2 Regression und Interpolation

Lernziele

- Regression
- lineare Interpolation
- Spline-Interpolation

Präsenzaufgaben

2.1 Regression

2.1.1 Regression

- Was ist (lineare) Regression?
- Wofür wird sie eingesetzt?

2.1.2 Methode der kleinsten Quadrate

- Wie berechnen sich die Koeffizienten einer linearen Kennline nach der Methode der kleinsten Quadrate?
- Führen Sie mit den in der Tabelle gegebenen Werten eine lineare Regression durch, wobei die Gerade mittels der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt werden soll.

x $[T\ in\ °C]$	0	20	40	60	80
y $[R\ in\ \Omega]$	1,7	1,1	0,75	0,5	0,4

2.2 Interpolation

2.2.1 Interpolation

- Was ist Interpolation?
- Wie unterscheidet sie sich von der Regression?
- Wofür wird die Interpolation eingesetzt?
- Welche Methoden gibt es?

2.2.2 Spline-Interpolation

- Was ist Spline-Interpolation?
- Welchen Vorteil hat sie gegenüber der linearen Interpolation?
- Welche Bedingungen werden an die Interpolierende gestellt?

2.2.3 kubische Splines

Interpolieren Sie die gegebenen Daten auf dem Intervall $[20, 40]$. Verwenden Sie hierzu:

1. eine lineare Interpolierende
2. einen kubischen Spline

x $[T\ in\ ^\circ C]$	0	20	40	60	80
y $[R\ in\ \Omega]$	1,7	1,1	0,75	0,5	0,4
y'' $[\frac{d^2x}{dy^2}\ in\ \frac{\Omega}{^\circ C}]$	0	$9,375 \cdot 10^{-4}$	0	$5,625 \cdot 10^{-4}$	0

Zusatzaufgaben

2.2.4 Kennlinie eines NTC-Widerstandes

Die Messung des Widerstandes in Abhängigkeit der Temperatur an einem NTC-Widerstand ergab die Messwertpaare aus Tabelle 2.1

Tabelle 2.1: Messwerte einer NTC-Kennlinie

Index i	0	1	2	3	4
$\theta_i\,[^\circ C]$	0	20	40	60	120
$R_i\,[\Omega]$	$1,7$	$1,1$	$0,75$	$0,5$	$0,2$

Der Zusammenhang zwischen Widerstand und Temperatur sei durch folgende Beziehung

$$R(\theta) = A\exp\left(\frac{B}{\theta + 273,15\,\mathrm{K}}\right) \tag{2.1}$$

gegeben. Mit Hilfe der Interpolation (linear bzw. kubische Splines) sowie der linearen Regression sollen die Paramter für unterschiedliche Darstellungen der nichtlinearen Kennlinienfunktion R(J) gefunden werden. Dazu werden die Stützstellen laut Tabelle 2.1 herangezogen.

1. Berechnen Sie mit den Stützstellen (i, R_i), $\quad i = 0\ldots4$ die lineare Interpolierende der Funktion $R(\theta)$.

   Ergebnis: $R_{lin}(\theta) = \begin{cases} -3,00\cdot10^{-2}\,\Omega/\mathrm{K}\cdot\theta & + \quad 1,7\,\Omega \quad ,0^\circ\mathrm{C} \le \theta < 20^\circ\mathrm{C} \\ -1,75\cdot10^{-2}\,\Omega/\mathrm{K}\cdot(\theta-20\,\mathrm{K}) & + \quad 1,1\,\Omega \quad ,20^\circ\mathrm{C} \le \theta < 40^\circ\mathrm{C} \\ -1,25\cdot10^{-2}\,\Omega/\mathrm{K}\cdot(\theta-40\,\mathrm{K}) & + \quad 0,75\,\Omega \quad ,40^\circ\mathrm{C} \le \theta < 60^\circ\mathrm{C} \\ -0,50\cdot10^{-2}\,\Omega/\mathrm{K}\cdot(\theta-60\,\mathrm{K}) & + \quad 0,5\,\Omega \quad ,60^\circ\mathrm{C} \le \theta \le 120^\circ\mathrm{C} \end{cases}$

2. Berechnen Sie mit den Stützstellen (i, R_i), $\quad i = 0\ldots4$ die kubische Spline-Interpolierende der Funktion $R(\theta)$.

   Ergebnis: $R_{spl}(\theta) = \begin{cases} 7,65\cdot10^{-6}\,\Omega/\mathrm{K}^3\cdot\theta^3 & & - \; 3,31\cdot10^{-2}\,\Omega/\mathrm{K}\cdot\theta & + \; 1,7\,\Omega & ,0^\circ\mathrm{C} \le \theta < 20^\circ\mathrm{C} \\ -7,00\cdot10^{-6}\,\Omega/\mathrm{K}^3\cdot\theta^3 & + \; 4,59\cdot10^{-4}\,\Omega/\mathrm{K}^2\cdot\theta^2 & - \; 2,39\cdot10^{-2}\,\Omega/\mathrm{K}\cdot\theta & + \; 1,1\,\Omega & ,20^\circ\mathrm{C} \le \theta < 40^\circ\mathrm{C} \\ 1,62\cdot10^{-6}\,\Omega/\mathrm{K}^3\cdot\theta^3 & + \; 0,39\cdot10^{-4}\,\Omega/\mathrm{K}^2\cdot\theta^2 & - \; 1,39\cdot10^{-2}\,\Omega/\mathrm{K}\cdot\theta & + \; 0,75\,\Omega & ,40^\circ\mathrm{C} \le \theta < 60^\circ\mathrm{C} \\ -0,75\cdot10^{-6}\,\Omega/\mathrm{K}^3\cdot\theta^3 & + \; 1,36\cdot10^{-4}\,\Omega/\mathrm{K}^2\cdot\theta^2 & - \; 1,04\cdot10^{-2}\,\Omega/\mathrm{K}\cdot\theta & + \; 0,5\,\Omega & ,60^\circ\mathrm{C} \le \theta < 120^\circ\mathrm{C} \end{cases}$

3. Bestimmen Sie die Parameter A und B mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. (**Hinweis**: Überführen Sie zuerst Gleichung 2.1 mit Hilfe einer Transformation in eine lineare Gleichung)

   Ergebnis: $A = 1,5\,\mathrm{m}\Omega$, $B = 1924,7\,\mathrm{K}$

4. Vergleichen Sie die in den drei vorangehenden Teilaufgaben ermittelten Kennlinien grafisch mit der "wahren" Kennlinie des NTC. Die "wahren" Parameter des NTC seien $B = 1976,7\,\mathrm{K}$ und $A = 1,3\,\mathrm{m}\Omega$. Diskutieren sie die Vor- und Nachteile der drei verschiedenen Verfahren im Bezug auf diese Anwendung.

2.2.5 Sinus-Fitting

Eine in der Messtechnik oft vorkommende Aufgabe ist es, eine Sinus-Kurve durch einen aufgenommenen, möglicherweise mit Rauschen behafteten, Satz von Messwerten zu fitten. Dies ist z.B. beim Testen von ADUs der Fall (siehe IEEE Std. 1057-2007 „Standard for Digitizing Waveform Recorders").

Hierbei wird meist von dem folgen Signalmodel ausgegangen:

$$y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t + C$$

Ist die Frequenz ω des Signals bekannt, so können die Parameter A, B, C mittels einer linearen Regression aus einem Satz von Messdaten geschätzt werden.

In Tabelle 2.2 sind Messwerte einer verrauschten Sinuskurve mit einer Frequenz von angegeben ($\omega = 2\pi \cdot 50\,\mathrm{Hz}$).

Tabelle 2.2: Aufgenommene Messwerte

Index i	0	1	2	3	4
t_i [ms]	0	4	8	12	16
y_i [V]	$0,7$	$1,2$	$0,7$	$-0,1$	-0.1

1. Stellen Sie ein (überbestimmtes) lineares Gleichungssystem für die Schätzung der Parameter A, B, C in der Form $\underline{y} = \underline{X} \cdot \underline{a} + \underline{\varepsilon}$ auf.

   Ergebnis: $\underline{y} = \underline{X} \cdot \underline{a} + \underline{\varepsilon}$ *mit*

   $\underline{y} = (y_0, \ldots, y_n)^T$, $\underline{a} = (A, B, C)^T$, $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n)^T$, $\underline{X} = \begin{pmatrix} \cos\omega t_0 & \sin\omega t_0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos\omega t_n & \sin\omega t_n & 1 \end{pmatrix}$

2. Berechnen Sie eine Schätzung der Parameter A, B, C mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate

   Ergebnis: $A = 0,2\,\mathrm{V}$, $B = 0,7\,\mathrm{V}$, $C = 0,5\,\mathrm{V}$

3. Berechnen Sie Summe der Fehlerquadrate Q sowie den Effektivwert der Abweichung *RMSE* zwischen den Messwerten und der gefitteten Sinuskurve

   Ergebnis: $Q = 12 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{V}^2$, $RMSE = 1,6\,\mathrm{mV}$

4. Stellen Sie die gefittete Sinuskurve nun in der Form $y(t) = \widehat{a}\cos(\omega t + \phi) + C$ dar. Berechnen Sie hierzu die Amplitude $\widehat{a}$ und die Phase ϕ der Kurve.

   Ergebnis: $\widehat{a} = 0,7\,\mathrm{V}$, $\phi = -1,3\,\mathrm{rad}$