Grundlagen der elektronischen Messtechnik

Übung 7: Messbrücken

Prof. Dr.-Ing. Clemens Gühmann
Daniel Thomanek, M. Sc.

Technische Universität Berlin
Fakultät IV Elektrotechnik und Informatik
Institut für Energie und Automatisierungstechnik
Fachgebiet Elektronische Mess- und Diagnosetechnik

Wozu werden Messbrücken benötigt?

- Mit einer Messbrücke können passive elektrische Bauelemente wie Widerstände, Kapazitäten oder Induktivitäten gemessen werden.
- Bei der direkten Messung mittels Strom und Spannungsmesser führen die Innenwiderstände der Messgeräte zu Messfehlern, was mit einer Messbrücke verhindert werden kann

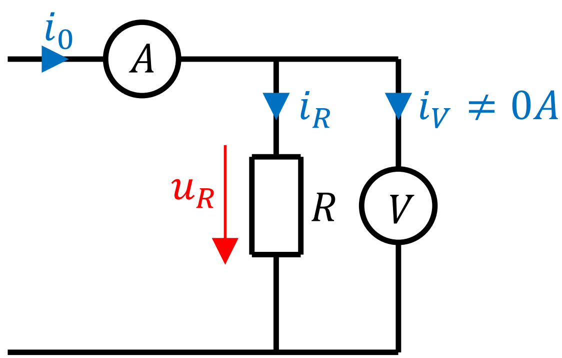

Bild 1: Direkte Messung des Widerstandes R.Da das Voltmeter in der Realität keinen unendlich hohen Innenwiderstand besitzt, entsteht ein Fehler in der Strommessung, welcher sich auf das Messergebnis auswirkt

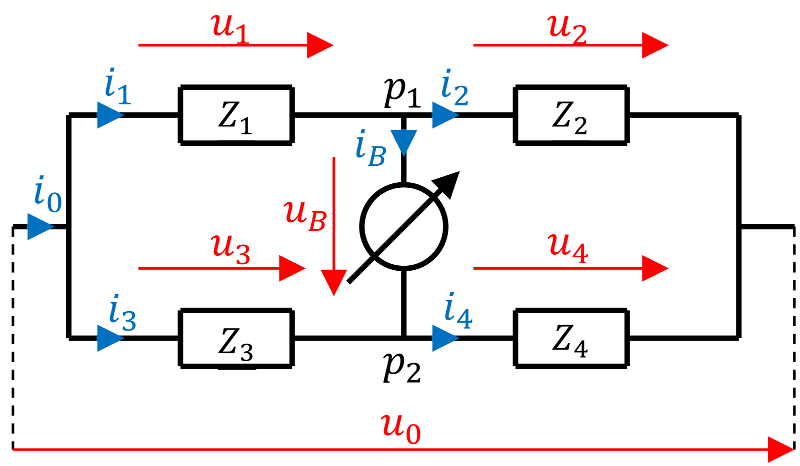

Bild 2: Messung eines Widerstandes mittels Messbrücke. Durch Einstellung der Widerstände wird die Brücke abgeglichen, d.h. die Brückenspannung wird zu 0. Dadurch fließt auch kein Strom mehr durch den Spannungsmesser sodass dessen Innenwiderstand führt zu keinem Fehler mehr führt

Aufgabe 7.1.1 Vergleich realer/idealer Kondensator

- Was sind die Eigenschaften eines idealen Kondensators?
- Wie unterscheidet er sich von einem realen Kondensator?
- Wie sieht das Ersatzschaltbild eines realen Kondensators aus?

Aufgabe 7.1.1 Vergleich realer/idealer Kondensator

Idealer Kondensator:

- Es gibt keine ohmschen Verluste
- Die Leitungen haben einen $R = 0$
- Das Dielektrikum hat einen $R \to \infty$
- Es wird keine Wirkleistung umgesetzt
- Bei sinusförmigen Größen eilt der Strom der Spannung um exakt $\frac{\pi}{2}$ vorraus

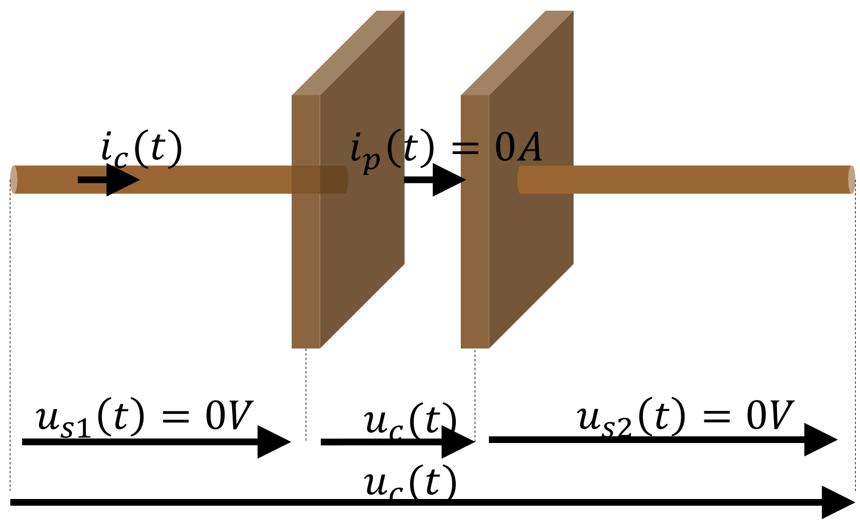

Bild 3: Sinnbild der elektrischen Verhältnisse eines idealen Kondensators

Aufgabe 7.1.1 Vergleich realer/idealer Kondensator

Idealer Kondensator:

Beim idealen Kondensator ist der Stromfluss proportional zur Änderung der Spannung:

$$i_c(t) = C\frac{d}{dt}u_c(t)$$

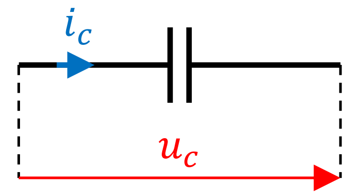

Bild 4: Ersatzschaltbild des idealen Kondensator

Der Blindwiderstand berechnet sich nach dem ohmschen Gesetzt:

$$X_c = \frac{u_c(t)}{i_c(t)}$$

$$X_c = \frac{u_c(t)}{C \cdot \frac{d}{dt}u_c(t)}$$

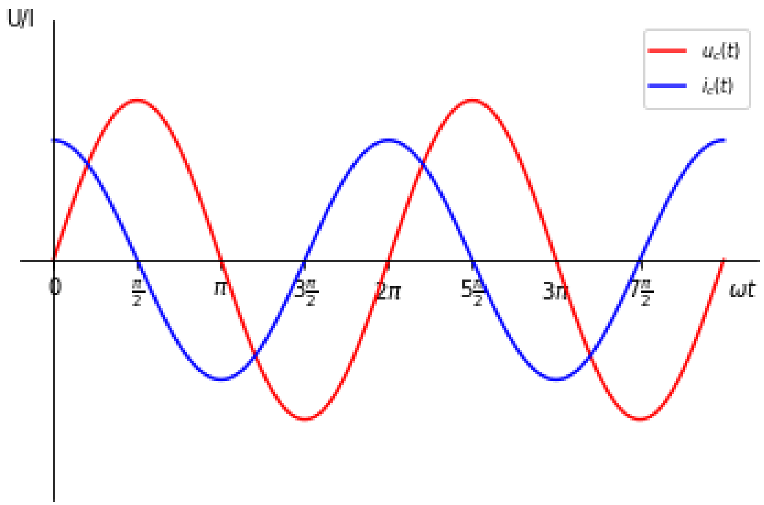

Bild 5: Beim idealen Kondensator eilt der Strom der Spannung um exakt $\frac{\pi}{2}$ vor

Aufgabe 7.1.1 Vergleich realer/idealer Kondensator

Idealer Kondensator:

Bei sinusförmigen Strömen und Spannungen können Komplexe Zahlen angesetzt werden:

$$X_c = \frac{\underline{U_c}}{\underline{I_c}} \qquad \Big| \qquad \underline{I_c} = C\frac{d}{dt}\underline{U_c}$$

$$X_c = \frac{U_0 e^{j\omega t}}{C \cdot \frac{d}{dt}(U_0 e^{j\omega t})}$$

$$X_c = \frac{U_0 e^{j\omega t}}{C \cdot j\omega \cdot U_0 e^{j\omega t}}$$

$$X_c = \frac{1}{j\omega C}$$

$$X_c = -j\frac{1}{\omega C}$$

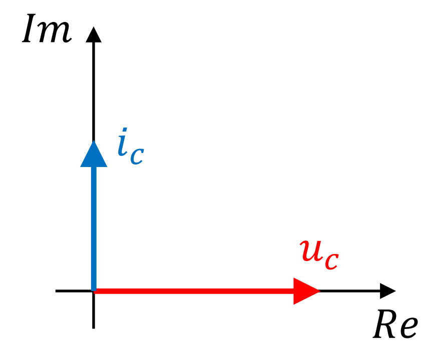

Bild 6: Sinusförmige Ströme und Spannungen können vereinfacht als Komplexe Zahlen dargestellt werden

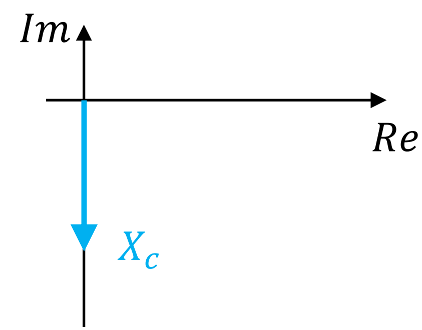

Bild 7: Der Komplexe Blindwiderstand des idealen Kondensators zeigt in Richtung der negativen Imaginär Achse

Aufgabe 7.1.1 Vergleich realer/idealer Kondensator

Realer Kondensator:

- Es existieren ohmsche sowie dielektrische Verluste
- Die Leitungen haben einen $R > 0$
- Das Dielektrikum hat einen $R < \infty$
- Es wird ein Teil Wirkleistung umgesetzt
- Bei sinusförmigen Größen eilt der Strom der Spannung um weniger als $\frac{\pi}{2}$ vorraus

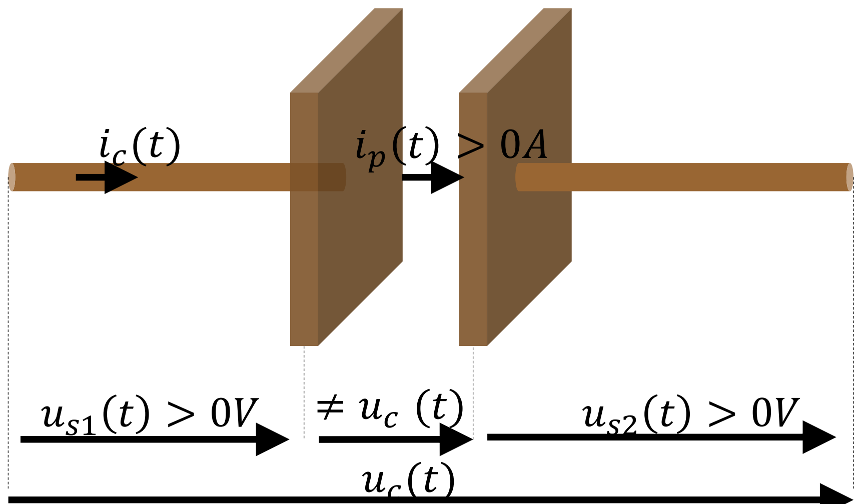

Bild 8: Sinnbild der elektrischen Verhältnisse eines realen Kondensators

Aufgabe 7.1.1 Vergleich realer/idealer Kondensator

Realer Kondensator:

Beim realen Kondensator kommt es zu Leitungsverlusten, repräsentiert durch einen in Reihe geschalteten ohmschen Widerstand R_s, sowie zu dielektrischen Verlusten, repräsentiert durch einen parallel geschalteten ohmschen Widerstand R_p

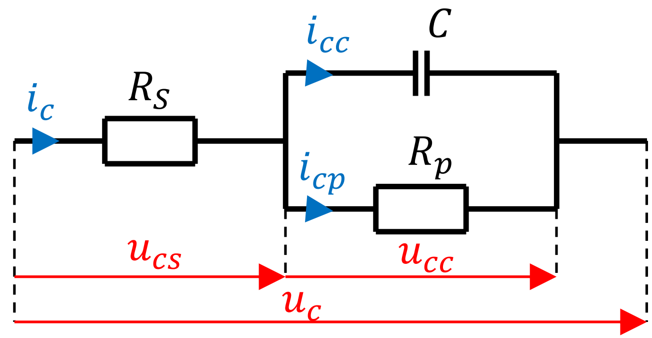

Bild 9: Ersatzschaltbild des idealen Kondensators

$$\underline{Z}_c = R_s + \frac{1}{\frac{1}{R_p} + \frac{1}{X_c}} = R_s + \frac{1}{\frac{1}{R_p} + j\omega C}$$

Der Strom eilt der Spannung nun nicht mehr um exakt $\frac{\pi}{2}$ nach. Die Differenz des Phasenwinkels des Stromes zu $\frac{\pi}{2}$ wird als Verlustwinkel δ bezeichnet

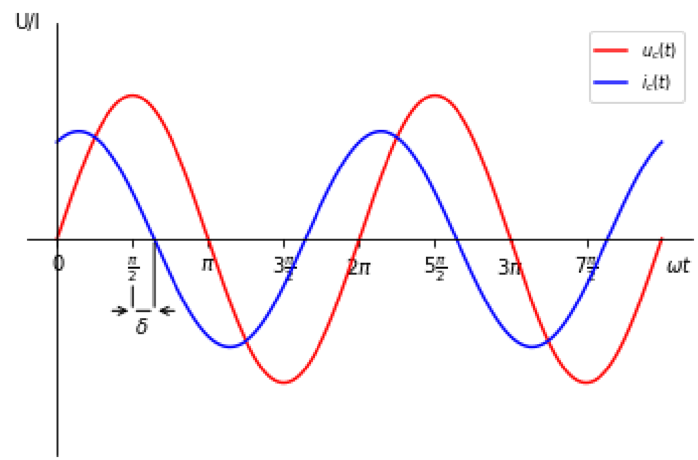

Bild 10: Beim realen Kondensator kommt es zu einem Verlustwinkel δ

Aufgabe 7.1.1 Vergleich realer/idealer Kondensator

Der Verlustfaktor eines realen Kondensators:

Der Tangens des Verlustwinkels δ bezeichnet wird als Verlustfaktor bezeichnet. Er entspricht dem Verhältnis des Stromes welcher in Phase mit der Spannung liegt (Wirkstrom) und jenem welcher exakt um $\frac{\pi}{2}$ Phasenverschoben ist (Blindstrom)

$$\tan(\delta) = \frac{i_{Wirk}}{i_{Blind}}$$

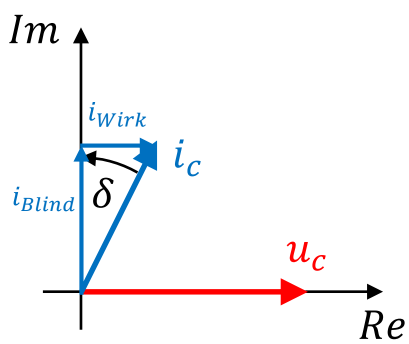

Bild 11: Komplexe Darstellung des Stromes und der Spannung an einem realen Kondensator

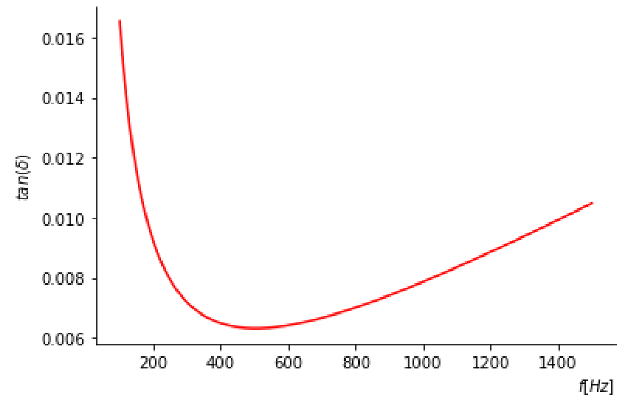

Bild 12: Der Verlustfaktor in Abhängigkeit von der Frequenz für $R_S = 0.1\Omega$, $R_p = 1k\Omega$, $C = 1\mu F$

Aufgabe 7.1.1 Vergleich realer/idealer Kondensator

Vereinfachung des realen Kondensators:

Zur Vereinfachung werden der Betrieb bei niedrigen und hohen Frequenzen unterschieden. Bei niedrigen Frequenzen gilt:

$$\underline{Z}_c = R_s + \frac{1}{\frac{1}{R_p} + j\omega C} \qquad \omega\ klein\ \rightarrow j\omega C \approx 0$$

$$\underline{Z}_c \approx R_s + \frac{1}{\frac{1}{R_p}} = R_S + R_p$$

Da der ohmsche Widerstand eines Dielektrikums sehr viel größer ist als der ohmsche Widerstand eines Leiters ($R_S \ll R_p$):

$$\underline{Z}_c \approx R_p$$

Bei niedrigen Frequenzen muss somit nur der ohmsche Widerstand des Dielektrikums betrachtet werden

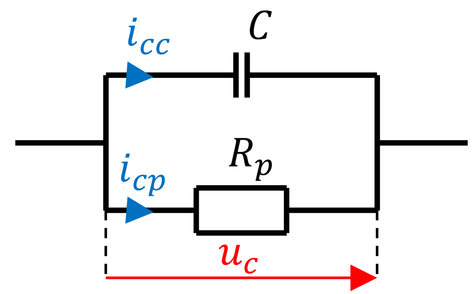

Bild 13: Vereinfachtes Ersatzschaltbild des realen Kondensators bei niedrigen Frequenzen

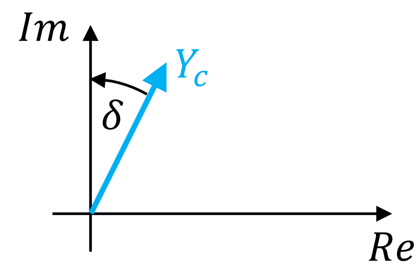

Bild 14: Der komplexe Leitwert des realen Kondensators bei niedrigen Frequenzen. Er ist definiert als $Y_C = \frac{1}{X_C}$. In der Parallelschaltung ist die Rechnung mit Leitwerten einfacher als mit Widerständen

Aufgabe 7.1.1 Vergleich realer/idealer Kondensator

Vereinfachung des realen Kondensators:

Bei hohen Frequenzen gilt:

$$\underline{Z}_c = R_s + \frac{1}{\frac{1}{R_p} + j\omega C} \qquad \Big| \quad \omega\ hoch\ \rightarrow \omega C \gg \frac{1}{R_p}$$

$$\underline{Z}_c \approx R_s + \frac{1}{j\omega C} \qquad \Big| \quad \omega\ hoch\ \rightarrow \frac{1}{\omega C}\ klein$$

$$\underline{Z}_c \approx R_S$$

Bei hohen Frequenzen muss somit nur der ohmsche Widerstand des Leiters betrachtet werden

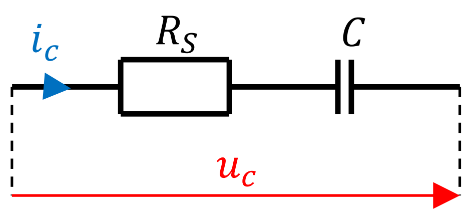

Bild 15: Vereinfachtes Ersatzschaltbild des realen Kondensators bei hohen Frequenzen

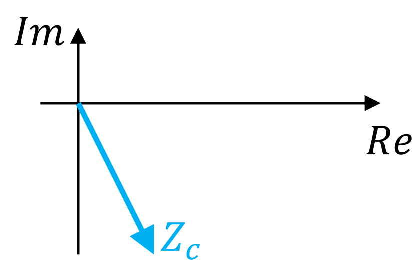

Bild 16: Der komplexe Blindwiderstand des realen Kondensators bei hohen Frequenzen

Aufgabe 7.1.2 Abgleich einer Wechselstrombrücke

- Was sind die allgemeinen Abgleichbedingungen einer Wechselstrombrücke?
- Leiten sie die Abgleichbedingungen für die gegebene Wien-Messbrücke her.
- Die Wien-Messbrücke sei bei den für R_2, R_3, R_4 und C_2 gegebenen Werten abgeglichen. Berechnen Sie den ohmschen und kapazitiven Anteil der realen Kapazität (R_X und C_X).
- Wie kann messtechnisch überprüft werden, ob eine Wechselstrombrücke abgeglichen ist?

Aufgabe 7.1.2 Abgleich einer Wechselstrombrücke

Abgleichbedingung einer Wechselstrombrücke

Die Wechselstrombrücke ist abgeglichen wenn die Potentiale in beiden Brückenzweigen gleich sind:

$$p_1 = p_2$$

Daraus folgt:

$$u_B = 0$$

$$i_B = 0$$

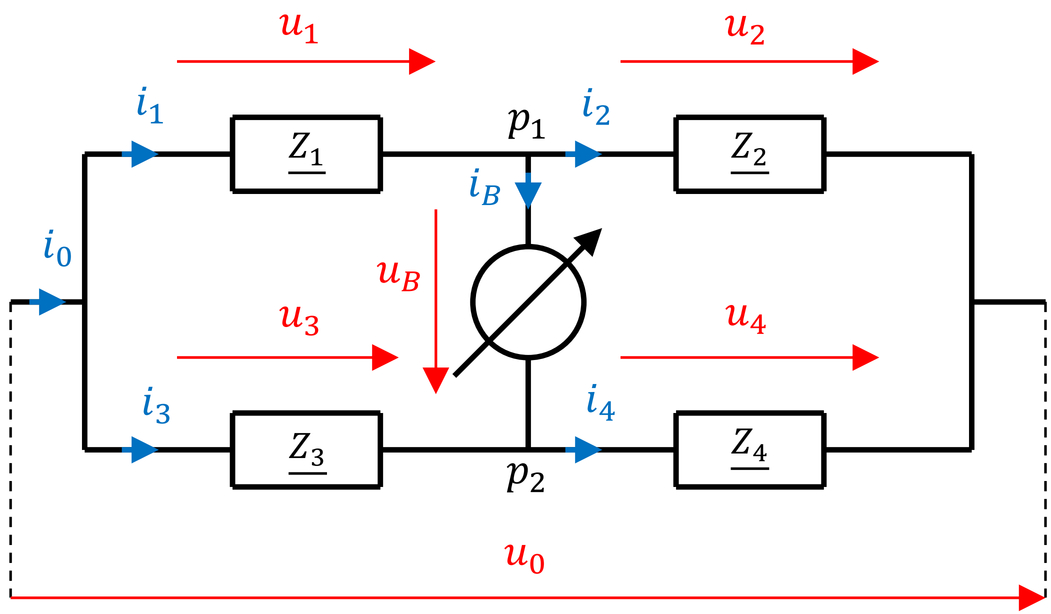

Bild 17: Elektrische Verhältnisse in einer allgemeinen Wechselstrombrücke aus den Impedanzen $\underline{Z}_1 \dots \underline{Z}_4$. Da kein Potentialunterschied zwischen p_1 und p_2 besteht, können diese Punkte beliebig elektrisch verbunden oder getrennt werden, ohne Auswirkung auf die restliche Brücke

Aufgabe 7.1.2 Abgleich einer Wechselstrombrücke

Abgleichbedingung einer Wechselstrombrücke

Nach der zweiten Kirchhoffschen Regel (Maschensatz) gilt:

$$u_1 + u_B - u_3 = 0$$

Im abgeglichenen Zustand gilt $u_B = 0$

$$u_1 - u_3 = 0$$
$$u_1 = u_3$$

Für die Spannung u_1 gilt:

$$u_1 = \underline{Z_1} i_1$$

Da $i_B = 0$ gilt $i_1 = i_2$

$$u_1 = \underline{Z_1} i_2$$

$$u_1 = \underline{Z_1} \cdot \frac{u_2}{\underline{Z_2}}$$

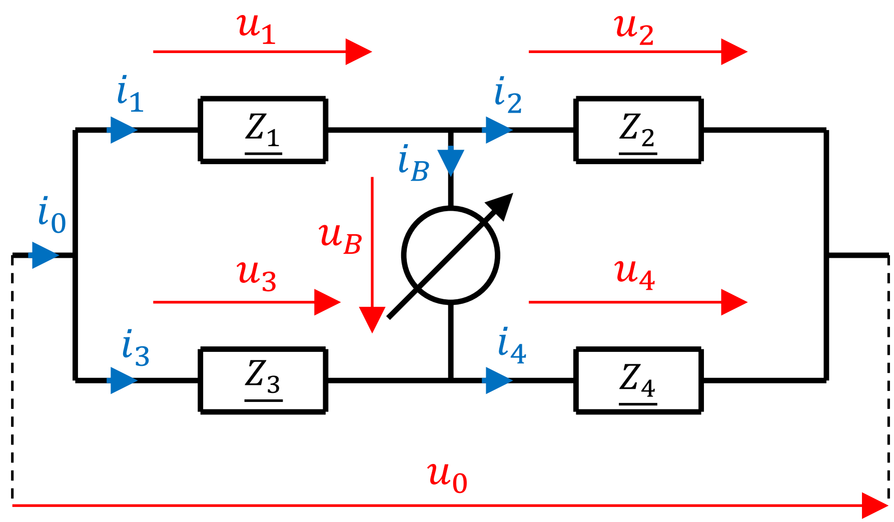

Bild 18: Elektrische Verhältnisse in einer allgemeinen Wechselstrombrücke aus den Impedanzen $\underline{Z}_1$ ... $\underline{Z}_4$.

Aufgabe 7.1.2 Abgleich einer Wechselstrombrücke

Abgleichbedingung einer Wechselstrombrücke

Nach der zweiten Kirchhoffschen Regel (Maschensatz) gilt ebenfalls:

$$u_1 + u_2 - u_0 = 0$$

$$u_2 = u_0 - u_1$$

Daraus folgt:

$$u_1 = \underline{Z}_1 \cdot \frac{u_0 - u_1}{\underline{Z}_2}$$

$$u_1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} u_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} u_0$$

$$u_1 \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right) = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} u_0$$

$$u_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} u_0$$

Dieser Ausdruck wird auch Spannungsteilerformel genannt

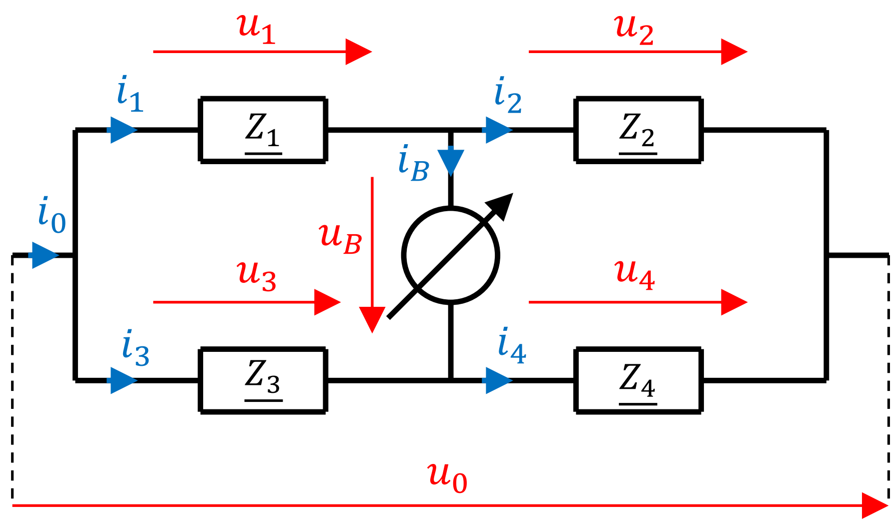

Bild 19: Elektrische Verhältnisse in einer allgemeinen Wechselstrombrücke aus den Impedanzen $\underline{Z}_1$ ... $\underline{Z}_4$.

Aufgabe 7.1.2 Abgleich einer Wechselstrombrücke

Abgleichbedingung einer Wechselstrombrücke

Äquivalent kann die Beziehung zwischen u_3 und u_0 hergeleitet werden

$$u_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} u_0$$

$$u_3 = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_3} u_0$$

Da $u_1 = u_3$ ergibt sich:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} u_0 = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_3} u_0$$

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_3}$$

$$\boxed{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4}}$$

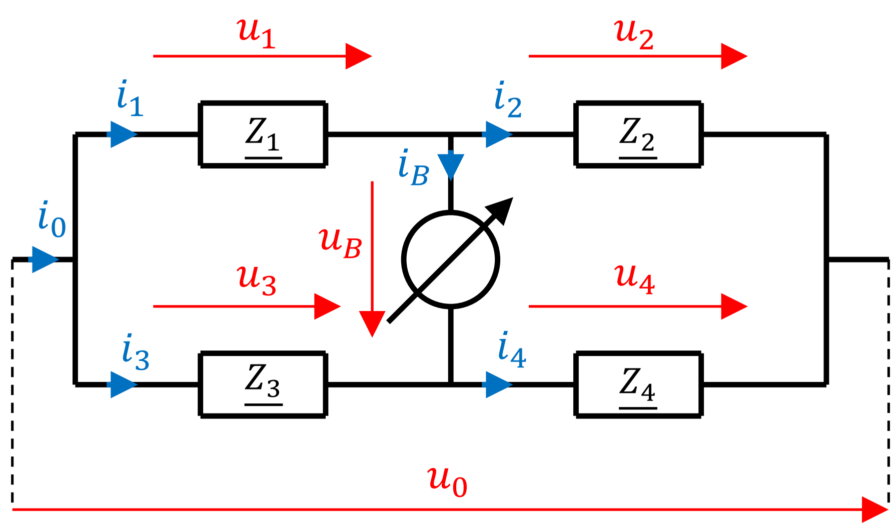

Bild 20: Elektrische Verhältnisse in einer allgemeinen Wechselstrombrücke aus den Impedanzen $\underline{Z}_1$ ... $\underline{Z}_4$.

Aufgabe 7.1.2 Abgleich einer Wechselstrombrücke

Abgleichbedingung einer Wechselstrombrücke

Durch Aufschlüsseln der komplexen Impedanzen ergibt sich:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4}$$

$$\frac{Z_1 e^{j\varphi_1}}{Z_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{Z_3 e^{j\varphi_3}}{Z_4 e^{j\varphi_4}}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{Z_3}{Z_4} e^{j(\varphi_3 - \varphi_4)}$$

Daraus folgt die Abgleichbedingung nach Betrag und Phase:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_4$$

Aufgabe 7.1.2 Abgleich einer Wechselstrombrücke

Abgleichbedingung der Wien-Messbrücke

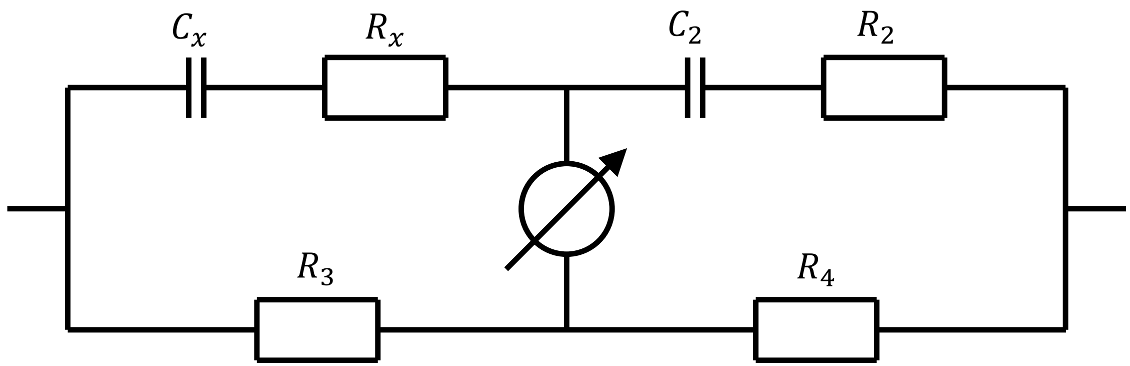

Bild 21: Schaltbild einer Wien-Messbrücke. Der Widerstand und Kondensator mit dem x-Index soll gemessen werden. Hierzu wird die Brücke durch Einstellen von z.B. C_2 und R_2 abgeglichen.

Ansatz der allgemeinen Abgleichbedingung

$$\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_2}} = \frac{\underline{Z_3}}{\underline{Z_4}}$$

$$\frac{R_x - j\dfrac{1}{\omega C_x}}{R_2 - j\dfrac{1}{\omega C_2}} = \frac{R_3}{R_4}$$

Aufgabe 7.1.2 Abgleich einer Wechselstrombrücke

Abgleichbedingung der Wien-Messbrücke

$$\frac{R_x - j\dfrac{1}{\omega C_x}}{R_2 - j\dfrac{1}{\omega C_2}} = \frac{R_3}{R_4}$$

$$R_4\left(R_x - j\frac{1}{\omega C_x}\right) = R_3\left(R_2 - j\frac{1}{\omega C_2}\right)$$

$$R_4 R_x - j\frac{R_4}{\omega C_x} = R_3 R_2 - j\frac{R_3}{\omega C_2}$$

Zwei komplexe Zahlen sind gleich wenn jeweils der Real- und Imaginärteil gleich sind. Daher folgt für den Realteil:

$$\boxed{R_4 R_x = R_3 R_2}$$

Und für den Imaginärteil

$$-\frac{R_4}{\omega C_x} = -\frac{R_3}{\omega C_2}$$

$$\boxed{R_4 C_2 = R_3 C_x}$$

Aufgabe 7.1.2 Abgleich einer Wechselstrombrücke

Berechnung des ohmschen und kapazitiven Anteils R_X und C_X

Aus den Abgleichbedingungen folgt für R_X:

$$R_4 R_x = R_3 R_2$$

$$R_x = \frac{R_3 R_2}{R_4}$$

$$R_x = \frac{R_3 R_2}{R_4} = \frac{2.2k\Omega \cdot 100\Omega}{2.2k\Omega} = 100\Omega$$

Und für C_X:

$$R_4 C_2 = R_3 C_x$$

$$C_x = \frac{R_4 C_2}{R_3}$$

$$C_x = \frac{R_4 C_2}{R_3} = \frac{2.2\Omega \cdot 150nF}{2.2\Omega} = 150nF$$

Aufgabe 7.1.2 Abgleich einer Wechselstrombrücke

Messtechnische Erfassung des Brückenabgleichs

Die Messtechnische Erfassung des Brückenabgleichs kann mittels eines Oszilloskops erfolgen. Hierzu wird die Eingangsspannung u_0 gegenüber der Brückenspannung u_B im XY-Betrieb angezeigt. Auf diese Weise kann auch der Abgleich nach der Phase erfolgen

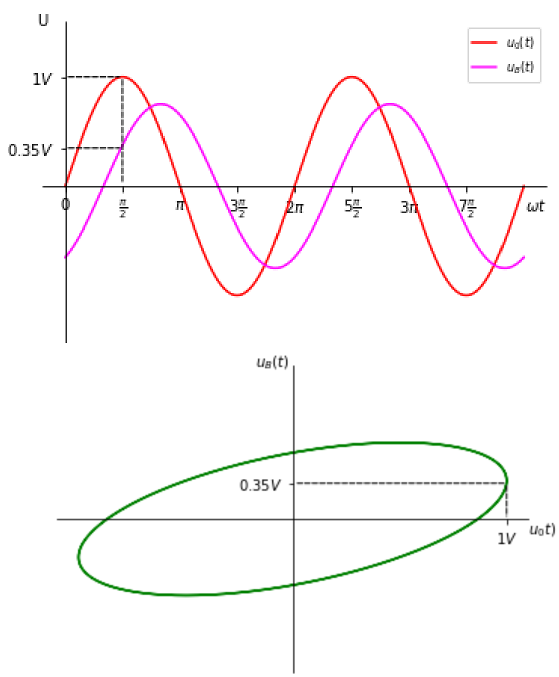

Bild 22: Im XY-Betrieb werden die Spannungswerte, welche zum selben Zeitpunkt gemessen werden als X- und Y- Werte aufgetragen

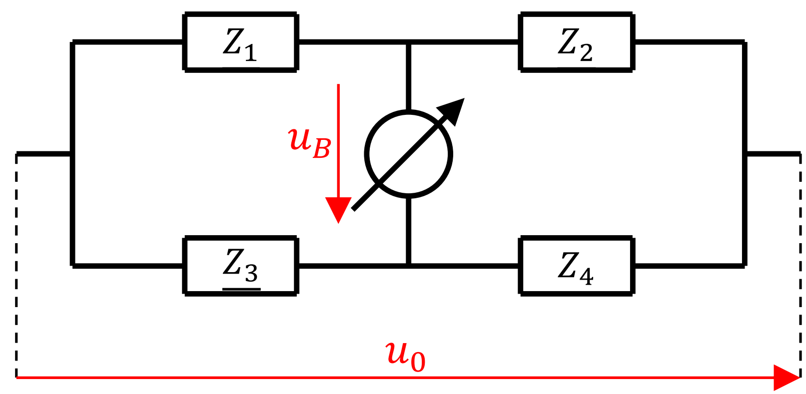

Bild 23: Durch Gegenüberstellung der Eingangs- und Brückenspannung kann der Abgleich mittels eines Oszilloskops erreicht werden

Aufgabe 7.1.2 Abgleich einer Wechselstrombrücke

Messtechnische Erfassung des Brückenabgleichs

Beispiele für Bilder im XY-Betrieb des Oszilloskops

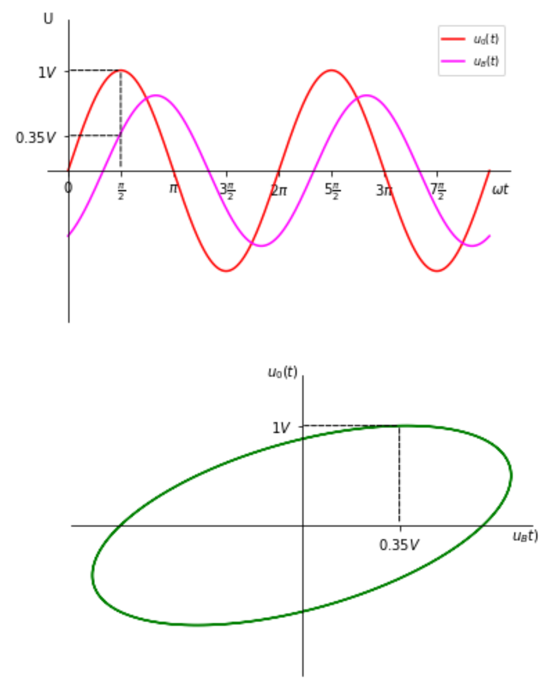

Bild 24: Die Brücke ist weder nach Phase noch nach Amplitude abgeglichen

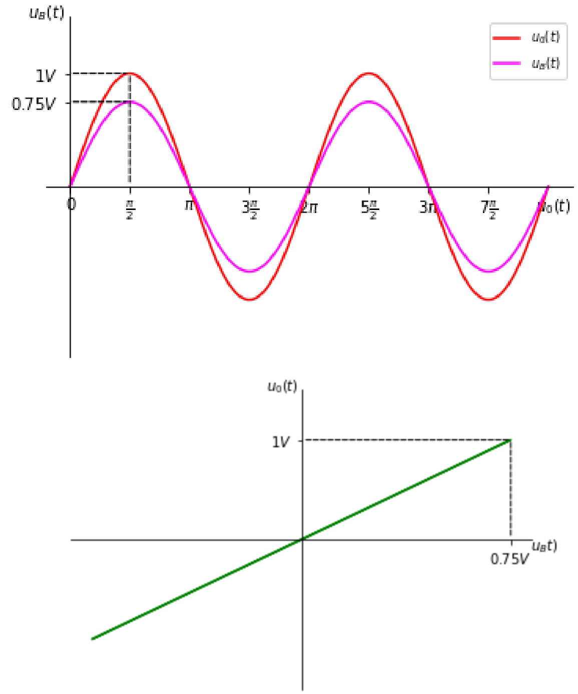

Bild 25: Die Brücke ist nur nach Phase abgeglichen

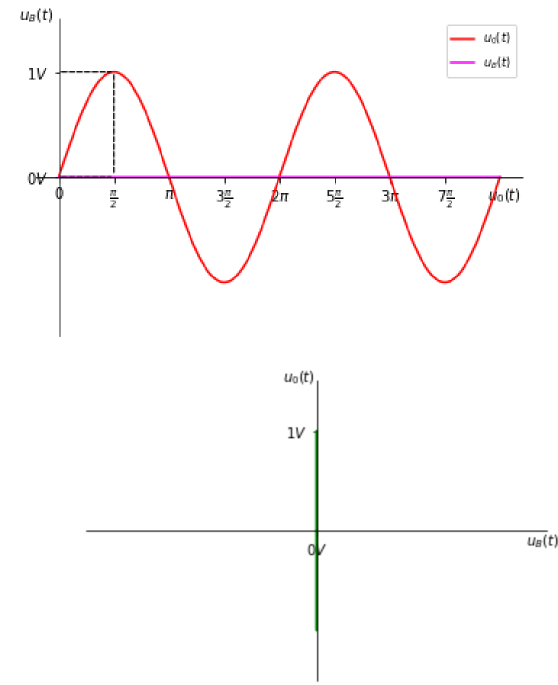

Bild 26: Die Brücke ist nach Phase und Amplitude abgeglichen

Aufgabe 7.1.3 Empfindlichkeit

- Wie ist die Empfindlichkeit einer Messbrücke definiert?
- Wie kann sie gemessen werden?
- Leiten Sie den Ausdruck für die Empfindlichkeit der gegebenen Wien-Messbrücke her.
- Unter welchen Bedingungen erreicht die Empfindlichkeit ihr Maximum?

Aufgabe 7.1.3 Empfindlichkeit

Definition der Empfindlichkeit einer Messbrücke

Im abgeglichenen Zustand wird das Verhalten der Brückenspannung bei kleinen Änderungen der zu messenden Impedanz Z_X beobachtet

$$E = \left|\frac{\partial u_B}{\partial \underline{Z}_x}\right|$$

Nach dem Maschensatz gilt (U_B wird nicht mehr als 0 angenommen)

$$u_1 + u_B - u_3 = 0$$

$$u_B = u_3 - u_1$$

Die Anwendung der Spannungsteilerregel ergibt

$$u_B = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_3} u_0 - \frac{\underline{Z}_x}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_x} u_0$$

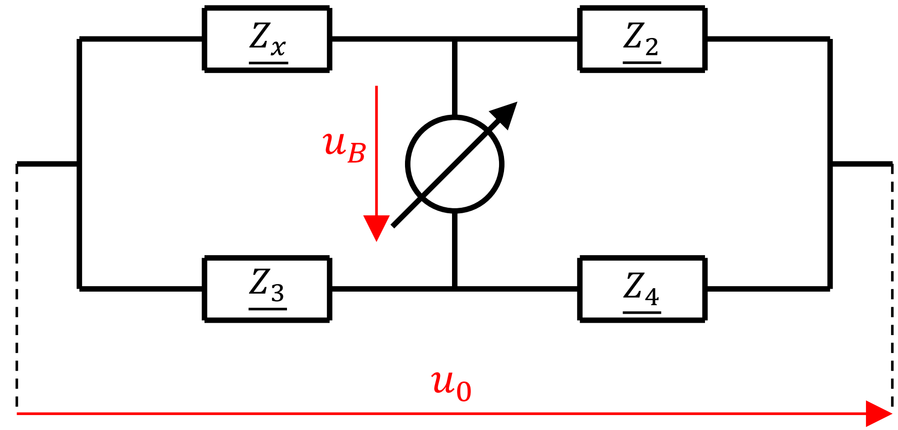

Bild 27: Bei der Empfindlichkeit der Messbrücke wird die Änderung der Brückenspannung in Abhängigkeit von der Änderung der zu messenden Impedanz betrachtet

Aufgabe 7.1.3 Empfindlichkeit

Definition der Empfindlichkeit einer Messbrücke

$$E = \left|\frac{\partial u_B}{\partial \underline{Z}_x}\right| \qquad u_B = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_3} u_0 - \frac{\underline{Z}_x}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_x} u_0$$

$$E = \left|\frac{\partial}{\partial \underline{Z}_x}\left(\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_3} u_0 - \frac{\underline{Z}_x}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_x} u_0\right)\right|$$

$$E = \left|-u_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{Z}_x}\left(\frac{\underline{Z}_x}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_x}\right)\right|$$

$$E = \left|-u_0 \cdot \left[\frac{\underline{Z}_2}{\left(\underline{Z}_x + \underline{Z}_2\right)^2}\right]\right|$$

$$\boxed{E = \left|\frac{\underline{Z}_2 u_0}{\left(\underline{Z}_x + \underline{Z}_2\right)^2}\right|}$$

Aufgabe 7.1.3 Empfindlichkeit

Ermittlung der Empfindlichkeit

Es kann eine Impedanz parallel zu der einstellbaren Impedanz geschaltet werden. Ist die Brücke abgeglichen, wird die parallele Impedanz zugeschaltet und die Änderung der der Brückenspannung beobachtet

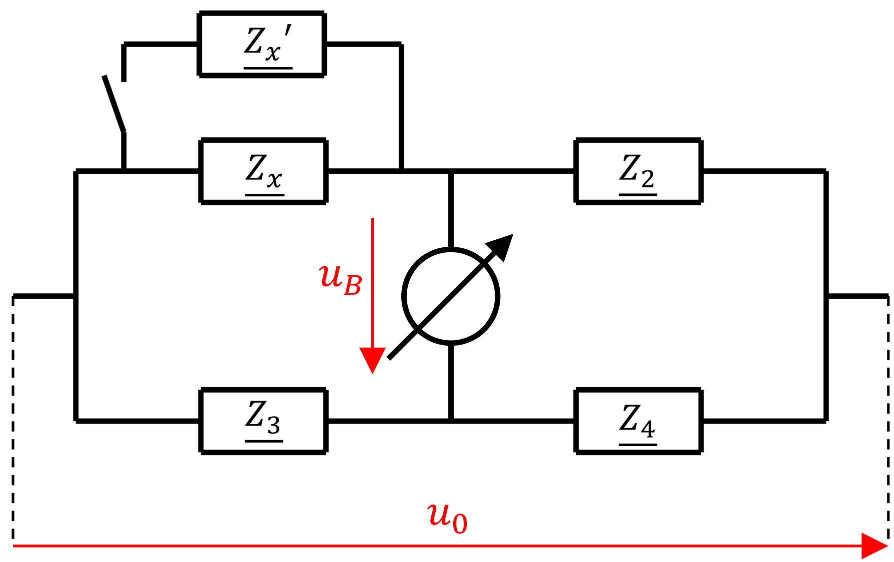

Bild 28: Schaltung zur Bestimmung der Empfindlichkeit der Messbrücke

Aufgabe 7.1.3 Empfindlichkeit

Die maximale Empfindlichkeit einer Messbrücke

Wie muss Z2 gewählt werden, damit die Empfindlichkeit maximal wird?

$$E = -\frac{\underline{Z}_2 u_0}{\left(\underline{Z}_x + \underline{Z}_2\right)^2}$$

$$0 = \frac{\partial E}{\partial \underline{Z}_2}$$

$$0 = -u_0 \frac{\partial}{\partial \underline{Z}_2}\left(\frac{\underline{Z}_2}{\left(\underline{Z}_x + \underline{Z}_2\right)^2}\right)$$

$$0 = -u_0 \left(-\frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_x}{\left(\underline{Z}_x + \underline{Z}_2\right)^3}\right)$$

$$0 = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_x}{\left(\underline{Z}_x + \underline{Z}_2\right)^3}$$

$$0 = \underline{Z}_2 - \underline{Z}_x$$

$$\boxed{\underline{Z}_x = \underline{Z}_2}$$

Aufgabe 7.2.1 Fehlerrechnung für eine Wien-Messbrücke

Fehlerbetrachtung in der Wien-Messbrücke

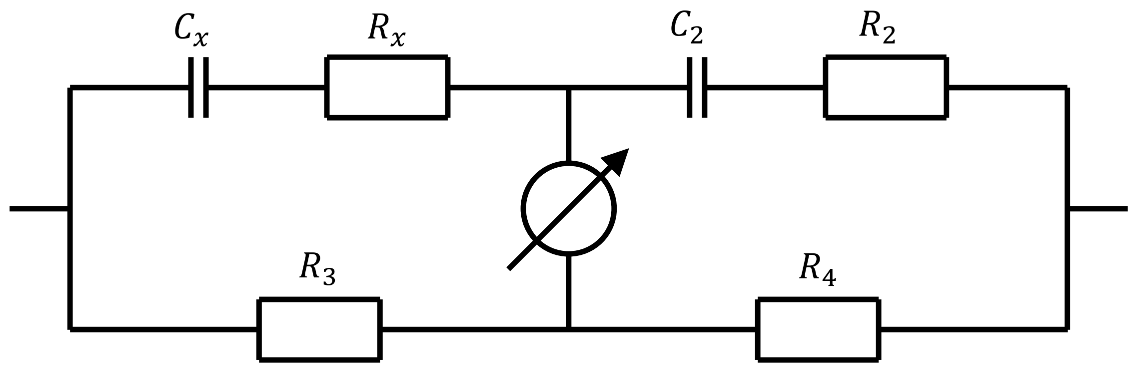

Bild 29: Die Wien-Messbrücke. In der Realität haben alle elektrischen Bauteile Abweichungen von ihren Nenngrößen

Es gelten die in 7.1.2 hergeleiteten Abgleichbedingungen

$$R_x = \frac{R_3 R_2}{R_4}$$

$$C_x = \frac{R_4 C_2}{R_3}$$

Aufgabe 7.2.1 Fehlerrechnung für eine Wien-Messbrücke

Fehlerangabe des Herstellers:

Der Hersteller gibt die maximale Abweichung seines Bauteils von dem Nennwert in % an. Diese kann in der Regel sowohl positiv als auch negativ ausfallen:

$$R = 100\Omega \pm 0.1\%$$

Die Angabe in % bezieht sich auf den Nennwert. Im obigen Beispiel gilt also eine maximale Abweichung von

$$e_{max} = 0.1\% \cdot 100\Omega = 0.1\Omega$$

Der Widerstand kann also im Bereich zwischen 99.9Ω und 100.1Ω jeden Wert haben.

Für die Fehlerrechnung wird die mittlere Abweichung (d.h. Standardabweichung) vom Nennwert benötigt

Aufgabe 7.2.1 Fehlerrechnung für eine Wien-Messbrücke

Fehlerverteilung

Wenn nicht anders angegeben, wird ein im Intervall zwischen $-e_{max}$ und e_{max} gleichverteilter Fehler angenommen. D.h. dass jeder Fehler in diesem Intervall gleich Wahrscheinlich ist. Es wird somit die stetige Gleichverteilung angesetzt

Der Erwartungswert entspricht somit:

$$E[X] = \frac{-e_{max} + e_{max}}{2} = 0$$

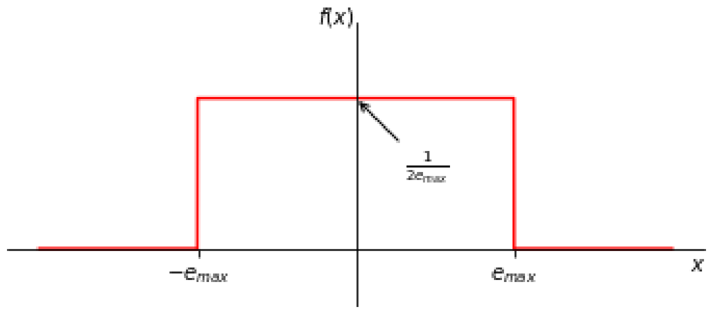

Bild 30: Die Verteilungsdichtefunktion der stetigen Gleichverteilung. Zwischen den maximalen Abweichungen sind alle Fehler gleich Wahrscheinlich

Und die Varianz

$$\sigma^2[X] = \frac{(-e_{max} - e_{max})^2}{12} = \frac{4{e_{max}}^2}{12} = \frac{{e_{max}}^2}{3}$$

Aus der Varianz folgt die Standardabweichung

$$\sigma[X] = \frac{e_{max}}{\sqrt{3}}$$

Aufgabe 7.2.1 Fehlerrechnung für eine Wien-Messbrücke

Standardabweichungen nach der stetigen Gleichverteilung

Es können die Standardabweichungen aus den Fehlerangaben der Hersteller nun wie folgt berechnet werden

$$\sigma[X] = \frac{e_{max}}{\sqrt{3}}$$

Daraus folgen die folgenden Werte für die gegebenen Bauteile

Bauteil	R_2	C_2	R_3	R_4
Nennwert	100Ω	$150nF$	$2.2k\Omega$	$2.2k\Omega$
Toleranz	$\pm 0.1\%$	$\pm 5\%$	$\pm 0.1\%$	$\pm 0.1\%$
e_{max}	0.1Ω	$7.5nF$	2.2Ω	2.2Ω
$\sigma[X]$	0.058Ω	$4.330nF$	1.270Ω	$1.270k\Omega$

Aufgabe 7.2.1 Fehlerrechnung für eine Wien-Messbrücke

Berechnung des absoluten Fehlers:

Der absolute Fehler kann nun mittels des totalen Differentials ermittelt werden:

$$u_y{}^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} u_i \right)^2$$

Für den ohmschen Anteil ergibt sich:

$$y = R_x = \frac{R_3 R_2}{R_4}$$

$$u_R{}^2 = \left(\frac{\partial R_x}{\partial R_2} \sigma[R_2] \right)^2 + \left(\frac{\partial R_x}{\partial R_3} \sigma[R_3] \right)^2 + \left(\frac{\partial R_x}{\partial R_4} \sigma[R_4] \right)^2$$

Aufgabe 7.2.1 Fehlerrechnung für eine Wien-Messbrücke

Berechnung des absoluten ohmschen Fehlers:

$$u_y{}^2 = \left(\frac{\partial R_x}{\partial R_2}\sigma[R_2]\right)^2 + \left(\frac{\partial R_x}{\partial R_3}\sigma[R_3]\right)^2 + \left(\frac{\partial R_x}{\partial R_4}\sigma[R_4]\right)^2$$

Berechnung der Ableitungen:

$$\frac{\partial R_x}{\partial R_2} = \frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{R_3 R_2}{R_4}\right) = \frac{R_3}{R_4}$$

$$\frac{\partial R_x}{\partial R_3} = \frac{\partial}{\partial R_3}\left(\frac{R_3 R_2}{R_4}\right) = \frac{R_2}{R_4}$$

$$\frac{\partial R_x}{\partial R_4} = \frac{\partial}{\partial R_4}\left(\frac{R_3 R_2}{R_4}\right) = -\frac{R_3 R_2}{R_4{}^2}$$

Durch Einsetzten der Ableitungen ergibt sich:

$$u_y{}^2 = \left(\frac{R_3}{R_4}\sigma[R_2]\right)^2 + \left(\frac{R_2}{R_4}\sigma[R_3]\right)^2 + \left(-\frac{R_3 R_2}{R_4{}^2}\sigma[R_4]\right)^2$$

Aufgabe 7.2.1 Fehlerrechnung für eine Wien-Messbrücke

Berechnung des absoluten ohmschen Fehlers:

$$u_y{}^2 = \left(\frac{R_3}{R_4}\sigma[R_2]\right)^2 + \left(\frac{R_2}{R_4}\sigma[R_3]\right)^2 + \left(-\frac{R_3 R_2}{R_4{}^2}\sigma[R_4]\right)^2$$

Einsetzen der Werte ergibt:

$$u_y{}^2 = \left(\frac{2.2k\Omega}{2.2k\Omega}0.058\Omega\right)^2 + \left(\frac{100\Omega}{2.2k\Omega}1.270\Omega\right)^2 + \left(-\frac{2.2k\Omega \cdot 100\Omega}{2.2k\Omega^2}1.270\Omega\right)^2$$

$$u_y{}^2 = (0.058\Omega)^2 + (0.058\Omega)^2 + (0.058\Omega)^2$$

$$u_y{}^2 = 0.010\Omega^2$$

$$u_y{}^2 = 0.010\Omega^2$$

$$\boxed{u_y = 0.100\Omega}$$

Aufgabe 7.2.1 Fehlerrechnung für eine Wien-Messbrücke

Berechnung des absoluten kapazitiven Fehlers:

Für den kapazitiven Fehler ergibt sich:

$$y = C_x = \frac{R_4 C_2}{R_3}$$

$$u_y{}^2 = \left(\frac{\partial C_x}{\partial R_4}\sigma[R_4]\right)^2 + \left(\frac{\partial C_x}{\partial C_2}\sigma[C_2]\right)^2 + \left(\frac{\partial C_x}{\partial R_3}\sigma[R_3]\right)^2$$

Berechnung der Ableitungen

$$\frac{\partial C_x}{\partial R_4} = \frac{\partial}{\partial R_4}\left(\frac{R_4 C_2}{R_3}\right) = \frac{C_2}{R_3}$$

$$\frac{\partial C_x}{\partial C_2} = \frac{\partial}{\partial C_2}\left(\frac{R_4 C_2}{R_3}\right) = \frac{R_4}{R_3}$$

$$\frac{\partial C_x}{\partial R_3} = \frac{\partial}{\partial R_3}\left(\frac{R_4 C_2}{R_3}\right) = -\frac{R_4 C_2}{R_3{}^2}$$

Aufgabe 7.2.1 Fehlerrechnung für eine Wien-Messbrücke

Berechnung des absoluten kapazitiven Fehlers:

$$u_y{}^2 = \left(\frac{C_2}{R_3}\sigma[R_4]\right)^2 + \left(\frac{R_4}{R_3}\sigma[C_2]\right)^2 + \left(-\frac{R_4 C_2}{R_3{}^2}\sigma[R_3]\right)^2$$

Einsetzten der Werte ergibt:

$$u_y{}^2 = \left(\frac{150nF}{2.2k\Omega}1.270\Omega\ \right)^2 + \left(\frac{2.2k\Omega}{2.2k\Omega}4.330nF\ \right)^2 + \left(-\frac{2.2k\Omega \cdot 150nF}{(2.2k\Omega)^2}1.270\Omega\ \right)^2$$

$$u_y{}^2 = (0.086nF)^2 + (4.330nF\ )^2 + (0.086nF)^2$$

$$u_y{}^2 = 18.764(nF)^2$$

$$\boxed{u_y = 4.331\mathrm{nF}}$$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Prof. Dr.-Ing. Clemens Gühmann
Daniel Thomanek, M. Sc.

Technische Universität Berlin
Fakultät IV Elektrotechnik und Informatik
Institut für Energie und Automatisierungstechnik
Fachgebiet Elektronische Mess- und Diagnosetechnik