

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

2. Justifier que f_α est de classe C^∞ sur $]-R_\alpha, R_\alpha[$.

f_α est la somme d'une série entière. D'après le cours, elle est donc de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence.

3. Montrer que pour tout $x \in]-R_\alpha, R_\alpha[$, $f_\alpha(x) + f_\alpha(-x) = 2^{1-\alpha} f_\alpha(x^2)$.

Pour $x \in]-R_\alpha, R_\alpha[$, les séries étant convergentes, on a :
$f_\alpha(x) + f_\alpha(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+(-1)^n)x^n}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^{2n}}{(2n)^\alpha} = 2^{1-\alpha} f_\alpha(x^2)$.

4. Etablir une relation entre $f'_{\alpha+1}(x)$ et $f_\alpha(x)$, pour tout $x \in]-R_\alpha, R_\alpha[$.

D'après le théorème de dérivation des séries entières, on a pour tout $x \in]-R_\alpha, R_\alpha[$:
$f'_{\alpha+1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{x^{n-1}}{n^{\alpha+1}}$ donc $x\, f'_{\alpha+1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} = f_\alpha(x)$.

5. Justifier que pour tout réel $x \in]-R_\alpha, R_\alpha[$:

$$f_{\alpha+1}(x) = \int_0^x \frac{f_\alpha(t)}{t} \mathrm{d}t$$

Remarquons tout d'abord que pour $t \in]-R_\alpha, 0[\cup]0, R_\alpha[$, $\frac{f_\alpha(t)}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n^\alpha}$ donc la fonction $t \mapsto \frac{f_\alpha(t)}{t}$ se prolonge par continuité en 0, et pour tout $x \in]-R_\alpha, 0[\cup]0, R_\alpha[$ l'intégrale $\int_0^x \frac{f_\alpha(t)}{t} dt$ est faussement impropre en 0. De plus, d'après le théorème de primitivation d'une série entière, on a pour tout $x \in]-R_\alpha, R_\alpha[$:
$\int_0^x \frac{f_\alpha(t)}{t} \mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n^\alpha}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^{\alpha+1}} = f_{\alpha+1}(x)$.

6. Expliciter f_0 et retrouver f_1 et f_{-1} en utilisant les résultats établis dans les questions précédentes.

Pour $x \in]-1, 1[$, $f_0(x) = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$.
D'après la question précédente, pour $x \in]-1, 1[$, $f_1(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} \mathrm{d}t = -\ln(1-x)$, et d'après la question 4, $f_{-1}(x) = x f'_0(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

PARTIE 2
Dans cette partie $\alpha = 2$, et on note $f_2 = S$.

1. Justifier que S est définie sur $[-1, 1]$.

On a montré dans la partie précédente que le rayon de convergence de la série entière est 1. S est donc définie sur $]-1, 1[$.
La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente donc $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente et S est définie en -1 et en 1.

2. On considère la fonction φ définie sur $]0, 1[$ par

$$\varphi(x) = S(x) + S(1-x) + \ln(x)\ \ln(1-x)$$

a. Justifier que φ est de classe C^1 sur $]0, 1[$.

Pour $x \in]0, 1[$, $1 - x \in]0, 1[$. S étant la somme d'une série entière de rayon 1, elle est de classe C^1 sur $]0, 1[$ et la fonction ln est de classe C^1 sur $]0, 1[$.
On en déduit que par produit et somme, φ est de classe C^1 sur $]0, 1[$.

b. Calculer $S'(x)$ pour $x \in]0, 1[$.

D'après le théorème de dérivation d'une série entière, pour tout $x \in]0, 1[$, on a $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$.
On reconnait un développement en série entière usuel et on a pour $x \in]0, 1[$, $S'(x) = \frac{-1}{x} \ln(1-x)$.
Remarque : On pouvait également utiliser les questions 4 et 6 de la partie 1.

c. En déduire que φ est constante sur $]0, 1[$.

Pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $\varphi'(x) = S'(x) - S'(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = 0$.
On en déduit que φ est une fonction constante sur $]0, 1[$.

3. Pour $x \in [0, 1]$, et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2}$.

a. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], |S(x) - S_N(x)| < \varepsilon$.

Soit$(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $n < p$; la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ étant convergente, pour tout $x \in [0, 1]$ on a :
$0 \leq \sum_{k=n+1}^{p} \frac{x^k}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ puis, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ étant convergente, par passage à la limite en p :
$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$
La suite des restes d'une série convergente a une limite nulle, on en déduit :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], |S(x) - S_N(x)| = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < \varepsilon$

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in [1 - r, 1], |S_n(x) - S_n(1)| < \varepsilon$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction S_n est une fonction polynomiale elle est donc continue en 1, ce qui s'exprime formellement comme le résultat attendu.

c. Déduire des deux questions précédentes que S est continue en 1.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question **3.a** il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $x \in [0,1], |S(x) - S_N(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$; cette inégalité est en particulier vraie pour $x = 1$.
D'après la question **3.b** pour l'entier N défini précédemment, il existe $r > 0$ tel que pour $x \in [1-r, 1]$, $|S_N(x) - S_N(1)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Ainsi, pour $x \in [1-r, 1], |S(x) - S(1)| \leq |S(x) - S_N(x)| + |S_N(x) - S_N(1)| + |S_N(1) - S(1)| < \varepsilon$.
S est donc continue en 1.

4. Montrer que pour tout $x \in]0,1[, \varphi(x) = S(1)$.

On vient de montrer que S est continue en 1 et comme S est la somme d'une série entière de rayon strictement positif elle est continue en 0, donc la fonction $S : x \mapsto S(1-x)$ est continue en 1.
De plus, $\ln(x)\ln(1-x) \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)\ln(1-x)$ donc par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x)\ln(1-x) = 0$.
On en déduit que φ se prolonge par continuité en 1, et donc que pour tout $x \in]0,1[, \varphi(x) = S(1) + S(0) + 0 = S(1)$.

5. En admettant que $S(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$, en déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$.

D'après ce qui précède, on a $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) = S(1)$, d'où $2S\left(\dfrac{1}{2}\right) + (-\ln 2)^2 = \dfrac{\pi^2}{6}$; c'est-à-dire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}$$