# - ES-S2 -      - 2018-2019 -

## – Correction - Géométrie –

### Définitions et notations

$n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, fixé et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$.
Pour tout entier $k$ tel que $0 \leq k \leq n$ on note $\mathscr{B}_{k,n}$ le polynôme

$$\mathscr{B}_{k,n} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

On admettra que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, la famille $(\mathscr{B}_{k,n})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour $p = 2$ ou 3, $\mathbb{R}^p$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé d'origine $O$.
Si $A_0, A_1, \cdots, A_n$ sont $(n+1)$ points de $\mathbb{R}^p$, on appelle **courbe de Bézier** associée aux points de contrôle $A_0, A_1, \cdots, A_n$ la courbe paramétrée définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall t \in [0,1], \overrightarrow{OM(t)} = \sum_{k=0}^{n} \mathscr{B}_{k,n}(t) \overrightarrow{OA_k}$$

### Partie I : Une courbe de Bézier

Dans cette partie et la suivante, on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère la courbe de Bézier $\Gamma_1$ associée aux points de contrôle $A_0, A_1, A_2$ et $A_3$ de coordonnées respectives $(0,0), (2,2), (1,3)$ et $(1,-1)$.

**1.** Montrer que $\Gamma_1$ est la restriction à $[0,1]$ de la courbe $\Gamma_0$ admettant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = 6t - 9t^2 + 4t^3 \\ y(t) = 6t - 3t^2 - 4t^3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

On note $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un point de $\Gamma_1$. On a :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0,1], \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= (-t^3 + 3t^2 - 3t + 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (3t^3 - 6t^2 + 3t) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (-3t^3 + 3t^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6t - 9t^2 + 4t^3 \\ 6t - 3t^2 - 4t^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**2.** Construire les tableaux de variations de $x$ et $y$.
On a : $x'(t) = 6(t-1)(2t-1)$ et $y'(t) = -6(t+1)(2t-1)$, d'où les tableaux de variations :

| $t$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | | | | $+$ | | | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x(t)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-19$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{5}{4}$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y(t)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-5$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{7}{4}$ | $\searrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |
| $y'(t)$ | | $-$ | $0$ | | $+$ | | $0$ | | $-$ | | |

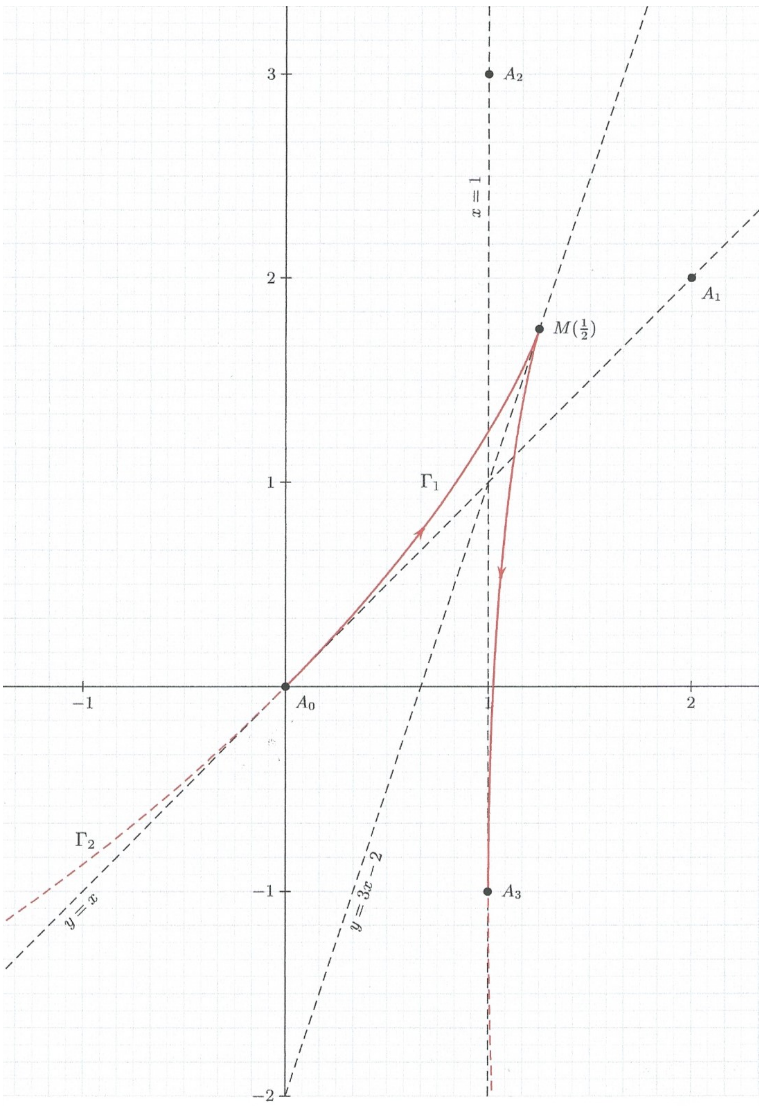
**3.** Déterminer les points réguliers de $\Gamma_0$ dont la tangente à $\Gamma_0$ est horizontale ou verticale.
On a une tangente horizontale au point de paramètre $t = -1$ de coordonnées $(-19, -5)$, et une tangente verticale au point de paramètre $t = 1$ de coordonnées $(1, -1)$.

**4.** Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\Gamma_0$ au point de paramètre $t = 0$.
La tangente au point régulier $O$ de paramètre $t = 0$ est dirigée par le vecteur dérivé $x'(0)\vec{i} + y'(0)\vec{j} = 6(\vec{i} + \vec{j})$ ; c'est la première bissectrice du repère, c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.

**5.** Déterminer le point singulier de $\Gamma_0$. Préciser sa nature ainsi que la tangente à $\Gamma_0$ en ce point.
On a $x'\left(\frac{1}{2}\right) = y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, donc le point $M\left(\frac{1}{2}\right)$ est un point stationnaire.
$x''\left(\frac{1}{2}\right) = -6$ et $y''\left(\frac{1}{2}\right) = -18$, donc le premier entier caractéristique est $p = 2$, et la tangente est dirigée par le vecteur $-6\vec{i} - 18\vec{j}$. Elle a pour équation $y - \frac{7}{4} = 3\left(x - \frac{5}{4}\right)$ soit encore : $3x - y - 2 = 0$.
Enfin, $x^{(3)}\left(\frac{1}{2}\right) = 24$ et $y^{(3)}\left(\frac{1}{2}\right) = -24$ et le vecteur $24(\vec{i} - \vec{j})$ n'est pas colinéaire au précédent, donc le second entier caractéristique est $q = 3$ et le point singulier est un rebroussement de première espèce.

**6.** Donner la nature des branches infinies de $\Gamma_0$.
$\frac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to\pm\infty}{\sim} -1$ et $y(t) + x(t) \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc $\Gamma_0$ admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = -x$.

**7.** Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $\Gamma_1$, les points $A_0, A_1, A_2$ et $A_3$ ainsi que les tangentes obtenues aux questions précédentes.



## Partie II : Un détour par le cas général

Dans cette partie, on se place encore dans le plan, mais $n$ désigne un entier naturel quelconque supérieur à 2. On considère $(n+1)$ points $A_0, A_1, \cdots, A_n$, et on note $\Gamma$ la courbe de Bézier associée aux points de contrôle $A_0, A_1, \cdots, A_n$.

**1.** Que peut-on dire des points de $\Gamma$ de paramètres $t=0$ et $t=1$ ?

On a : $\mathscr{B}_{k,n}(0) = \delta_{k,0}$ donc $\overrightarrow{OM(0)} = \overrightarrow{OA_0}$ d'où $M(0) = A_0$.

De même $\mathscr{B}_{k,n}(1) = \delta_{k,n}$ donc $\overrightarrow{OM(1)} = \overrightarrow{OA_n}$ d'où $M(1) = A_n$.

**2.** On suppose dans cette question que les points $A_0$ et $A_1$ sont distincts. Montrer que la tangente à $\Gamma$ en $A_0$ est la droite $(A_0A_1)$.

Le vecteur dérivé au point $M(t)$ est :

$M'(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{OM(t)}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathscr{B}'_{k,n}(t)\overrightarrow{OA_k}$ donc $M'(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathscr{B}'_{k,n}(0)\overrightarrow{OA_k}$.

Or, pour $k \geq 2$, $X^2$ est en facteur dans le polynôme $\mathscr{B}_{k,n}$ donc $\mathscr{B}'_{k,n}(0) = 0$. De plus, $\mathscr{B}_{0,n} = (1-X)^n$ donc $\mathscr{B}'_{0,n}(0) = -n$ et $\mathscr{B}_{1,n} = nX(1-X)^{n-1}$ donc $\mathscr{B}'_{1,n}(0) = 0$. Finalement,

$$M'(0) = -n\overrightarrow{OA_0} + n\overrightarrow{OA_1} = n\overrightarrow{A_0A_1} \neq \vec{0}$$

La tangente à $\Gamma$ en $M(0) = A_0$ est la droite passant par $A_0$ dirigée par $\overrightarrow{A_0A_1}$, c'est donc la droite $(A_0A_1)$.

**3.** Soient $P$ et $Q$ deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. On considère la courbe $\Lambda$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x(t) = P(t) \\ y(t) = Q(t) \end{cases}, t \in [0,1]$.

Est-il possible de trouver $(n+1)$ points $A_0, A_1, \cdots, A_n$ tels que $\Lambda$ soit la courbe de Bézier aux points de contrôle $A_0, A_1, \cdots, A_n$ ?

Il est dit dans l'énoncé que la famille $(\mathscr{B}_{k,n})_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Dans cette base, on écrit :

$P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k \mathscr{B}_{k,n}$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q_k \mathscr{B}_{k,n}$, où $\forall k \in [\![0,n]\!], (p_k, q_k) \in \mathbb{R}^2$.

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on définit le point $A_k$ par $\overrightarrow{OA_k} = p_k\vec{i} + q_k\vec{j}$. Alors,

$$\begin{aligned}\forall t \in [0,1], \quad \overrightarrow{OM(t)} = P(t)\vec{i} + Q(t)\vec{j} &= \left(\sum_{k=0}^{n} p_k \mathscr{B}_{k,n}\right)\vec{i} + \left(\sum_{k=0}^{n} q_k \mathscr{B}_{k,n}\right)\vec{j} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathscr{B}_{k,n}(t)\overrightarrow{OA_k}\end{aligned}$$

donc $\Lambda$ est la courbe de Bézier associée aux points de contrôle $A_0, \cdots, A_n$.

## Partie III : Une surface de révolution

On se place désormais dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et on considère la courbe de Bézier $\Gamma_2$ associée aux points de contrôle $D_0, D_1, D_2$ et $D_3$ de coordonnées respectives $(-3,0,0), (-1,1,0), (1,1,0)$ et $(3,0,0)$.

**1.** Vérifier qu'un paramétrage de $\Gamma_2$ est : $\begin{cases} x(t) = 6t-3 \\ y(t) = 3(t-t^2) \\ z(t) = 0 \end{cases}, t \in [0,1]$.

Pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = (-t^3+3t^2-3t+1)\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (3t^3-6t^2+3t)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3t^3+3t^2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ O \end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t-3 \\ 3t-3t^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**2.** Donner un vecteur directeur, ainsi qu'un système d'équations cartésiennes de la tangente à $\Gamma_2$ au point de paramètre $t = \frac{1}{3}$.

On a : $x'\left(\frac{1}{3}\right) = 6, y'\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ et $z'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ donc un vecteur dirigeant la tangente à $\Gamma_2$ au point de paramètre $t = \frac{1}{3}$ est $6\vec{i}+\vec{j}$. Un point $P(x,y,z)$ de l'espace est sur cette tangente si, et seulement si $\overrightarrow{M\left(\frac{1}{3}\right)P} \wedge (6\vec{i}+\vec{j}) = \vec{0}$ ce qui donne le système d'équations : $\left\{\begin{array}{l} y = \frac{1}{6}(x+5) \\ z = 0 \end{array}\right.$

**3.** Déterminer une équation cartésienne de la surface de révolution obtenue en faisant tourner $\Gamma_2$ autour de l'axe $(O,\vec{i})$.

Soit $\Sigma$ la surface de révolution obtenue, et $P(x,y,z)$ un point de l'espace. On a :

$P \in \Sigma \Leftrightarrow \exists M \in \Gamma_2, \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{MP}\cdot\vec{i} = 0 \\ OM = OP \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists t \in [0,1], \left\{\begin{array}{l} x = 6t-3 \\ x^2+y^2+z^2 = (6t-3)^2 + 9t^2(1-t)^2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3 \leq x \leq 3 \\ y^2+z^2 = 9\left(\frac{x+3}{6}\right)^2\left(\frac{3-x}{6}\right)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3 \leq x \leq 3 \\ y^2+z^2 = \left(\frac{9-x^2}{12}\right)^2 \end{array}\right.$