CB n°5 - Espaces préhilbertiens - Sujet 1

Pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

1. Questions préliminaires d'analyse.

a. Justifier que pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ converge.

Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-2t}$ est continue sur $[0;+\infty[$;
de plus, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} t^2 P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-2t} = 0$ donc $P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-2t} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ converge.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{n}{2} I_{n-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $u : t \mapsto t^n$ et $v : t \mapsto \dfrac{-\mathrm{e}^{-2t}}{2}$. u et v sont de classe C^1 sur $[0;+\infty[$, et $\displaystyle\lim_{+\infty} uv = 0$ par croissances comparées.

D'après le théorème d'intégration par parties, comme on a prouvé la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t$, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \left[\dfrac{-t^n \mathrm{e}^{-2t}}{2}\right]_0^{+\infty} + \dfrac{n}{2} I_{n-1} = \dfrac{n}{2} I_{n-1}$.

c. Calculer I_0, et en déduire I_1, I_2, I_3 et I_4.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t = \left[\frac{-\mathrm{e}^{-2t}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$. On déduit de la question précédente : $I_1 = I_2 = \dfrac{1}{4}$, $I_3 = \dfrac{3}{8}$, $I_4 = \dfrac{3}{4}$.

2. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

⇝ On a montré dans la question **1** que φ est à valeurs réelles.

⇝ φ est clairement symétrique et, par linéarité de l'intégrale généralisée, linéaire par rapport à sa deuxième variable, donc bilinéaire.

⇝ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. La fonction $t \mapsto P(t)^2\mathrm{e}^{-2t}$ est continue et positive sur $[0;+\infty[$ donc par positivité de l'intégrale, $\varphi(P,P) \geq 0$; de plus, on a :
$(\varphi(P,P) = 0) \Leftrightarrow (\forall t \in [0;+\infty[, P(t)^2\mathrm{e}^{-2t} = 0) \Leftrightarrow (\forall t \in [0;+\infty[, P(t) = 0)$.
Ainsi, si $\varphi(P,P) = 0$, alors le polynôme P admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

Finalement, φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive, c'est un produit scalaire.
On notera par la suite $\varphi(P,Q) = (P|Q)$.

3. Déterminer une base orthonormée de $\mathrm{Vect}\{X^0, X\}$ pour ce produit scalaire.

On notera (P_0, P_1) la base orthonormée recherchée.

⋆ $(X^0|X^0) = \dfrac{1}{2}$; on prend $P_0 = \sqrt{2}X^0$.

⋆ $X - \underbrace{(X|P_0)}_{\frac{\sqrt{2}}{4}}P_0 = X - \dfrac{1}{2}$ et $\left(X - \dfrac{1}{2}|X - \dfrac{1}{2}\right)) = \dfrac{1}{8}$; on prend $P_1 = 2\sqrt{2}\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$.

4. Calculer la distance de X à $\mathrm{Vect}\{X^0, X\}$.

On note $F = \mathrm{Vect}\{X^0, X\}$. En utilisant la formule $d(X,F)^2 = \|X^2 - p_F(X^2)\|^2$, on obtient :
$d(X^2,F)^2 = \|X^2 - \underbrace{(X^2|P_0)}_{\frac{\sqrt{2}}{4}}P_0 - \underbrace{(X^2|P_1)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}P_1\|^2 = \|X^2 - 2X + \dfrac{1}{2}\|^2 = \dfrac{1}{8}$, donc $d(X^2,F) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

CB n°5 - Espaces préhilbertiens - Sujet 2

Pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3t} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

1. Questions préliminaires d'analyse.

a. Justifier que pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3t} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ converge.

Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-3t}$ est continue sur $[0;+\infty[$; de plus, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} t^2 P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-3t} = 0$ donc $P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-3t} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3t} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ converge.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-3t}\mathrm{d}t$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I_n = \dfrac{n}{3} I_{n-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $u : t \mapsto t^n$ et $v : t \mapsto \dfrac{-\mathrm{e}^{-3t}}{3}$. u et v sont de classe C^1 sur $[0;+\infty[$, et $\displaystyle\lim_{+\infty} uv = 0$ par croissances comparées.

D'après le théorème d'intégration par parties, comme on a prouvé la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t$, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \left[\dfrac{-t^n \mathrm{e}^{-3t}}{3}\right]_0^{+\infty} + \dfrac{n}{3} I_{n-1} = \dfrac{n}{3} I_{n-1}$.

c. Calculer I_0, et en déduire I_1, I_2, I_3 et I_4.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3t}\mathrm{d}t = \left[\frac{-\mathrm{e}^{-3t}}{3}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{3}$. On déduit de la question précédente :

$I_1 = \dfrac{1}{9}, I_2 = I_3 = \dfrac{2}{27}, I_4 = \dfrac{8}{81}$.

2. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

démonstration en tout point identique au sujet 1

3. Déterminer une base orthonormée de $\mathrm{Vect}\{X^0, X\}$ pour ce produit scalaire.

On notera (P_0, P_1) la base orthonormée recherchée.

- ⋆ $(X^0|X^0) = \dfrac{1}{3}$; on prend $P_0 = \sqrt{3}X^0$.
- ⋆ $X - \underbrace{(X|P_0)}_{\frac{\sqrt{3}}{9}}P_0 = X - \dfrac{1}{3}$ et $\left(X - \dfrac{1}{3} | X - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27}$; on prend $P_1 = 3\sqrt{3}\left(X - \dfrac{1}{3}\right)$.

4. Calculer la distance de X^2 à $\mathrm{Vect}\{X^0, X\}$.

On note $F = \mathrm{Vect}\{X^0, X\}$. En utilisant la formule $d(X,F)^2 = \|X^2 - p_F(X^2)\|^2$, on obtient :

$d\left(X^2, F\right)^2 = \|X^2 - \underbrace{(X^2|P_0)}_{\frac{2\sqrt{3}}{27}}P_0 - \underbrace{(X^2|P_1)}_{\frac{4\sqrt{3}}{27}}P_1\|^2 = \|X^2 - \dfrac{4}{3}X + \dfrac{2}{9}\|^2 = \dfrac{4}{243}$ donc $d\left(X^2, F\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{27}$.