Grundlagen der elektronischen Messtechnik

Übung 1: Messunsicherheit und Statistik

Prof. Dr.-Ing. Clemens Gühmann
Daniel Thomanek, M. Sc.

Technische Universität Berlin
Fakultät IV Elektrotechnik und Informatik
Institut für Energie und Automatisierungstechnik
Fachgebiet Elektronische Mess- und Diagnosetechnik

Aufgabe 1.1.1. Messergebnis und Messfehler

Was möchte ich eigentlich wissen?

- z.B. den Effektivwert der Spannung in meiner Steckdose!
- Dieser ist aber nicht immer gleich?!

$$x = (x_c \pm k \cdot u)[Einheit]$$

- x: Vollständiges Messergebnis
- x_c: Beste Schätzung des wahren Messwertes
- u: Standard Messunsicherheit
- k: Faktor für den Vertrauensbereich des vollständigen Messergebnisses
- $k \cdot u$: Erweiterte Messunsicherheit

$[Einheit]$: Eine Einheit gehört zu jedem Messergebnis dazu. Ein Messergebnis ohne Einheit ist <u>gänzlich falsch</u>, auch wenn der reine Zahlenwert stimmen mag.

Aufgabe 1.1.1. Messergebnis und Messfehler

Das vollständige Messergebnis

$$x = (x_c \pm k \cdot u)[Einheit]$$

Mittelwert, korrigiert um die bekannte systematische Messabweichung

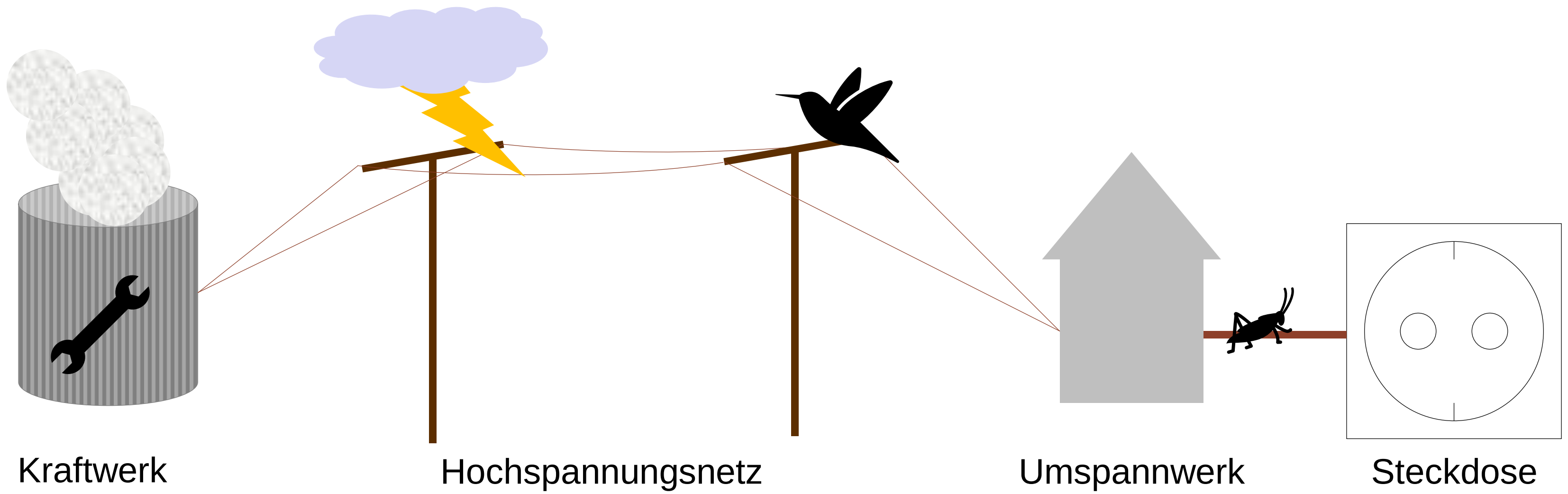
Zufälliger Fehler und unbekannte Systematische Messabweichung zusammengefasst

Faktor für den Vertrauensbereich: *Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der wahre Wert innerhalb der Grenzen des vollständigen Messergebnisses*

Aufgabe 1.1.1. Messergebnis und Messfehler

Zufällige Messabweichung

- Zufällig auftretende Abweichungen vom Erwartungswert der Messgröße können folgende Ursachen haben:
  - → Umwelteinflüsse
  - → Bedienfehler



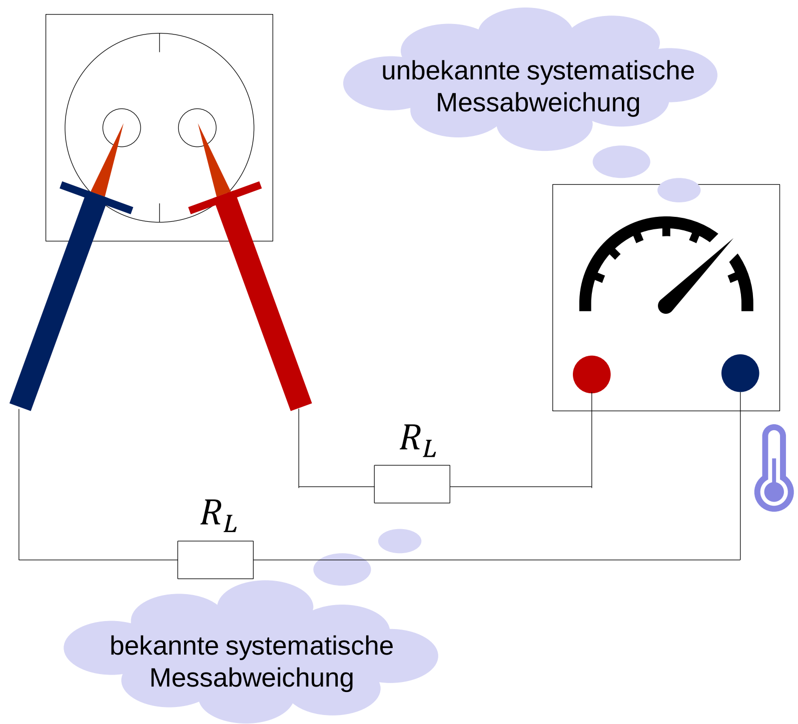
Zufällige Fehler, welche die Messung des Effektivwertes der Spannung in der Steckdose beeinflussen können

Aufgabe 1.1.1. Messergebnis und Messfehler

Systematische Messabweichung

- Bekannte systematische Messabweichung
  - → Spannungsabfall über Messleitungen
  - → Kennlinienfehler (z.B. wegen Temperaturabweichungen)

- Unbekannte systematische Messabweichung
  - → Messgeräteungenauigkeit
  - → Wird von den Herstellern in Datenblättern angegeben



Systematische Fehler, welche die Messung des Effektivwertes der Spannung in der Steckdose beeinflussen können

Aufgabe 1.1.1. Messergebnis und Messfehler

Zufällige Messabweichungen

$\rightarrow$ Schätzung des Erwartungswertes durch mehrfache Messung

Bekannte systematische Messabweichung

$\rightarrow$ Der Schätzwert kann direkt korrigiert werden

Unbekannte systematische Messabweichung

$\rightarrow$ Diese Abweichung kann nicht verhindert werden. Das Messergebnis liegt immer in diesem Intervall

Aufgabe 1.2.1. Häufigkeitsverteilung

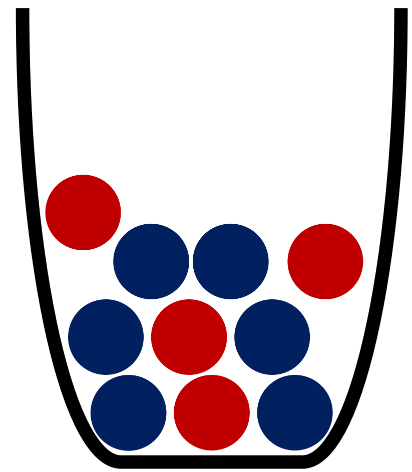
Wie viele Kugeln einer Farbe befinden sich in der Urne?

- Durch Abzählen erhält man die **absolute Häufigkeit**:

$$H(Blau) = 6$$
$$H(Rot) \;= 4$$

- Durch Bezug auf die Gesamtmenge erhält man die **relative Häufigkeit**:

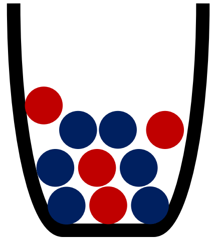
$$h(A) \quad = \frac{H(A)}{n}$$
$$h(Blau) = \frac{6}{10} = 0.6$$
$$h(Rot) \quad = \frac{4}{10} = 0.4$$

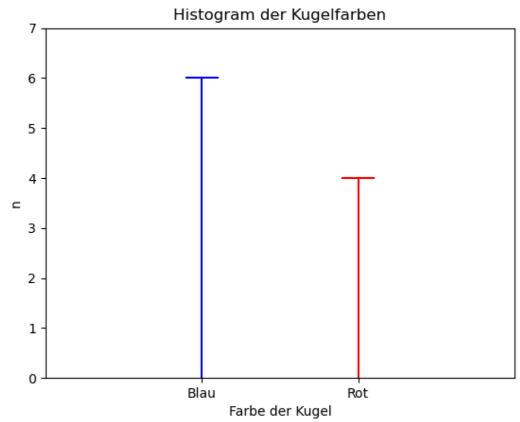


Die relative Häufigkeit gibt den Anteil des betrachteten Ereignisses an der Gesamtheit an

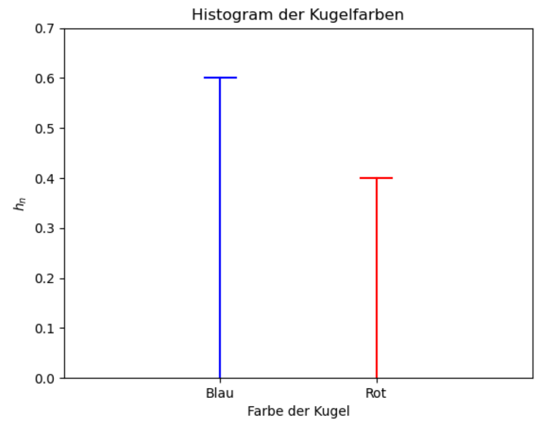
Aufgabe 1.2.1. Häufigkeitsverteilung

Die Häufigkeiten können in einem Histogramm dargestellt werden





Darstellung der absoluten Häufigkeit in einem Histogramm



Darstellung der relativen Häufigkeit in einem Histogramm

Aufgabe 1.2.1. Häufigkeitsverteilung

Die Häufigkeit kann auch bei kontinuierlichen Größen angegeben werden

- Es wird abgezählt wie oft ein Messwert in einen bestimmten Bereich fällt

Der Effektivwert der Spannung in der Steckdose wurde 10 mal mit einem Multimeter des Typs: FLUKE 8846A gemessen

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
U [V]	230.672	230.701	231.027	230.935	230.801	230.584	230.777	230.848	230.797	230.448

Wie oft liegt der Messwert zwischen 230.7V und 230.8V?

$\rightarrow H(230.7V \leq U < 230.8V) = 3$

Aufgabe 1.2.1. Häufigkeitsverteilung

Die Häufigkeit kann auch bei kontinuierlichen Größen angegeben werden

- Es wird abgezählt wie oft ein Messwert in einen bestimmten Bereich fällt
- Der Messbereich wird in gleich große Bereiche (bins) eingeteilt und gezählt wie oft Messwerte in jene Bereiche fallen

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U [V]	230.672	230.701	231.027	230.935	230.801	230.584	230.777	230.848	230.797	230.448

$$H(230.4V \leq U < 230.5V) = 1$$

$$H(230.5V \leq U < 230.6V) = 1$$

$$H(230.6V \leq U < 230.7V) = 1$$

$$H(230.7V \leq U < 230.8V) = 3$$

$$H(230.8V \leq U < 230.9V) = 2$$

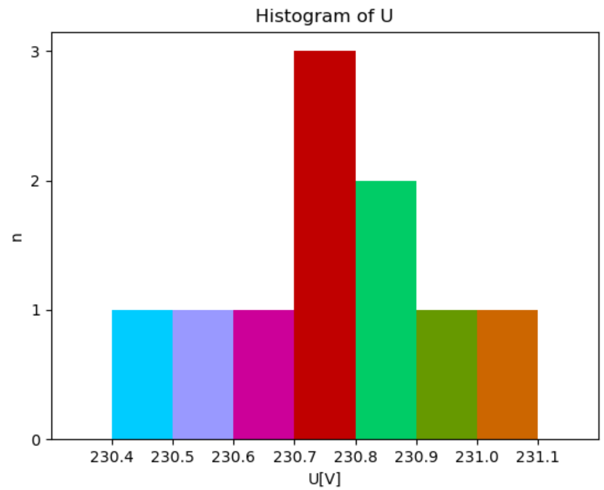
$$H(230.9V \leq U < 231.0V) = 1$$

$$H(231.0V \leq U < 231.1V) = 1$$

Aufgabe 1.2.1. Häufigkeitsverteilung

Die Häufigkeit kann auch bei kontinuierlichen Größen angegeben werden

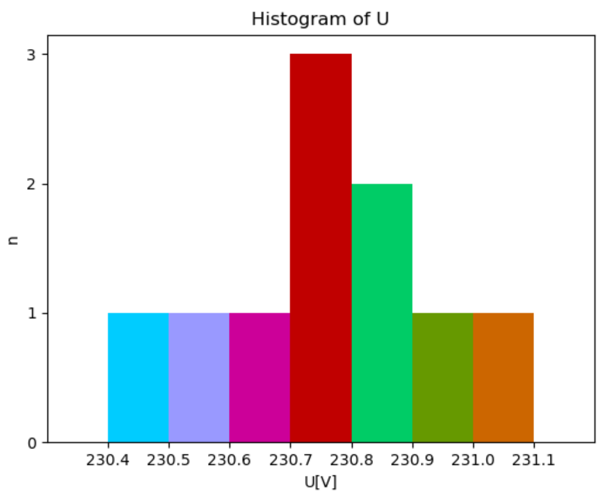
- Es wird abgezählt wie oft ein Messwert in einen bestimmten Bereich fällt
- Der Messbereich wird in gleich große Bereiche (bins) eingeteilt und gezählt wie oft Messwerte in jene Bereiche fallen
- Das Ergebnis kann in einem Histogramm dargestellt werden



Ein mögliches Histogramm für die Messwerte in Tabelle 1

Aufgabe 1.2.1. Häufigkeitsverteilung

Ein Histogramm kontinuierlicher Werte ist normiert (d.h. es gibt die relativen Häufigkeiten wieder) wenn sich die Fläche der einzelnen bins zu 1 addiert



$$A(230.4V \leq U < 230.5V) = 1 \cdot 0.1V = 0.1V$$
$$A(230.5V \leq U < 230.6V) = 1 \cdot 0.1V = 0.1V$$
$$A(230.6V \leq U < 230.7V) = 1 \cdot 0.1V = 0.1V$$
$$A(230.7V \leq U < 230.8V) = 3 \cdot 0.1V = 0.3V$$
$$A(230.8V \leq U < 230.9V) = 2 \cdot 0.1V = 0.2V$$
$$A(230.9V \leq U < 231.0V) = 1 \cdot 0.1V = 0.1V$$
$$A(231.0V \leq U < 231.1V) = 1 \cdot 0.1V = 0.1V$$

$$\sum A = 1V$$

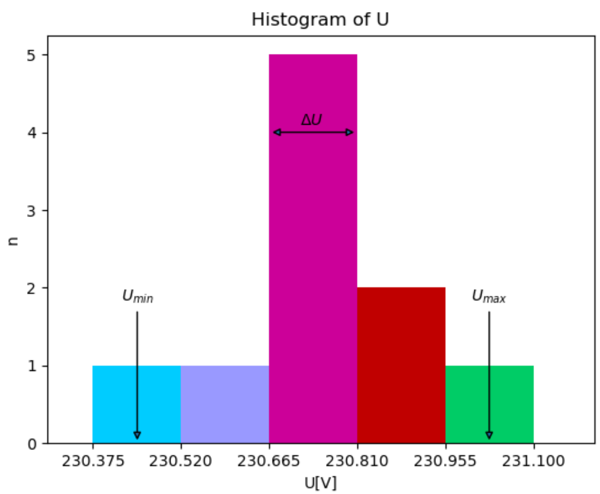
Im vorliegenden Fall ist die Summe der Flächen bereits 1. Es muss somit keine weitere Normierung vorgenommen werden

Aufgabe 1.2.1. Häufigkeitsverteilung

Zweites Beispiel: Die Messreihe soll ine einem Histogramm mit 5 gleichgroßen bins dargestellt werden

Tabelle 1: Der Effektivwert der Spannung in der Steckdose wurde 10 mal mit einem Multimeter des Typs: FLUKE 8846A gemessen

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
U [V]	230.672	230.701	231.027	230.935	230.801	230.584	230.777	230.848	230.797	230.448



Ein weiteres mögliches <u>nicht-normiertes</u> Histogramm für die Messwerte in Tabelle 1

Die Einteilung der bins erfolgt wie folgt:

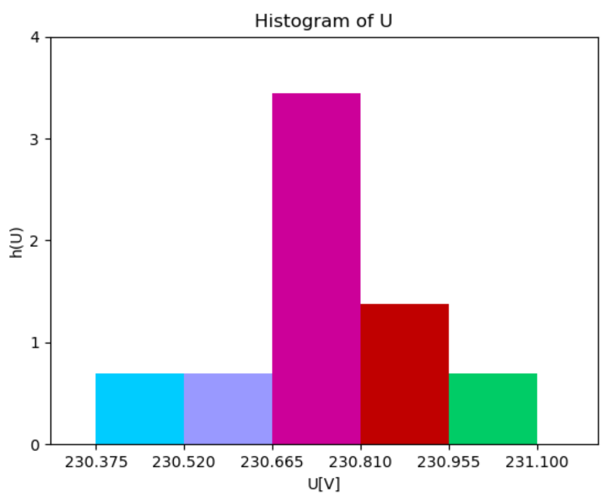
- $U_{min} = 230.448V$
- $U_{max} = 231.027V$
- $\Delta U = \frac{U_{max} - U_{min}}{N_{bins} - 1} = \frac{231.027V - 230.448V}{5-1} = 0.145V$

Aufgabe 1.2.1. Häufigkeitsverteilung

Zweites Beispiel: Die Messreihe soll ine einem Histogramm mit 5 gleichgroßen bins dargestellt werden

Tabelle 1: Der Effektivwert der Spannung in der Steckdose wurde 10 mal mit einem Multimeter des Typs: FLUKE 8846A gemessen

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
U [V]	230.672	230.701	231.027	230.935	230.801	230.584	230.777	230.848	230.797	230.448



Ein weiteres mögliches <u>normiertes</u> Histogramm für die Messwerte in Tabelle 1

$$A(230.375V \leq U < 230.520V) = 1 \cdot 0.145V = 0.145V$$
$$A(230.520V \leq U < 230.665V) = 1 \cdot 0.145V = 0.145V$$
$$A(230.665V \leq U < 230.810V) = 5 \cdot 0.145V = 0.725V$$
$$A(230.810V \leq U < 230.955V) = 2 \cdot 0.145V = 0.290V$$
$$A(230.955V \leq U < 230.100V) = 1 \cdot 0.145V = 0.145V$$

$$\sum A = 1{,}45V$$

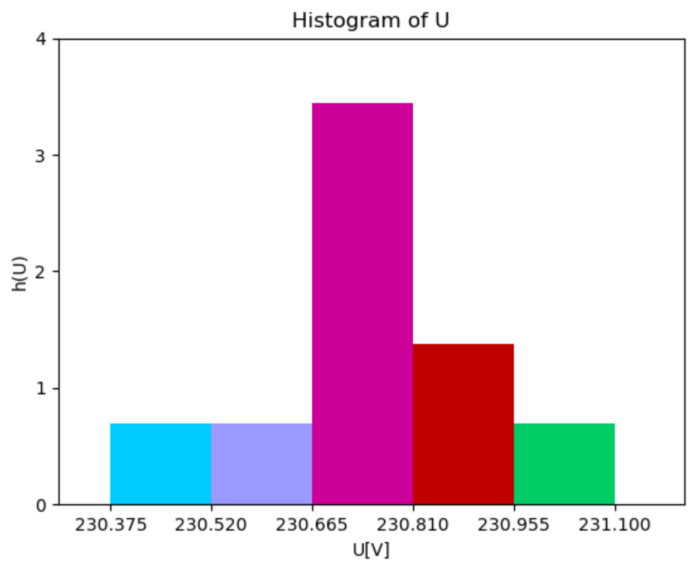
Für das normierte Histogramm muss die Y-Achse durch 1,45 geteilt werden

Aufgabe 1.2.1. Häufigkeitsverteilung

Das normierte Histogramm gibt die geschätzte Wahrscheinlichkeitsdichte der Messreihe an

Tabelle 1: Der Effektivwert der Spannung in der Steckdose wurde 10 mal mit einem Multimeter des Typs: FLUKE 8846A gemessen

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
U [V]	230.672	230.701	231.027	230.935	230.801	230.584	230.777	230.848	230.797	230.448

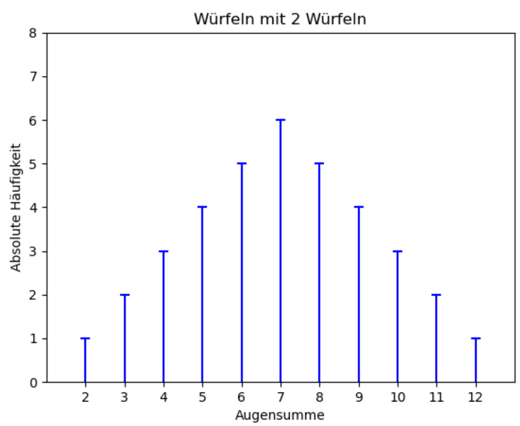


Normiertes Histogramm der Messreihe für N=5 bins

Aufgabe 1.2.2. Verteilungsdichte

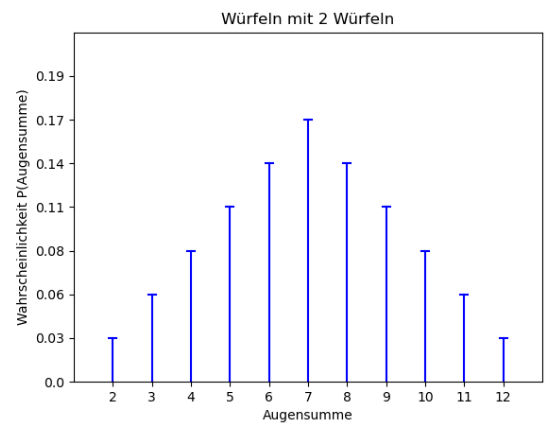
Im diskreten Fall gibt das Histogramm über die relative Häufigkeit eines Ereignisses dessen Wahrscheinlichkeitsverteilung an (im kontinuierlichen Fall spricht man von Wahrscheinlichkeitsdichte)

Beispiel: Das Würfeln mit 2 Würfeln



Histogramm über die Häufigkeiten der Augensummen beim Wurf mit 2 Würfeln

$$\sum Kombinationen = 36$$



Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Augensumme bei Wurf mit 2 Würfeln, ergibt sich indem das Histogramm der absoluten Häufigkeiten auf die Gesamtanzahl der Kombinationen normiert wird

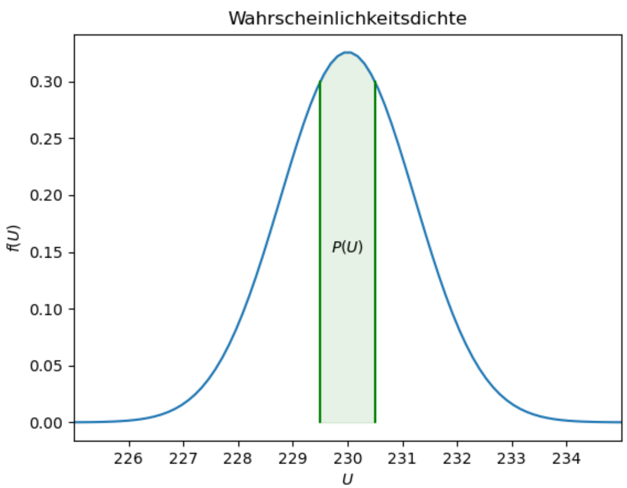
Zum Beispiel Augensumme 5: $\underbrace{(1|4); (2|3); (3|2); (4|1)}_{4\ Mögliche\ Kombinationen}$

Aufgabe 1.2.2. Verteilungsdichte

Im kontinuierlichen Fall spricht man anstatt von Wahrscheinlichkeitsverteilung von Wahrscheinlichkeitsdichte. Die Wahrscheinlichkeit kann nur für ein bestimmtes Intervall angegeben werden und ist, wie beim Histogramm, durch die Fläche unter der Dichtefunktion gegeben

Beispiel: Die Spannung in einer Steckdose kann zum Beispiel mit folgender Dichtefunktion beschrieben werden. Der Erwartungswert einer allgemeinen Dichtefunktion wird wie folgt berechnet:

- $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$



Im kontinuierlichen Fall ist die Wahrscheinlichkeit für einen exakten Wert immer 0, da er durch unendlich viele Nachkommastellen beschrieben werden müsste:

- $P(230V)$ wäre eigentlich $P(230.\underbrace{00 \ldots 00}_{\infty-mal}V)$

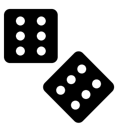
Möchte man die Wahrscheinlichkeit bis auf z.B. eine Nachkommastelle genau wissen, hat man wieder ein Intervall und somit eine Fläche:

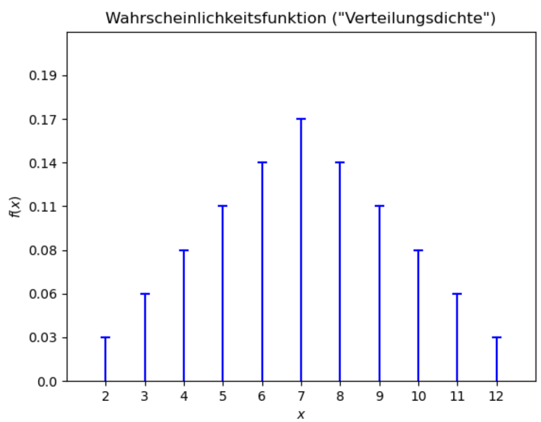
- $P(230.2V)$ wäre somit $P(230.015V \leq U < 230.025V)$

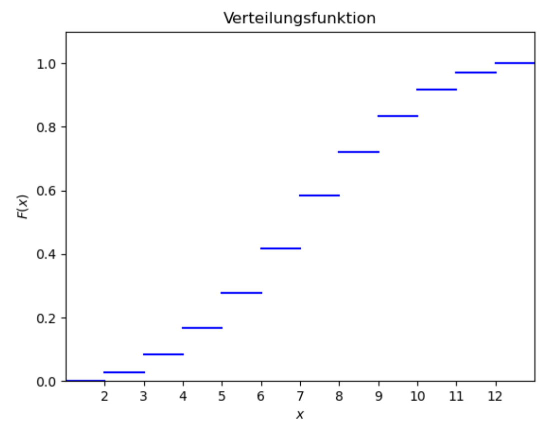
Aufgabe 1.2.3. Verteilungsfunktion

Aus der Wahrscheinlichkeitsfunktion kann die Verteilungsfunktion abgeleitet werden. Diese gibt an, wie Wahrscheinlich es für einen bestimmten Wert ist, dass er bis zum betrachteten Ereignis eingetreten ist.

Beispiel Würfeln mit 2 Würfeln: Betrachte die Augensumme 7: Wie wahrscheinlich ist es dass ich eine 7 oder geringer Würfel?







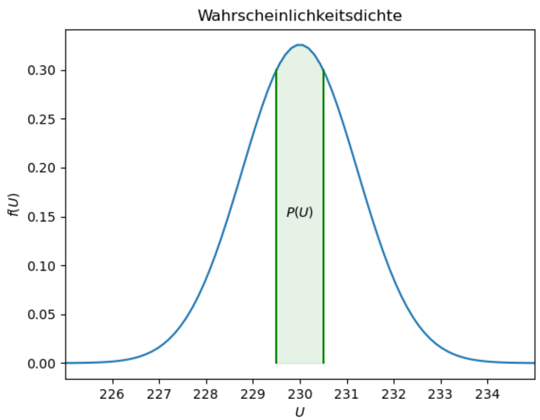
Dier Verteilungsfunktion wird berechnet, indem die Wahrscheinlichkeiten aus der Wahrscheinlichkeitsfunktion akkumuliert werden:

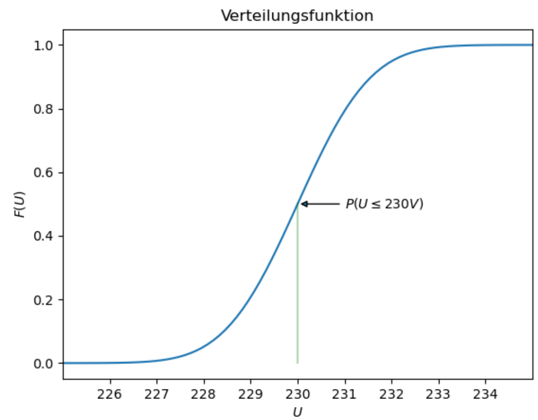
$$F(x_n) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)$$

Aufgabe 1.2.2. Verteilungsdichte

Aus der Dichtefunktion kann auch im kontinuierlichen Fall die Verteilungsfunktion abgeleitet werden. Diese gibt an, wie Wahrscheinlich es für einen betrachteten Wert ist, dass der Messwert darunter liegt. Wahrscheinlichkeiten für konkrete Intervalle können einfacher aus der Verteilungsfunktion berechnet werden, da hier kein Integral Nötig ist:

- $P(U_1 \leq U < U_2) = \int_{U_1}^{U_2} f(U) dU$
- $P(U_1 \leq U < U_2) = F(U_2) - F(U_1)$





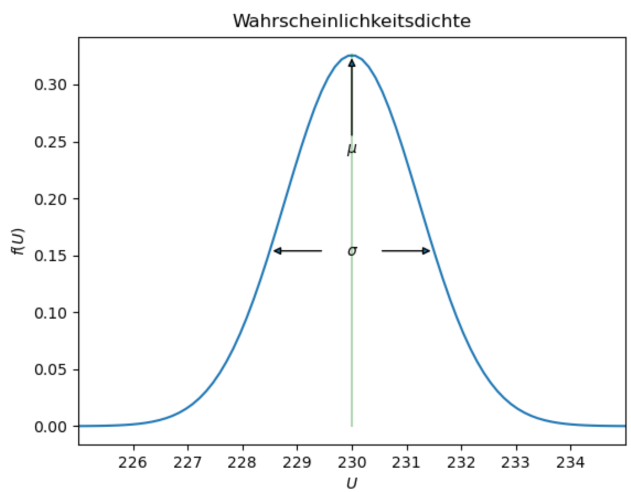
Dier Verteilungsfunktion wird berechnet, indem die Dichtefunktion Integriert wird

- $F(X) = \int_{-\infty}^{X} f(x) dx$

Aufgabe 1.2.4. Gaußverteilung

Die Normalverteilung (auch Gaußverteilung genannt) ist eine statistische Wahrscheinlichkeits-verteilung, welche für die Beschreibung der zufälligen Messabweichung genutzt wird.

- Die Normalverteilung nimmt an, dass der Messwert ohne zufällige Störgrößen dem Erwartungswert μ entspricht. Je weiter ein Messwert von diesem Erwartungswert abweicht, desto unwahrscheinlicher, entspr. seltener kommt er vor
- Weiterhin nimmt die Normalverteilung an, dass Störgrößen in einer ausreichend großen Stichprobe die Messwerte gleichermaßen ins positive wie auch ins negative verzerren



Aufgabe 1.2.4. Gaußverteilung

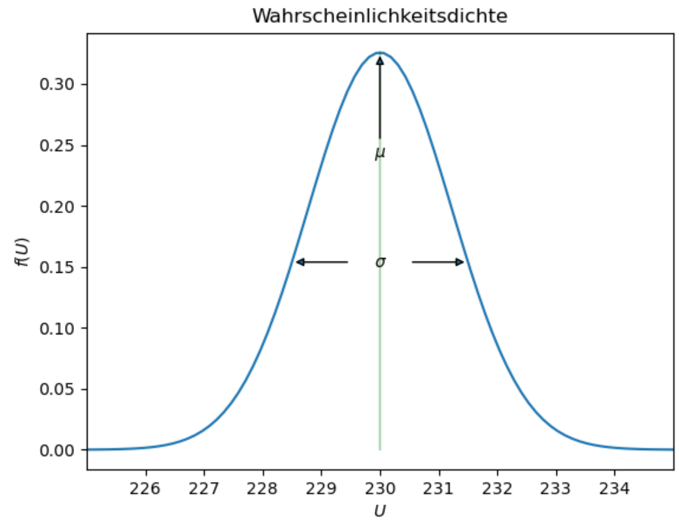
Die Normalverteilung wird durch 2 Größen beschrieben

- Der Erwartungswert μ gibt den wahrscheinlichsten Wert der Verteilung an
- Die Standardabweichung σ gibt an, mit welcher Abweichung vom Erwartungswert bei einer einzelnen Messung im Durschnitt zu rechnen ist

Die Dichtefunktion der Normalverteilung ist durch folgende Formel gegeben:

- $N(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\left(\frac{U-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Um einen Datensatz mit der Gaußverteilung zu beschreiben, benötigt man den Erwartungswert (μ) und die Standardabweichung (σ) des Datensatzes



Aufgabe 1.2.5. Empirischer Mittelwert und empirische Varianz

Der Erwartungswert (μ) und die Standardabweichung (σ) sind in der Regel unbekannt

Sie können aber aus einer Stichprobe (Messreihe) geschätzt werden. Die aus diesen Schätzwerten bestehende Verteilung wird empirische Normalverteilung genannt

- Der Erwartungswert wird durch den Mittelwert der Stichprobe geschätzt:
  - $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} x_i$
- Mit dem Mittelwert kann die empirischen Varianz berechnet werden:
  - $s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=0}^{N}(x_i - \bar{x})^2$
- Aus der empirischen Varianz kann die empirische Standardabweichung berechnet werden:
  - $s = \sqrt{s^2}$
- Die empirische Dichtefunktion ergibt sich somit zu:
  - $\hat{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} e^{-\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$

Aufgabe 1.2.5. Empirischer Mittelwert und empirische Varianz

Jetzt kann die empirische Normalverteilung der Messreihe berechnet werden

Tabelle 1: Der Effektivwert der Spannung in der Steckdose wurde 10 mal mit einem Multimeter des Typs: FLUKE 8846A gemessen

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U [V]	230.672	230.701	231.027	230.935	230.801	230.584	230.777	230.848	230.797	230.448

Für die oben genannten Messwerte können die folgenden Werte für Mittelwert und Standardabweichung angegeben werden:

- $\bar{u} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} U_i = 230.759V$
- $s^2 = \frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}(U_i - \bar{u})^2 = 0.028V^2$
- $s = \sqrt{s^2} = 0.167V$

```
In [1]: U = np.array([230.672, …,230.448])
In [2]: U.mean()
Out[2]: 230.75899999999996
In [3]: U.var(ddof = 1)
Out[3]: 0.028059111111109987
In [4]: U.std(ddof = 1)
Out[4]: 0.16750854641245178
```

ddof = delta degrees of freedom,
Damit die Standardabweichung
mit N-1 gerechnet wird

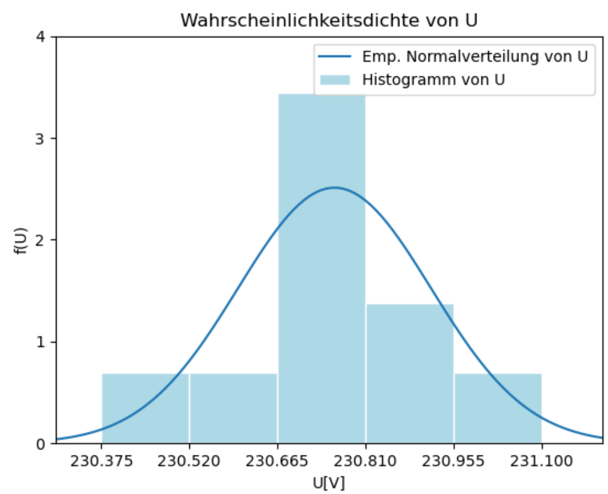
Aufgabe 1.2.5. Empirischer Mittelwert und empirische Varianz

Jetzt kann die empirische Normalverteilung der Messreihe berechnet werden

Tabelle 1: Der Effektivwert der Spannung in der Steckdose wurde 10 mal mit einem Multimeter des Typs: FLUKE 8846A gemessen

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
U [V]	230.672	230.701	231.027	230.935	230.801	230.584	230.777	230.848	230.797	230.448

Mit diesen Werten kann auch die Verteilungsdichte der Messreihe zusammen mit dem vorher ermittelten Histogramm geplottet werden. Dies gibt eine gute visuelle Übersicht, ob die Messwerte tatsächlich normalverteilt sind



Aufgabe 1.2.6. Standardabweichung des Mittelwertes

Wie weit weicht der empirische Mittelwert von dem wahren Erwartungswert ab?

Stichprobe 1: $\mu = 230.759V$

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U [V]	230.672	230.701	231.027	230.935	230.801	230.584	230.777	230.848	230.797	230.448

Stichprobe 2: $\mu = 230.579V$

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U [V]	230.547	230.373	230.876	231.031	230.935	230.353	230.247	230.348	230.235	230.845

Die 2. Stichprobe führt zu einem anderen Mittelwert als die erste. Wie weit ist diese Abweichung zu erwarten?

→ Standardabweichung vom Mittelwert (Standardfehler)

→ Berechnung: $s_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

Hier ist die wahre Standardabweichung gemeint und nicht die empirische

Aufgabe 1.2.6. Standardabweichung des Mittelwertes

Die Standardabweichung vom Mittelwert der Messreihe kann so berechnet werden

Tabelle 1: Der Effektivwert der Spannung in der Steckdose wurde 10 mal mit einem Multimeter des Typs: FLUKE 8846A gemessen

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U [V]	230.672	230.701	231.027	230.935	230.801	230.584	230.777	230.848	230.797	230.448

Wenn die wahre Standardabweichung nicht gegeben ist (was i.d.R. der Fall ist) muss Sie durch ihre Schätzung, also die empirische Standardabweichung ersetzt werden:

$$s_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \xrightarrow{\sigma \text{ unbekannt}} s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Dieser Tausch bleibt nicht folgenlos, wie ab Aufgabe 1.4.1 gezeigt wird

Die Standardabweichung vom Mittelwert der Messreihe ergibt somit:

- $s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{N}} = \frac{0.167V}{\sqrt{10}} = 0.053V$

Aufgabe 1.3.1. Systematische Messabweichung

Folie 5 bietet eine Übersicht über die gängigsten Systematischen Messabweichungen

Aufgabe 1.3.2. Systematische Messabweichung durch das Messgerät

Es wurde mit dem folgenden Messgerät mit den entsprechenden Einstellungen gemessen:

- Messgerät: FLUKE 8846A
- Eingestellter Messbereich: 1000V~
- Letzte Kalibrierung: vor 1 Jahr

Damit lassen sich folgende Informationen aus dem Datenblatt entnehmen:

8846A Genauigkeit

Genauigkeit: ±(% Messwert + % Bereich)

Berechnungsformel

Bereich	Frequenz	24 Stunden (23 ±1 °C)	90 Tage (23 ±5 °C)	1 Jahr (23 ±5 °C)	Temperaturkoeffizient/ °C Außenluft 18 bis 28 °C
		⋮	⋮		⋮
	100 – 300 kHz [1]	4,0 + 0,50	4,0 + 0,50	4,0 + 0,50	0,2 + 0,02
100 V	3 – 5 Hz	1,0 + 0,02	1,0 + 0,03	1,0 + 0,03	0,1 + 0,003
	5 – 10 Hz	0,35 + 0,02	0,35 + 0,03	0,35 + 0,03	0,035 + 0,003
	10 Hz – 20 kHz	0,04 + 0,02	0,05 + 0,03	0,06 + 0,03	0,005 + 0,003
	20 – 50 kHz	0,1 + 0,04	0,11 + 0,05	0,12 + 0,05	0,011 + 0,005
	50 – 100 kHz	0,55 + 0,08	0,6 + 0,08	0,6 + 0,08	0,06 + 0,008
	100 – 300 kHz [1]	4,0 + 0,50	4,0 + 0,50	4,0 + 0,50	0,2 + 0,02
1000 V	3 – 5 Hz	1,0 + 0,015	1,0 + 0,0225	1,0 + 0,0225	0,1 + 0,00225
	5 – 10 Hz	0,35 + 0,015	0,35 + 0,0225	0,35 + 0,0225	0,035 + 0,00225
	10 Hz – 20 kHz	0,04 + 0,015	0,05 + 0,0225	0,06 + 0,0225	0,005 + 0,00225
	20 – 50 kHz	0,1 + 0,03	0,11 + 0,0375	0,12 + 0,0375	0,011 + 0,00375
	50 – 100 kHz [2]	0,55 + 0,06	0,6 + 0,06	0,6 + 0,06	0,06 + 0,006
	100 – 300 kHz [1][2]	4,0 + 0,375	4,0 + 0,375	4,0 + 0,375	0,2 + 0,015

[1] Typisch 30 % Messwertfehler bei 1 MHz

[2] 1000 V Spannungsbereich ist auf 8 X 10^7 Volt-Hertz begrenzt

Systematischer Fehler

Bildquelle: Fluke 8845A/8846A Digital Multimeters Extended Specifications und Bedienungshandbuch 8845A/8846A Digital Multimeter

Aufgabe 1.3.2. Systematische Messabweichung durch das Messgerät

Dem Datenblatt entnommene Informationen:

- Berechnungsformel für die Genauigkeit: $\pm(\%Messwert + \%Bereich)$
- Passende Werte für den vorliegenden Fall: $0.06 + 0.0225$

Die Abgelesenen Werte sind also wie folgt zu Interpretieren:

- $\underbrace{0.06}_{\%Messwert} + \underbrace{0.0225}_{\%Bereich}$

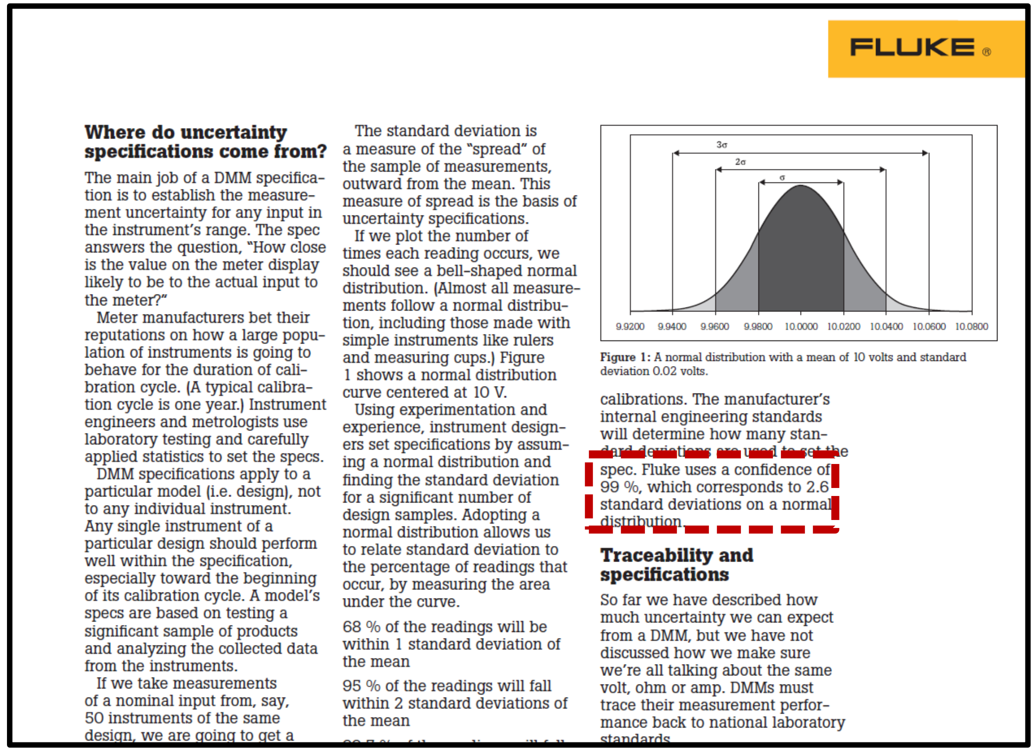
Damit ergibt sich die Berechnung der Ungenauigkeit:

- $\pm\left(\underbrace{\frac{0.06}{100}}_{Umrechnung\ Prozent} \cdot \underbrace{230.759V}_{Messwert} + \underbrace{\frac{0.0225}{100}}_{Umrechnung\ Prozent} \cdot \underbrace{1000V}_{Bereich}\right) = \pm 0.363V$

$$\boxed{g_{Messg} = \pm 0.363V}$$

Vertrauensbereich der unbekannten systematischen Messabweichung

- Fluke gibt in Ihrem Beiblatt (*Application Note: Understanding specifikations for precision multimeters*) an, dass sich Ihre ermittelten unbekannten systematischen Messabweichungen auf eine 2,6-fache Standardabweichung beziehen. D.h. Fluke gibt sie in einem Vertrauensbereich von 99% an
- Unsere bisherig berechnete zufällige Messabweichung bezieht sich aber auf die 1-fache Standardabweichung, was einem Vertrauensbereich von ca. 68% entspräche



Where do uncertainty specifications come from?

The main job of a DMM specification is to establish the measurement uncertainty for any input in the instrument's range. The spec answers the question, "How close is the value on the meter display likely to be to the actual input to the meter?"

Meter manufacturers bet their reputations on how a large population of instruments is going to behave for the duration of calibration cycle. (A typical calibration cycle is one year.) Instrument engineers and metrologists use laboratory testing and carefully applied statistics to set the specs.

DMM specifications apply to a particular model (i.e. design), not to any individual instrument. Any single instrument of a particular design should perform well within the specification, especially toward the beginning of its calibration cycle. A model's specs are based on testing a significant sample of products and analyzing the collected data from the instruments.

If we take measurements of a nominal input from, say, 50 instruments of the same design, we are going to get a

The standard deviation is a measure of the "spread" of the sample of measurements, outward from the mean. This measure of spread is the basis of uncertainty specifications.

If we plot the number of times each reading occurs, we should see a bell-shaped normal distribution. (Almost all measurements follow a normal distribution, including those made with simple instruments like rulers and measuring cups.) Figure 1 shows a normal distribution curve centered at 10 V.

Using experimentation and experience, instrument designers set specifications by assuming a normal distribution and finding the standard deviation for a significant number of design samples. Adopting a normal distribution allows us to relate standard deviation to the percentage of readings that occur, by measuring the area under the curve.

68 % of the readings will be within 1 standard deviation of the mean

95 % of the readings will fall within 2 standard deviations of the mean

Figure 1: A normal distribution with a mean of 10 volts and standard deviation 0.02 volts.

calibrations. The manufacturer's internal engineering standards will determine how many standard deviations are used to set the spec. Fluke uses a confidence of 99 %, which corresponds to 2.6 standard deviations on a normal distribution.

Traceability and specifications

So far we have described how much uncertainty we can expect from a DMM, but we have not discussed how we make sure we're all talking about the same volt, ohm or amp. DMMs must trace their measurement performance back to national laboratory standards.

ELEKTRONISCHE MESS- UND DIAGNOSETECHNIK

Aufgabe 1.3.2. Systematische Messabweichung durch das Messgerät

Die unbekannte systematische Messabweichung muss somit noch auf die 1-fache Standardabweichung umgerechnet werden:

- $g_{Messg} = 2.6 \cdot u_{Messg}$

$\rightarrow \quad u_{Messg} = \frac{g_{Messg}}{2.6}$

$\rightarrow \quad u_{Messg} = \frac{\pm 0.363V}{2.6} = \pm 0.140V$

So kann nun aus der zufälligen und der unbekannten systematischen Messabweichung die gesamte Messabweichung berechnet werden:

- $u = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + u_{Messg}^2}$
- $u = \sqrt{(0.053V)^2 + (0.140V)^2} = 0.150V$

Exkurs: Absolute Fehlergrenzen

Teilweise geben Hersteller auch die absoluten Fehlergrenzen e_{max} ihrer Messgeräte an. D.h. sie geben an, über welche Grenze die unbekannte systematische Messabweichung keinesfalls steigt

- Wenn nicht anders angegeben, wird ein im Intervall zwischen $-e_{max}$ und e_{max} gleichverteilter Fehler angenommen. D.h. dass jeder Fehler in diesem Intervall gleich wahrscheinlich ist. Es wird somit die stetige Gleichverteilung angesetzt

$$\mu_{Gleichv} = \frac{-e_{max} + e_{max}}{2} = 0$$

- mit der Varianz

$$\sigma_{Gleichv}^2 = \frac{(-e_{max} - e_{max})^2}{12} = \frac{4{e_{max}}^2}{12} = \frac{{e_{max}}^2}{3}$$

- aus der Varianz folgt die Standardabweichung

$$\sigma_{Gleichv} = \frac{e_{max}}{\sqrt{3}} \Rightarrow u_{Messg} = \frac{e_{max}}{\sqrt{3}}$$

$$u_{Messg} = \frac{e_{max} - e_{min}}{\sqrt{12}}$$ *Wenn pos. und neg. Fehler nicht gleich sind*

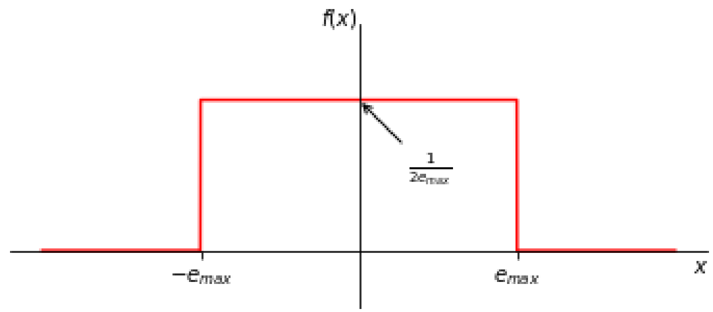


Bild 30: Die Verteilungsdichtefunktion der stetigen Gleichverteilung. Zwischen den maximalen Abweichungen sind alle Fehler gleich Wahrscheinlich

Aufgabe 1.4.1. Erweiterte Messunsicherheit

Wie sehr möchten Sie auf Ihr Ergebnis vertrauen?:

- $U = (230.759 \pm 0.150)V$

$\rightarrow$ $U \in [230.609V,\ \ 230.909V]$

$\rightarrow$ Wie wahrscheinlich ist es, dass der Wert tatsächlich innerhalb dieses Intervalls liegt?

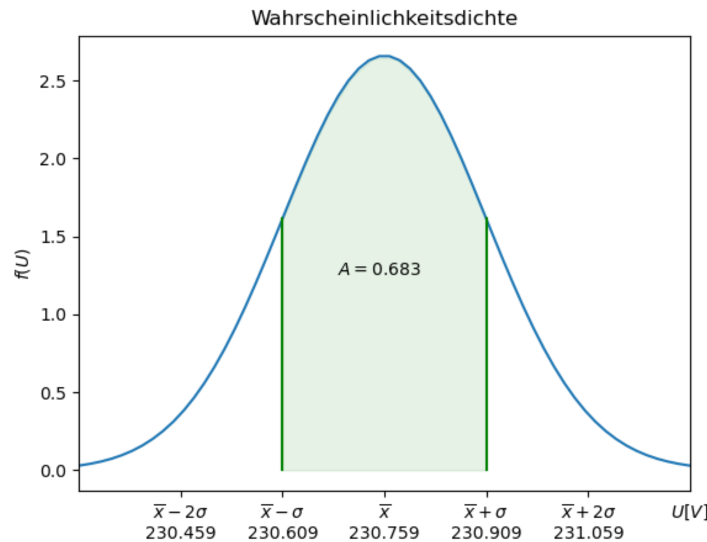
Hier müssen zwei Fälle unterschieden werden:

1. Fall: Der Standardabweichung vom Mittelwert wurde aus der wahren Standardabweichung berechnet:
   - Der Mittelwert ist ebenfalls Normalverteilt
2. Fall: Der Standardabweichung vom Mittelwert wurde aus der empirischen Standardabweichung berechnet:
   - Der Mittelwert ist Student-t Verteilt

Aufgabe 1.4.1. Erweiterte Messunsicherheit

Fall 1: Der Mittelwert ist Normalverteilt

- In diesem Falle können die Werte der Normalverteilung angenommen werden. Bei 1-facher Standardabweichung entspricht das Ergebnis einem Vertrauensbereich von ca. 68.3%



$k \cdot \sigma$	0.5σ	0.67σ	1σ	1.65σ	1.96σ	2.58σ	3σ	3.3σ
$P[\%]$	38.3	50	68.3	90	95	99	99.73	99.9

Aufgabe 1.4.1. Erweiterte Messunsicherheit

Fall 2: Der Mittelwert ist Student-t verteilt:

- Der Verlauf der Student-t Verteilung hängt von der Anzahl der Messwerte (N) ab
- Folgende Tabelle zeigt exemplarisch die Faktoren für verschiedene Messwerte

Anzahl N der Einzelwerte	Werte für t und $\frac{t}{\sqrt{N}}$							
	1 σ-Regel $P = 68,3\,\%$		3 σ-Regel $P = 99,73\,\%$		$P = 95\,\%$		$P = 99\,\%$	
	t_p	$\frac{t_p}{\sqrt{N}}$	t_p	$\frac{t_p}{\sqrt{N}}$	t_p	$\frac{t_p}{\sqrt{N}}$	t_p	$\frac{t_p}{\sqrt{N}}$
(2)	(1,8)	(1,3)	(235)	(166)	(12,7)	(9,0)	(64)	(45)
3	1,32	0,76	19,2	11,1	4,3	2,5	9,9	5,7
4	1,20	0,60	9,2	4,6	3,2	1,6	5,8	2,9
5	1,15	0,51	6,6	3,0	2,8	1,24	4,6	2,1
6	1,11	0,45	5,5	2,3	2,6	1,05	4,0	1,6
8	1,08	0,38	4,5	1,6	2,4	0,84	3,5	1,24
10	1,06	0,34	4,1	1,29	2,3	0,72	3,25	1,03
20	1,03	0,23	3,4	0,77	2,1	0,47	2,9	0,64
30	1,02	0,19	3,3	0,60	2,05	0,37	2,8	0,50
50	1,01	0,14	3,16	0,45	2,0	0,28	2,7	0,38
100	1,00	0,10	3,1	0,31	2,0	0,20	2,6	0,26
200	1,00	0,07	3,04	0,22	1,97	0,14	2,6	0,18
sehr groß (über 200)	1,0	0	3,0	0	1,96	0	2,58	0

Für ausrechend große Stichproben entspricht die Student-t Verteilung der Normalverteilung, da davon ausgegangen werden kann, dass die empirischen Standardabweichung der wahren Standardabweichung sehr nahe kommt

Aufgabe 1.4.1. Erweiterte Messunsicherheit

Im vorliegenden Fall wurde die Standardabweichung vom Mittelwert aus der empirischen Standardabweichung geschätzt. Der Vertrauensfaktor muss also aus der Student-t Tabelle genommen werden.

- Im vorliegenden Fall wurde 10 mal gemessen
- Dem Messergebnis soll zu 99% vertraut werden
- Somit muss die Messabweichung noch mit dem Faktor $k = 3.25$ multipliziert werden

Anzahl N der Einzelwerte	Werte für t und $\frac{t}{\sqrt{N}}$							
	1 σ-Regel $P = 68,3\,\%$		3 σ-Regel $P = 99,73\,\%$		$P = 95\,\%$		$P = 99\,\%$	
	t_p	$\frac{t_p}{\sqrt{N}}$	t_p	$\frac{t_p}{\sqrt{N}}$	t_p	$\frac{t_p}{\sqrt{N}}$	t_p	$\frac{t_p}{\sqrt{N}}$
(2)	(1,8)	(1,3)	(235)	(166)	(12,7)	(9,0)	(64)	(45)
3	1,32	0,76	19,2	11,1	4,3	2,5	9,9	5,7
4	1,20	0,60	9,2	4,6	3,2	1,6	5,8	2,9
5	1,15	0,51	6,6	3,0	2,8	1,24	4,6	2,1
6	1,11	0,45	5,5	2,3	2,6	1,05	4,0	1,6
8	1,08	0,38	4,5	1,6	2,4	0,84	3,5	1,24
10	1,06	0,34	4,1	1,29	2,3	0,72	3,25	1,03
20	1,03	0,23	3,4	0,77	2,1	0,47	2,9	0,64
30	1,02	0,19	3,3	0,60	2,05	0,37	2,8	0,50
50	1,01	0,14	3,16	0,45	2,0	0,28	2,7	0,38
100	1,00	0,10	3,1	0,31	2,0	0,20	2,6	0,26
200	1,00	0,07	3,04	0,22	1,97	0,14	2,6	0,18
sehr groß (über 200)	1,0	0	3,0	0	1,96	0	2,58	0

Wenn in der Ihnen vorliegenden Aufgabe nur die Tabelle der Normalverteilung und nicht jene der Student-t Verteilung vorgegeben wird, können Sie die Faktoren auch dieser entnehmen

1.4.2. Vollständiges Messergebnis

Für den vorliegenden Fall ergibt sich somit das vollständiges Messergebnis von:

$$U = (230.759 \pm 3.25 \cdot 0.150)V$$

$$U = (230.759 \pm 0.488)V$$

Zusammenfassung

- Messreihe: $x_1, x_2, \dots, x_N$
- Mittelwert bestimmen: $\bar{x}$
- Korrektur des Mittelwertes durch bekannte systematische Messabweichung
- Standardabweichung des Mittelwertes bestimmen: $s_{\bar{x}}$
- Unbekannte systematische Messabweichung bestimmen: u_{Messg}
- Messabweichungen zusammenfassen $u = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + u_{Messg}^2}$
- Faktor für Vertrauensbereich ermitteln: k
- Vollständiges Messergebnis hinschreiben: $x = \bar{x} \pm k \cdot u$

War kein Teil der vorliegenden Aufgabe

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Prof. Dr.-Ing. Clemens Gühmann
Daniel Thomanek, M. Sc.

Technische Universität Berlin
Fakultät IV Elektrotechnik und Informatik
Institut für Energie und Automatisierungstechnik
Fachgebiet Elektronische Mess- und Diagnosetechnik