CB N°11 - SURFACES - CORRECTION

Exercice 1

Soit C la courbe d'équations : $\left\{\begin{array}{l} x-y-1=0 \\ x^2+2z^2-y-1=0 \end{array}\right.$.

1. Déterminer la projection de C sur (xOz), et préciser sa nature.

On note $\mathscr{C}_y$ la projection de $\mathscr{C}$ sur le plan (xOz).

$M(x,0,z) \in \mathscr{C}_y \Leftrightarrow \exists y_0 \in \mathbb{R}, (x,y_0,z) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \exists y_0 \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} x-y_0-1=0 \\ x^2+2z^2-y_0-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists y_0 \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} y_0 = x-1 \\ x^2+2z^2-x=0 \end{array}\right.$

d'où : $\mathscr{C}_y : \left\{\begin{array}{l} 4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+8z^2=1 \\ y=0 \end{array}\right.$; c'est une ellipse.

2. Former une équation cartésienne du cylindre de directrice C et dont les génératrices sont parallèles à la droite D : $\left\{\begin{array}{l} x-2y-3=0 \\ x-y-z-2=0 \end{array}\right.$.

On note Σ le cylindre recherché. Les génératrices sont dirigées par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$M(x,y,z) \in \Sigma \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, M+t\vec{u} \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} (x+2t)-(y+t)-1=0 \\ (x+2t)^2+2(z+t)^2-(y+t)-1=0 \end{array}\right.$

Après simplification, on obtient $\Sigma : 3x^2+6y^2+2z^2-8xy-4xz+4yz-7x+10y+4z+4=0$.

Exercice 2

Former une équation cartésienne de la surface de révolution engendrée par la rotation de la droite d'équations $\left\{\begin{array}{l} x=z+2 \\ y=2z+1 \end{array}\right.$ autour de la droite d'équations $x=y=z$

On note Σ la surface recherchée, D la droite que l'on fait tourner, et Δ l'axe de la rotation.

Δ est dirigé par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et passe par le point O.

$M(x,y,z) \in \Sigma \Leftrightarrow \exists M_0(x_0,y_0,z_0) \in D, \left\{\begin{array}{l} OM = OM_0 \\ \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{u} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 = x_0^2+y_0^2+z_0^2 \\ (x-x_0)+(y-y_0)+(z-z_0)=0 \\ x_0 = z_0+2 \\ y_0 = 2z_0+1 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 = (z_0+2)^2+(2z_0+1)^2+z_0^2 \\ z_0 = \dfrac{1}{4}(x+y+z-3) \end{array}\right.$

On en déduit $\Sigma : 5x^2+5y^2+5z^2-6xy-6xz-6yz+2x+2y+2z-19=0$.

Exercice 3

Soient S la surface d'équation $x^2+y^2=z$, et D la droite $\left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=t+1 \\ z=2t+1 \end{array}\right.$

1. La surface S est-elle régulière ?

On note $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$;
$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \overrightarrow{\text{Grad}} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$ donc la surface est régulière.

2. Déterminer les points de S en lesquels le plan tangent est orthogonal à D.

D admet pour vecteur directeur : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Le plan tangent en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est orthogonal à D si, et seulement si $\overrightarrow{\text{Grad}} F$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\left\{ \begin{array}{l} 2x_0 = \lambda \\ 2y_0 = \lambda \\ -1 = 2\lambda \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 = -\dfrac{1}{4} \\ y_0 = -\dfrac{1}{4} \\ \lambda = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right.$.

Comme de plus $M_0 \in S$, on trouve le point $M_0 \left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8} \right)$.

3. Déterminer les points de S en lesquels le plan tangent contient la droite D.

L'équation du plan tangent Π_0 à S en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est :

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Ainsi, si $D \subset \Pi_0$, alors pour tout $M(t) \in D$, $\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = t + 1 \\ z = 2t + 1 \\ 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0 \end{array} \right.$

On en déduit que $\forall t \in \mathbb{R}, t(2x_0 + 2y_0 - 2) - 2x_0^2 - 2y_0^2 + 2y_0 + z_0 - 1 = 0$.

Comme $M_0 \in S, x_0^2 + y_0^2 - z_0 = 0$, on a donc : $\left\{ \begin{array}{l} x_0 + y_0 - 1 = 0 \\ -z_0 + 2y_0 - 1 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 - z_0 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 1 - y_0 \\ z_0 = 2y_0 - 1 \\ (y_0 - 1)^2 = 0 \end{array} \right.$

Finalement, le seul plan satisfaisant le problème est tangent à S en $M_0(0, 1, 1)$.