CB N°4 - SERIES ENTIERES - SUJET 1

EXERCICE 1

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \frac{2^n}{n^2} z^n$

On a : $\frac{2^{n+1}n^2}{2^n(n+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} 2$. La règle de d'Alembert donne un rayon de convergence égal à $\frac{1}{2}$.

2. $\sum \sqrt{n} z^{2n}$

On a : $\forall z \in \mathbb{C}^*, \left| \frac{\sqrt{n+1} z^{2n+2}}{\sqrt{n} z^n} \right| \underset{n \to +\infty}{\sim} |z^2|$.

D'après le critère de d'Alembert, si $|z| < 1$, $\sum \sqrt{n} z^{2n}$ converge, et si $|z| > 1$, $\sum \sqrt{n} z^{2n}$ diverge.
Le rayon de convergence est donc 1.

3. $\sum \left(n^{\frac{1}{n^2}} - 1 \right) z^n$

On a : $n^{\frac{1}{n^2}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n^2}$; ainsi la série entière $\sum \left(n^{\frac{1}{n^2}} - 1 \right) z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum \frac{\ln(n)}{n^2} z^n$. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(n+1)n^2}{\ln(n)(n+1)^2} = 1$, donc d'après la règle de d'Alembert, le rayon est 1.

4. $\sum n^2 z^{n^2}$

Soit $r > 0$; la suite $(n^2 r^{n^2})$ est bornée si, et seulement si $r < 1$. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière est 1.

EXERCICE 2

Déterminer les rayons de convergence et les sommes des séries entières suivantes :

1. $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{n-2}{n!} x^n$

On a : $\frac{(n-1)n!}{(n-2)(n+1)!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$; la règle de d'Alembert donne un rayon infini.

La série $\sum \frac{1}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini, donc pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-2}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} - 2e^x = (x-2)e^x.$$

2. $\sum\limits_{n \geq 0} n e^{-n} x^n$

On a : $\frac{(n+1)e^{-n-1}}{ne^{-n}} \underset{+\infty}{\sim} e^{-1}$, donc d'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est e.

Le théorème de dérivation des séries entières donne que la série $\sum nx^{n-1}$ a pour rayon de convergence 1, et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}$; on a donc : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(e^{-1}x)^n = \frac{e^{-1}x}{(1-e^{-1}x)^2}$.

EXERCICE 3

Donner les développements en série entière au voisinage de 0 des fonctions suivantes, et préciser les rayons de convergence :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{2-3x^2}$

Pour $x \notin \left\{-\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right\}$, $\dfrac{1}{2-3x^2} = \dfrac{1}{2\left(1-\frac{3}{2}x^2\right)}$.

La série $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1, et pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$;

on en déduit que pour $x \in \left]-\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right[$, on a : $\displaystyle\frac{1}{2-3x^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3x^2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n x^{2n}}{2^{n+1}}$.

De plus, la série diverge pour $|x| > \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, donc le rayon de convergence est $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

2. $x \mapsto \ln\left(x^2-6x+9\right)$

Pour $x \in]-3,3[$, $\ln\left(x^2-6x+9\right) = \ln(3-x)^2 = 2\ln\left(3\left(1-\dfrac{x}{3}\right)\right) = 2\ln(3) + 2\ln\left(1-\dfrac{x}{3}\right)$.

La série $\sum \dfrac{x^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1, et pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$;

on en déduit que pour $x \in]-3,3[$, $\displaystyle\ln\left(x^2-6x+9\right) = 2\ln(3) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x^n}{n3^n}$.

De plus, la série diverge pour $|x| > 3$, donc le rayon de convergence est 3.

CB n°4 - Séries entières - Sujet 2

EXERCICE 1

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \frac{n^2}{2^n} z^n$

On a : $\frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$, donc la règle de d'Alembert donne le rayon de convergence égal à 2.

2. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} z^{2n}$

On a : $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\left| \frac{\sqrt{n} z^{2n+2}}{\sqrt{n+1} z^n} \right| \underset{n\to+\infty}{\sim} |z^2|$.

D'après le critère de d'Alembert, si $|z| < 1$, $\sum \sqrt{n} z^{2n}$ converge, et si $|z| > 1$, $\sum \sqrt{n} z^{2n}$ diverge.
Le rayon de convergence est donc 1.

3. $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n z^n$

On a : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}$; ainsi la série entière $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum \mathrm{e} z^n$, c'est-à-dire 1.

4. $\sum \frac{1}{n} z^{n^2}$

Soit $r > 0$; la suite $\left(\frac{r^{n^2}}{n}\right)$ est bornée si, et seulement si $r \leq 1$. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière est 1.

EXERCICE 2

Déterminer les rayons de convergence et les sommes des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{2n-1}{n!} x^n$

On a : $\frac{(2n+1)n!}{(2n-1)(n+1)!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; la règle de d'Alembert donne un rayon infini.

La série $\sum \frac{1}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini, donc pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n-1}{n!} x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} - \mathrm{e}^x = (2x-1)\mathrm{e}^x.$$

2. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \mathrm{e}^{-n} x^n$

On a : $\frac{n\mathrm{e}^{-n-1}}{(n+1)\mathrm{e}^{-n}} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-1}$, donc d'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est e.

Pour $x \in]-\mathrm{e}, \mathrm{e}[$, on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}^{-1}x)^n}{n} = -\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-1}x\right)$.

EXERCICE 3

Donner les développements en série entière au voisinage de 0 des fonctions suivantes, et préciser les rayons de convergence :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2-3}$

Pour $x \notin \left\{-\sqrt{\dfrac{3}{2}}, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right\}$, $\dfrac{1}{2x^2-3} = \dfrac{-1}{3\left(1-\frac{2}{3}x^2\right)}$.

La série $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1, et pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$;

on en déduit que pour $x \in \left]-\sqrt{\dfrac{3}{2}}, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right[$, on a : $\displaystyle\frac{1}{2x^2-3} = \frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2x^2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-2^n x^{2n}}{3^{n+1}}$.

De plus, la série diverge pour $|x| > \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, donc le rayon de convergence est $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

2. $x \mapsto \ln\left(x^2+4x+4\right)$

Pour $x \in]-2,2[$, $\ln\left(x^2+4x+4\right) = \ln(2+x)^2 = 2\ln\left(2\left(1+\dfrac{x}{2}\right)\right) = 2\ln(2) + 2\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$.

La série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1, et pour tout $x \in]-1,1[$,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = \ln(1+x)$;

on en déduit que pour $x \in]-2,2[$, $\displaystyle\ln\left(x^2+4x+4\right) = 2\ln(2) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n2^{n-1}}$.

De plus, la série diverge pour $|x| > 2$, donc le rayon de convergence est 2.