- CC2-S2 - - 2020-2021 -

– Correction - Analyse –

EXERCICE 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(1-itx)}\mathrm{d}t$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
On note $g : (x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-t(1-itx)}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
✓ $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc localement intégrable.
✓ $|g(x,t)| = \mathrm{e}^{-t}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est une intégrale de référence convergente.
On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente, et donc que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^p\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge. On la note I_p.
Soit $p \in \mathbb{N}$.
✓ $t \mapsto t^p\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc localement intégrable.
✓ Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2t^p\mathrm{e}^{-t} = 0$, donc $t^p\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc par comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^p\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge.
On en déduit que pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^p\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

3. Déterminer une relation entre I_{p+1} et I_p, pour tout entier naturel p, et en déduire la valeur de I_p.
Soit $p \in \mathbb{N}$. On considère $u : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ et $v : t \mapsto \dfrac{t^{p+1}}{p+1}$.
u est v sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$, par croissances comparées.
On a montré que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^p\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge, donc le théorème d'intégration par parties donne :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} t^p\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p+1}\int_0^{+\infty} t^{p+1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. On en déduit que :

$$I_p = \frac{1}{p+1}I_{p+1}$$

On a $I_0 = 1$, et une récurrence immédiate donne pour tout entier p :

$$I_p = p!$$

4. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et déterminer $f^{(p)}(x)$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrons par récurrence sur p que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, f est de classe C^p sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x :

$$f^{(p)}(x) = i^p \int_0^{+\infty} t^{2p}\mathrm{e}^{-t(1-itx)}\mathrm{d}t$$

✓ On a montré que pour tout réel x, $f(x)$ existe.
✓ $\forall t \in [0,+\infty[, x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = it^2\mathrm{e}^{-t(1-itx)}\mathrm{d}t$.
✓ $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue.
✓ $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[, \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = t^2\mathrm{e}^{-t}$, et on a montré que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge (question **2**).

Le théorème de dérivation sous le signe intégral donne f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = i\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t(1-itx)}\mathrm{d}t$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on suppose que f est de classe C^p et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(p)}(x) = i^p\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2p}\mathrm{e}^{-t(1-itx)}\mathrm{d}t$.

On note $g_p : (x,t) \mapsto t^{2p}\mathrm{e}^{-t(1-itx)}$.

✓ Par hypothèse, pour tout réel x, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_p(x,t)\mathrm{d}t$ converge.

✓ $\forall t \in [0,+\infty[, x \mapsto g_p(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et $\dfrac{\partial g_p}{\partial x}(x,t) = it^{2p+2}\mathrm{e}^{-t(1-itx)}$.

✓ $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{\partial g_p}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

✓ $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial g_p}{\partial x}(x,t)\right| = t^{2p+2}\mathrm{e}^{-t}$, et on a montré que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2p+2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge (question **2**).

Le théorème de dérivation sous le signe intégral donne $f^{(p)}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f^{(p+1)}(x) = i^{p+1}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2p+2}\mathrm{e}^{-t(1-itx)}\mathrm{d}t$

Par principe de récurrence, la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et pour tout entier p et tout réel x, $f^{(p)}(x) = i^p\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2p}\mathrm{e}^{-t(1-itx)}\mathrm{d}t$

5. En déduire le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{p\geq 0}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$. La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

D'après la question précédente, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \frac{f^{(p)}(0)}{p!} = \frac{i^p}{p!}\int_0^{+\infty} t^{2p}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \frac{i^p}{p!}I_{2p} = i^p\frac{(2p)!}{p!}$$

Ce terme n'est jamais nul et on a pour tout entier p : $\dfrac{\left|\frac{f^{(p+1)}(0)}{(p+1)!}\right|}{\left|\frac{f^{(p)}(0)}{p!}\right|} = \dfrac{(2p+2)(2p+1)}{p+1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

La règle de d'Alembert donne le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{p\geq 0}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$ nul.

Si f était développable en série entière au voisinage de 0, comme elle est de classe C^∞ elle serait égale à sa série de Taylor, c'est donc impossible d'après ce qui précède.

On en déduit que f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

EXERCICE 2

Soient n et N deux entiers naturels non nuls. On lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N. On suppose que les différents lancers sont indépendants et que la probabilité qu'une boule tombe dans une case donnée est $\dfrac{1}{N}$.

Une case peut contenir plusieurs boules. On note T_n le nombre **de cases non vides** à l'issue des n lancers.

1. Déterminer, en fonction de n et N, les valeurs prises par la variable T_n (on distinguera les cas $n \leq N$ et $n > N$).

⇝ Si $n \leq N$, deux situations extrêmes sont possibles : une seule case est non vide, et elle contient les n boules, ou les n boules sont tombées dans des cases différentes, donc il y a n cases non vides, et il ne peut y en avoir plus. On a donc :

$$\text{Si } n \leq N, \ \text{ alors } T_n(\Omega) = [\![1,n]\!]$$

⇝ Si $n > N$, les deux situations extrêmes sont : soit une seule case est non vide et contient toutes les boules, soit toutes les cases sont non vides car elles contiennent toutes au moins une boule. On a donc :

$$\text{Si } n > N, \ \text{ alors } T_n(\Omega) = [\![1,N]\!]$$

De façon générale, on a :

$$T_n(\Omega) = [\![1,\min(n,N)]\!]$$

2. Donner la loi de T_1 et de T_2. Calculer leurs espérances.

- Si $n=1$. On a forcément $N \geq n$ et $T_1(\Omega)=\{1\}$. Il est certain qu'il y aura une seule case non vide, contenant l'unique boule donc $\mathbb{P}(T_1=1)=1$ et par suite $\mathbb{E}(T_1)=1$.
- Si $n=2$:
  $\rightsquigarrow$ Si $N=1$, alors les deux boules tombent dans l'unique case donc $T_2(\Omega)=\{1\}, \mathbb{P}(T_2=1)=1$ et $\mathbb{E}(T_2)=1$.
  $\rightsquigarrow$ Si $N \geq 2$, alors $T_2(\Omega)=\{1,2\}$.
  On note X_i la variable aléatoire qui donne le numéro de la case dans laquelle tombe la i-ème boule, pour $i \in \{1,2\}$. On a : $(T_2=1)=\displaystyle\bigcup_{j=1}^{N}(X_1=j)\cap(X_2=j)$.
  Les événements de cette union étant deux à deux incompatibles, par σ-additivité, indépendance des lancers et équiprobabilité on a :
  $\mathbb{P}(T_2=1)=\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\mathbb{P}(X_1=j)\,\mathbb{P}(X_2=j)=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{N^2}=\frac{1}{N}$.
  Par passage au complémentaire, on a : $\mathbb{P}(T_2=2)=1-\dfrac{1}{N}=\dfrac{N-1}{N}$.
  Par suite, $\mathbb{E}(T_2)=\dfrac{1}{N}+2\dfrac{N-1}{N}=\dfrac{2N-1}{N}$.

3. On fixe désormais $n \geq 2$.Calculer $\mathbb{P}(T_n=1)$ et $\mathbb{P}(T_n=n)$.

- Comme précédemment, on note X_i la variable aléatoire qui donne le numéro de la case où tombe la i-ème boule. On a : $(T_n=1)=\displaystyle\bigcup_{j=1}^{N}\bigcap_{i=1}^{n}(X_i=j)$.
  Par σ-additivité, indépendance des lancers et équiprobabilité on a :
  $\mathbb{P}(T_n=1)=\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i=j)=\sum_{j=1}^{N}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{N}=\frac{1}{N^{n-1}}$.
- $\rightsquigarrow$ Si $N<n$, l'événement $(T_n=n)$ est impossible, donc de probabilité nulle.
  $\rightsquigarrow$ Si $N \geq n$: Pour qu'au n-ème lancer n cases soient non vides il faut qu'au $(n-1)$-ème lancer $n-1$ cases soient non vides, et qu'au lancer suivant la boule atteigne une case vide.
  En considérant la partition $(T_{n-1}=n-1, T_{n-1}\neq n-1)$, la formule des probabilités totales donne :
  $\mathbb{P}(T_n=n)=\mathbb{P}(T_n=n|T_{n-1}=n-1)\mathbb{P}(T_{n-1}=n-1)\ +\underbrace{\mathbb{P}(T_n=n|T_{n-1}\neq n-1)}_{0}\mathbb{P}(T_{n-1}\neq n-1)$
  On a donc : $\mathbb{P}(T_n=n)=\dfrac{N-(n-1)}{N}\mathbb{P}(T_{n-1}=n-1)$.
  Sachant que $\mathbb{P}(T_1=1)=1$, une récurrence immédiate donne :
$$\mathbb{P}(T_n=n)=\frac{N!}{(N-n)!N^n}$$

4. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier $k \geq 1$:
$$\mathbb{P}(T_{n+1}=k)=\frac{k}{N}\,\mathbb{P}(T_n=k)+\frac{N-k+1}{N}\,\mathbb{P}(T_n=k-1).\quad(\star\star)$$

Les événements $(T_n=i)$ pour $1 \leq i \leq \min\{n,N\}$ forment un système complet d'événements.
La formule des probabilités totales donne :
$\mathbb{P}(T_{n+1}=k)=\displaystyle\sum_{i=1}^{\min\{n,N\}}\mathbb{P}(T_{n+1}=k|T_n=i)\,\mathbb{P}(T_n=i)$.
Pour $i>k$, on a $\mathbb{P}(T_{n+1}=k|T_n=i)=0$ (car le nombre de cases non vides ne peut diminuer pas avec un lancer supplémentaire.)
De même, $\mathbb{P}(T_{n+1}=k|T_n=i)=0$ si $i<k-1$ (car le nombre de cases non vides ne peut augmenter qu'au plus de 1 par lancer supplémentaire). On a donc :
$\mathbb{P}(T_{n+1}=k)=\mathbb{P}(T_n+1=k|T_n=k)\,\mathbb{P}(T_n=k)+\mathbb{P}(T_n+1=k|T_n=k-1)\,\mathbb{P}(T_n=k-1)$.
Or, $\mathbb{P}(T_{n+1}=k|T_n=k)$ est la probabilité que le nombre de cases vides n'ait pas évolué, c'est-à-dire que la dernière boule lancée tombe dans l'une des k cases déjà occupées parmi les N disponibles. Par équiprobabilité, on a : $\mathbb{P}(T_{n+1}=k|T_n=k)=\dfrac{k}{N}$.
$\mathbb{P}(T_{n+1}=k|T_n=k-1)$ quant à elle, est la probabilité que la dernière boule lancée arrive dans l'une des

$N-(k-1)$ cases encore vides, donc $\mathbb{P}(T_{n+1}=k|T_n=k-1)=\dfrac{N-(k-1)}{N}$.
On a donc bien :

$$\mathbb{P}(T_{n+1}=k)=\frac{k}{N}\,\mathbb{P}(T_n=k)+\frac{N-k+1}{N}\,\mathbb{P}(T_n=k-1)$$

5. On note G_n la fonction génératrice de la variable T_n.

a. Rappeler la définition de G_n. Montrer qu'ici G_n est définie sur $\mathbb{R}$.

$T_n(\Omega)\subset\mathbb{N}^*$ donc, là où elle existe, $G_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(T_n=k)x^k$.

Or ici, T_n prend un nombre fini de valeurs donc cette somme est en fait une fonction polynomiale qui est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Rappeler le lien entre G_n et $\mathbb{E}(T_n)$.

$\mathbb{E}(T_n)=G_n'(1)$

c. En utilisant $(\star\star)$, montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$G_{n+1}(x)=\frac{1}{N}(x-x^2)G_n'(x)+xG_n(x)$$

D'après $(\star\star)$, pour tout réel x, toutes les sommes étant en réalité finies :

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(x) &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{+\infty}k\mathbb{P}(T_n=k)x^k+\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(T_n=k-1)x^k-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)\mathbb{P}(T_n=k-1)x^k\\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{+\infty}k\mathbb{P}(T_n=k)x^k+\sum_{k=2}^{+\infty}\mathbb{P}(T_n=k-1)x^k-\frac{1}{N}\sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)\mathbb{P}(T_n=k-1)x^k
\end{aligned}$$

car $\mathbb{P}(T_n=0)=0$, donc :

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(x) &= \frac{x}{N}\sum_{k=1}^{+\infty}k\mathbb{P}(T_n=k)x^{k-1}+x\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(T_n=k)x^k-\frac{x^2}{N}\sum_{k=1}^{+\infty}k\mathbb{P}(T_n=k)x^{k-1}\\
&= \frac{x}{N}G_n'(x)+xG_n(x)-\frac{x^2}{N}G_n'(x)
\end{aligned}$$

d. En déduire que $\mathbb{E}(T_{n+1})=\left(1-\dfrac{1}{N}\right)\mathbb{E}(T_n)+1$, puis que : $\mathbb{E}(T_n)=N\left(1-\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n\right)$.

Par dérivation de la relation précédente, pour tout réel x :
$G_{n+1}'(x)=\dfrac{1}{N}(1-2x)G_n'(x)+\dfrac{1}{N}(x-x^2)G_n''(x)+G_n(x)+xG_n'(x)$.

En prenant $x=1$, en sachant que $G_n(1)=1$, on obtient : $G_{n+1}'(1)=\left(1-\dfrac{1}{N}\right)G_n'(1)+1$

Donc, d'après **b** :

$$\mathbb{E}(T_{n+1})=\left(1-\frac{1}{N}\right)\mathbb{E}(T_n)+1$$

On procède par récurrence sur n pour montrer que pour tout $n\geq 1, \mathbb{E}(T_n)=N\left(1-\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n\right)$:

Au rang $n=1$ on a $\mathbb{E}(T_1)=1$, obtenu à la question **2**.
On suppose que l'égalité est vraie pour $n\geq 1$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_{n+1}) &= \left(1-\frac{1}{N}\right)\mathbb{E}(T_n)+1\\
&= \left(1-\frac{1}{N}\right)N\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)+1\\
&= (N-1)-\frac{(N-1)^{n+1}}{N^n}+1\\
&= N-N\frac{(N-1)^{n+1}}{N^{n+1}}\\
&= N\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Par principe de récurrence, on a l'égalité pour tout $n \geq 1$.

6. Pour $1 \leq k \leq N$, on note Y_k le nombre de boules dans la case k et Z_k la variable valant 0 si la case k est vide, et 1 si elle contient au moins une boule.

a. Donner la loi de Y_k, puis celle de Z_k.
Si on considère chaque lancer comme une expérience de Bernoulli un succès étant l'obtention de la case k, ces épreuves étant mutuellement indépendantes de probabilité $\dfrac{1}{N}$, on en déduit que $Y_k \sim \mathscr{B}\left(n, \dfrac{1}{N}\right)$.
Par définition, Z_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(Y_k \geq 1)$ qui vaut :
$p = 1 - \mathbb{P}(Y_k = 0) = 1 - \binom{n}{0}\left(\dfrac{1}{N}\right)^0\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^n = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^n$

b. Les variables aléatoires $(Z_k)_{1\leq k\leq N}$ sont-elles mutuellement indépendantes ?
L'événement $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{N}(Z_k = 0)$ est impossible car toutes les cases ne peuvent être vides à l'issue de l'expérience, donc de probabilité nulle, alors que le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{N}\mathbb{P}(Z_k = 0)$ n'est pas nul.
On en déduit que les variables aléatoires Z_k ne sont pas mutuellement indépendantes.

c. Exprimer T_n en fonction des variables aléatoires $(Z_k)_{1\leq k\leq N}$, et retrouver ainsi l'expression de $\mathbb{E}(T_n)$.
Par définition, $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} Z_k$; donc par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(T_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}(Z_k) = \sum_{k=1}^{N}\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^n\right)$.
On retrouve bien

$$\mathbb{E}(T_n) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$$