Math. - CC 4 - Correction

EXERCICE 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ dont les coordonnées vérifient la relation suivante :

$$\mathscr{P}_n : \quad (x + y + z + 1) + n(x - 5y + 4z - 2) = 0$$

On note $\mathscr{P}_\infty$ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ dont les coordonnées vérifient :

$$\mathscr{P}_\infty : \quad \begin{cases} x = 1 + s - t \\ y = -1 + s + 3t \\ z = -1 + s + 4t \end{cases}, \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2$$

1. Quelle est la nature géométrique des ensembles $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_\infty$? Les caractériser.
$\mathscr{P}_n$ est défini par l'équation cartésienne

$$(n+1)x + (1-5n)y + (1+4n)z + (1-2n) = 0$$

dans laquelle

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1, 1-5n, 1+4n) \neq (0,0,0)$$

Donc $\mathscr{P}_n$ est le plan de vecteur normal $\overrightarrow{N_n} = \begin{pmatrix} n+1 \\ 1-5n \\ 1+4n \end{pmatrix}$ et contenant $B = (1, -1, -1)$ puisque les coordonnées de B vérifient cette équation.
$\mathscr{P}_\infty = B + \text{Vect}\,(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires. Donc $\mathscr{P}_\infty$ est le plan passant par B et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}_\infty$.
$M(x,y,z) \in \mathscr{P}_\infty \iff \det\left(\overrightarrow{BM}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 0$ ce qui conduit à l'équation cartésienne

$$x - 5y + 4z - 2 = 0$$

3. Montrer que $\mathscr{D} = \mathscr{P}_0 \cap \mathscr{P}_\infty$ est une droite dont on déterminera une représentation paramétrique.
$\overrightarrow{N_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ normal à $\mathscr{P}_0$, et $\overrightarrow{N_\infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ normal à $\mathscr{P}_\infty$. Comme ils ne sont pas colinéaires, $\mathscr{D} = \mathscr{P}_0 \cap \mathscr{P}_\infty$ est donc une droite. Par ailleurs, B est commun à $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_\infty$ donc

$$\mathscr{D} = B + \text{Vect}\left(\overrightarrow{N_0} \wedge \overrightarrow{N_\infty}\right)$$

Enfin, $\vec{w} = \overrightarrow{N_0} \wedge \overrightarrow{N_\infty} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ nous donne la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x &= 1 + 3t \\ y &= -1 - t \\ z &= -1 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{D} \subset \mathscr{P}_n$.
On peut utiliser le paramétrage précédent pour montrer que tout point de $\mathscr{D}$ est un point de $\mathscr{P}_n$.
On peut aussi dire que $M(x,y,z) \in \mathscr{D} \iff M(x,y,z) \in \mathscr{P}_0 \cap \mathscr{P}_\infty$ donc $x+y+z+1 = 0$ et $x - 5y + 4z - 2 = 0$; ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, (x+y+z+1) + n \times (x - 5y + 4z - 2) = 0 + n \times 0 = 0$, et donc $M(x,y,z) \in \mathscr{P}_n$. On a donc bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathscr{D} \subset \mathscr{P}_n$$

5. En déduire l'intersection de $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De manière évidente, $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}_n \cap \mathscr{P}_\infty$. De plus, $\overrightarrow{N_n} \wedge \overrightarrow{N_\infty} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ donc $\mathscr{P}_n \cap \mathscr{P}_\infty$ est une droite.

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}_n \cap \mathscr{P}_\infty = \mathscr{D}$$

6. Calculer la distance d_n du point $A(1,2,3)$ à $\mathscr{P}_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
On utilise le cours (distance d'un point à un plan à l'aide d'une équation cartésienne), et après simplification :

$$d_n = \frac{7+n}{\sqrt{3+42n^2}}$$

7. Étudier la convergence de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On a immédiatement $d_n \sim \dfrac{n}{n\sqrt{42}}$ donc (d_n) converge vers $\dfrac{1}{\sqrt{42}}$.

8. Calculer la distance d_∞ du point $A(1,2,3)$ à $\mathscr{P}_\infty$.
On utilise le cours (distance d'un point à un plan à l'aide d'une équation cartésienne), et après simplification :

$$d_\infty = \frac{1}{\sqrt{42}}$$

9. Calculer la distance d du point $A(1,2,3)$ à $\mathscr{D}$.
On a $\mathscr{D} = B + \text{Vect}\,(\overrightarrow{w})$, et on sait que

$$d = \frac{\|\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{w}\|}$$

Or $\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{AB} = -3 \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}$, donc

$$d = \sqrt{\frac{229}{14}}$$

10. Soient H (resp. H_n, H_∞) le projeté orthogonal de $A(1,2,3)$ sur $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{P}_n, \mathscr{P}_\infty$).
Démontrer que A, H, H_n et H_∞ sont cocycliques c'est-à-dire situés sur un même cercle que l'on caractérisera.
Soit $\mathscr{P}$ le plan orthogonal à $\mathscr{D}$ passant par A. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\overrightarrow{AH_n}$ est normal à $\mathscr{P}_n$, donc (AH_n) et $\mathscr{D}$ sont orthogonales puis $H_n \in \mathscr{P}$.
$\overrightarrow{AH_\infty}$ est normal à $\mathscr{P}_\infty$, donc (AH_∞) et $\mathscr{D}$ sont orthogonales puis $H_\infty \in \mathscr{P}$.
$\overrightarrow{AH_0}$ est normal à $\mathscr{P}_0$, donc (AH_0) et $\mathscr{D}$ sont orthogonales puis $H_0 \in \mathscr{P}$.
On a donc montré que A, H, H_n et H_∞ sont coplanaires.
Par ailleurs , $\overrightarrow{AH_n} \cdot \overrightarrow{HH_n} = \overrightarrow{AH_\infty} \cdot \overrightarrow{HH_\infty} = 0$ donc H_n et H_∞ sont sur le cercle de diamètre $[AH]$, ce qui répond à la question.

EXERCICE 2

1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$P = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$$

$P = (X-1)(X-2)(X-3)$.

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{3X^2 - 12X + 11}{(X-1)(X-2)(X-3)}$$

$\dfrac{3X^2 - 12X + 11}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{1}{X-2} + \dfrac{1}{X-3}$.

3. Déterminer une racine a du polynôme P' (polynôme dérivé de P), et vérifier que

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a-3}=0$$

$P'=3X^2-12X+11$ dont les racines sont $\dfrac{6\pm\sqrt{3}}{3}$; on prend $a=\dfrac{6+\sqrt{3}}{3}$:

$\dfrac{1}{\frac{6+\sqrt{3}}{3}-1}+\dfrac{1}{\frac{6+\sqrt{3}}{3}-2}+\dfrac{1}{\frac{6+\sqrt{3}}{3}-3}=\dfrac{3}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{3}{\sqrt{3}}+\dfrac{3}{-3+\sqrt{3}}=\dfrac{3\left(3-\sqrt{3}\right)}{6}+\sqrt{3}-\dfrac{3\left(3+\sqrt{3}\right)}{6}=0.$

On peut également remarquer que :

$\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{a-2}+\dfrac{1}{a-3}=\dfrac{3a^2-12a+11}{(a-1)(a-2)(a-3)}=0$ car a est racine de $P'=3X^2-12X+11$.

4. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $Q\in\mathbb{R}_n[X]$. On suppose que Q admet n racines distinctes $a_1,a_2,\cdots,a_n$.

a. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{Q'}{Q}$.

Q est un polynôme de degré au plus n admettant n racines distinctes donc ses racines sont de multiplicité 1 et on a : $\dfrac{Q'}{Q}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{X-a_k}$ avec pour $k\in[\![1,n]\!]$, $c_k=\dfrac{Q'(a_k)}{Q'(a_k)}=1$ d'où

$$\frac{Q'}{Q}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-a_k}$$

b. Soit a une racine de Q'. Justifier que a n'est pas une racine de Q et montrer que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a-a_k}=0$$

Les racines de Q étant de multiplicité 1, on en déduit qu'une racine de Q' ne peut pas être une racine de Q sinon elle serait de multiplicité 2.

De la décomposition en éléments simples obtenue précédemment, en évaluant la fraction en a, on obtient : $\dfrac{Q'(a)}{Q(a)}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a-a_k}=0$, puisque $Q'(a)=0$.

EXERCICE 3

1. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, et en déterminer une base :

$$F_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x-y-z=0\right\},\quad \text{et}\quad F_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x-y+z=0 \text{ et } 2x+y-z=0\right\}$$

$F_1=\text{Vect}\left\{(1,1,0),(1,0,1)\right\}$ et $F_2=\text{Vect}\left\{(0,1,1)\right\}$

2. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

$(0,1,1)\notin F_1$ (car les composantes ne vérifient pas l'équation caractéristique) et comme $F_2=\text{Vect}\{(0,1,1)\}$ est de dimension 1, on en déduit que $F_1\cap F_2=\{0\}$.

Comme de plus $\dim(F_1)+\dim(F_2)=\dim(\mathbb{R}^3)$ on en déduit que $F_1\oplus F_2=\mathbb{R}^3$.

Autre méthode :

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

La famille $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$, constituée des vecteurs des bases de F_1 et F_2, est de rang 3 dans $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel de dimension 3, on en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}^3$ et par suite que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

3. Donner la dimension de $F_3=\text{Vect}\{(1,0,1),(1,-2,-1),(0,1,1)\}$.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\0&-2&1\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

On en déduit que la famille $\{(1,0,1),(1,-2,-1),(0,1,1)\}$ est de rang 2 donc liée. Comme $(1,0,1)$ et $(1,-2,-1)$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que F_3 est de dimension 2.

4. Donner une base de $F_1 \cap F_3$ et de $F_1 + F_3$.
On remarque que $F_2 \subset F_3$; comme d'après la question **1** $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^3$, on en déduit que $F_1 + F_3 = \mathbb{R}^3$ et toute base de $\mathbb{R}^3$ est une base de $F_1 + F_3$.
La formule de Grassman donne : $\dim(F_1 \cap F_3) = \dim(F_1) + \dim(F_3) - \dim(F_1 + F_3) = 1$.
Comme $(1, 0, 1) \in F_1 \cap F_3$, on en déduit que $F_1 \cap F_3 = \mathrm{Vect}\{(1, 0, 1)\}$.