Grundlagen der elektronischen Messtechnik

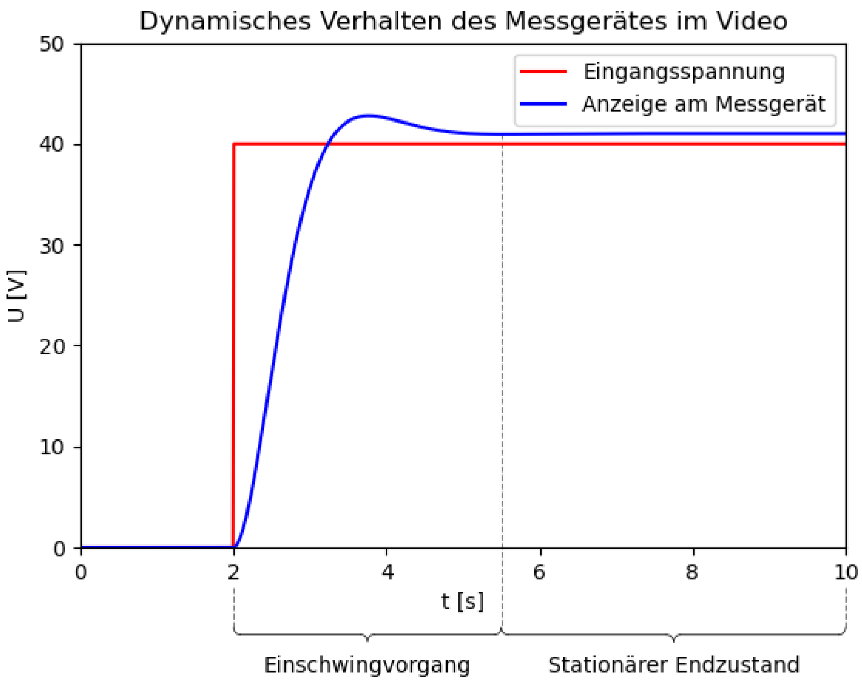
Übung 4: Dynamische Eigenschaften von Messsystemen

Prof. Dr.-Ing. Clemens Gühmann
Daniel Thomanek, M. Sc.

Technische Universität Berlin
Fakultät IV Elektrotechnik und Informatik
Institut für Energie und Automatisierungstechnik
Fachgebiet Elektronische Mess- und Diagnosetechnik

Aufgabe 4.1. Dynamisches Verhalten

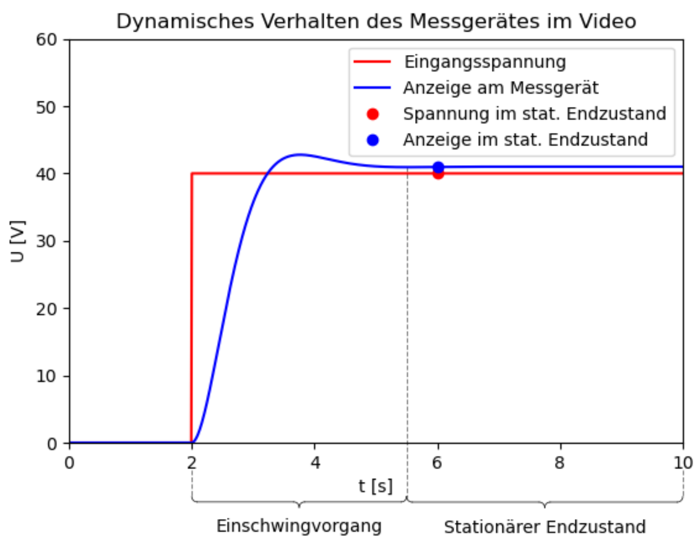
Wie verhält sich das Messgerät (als Beispiel für ein Messsystem) wenn eine Spannung von 40V an den Messspitzen angelegt wird?



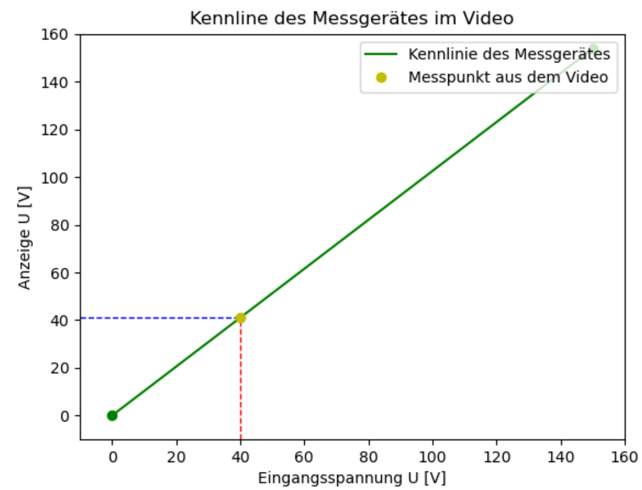
Aufgabe 4.1. Dynamisches Verhalten

Wie verhält sich das Messgerät (als Beispiel für ein Messsystem) wenn eine Spannung von 40V an den Messspitzen angelegt wird?

Dynamische Verhalten



Statisches Verhalten



Aufgabe 4.2. Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion ist das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangssignal im

Laplace-Bereich an: $G(s) = \frac{U_a}{U_e}$

Beispiel: Herleitung für einen RC-Hochpass:

$$u_e = u_c + u_a$$

$$u_e = \frac{1}{C}\int i \cdot dt + u_a$$

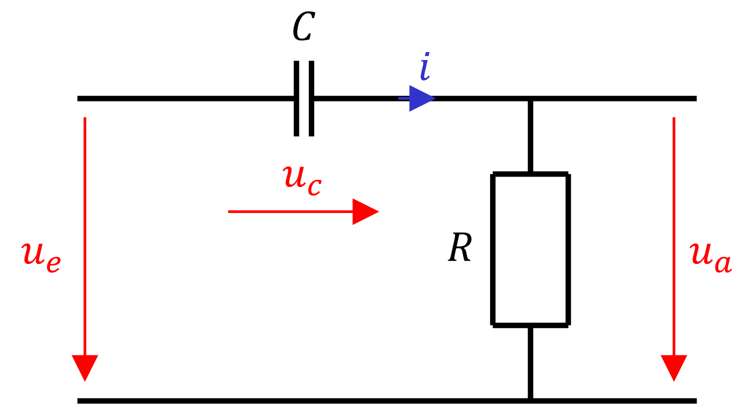
$$u_e = \frac{1}{C}\int \frac{u_a}{R} \cdot dt + u_a$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$U_e = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{U_a}{R} + u_a$$

$$U_e = U_a\left(\frac{1}{RCs} + 1\right) \quad | \; \tau = RC$$

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\tau s}}$$



Differentialgleichung des Kondensators:

- $i = C \cdot \frac{du_c}{dt} \quad \Rightarrow \quad u_c = \frac{1}{C}\int i \cdot dt$

Aufgabe 4.2. Übertragungsfunktion

Beispiel: Ermittlung der Übertragungsfunktion eines Butterworth Filters aus der Referenztabelle:

Aus der Aufgabenbeschreibung:

- Ordnung: 2
- Grenzfrequenz: $f_g = 1\,kHz \implies \omega_g = 2 \cdot \pi \cdot 1kHz$
- Verstärkung: $\mathrm{V} = A_0 = 1$

N	i	a_i	b_i
1	1	1,0000	0,0000
2	1	$\sqrt{2}$	1,0000
3	1	1,0000	0,0000
	2	1,0000	1,0000
4	1	1,8478	1,0000
	2	0,7654	1,0000
5	1	1,0000	0,0000
	2	1,6180	1,0000
	3	0,6180	1,0000

Gleichung für die Übertragungsfunktion eines Butterworth Filters:

- $G(s) = \frac{A_0}{\prod_{\forall i}(1+a_i \cdot P+b_i \cdot P^2)} \mid P = \frac{s}{\omega_g}$

$\rightarrow$ Die a_i und b_i werden der Referenztabelle entnommen

Aufgabe 4.2. Übertragungsfunktion

Beispiel: Ermittlung der Übertragungsfunktion eines Butterworth Filters aus der Referenztabelle

N	i	a_i	b_i
1	1	1,0000	0,0000
2	1	$\sqrt{2}$	1,0000
3	1	1,0000	0,0000
	2	1,0000	1,0000
4	1	1,8478	1,0000
	2	0,7654	1,0000
5	1	1,0000	0,0000
	2	1,6180	1,0000
	3	0,6180	1,0000

$$a_1 = \sqrt{2}$$
$$b_1 = 1{,}0000$$

$$G(s) = \frac{A_0}{\prod_{\forall i}(1 + a_i \cdot P + b_i \cdot P^2)} \mid P = \frac{s}{\omega_g}$$

$$G(s) = \frac{1}{1 + \sqrt{2} \cdot \frac{s}{2\pi 1kHz} + 1 \cdot \left(\frac{s}{2\pi 1kHz}\right)^2}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2\pi} 10^{-3} s \cdot sec + \frac{1}{4\pi^2} 10^{-6} s^2 \cdot sec^2}}$$

Aufgabe 4.2. Übertragungsfunktion

Beispiel: Ermittlung der Übertragungsfunktion eines Butterworth Filters aus der Referenztabelle

N	i	a_i	b_i
1	1	1,0000	0,0000
2	1	$\sqrt{2}$	1,0000
3	1	1,0000	0,0000
	2	1,0000	1,0000
4	1	1,8478	1,0000
	2	0,7654	1,0000
5	1	1,0000	0,0000
	2	1,6180	1,0000
	3	0,6180	1,0000

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 &= 1{,}0000 \\ b_1 &= 0{,}0000 \\ a_2 &= 1{,}0000 \\ b_2 &= 1{,}0000 \end{aligned}}$$

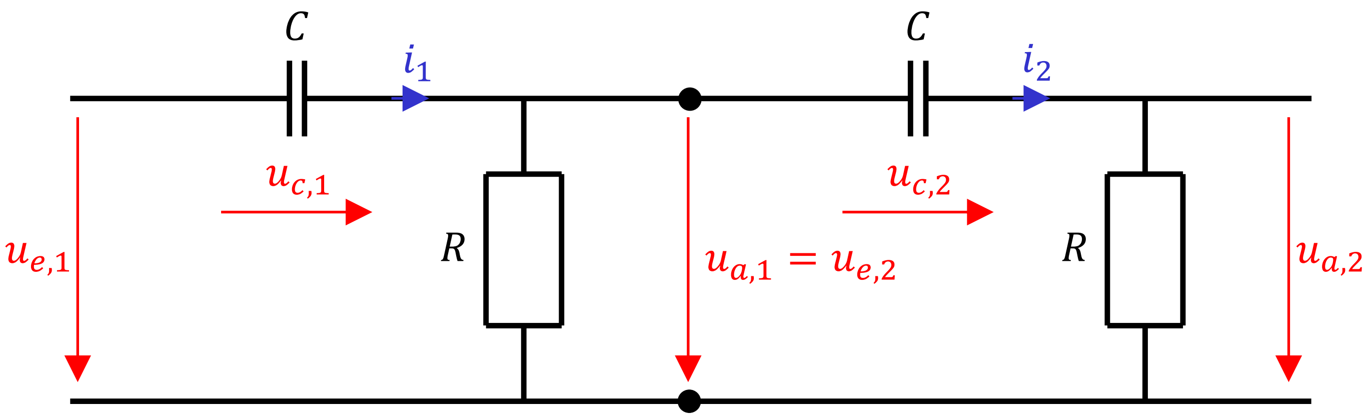
$$G(s) = \frac{A_0}{\prod_{\forall i}(1 + a_i \cdot P + b_i \cdot P^2)} \mid P = \frac{s}{\omega_g}$$

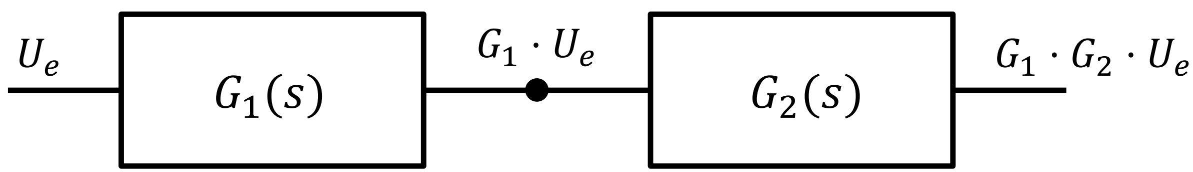
$$G(s) = \frac{1}{(1 + 1P + 0P^2) \cdot (1 + 1P + 1P^2)}$$

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + 1\frac{s}{2\pi 1kHz}\right) \cdot \left(1 + 1\frac{s}{2\pi 1kHz} + 1\left(\frac{s}{2\pi 1kHz}\right)^2\right)}$$

Aufgabe 4.2. Übertragungsfunktion

Reihenschaltung im Laplacebereich

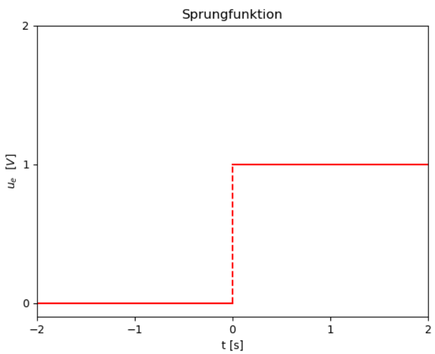


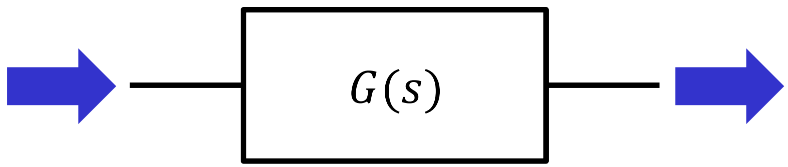


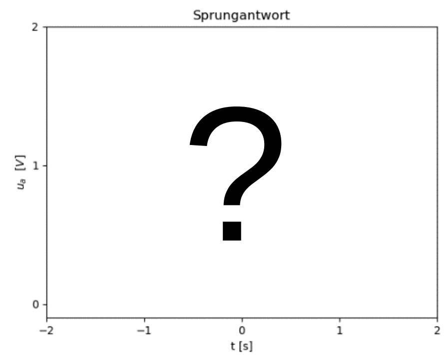
$$G_{ges}(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

Aufgabe 4.3. Sprungantwort

Die Sprungantwort eines Systems ist das Ausgangssignal, welches als Reaktion auf eine Sprungfunktion als Eingangssignal entsteht







$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\Sigma(s) = \frac{1}{s}$$

$$U_a = G(s)U_e$$

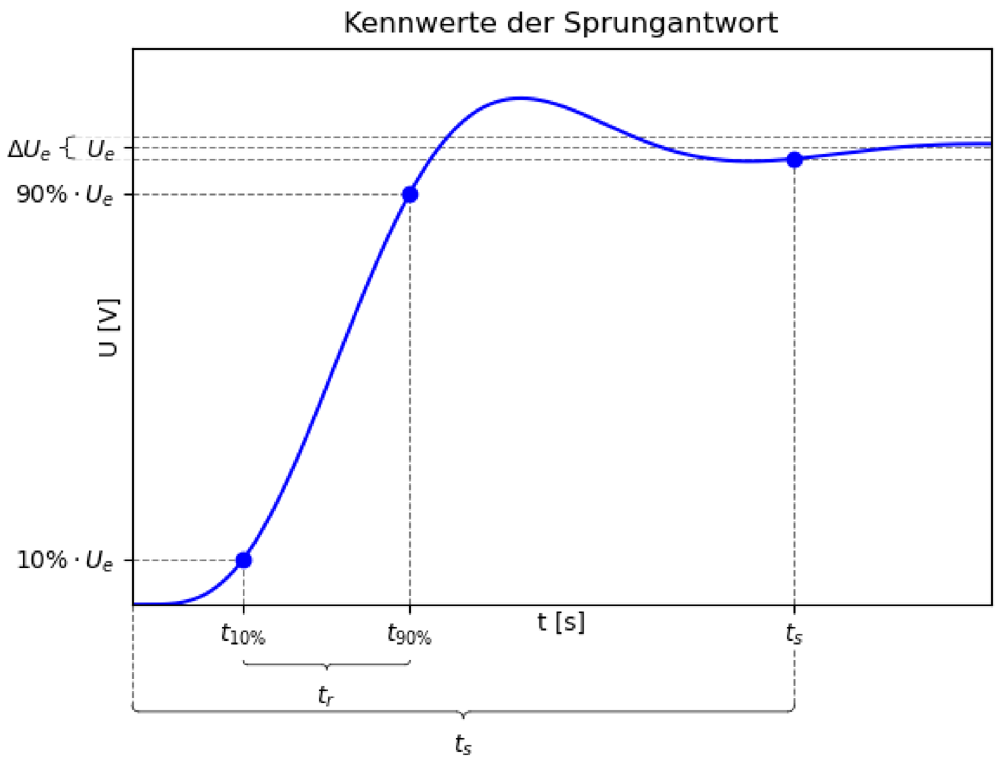
$$U_a = G(s)\frac{1}{s}$$

$$U_a = \frac{G(s)}{s}$$

$$u_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$

Aufgabe 4.3. Sprungantwort

Typische Sprungantwort eines Systems 2. Ordnung



ΔU_e: Toleranzband
- Bereich in welchem der Wert der Sprungantwort als ausreichend nah am Endwert angesehen wird

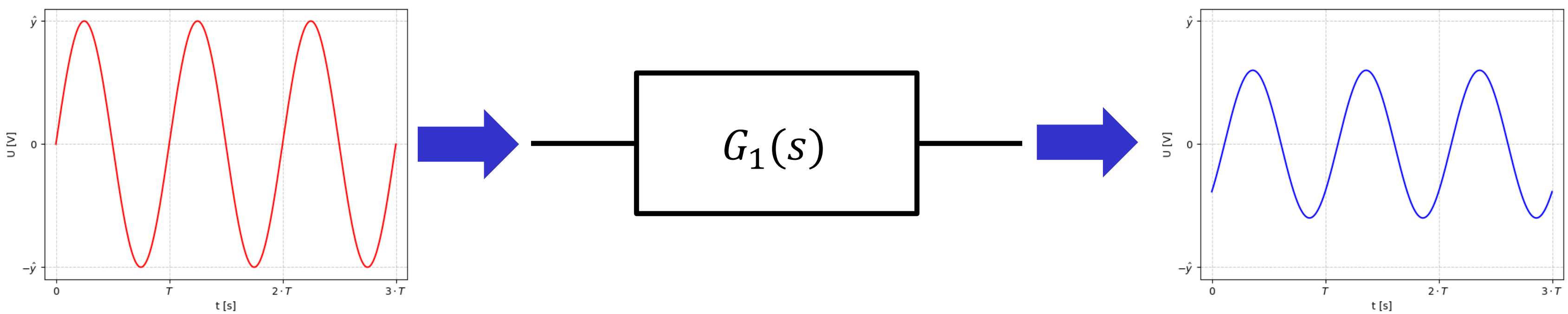
t_r: Anstiegszeit
- Zeit, welche die Sprungantwort braucht um von 10% auf 90% des Endwertes zu steigen

t_S: Einstellzeit
- Zeit, welche die Sprungantwort braucht bis sie das Toleranzband nicht mehr verlässt

Aufgabe 4.4. Frequenzgang

Ist das Eingangssignal eines Systems ein periodisches Signal, so ist das Ausgangssignal ebenfalls ein periodisches Signal (im eingeschwungenem Zustand). Der Frequenzgang gibt hier den Unterschied zwischen Ein- und Ausgangssignal an. Dieser besteht in:

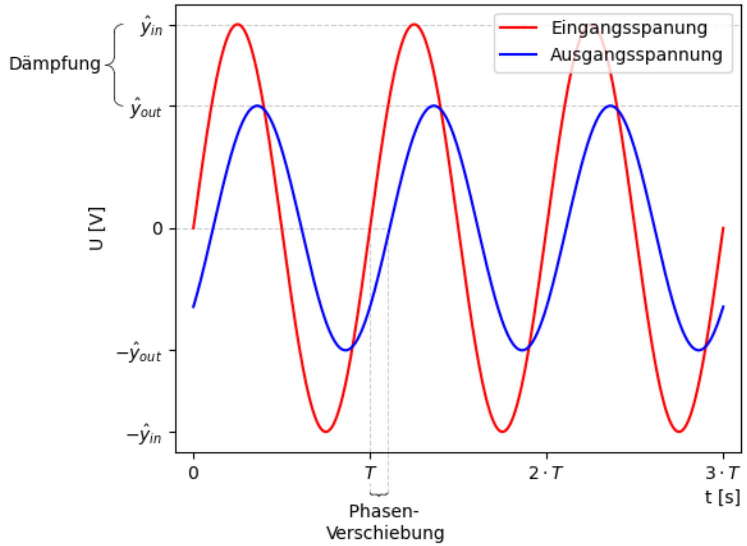
- Der Amplitude (Amplitudengang)
- Der Phasenverschiebung (Phasengang)



Aufgabe 4.4. Frequenzgang

Der Unterschied zwischen Ein- und Ausgangssignal eines Systems bei periodischem Eingangssignal wird durch die folgenden Werte definiert

- Der Amplitude (Amplitudengang)
- Der Phasenverschiebung (Phasengang)



ELEKTRONISCHE MESS- UND DIAGNOSETECHNIK

Aufgabe 4.4. Frequenzgang

Der Frequenzgang eines Systems wird aus seiner Übertragungsfunktion im Laplace-Bereich berechnet:

- $F(j\omega) = G(s \rightarrow j\omega)$
  - In der Übertragungsfunktion wird das s wird durch $j\omega$ ersetzt
  - Das ω ist die Kreisfrequenz des Eingangssignals. Das j ist die imaginäre Einheit: $j^2 = -1$

Der Verstärkungsfaktor eines Systems ist jener Faktor, den die Übertragungsfunktion bei einem konstanten Signal annimmt:

- $K = \lim\limits_{\omega \rightarrow 0} F(j\omega)$

Die Grenzfrequenz ist diejenige Frequenz, bei welcher der Real- und Imaginärteil des Frequenzganges gleich sind:

- $Re\{F(j\omega_g)\} = Im\{F(j\omega_g)\}$
  - Bei der Grenzfrequenz liegt die Dämpfung bei -3dB ($\sqrt{\frac{1}{2}}$ - fache) und die Phasenverschiebung bei -45°

Aufgabe 4.4. Frequenzgang

Der Frequenzgang des Butterworth-Filter 2. Ordnung kann wie folgt vereinfacht werden:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1+a_1\cdot\frac{j\omega}{\omega_g}+b_1\cdot\left(\frac{j\omega}{\omega_g}\right)^2} \mid \alpha = \frac{a_1}{\omega_g}; \beta = \frac{b_1}{\omega_g^2}$$

$$F(j\omega) = \frac{1}{1+\alpha\cdot j\omega+\beta\cdot(j\omega)^2}$$

$$F(j\omega) = \frac{1}{1-\beta\cdot\omega^2+\alpha\cdot j\omega}$$

Der Amplitudengang entspricht dem Betrag des Frequenzganges:

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta\cdot\omega^2)^2+(\alpha\omega)^2}}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1-2\beta\omega^2+\beta^2\omega^4+\alpha^2\omega^2}}$$

Aufgabe 4.4. Frequenzgang

Mit den zuvor berechneten Werten ergibt sich:

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1-2\beta\omega^2+\beta^2\omega^4+\alpha^2\omega^2}} \mid \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}10^{-3}sec; \beta = \frac{1}{4\pi^2}10^{-6}sec^2$$

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{10^{-6}}{2\pi^2}sec^2\omega^2+\frac{10^{-12}}{16\pi^4}sec^4\omega^4+\frac{10^{-6}}{2\pi^2}sec^2\omega^2}}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{10^{-12}}{16\pi^4}sec^4\omega^4}}$$

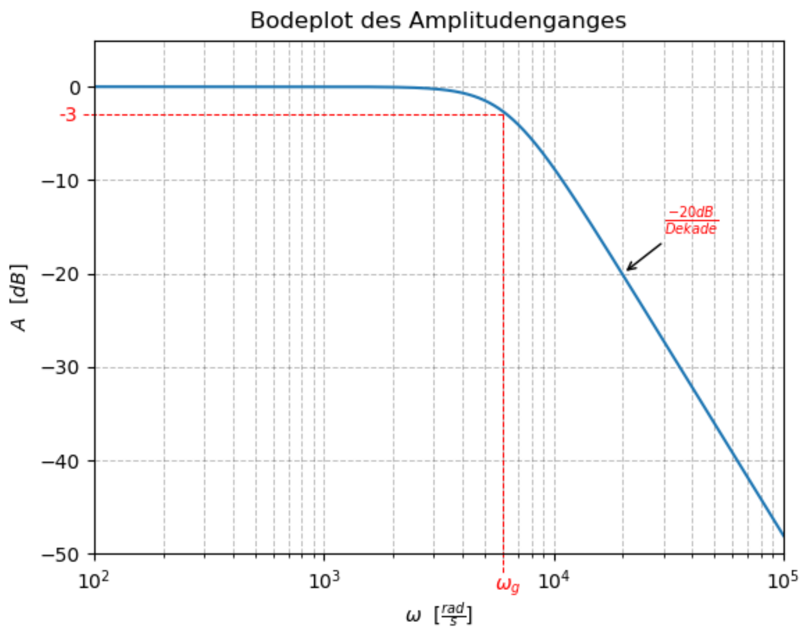
Um einen höheren Messbereich Abzudecken wird der Amplituden und Phasengang in dB (Dezibel) angegeben:

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{10^{-12}}{16\pi^4}sec^4\omega^4}}\right)$$

Aufgabe 4.4. Frequenzgang

Der Amplitudengang kann nun geplottet werden. Dazu wird die X-Achse logarithmisch dargestellt:

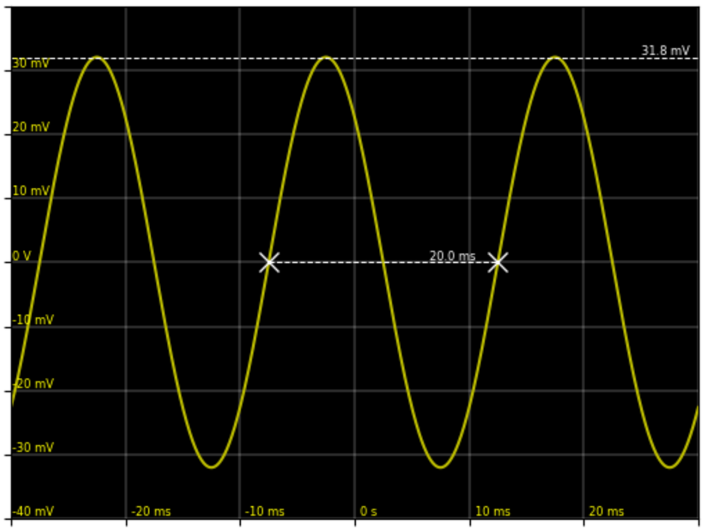
$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{10^{-12}}{16\pi^4}sec^4\omega^4}}\right)$$



Aufgabe 4.5.1. Frequenz- und Periodenmessung

Die Messung der Amplitude, Periode und Frequenz eines Signals kann mittels Oszilloskop erfolgen:

- Hierzu wird zunächst das Signal zentriert dargestellt
- Im Anschluss kann die Höhe der Amplitude und die Periodendauer mittels Curserfunktion gemessen und Abgelesen werden
- Die Frequenz kann aus der gemessenen Periodendauer berechnet werden



$$\hat{u} = 31.8mV$$
$$T = 20.0ms$$

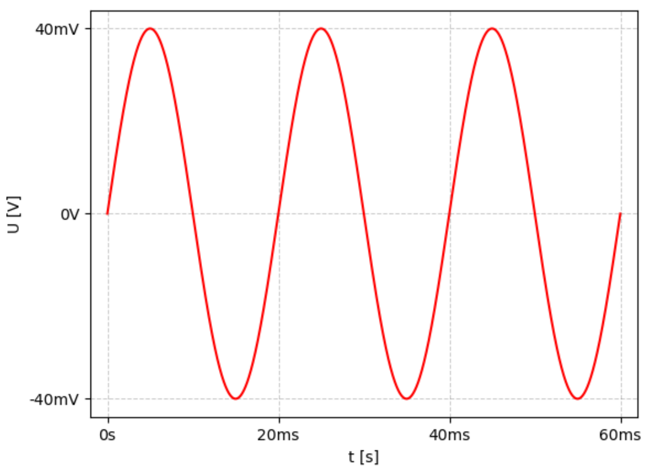
$$\Rightarrow f = \frac{1}{T} = 50Hz$$

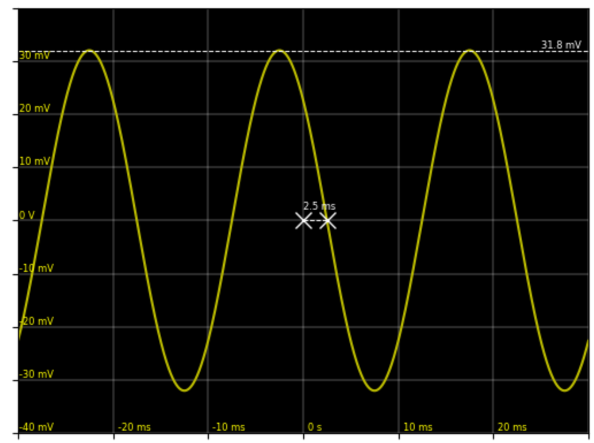
Moderne Oszilloskope können die Amplitude und Frequenz selbständig berechnen und Anzeigen

Aufgabe 4.5.1. Frequenz- und Periodenmessung

Experimentelles Ermitteln des Frequenzganges eines Signalfilters:

Frequenzgenerator → Signalfilter → Oszilloskop





Bekannt:

$\hat{u}_e = 40mV$
$\varphi_e = 0s$
$f = 50Hz$

Abgelesen:

$\hat{u}_a = 31.8mV$
$\varphi_a = 2.5ms$

ELEKTRONISCHE MESS- UND DIAGNOSETECHNIK

Aufgabe 4.5.1. Frequenz- und Periodenmessung

Experimentelles Ermitteln des Frequenzganges eines Signalfilters:

- Der Signalfilter generiert ein Signal mit verschiedenen Frequenzen und bekannter Amplitude ($\hat{u}_e$) und Phasenverschiebung (φ_e)
- Die Signale werden nacheinander durch den Signalfilter geleitet
- Am Ausgang wird für jedes Signal mit einem Oszilloskop die Amplitude ($\hat{u}_a$) und Phasenverschiebung (φ_a) gemessen

Der Amplitudengang ergibt sich aus den Punkten ($\hat{u}_e$, $\hat{u}_a$):

- $A = 20 \cdot log_{10}\left(\frac{\hat{u}_a}{\hat{u}_e}\right)$

Der Phasengang ergibt sich aus den Punkten (φ_e, φ_a):

- $\phi = 360° \cdot (\varphi_a - \varphi_e) \cdot f$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Prof. Dr.-Ing. Clemens Gühmann
Daniel Thomanek, M. Sc.

Technische Universität Berlin
Fakultät IV Elektrotechnik und Informatik
Institut für Energie und Automatisierungstechnik
Fachgebiet Elektronische Mess- und Diagnosetechnik