CB n°8 - INTEGRALES A PARAMETRE - Sujet 1

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle : $y - y' = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

On donne, pour $a > 0$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $F_n : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^n}$.

1. Montrer que F_n est dérivable sur $]0, +\infty[$, et exprimer sa dérivée à l'aide de F_{n+1}.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^3}$.

CB n°8 - INTEGRALES A PARAMETRE - Sujet 2

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle : $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $F_n : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^x+t^2)^n}$.

1. Montrer que F_n est dérivable sur $[0, +\infty[$, et exprimer sa dérivée à l'aide de F_{n+1}.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^3}$.