⋆ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse ⋆

Math. - CC 2 - S1 - Analyse

vendredi 16 novembre 2018 - Durée 1 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

1. Montrer que la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(t)=\frac{\ln t}{t^2+1}$$

est intégrable sur $]0;+\infty[$, et que l'on a :

$$\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

2. a désigne un réel strictement positif. Déduire de la question précédente que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+a^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi\ln a}{2a}$$

Exercice 2

1. Montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

2. En utilisant une intégration par parties et le changement de variable $t\mapsto 2t$, montrer que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$$

On énoncera soigneusement les théorèmes utilisés.

3. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(nt)}{t^2}\mathrm{d}t$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. On note I_n cette intégrale.

4. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{n}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$$

5. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)}\mathrm{d}t$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. On note A_n cette intégrale.

6. Calculer A_0 et A_1.

7. En admettant que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\sin^2(nt)-2\sin^2((n+1)t)+\sin^2((n+2)t)=2\sin^2(t)\cos(2(n+1)t)$, montrer que $A_n-2A_{n+1}+A_{n+2}=0$.

8. Déduire des deux questions précédentes l'expression de A_n en fonction de n, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

9. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(nt)}{\tan^2(t)}\mathrm{d}t$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. On note B_n cette intégrale.

10. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $A_n-B_n=\dfrac{\pi}{4}$.

11. En utilisant le fait que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $0\leq\sin(x)\leq x\leq\tan(x)$, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$B_n\leq I_n\leq A_n$$

12. Déduire de ce qui précède que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$

Fin de l'énoncé d'analyse