CB n°9 - COURBES PLANES - Sujet 1

Exercice 1

Etudier et tracer la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} + \ln(2+t) \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t} \end{cases} \quad , \quad t \in]-2;+\infty[\setminus \{0\}$$

On donne $\ln 2 \simeq 0,7$ et $\ln 3 \simeq 1,1$

On a : $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{(t-2)(t+1)}{(t+2)t^2} \\ y'(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2} \end{cases}$. On en déduit le tableau de variations suivant (les valeurs sont arrondies :

t	-2		-1		0		1		2		+∞
$x'(t)$	‖	+	0	−	‖	−		−	0	+	
x	-∞	↗	-1	↘	-∞ ‖ +∞	↘	2,1	↘	1,9	↗	+∞
$y'(t)$	‖	+	0	−	‖	−		+		+	
y	-5/2	↗	-2	↘	-∞ ‖ +∞	↘	2	↗	5/2	↗	+∞

La courbe admet une tangente horizontale en 1, une tangente verticale en 2.

Etude du point singulier ($t=-1$) :

$x(-1+h) = \dfrac{-1}{1-h} + \ln(1+h) = -1 - \dfrac{3}{2}h^2 - \dfrac{2}{3}h^3 + o(h^3)$

$y(-1+h) = h - 1 - \dfrac{1}{1-h} = -2 - h^2 - h^3 + o(h^3)$.

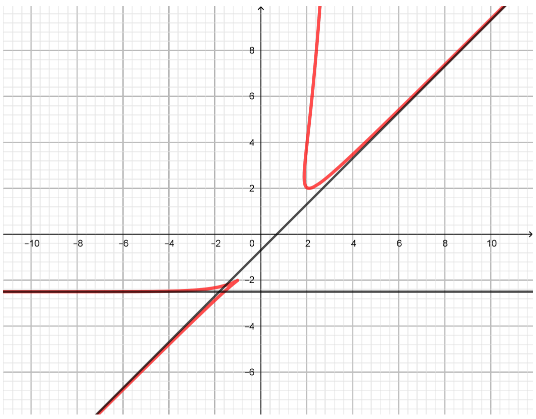
On en déduit que la courbe admet en $t=-1$ un rebroussement de première espèce.

Etude des branches infinies :

⇝ En -2 : La courbe admet une asymptote d'équation $y = \dfrac{-5}{2}$;

⇝ En $+\infty$: $\dfrac{y}{x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t}{\ln(t)} \longrightarrow +\infty$ (par croissances comparées) donc la courbe admet une branche parabolique de direction (Oy) ;

⇝ En 0 : $\dfrac{y}{x} \underset{0}{\sim} 1$ et $y(t) - x(t) = t - \ln(2+t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\ln(2)$ donc la courbe admet une asymptote d'équation $y = x - \ln(2)$.



Exercice 2

Déterminer une représentation paramétrique de la développée de la courbe d'équation $y = (1-x)^3$.

Une représentation paramétrique de la courbe est donnée par : $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = (1-t)^3 \end{cases}$

On a donc : $\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = -3(1-t)^2 \end{cases}$, $\begin{cases} x''(t) = 0 \\ y''(t) = 6(1-t) \end{cases}$,

puis avec les formules du cours, une représentation paramétrique de la développée, pour $t \neq 1$:

$$\begin{cases} X(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{9}{2}(1-t)^5 \\ Y(t) = \dfrac{1}{6(1-t)} + \dfrac{5}{2}(1-t)^3 \end{cases}$$

Exercice 3

Déterminer, à l'aide de l'inclinaison, le rayon de courbure en tout point de la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \sin^2 t + \ln(\cos t) \\ y(t) = \dfrac{\sin(2t)}{2} \end{cases} \qquad t \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$$

On a pour tout $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$: $\begin{cases} x'(t) = 2\sin t \cos t - \dfrac{\sin t}{\cos t} = \dfrac{\sin t\,(2\cos^2 t - 1)}{\cos t} = \dfrac{\sin t\ \cos(2t)}{\cos t} \\ y'(t) = \cos(2t) \end{cases}$

Ainsi, en notant s l'abscisse curviligne, et α l'inclinaison, on a :

$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{\cos^2(2t)\left(\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + 1\right)} = \dfrac{\cos(2t)}{\cos t}$ pour $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$, et

$\tan\alpha = \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{\cos t}{\sin t} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$.

Ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -1$, puis $R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \times \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha} = -\dfrac{\cos(2t)}{\cos t}$.

CB n°9 - COURBES PLANES - SUJET 2

Exercice 1

Etudier et tracer la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = t + \dfrac{1}{t} \\ y(t) = \dfrac{1}{t} + 2\ln(1+t) \end{cases} \quad , \quad t \in]-1;+\infty[\setminus \{0\}$$

On donne $\ln 2 \simeq 0,7$

On a : $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2} \\ y'(t) = \dfrac{(t-1)(2t+1)}{(t+1)t^2} \end{cases}$. On en déduit le tableau de variations suivant (avec des valeurs arrondies :

t	-1		-1/2		0		1		$+\infty$
$x'(t)$	‖	−		−	‖	−	0	+	
x	‖ -2	↘	-5/2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$
$y'(t)$	‖	+	0	−	‖	−	0	+	
y	‖ $-\infty$	↗	$-3,4$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2,4	↗	$+\infty$

La courbe admet une tangente horizontale en $-\dfrac{1}{2}$.

Etude du point singulier $(t=1)$:

$x(1+h) = 1 + h + \dfrac{1}{1+h} = 2 + h^2 - h^3 + o(h^3)$

$y(1+h) = \dfrac{1}{1+h} + 2\ln((2+h) = 1 + 2\ln(2) + \dfrac{3}{4}h^2 - \dfrac{11}{12}h^3 + o(h^3)$.

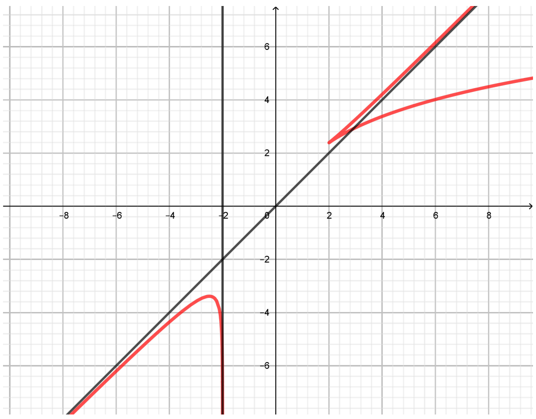
On en déduit que la courbe admet en $t=1$ un rebroussement de première espèce.

Etude des branches infinies :

⇝ En -1 : La courbe admet une asymptote d'équation $x = -2$;

⇝ En $+\infty$: $\dfrac{y}{x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(t)}{t} \longrightarrow 0$ (par croissances comparées) donc la courbe admet une branche parabolique de direction (Ox) ;

⇝ En 0 : $\dfrac{y}{x} \underset{0}{\sim} 1$ et $y(t) - x(t) = 2\ln(1+t) - t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc la courbe admet une asymptote d'équation $y = x$.



Exercice 2

Déterminer une représentation paramétrique de la développée de la courbe d'équation $y = (2-x)^3$.

Une représentation paramétrique de la courbe est donnée par : $\left\{\begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = (2-t)^3 \end{array}\right.$

On a donc : $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = 1 \\ y'(t) = -3(2-t)^2 \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} x''(t) = 0 \\ y''(t) = 6(2-t) \end{array}\right.$,

puis avec les formules du cours, une représentation paramétrique de la développée, pour $t \neq 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} X(t) = 1 + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{9}{2}(2-t)^5 \\ Y(t) = \dfrac{1}{6(2-t)} + \dfrac{5}{2}(2-t)^3 \end{array}\right.$$

Exercice 3

Déterminer, à l'aide de l'inclinaison, le rayon de courbure en tout point de la courbe paramétrée :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = \cos(2t) + 2\ln(\sin t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{array}\right. \qquad t \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$$

On a pour tout $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$:

$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = -2\sin(2t) + \dfrac{2\cos t}{\sin t} = -2\sin t\cos t + 2\dfrac{\cos t}{\sin t} = \dfrac{2\cos t\,(1-2\sin^2 t)}{\sin t} = \dfrac{2\cos t\ \cos(2t)}{\sin t} \\ y'(t) = 2\cos(2t) \end{array}\right.$

Ainsi, en notant s l'abscisse curviligne, et α l'inclinaison, on a :

$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{x'^2 + y^2} = \sqrt{4\cos^2(2t)\left(\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t} + 1\right)} = \dfrac{2\cos(2t)}{\sin t}$ pour $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$, et

$\tan\alpha = \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{\sin t}{\cos t} = \tan t$.

Ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = 1$, puis $R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \times \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha} = \dfrac{2\cos(2t)}{\sin t}$.