CB n°3 - Réduction - Sujet 1

EXERCICE 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

$\chi_A = \det(X\mathrm{I}_3 - A) = (X-4)(X-1)^2$ est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 4\}$.
On trouve $E_1(A) = \mathrm{Ker}\,(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ et $E_4(A) = \mathrm{Ker}\,(A - 4\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
Les dimensions des espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes, donc A est diagonalisable.
On trouve : $A = PDP^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Enfin, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+4^n & -1+4^n & -1+4^n \\ -1+4^n & 2+4^n & -1+4^n \\ -1+4^n & -1+4^n & 2+4^n \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2

Soient $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Montrer qu'il existe une matrice inversible P, **que l'on déterminera**, telle que

$$B = PTP^{-1}$$

$\chi_B = \det(X\mathrm{I}_3 - B) = (X-1)(X-3)^2$ est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Sp}(B) = \{1, 3\}$.
On trouve $E_1(B) = \mathrm{Ker}\,(B - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ et $E_3(B) = \mathrm{Ker}\,(B - 3\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
$\dim(E_3) \neq m(3)$ donc B n'est pas diagonalisable, mais χ_B est scindé, donc B est trigonalisable, semblable à T, matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de B au nombre de leur multiplicité.
On a : $B = PTP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.
Sachant que $BP = PT$, on cherche donc a, b et c tels que : $\begin{cases} -a+b+c = 1 \\ a-b+c = 1 \end{cases}$ ce qui équivaut à $\begin{cases} a = b \\ c = 1 \end{cases}$;
la matrice P devant être inversible, $a = b = 0$ et $c = 1$ convient.

EXERCICE 3

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}(A) = \{-2, -1, 1\}$.
Démontrer qu'il existe a_n, b_n et c_n dans $\mathbb{R}$ **que l'on déterminera**, tels que

$$A^n = a_n \mathrm{I}_3 + b_n A + c_n A^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

En dimension 3, A possède trois valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable. Ainsi, il existe une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$ donc $A^n = a_n \mathrm{I}_3 + b_n A + c_n A^2$ équivaut à $PD^nP^{-1} = P\left(a_n \mathrm{I}_3 + b_n D + c_n D^2\right)P^{-1}$, soit encore : $D^n = a_n \mathrm{I}_3 + b_n D + c_n D^2$.
Ainsi, (a_n, b_n, c_n) sont solutions de $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & (-2)^n \\ 1 & -1 & 1 & (-1)^n \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

On trouve pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{3}\left(1 + 3(-1)^n - (-2)^n\right) \\ b_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right) \\ c_n = \dfrac{1}{6}\left(1 + 3(-1)^n + 2(-2)^n\right) \end{cases}$

CB N°3 - RÉDUCTION - SUJET 2

EXERCICE 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

$\chi_A = \det(X\mathrm{I}_3 - A) = X(X-3)^2$ est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 3\}$.

On trouve $E_3(A) = \mathrm{Ker}\,(A - 3\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ et $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Les dimensions des espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes, donc A est diagonalisable.

On trouve : $A = PDP^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Enfin, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \times 3^{n-1} & -3^{n-1} & -3^{n-1} \\ -3^{n-1} & 2 \times 3^{n-1} & -3^{n-1} \\ -3^{n-1} & -3^{n-1} & 2 \times 3^{n-1} \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2

Soient $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe une matrice inversible P, **que l'on déterminera**, telle que

$$B = PTP^{-1}$$

$\chi_B = \det(X\mathrm{I}_3 - B) = (X-1)^2(X-3)$ est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Sp}(B) = \{1, 3\}$.

On trouve $E_1(B) = \mathrm{Ker}\,(B - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ et $E_3(B) = \mathrm{Ker}\,(B - 3\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

$\dim(E_3) \neq m(3)$ donc B n'est pas diagonalisable, mais χ_B est scindé, donc B est trigonalisable, semblable à T, matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de B au nombre de leur multiplicité.

On a : $B = PTP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Sachant que $BP = PT$, on cherche donc a, b et c tels que : $\begin{cases} a - b - c = 1 \\ -a + b - c = 1 \end{cases}$ ce qui équivaut à $\begin{cases} a = b \\ c = -1 \end{cases}$;

la matrice P devant être inversible, $a = b = 0$ et $c = -1$ convient.

EXERCICE 3

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1, 2\}$.
Démontrer qu'il existe a_n, b_n et c_n dans $\mathbb{R}$ **que l'on déterminera**, tels que

$$A^n = a_n \mathrm{I}_3 + b_n A + c_n A^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

En dimension 3, A possède trois valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable. Ainsi, il existe une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$ donc $A^n = a_n \mathrm{I}_3 + b_n A + c_n A^2$ équivaut à $PD^nP^{-1} = P\left(a_n \mathrm{I}_3 + b_n D + c_n D^2\right)P^{-1}$, soit encore : $D^n = a_n \mathrm{I}_3 + b_n D + c_n D^2$.

Ainsi, (a_n, b_n, c_n) sont solutions de $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & (-1)^n \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2^n \end{array}\right)$.

On trouve pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{6}\left(6 + 2(-1)^n - 2(-2)^n\right) \\ b_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right) \\ c_n = \dfrac{1}{6}\left(-3 + 2 \times 2^n + (-1)^n\right) \end{cases}$