Grundlagen der elektronischen Messtechnik

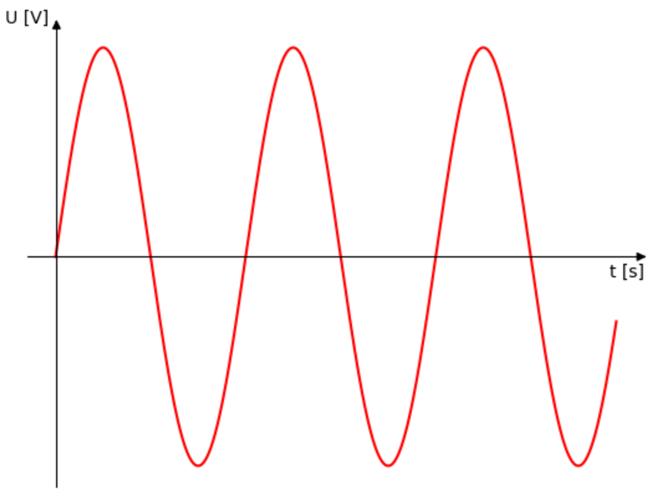
Übung 5: Digitale Messdatenerfassung

Prof. Dr.-Ing. Clemens Gühmann
Daniel Thomanek, M. Sc.

Technische Universität Berlin
Fakultät IV Elektrotechnik und Informatik
Institut für Energie und Automatisierungstechnik
Fachgebiet Elektronische Mess- und Diagnosetechnik

Problemstellung

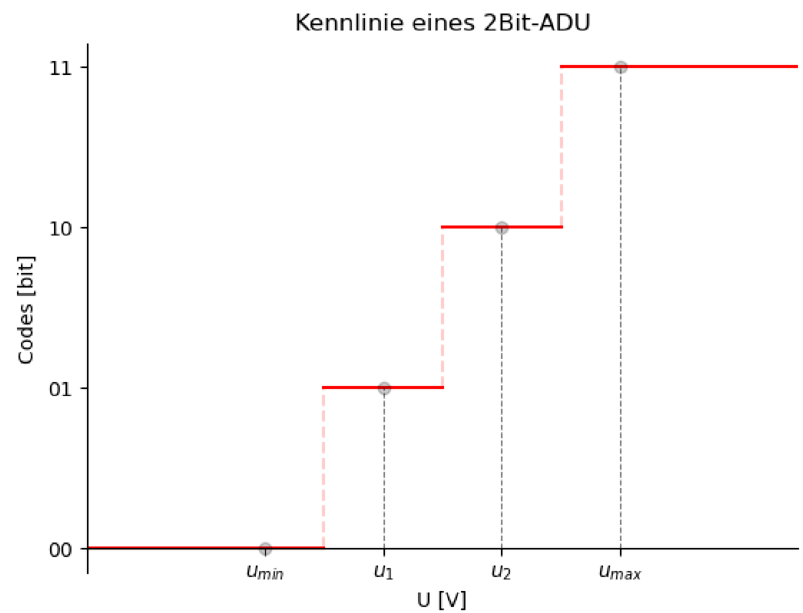
Ein Analoges Signal soll digitalisiert werden. Hierfür muss es in diskrete Werte überführt und diese abgespeichert werden. Die Überführung des analogen Signals zu den diskreten Werten (Codes) übernimmt ein ADU (Analog- Digital- Wandler)



1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0

Aufgabe 5.1.1. ADU-Kennlinie

Die Kennlinie eines ADUs gibt für jede Spannung am Eingang des ADU den entsprechenden Code am Ausgang des ADU an. Da der Ausgang diskret ist, verläuft die Kennlinie *treppenförmig* (streng genommen sind die vertikalen Verläufe kein Teil der Kennlinie)

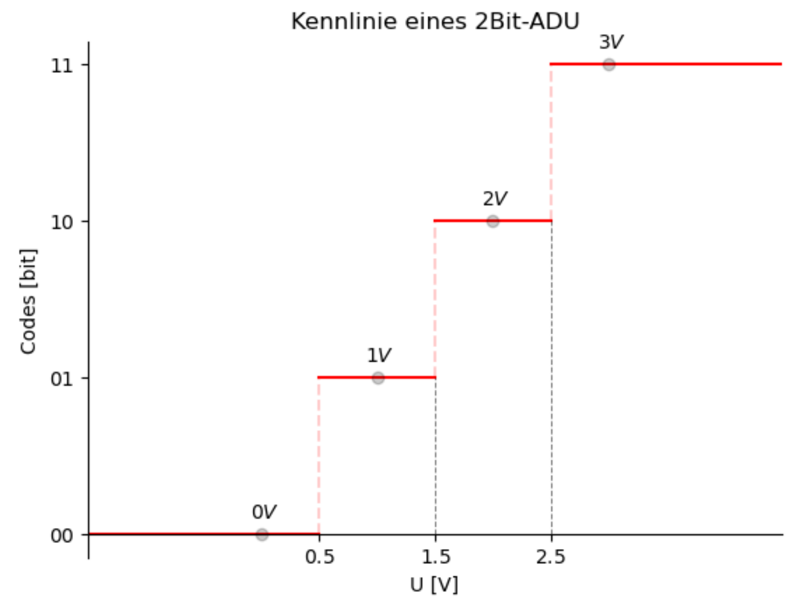


Aufgabe 5.1.1. ADU-Kennlinie

Beispiel: 2Bit – ADU soll ein Eingangsspannungsbereich von $(0 \dots 3)V$ digitalisieren.

Sinnvollste Einteilung:

- Code 00: 0V
- Code 01: 1V
- Code 10: 2V
- Code 11: 3V



Idealerweise werden die Codes genau zwischen den Spannungen geschaltet:

- Code 00 → Code 01: bei 0.5V
- Code 01 → Code 10: bei 1.5V
- Code 10 → Code 11: bei 2.5V

Aufgabe 5.1.1. ADU-Kennlinie

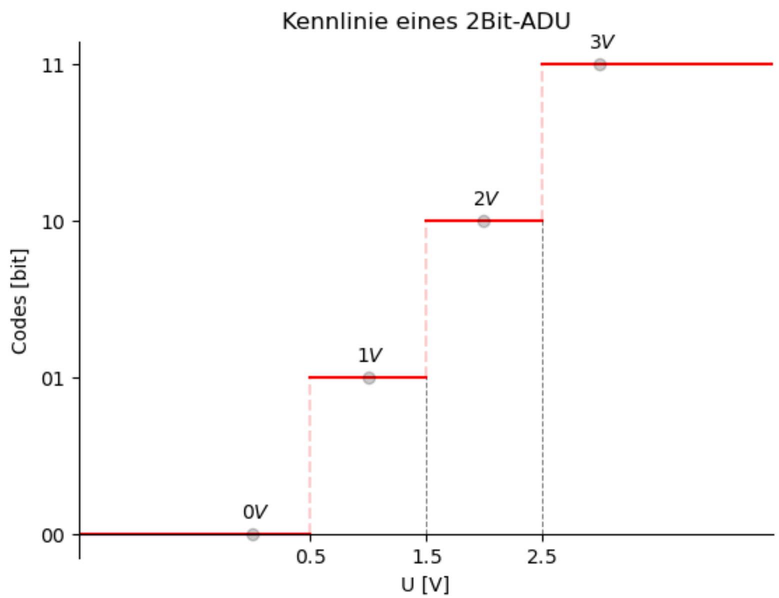
Beispiel: 2Bit – ADU soll ein Eingangsspannungsbereich von $(0 \dots 3)V$ digitalisieren.

Sinnvollste Einteilung:

- Code 00: 0V
- Code 01: 1V
- Code 10: 2V
- Code 11: 3V

Idealerweise werden die Codes genau zwischen den Spannungen geschaltet:

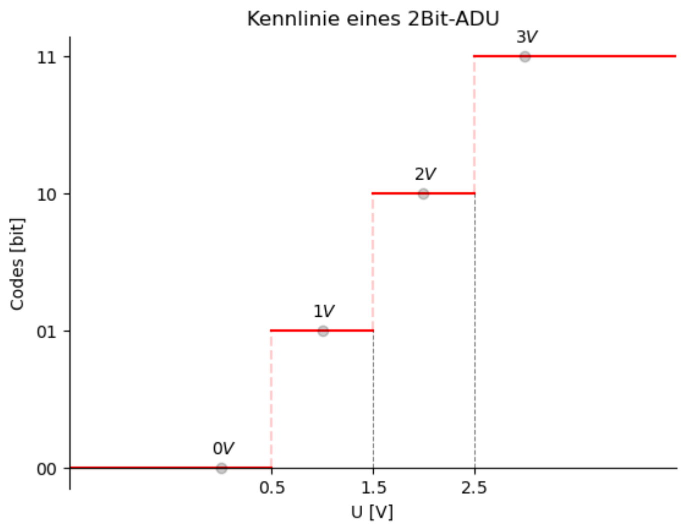
- Code 00 → Code 01: bei 0.5V
- Code 01 → Code 10: bei 1.5V
- Code 10 → Code 11: bei 2.5V

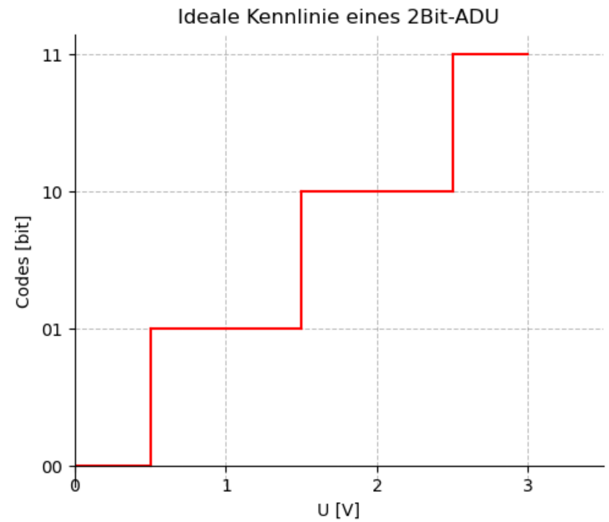


Aufgabe 5.1.1. ADU-Kennlinie

Zeichnen der Kennlinie

1. Berechnen der Stufenbreite (Auflösung) $U_{LSB} = \frac{U_{max} - U_{min}}{2^N - 1}$
2. Die Kennlinie startet bei U_{min} und endet bei U_{max} (Da der ADU i.d.R. nicht für höhere Spannungen ausgelegt ist)
3. Die erste und letzte Stufe ist $\frac{U_{LSB}}{2}$ (Dadurch werden die Codes genau zwischen den Spannungen geschaltet)
4. Zur Vereinfachung wird die Kennlinie i.d.R. durchgehend gezeichnet (mit vertikalen Linien)



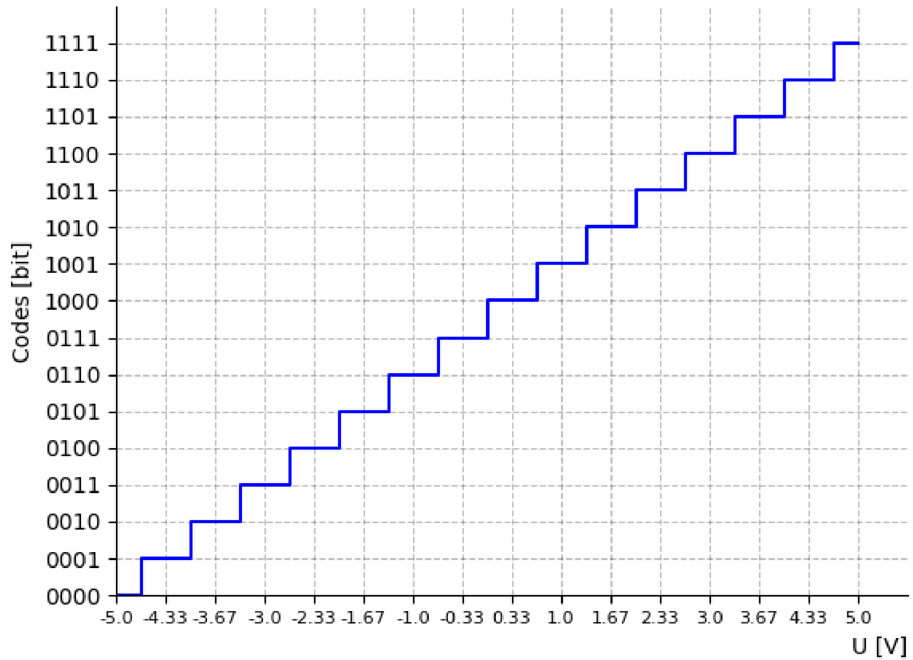


Aufgabe 5.1.2. Auflösung

Unter Auflösung eines ADU‘s versteht man seine Stufenbreite (U_{LSB})

Beispiel:

- 4-Bit ADU
- Spannungsbereich: $-5V \leq U_e \leq 5V$



Auflösung:

- $U_{LSB} = \frac{U_{max} - U_{min}}{2^N - 1}$

  $U_{LSB} = \frac{5V - (-5V)}{2^4 - 1}$

  $U_{LSB} = 666.67mV$

Aufgabe 5.1.2. Auflösung

Unter Auflösung eines ADU's versteht man seine Stufenbreite (U_{LSB})

Beispiel 2:

- 8-Bit ADU
- Spannungsbereich: $-5V \leq U_e \leq 5V$

Auflösung:

- $U_{LSB} = \frac{U_{max} - U_{min}}{2^N - 1}$

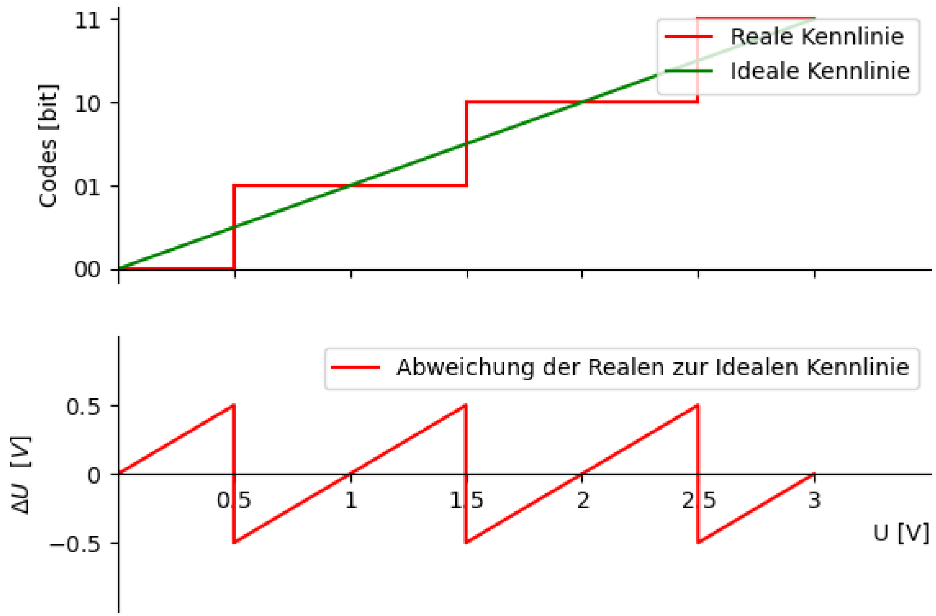
  $U_{LSB} = \frac{5V - (-5V)}{2^8 - 1}$

  $U_{LSB} = 39.2mV$

Aufgabe 5.1.3. Quantisierungsrauschen

Quantisierungsrauschen entsteht durch das Abbilden kontinuierlicher auf diskrete Werte.

- Es wird als die Abweichung der Realen von der Idealen, nicht quantisierten Kennlinie beschrieben
- Es kann durch Erhöhung der ADU-Auflösung oder Anpassung des Messbereiches an die Signalamplitude verringert werden



Aufgabe 5.1.4. Signal-Rausch-Verhältnis

Unter dem Signal-Rausch-Verhältnis (SNR – Signal-Noise-Ratio) wird das Verhältnis der Nutzsignalleistung zur Rauschleistung verstanden:

- $SNR = \frac{P_{Signal}}{P_{Rauschen}}$

Gibt es keine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom am ADU, ist das SNR proportional zum Quadrat der Effektivwerte der Spannungen:

- $SNR = \frac{U_{eff,Signal}^{2}}{U_{eff,Rauschen}^{2}}$

Aufgabe 5.1.4. Signal-Rausch-Verhältnis

Für den Effektivwert des Rauschens, reicht es aus eine Periode des Rauschsignals zu betrachten:

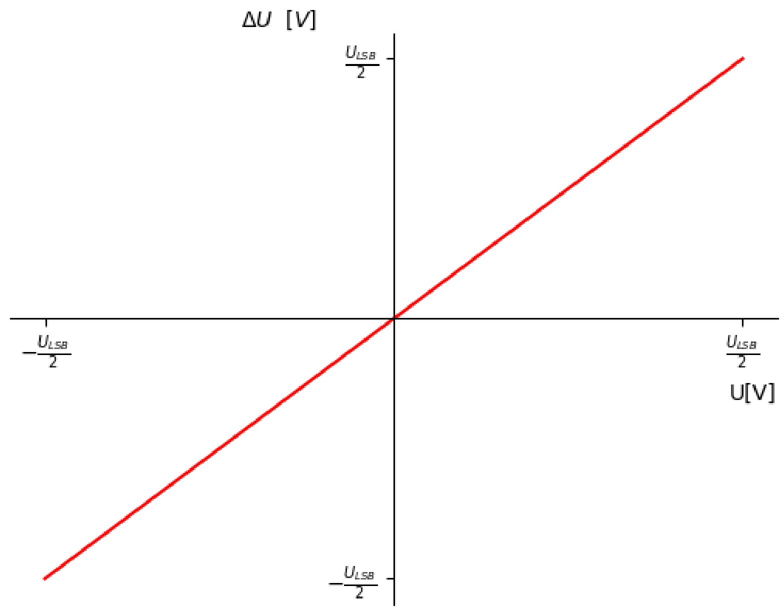
- $U_{eff,Rausch} = \sqrt{\frac{1}{U_{LSB}} \int_{-\frac{U_{LSB}}{2}}^{\frac{U_{LSB}}{2}} u^2 du}$

$$U_{eff,Rausch} = \sqrt{\frac{1}{U_{LSB}} \left[\frac{u^3}{3}\right]_{-\frac{U_{LSB}}{2}}^{\frac{U_{LSB}}{2}}}$$

$$U_{eff,Rausch} = \sqrt{\frac{1}{U_{LSB}} \left[\frac{\left(\frac{U_{LSB}}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{U_{LSB}}{2}\right)^3}{3}\right]}$$

$$U_{eff,Rausch} = \sqrt{\frac{1}{U_{LSB}} \left[\frac{U_{LSB}{}^3}{12}\right]}$$

$$U_{eff,Rausch} = \frac{U_{LSB}}{\sqrt{12}}$$



Aufgabe 5.1.4. Signal-Rausch-Verhältnis

Beispiel:

- 8-Bit ADU
- Spannungsbereich: $-5V \leq U_e \leq 5V$

  $\rightarrow U_{LSB} = 39.2mV$

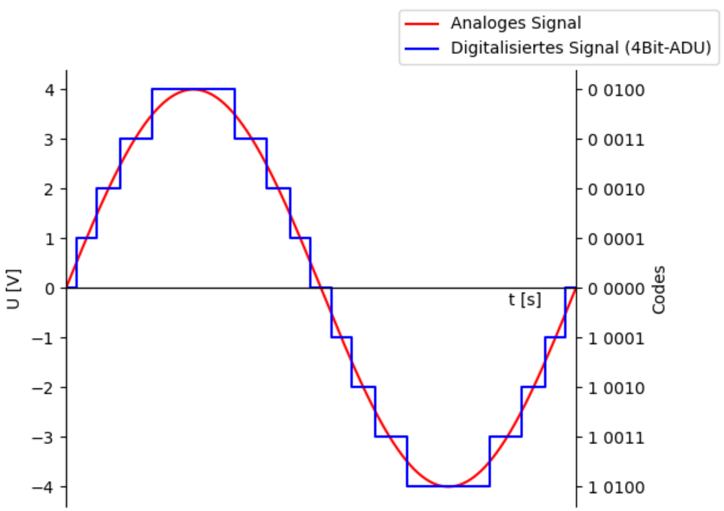
- Gesucht: SNR in dB?

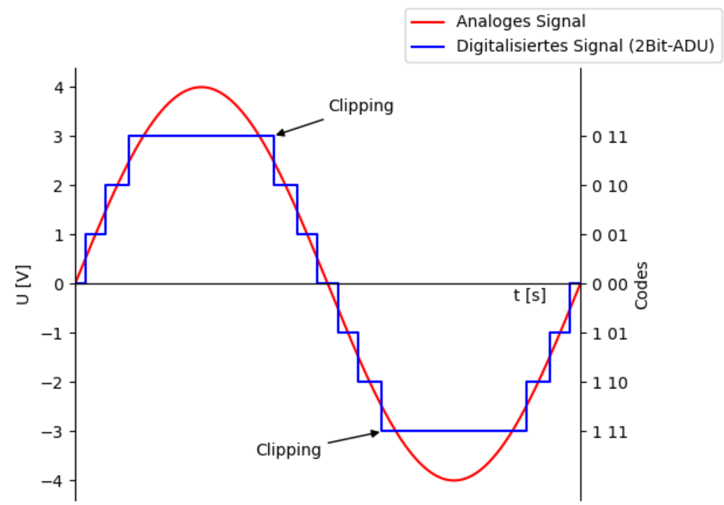
  $\rightarrow$ Handschriftliche Rechnung

  $\rightarrow$ Lösung: $SNR_{dB} = 20 \cdot log_{10}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}(2^N - 1)\right) = 49.89dB$

Aufgabe 5.1.5. Clipping

Clipping entsteht, wenn das Eingangssignal den Messbereich des ADU verlässt



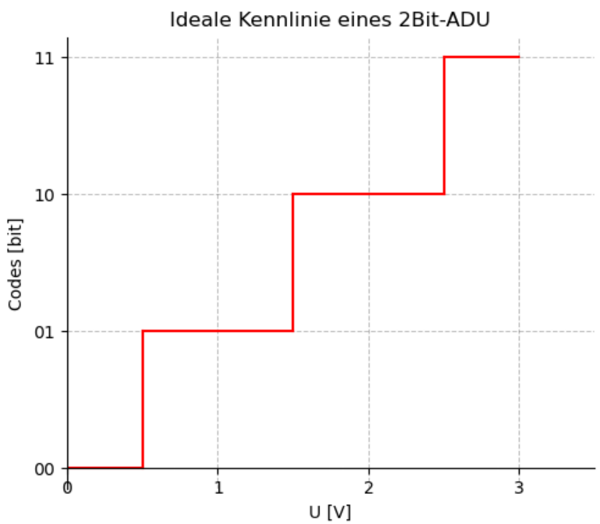


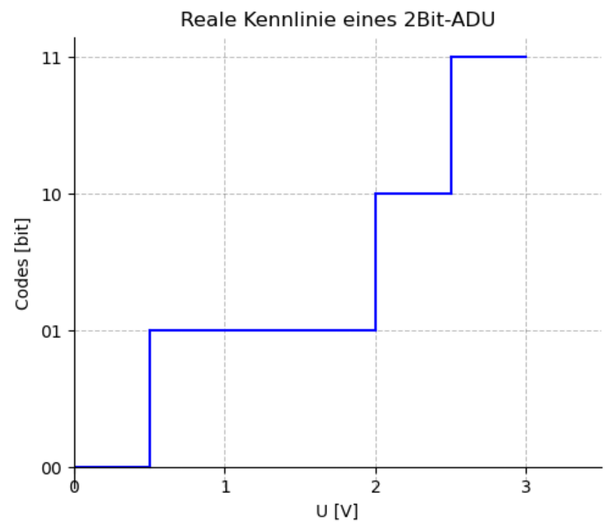
Nichtlinearität von ADU-Kennlinien

Reale Kennlinien von ADU verlaufen oft nicht so wie zu erwarten wäre (Idealer Verlauf)

Beispiel:

- 2Bit-ADU
- Spannungsbereich $0V \leq U_e \leq 3V$





Der angegebene ADU sollte theoretisch die links dargestellte Kennlinie besitzen. Stattdessen wurde die rechte Kennlinie experimentell ermittelt

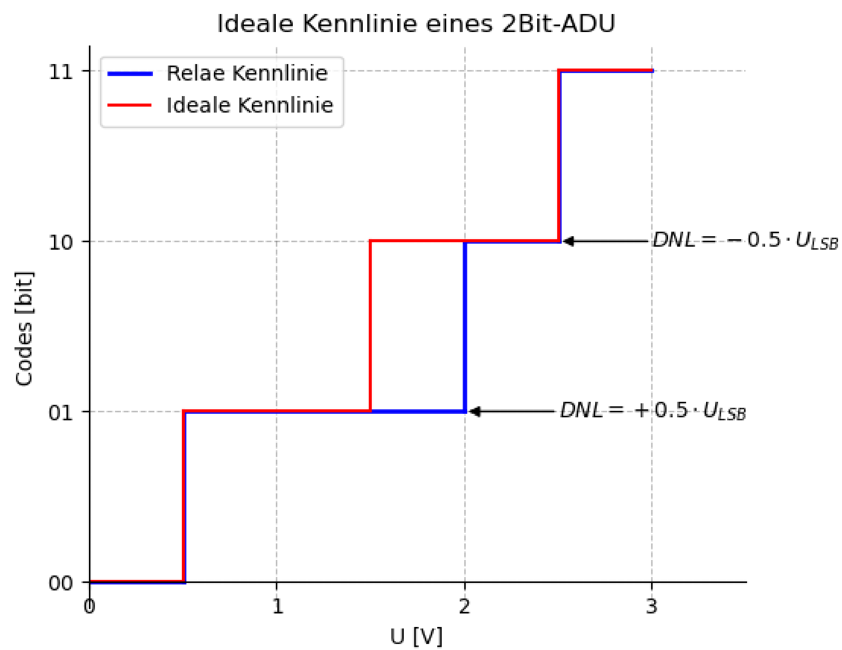
Aufgabe 5.1.6. Differentielle Nichtlinearität

Die Differentielle Nichtlinearität gibt für eine Stufe (Code) die Abweichung der realen von der Idealen Kennlinie bezogen auf die Ideale Stufenbreite (U_{LSB}) an

- $DNL = \frac{U_{Stufe} - U_{LSB}}{U_{LSB}}$

Beispiel im Plot:

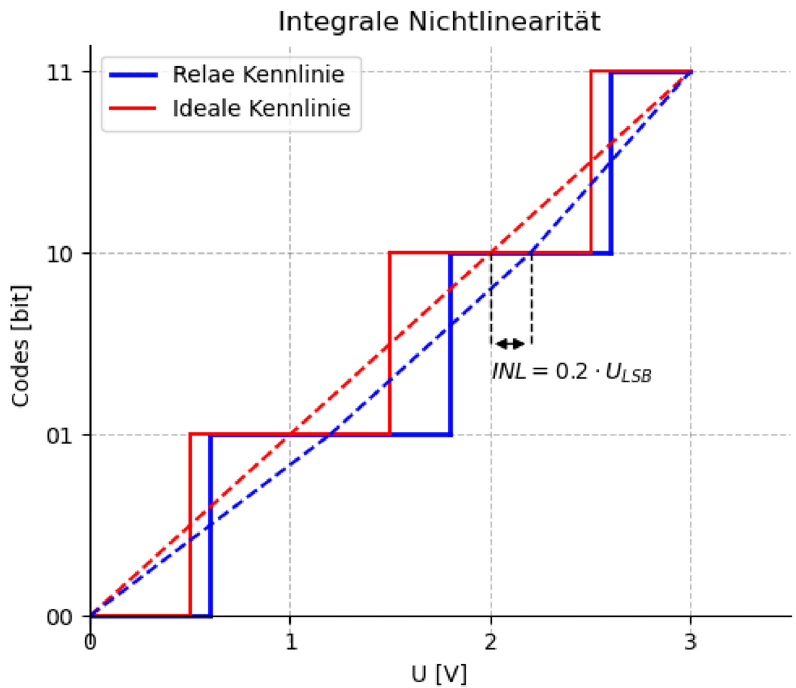
- $DNL_{00} = 0$
- $DNL_{01} = \frac{1.5V - 1V}{1V} = 0.5$
- $DNL_{10} = \frac{0.5V - 1V}{1V} = -0.5$
- $DNL_{11} = 0$



Aufgabe 5.1.6. Integrale Nichtlinearität

Die Integrale Nichtlinearität ist die maximale Abweichung zwischen:

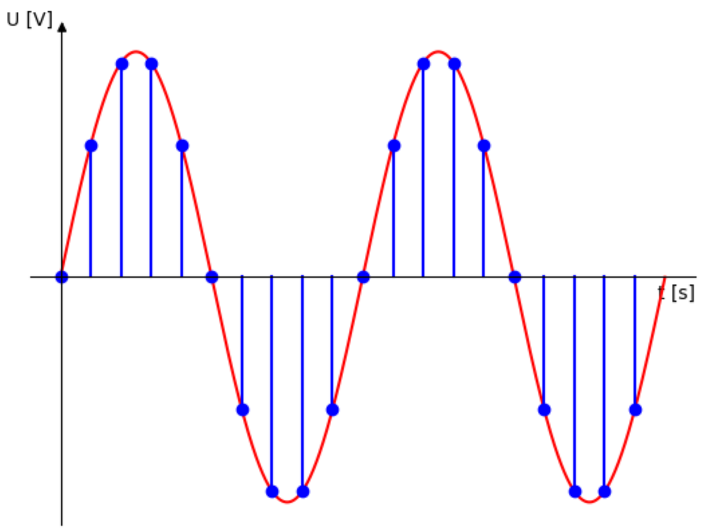
- Der Funktion durch die Mitten der Stufen der realen ADU-Kennlinie, und
- Der Funktion durch die Mitten der Stufen der idealen ADU-Kennlinie

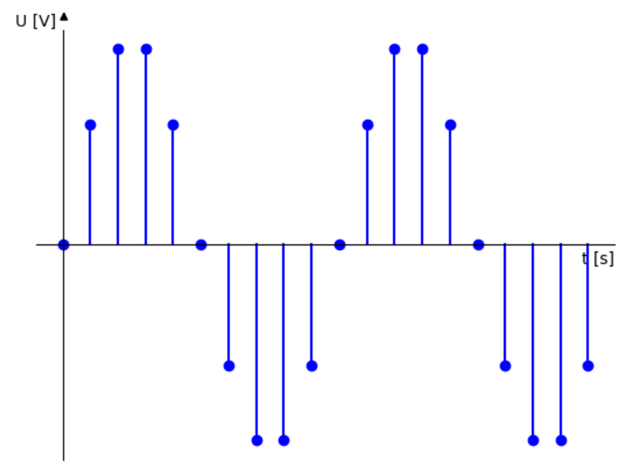


Aufgabe 5.2.1. Abtastung (Sampling)

Unter Abtastung wird die fortlaufende Erfassung einer analogen Messgröße zu diskreten Zeitpunkten verstanden. Diese Zeitpunkte haben zumeist einen konstanten Abstand T (äquidistante Abtastung). In diesem Falle ist kann eine Abtastfrequenz definiert werden:

- $f_0 = \frac{1}{T}$

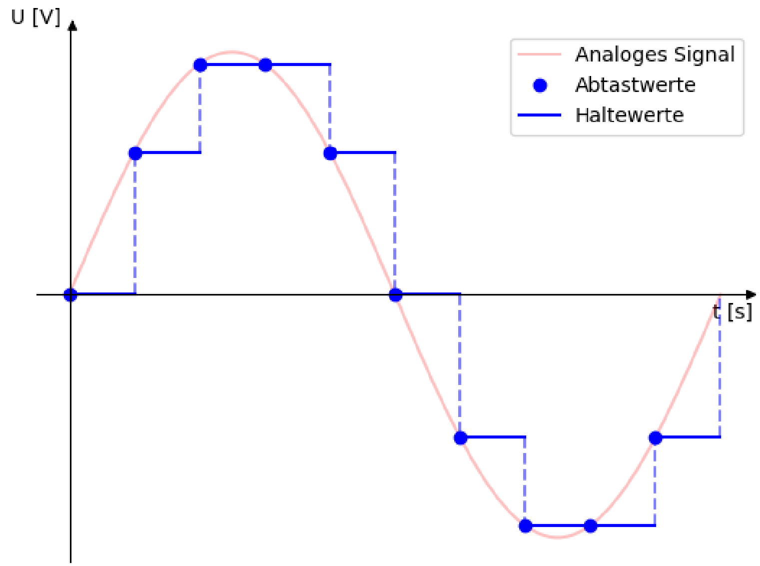




Aufgabe 5.2.1. Abtastung (Sampling)

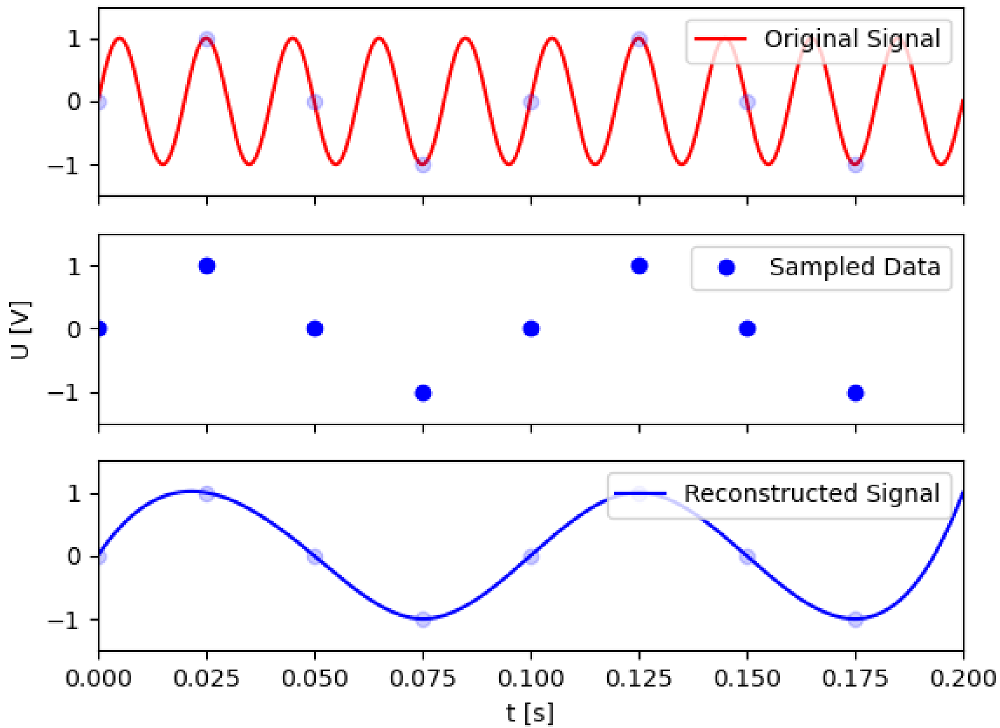
Wenn zu den Zeitpunkte zwischen den Abtastpunkten ein konstanter Wert angenommen wird, spricht man von *Sample & Hold*

Hierdurch können auch Werte zu Zeitpunkten angegeben werden, zu denen keine Abtastung stattfand



Aufgabe 5.3.1. Aliasing

Wird ein periodisches Signal zu niederfrequent abgetastet, so kann es den Anschein geben, das ursprüngliche Signal hätte eine geringere Frequenz



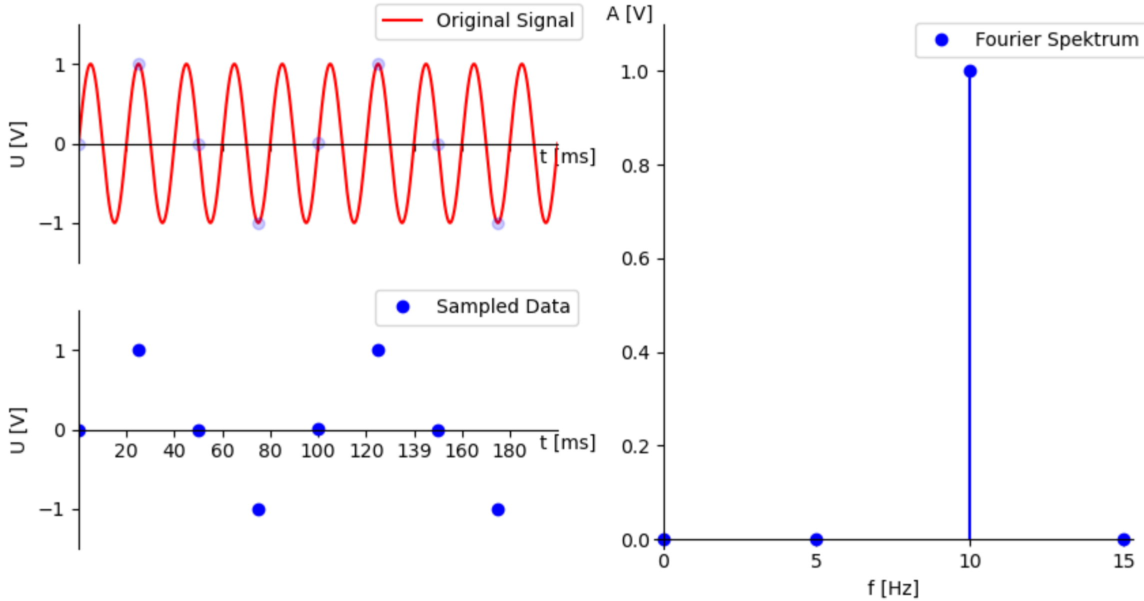
Aufgabe 5.3.1. Aliasing

Die Frequenzen des abgetasteten Signals können dem Fourier-Spektrum entnommen werden

Beispiel:

- Originales Signal: 50Hz
- Abtastfrequenz: 40Hz

→ Das Fourier-Spektrum zeigt ein Signal mit der Frequenz von 10Hz, obwohl das ursprüngliche Signal eine Frequenz von 50Hz hat

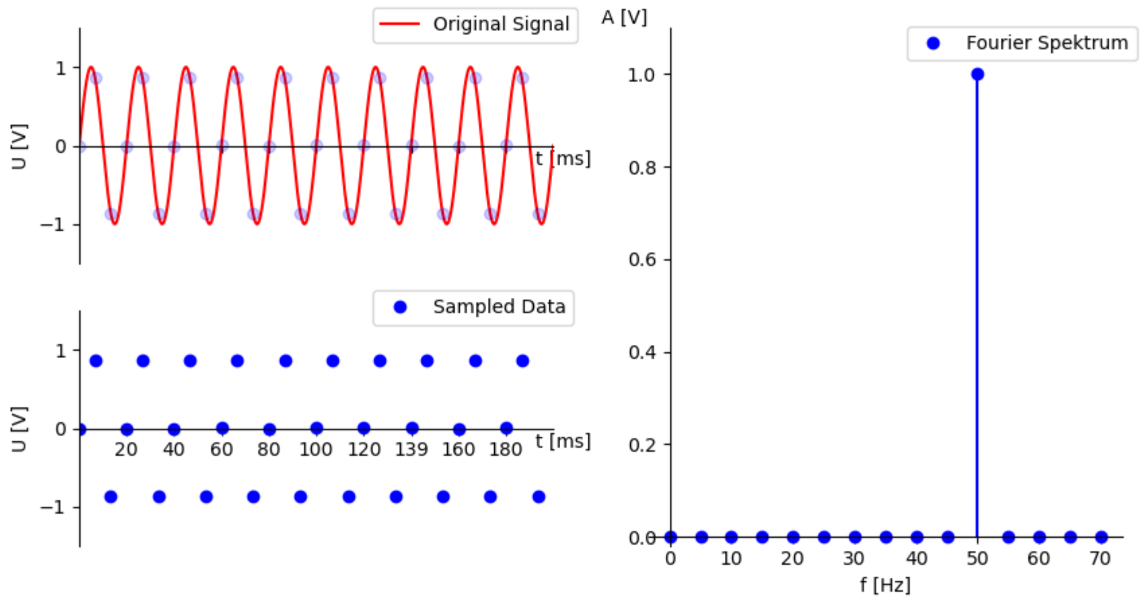


Aufgabe 5.3.1. Aliasing

Beispiel 2:

- Originales Signal: 50Hz
- Abtastfrequenz: 150Hz

→ Das Fourier-Spektrum zeigt ein Signal mit der Frequenz von 50Hz, was jener des ursprünglichen Signals entspricht



Aufgabe 5.3.1. Aliasing

Abtasttheorem nach Shannon:

Das abgetastete Signal darf nur Frequenzen beinhalten, welche kleiner als die halbe Abtastfrequenz sind:

- $f_0 > 2 \cdot f_{max}$

Andernfalls können Oberwellen als niederfrequent und somit Teil des Originalsignals wahrgenommen werden

Vermeidung:

Aliasing-Filter sollen alle Oberwellen $\geq \frac{f_0}{2}$ filtern, sodass keine Fehlinterpretationen durch Aliasing entstehen können

Aufgabe 5.3.2. Aliasing-Filter

Aliasing-Filter sollen hohe Frequenzen filtern: Dies entspricht einem Tiefpass-Verhalten

Entwurf des Aliasing-Filter (Tiefpasses):

- Alle Frequenzen $f \geq \frac{f_0}{2}$ müssen gefiltert werden
- Tiefpassfilter dämpfen nur die Amplitude, *löschen* die Frequenz aber nicht
- Wenn die Amplitude kleiner als die Auflösung (U_{LSB}) des ADU ist, kann sie von diesem nicht mehr erfasst werden

Fazit:

- Der Tiefpass muss alle Frequenzen $f \geq \frac{f_0}{2}$ so dämpfen, dass: $(U_{max} - U_{min}) < U_{LSB}$

Aufgabe 5.3.2. Aliasing-Filter

Die Steigung des Filter muss so gewählt werden, dass:

- Die Grenzfrequenz größer als die Frequenz des Grundsignals ist (Sonst würde das Grundsignal gedämpft werden)
  - $\omega_g > \omega_{Signal}$
- Die Dämpfung an der halben Abtastfrequenz muss so hoch sein dass die Amplituden nicht größer als die Auflösung werden
  - $A\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \cdot (U_{max} - U_{min}) < U_{LSB}$

Aufgabe 5.3.2. Aliasing-Filter

Die notwendige Dämpfung kann wie folgt berechnet werden:

$$A\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \cdot (U_{max} - U_{min}) < U_{LSB}$$

$$A\left(\frac{\omega_0}{2}\right) < \frac{U_{LSB}}{U_{max} - U_{min}}$$

Die Dämpfung wird i.d.R. in Dezibel angegeben:

$$\left|A\left(\frac{\omega_0}{2}\right)\right|_{dB} < 20log\left(\frac{U_{LSB}}{U_{max} - U_{min}}\right) \qquad \Big| \; \frac{U_{LSB}}{U_{max} - U_{min}} < 1 \;\rightarrow 20log\left(\frac{U_{LSB}}{U_{max} - U_{min}}\right) < 0$$

$$\left|A\left(\frac{\omega_0}{2}\right)\right|_{dB} \geq -1 \cdot 20log\left(\frac{U_{LSB}}{U_{max} - U_{min}}\right) \qquad \Big| \; -1 \cdot \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\right) = log\left(\frac{b}{a}\right)$$

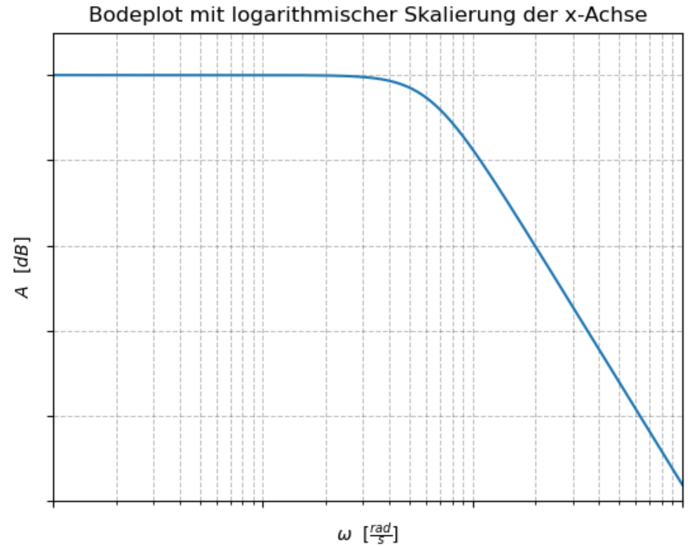
$$\left|A\left(\frac{\omega_0}{2}\right)\right|_{dB} \geq 20log\left(\frac{U_{max} - U_{min}}{U_{LSB}}\right)$$

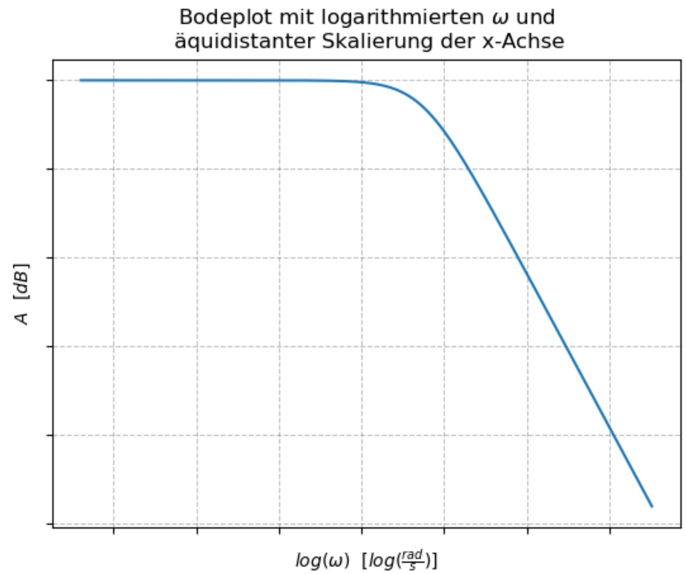
$$\left|A\left(\frac{\omega_0}{2}\right)\right|_{dB} \geq 20log\left(\frac{U_{max} - U_{min}}{\frac{U_{max} - U_{min}}{2^N - 1}}\right)$$

$$\left|A\left(\frac{\omega_0}{2}\right)\right|_{dB} \geq 20log(2^N - 1)$$

Aufgabe 5.3.2. Aliasing-Filter

Im Standard-Bodeplot ist die x-Achse logarithmisch skaliert. Es macht daher nur den Anschein, als sei die Steigung des Filters linear. Für eine tatsächlich lineare Steigung, muss zunächst ω logarithmiert werden:





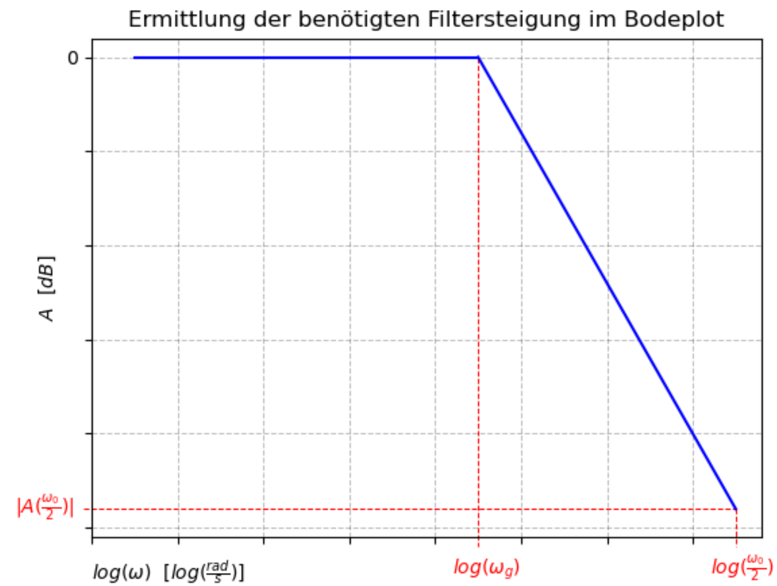
Aufgabe 5.3.2. Aliasing-Filter

Berechnung der Steigung des Tiefpasses (Zur Einfachereng betrachtung wird die Grenzfrequenz als Knick bei 0dB angenommen):

$$m = -\frac{\Delta A}{\Delta \log(\omega)}$$

$$m = \frac{0 - \left|A\left(\frac{\omega_0}{2}\right)\right|_{dB}}{\log\left(\frac{\omega_0}{2}\right) - \log(\omega_g)}$$

$$m = -\frac{\left|A\left(\frac{\omega_0}{2}\right)\right|_{dB}}{\log\left(\frac{\omega_0}{2\omega_g}\right)}$$



Aufgabe 5.3.2. Aliasing-Filter

Beispiel:

- 8-Bit ADU
- Abtastfrequenz: $f_0 = 20kHz$
- Grenzfrequenz: $f_g = 2kHz$

$$\left|A\left(\frac{\omega_0}{2}\right)\right|_{dB} \geq 20log(2^N - 1) = 20log(2^8 - 1)$$

$$\left|A\left(\frac{\omega_0}{2}\right)\right|_{dB} \geq 48.13dB$$

$$m = -\frac{\left|A\left(\frac{\omega_0}{2}\right)\right|_{dB}}{\log\left(\frac{\omega_0}{2\omega_g}\right)} = -\frac{48.13dB}{log\left(\frac{2\pi 20kHz}{4\pi 2kHz}\right)}$$

$$m = -68.86\frac{dB}{Dekade}$$

Aufgabe 5.3.2. Aliasing-Filter

Daumenregel zum Schätzen der benötigten Filterordnung:

- $-20 \frac{dB}{Dekade}$ pro Filterordnung
  - Filter 1. Ordnung hat die Steigung: $-20 \frac{dB}{Dekade}$
  - Filter 2. Ordnung hat die Steigung: $-40 \frac{dB}{Dekade}$
  - Filter 3. Ordnung hat die Steigung: $-60 \frac{dB}{Dekade}$
  - ….

Zum Beispiel:

Bei einer benötigten minimalen Steigung von $-68.86 \frac{dB}{Dekade}$ muss der Filter also

mindestens 4. Ordnung mit $-80 \frac{dB}{Dekade}$ sein

Aufgabe 5.3.2. Aliasing-Filter

Zum Beispiel:

Es soll überprüft werden ob ein Butterworth-Filter 4. Ordnung hier als Aliasing-Filter ausreicht:

$$G(s) = \frac{1}{(1+1{,}8478\ P+P^2)\cdot(1+0{,}7654\ P+P^2)}$$

$$G(s) = \frac{1}{(1+1{,}8478\ P+P^2)\cdot(1+0{,}7654\ P+P^2)}$$

$$G(s) = \frac{1}{\left(1+\frac{1{,}8478}{\omega_g}\ s+\frac{1}{\omega_g^2}s^2\right)\cdot\left(1+\frac{0{,}7654}{\omega_g}s+\frac{1}{\omega_g^2}s^2\right)}$$

N	i	a_i	b_i
1	1	1,0000	0,0000
2	1	$\sqrt{2}$	1,0000
3	1	1,0000	0,0000
	2	1,0000	1,0000
4	1	1,8478	1,0000
	2	0,7654	1,0000
5	1	1,0000	0,0000
	2	1,6180	1,0000
	3	0,6180	1,0000

$a_1 = 1{,}8478$
$b_1 = 1{,}0000$
$a_2 = 0{,}7654$
$b_2 = 1{,}0000$

Aufgabe 5.3.2. Aliasing-Filter

Zum Beispiel:

$$G(s) = \frac{1}{\left(1+\frac{1,8478}{\omega_g}\ s+\frac{1}{\omega_g^2}s^2\right)\cdot\left(1+\frac{0,7654}{\omega_g}s+\frac{1}{\omega_g^2}s^2\right)} \qquad |G\ (s \to j\omega),$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(1+j\frac{1,8478}{\omega_g}\ \omega-\frac{1}{\omega_g^2}\omega^2\right)\cdot\left(1+j\frac{0,7654}{\omega_g}\omega-\frac{1}{\omega_g^2}\omega^2\right)}$$

Betrachtung bei $\omega = \frac{\omega_0}{2}$:

$$G\left(j\,\frac{\omega_0}{2}\right) = \frac{1}{\left(1+j\frac{1,8478\omega_0}{2\omega_g}\ -\frac{{\omega_0}^2}{4\omega_g^2}\right)\cdot\left(1+j\frac{0,7654\omega_0}{2\omega_g}-\frac{{\omega_0}^2}{4\omega_g^2}\right)} \qquad |\ \omega_0 = 2\pi 20kHz, \omega_g = 2\pi 2kHz$$

$$G\left(j\,\frac{\omega_0}{2}\right) = \frac{1}{(-24+j9.239)\cdot(-24+j3.827)}$$

$$G\left(j\,\frac{\omega_0}{2}\right) = \frac{1}{540.642-j313.584}$$

Aufgabe 5.3.2. Aliasing-Filter

Zum Beispiel:

$$G\left(j\frac{\omega_0}{2}\right) = \frac{1}{540.642 - j313.584}$$

$$\left|G\left(j\frac{\omega_0}{2}\right)\right|_{dB} = 20\log\left(\left|\frac{1}{540.642 - j313.584}\right|\right)$$

$$\left|G\left(j\frac{\omega_0}{2}\right)\right|_{dB} = 20\log\left(\left|\frac{1}{540.642 - j313.584}\right|\right)$$

$$\left|G\left(j\frac{\omega_0}{2}\right)\right|_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{625.003}\right)$$

$$\left|G\left(j\frac{\omega_0}{2}\right)\right|_{dB} = -55.92dB$$

Da $55.92dB > 48.13dB$ reicht der Butterworth-Filter 4. Ordnung aus um Aliasing bei dem betrachteten 8-Bit ADU zu verhindern

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Prof. Dr.-Ing. Clemens Gühmann
Daniel Thomanek, M. Sc.

Technische Universität Berlin
Fakultät IV Elektrotechnik und Informatik
Institut für Energie und Automatisierungstechnik
Fachgebiet Elektronische Mess- und Diagnosetechnik