Feuille 1 : Raisonnement - Vocabulaire ensembliste

I EXERCICES TECHNIQUES

Exercice 1
Donner la négation des phrases suivantes :

a. $\exists a > 0, \exists b \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, na < b$

b. $\forall x \in E, (x \in A \Rightarrow x \notin B)$

c. $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \geq A \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon)$

d. $\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$

Exercice 2
Soit f une fonction réelle. Traduire par la phrase la plus concise possible les propositions suivantes :

a. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$

c. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

d. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$

e. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) < f(y)$

Exercice 3
On considère la tautologie A suivante :
"Quand je suis en cours, mon téléphone portable est éteint."
On note C l'assertion "je suis en cours" et P l'assertion "mon portable est allumé".

a. Donner un équivalent de A à l'aide de C, P et des opérateurs logiques.

b. Donner la contraposée de l'assertion A.

c. Donner la réciproque de l'assertion A.

d. Dans les cas suivants, écrire des assertions vraies à l'aide de P et C (hormis des tautologies telles que $P \vee \rceil P$ ou $C \vee \rceil C$, ...) :
✓ Je suis en cours
✓ Mon portable sonne

Exercice 4
f désigne une fonction réelle de la variable réelle (c'est-à-dire définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$).
Traduire les propriétés suivantes à l'aide des quantificateurs :

a. f ne prend que des valeurs entières

b. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$

c. f n'est pas strictement décroissante

d. f admet un maximum

e. f n'admet pas d'extremum

f. f est de signe constant

Exercice 5
Soit (u_n) une suite réelle. Traduire les propriétés suivantes à l'aide des quantificateurs :

a. (u_n) est croissante

b. (u_n) est croissante à partir d'un certain rang

c. (u_n) diverge vers $+\infty$

d. (u_n) est périodique

e. (u_n) converge vers un réel L

f. (u_n) est majorée

g. (u_n) n'est pas minorée

Exercice 6
A l'aide d'une table de vérité, montrer que les assertions suivantes sont des tautologies :

a. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)) \Longleftrightarrow (p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r)$

b. $\rceil\,(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \rceil q)$

c. $((p \vee q) \Rightarrow r) \Longleftrightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))$

Exercice 7
Soient a un réel et f une fonction réelle de la variable réelle.
Donner la négation, la réciproque et la contraposée de l'assertion suivante :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) \geq 0) \Longrightarrow (a \geq 0)$$

Exercice 8
Soient E un ensemble, $P(x)$ et $Q(x)$ deux propriétés des éléments x de E. Compléter à l'aide des symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ et justifier :

a. $(\forall x \in E, P(x) \vee Q(x)) \quad \cdots \quad ((\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x)))$

b. $(\exists x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \quad \cdots \quad ((\exists x \in E, P(x)) \wedge (\exists x \in E, Q(x)))$

II EXERCICES SUR LE RAISONNEMENT

Exercice 9
Montrer que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 10

a. Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $5^{2n} - 1$ est un multiple de 24.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $11^{n+1} - 10n - 11$ est un multiple de 100.

c. Déterminer les entiers naturels n tels que $2n + 1 \leq 2^n$.

Exercice 11

a. Montrer que si p est un nombre premier supérieur à 5, alors $p^2 - 1$ est un multiple de 24.

b. Réciproquement, si $p^2 - 1$ est un multiple de 24, p est-il premier ?

III EXERCICES SUR LES ENSEMBLES ET LES APPLICATIONS

Exercice 12
Montrer que
$$((A \cap B) \subset (A \cap C)) \wedge ((A \cup B) \subset (A \cup C)) \Rightarrow (B \subset C)$$

Exercice 13
Montrer que
$$(A = B) \Leftrightarrow (A \cup B = A \cap B)$$

Exercice 14
L'implication suivante est-elle vraie ?
$$(A \cap (B \cup C) = A \cap B) \Rightarrow (A \cap C = \varnothing)$$

Exercice 15
Etudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes :

a. $f : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$

b. $g : \left| \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array} \right.$

c. $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$

d. $v : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (xy, x+y) \end{array} \right.$

Exercice 16
Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par :
$$f(x) = 2x \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

a. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et de g.

b. Expliciter $f \circ g$ et $g \circ f$, puis étudier leur injectivité et leur surjectivité.

Exercice 17
Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array} \right.$

a. Montrer que f établit une bijection entre $\mathbb{R}$ et une partie J de $\mathbb{R}$ à préciser.

b. Expliciter f^{-1} sur J.

Exercice 18
Soient E, F, G des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications. Montrer que :
a. Si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.
b. Si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.

Exercice 19
Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que :
a. f surjective $\Leftrightarrow \forall B \subset F, f\left(f^{-1}(B)\right) = B$
b. f injective $\Rightarrow \forall A \subset E, f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$
c. f surjective $\Rightarrow \forall A \subset E, \overline{f(A)} \subset f\left(\overline{A}\right)$

Exercice 20
Soient $f : E \to F$ une application, A une partie de E, x et y des éléments de E, z un élément de F.
Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
Si une affirmation est vraie, le démontrer, si elle est fausse exhiber un contrexemple puis ajouter une hypothèse sur f pour qu'elle devienne vraie.

a. $x \notin A \Rightarrow f(x) \notin f(A)$

b. $f(x) \notin f(A) \Rightarrow x \notin A$

c. $x = y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

d. $f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \neq y$

e. $x \neq y \Leftrightarrow f(x) \neq f(y)$

f. $z \notin f(A) \Rightarrow z \in f\left(\overline{A}\right)$

g. $z \in f\left(\overline{A}\right) \Rightarrow z \notin f(A)$

LES BONS REFLEXES

✠ Pour montrer une équivalence, on montre les deux implications $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$:

$$(P \Leftrightarrow Q) \iff ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$$

✠ Pour montrer que deux ensemble sont égaux, on montre les deux inclusions $\subset$ et $\supset$:

$$(A = B) \iff (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

✠ Pour montrer que $A \subset B$, on prend $x \in A$ et on montre que $x \in B$:

$$(A \subset B) \iff (\forall x, (x \in A) \Rightarrow (x \in B))$$

✠ Pour montrer que f est injective, on prend x et y tels que $f(x) = f(y)$ et on montre que $x = y$.

✠ Pour montrer que f est surjective de E dans F, on prend $y \in F$ et on montre qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.