- CC2-S1 - - 2018-2019 -

– Correction - Analyse –

Exercice 1

1. Montrer que la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(t)=\frac{\ln t}{t^2+1}$$

est intégrable sur $]0;+\infty[$, et que l'on a :

$$\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = -\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

- f est continue sur $]0,+\infty[$ donc localement intégrable.
- En 0 : $f(t)\underset{t\to 0}{\sim}\ln(t)$. Par comparaison de fonctions de signe constant sur $]0,1]$, la fonction ln étant intégrable sur $]0,1]$, on a f intégrable sur $]0,1]$.
- En $+\infty$: $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\frac{3}{2}}f(t)=0$, par croissances comparées. On en déduit que $f(t)=o_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$, donc par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, f est intégrable sur $[1,+\infty[$.
- Bilan : f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose $u=\frac{1}{t}=\varphi(t)$; la fonction φ est de classe C^1, bijective de $[1,+\infty[$ dans $]0,1]$.

D'après le point précédent, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge. Le théorème de changement de variable donne :

$$\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=\int_1^0 \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{\frac{1}{u^2}+1}\times\frac{-1}{u^2}\mathrm{d}u=\int_0^1\frac{-\ln(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

2. a désigne un réel strictement positif. Déduire de la question précédente que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+a^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi\ln a}{2a}$$

Soient ε et M deux réels strictement positifs. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_\varepsilon^M\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}\mathrm{d}t$.

On pose $u=\frac{t}{a}=\varphi(t)$; la fonction φ est de classe C^1, bijective de $[\varepsilon,M]$ dans $\left[\frac{\varepsilon}{a},\frac{M}{a}\right]$.

Le théorème de changement de variable donne :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^M\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}\mathrm{d}t &= \int_{\frac{\varepsilon}{a}}^{\frac{M}{a}}\frac{\ln(au)}{a^2(u^2+1)}a\mathrm{d}u=\frac{1}{a}\int_{\frac{\varepsilon}{a}}^{\frac{M}{a}}\frac{\ln(a)}{1+u^2}\mathrm{d}u+\frac{1}{a}\int_{\frac{\varepsilon}{a}}^{\frac{M}{a}}\frac{\ln(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u\\ &= \frac{\ln(a)}{a}\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{M}{a}\right)-\mathrm{Arctan}\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)\right)+\frac{1}{a}\int_{\frac{\varepsilon}{a}}^{\frac{M}{a}}\frac{\ln(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

D'après la question précédente, on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}f(t)\mathrm{d}=0$, donc en faisant tendre ε vers 0 et M vers $+\infty$, on obtient bien :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+a^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi\ln a}{2a}$$

Exercice 2

1. Montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin^2 t}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc localement intégrable.
- En 0 : $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} 1$ donc f se prolonge par continuité en 0 et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge.
- En $+\infty$: On a : $|f(t)| \leq \dfrac{1}{t^2}$, donc par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.
- Bilan : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

2. En utilisant une intégration par parties et le changement de variable $t \mapsto 2t$, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$$

On énoncera soigneusement les théorèmes utilisés.

Soient $u : t \mapsto \sin^2(t)$ et $v : t \mapsto -\dfrac{1}{t}$; u est v sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, $\lim\limits_{0} uv = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} uv = 0$.

Le théorème d'intégration parties donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-2\sin(t)\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$ de même nature, donc convergentes d'après la question précédente, et par suite :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin(t)\cos(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\mathrm{d}t$$

On pose $u = 2t = \varphi(t)$; φ est de classe C^1, bijective de $]0, +\infty[$ dans lui même.

Le résultat précédent donnant $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\mathrm{d}t$ convergente, le théorème de changement de variable donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\frac{u}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{2}$ convergente et égale à la précédente.

Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

3. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{t^2}\mathrm{d}t$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note I_n cette intégrale.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $f_n : t \mapsto \dfrac{\sin^2(nt)}{t^2}$.

f_n est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $f_n(t) \underset{t\to 0}{\sim} n^2$ donc la fonction se prolonge par continuité en 0.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\mathrm{d}t$ est faussement impropre, donc qu'elle converge.

4. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u = nt = \varphi(t)$; φ est de classe C^1, bijective de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ dans $\left]0, \dfrac{n\pi}{2}\right]$ donc, compte tenu de la convergence établie précédemment, le théorème de changement de variable donne :

$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2(u)}{\frac{u^2}{n^2}}\frac{\mathrm{d}u}{n} = n\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2 u}{u^2}\mathrm{d}u.$

Comme, d'après la question **2**, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$, on a donc :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$

5. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)}\mathrm{d}t$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note A_n cette intégrale.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $g_n : t \mapsto \dfrac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)}$.

g_n est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $g_n(t) \underset{t\to 0}{\sim} n^2$ donc la fonction se prolonge par continuité en 0.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(t)\mathrm{d}t$ est faussement impropre, donc qu'elle converge.

6. Calculer A_0 et A_1.

$A_0 = 0$; $A_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{\sin^2(t)}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

7. En admettant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sin^2(nt) - 2\sin^2((n+1)t) + \sin^2((n+2)t) = 2\sin^2(t)\cos(2(n+1)t)$, montrer que $A_n - 2A_{n+1} + A_{n+2} = 0$.

On a montré la convergence pour tout $n \in \mathbb{N}$ des intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(t)\mathrm{d}t$; on peut donc utiliser la propriété de linéarité pour les intégrales généralisées. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$A_n - 2A_{n+1} + A_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt) - 2\sin^2((n+1)t) + \sin^2((n+2)t)}{\sin^2(t)}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2(t)\cos(2(n+1)t)}{\sin^2(t)}\mathrm{d}t =$
$2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(n+1)t)\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{\sin(2(n+1)t)}{2(n+1)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$

8. Déduire des deux questions précédentes l'expression de A_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (A_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$.
On en déduit qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = an + b$.
Les valeurs de A_0 et A_1 donnent : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \dfrac{\pi n}{2}$.

9. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\tan^2(t)}\mathrm{d}t$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note B_n cette intégrale.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $h_n : t \mapsto \dfrac{\sin^2(nt)}{\tan^2(t)}$.

h_n est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$; $h_n(t) \underset{t\to 0}{\sim} n^2$, et $\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} h_n(t) = 0$ donc la h_n se prolonge par continuité en 0 et en $\dfrac{\pi}{2}$.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} h_n(t)\mathrm{d}t$ est faussement impropre, donc qu'elle converge.

10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n - B_n = \dfrac{\pi}{4}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité des intégrales généralisées, on a :

$A_n - B_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(nt)\left(\frac{1}{\sin^2(t)} - \frac{1}{\tan^2(t)}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(nt)\left(\frac{1-\cos^2(t)}{\sin^2(t)}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(nt)\mathrm{d}t$
$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos(2nt)}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$

11. En utilisant le fait que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $0 \leq \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n \leq I_n \leq A_n$$

En utilisant les inégalités de l'énoncé, la croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$ et la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$:
$h_n(x) \leq f_n(x) \leq g_n(x)$, d'où par positivité des intégrales généralisées, $B_n \leq I_n \leq A_n$.

12. Déduire de ce qui précède que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement précédent donne : $\dfrac{B_n}{n} \leq \dfrac{I_n}{n} \leq \dfrac{A_n}{n}$.

De plus, d'après la question **8**, pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{A_n}{n} = \dfrac{\pi}{2}$, puis d'après la question **10**, $\dfrac{B_n}{n} = \dfrac{A_n}{n} - \dfrac{\pi}{4n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi, le théorème d'encadrement et la question **4** donnent : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.