# CB N°11 - SURFACES - CORRECTION

**Exercice 1**

On considère la surface $S$ paramétrée par $\begin{cases} x(u,v) = u^3 + v^2 \\ y(u,v) = u + v^2 \\ z(u,v) = v^2 + v + 1 \end{cases}$

**1.** $S$ est-elle régulière ?

On note $\varphi$ le paramétrage de $S$.

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} 3u^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} 2v \\ 2v \\ 2v+1 \end{pmatrix}$ donc $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} 2v+1 \\ -3u^2(2v+1) \\ 2v(3u^2-1) \end{pmatrix}$.

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -\dfrac{1}{2} \\ u = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$.

On en déduit que $S$ admet des points singuliers, elle n'est donc pas régulière.

**2.** Déterminer l'équation du plan tangent à $S$ au point $A(u = 1, v = 1)$.

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(1,1) \wedge \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(1,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}$, donc l'équation du plan tangent en $A(2,2,3)$ est :

$3(x-2) - 9(y-2) + 4(z-3) = 0$, soit encore : $3x - 9y + 4z = 0$

**Exercice 2**

Soit $S$ la surface d'équation cartésienne $x^2 - y^2 + 2z^2 = 2$.

**1.** Montrer que $S$ est régulière.

On note $F(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2 - 2$. $\overrightarrow{\text{Grad}}F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 4z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = z = 0$.

Or $O \notin S$ donc la surface est régulière.

**2.** Déterminer une équation cartésienne du plan $\Pi$ tangent à $S$ au point $A(1,-1,1)$.

$\overrightarrow{\text{Grad}}F(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, donc l'équation du plan tangent en $A$ est $2(x-1) + 2(y+1) + 4(z-1) = 0$, soit encore : $x + y + 2z - 2 = 0$.

**3.** Déterminer les points de $S$ en lesquels le plan tangent est orthogonal à la droite $D : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 - t \\ z(t) = t \end{cases}$.

$D$ est dirigée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et le plan $\Pi_0$ tangent en $M_0(x_0, z_0, y_0)$ a pour vecteur normal $\begin{pmatrix} x_0 \\ -y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\Pi_0$ est orthogonal à $D$ si, et seulement si $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_0 \\ -y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme $M_0 \in S$, on en déduit : $\left\{\begin{array}{l} x_0 = y_0 \\ y_0 = 2z_0 \\ x_0^2 - y_0^2 + 2z_0^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 = y_0 \\ y_0 = 2z_0 \\ z_0^2 = 1 \end{array}\right.$.
Finalement, les deux plans satisfaisant le problème sont tangents à $S$ en $M_1(2, 2, 1)$ et $M_2(-2, -2, -1)$.

**Exercice 3**

Former une équation cartésienne du cône de sommet $O$ et de directrice d'équations
$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 - xy - 1 = 0 \\ z = 1 \end{array}\right.$.

On note $\Sigma$ le cône recherché et $C$ la directrice.
$M(x, y, z) \in \Sigma \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, O + t\overrightarrow{OM} \in C \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} (tx)^2 + (ty)^2 - (tx)(ty) - 1 = 0 \\ tz = 1 \end{array}\right.$.
On obtient $\Sigma : x^2 + y^2 - xy - z^2 = 0$.

**Exercice 4**

Donner une équation cartésienne de la surface de révolution engendrée par la rotation de la courbe
$C : \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 1 + \cos t \\ z = 2 - \sin t \end{array}\right.$ autour de la droite $(Ox)$.

On note $\Sigma$ la surface recherchée. L'axe $(Ox)$ est dirigé par $\overrightarrow{i}$ et passe par $O$.
$M(x, y, z) \in \Sigma \Leftrightarrow \exists M_0(t) \in C, \left\{\begin{array}{l} OM = OM_0 \\ \overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{i} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + (1 + \cos t)^2 + (2 - \sin t)^2 \\ x - t = 0 \end{array}\right.$.
On en déduit $\Sigma : y^2 + z^2 - 2\cos x + 4\sin x - 6 = 0$.