CB n°1 - Compléments d'algèbre linéaire - Sujet 1

1. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer la nature des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à A et B, ainsi que leurs éléments caractéristiques.

$A^2 = I_3$ donc A est la matrice de la symétrie s par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1)\}$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\{(0,1,0),(1,0,-2)\}$.

$B^2 = B$ donc B est la matrice de la projection p sur $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\{(0,1,1),(1,1,0)\}$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$.

2. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y + z = 0\}$, $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - z = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}$

a. Déterminer des bases de F et de G.
$F = \mathrm{Vect}\{(1,0,0),(0,1,-1)\}$, et $G = \mathrm{Vect}\{(1,2,1)\}$.

b. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, à l'aide d'un déterminant (justifier la réponse).

On note $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (0,1,-1)$ et $g = (1,2,1)$.
$\det(f_1, f_2, g) = 3 \neq 0$, donc la famille (f_1, f_2, g) est libre, de cardinal 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$; F et G sont supplémentaires.

c. Donner la matrice dans la base canonique de la projection sur F parallèlement à G.

La matrice de passage de la base canonique $\mathscr{C}$ à la base (f_1, f_2, g) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a : $Mat_{\mathscr{C}}(p) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

CB n°1 - Compléments d'algèbre linéaire - Sujet 2

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer la nature des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à A et B, ainsi que leurs éléments caractéristiques.

$A^2 = A$ donc A est la matrice de la projection p sur $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\{(-1,0,2),(0,1,0)\}$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1)\}$.

$B^2 = \mathrm{I}_3$ donc B est la matrice de la symétrie s par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$.

2. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y-z=0\}$, $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+z=0 \text{ et } x+y+z=0\}$.

a. Déterminer des bases de F et de G.
$F = \mathrm{Vect}\{(1,0,1),(0,1,1)\}$, et $G = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1)\}$.

b. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, à l'aide d'un déterminant (justifier la réponse).
On note $f_1 = (1,0,1)$, $f_2 = (0,1,1)$ et $g = (1,0,-1)$.
$\det(f_1,f_2,g) = -2 \neq 0$, donc la famille (f_1,f_2,g) est libre, de cardinal 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$; F et G sont supplémentaires.

c. Donner la matrice dans la base canonique de la symétrie par rapport à F, parallèlement à G.
La matrice de passage de la base canonique $\mathscr{C}$ à la base (f_1,f_2,g) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On a : $Mat_{\mathscr{C}}(s) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.