CB N°2 - Intégrales généralisées - Sujet 1

EXERCICE 1

Justifier que

$$\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$$

converge et la calculer.

Soit $f : t \mapsto \ln(t)$.
f est continue sur $]0,1]$, donc admet des primitives sur $]0,1]$. $t \mapsto t\ln(t) - t$ est l'une d'elles, et $\forall x \in]0,1]$, $\displaystyle\int_x^1 \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_x^1 = -1 - x\ln(x) + x$ qui tend vers -1 lorsque x tend vers 0.
Donc par définition, $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t = -1$.

EXERCICE 2

Justifier que

$$\int_0^{+\infty} \sin^2(t)\mathrm{d}t$$

diverge.

Soit $f : t \mapsto \sin^2(t)$.
f est continue sur $[0,+\infty[$, donc admet des primitives sur $[0,+\infty[$.
De plus, pour $t \geq 0$, $f(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$ donc une primitive de f sur $[0,+\infty[$ est $t \mapsto \dfrac{2t - \sin(2t)}{4}$, et
$\forall x \in [0,+\infty[$, $\displaystyle\int_0^x \sin^2(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{2t-\sin(2t)}{4}\right]_0^x = \frac{2x - \sin(2x)}{4} \geq \frac{2x-1}{4}$.
Par minoration, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-\sin(2x)}{4} = +\infty$ et donc par définition, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin^2(t)\mathrm{d}t$ diverge.

EXERCICE 3

1. Justifier, sans la calculer, la convergence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan(t)}}{t^2}\mathrm{d}t$$

Soit $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(t)}{t^2}$.
f est continue donc localement intégrale sur $[1,+\infty[$, et positive sur cet intervalle ;
de plus $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{\pi}{2}}{t^2}$, donc, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

2. Calculer alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan(t)}}{t^2}\mathrm{d}t$$

à l'aide d'une intégration par parties. On admettra que $\forall t \neq 0$, $\dfrac{1}{t(t^2+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{t^2+1}$.

Soient $x \in [1,+\infty[$, $u : t \mapsto \mathrm{Arctan}(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{-1}{t}$. u, v sont C^1 sur $[1,x]$.
Par intégration par parties, on obtient :

$\displaystyle\int_1^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{\text{Arctan}(t)}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t(t^2+1)}\mathrm{d}t = \left[-\frac{\text{Arctan}(t)}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\mathrm{d}t$
$\displaystyle= \left[-\frac{\text{Arctan}(t)}{t} + \ln(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_1^x = \left[-\frac{\text{Arctan}(t)}{t} + \ln\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right]_1^x$
$\displaystyle= -\frac{\text{Arctan}(x)}{x} + \ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2).$
Enfin, en passant à la limite lorsque x tend vers $+\infty$, et sachant que $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$, on conclut que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2).$

EXERCICE 4
Soit

$$I = \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t$$

1. Justifier que I converge.
Soit $f : t \mapsto \dfrac{1+t^2}{1+t^4}$. f est continue sur le segment $[0,1]$. L'intégrale existe donc.

2. A l'aide du changement de variable $t = \mathrm{e}^{-x}$, montrer, après l'avoir justifié soigneusement, que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\text{ch}(x)}{1+2\,\text{sh}^2(x)}\mathrm{d}x$$

On rappelle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \textbf{et} \quad \text{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

On pose $t = \mathrm{e}^{-x} = \varphi(x)$. φ est C^1 et bijective de $[0,+\infty[$ dans $]0,1]$.
On peut conclure, par le théorème du changement de variable, que I et $\displaystyle J = \int_{+\infty}^0 \frac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-4x}}\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x$ sont de même nature à savoir convergentes, et par suite égales.
Comme $\displaystyle J = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\text{ch}(x)}{1+2\,\text{sh}^2(x)}\mathrm{d}x$, on a donc bien

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\text{ch}(x)}{1+2\,\text{sh}^2(x)}\mathrm{d}x$$

3. En déduire I.
On a $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{\text{ch}(x)}{1+2\,\text{sh}^2(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2}\,\text{ch}(x)}{1+\left(\sqrt{2}\,\text{sh}(x)\right)^2}\mathrm{d}x = \left[\text{Arctan}\left(\sqrt{2}\,\text{sh}(x)\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

CB N°2 - INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES - SUJET 2

EXERCICE 1

Soit $a > 0$. Justifier que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t$$

converge et la calculer.

Soit $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$.

f est continue sur $[0, +\infty[$, donc admet des primitives sur $[0, +\infty[$. $t \mapsto -\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-at}$ est l'une d'elles, et $\forall x \in [0, +\infty[$, $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-at}\right]_0^x = -\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax} + \frac{1}{a}$ qui tend vers $\frac{1}{a}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Donc par définition, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t = \frac{1}{a}$.

EXERCICE 2

Justifier que

$$\int_0^{+\infty} \cos^2(t)\mathrm{d}t$$

diverge.

Soit $f : t \mapsto \cos^2(t)$.

f est continue sur $[0, +\infty[$, donc admet des primitives sur $[0, +\infty[$.

De plus, pour $t \geq 0$, $f(t) = \dfrac{1 + \cos(2t)}{2}$ donc une primitive de f sur $[0, +\infty[$ est $t \mapsto \dfrac{2t + \sin(2t)}{4}$, et

$\forall x \in [0, +\infty[$, $\displaystyle\int_0^x \cos^2(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{2t + \sin(2t)}{4}\right]_0^x = \frac{2x + \sin(2x)}{4} \geq \frac{2x - 1}{4}$.

Par minoration, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x + \sin(2x)}{4} = +\infty$ et donc par définition, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos^2(t)\mathrm{d}t$ diverge.

EXERCICE 3

1. Justifier, sans la calculer, la convergence de

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

Soit $f : t \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right)$.

f est continue donc localement intégrable sur $[1, +\infty[$, et positive sur cet intervalle ; de plus $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$, donc, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ converge.

2. Calculer alors

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

à l'aide d'une intégration par parties.

Soient $x \in [1, +\infty[$, $u : t \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right)$ et $v : t \mapsto t$. u, v sont C^1 sur $[1, x]$.

Par intégration par parties, on obtient :
$\displaystyle\int_1^x \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \left[t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_1^x - \int_1^x t\frac{-\frac{2}{t^3}}{1+\frac{1}{t^2}}\mathrm{d}t = \left[t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_1^x + 2\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$
$\displaystyle= \left[t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) + 2\mathrm{Arctan}(t)\right]_1^x = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + 2\mathrm{Arctan}(x) - \ln(2) - \frac{\pi}{2}.$
Enfin, en passant à la limite lorsque x tend vers $+\infty$, et sachant que $\displaystyle x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\times\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$, on conclut que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \ln(2).$

EXERCICE 4
Soit

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

1. Justifier que I converge.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$.
f est continue donc localement intégrable sur $[1,+\infty[$, et positive sur cet intervalle ;
de plus $\displaystyle f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$, donc, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge, on en déduit que f est intégrable sur $[1,+\infty[$ puis que I converge.

2. A l'aide du changement de variable $x = \mathrm{e}^t$, montrer, après l'avoir justifié soigneusement, que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(t)}{1+2\,\mathrm{sh}^2(t)}\mathrm{d}t$$

On rappelle que

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \mathrm{ch}(t) = \frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2} \quad \textbf{et} \quad \mathrm{sh}(t) = \frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}$$

On pose $x = \mathrm{e}^t = \varphi(t)$.
φ est C^1 et bijective de $[0,+\infty[$ dans $[1,+\infty[$.
On peut conclure, par le théorème du changement de variable, que I et $\displaystyle J = \int_0^{+\infty}\frac{1+\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^{4t}}(\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t$ sont de même nature à savoir convergentes, et par suite égales.
Comme $\displaystyle J = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-2t}}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{ch}(t)}{1+2\,\mathrm{sh}^2(t)}\mathrm{d}t$, on a donc bien

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(t)}{1+2\,\mathrm{sh}^2(t)}\mathrm{d}t$$

3. En déduire I.
On a $\displaystyle I = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{ch}(t)}{1+2\,\mathrm{sh}^2(t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}(t)}{1+\left(\sqrt{2}\,\mathrm{sh}(t)\right)^2}\mathrm{d}t = \left[\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,(t)\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$