Exos AN5 - Fonctions vectorielles

Exercice 1

Dire si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

- 1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x 1| > 1\}.$
- **2.** $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x^2 + y^2 = 1 \text{ et } x \ge 0\}.$

Exercice 2

Soient $E = \mathbb{R}^n$, A et B deux parties de E.

- 1. Montrer que si A est ouvert, alors A + B est ouvert.
- **2.** Soient $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0 \text{ et } y \le 0\}$, et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0 \text{ et } xy = 1\}$.
 - a. Montrer que A et B sont fermés.
 - **b.** A + B est-il fermé?

Exercice 3

Montrer que l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert.

Exercice 4

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et r > 0. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte B(a,r) est la boule fermée $\overline{B}(a,r)$.

Exercice 5

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , et $f: I \to \mathbb{R}^3$ deux fois dérivable sur I telle que, pour tout $t \in I$, ||f(t)|| est constante.

Montrer que le produit scalaire (f(t)|f''(t)) est toujours négatif.

Exercice 6

Pour tout réel x on pose :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & & & & & \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & & & & \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$$

- 1. Montrer que la fonction D_n est dérivable sur \mathbb{R} , et calculer $D'_n(x)$.
- **2.** En déduire $D_n(x)$ pour tout réel x.

Exercice 7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que l'application

$$\varphi: \left| \begin{array}{cc} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \det(\mathrm{Id} + tu) \end{array} \right|$$

est dérivable en 0, et calculer $\varphi'(0)$.

Indication: On fera apparaître le polynôme caractéristique de -u.

Exercice 8

Soient a,b deux réels tels que a < b, et u,v,w trois fonctions de classe C^2 de [a,b] vers \mathbb{R} . On suppose que :

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ vérifiant :

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 9

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, où $p \in \mathbb{N}^*$, de classe C^{∞} . Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \neq 0, \qquad \left(t^{n-1} f\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{t^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{t}\right)$$