Grundlagen der elektronischen Messtechnik

Übung 6: Leistungsmessung

Prof. Dr.-Ing. Clemens Gühmann
Daniel Thomanek, M. Sc.

Technische Universität Berlin
Fakultät IV Elektrotechnik und Informatik
Institut für Energie und Automatisierungstechnik
Fachgebiet Elektronische Mess- und Diagnosetechnik

Aufgabe 1.1.1 Leistungsarten

Aufgabe 1.1.1 Leistungsarten

- Welche Leistungsarten sind für sinusförmige Größen definiert?
- Wie hängen sie zusammen?
- Wie können sie berechnet werden?

Aufgabe 6.1.1 Leistungsarten

Grundsätzlich gilt:

$$\begin{array}{cccc} P & = & U & \cdot & I \\ Leistung & = & Spannung & \cdot & Strom \end{array}$$

Oft sind aber Spannung und Strom nicht konstant sondern z.B. sinusförmig.

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

$p(t)$ wird **Augenblicksleistung** genannt. Bei sinusförmigen ergibt sich folgende Augenblicksleistung

$$p(t) = \underbrace{\hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)}_{u(t)} \cdot \underbrace{\hat{\imath} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)}_{i(t)}$$

Aufgabe 6.1.1 Leistungsarten

Berechnung der Augenblicksleistung

$$p(t) = \underbrace{\hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)}_{u(t)} \cdot \underbrace{\hat{\imath} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)}_{i(t)}$$

$$p(t) = \hat{u} \cdot \hat{\imath} \cdot \frac{1}{2} \cdot [\cos(\omega t + \varphi_u - \omega t - \varphi_i) - \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)]$$

$$p(t) = \underbrace{\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}}_{U_{eff}} \cdot \underbrace{\frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}}}_{I_{eff}} \cdot [\cos(\underbrace{\varphi_u - \varphi_i}_{\varphi}) - \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)]$$

$$p(t) = \underbrace{U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi)}_{Konstanter\ Anteil} - \underbrace{U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}_{Schwingung\ in\ doppelter\ Frequenz}$$

Durch Ansetzten einer Kosinusschwingung für Strom und Spannung ergibt sich:

$$p(t) = \underbrace{U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi)}_{Konstanter\ Anteil} + \underbrace{U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}_{Schwingung\ in\ doppelter\ Frequenz}$$

Aufgabe 6.1.1 Leistungsarten

Darstellung der Augenblicksleistung

$$p(t) = \underbrace{U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi)}_{Konstanter\ Anteil} + \underbrace{U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}_{Schwingung\ in\ doppelter\ Frequenz}$$

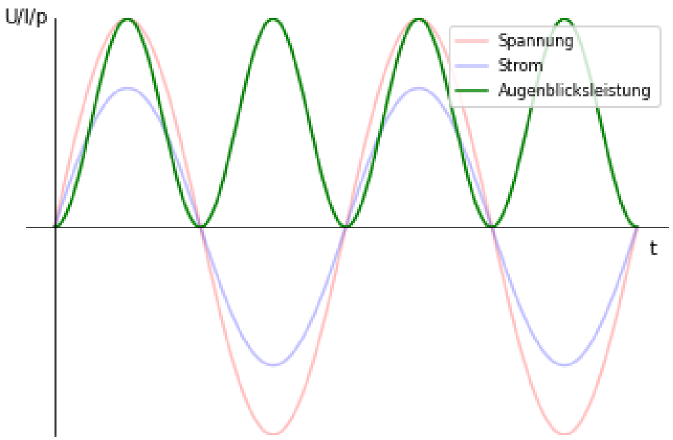

Bild 1: Strom und Spannung liegen in Phase. In diesem Fall ist die Augenblicksleistung ausschließlich positiv, d.h. das System nimmt Leistung auf

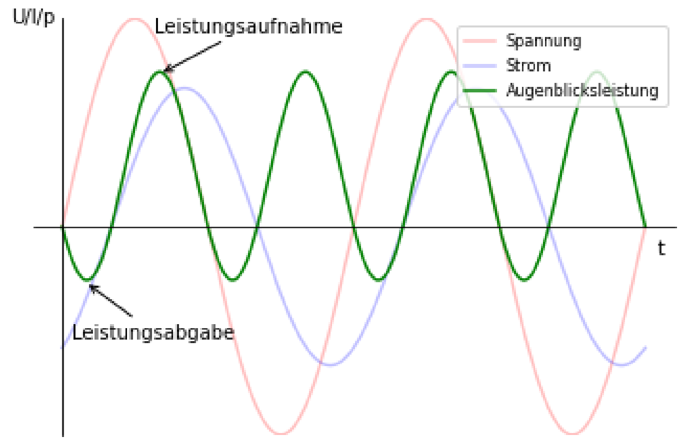

Bild 2: Strom und Spannung sind Phasenverschoben. In diesem Fall wird die Augenblicksleistung auch negativ, d.h. das System gibt Leistung wieder zurück. Physikalisch geschieht dies z.B. durch einen Kondensator, welcher sich entleert und so Energie abgibt

Aufgabe 6.1.1 Leistungsarten

Der Teil der Leistungsaufnahme, welcher nicht wieder abgegeben wird, wird als **Wirkleistung (P [W])** bezeichnet:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$$

$$P = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T U_{eff}\cdot I_{eff}\cdot\cos(\varphi)\,dt}\; + \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T U_{eff}\cdot I_{eff}\cdot\cos(2\omega t+\varphi_u+\varphi_i)\,dt}$$

$$= \frac{U_{eff}\cdot I_{eff}\cdot\cos(\varphi)}{T}\int_0^T dt$$

$$= \frac{U_{eff}\cdot I_{eff}\cdot\cos(\varphi)}{T}T$$

$$= U_{eff}\cdot I_{eff}\cdot\cos(\varphi)$$

$$= \frac{U_{eff}\cdot I_{eff}}{T}\int_0^T \cos(2\omega t+\varphi_u+\varphi_i)dt$$

$$= \frac{U_{eff}\cdot I_{eff}}{T}\left[\frac{1}{2\omega}sin(2\omega t+\varphi_u+\varphi_i)\right]_0^T$$

$$= \frac{U_{eff}\cdot I_{eff}}{2\omega T}\left[sin(2\frac{2\pi}{\underbrace{T}_{\omega}}T+\varphi_u+\varphi_i) - sin(\varphi_u+\varphi_i)\right]$$

$$= \frac{U_{eff}\cdot I_{eff}}{2\omega T}[sin(4\pi+\varphi_u+\varphi_i) - sin(\varphi_u+\varphi_i)]$$

$$= 0$$

$$\boxed{P = U_{eff}\cdot I_{eff}\cdot\cos(\varphi)}$$

Aufgabe 6.1.1 Leistungsarten

Die gesamte aufgenommen Leistung, ohne Berücksichtigung der abgegebenen Leistung wird als **Scheinleistung (S [VA])** bezeichnet:

$$S = \underbrace{\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}}_{U_{eff}} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}}_{I_{eff}}$$

Auf die Berechnung der Integrale für die Effektivwerte wird an dieser Stelle verzichtet. Siehe z.B. [1]

$$S = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{S = U_{eff} \cdot I_{eff}}$$

Aufgabe 6.1.1 Leistungsarten

Die aufgenommen Leistung, welche vollständig wieder abgegeben wird, wird als **Blindleistung (Q [VAr])** bezeichnet:

Zur Berechnung wird z.B. die Spannung um 90° Phasenverschoben und über die neu entstandene Periode Integriert:

$$Q = \frac{1}{T}\int_0^T p'(t)dt$$

$$Q = \frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{\hat{u}\cdot\sin(\omega t + \varphi_u - 90°)}_{u(\omega t - 90°)} \cdot \underbrace{\hat{\imath}\cdot\sin(\omega t + \varphi_i)}_{i(t)}\, dt$$

$$Q = \frac{1}{T}\int_0^T U_{eff}\cdot I_{eff}\cdot\cos(\varphi - 90°)dt + \frac{1}{T}\int_0^T U_{eff}\cdot I_{eff}\cdot\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i - 90°)dt$$

Die Berechnung erfolgt analog zur Wirkleistungsberechnung auf Folie 6

$$Q = U_{eff}\cdot I_{eff}\cdot\cos(\varphi - 90°)$$

$$\boxed{Q = U_{eff}\cdot I_{eff}\cdot\sin(\varphi)}$$

Aufgabe 6.1.1 Leistungsarten

Durch die Eulerformel können Leistungen bei **sinusförmigen Strömen und Spannungen** in der komplexen Ebene dargestellt werden

$$\underline{U} = U_{eff} e^{j\varphi_u} \qquad \underline{I} = I_{eff} e^{j\varphi_i}$$

In der Elektrotechnik wird die imaginäre Einheit anstelle von i mit j bezeichnet, da i bereits der Stromstärke vorbehalten ist

Die komplexe Scheinleistung wird nun wie folgt berechnet:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^{*}$$

$$\underline{S} = U_{eff} e^{j\varphi_u} \cdot I_{eff} e^{-j\varphi_i}$$

$$\underline{S} = U_{eff} I_{eff} e^{j\underbrace{(\varphi_u - \varphi_i)}_{\varphi}} \quad \Big| \text{ Anwendung der Eulerformel}$$

$$\underline{S} = U_{eff} I_{eff} \cos(\varphi) + j U_{eff} I_{eff} \sin(\varphi)$$

$$\boxed{\underline{S} = \underline{P} + j\underline{Q}}$$

Aufgabe 6.1.1 Leistungsarten

Komplexe Darstellung der Leistungen als Zeigerbild

$$\underline{S} = \underline{P} + j\underline{Q}$$

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

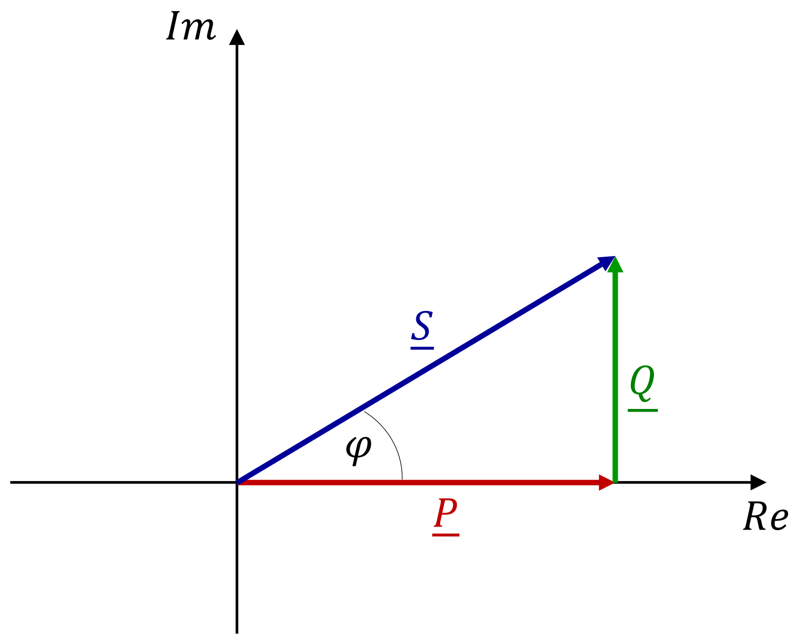

Bild 3: Zeigerdarstellung der komplexen Leistungen

Aufgabe 6.1.2 Leistungsfaktor

Wie berechnet sich der Leistungsfaktor für sinusförmige Größen?

- Der Leistungsfaktor ist das Verhältnis von Wirk- zu Scheinleistung. Er ist somit *ein Maß, wieviel der Scheinleistung als Wirkleistung am Verbraucher umgesetzt wird*

$$\lambda = \frac{P}{S}$$

$$\lambda = \frac{U_{eff} I_{eff} \cos(\varphi)}{U_{eff} I_{eff}} = \cos(\varphi)$$

Beispiele:

- $\lambda = 1$: Die Komplette Scheinleistung wird als Wirkleistung umgesetzt
- $\lambda = 0$: Im System wird keine Wirkleistung umgesetzt
- $\lambda = \frac{1}{2}$: Die hälfte der Scheinleistung wird als Wirkleistung umgesetzt

Aufgabe 6.1.3 Messen von Leistungen

Wie kann aus dem zeitlichen Verlauf von Strom und Spannung die Wirk-, die Schein- und die Blindleistung ermittelt werden? Zeichnen sie Blockschaltbilder.

- Es wird ein Messgerät benötigt, welches die Kurven von Strom und Spannung misst, wie z.B. ein Oszilloskop oder eine digitale Messkarten für den PC

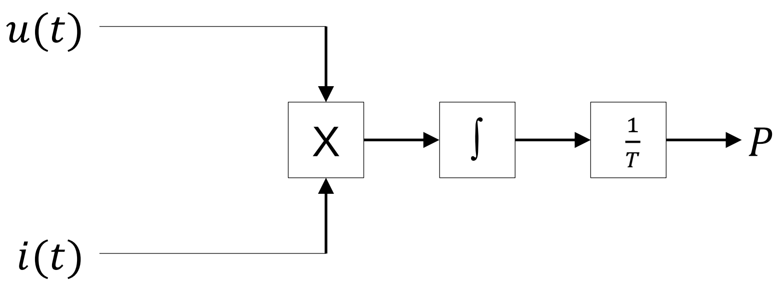

Bild 4: Blockschaltbild zur Messung der Wirkleistung

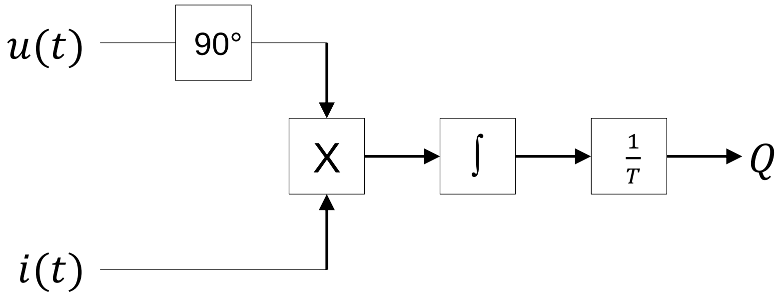

Bild 5: Blockschaltbild zur Messung der Blindleistung. Die Phasenverschiebung um 90° ist in der Praxis aufwendig, daher werden meist alternativen Angewandt wie z.B. die Ermittlung im Dreiphasennetz

Aufgabe 6.1.3 Messen von Leistungen

Wie kann aus dem zeitlichen Verlauf von Strom und Spannung die Wirk-, die Schein- und die Blindleistung ermittelt werden? Zeichnen sie Blockschaltbilder.

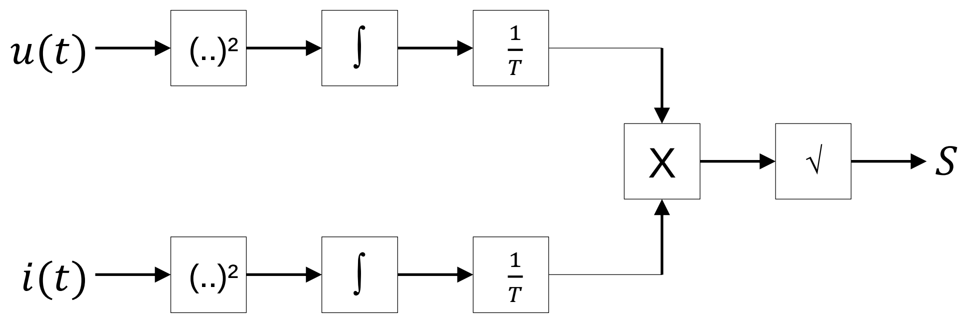

Bild 6: Blockschaltbild zur Messung der Scheinleistung

- Bei einem geeigneten Oszilloskop können die oben dargestellten Schaltungen direkt einprogrammiert und der Leistungsverlauf angezeigt werden

Aufgabe 6.2.1 Dimmer

Beschreiben Sie die Funktionsweise eines Dimmers.

Was ist ein Dimmer?

- Mit einem Dimmer kann die Leistungsübertragung zu einem Verbraucher gesteuert werden. So kann zu Beispiel bei einer Glühlampe die Helligkeit eingestellt werden

Welche Technologie verbirgt sich hinter einem Dimmer?

- Die Leistungsübertragung kann zum Beispiel mittels Phasenanschnitt gesteuert werden. Die Dimmer im MDT-Labor sind sogenannte Phasenanschnittsdimmer

Was bedeutet Phasenanschnitt?

- Verläuft die sinusförmige Wechselspannung durch den Nullpunkt, verhindert eine Elektronik, dass am Verbraucher weiterhin eine Spannung anliegt (durch öffnen des Stromkreises auf der Verbraucherseite). Nach dem Nulldurchgang steigt die Spannung wieder an. Ab einem (einstellbaren) Spannungswert wird diese wieder an den Verbraucher angelegt

Welche Elektronik kommt zum Einsatz

- Es kommen Thyristoren oder Triacsteller zum Einsatz

Aufgabe 6.2.1 Dimmer

Beschreiben Sie die Funktionsweise eines Dimmers.

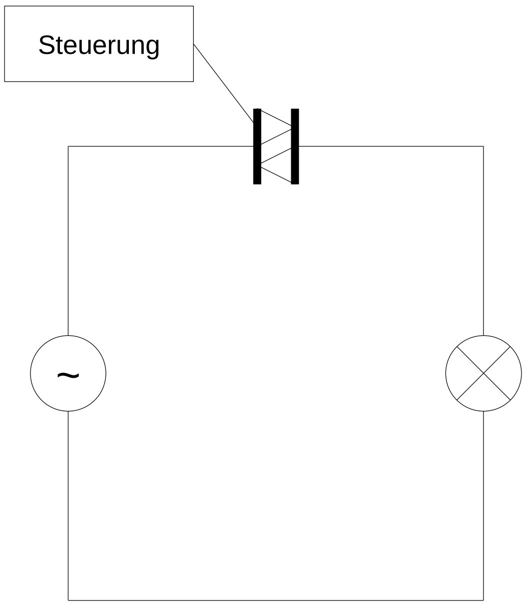

Bild 7: Einfache Dimmerschaltung. Durch die Steuerung kann der Zündwinkel, zu welchem der Stromkreis geschlossen wird eingestellt werden

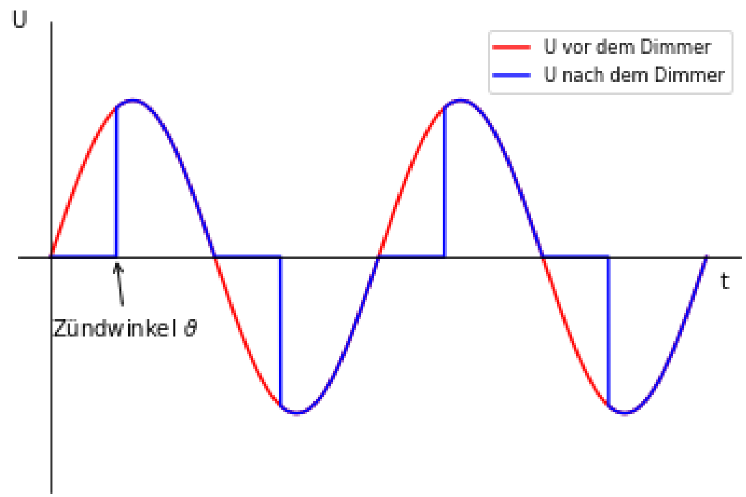

Bild 8: Verlauf der Spannung bei Messung vor und hinter dem Dimmer

Aufgabe 6.2.1 Dimmer

Strom und Spannungsverläufe in einer Schaltung mit Dimmer

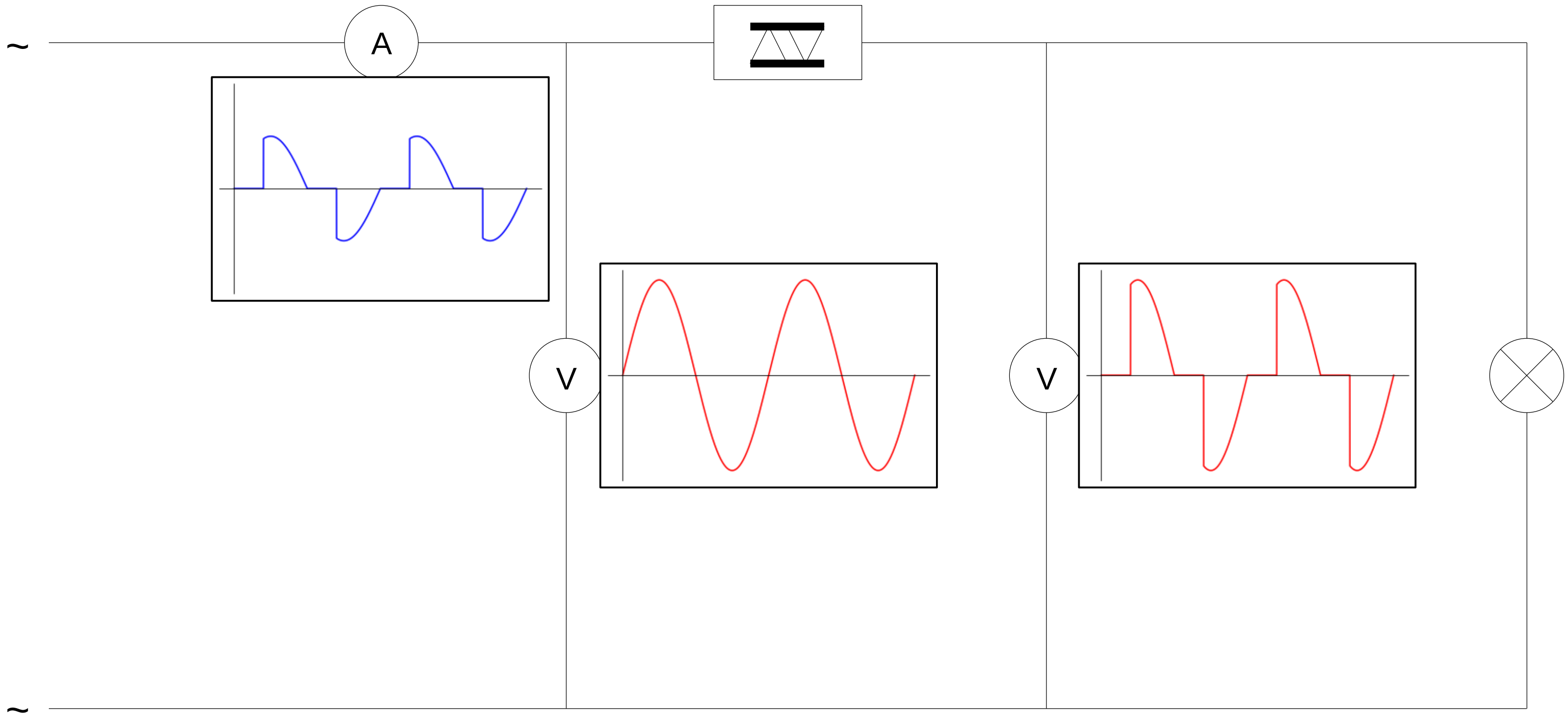

Bild 9: Darstellung der Messergebnisse bei Strom- und Spannungsmessung in einer Schaltung mit Dimmer. Bei der Leistungsmessung sind besonders die sich unterscheidenden Spannungsverläufe vor und hinter dem Dimmer zu beachten. D.h. die Leistungsberechnung unterscheidet sich nach dem Messpunkt der Spannung

Aufgabe 6.2.1 Dimmer

Fallunterscheidung bei der Leistungsberechnung mit und ohne Dimmer und je nach Messpunkt der Spannung:

- 1. Fall: Strom und Spannung sind sinusförmig (Ohne Dimmer oder Zündwinkel bei 0)
- 2. Fall: Spannung ist sinusförmig aber Strom ist nicht-sinusförmig
  - Dimmer vorhanden und Zündwinkel > 0, Messung der Spannung vor dem Dimmer
- 3. Fall Strom und Spannung sind beide nicht-sinusförmig
  - Dimmer vorhanden und Zündwinkel > 0, Messung der Spannung hinter dem Dimmer

Aufgabe 6.2.2 Grundschwingungsblindleistung

- Was versteht man unter der Grundschwingungsblindleistung?
- Wie kann sie gemessen werden?

Fouriertheorem: Jede stetig differenzierbare Funktion, die auf dem Intervall [0,T] definiert ist, lässt sich in eine Funktionenreihe aus Sinus- und Kosinusfunktionen entwickeln

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx + \varphi_n) + b_n sin(nx + \varphi_n]$$

Der Strom nach durch den Dimmer hat keinen Offset. Da der grundlegende Strom sinusförmig ist, ist auch kein Kosinusanteil zu erwarten

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx + \varphi_n)$$

$$\mathrm{i}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\imath}_n \sin(n\omega t + \varphi_{in})$$

Aufgabe 6.2.2 Grundschwingungsblindleistung

Zerlegung des nicht-sinusförmigen Stromes nach Fourier

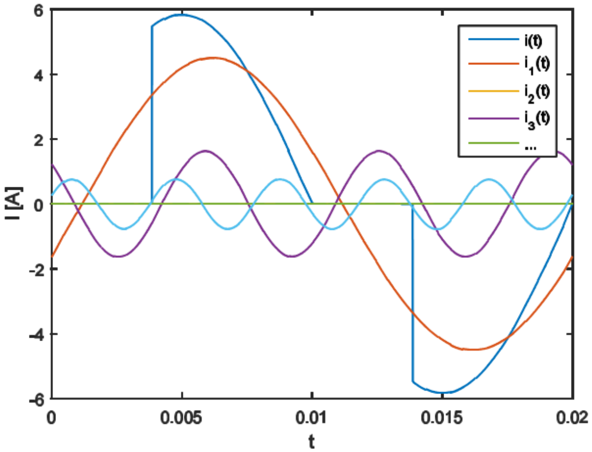

Bild 10: Darstellung des nicht-sinusförmigen Stromflusses mit einer Frequenz von 50Hz über eine Periode (Blau). In Rot ist die sinusförmige Grundschwingung dargestellt sowie in lila und türkis die erste und zweite Oberschwingung

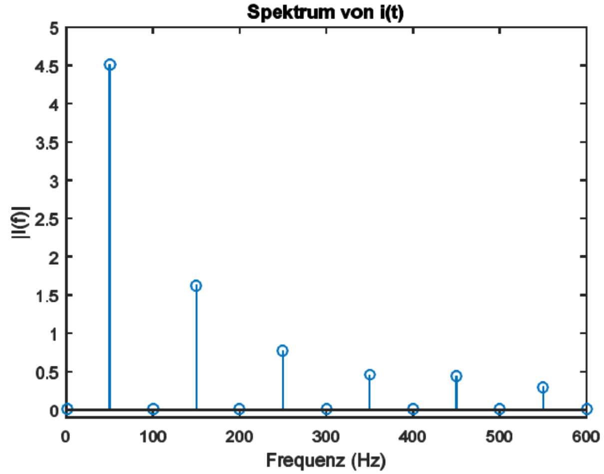

Bild 11: Darstellung des Frequenzspektrums des nicht-sinusförmigen Stromflusses aus Bild 10. Es zeigt sich ein deutlicher Anteil einer Sinusschwingung mit 50Hz (Grundschwingung) und die höherfrequenten Oberwellen

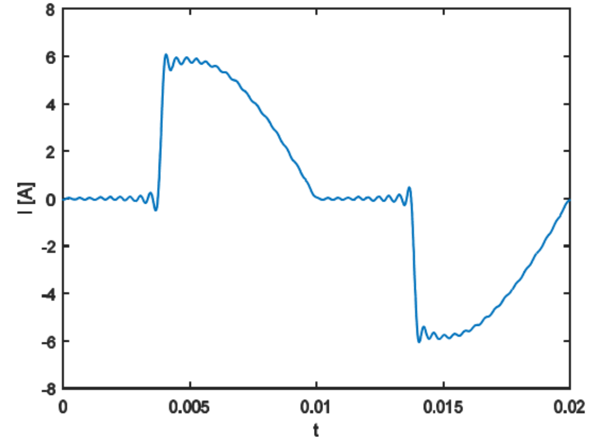

Bild 12: Wird die Fourierreihe nach einem endlichen Term abgebrochen, so ergibt sie nur näherungsweise das ursprüngliche Signal

Aufgabe 6.2.2 Grundschwingungsblindleistung

Berechnung der Grundschwingungsblindleistung

$$\mathrm{i}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\imath}_n \sin(n\omega t + \varphi_{in})$$

Als Grundschwingung wird der erste Summand (n = 1) der Reihenentwicklung bezeichnet:

$$i_1(t) = \hat{\imath}_1 \sin(\omega t + \varphi_{i1})$$

Mit dem Effektivwert

$$I_1 = \frac{\hat{\imath}_1}{\sqrt{2}}$$

Die **Grundschwingungsblindleistung (Q1)** ist jene durch die sinusförmige Spannung und der Grundschwingung des nicht-sinusförmigen Stromes erzeugte Blindleistung

$$\boxed{Q_1 = U \cdot I_1 \cdot \sin(\varphi_{i1})}$$

Aufgabe 6.2.2 Grundschwingungsblindleistung

Wie kann sie gemessen werden?

- Herausfiltern aller Frequenzen oberhalb der Grundfrequenz (z.B. 50Hz)
- zum Beispiel durch einen Tiefpassfilter
- Oder durch mechanische Dämpfung des Messgerätes

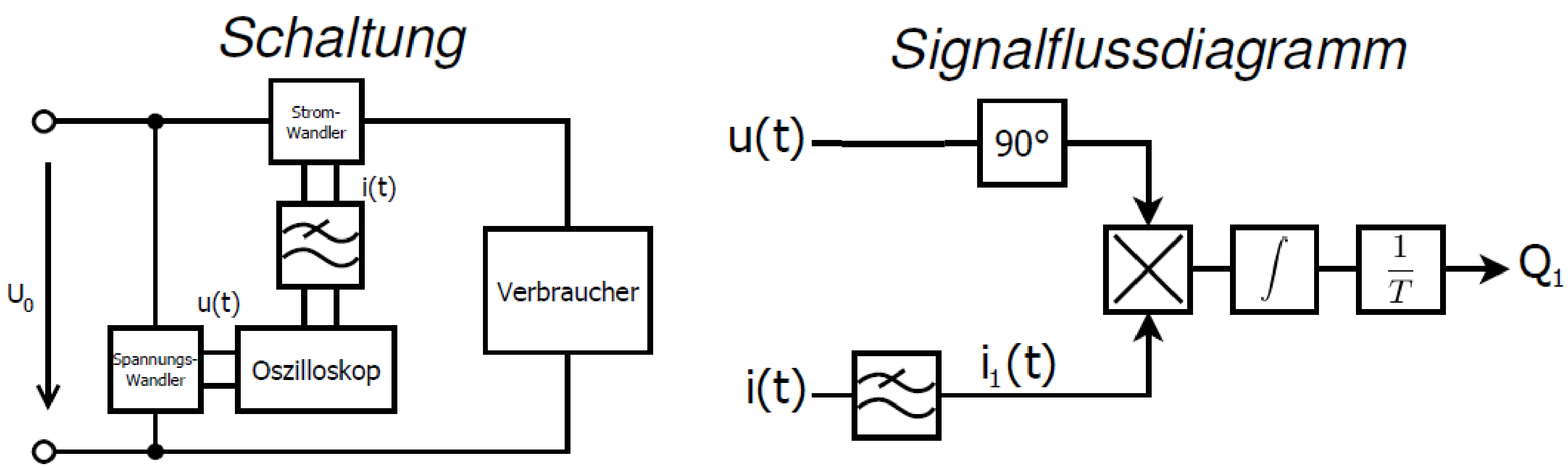

Bild 13: Messung der Grundschwingungs-blindleistung bei nicht-sinusförmigem Strom. Dieser wird zunächst durch einen Tiefpass geleitet, welcher die Oberschwingungen herausfiltert

Aufgabe 6.2.3 Verzerrungsleistung

- Was versteht man unter der Verzerrungsleistung?
- Wann tritt sie auf?

Verzerrungsleistung (D) ist jene Leistung, welche durch die übrigen Summanden der Fourierreihenentwicklung erzeugt werden

$$\mathrm{i}(t) = \underbrace{\hat{\imath}_1 \sin(\omega t + \varphi_{i1})}_{Grundschwingung} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \hat{\imath}_n \sin(n\omega t + \varphi_{in})}_{Verzerrungsschwingungen}$$

$$D = U \cdot \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} I_n^2}$$

$$Q^2 = Q_1^2 + D^2$$

Aufgabe 6.2.3 Verzerrungsleistung

Wann tritt sie auf?

- Wenn der Strom Oberwellen aufweist die Spannung aber nur aus einer Grundschwingung besteht.
- Wenn die Oberwellen von Strom und Spannung phasenverschoben zueinander sind.

Aufgabe 6.2.4 Berechnung von Leistungen bei nichtsinusförmigem Strom

Berechnen Sie Wirk-, Schein- und Blindleistung für eine sinusförmige Spannung und einen nichtsinusförmigen Strom, der von dem Zündwinkel ϑ eines Dimmers abhängt.

Ansetzen der allgemeinen Formel zur Berechnung der Wirkleistung

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

Integration erfolgt über ωt anstellen von t. So kann bei der Perioden Dauer und den Integrationsgrenzen mit Winkeln anstelle von Zeiten gerechnet werden

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega t) \cdot i(\omega t) \cdot d\omega t$$

Aufgabe 6.2.4 Berechnung von Leistungen bei nichtsinusförmigem Strom

Wir nehmen an, dass der Verbraucher eine rein ohmsche Last ist, und somit keine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung auftritt. Hierdurch ist die Leistung ausschließlich positiv mit doppelter Frequenz. Es reicht also über eine halbe Periode zu Integrieren und das Ergebnis zu verdoppeln

$$P = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} u(\omega t) \cdot i(\omega t) \cdot d\omega t$$

Bis zum Zündwinkel ist der Strom 0. Somit tritt auch keine Leistung auf. Es reicht also aus erst ab dem Zündwinkel zu Integrieren

$$P = \frac{1}{\pi} \int_{\vartheta}^{\pi} u(\omega t) \cdot i(\omega t) \cdot d\omega t$$

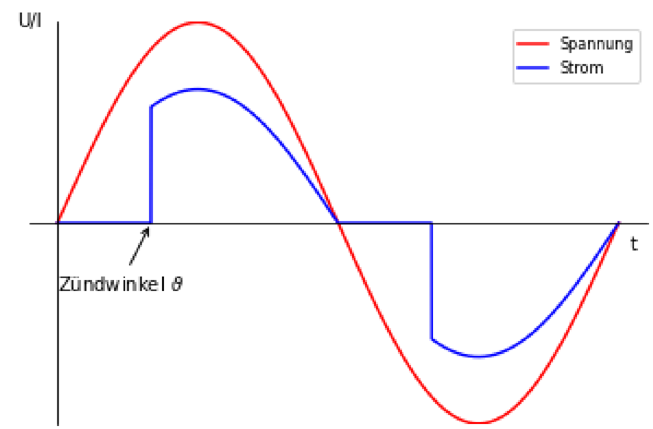

Bild 14: Verlauf von Strom und Spannung

Aufgabe 6.2.4 Berechnung von Leistungen bei nichtsinusförmigem Strom

Berechnung der Wirkleistung

$$P(\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi} u(\omega t) \cdot i(\omega t) \cdot d\omega t$$

$$P(\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi} \hat{u} \cdot \hat{\imath} \cdot sin^2(\omega t) \cdot d\omega t$$

$$P(\vartheta) = \frac{\hat{u} \cdot \hat{\imath}}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t))d\omega t$$

$$P(\vartheta) = \frac{\hat{u}\hat{\imath}}{2\pi}\left[\omega t - \frac{1}{2}\sin(2\omega t)\right]_{\vartheta}^{\pi}$$

$$P(\vartheta) = \frac{\hat{u}\hat{\imath}}{2\pi}\left[(\pi - 0) \ - (\vartheta - \frac{1}{2}\sin(2\vartheta))\right]$$

$$\boxed{P(\vartheta) = \frac{\hat{u}\hat{\imath}}{2\pi}\left[\pi - \vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]}$$

Aufgabe 6.2.4 Berechnung von Leistungen bei nichtsinusförmigem Strom

Berechnung der Scheinleistung

Die Scheinleistung wird gemäß der hergeleiteten Formel bestimmt:

$$S(\vartheta) = U_{eff} \cdot I_{eff}(\vartheta)$$

mit

$$U_{eff} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \qquad \text{und} \qquad I_{eff}(\vartheta) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} i^2(\omega t, \vartheta)\,d\omega t}$$

Wie bei der Wirkleistungsmessung auf Folie 24 kann in einem Halbintervall ab dem Zündwinkel Integriert werden

$$I_{eff}(\vartheta) = \sqrt{\frac{\hat{\imath}^2}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi} sin^2(\omega t)\,d\omega t}$$

$$I_{eff}(\vartheta) = \sqrt{\frac{\hat{\imath}^2}{2\pi}\int_{\vartheta}^{\pi} (1 - \cos(2\omega t))\,d\omega t}$$

Aufgabe 6.2.4 Berechnung von Leistungen bei nichtsinusförmigem Strom

Berechnung des Effektivwertes des Stromes für die Bestimmung der Scheinleistung

$$I_{eff}(\vartheta) = \sqrt{\frac{\hat{\imath}^2}{2\pi}\left[\omega t - \frac{1}{2}\sin(2\omega t)\right]_{\vartheta}^{\pi}}$$

$$I_{eff}(\vartheta) = \sqrt{\frac{\hat{\imath}^2}{2\pi}\left[\pi - \vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]}$$

$$I_{eff}(\vartheta) = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{\pi}\left[\pi - \vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]}$$

Berechnung der Scheinleistung

$$S(\vartheta) = U_{eff} \cdot I_{eff}(\vartheta)$$

$$S(\vartheta) = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{\pi}\left[\pi - \vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]}$$

$$\boxed{S(\vartheta) = \frac{\hat{u}\hat{\imath}}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}\left[\pi - \vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]}}$$

Berechnung der Blindleistung

Die Blindleistung kann gemäß der geometrischen Subtraktion erfolgen

$$Q^2(\vartheta) = S^2(\vartheta) - P^2(\vartheta)$$

$$Q^2(\vartheta) = \left[\frac{\hat{u}\hat{\imath}}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}\left[\pi - \vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]}\right]^2 - \left[\frac{\hat{u}\hat{\imath}}{2\pi}\left[\pi - \vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]\right]^2$$

$$Q^2(\vartheta) = \left(\frac{\hat{u}\hat{\imath}}{2}\right)^2 \left\{\frac{1}{\pi}\left[\pi - \vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right] - \frac{1}{\pi^2}\left[\pi - \vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]^2\right\}$$

$$Q^2(\vartheta) = \left(\frac{\hat{u}\hat{\imath}}{2}\right)^2 \left[\pi - \vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]\left\{\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi^2}\left[\pi - \vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]\right\}$$

$$Q^2(\vartheta) = \left(\frac{\hat{u}\hat{\imath}}{2\pi}\right)^2 \left[\pi - \vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]\left\{\pi - \left[\pi - \vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]\right\}$$

Aufgabe 6.2.4 Berechnung von Leistungen bei nichtsinusförmigem Strom

Berechnung der Blindleistung

$$Q^2(\vartheta) = \left(\frac{\hat{u}\hat{\imath}}{2\pi}\right)^2 \left[\pi - \vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]\left[\vartheta - \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]$$

$$\boxed{Q(\vartheta) = \left(\frac{\hat{u}\hat{\imath}}{2\pi}\right)\sqrt{\left[\pi - \vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]\left[\vartheta - \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]}}$$

Aufgabe 6.2.4 Leistungsfaktor

Wie berechnet man den Leistungsfaktor in Abhängigkeit vom Zündwinkel J?

Der Leistungsfaktor ist das Verhältnis von Wirk- zu Blindleistung

$$\lambda(\vartheta) = \frac{P(\vartheta)}{S(\vartheta)} = \frac{\frac{\hat{u}\hat{\imath}}{2\pi}\left[\pi-\vartheta+\frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]}{\frac{\hat{u}\hat{\imath}}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}\left[\pi-\vartheta+\frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]}}$$

$$\lambda(\vartheta) = \frac{\frac{1}{\pi}}{\sqrt{\frac{1}{\pi}}} \cdot \left[\pi - \vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]^{1} \cdot \left[\pi - \vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lambda(\vartheta) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot \left[\pi - \vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]^{1-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\lambda(\vartheta) = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \left[\pi - \vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]}}$$

Aufgabe 6.3.1 Spannungen im Dreiphasennetz

Stellen sie die Spannungsverläufe in einem Dreiphasennetz über der Zeit und als komplexe Spannungszeiger dar.

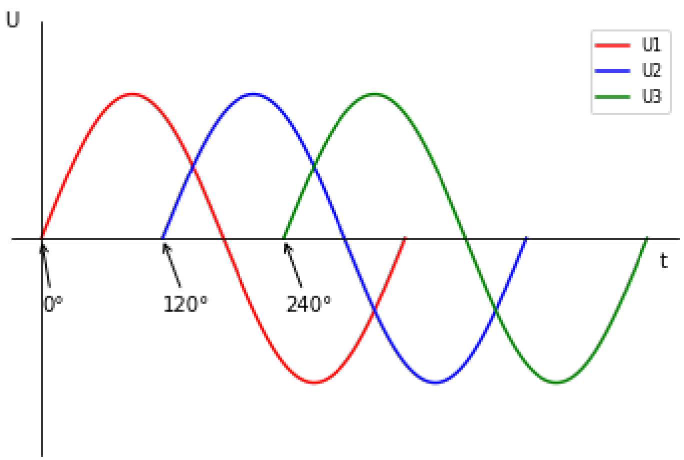

Bild 15: Im Dreiphasennetz verlaufen drei unabhängig voneinander generierte Spannungen mit jeweils 120° Phasenverschiebung zueinander. Durch Zusammenschluss eines Pols aller drei Spannungen bilden diese ein Zusammenhängendes System

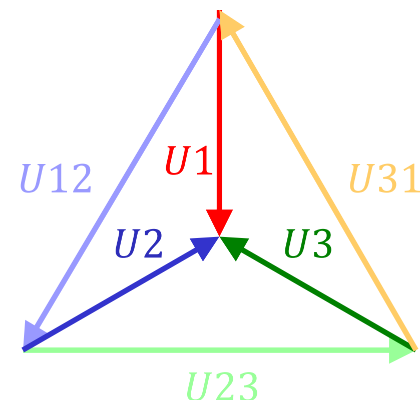

Bild 16: Die drei Spannungen als komplexe Zeigerdarstellung U1/U2/U3 haben jeweils einen 120° Winkel zueinander und zeigen auf den gleichen Punkt. Die Spannungen der drei Phasen untereinander haben jeweils einen um $\sqrt{3}$ höheren Effektivwert.

Aufgabe 6.3.2 Blindleistungsmessung

Wie kann man ohne aufwendige Phasendreherschaltung mit Hilfe des Dreiphasennetzes einfach die Blindleistung messen?

Aus dem Leistungsdreieck lässt sich ablesen, dass für jede Spannung U1/U2/U3 jeweils eine Spannung U12/U23/U31 existiert, welche 90° Phasenverschoben ist.

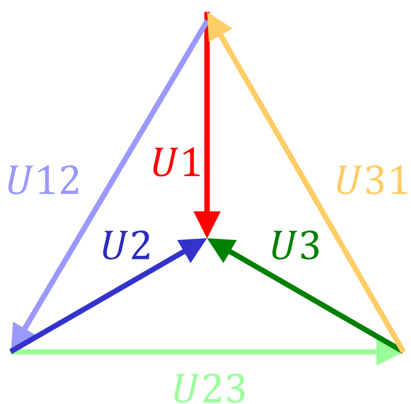

Bild 17: Das Leistungsdreieck

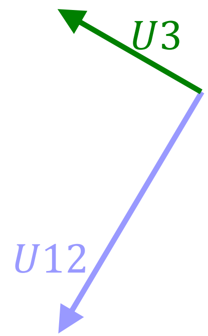

Bild 18: zu U3 ist U12 90° Phasenverschoben

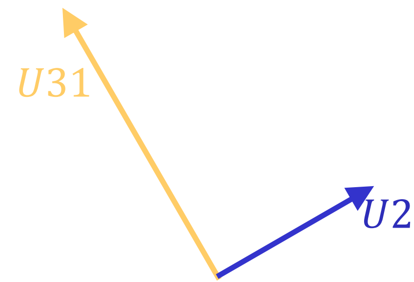

Bild 19: zu U2 ist U31 90° Phasenverschoben

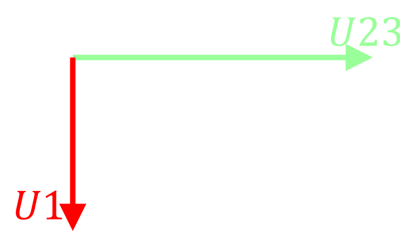

Bild 20: zu U1 ist U23 90° Phasenverschoben

Aufgabe 6.3.2 Blindleistungsmessung

Somit kann der Phasenverlauf der jeweiligen Spannung als Referenz für die Blindleistungsmessung genommen werden

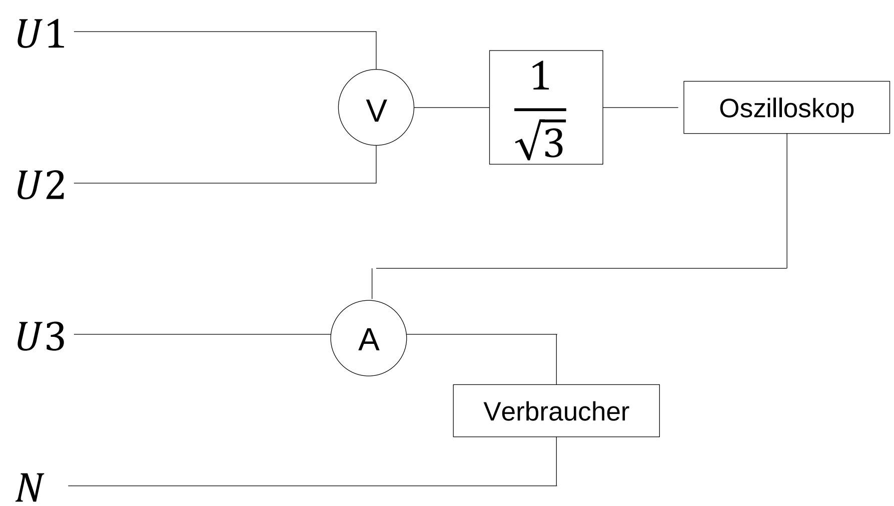

Bild 21: Beispiel für die Blindleistungsmessung im Dreiphasennetz. In diesem Fall soll die Blindleistung eines Verbrauchers an U3 bestimmt werden. Zu U3 ist U12 um 90° Phasenverschoben und kann somit zur Blindleistungsmessung herangezogen werden. U13 ist jedoch um $\sqrt{3}$ höher als U3 sodass dieser Faktor vorher herausgerechnet werden muss. In einem geeigneten Oszilloskop lässt sich dies direkt einprogrammieren

Aufgabe 6.4.1 Unsicherheitsfortpflanzung

Wieso ist die Unsicherheitsfortpflanzung bei der Leistungsmessung zu berücksichtigen?

Bei der Leistungsmessung kommen oft mehrere Messgeräte zum Einsatz (Volt-/Amperemeter) und die Messungen werden miteinander verrechnet. Jedes Messgerät hat jedoch einen gewissen Messfehler, sodass sich die Frage stellt wie der Fehler bei der Berechnung des Endergebnisses auf dieses einwirkt

Wie lautet das Gesetz zur Unsicherheitsfortpflanzung?

Das allgemeine Gesetzt zur Unsicherheitsfortpflanzung lautet

$$u_y = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} u_i \right)^2$$

- u_y beschreibt die Gesamtunsicherheit
- $y = f(x_1, \dots, x_n)$ beschreibt das Messergebnis
- u_i beschreibt die Unsicherheit bezogen auf eine Messgröße. Diese wird i.d.R. vom Hersteller ermittelt

Aufgabe 6.4.1 Unsicherheitsfortpflanzung

Leiten Sie Beziehungen für die Unsicherheit des Ergebnisses bei Addition und Multiplikation her

Addition:

$$y = x_1 + x_2$$

$$u_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} u_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} u_2\right)^2$$

$$u_y^2 = (1 \cdot u_1)^2 + (1 \cdot u_2)^2$$

$$u_y^2 = {u_1}^2 + {u_2}^2$$

$$\boxed{u_y = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2}}$$

Der Gesamtfehler ergibt sich durch geometrische Addition der Einzelfehler

Aufgabe 6.4.1 Unsicherheitsfortpflanzung

Leiten Sie Beziehungen für die Unsicherheit des Ergebnisses bei Addition und Multiplikation her

Multiplikation:

$$y = x_1 x_2$$

$$u_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} u_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} u_2\right)^2$$

$$u_y^2 = (x_2 \cdot u_1)^2 + (x_1 \cdot u_2)^2$$

$$\boxed{u_y = \sqrt{(x_2 \cdot u_1)^2 + (x_1 \cdot u_2)^2}}$$

Der Gesamtfehler ergibt sich durch geometrische Addition der Einzelfehler multipliziert mit den Messwerten

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Prof. Dr.-Ing. Clemens Gühmann
Daniel Thomanek, M. Sc.

Technische Universität Berlin
Fakultät IV Elektrotechnik und Informatik
Institut für Energie und Automatisierungstechnik
Fachgebiet Elektronische Mess- und Diagnosetechnik

Literatur

[1] (2007) Wechselstromtechnik. In: Elektrotechnik für Ingenieure 2. Vieweg.

https://doi.org/10.1007/978-3-8348-9172-3_1