⋆ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse ⋆

Math. - CC 1 - S2 - Algèbre - Géométrie

vendredi 15 février 2019 - Durée 2 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

On se place dans le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit $\mathscr{C}$ la conique d'équation cartésienne

$$y^2 - \sqrt{3}xy - 2\sqrt{3}x + \left(4 - 3\sqrt{3}\right) y + 6 - 6\sqrt{3} = 0$$

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer les valeurs propres de A. Trouver deux vecteurs propres $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$.

b. Quelle isométrie de $\mathbb{R}^2$ transforme le base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en la base $(\vec{u}, \vec{v})$?

2. Déterminer la nature de la conique ainsi que ses éléments caractéristiques.

3. Tracer la conique $\mathscr{C}$ dans le repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On prendra $\sqrt{3} \approx 1,\ 732$.

Exercice 2

Soit E un espace euclidien. On suppose $\dim(E) \geq 2$.
On note $(u|v)$ le produit scalaire des vecteurs u et v, et $\|u\|$ la norme du vecteur u.
On se donne un vecteur w de E de norme 1 et, pour tout réel $\alpha \neq 0$, on pose , pour tout $x \in E$:

$$f_\alpha(x) = x + \alpha(x|w)w$$

1. Vérifier que f_α est un endomorphisme de E.

2. Montrer que pour tous réels non nuls α, β, on a :

$$f_\alpha \circ f_\beta = f_\beta \circ f_\alpha$$

3. Montrer que pour tous vecteurs x et y, on a

$$(x|f_\alpha(y)) = (f_\alpha(x)|y)$$

4. Vérifier que w est un vecteur propre de f_α.

5. a. Montrer que 1 est valeur propre de f_α.

b. Quel est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 ?

c. L'endomorphisme f_α est-il diagonalisable ?

6. Pour quelles valeurs de α l'endomorphisme f_α est-il inversible ? Calculer dans ce cas son inverse.

7. Pour quelles valeurs de α l'endomorphisme f_α est-il une isométrie ? Caractériser dans ce cas cet endomorphisme.

8. En utilisant la question 3, montrer que si F est un sous-espace vectoriel stable par f_α, alors $F^\perp$ est également stable par f_α.

T.S.V.P.

Exercice 3

On considère la courbe paramétrée Γ admettant pour représentation paramétrique :

$$\varphi : t \mapsto \begin{cases} x(t) = t + \dfrac{1}{2t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{t} \end{cases}, t \in \mathbb{R}^*$$

1. Déterminer $\varphi\left(\dfrac{1}{t}\right)$ en fonction de $\varphi(t)$, et en déduire que l'on peut réduire le domaine d'étude de l'arc paramétré à $[-1, 0[\cup]0, 1]$.

On précisera quelle transformation permet d'obtenir la courbe en entier.

2. Etudier φ et tracer Γ dans un repère orthonormé.

Exercice 4

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère la courbe paramétrée $\mathscr{C}$ admettant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = a \sin t \\ y(t) = a \dfrac{\sin^2 t}{\cos t} \end{cases}, \text{ où } a \in \mathbb{R}_+^*$$

1. a. Justifier que l'on peut réduire le domaine d'étude de l'arc paramétré à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

b. Etudier l'arc paramétré, puis tracer $\mathscr{C}$ pour $a = 2$.

2. Pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on note $M(t)$ le point de $\mathscr{C}$ de coordonnées $(x(t), y(t))$.

a. Exprimer $OM(t)$ à l'aide de a et de t.

b. La perpendiculaire à $(OM(t))$ en $M(t)$ coupe $(0y)$ en N. Montrer que $MN = a$.

c. Montrer que la perpendiculaire en O à $(OM(t))$, la parallèle à (Ox) en N et la normale à $\mathscr{C}$ en $M(t)$ sont concourantes.

Fin de l'énoncé