CB N°8 - FONCTIONS A PLUSIEURS VARIABLES - SUJET 1

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

D'après les théorèmes généraux, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, comme quotient de fonctions de classe C^1, le dénominateur ne s'annulant pas.
Elle l'est également en $(0,0)$ car pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{x^2\sin(xy)}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{|x|^3|y|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{\|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^2} \leqslant \|(x,y)\|^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0,0)$$

2. Déterminer, en tout point de $\mathbb{R}^2$ où elles existent, les dérivées partielles d'ordre un de f.

Dérivées partielles d'ordre un de f en $(0,0)$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Dérivées partielles d'ordre un de f en $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2y\cos(xy)}{x^2+y^2} + \frac{2xy^2\sin(xy)}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3\cos(xy)}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y\sin(xy)}{(x^2+y^2)^2}.$$

3. La fonction f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{t^2}-0}{t} = 1$$

La fonction f n'est donc pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car elle ne l'est pas en $(0,0)$, d'après le théorème de Schwarz.

Exercice 2

Etudier les extrema locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 2y^2$$

La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, car elle est polynomiale.
Ses dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$ sont définies par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4y.$$

On en déduit que les points critiques sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^3 - x = 0 \\ y^3 + y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(x^2-1) = 0 \\ y(y^2+1) = 0 \end{array} \right. .$$

On en conclut qu'il y a trois points critiques :

$$O(0,0),\ A(1,0) \ \text{ et } B(-1,0).$$

On a :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 4, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \qquad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 + 4,$$

On en déduit :

$$H_f(A) = H_f(B) = M = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M) > 0,$$

de plus, $\mathrm{tr}(M) > 0$; on en déduit que f admet un minimum local en A et en B qui vaut $m = f(A) = f(B) = -1$.

$$H_f(0) = N = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(N) < 0,$$

donc $(0,0)$ est un point col.

CB N°8 - FONCTIONS A PLUSIEURS VARIABLES - SUJET 2

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

D'après les théorèmes généraux, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, comme quotient de fonctions de classe C^1, le dénominateur ne s'annulant pas.
Elle l'est également en $(0,0)$ car pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{y^2\sin(xy)}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{|y|^3|x|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{\|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^2} \leqslant \|(x,y)\|^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0,0)$$

2. Déterminer, en tout point de $\mathbb{R}^2$ où elles existent, les dérivées partielles d'ordre un de f.

Dérivées partielles d'ordre un de f en $(0,0)$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Dérivées partielles d'ordre un de f en $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3\cos(xy)}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2\sin(xy)}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xy^2\cos(xy)}{x^2+y^2} + \frac{2x^2y\sin(xy)}{(x^2+y^2)^2}.$$

3. La fonction f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{t^2} - 0}{t} = 1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

La fonction f n'est donc pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car elle ne l'est pas en $(0,0)$, d'après le théorème de Schwarz.

Exercice 2

Etudier les extrema locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2 - 2y^2$$

La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, car elle est polynomiale.
Ses dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$ sont définies par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 4x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4y.$$

On en déduit que les points critiques sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^3 + x = 0 \\ y^3 - y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(x^2+1) = 0 \\ y(y^2-1) = 0 \end{array} \right. .$$

On en conclut qu'il y a trois points critiques :

$$O(0,0),\ A(0,1)\ \text{ et } B(0,-1).$$

On a :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 + 4, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \qquad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 4,$$

On en déduit :

$$H_f(A) = H_f(B) = M = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M) > 0,$$

de plus, $\text{tr}(M) > 0$; on en déduit que f admet un minimum local en A et en B qui vaut $m = f(A) = f(B) = -1$.

$$H_f(0) = N = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(N) < 0,$$

donc $(0,0)$ est un point col.