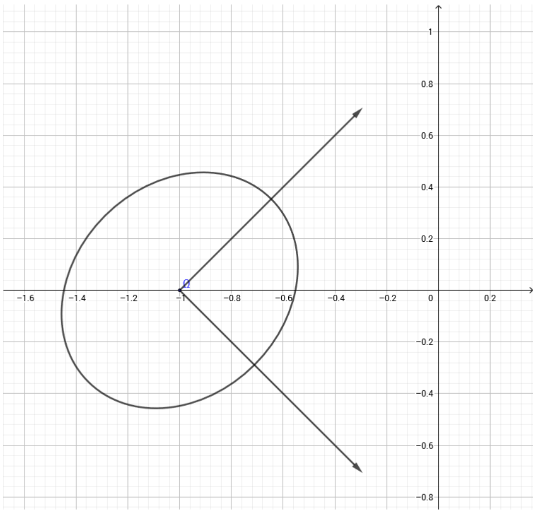
CB N°9 - CONIQUES - COURBES PARAMETREES - SUJET 1

1. Donner la nature des coniques suivantes, et les représenter dans un repère orthonormé.

a. $5x^2 - 2xy + 5y^2 + 10x - 2y + 4 = 0$

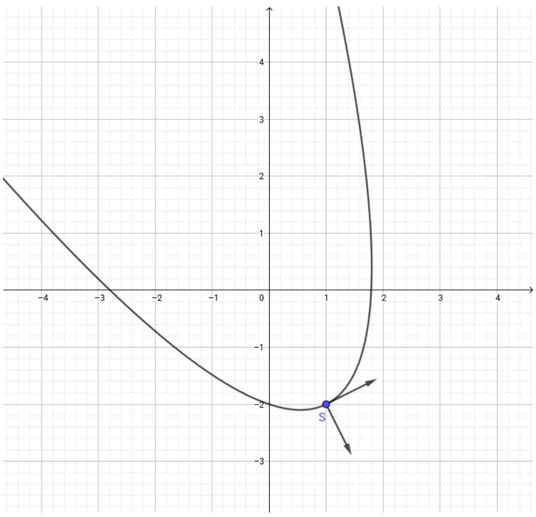
Il s'agit d'une ellipse, de centre $\Omega(-1,0)$.

En notant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de coordonnées respectives $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, l'équation réduite de l'ellipse dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est : $6X^2 + 4Y^2 = 1$.



b. $4x^2 + 4xy + y^2 + 4x - 8y - 20 = 0$

Il s'agit d'une parabole.En notant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de coordonnées respectives $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ et $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, le sommet S de la parabole a pour coordonnées $(\sqrt{5}, 0)$ dans le repère $(0, \vec{u}, \vec{v})$, donc $(1,-2)$ dans le repère initial, et l'équation réduite de la parabole dans le repère $(S, \vec{u}, \vec{v})$ est : $Y^2 = -\frac{4\sqrt{5}}{5}X$.



2. Etudier et tracer la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{1+3t} \\ y(t) = \dfrac{2t^2}{1+3t} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

On a : $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{3t^2(2t+1)}{(1+3t)^2} \\ y(t) = \dfrac{2t(3t+2)}{(1+3t)^2} \end{cases}$

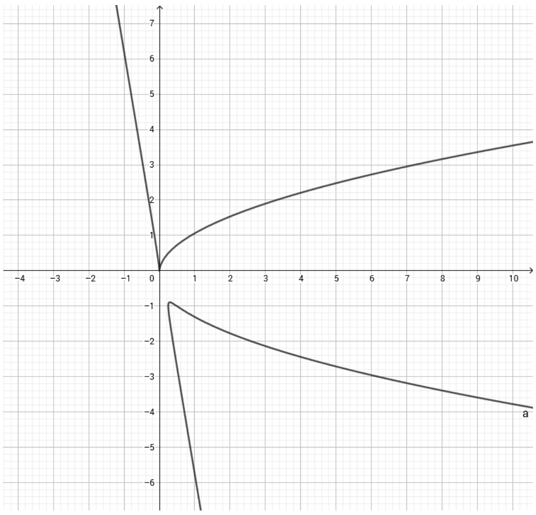
t	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$x'(t)$		$-$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$	
x	$+\infty$	↘	$\frac{8}{27}$	↘	$\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$-\frac{8}{9}$	↘	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Branches infinies :

- $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{y}{x} = 0$; donc en $\pm\infty$ la courbe admet une branche parabolique de direction (Ox).
- $\lim\limits_{-\frac{1}{3}} \dfrac{y}{x} = -6$ et $\lim\limits_{-\frac{1}{3}}(y+6x) = \dfrac{2}{9}$; donc en $-\dfrac{1}{3}$, la courbe admet une asymptote d'équation $6x+y-\dfrac{2}{9} = 0$

Tangentes :

- La courbe admet une tangente horizontale pour $t = -\dfrac{2}{3}$, et une tangente verticale pour $t = -\dfrac{1}{2}$.
- La courbe admet un point singulier pour $t = 0$.
  On a : $x(t) = t^3(1+o(1)) = t^3 + o(t^3)$, et $y(t) = 2t^2(1-3t+o(t)) = 2t^2 - 6t^3 + o(t^3)$;
  il s'agit d'un rebroussement de première espèce, la tangente y étant verticale.



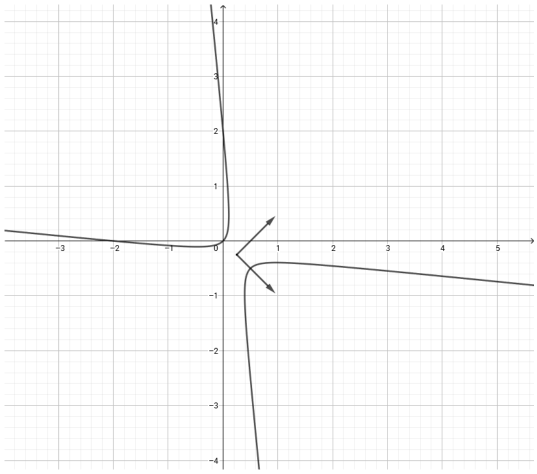
CB N°9 - CONIQUES - COURBES PARAMETREES - SUJET 2

1. Donner la nature des coniques suivantes, et les représenter dans un repère orthonormé.

a. $x^2 + 10xy + y^2 + 2x - 2y = 0$

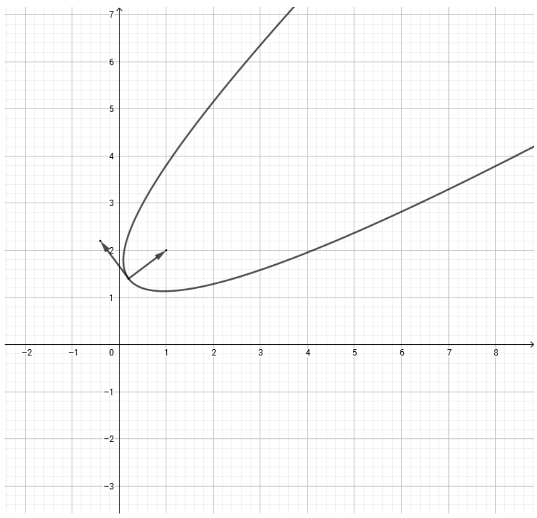
Il s'agit d'une hyperbole, de centre $\Omega\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.

En notant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de coordonnées respectives $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, l'équation réduite de l'hyperbole dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est : $8X^2 - 12Y^2 = 1$.



b. $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 10x - 55y + 50 = 0$

Il s'agit d'une parabole.En notant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de coordonnées respectives $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ et $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, le sommet S de la parabole a pour coordonnées $(1, 1)$ dans le repère $(0, \vec{u}, \vec{v})$, donc $\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$ dans le repère initial, et l'équation réduite de la parabole dans le repère $(S, \vec{u}, \vec{v})$ est : $Y^2 = X$.



2. Etudier et tracer la courbe paramétrée :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2} \end{array}\right. \quad , \quad t \in \mathbb{R}^*$$

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = 2t \\ y(t) = 2 + \dfrac{2}{t^3} \end{array}\right.$$

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Branches infinies :
- $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{y}{x} = 0$; en $\pm\infty$ la courbe admet une branche parabolique de direction (Ox).
- En 0, la courbe admet une asymptote d'équation $x = 0$.

Point singulier :
- La courbe admet un point singulier pour $t = -1$;
  $\left\{\begin{array}{l} x''(t) = 2 \\ y''(t) = -\dfrac{6}{t^4} \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} x'''(t) = 0 \\ y'''(t) = \dfrac{24}{t^5} \end{array}\right.$
  Il s'agit d'un rebroussement de première espèce, la tangente y est dirigée par le vecteur de coordonnées $(1, -3)$.