CB n°11 - SURFACES - Correction

Exercice 1

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équations : $\left\{\begin{array}{l} x-y-1=0 \\ x^2-z^2-y=0 \end{array}\right.$.

1. Déterminer la projection de $\mathscr{C}$ sur le plan (xOz), et préciser sa nature.

On note $\mathscr{C}_y$ la projection de $\mathscr{C}$ sur le plan (xOz).

$M(x,0,z) \in \mathscr{C}_y \Leftrightarrow \exists y_0 \in \mathbb{R}, (x,y_0,z) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \exists y_0 \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} x-y_0-1=0 \\ x^2-z^2-y_0=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists y_0 \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} y_0=x-1 \\ x^2-z^2=x-1 \end{array}\right.$

d'où : $\mathscr{C}_y : \left\{\begin{array}{l} \dfrac{z^2}{\left(\sqrt{3}/2\right)^2}-\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}/2\right)^2}=1 \\ y=0 \end{array}\right.$; c'est une hyperbole.

2. Former une équation cartésienne du cylindre de directrice $\mathscr{C}$ et dont les génératrices sont parallèles à la droite d'équations $\left\{\begin{array}{l} x-2y-3=0 \\ x-y-z-2=0 \end{array}\right.$.

On note Σ le cylindre recherché. Les génératrices sont dirigées par $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.

$M(x,y,z) \in \Sigma \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, M+t\vec{u} \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} (x+2t)-(y+t)=1 \\ (x+2t)^2-(z+t)^2=y+t \end{array}\right.$

Après simplification, on obtient $\Sigma : 3y^2-z^2-2xy+2xz-2yz-x+4y-2z+2=0$.

Exercice 2

Déterminer une équation cartésienne de la surface de révolution obtenue par la rotation de la courbe $C : \left\{\begin{array}{l} x(t)=\operatorname{ch}^2(t) \\ y(t)=-\operatorname{sh}^2(t) \\ z(t)=t \end{array}\right.$, autour de l'axe $\Delta : \left\{\begin{array}{l} x=y \\ y=z \end{array}\right.$

On note Σ la surface recherchée. L'axe Δ est dirigé par $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et passe par le point O.

$M(x,y,z) \in \Sigma \Leftrightarrow \exists M_0 \in C, \left\{\begin{array}{l} OM=OM_0 \\ \overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{u}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=\operatorname{ch}^4 t+\operatorname{sh}^4 t+t^2 \\ (x-\operatorname{ch}^2 t)+(y+\operatorname{sh}^2 t)+(z-t)=0 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} t=x+y+z-1 \\ x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{4}\left(\operatorname{ch}(4t)+3\right)+t^2 \end{array}\right.$

On en déduit $\Sigma : \operatorname{ch}^4(x+y+z-1)+\operatorname{sh}^4(x+y+z-1)+2xy+2xz+2yz-2x-2y-2z+1=0$

(Ce qui s'écrit aussi : $8xy+8xz+8yz-8x-8y-8z+\operatorname{ch}\left(4(x+y+z-1)\right)+7$.)

Exercice 3

Soit S la surface d'équation $x^2+y^2-z^2=1$, et D la droite d'équations $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=z+2 \end{array}\right.$.

1. La surface S est-elle régulière ?

On note $F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-1$; alors $\overrightarrow{\operatorname{Grad}}F(x,y,z)=\begin{pmatrix}2x\\2y\\-2z\end{pmatrix}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow x=y=z=0$, or $O \notin S$, la surface est donc régulière.

2. Déterminer les éventuels points de S en lesquels le plan tangent est orthogonal à D.

D admet pour vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le plan tangent en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est orthogonal à D si, et seulement si $\overrightarrow{\text{Grad}} F(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = \lambda \\ -z_0 = \lambda \end{cases}$.

On a alors $x_0 = 0$ et $y_0 = -z_0$. Or, $M_0 \in S$ donc $x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$ donc il n'y a pas de plan tangent orthogonal à D.

3. Déterminer les éventuels plans tangents à S contenant D.

L'équation du plan tangent Π_0 à S en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est :

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) - z_0(z - z_0) = 0$$

Ainsi, si $D \subset \Pi_0$, alors pour tout $M(x, y, z) \in D$: $\begin{cases} x = 1 \\ y = z + 2 \\ x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) - z_0(z - z_0) = 0 \end{cases}$

On en déduit que : $\forall z \in \mathbb{R}, z(y_0 - z_0) + x_0 - x_0^2 + 2y_0 - y_0^2 + z_0^2 = 0$.

Comme $M_0 \in S, x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$, on a donc : $\begin{cases} y_0 - z_0 = 0 \\ x_0 + 2y_0 - 1 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = y_0 \\ x_0 = 1 - 2y_0 \\ (1 - 2y_0)^2 = 1 \end{cases}$

Finalement, les deux plans satisfaisant le problème sont tangents à S en $M_1(1, 0, 0)$ et en $M_2(-1, 1, -1)$.