CB N°8 - INTEGRALES A PARAMETRE - SUJET 1

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$

On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ par $g(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^+, t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}+$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}^+, x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Hypothèse de domination :
  $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, |g(x,t)| \leq \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$.
  La fonction φ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (c'est une intégrale de référence).

Le théorème de continuité sous le signe intégral donne f continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Le travail de la question précédente donne pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, t \mapsto g(x,t)$ intégrable sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}^+, x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}+, \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-t^2\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Hypothèse de domination :
  Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$, $(0<a<b)$; $\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}^+, \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-at^2} = \varphi_{a,b}(t)$.
  $\varphi_{a,b}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (c'est une intégrale de référence).

Le théorème de dérivation sous le signe intégral donne f de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus la formule de Leibniz donne : $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-t^2\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

3. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle : $y - y' = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

On donne, pour $a > 0$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$.

Pour tout $x > 0$, on a : $f(x) - f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{-t^2\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$,
par linéarité des intégrales généralisées.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $F_n : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^n}$.

1. Montrer que F_n est dérivable sur $]0,+\infty[$, et exprimer sa dérivée à l'aide de F_{n+1}.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^+$ par $f_n(x,t) = \dfrac{1}{(x^2+t^2)^n}$. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
  $\rightsquigarrow$ La fonction $t \mapsto f_n(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc localement intégrable.

⇝ En $+\infty$:
On a $f_n(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$, (avec $n > 0$) donc par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $t \mapsto f_n(x,t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Finalement pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto f_n(x,t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}^+, x \mapsto f_n(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^+$,
$\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t) = \frac{-2nx}{(x^2+t^2)^{n+1}}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, t \mapsto \frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Hypothèse de domination :
Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$, $(0 < a < b)$, $\forall (x,t) \in [a,b] \times R^+$, $\left|\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2bn}{(a^2+t^2)^{n+1}} = \varphi_{a,b}(t)$.
⇝ La fonction $t \mapsto \varphi_{a,b}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc localement intégrable.
⇝ En $+\infty$:
On a $\varphi_{a,b}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2bn}{t^{2(n+1)}}$, (avec $n > 0$) donc par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $t \mapsto \varphi_{a,b}(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Finalement $\varphi_{a,b}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Le théorème de dérivation sous le signe intégral donne F_n de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et la formule de Leibniz donne : $F_n'(x) = -2nxF_{n+1}(x)$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^3}$.

On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^3} = F_3(1)$.

Pour $x > 0$, on a : $F_1(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x^2+t^2} = \left[\frac{1}{x}\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{x}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}$, donc la formule établie précédemment donne $F_2(x) = \frac{\pi}{4x^3}$, puis $F_3(x) = \frac{3\pi}{16x^5}$.

Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^3} = F_3(1) = \frac{3\pi}{16}$.

CB N°8 - INTEGRALES A PARAMETRE - SUJET 2

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^+$ par $g(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$.

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

– Montrons tout d'abord que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
  $\rightsquigarrow$ La fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc localement intégrable.
  $\rightsquigarrow$ En $+\infty$:
  On a $|g(x,t)| \leq \mathrm{e}^{-xt}$ avec $x > 0$, donc par comparaison à une intégrale de référence convergente, $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}^+, x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^+$,
  $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-t\mathrm{e}^{-xt}}{(1+t^2)}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Hypothèse de domination :
  Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$, $(0 < a < b)$, $\forall (x,t) \in [a,b] \times R^+$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq t\mathrm{e}^{-at} = \varphi_{a,b}(t)$.
  $\rightsquigarrow$ La fonction $t \mapsto \varphi_{a,b}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc localement intégrable.
  $\rightsquigarrow$ En $+\infty$:
  On a $\varphi_{a,b}(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, (par croissances comparées) donc par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $t \mapsto \varphi_{a,b}(t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
  Finalement $\varphi_{a,b}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Le théorème de dérivation sous le signe intégral donne f de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et la formule de Leibniz donne : $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

– Montrons que f' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, nous aurons ainsi f de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

On note g_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^+$ par $g_1(x,t) = \dfrac{-t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ (c'est $\dfrac{\partial g}{\partial x}$).

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après le résultat précédent, la fonction $t \mapsto g_1(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}^+, x \mapsto g_1(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^+$,
  $\dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{(1+t^2)}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, t \mapsto \dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Hypothèse de domination :
  Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$, $(0 < a < b)$, $\forall (x,t) \in [a,b] \times R^+$, $\left|\dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-at} = \psi_{a,b}(t)$.
  $\psi_{a,b}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (c'est une intégrale de référence).

Le théorème de dérivation sous le signe intégral donne f' de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, et la formule de Leibniz donne : $f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

2. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle : $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.

Pour tout $x > 0$, on a :

$$f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \left[\frac{-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x},$$

par linéarité des intégrales généralisées.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $F_n : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^x + t^2)^n}$.

1. Montrer que F_n est dérivable sur $[0, +\infty[$, et exprimer sa dérivée à l'aide de F_{n+1}.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ par $f_n(x,t) = \dfrac{1}{(\mathrm{e}^x + t^2)^n}$. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $x \in \mathbb{R}^+$.
  - $\rightsquigarrow$ La fonction $t \mapsto f_n(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc localement intégrable.
  - $\rightsquigarrow$ En $+\infty$:

    On a $f_n(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$, (avec $n > 0$) donc par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $t \mapsto f_n(x,t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

  Finalement pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $t \mapsto f_n(x,t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}^+, x \mapsto f_n(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$,
  $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-n\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + t^2)^{n+1}}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^+, t \mapsto \dfrac{\partial f_n}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Hypothèse de domination :

  Soit $[a,b] \subset [0, +\infty[$, $(0 < a < b)$, $\forall (x,t) \in [a,b] \times R^+$, $\left|\dfrac{\partial f_n}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{n\mathrm{e}^b}{(1+t^2)^{n+1}} = \varphi_{a,b}(t)$.
  - $\rightsquigarrow$ La fonction $t \mapsto \varphi_{a,b}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc localement intégrable.
  - $\rightsquigarrow$ En $+\infty$:

    On a $\varphi_{a,b}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{n\mathrm{e}^b}{t^{2(n+1)}}$, (avec $n > 0$) donc par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $t \mapsto \varphi_{a,b}(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

  Finalement pour tout $\varphi_{a,b}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Le théorème de dérivation sous le signe intégral donne F_n de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et la formule de Leibniz donne : $F_n'(x) = -n\mathrm{e}^x F_{n+1}(x)$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^3}$.

On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^3} = F_3(0)$.

Pour $x \geq 0$, on a : $F_1(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x + t^2} = \left[\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi\mathrm{e}^{\frac{-x}{2}}}{2}$, donc la formule établie précédemment donne $F_2(x) = \dfrac{\pi}{4}\mathrm{e}^{\frac{-3x}{2}}$, puis $F_3(x) = \dfrac{3\pi}{16}\mathrm{e}^{\frac{-5x}{2}}$.

Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^3} = F_3(0) = \frac{3\pi}{16}$.