CB n°8 - FONCTIONS A PLUSIEURS VARIABLES - Sujet 1

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^3+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^2$.

2. La fonction f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^2$?

Exercice 2

Etudier les extrema locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + \dfrac{1}{3}y^3 + 3x^2y + y^2x - x - y$, et préciser si les éventuels extrema sont globaux.

Exercice 3

Résoudre sur $U \subset \mathbb{R}^2$ (que l'on n'explicitera pas) l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y^2,$$

à l'aide du changement de variable $(u = xy, v = x - y)$.

CB n°8 - FONCTIONS A PLUSIEURS VARIABLES - sujet 2

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^3} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^2$.

2. La fonction f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^2$?

Exercice 2

Etudier les extrema locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy^2 - 2x^2y - 3x + 3y$, et préciser si les éventuels extrema sont globaux.

Exercice 3

Résoudre sur $U \subset \mathbb{R}^2$ (que l'on n'explicitera pas) l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2,$$

à l'aide du changement de variable $(u = xy, v = x)$.