Grundlagen der elektronischen Messtechnik

Übung 2: Regression und Interpolation

Prof. Dr.-Ing. Clemens Gühmann
Daniel Thomanek, M. Sc.

Technische Universität Berlin
Fakultät IV Elektrotechnik und Informatik
Institut für Energie und Automatisierungstechnik
Fachgebiet Elektronische Mess- und Diagnosetechnik

Problemstellung

Oft soll bei einer Messung kein einzelner Wert sondern eine Kennlinie ermittelt werden

- Beispiel: Ein Temperaturabhängiger Widerstand
  - Es werden nun zunächst in 20°C Schritten Widerstandswerte ermittelt (s. Tabelle)
- Offene Fragen
  - Wie ist die Kennlinie des Widerstands?
  - Wie hoch ist der Widerstandswert zum Beispiel bei 30°C

Der Widerstandswert wurde bei verschiedenen Temperaturen gemessen

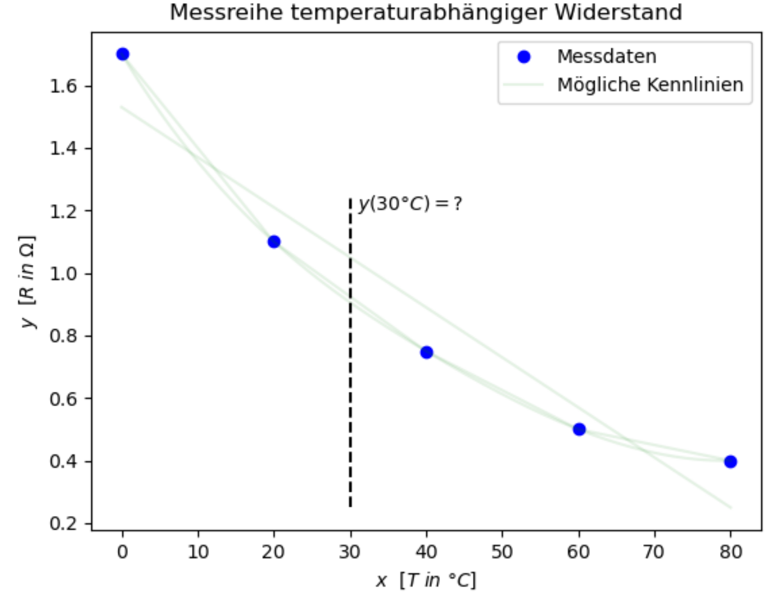
N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$x\ [T\ in\ °C]$	0	20	40	60	80
$y\ [R\ in\ \Omega]$	1.70	1.10	0.75	0.50	0.40

Problemstellung

Offene Fragen

- Wie ist die Kennlinie des Widerstands?
- Wie hoch ist der Widerstandswert zum Beispiel bei 30°C

N	1	2	3	4	5
x $[T\ in\ °C]$	0	20	40	60	80
y $[R\ in\ \Omega]$	1.70	1.10	0.75	0.50	0.40



Problemstellung

Verfahren zur Ermittlung der Kennlinie eines Systems oder Bauteils:

1. Regression
   - Annahme bzw. Vorgabe einer bestimmten Funktion (z.B. Lineare Funktion)
   - Die Vorgegebene Funktion wird bestmöglich an die Messdaten angepasst. Verbleibende Abweichungen werden durch Messrauschen erklärt
2. Interpolation
   - Vorgabe, dass die Kennlinie exakt durch die Messpunkte verlaufen muss
   - Dementsprechend eingeschränkt ist die Modellauswahl

Aufgabe 2.1.1. Regression

Bei der Regression wird eine analytische Funktion bestmöglich an die Messwerte angepasst

Vorteile:

- Analytischer Ausdruck für den Zusammenhang zwischen den Größen
- Robust gegenüber Messrauschen und Ausreißern

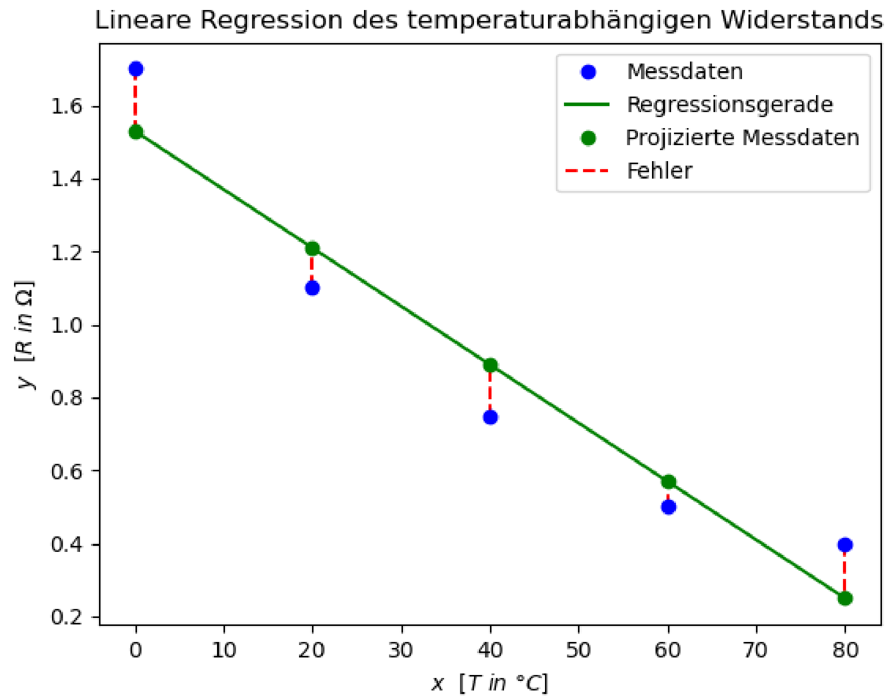
Nachteile:

- Erst bei großer Anzahl von Messpunkten sinnvoll
- Analytische Funktion (Linear, Polynom, Exponentialfunktion) muss aus A-Priori-Wissen gewählt werden

Aufgabe 2.1.2. Methode der kleinsten Quadrate

Es wird angenommen, dass das Verhalten des Widerstands linear ist (Lineare Regression)

- Die Messwerte hätten eigentlich entsprechend der grünen Punkte ausfallen müssen
- Aufgrund von Messrauschen entsprechen Sie nun aber den blauen Punkten (Annahme)
- Messrauschen ist statistisch Normalverteilt, d.h. es ist im Mittel 0 bzw. minimal
- Die Regressionsgerade muss also so gelegt werden, dass die zusammengefassten Fehler (rote Linien) möglichst minimal ausfallen



Aufgabe 2.1.2. Methode der kleinsten Quadrate

Bestimmung der Fehler zwischen Messwerten und Regressionsgerade

Die Regressionsgerade hat die Form:

$$y = a \cdot x + b$$

Die Messwerte liegen als Zahlenwerte vor (s. Tabelle):

$$X_i = (x_i, y_i)$$

Die projizierten Messwerte können wie folgt berechnet werden:

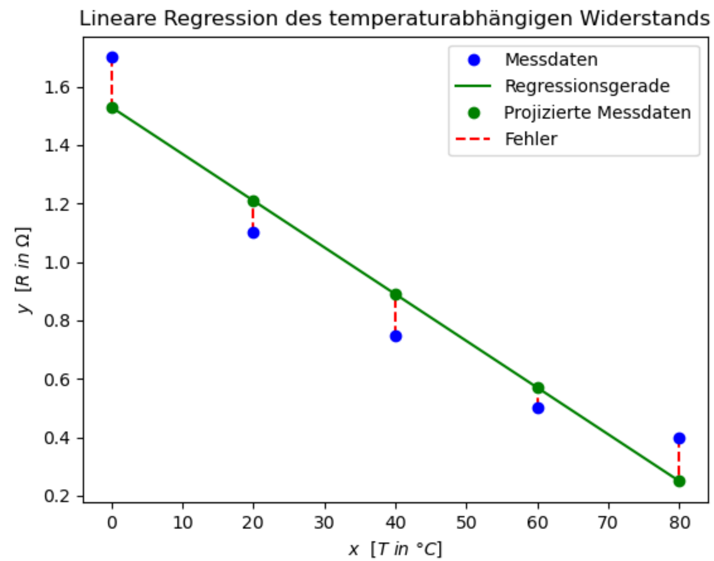
$$\hat{X}_i = (x_i | \hat{y}_i)$$

Die Abweichung im y-Wert der Projizierten Messwerte kann wie folgt berechnet werden:

$$\hat{y}_i = a \cdot x_i + b$$

Der Fehler ergibt sich somit zu:

$$e_i = \hat{y}_i - y_i = a \cdot x_i + b - y_i$$



Es wird nur ein Fehler in der y-Koordinate angenommen

Aufgabe 2.1.2. Methode der kleinsten Quadrate

Herleitung der Gleichung für die Regressionsgerade

Bei der Methode der kleinsten Quadrate soll nun die Summe der Fehlerquadrate minimiert werden. Durch die Quadrierung wirken sich positive und negative Fehler gleichermaßen und nicht gegensätzlich auf das Fehlerfunktional aus:

$$\min \sum_{i=1}^{N} e_i^2$$

$$\min_{a,b} \sum_{i=1}^{N} (a \cdot x_i + b - y_i)^2$$

Ableitung nach b:

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^{N} (a \cdot x_i + b - y_i)$$

$$0 \quad = a \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i + N \cdot b - \sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$\mathrm{b} \quad = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i - a \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$(\mathrm{b} = \bar{y} - a \cdot \bar{x})$$

Aufgabe 2.1.2. Methode der kleinsten Quadrate

Ableitung nach a:

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{N}(a \cdot x_i + b - y_i) \cdot x_i$$

$$0 \quad = \sum_{i=1}^{N} a \cdot x_i^2 + \sum_{i=1}^{N} b \cdot x_i - \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot x_i$$

$$0 \quad = a \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot x_i$$

einsetzen von Gleichung für b:

$$0 \quad = a \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i - a \cdot \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right) \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot x_i$$

umstellen nach a:

$$0 = a \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i\right) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot x_i$$

$$a = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot x_i \; - \; \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

Aufgabe 2.1.2. Methode der kleinsten Quadrate

Einsetzen der Gleichung für a in die Gleichung für b:

$$\mathrm{b} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i - a\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\mathrm{b} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i - \frac{N\cdot\sum_{i=1}^{N} y_i\cdot x_i - \sum_{i=1}^{N} y_i\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i}{N\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\mathrm{b} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\left(N\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right) - \left(N\cdot\sum_{i=1}^{N} y_i\cdot x_i - \sum_{i=1}^{N} y_i\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}{N\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

$$\mathrm{b} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \cancel{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} - \sum_{i=1}^{N} y_i\cdot x_i\sum_{i=1}^{N} x_i + \cancel{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}}{N\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

$$\mathrm{b} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} y_i\cdot x_i\sum_{i=1}^{N} x_i}{N\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

Aufgabe 2.1.2. Methode der kleinsten Quadrate

Zusammenfassung:

$$a = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot x_i - \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

$$\mathrm{b} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot x_i \sum_{i=1}^{N} x_i}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

Mit den Daten aus der Tabelle ergibt sich:

$$a = -0.016 \frac{\Omega}{°C}$$

$$\mathrm{b} = 1.53\Omega$$

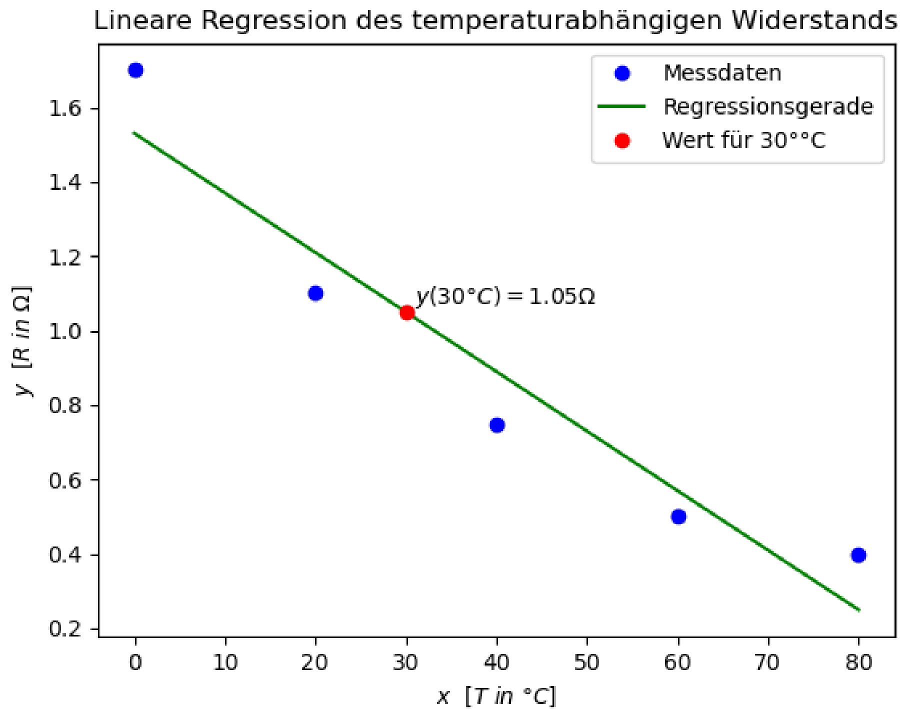
$$y = -0.016 \frac{\Omega}{°C} x + 1.53\Omega$$

Aufgabe 2.1.2. Methode der kleinsten Quadrate

Schätzung des Widerstandswertes bei 30°C:

$$y(30°C) = -0.016\frac{\Omega}{°C}30°C + 1.53\Omega$$

$$y(30°C) = 1.05\Omega$$



Aufgabe 2.1.2. Methode der kleinsten Quadrate

Alternative Herleitung mithilfe der Matrizenrechnung

Die lineare Gleichung $y = a \cdot x + b$ kann auch wie folgt in Matrizenrechnung geschrieben werden:

$$y = \begin{pmatrix} x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Für alle Datenpunkte ergibt sich folgendes überbestimmtes Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}}_{\underline{Y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{X}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\underline{a}}$$

$$\underline{Y} = \underline{X} \cdot \underline{a}$$

Dieses kann mithilfe der Pseudoinversen gelöst werden. Das Ergebnis ist die lineare Regression

$$\underline{X}^T \underline{Y} = \underline{X}^T \underline{X} \cdot \underline{a}$$

$$\underline{a} = \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \underline{Y}$$

Aufgabe 2.2.1. Interpolation

Bei der Interpolation wird eine analytische Funktion berechnet, die exakt durch die Messwerte verläuft

Vorteile:

- Bei geringer Anzahl von Messwerten einfacher zu handhaben
- Wenn keine Vorauswahl über die Funktionenform gemacht werden kann

Nachteile:

- Bei großer Anzahl von Messwerten sehr komplex
- Ausreißer und Messrauschen verzerren die Funktion

Aufgabe 2.2.1. Lineare Interpolation

Die lineare Interpolierende wird stückweise für alle benachbarten Messwerte durchgeführt

Die Lineare Interpolierende zwischen zwei Messwerten ist eine Gerade der Form

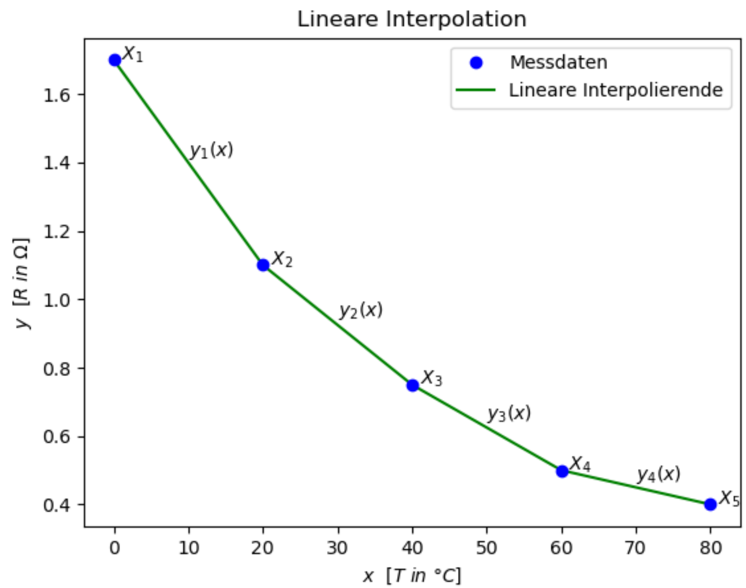
$$y_i(x) = a_i \cdot x + b_i$$

Die Gerade mit dem Index i verläuft dabei zwischen den Messpunkten X_i und X_{i+1}. Zwischen den Messpunkt X_1 und X_2 verläuft somit die Gerade $y_2(x)$

Die Parameter a_i und b_i können wie bei linearen Funktionen gewohnt berechnet werden

$$a_i = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$b_i = y_i - a_i \cdot x_i$$



Aufgabe 2.2.1. Lineare Interpolation

Ermittlung der linearen Interpolierenden im Intervall $[20, 40]$

Die Lineare Interpolierende durch die beiden Messpunkte X_2, X_3

Der Parameter a_2 kann somit wie folgt berechnet werden:

$$a_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

$$a_2 = \frac{0.75\Omega - 1.10\Omega}{40°C - 20°C} = -0.018 \frac{\Omega}{°C}$$

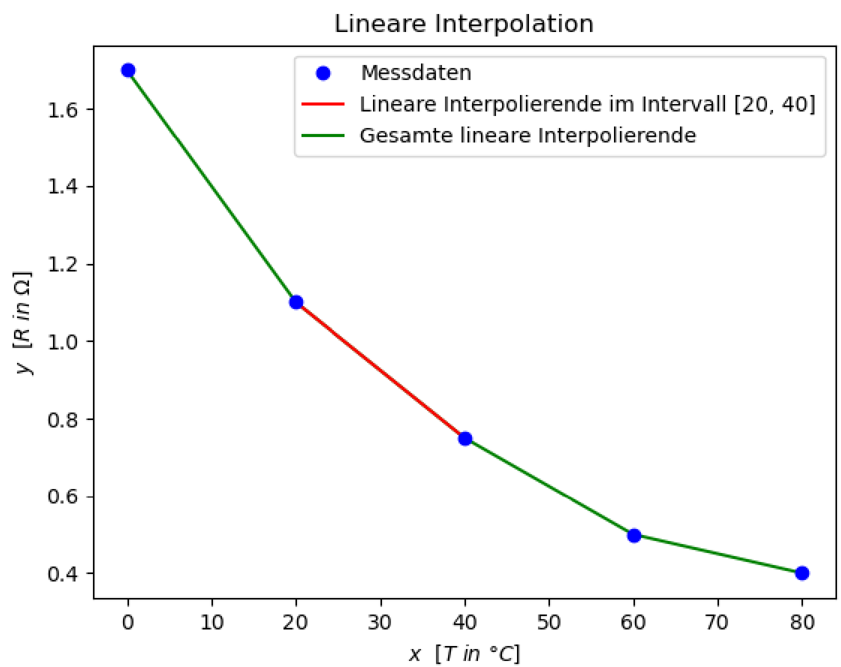
Nun kann der Parameter b_2 ebenfalls berechnet werden:

$$b_2 = y_2 - m \cdot x_2$$

$$b_2 = 1.10\Omega + 0.018 \frac{\Omega}{°C} \cdot 20°C = 1.46\Omega$$

Die Gleichung ergibt sich somit zu:

$$y_2(x) = -0.018 \frac{\Omega}{°C} \cdot x + 1.46\Omega$$

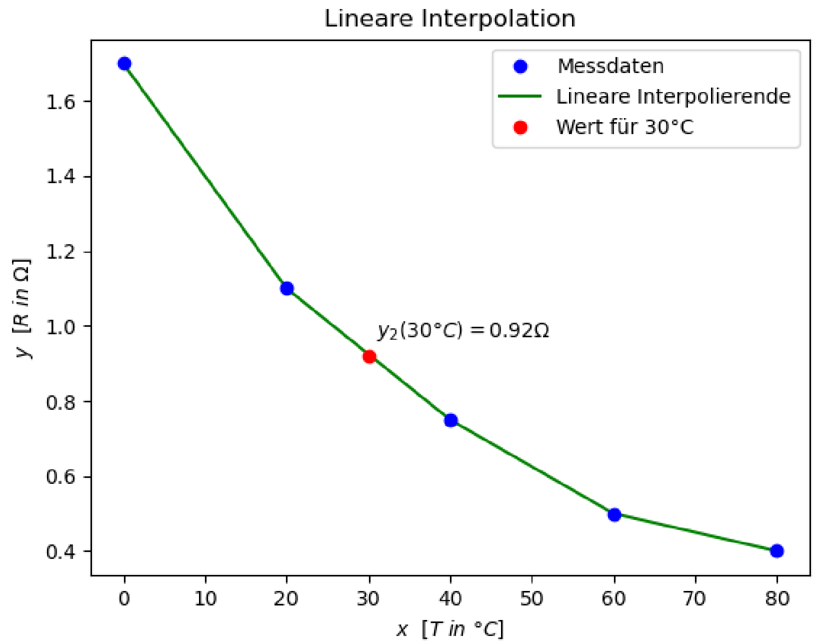


Aufgabe 2.2.1. Lineare Interpolation

Ermittlung des Wertes für $30°\text{C}$ durch lineare Interpolation im Intervall $[20, 40]$

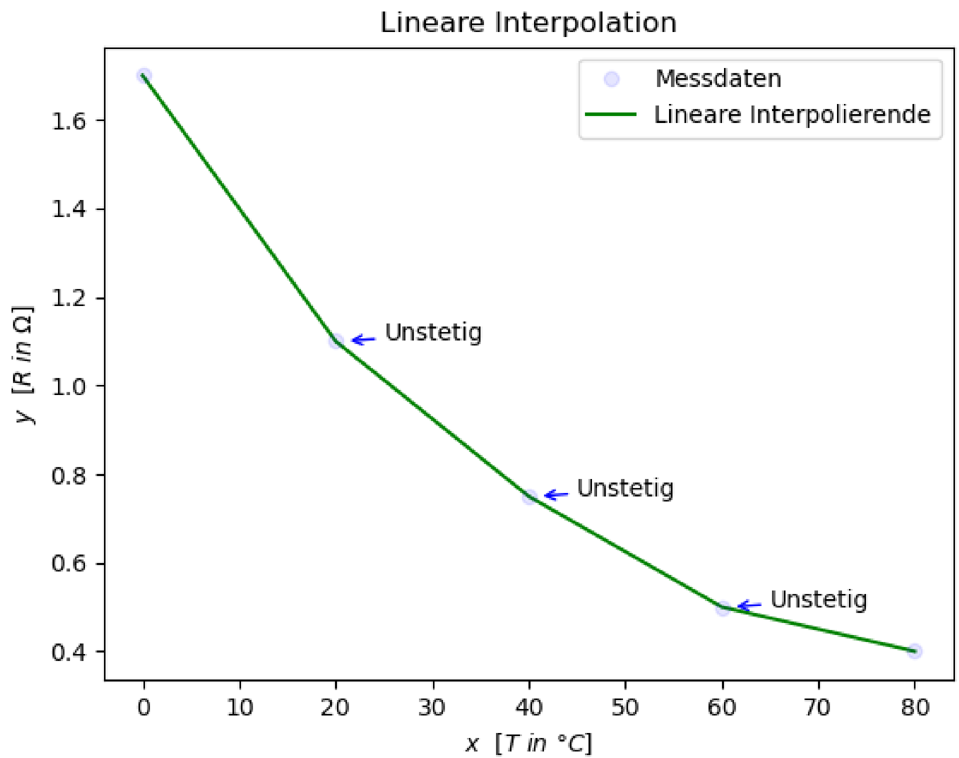
$$y_2(30°C) = -0.018\,\frac{\Omega}{°C} \cdot 30°\text{C} + 1.46\Omega$$

$$y_2(30°C) = 0.92\Omega$$



Aufgabe 2.2.2. Spline Interpolation

Nachteil der linearen Interpolation ist ihre generelle Unstetigkeit in den Messpunkten



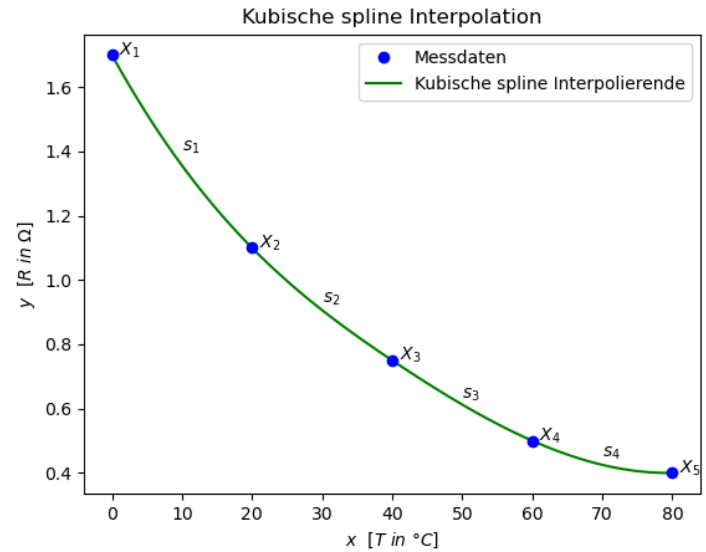
Aufgabe 2.2.3. Kubische Splines

Abhilfe schafft hier die Interpolation mittels kubischer Splines:

Ein kubischer Spline ist eine allgemeines Polynom 3. Ordnung:

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

Hierbei steht i für den Index des Polynoms zwischen den Datenpunktgen X_i und X_{i+1}. So würde zum Beispiel das Polynom s_3 zwischen den Datenpunkten X_3 und X_4 interpolieren



Mithilfe der kubischen Splines können stetige Übergänge in den Messpunkten geschaffen werden, indem die 1. und 2. Ableitung jeweils in den Messpunkten identisch sind

Aufgabe 2.2.3. Kubische Splines

Bedingungen, welche die einzelnen Spline-Polynome untereinander erfüllen müssen:

1. Das Polynom muss in dem jeweiligen Datenpunkt starten: $s_i(x_i) = y_i$
2. Das Polynom muss in jenem Punkt enden, wo das nächste beginnt: $s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$
   - Hieraus ergibt sich die Forderung, dass ein Spline im nächsten Datenpunkt endet:
     $s_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}(1.\,\text{Bedingung}) \longrightarrow s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$
3. Zwei aufeinanderfolgende Polynome müssen in ihrem verbindenden Datenpunkt die gleiche Steigung haben: $s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1})$
4. Zwei aufeinanderfolgende Polynome müssen in ihrem verbindenden Datenpunkt die gleiche Krümmung haben: $s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1})$

Natürliche Randbedingung: $s_0''(x_o) = 0, s_{N-1}''(x_N) = 0$

Jeder Spline hat 4 unbekannte Koeffizienten: a_i; b_i; c_i; d_i. Mit Hilfe der 4 Bedingungen ergibt sich ein eindeutig lösbares Gleichungssystem

Aufgabe 2.2.3. Kubische Splines

In der vorliegenden Aufgabe sind die 2. Ableitungen in den Messpunkten vorgegeben.

Das $4x4$ –Gleichungssystem kann somit vereinfacht werden

N	1	2	3	4	5
$x\ [T\ in\ °C]$	0	20	40	60	80
$y\ [R\ in\ \Omega]$	1.70	1.10	0.75	0.50	0.40
$y''\left[\frac{d^2x}{dy^2}\ in\ \frac{\Omega}{°C^2}\right]$	0	$9.375 \cdot 10^{-4}$	0	$5.625 \cdot 10^{-4}$	0

Aufgabe 2.2.3. Kubische Splines

Ableiten des Spline-Polynoms

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

$$s_i'(x) = 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i) + c_i$$

$$s_i''(x) = 6a_i(x - x_i) + 2b_i$$

Aus der 1. Bedingung kann der Parameter d_i bestimmt werden:

$$s_i(x_i) = y_i$$

$$s_i(x_i) = y_i = \cancel{a_i(x_i - x_i)^3} + \cancel{b_i(x_i - x_i)^2} + \cancel{c_i(x_i - x_i)} + d_i$$

$$d_i = y_i$$

Aus der 2. Ableitung der 1. Bedingung kann der Parameter b_i bestimmt werden:

$$s_i''(x_i) = y_i''$$

$$s_i''(x_i) = y_i'' = \cancel{6a_i(x_i - x_i)} + 2b_i$$

$$b_i = \frac{1}{2} y_i''$$

Dies ist nur möglich, da in der Aufgabe y_i'' vorgegeben ist, sonst wäre es unbekannt

Aufgabe 2.2.3. Kubische Splines

Aus der 4. und 1. Bedingung kann der Parameter a_i bestimmt werden:

$$s_i''(x_{i+1}) = \underbrace{s_{i+1}''(x_{i+1})}_{y_{i+1}''}$$

$$s_i''(x_{i+1}) = y_{i+1}'' = 6a_i \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{h_i} + 2b_i$$

$$a_i = \frac{y_{i+1}'' - 2b_i}{6h_i}$$

h_i wird hierbei als Schrittweite bezeichnet. Der Parameter b_i kann nun mit dem zuvor gefundenen Ausdruck ersetzt werden:

$$a_i = \frac{y_{i+1}'' - 2\frac{1}{2}y_i''}{6h_i}$$

$$a_i = \frac{y_{i+1}'' - y_i''}{6h_i}$$

Aufgabe 2.2.3. Kubische Splines

Aus der 2. und 1. Bedingung kann nun auch der Parameter c_i bestimmt werden:

$$s_i(x_{i+1}) = \underbrace{s_{i+1}(x_{i+1})}_{y_{i+1}}$$

$$s_i(x_{i+1}) = y_{i+1} = a_i \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{h_i}^3 + b_i \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{h_i}^2 + c_i \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{h_i} + d_i$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - a_i h_i^3 - b_i h_i^2 - d_i}{h_i}$$

$$c_i = \frac{y_{i+1}}{h_i} - a_i h_i^2 - b_i h_i - \frac{d_i}{h_i}$$

$$c_i = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \underbrace{\frac{y''_{i+1} - y''_i}{6h_i}}_{a_i} h_i^2 - \underbrace{\frac{1}{2} y''_i}_{b_i} h_i - \frac{1}{h_i} \underbrace{y_i}_{d_i}$$

$$c_i = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{y''_{i+1} - y''_i}{6} h_i - \frac{1}{2} y''_i h_i - \frac{y_i}{h_i}$$

$$c_i = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{y_i}{h_i} - h_i \left(\frac{y''_{i+1} - y''_i}{6} + \frac{3}{6} y''_i \right)$$

$$c_i = \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{h_i}{6}(y''_{i+1} + 2y''_i)$$

Aufgabe 2.2.3. Kubische Splines

Zusammenfassung:

$$a_i = \frac{y''_{i+1} - y''_i}{6h_i}$$

$$b_i = \frac{1}{2} y''_i$$

$$c_i = \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{h_i}{6}(y''_{i+1} + 2y''_i)$$

$$d_i = y_i$$

mit $h_i = x_{i+1} - x_i$ der Schrittweite

N	1	2	3	4	5
$x\ [T\ in\ °C]$	0	20	40	60	80
$y\ [R\ in\ \Omega]$	1.70	1.10	0.75	0.50	0.40
$y''\left[\frac{d^2x}{dy^2}\ in\ \frac{\Omega}{°C^2}\right]$	0	$9.375 \cdot 10^{-4}$	0	$5.625 \cdot 10^{-4}$	0

Aufgabe 2.2.3. Kubische Splines

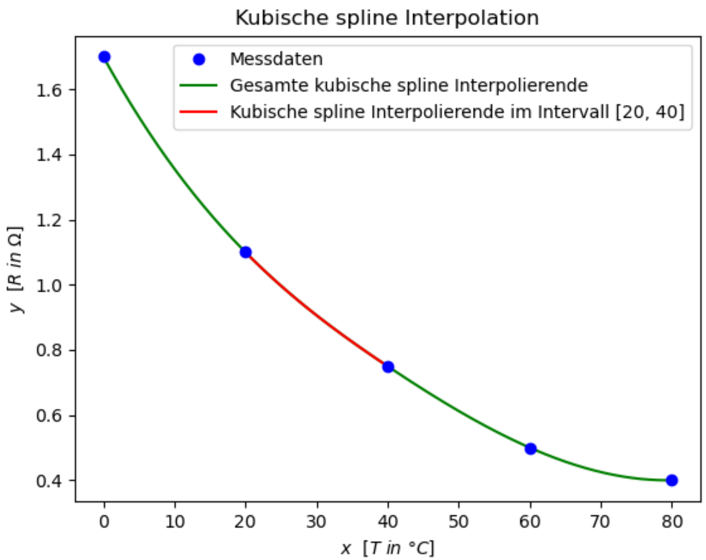
Mit den Werten aus der Tabelle ergibt sich für den Spline im Intervall $[20\Omega, 40\Omega]$ (also für Spline s_2):

$$a_2 = -7.80 \cdot 10^{-6} \frac{\Omega}{°C^3}$$

$$b_2 = 4.69 \cdot 10^{-4} \frac{\Omega}{°C^2}$$

$$c_2 = -2.38 \cdot 10^{-2} \frac{\Omega}{°C}$$

$$d_2 = 1.1\Omega$$



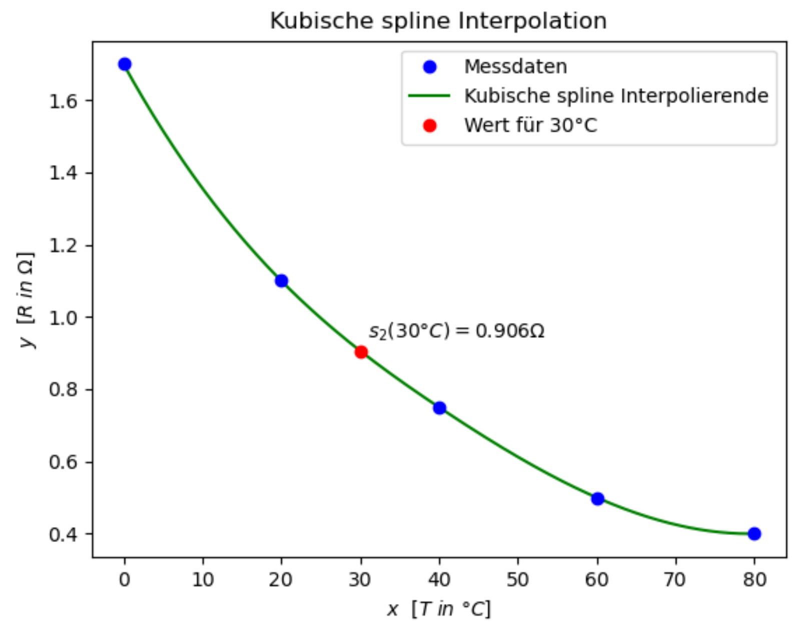
$$s_2(x) = -7.80 \cdot 10^{-6} \frac{\Omega}{°C^3}(x - 20°C)^3 + 4.69 \cdot 10^{-4} \frac{\Omega}{°C^2}(x - 20°C)^2 - 2.38 \cdot 10^{-2} \frac{\Omega}{°C}(x - 20°C) + 1.1\ \Omega$$

Aufgabe 2.2.3. Kubische Splines

Bestimmung des Wertes für $30°C$ aus der Tabelle ergibt sich für den Spline im Intervall $[20\Omega, 40\Omega]$ (also für Spline s_2):

$$s_2(30°C) = -7.80 \cdot 10^{-6}\,\frac{\Omega}{°C^3}(30°C - 20°C)^3 + 4.69 \cdot 10^{-4}\,\frac{\Omega}{°C^2}(30°C - 20°C)^2 - 2.38 \cdot 10^{-2}\,\frac{\Omega}{°C}(30°C - 20°C) + 1.1\Omega$$

$$s_2(30°C) = 0.906\Omega$$



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Prof. Dr.-Ing. Clemens Gühmann
Daniel Thomanek, M. Sc.

Technische Universität Berlin
Fakultät IV Elektrotechnik und Informatik
Institut für Energie und Automatisierungstechnik
Fachgebiet Elektronische Mess- und Diagnosetechnik