CB N°12 - PROBABILITES -

Exercice 1

A, B et C lancent successivement un dé équilibré à 6 faces. A joue, puis B, puis C, puis on recommence à A et ainsi de suite jusqu'à l'obtention d'un 6. Celui qui l'obtient gagne le jeu.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : A_n l'événement A gagne au n-ième jet, et de même B_n et C_n.

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n), \mathbb{P}(B_n)$ et $\mathbb{P}(C_n)$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k : "obtenir 6 au k-ième lancer". $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(S_k) = \frac{1}{6}$.
On remarque que chaque jour ne joue qu'un coup sur 3.
Pour $n \in \mathbb{N}$ on a : $A_{3n+1} = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \cap \overline{S_{3n}} \cap S_{3n+1}$ donc $\mathbb{P}(A_{3n+1}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} \times \frac{1}{6}$.
De même, on trouve $\mathbb{P}(B_{3n+2}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{3n+1} \times \frac{1}{6}$, et $\mathbb{P}(C_{3n+3}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{3n+2} \times \frac{1}{6}$.
Les autres probabilités sont nulles.

2. En déduire la probabilité que A gagne, puis B, puis C.

On note G_A : "A gagne", G_B : "B gagne", et G_C : "C gagne".
On a : $G_A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_{3n+1}$, donc par σ-additivité, $\mathbb{P}(G_A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} \times \frac{1}{6} = \frac{36}{91}$.
On trouve de même, $\mathbb{P}(G_B) = \frac{30}{91}$, et, $\mathbb{P}(G_C) = \frac{25}{91}$.

3. Calculer la probabilité que le jeu ne se termine pas.

On note T : "le jeu ne termine pas". On a : $T = \overline{G_A \cup G_B \cup G_C}$; G_A, G_B et G_C sont deux à deux incompatibles donc $\mathbb{P}(T) = 1 - (\mathbb{P}(G_A) + \mathbb{P}(G_B) + \mathbb{P}(G_C)) = 0$.
On en déduit que le jeu termine.

Exercice 2

Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à obtention du premier pile.
S'il a fallu n lancers pour obtenir ce premier pile, on lui fait tirer au hasard une boule parmi n dont une seule est blanche. Il gagne s'il tire cette boule.

1. Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n : " le joueur obtient le premier pile au n-ième lancer" ;
la formule des probabilités composées, et l'indépendance des jets donnent : $\mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{2^n}$.
On note B : "le joueur n'obtient jamais pile" ; alors $\overline{B}$ est l'événement : "le joueur obtient au moins une fois pile", et on a : $\overline{B} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, donc par σ-addivité, $\mathbb{P}(\overline{B}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) = 1$.
On en déduit que $\mathbb{P}(B) = 0$.
On note G : "le joueur gagne". On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}_{E_n}(G) = \frac{1}{n}$.
$(B, E_1, E_2, \cdots)$ est un système complet d'événements, donc la formule des probabilités totales donne :
$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(B \cap G) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n \cap G) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \times \frac{1}{2^n} = \ln(2)$.

2. Sachant que le joueur a gagné, quelle est la probabilité qu'il ait obtenu le premier pile au troisième lancer ?

$\mathbb{P}_G(E_3) = \frac{\mathbb{P}(E_3) \times \mathbb{P}_{E_3}(G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{3}}{\ln 2} = \frac{1}{24\ \ln 2}$

Exercice 3

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient une boule blanche et deux boules noires, l'urne U_2 contient une boule blanche et une boule noire.
Deux joueurs A et B effectuent des tirages successifs avec remise, A tire dans U_1 et B dans U_2.
A commence. Le premier qui obtient une boule blanche gagne le jeu.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note :
A_n l'événement "A gagne au n-ième tirage"
B_n l'événement "B gagne au n-ième tirage".

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$; on note T_k : "le joueur tire une boule blanche au k-ième tirage".
On a : $\mathbb{P}(T_k) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & \text{si } k \text{ est impair} \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $A_{2n+1} = \overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \cdots \cap \overline{T_{2n}} \cap T_{2n+1}$.
La formule des probabilités composées donne :
$\mathbb{P}(A_{2n+1}) = \mathbb{P}(\overline{T_1}) \times \mathbb{P}_{\overline{T_1}}(\overline{T_2}) \times \cdots \times \mathbb{P}_{\overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \cdots \cap \overline{T_{2n}}}(T_{2n+1}) = \left(\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2}\right)^n \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3^{n+1}}$
De même, on trouve : $\mathbb{P}(B_{2n+2}) = \left(\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2}\right)^n \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$.
Les autres probabilités sont nulles.

2. En déduire les probabilités des événements "A gagne le jeu", "B gagne le jeu", et "le jeu ne se termine pas".
On note G_A : "A gagne" et G_B : "B gagne" ; on a :
$G_A = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_{2n+1}$ donc par σ-additivité : $\mathbb{P}(G_A) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{3^{n+1}} = \dfrac{1}{2}$;
de même, $\mathbb{P}(G_B) = \dfrac{1}{2}$.
On note T : "le jeu ne termine pas". On a : $T = \overline{G_A \cup G_B}$; G_A et G_B sont incompatibles donc $\mathbb{P}(T) = 1 - (\mathbb{P}(G_A) + \mathbb{P}(G_B)) = 0$. On en déduit que le jeu termine.

Exercice 4

Deux archers A_1 et A_2 disputent un match. Ils tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce que l'un d'eux la touche. A_1 tire en premier.
Pour $i \in \{1, 2\}$, l'archer A_i touche la cible avec la probabilité p_i. Les tirs sont indépendants.
On note G_i l'événement A_i gagne pour $i \in \{1, 2\}$.

1. Calculer la probabilité que A_i gagne au rang $2n + i$, pour $i \in \{1, 2\}, n \in \mathbb{N}$.
Pour $i \in \{1, 2\}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on note $E_{i,k}$: "$A - i$ gagne au k-ième tir".
On a : $E_{1,2n+1} = \overline{E_{1,1}} \cap \overline{E_{2,2}} \cap \cdots \cap \overline{E_{2,2n}} \cap E_{1,2n+1}$.
La formule des probabilités composées et l'indépendance des tirs donnent :
$\mathbb{P}(E_{1,2n+1}) = (1 - p_1) \times (1 - p_2) \times \cdots \times (1 - p_2) \times p_1 = ((1 - p_1)(1 - p_2))^n \times p_1$;
on trouve de même : $\mathbb{P}(E_{2,2n+2}) = ((1 - p_1)(1 - p_2))^n \times (1 - p_1) \times p_2$.

2. En déduire $\mathbb{P}(G_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$, puis la probabilité que le jeu dure indéfiniment.
$G_1 = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_{1,2n+2}$ donc par σ-additivité, $\mathbb{P}(G_1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} ((1 - p_1)(1 - p_2))^n \times p_1 = \dfrac{p_1}{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)}$;
on trouve de même, $\mathbb{P}(G_2) = \dfrac{(1 - p_1)p_2}{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)}$.

On note T : "le jeu ne termine pas". On a : $T = \overline{G_1 \cup G_2}$; G_1 et G_2 sont incompatibles donc $\mathbb{P}(T) = 1 - (\mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(G_2)) = 0$. On en déduit que le jeu termine.

3. A quelle condition le jeu est-il équitable (c'est-à-dire $\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(G_2)$) ?
$\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(G_2) \Leftrightarrow p_2 = \dfrac{p_1}{1-p_1}$.

4. Que dire si $p_1 > \dfrac{1}{2}$?
Si $p_1 > \dfrac{1}{2}$, alors $\dfrac{p_1}{1-p_1} > 1$ donc dans ce cas, le jeu ne peut pas être équitable.

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et Y un variable aléatoire indépendante de X, qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
On définit la variable aléatoire Z par $Z = 0$ si $Y = 0$, et $Z = X$ sinon.

1. Déterminer la loi de Z, et la loi de Y conditionnée par $(Z = 0)$.
On a, d'après la formule des probabilités totales :
$\mathbb{P}(Z=0) = \mathbb{P}_{(Y=0)}(Z=0) \times \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}_{(Y\neq 0)}(Z=0) \times \mathbb{P}(Y \neq 0)$
De plus, $\mathbb{P}_{(Y\neq 0)}(Z=0) = \mathbb{P}(X=0)$ et $\mathbb{P}(Y\neq 0) = \mathbb{P}(Y=1)$, on en déduit que $\mathbb{P}(Z=0) = 1 \times (1-p) + p \times \mathrm{e}^{-\lambda}$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(Y \neq 0 \cap X = k) = \mathbb{P}(Y=1) \times \mathbb{P}(X=k) = p\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.
$\mathbb{P}_{(Z=0)}(Y=0) = \dfrac{\mathbb{P}((Z=0)\cap(Y=0))}{\mathbb{P}(Z=0)} = \dfrac{\mathbb{P}_{(Y=0)}(Z=0) \times \mathbb{P}(Y=0)}{\mathbb{P}(Z=0)} = \dfrac{1-p}{1-p+p\mathrm{e}^{-\lambda}}$.
Ainsi, la loi conditionnelle de Y sachant $(Z=0)$ est une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{p\mathrm{e}^{-\lambda}}{1-p+p\mathrm{e}^{-\lambda}}$.

2. Z admet-elle une espérance ? Admet-elle une variance ? Si oui, la ou les calculer.
D'après le critère de d'Alembert, les séries de termes généraux $kp\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$ et $k^2p\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$ convergent, et on a : $\mathbb{E}(Z) = 0 \times (1-p) + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kp\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}p\lambda\mathrm{e}^{\lambda} = p\lambda$.
$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times (1-p) + \mathrm{e}^{-\lambda}p\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k-1)+k}{k!}\lambda^k = \mathrm{e}^{-\lambda}p\left(\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda} + \lambda\mathrm{e}^{\lambda}\right) = p\lambda(\lambda+1)$.
On déduit de la formule de König-Huygens : $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = p\lambda(\lambda + 1 - p\lambda)$.

Exercice 6

On définit sur $\mathbb{N}$ l'application P donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}, P(\{n\}) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

1. Vérifier que P est une probabilité sur $\mathbb{N}$.
$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \in [0,1]$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p(n) = 1$ donc P définit bien une probabilité sur $\mathbb{N}$.

2. Dans $\mathbb{N}$ muni de la probabilité P, les événements $2\mathbb{N}$ et $3\mathbb{N}$ sont-ils indépendants ?
On a, pour $a \in \mathbb{N}$, $P(a\mathbb{N}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(an) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{an+1}} = \frac{2^{a-1}}{2^a - 1}$.
Ainsi, $P(2\mathbb{N}) = \dfrac{2}{3}$, $P(3\mathbb{N}) = \dfrac{4}{7}$ et $P(2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}) = P(6\mathbb{N}) = \dfrac{32}{63}$, on en déduit que les les événements $2\mathbb{N}$ et $3\mathbb{N}$ ne sont pas indépendants.

3. Calculer la probabilité des événements : $\{k \in \mathbb{N}, 2 \nmid k \text{ et } 3 \nmid k\}$ et $\{k \in \mathbb{N}, 2|k \text{ et } 3 \nmid k\}$.
On a : $A = \{k \in \mathbb{N}, 2 \nmid k \text{ et } 3 \nmid k\} = \underline{2\mathbb{N}} \cap \underline{3\mathbb{N}}$, donc
$P(A) = 1 - P(2\mathbb{N} \cup 3\mathbb{N}) = 1 - (P(2\mathbb{N}) + P(3\mathbb{N}) - P(2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N})) = \dfrac{38}{69}$;
et $B = \{k \in \mathbb{N}, 2|k \text{ et } 3 \nmid k\} = 2\mathbb{N} \cap \overline{3\mathbb{N}}$; on a donc :
$P(B) = P_{2\mathbb{N}}(\overline{3\mathbb{N}}) \times P(2\mathbb{N}) = (1 - P_{2\mathbb{N}}(3\mathbb{N})) \times P(2\mathbb{N}) = \left(1 - \dfrac{P(6\mathbb{N})}{P(2\mathbb{N})}\right) P(2\mathbb{N}) = \dfrac{10}{63}$.

4. La variable aléatoire de loi $(n, P(\{n\}))$ admet-elle une espérance ? Admet-elle une variance ? Si oui, la ou les calculer.
On note X une variable aléatoire suivant la loi $(n, P(\{n\}))$.
D'après le critère de d'Alembert, les séries de termes généraux $\dfrac{n}{2^{n+1}}$ et $\dfrac{n^2}{2^{n+1}}$ convergent et on a :
$\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 1$;
$\mathbb{E}(X^2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)+n}{2^{n+1}} = \frac{1}{8} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 2 + 1 = 3$
On déduit de la formule de König-Huygens que $Var(X) = 2$

Exercice 7

On définit sur $\mathbb{N}$ l'application P donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}, P(\{n\}) = \dfrac{1}{en!}$.

1. Vérifier que P est une probabilité sur $\mathbb{N}$.
$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \in [0, 1]$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p(n) = 1$ donc P définit bien une probabilité sur $\mathbb{N}$.

2. Dans $\mathbb{N}$ muni de la probabilité P, calculer la probabilité des événements : $A = \{2k, k \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$.
$P(A) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(2n) = \frac{1}{\mathrm{e}} \frac{1}{2n!} = \mathrm{e}^{-1}\mathrm{ch}\,(1)$
$P(B) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(2n+1) = \frac{1}{\mathrm{e}} \frac{1}{(2n+1)!} = \mathrm{e}^{-1}\mathrm{sh}\,(1)$

3. Les événements A et B sont-ils incompatibles ? indépendants ?
$A \cap B = \varnothing$ donc les événements sont incompatibles. Par contre, $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ donc ils ne sont pas indépendants.

4. La variable aléatoire de loi $(n, P(\{n\}))$ admet-elle une espérance ? Admet-elle une variance ? Si oui, la ou les calculer.
On note X une variable aléatoire suivant la loi $(n, P(\{n\}))$.
D'après le critère de d'Alembert, les séries de termes généraux $\dfrac{n}{en!}$ et $\dfrac{n^2}{en!}$ convergent, et on a :
$\mathbb{E}(X) = \mathrm{e}^{-1} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \mathrm{e}^{-1}\mathrm{e} = 1$
et $\mathbb{E}(X^2) = \mathrm{e}^{-1} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)+n}{n!} = \mathrm{e}^{-1}(\mathrm{e} + \mathrm{e}) = 2$
On déduit de la formule de König-Huygens que $Var(X) = 1$

Exercice 8

On effectue une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. On note X (resp. Y) la VA égale au rang d'apparition du premier pile (resp. face).

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
Le couple (X, Y) prend ses valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n :"obtenir Pile au n-ième lancer".
$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a :
Si $i = j, (X = i) \cap (Y = j) = \varnothing$ donc $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = 0$.
Si $i \geq 2, j \geq 2, (X = i) \cap (Y = j) = \varnothing$ donc $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = 0$.
Si $1 = i < j, (X = i) \cap (Y = j) = P_1 \cap \cdots \cap P_{j-1} \cap \overline{P_j}$ donc la formule des probabilités composées et l'indépendance des lancers donnent :
$\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^j}$
On obtient de même si $1 = j < i$.
Finalement : $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \begin{cases} \frac{1}{2^j} & \text{si } 1 = i < j \\ \frac{1}{2^i} & \text{si } 1 = j < i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

2. Calculer la covariance du couple (X, Y).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a clairement $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{2^n}$, et
$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2.$
$\mathbb{E}(XY) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(XY = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = n)) + \mathbb{P}((Y = 1) \cap (X = n)\right) = 2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$
$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1 = 3$
Finalement, comme X et Y sont indépendantes, on a :
$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = -1$.

3. Déterminer la loi de la VA $S = X + Y$.
Soit $k \in \mathbb{N}, k \geq 3$;
$\mathbb{P}(S = k) = \mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = k-1)) + \mathbb{P}((X = k-1) \cap (Y = 1)) = \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{k-2}}$.

Exercice 9

On note pour tout $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$: $p_{ij} = \frac{1}{i(i+1)j(j+1)}$.

1. Montrer que la famille $(i, j, p_{ij})_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est la loi de probabilité d'un couple (X, Y) de VA discrètes.
$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, p_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = 1$, par télescopage ;
on a donc $\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty} p_{i,j} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j(j+1)} = 1$.
Ainsi, $(i, j, p_{ij})_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est la loi de probabilité d'un couple (X, Y) de VA discrètes.

2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
$\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^{+\infty} p_{i,j} = \frac{1}{i(i+1)}$.
De même pour Y.

3. Montrer que X et Y sont indépendantes.
D'après les questions précédentes, $\forall(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j)$ d'où l'indépendance.

Exercice 10

Soient X et Y deux VA indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

1. Déterminer la loi de $S = X + Y$. La reconnaître.
Soit $n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{P}(S=n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}((X=k)\cap(Y=n-k)) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{n!}(\lambda+\mu)^n$.
On reconnaît une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(S = n)$. La reconnaître.
Soient $n \in \mathbb{N}$, et $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\mathbb{P}_{(S=n)}(X=k) = \frac{\mathbb{P}((X=k)\cap(S=n))}{\mathbb{P}(S=n)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \times \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}.$$

La loi conditionnelle de X sachant $(S = n)$ est donc une loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.