

1 Messunsicherheit

Lernziele

- Angabe des vollständigen Messergebnisses
- Grundbegriffe der Statistik (Mittelwert, Standardabweichung, Verteilungsfunktion und -dichte, Varianz, Erwartungswert, Histogramm, Vertrauensbereich)

Es wurde 10mal die Netzspannung gemessen. Die Messwerte sind in Tabelle 1.1 dargestellt. Als Messgerät wurde ein Digitalmultimeter vom Typ FLUKE 8846A verwendet. Der Messbereich wurde auf 1000 V Wechselspannung eingestellt. Die letzte Kalibrierung des Digitalmultimeters liegt 1 Jahr zurück.

N	1	2	3	4	5
U [V]	230,672	230,701	231,027	230,935	230,801
N	6	7	8	9	10
U [V]	230,584	230,777	230,848	230,797	230,448

Tabelle 1.1: Messwerte für die Netzspannung

Präsenzaufgaben

1.1 Messergebnis und Messfehler

1.1.1 Messergebnis und Messfehler

- Wie setzt sich das vollständige Messergebnis zusammen?
- Worin unterscheiden sich zufällige und systematische Fehler bezüglich ihrer Ursachen und Beschreibungen?

1.2 Zufällige Messabweichung

1.2.1 Häufigkeitsverteilung

- Wie können zufällige Messabweichungen beschrieben werden?
- Was versteht man unter den Begriffen "absolute" und "relative Häufigkeit"?
- Was ist ein Histogramm?
- Wie erstellt man ein Histogramm aus einem Satz von Messwerten?

- Skizzieren Sie das Histogramm des Datensatzes. Teilen sie die Werte dabei in 5 gleich große Klassen ein.

1.2.2 Verteilungsdichte

- Was ist eine Verteilungsdichte (Wahrscheinlichkeitsverteilung)? Bitte beachten Sie den diskreten und den stetigen Fall.

1.2.3 Verteilungsfunktion

- Was ist eine Verteilungsfunktion?
- Wie kann die Verteilungsfunktion aus der Verteilungsdichte berechnet werden?

1.2.4 Gaußverteilung

- Wie ist die Gaußverteilung definiert?
- Worin liegt ihre Bedeutung?
- Was ist nötig, um den Beispieldatensatz so gut wie möglich mit einer Gaußverteilung zu beschreiben?

1.2.5 Empirischer Mittelwert und empirische Varianz

- Was ist der empirische Mittelwert und die empirische Varianz?
- Wie berechnet sich der empirische Mittelwert und die empirische Standardabweichung?
- Berechnen Sie den empirischen Mittelwert und die empirische Standardabweichung für die gegebenen Messwerte.
- Skizzieren Sie die zu den Messwerten passende Gaußverteilung. Vergleichen Sie sie mit der Häufigkeitsverteilung aus Aufgabe 1.2.1.

1.2.6 Standardabweichung des Mittelwertes

- Wie berechnet sich die Standardabweichung des Mittelwertes einer Messreihe?
- Berechnen Sie die Standardabweichung des Mittelwertes der vorliegenden Messreihe.

1.3 Systematische Messabweichung

1.3.1 Systematische Messabweichung

- Welche möglichen systematischen Messabweichungen fallen Ihnen für den vorliegenden Fall ein?
- Welche dieser Einflüsse sind bekannt und können korrigiert werden?
- Für welche dieser Einflüsse lässt sich eine Unsicherheit angeben?

1.3.2 Systematische Messabweichung durch das Messgerät

- Bestimmen Sie die Genauigkeit des Messgerätes für den vorliegenden Fall.
- Bestimmen Sie die Unsicherheit durch das Messgerät verursachten systematischen Abweichung

1.4 Vollständiges Messergebnis

1.4.1 Erweiterte Messunsicherheit

- Was ist die erweiterte Messunsicherheit und wie wird sie berechnet?
- Geben Sie die erweiterte Messunsicherheit für den vorliegenden Fall für ein Vertrauensintervall von 99% an

1.4.2 Vollständiges Messergebnis

- Geben Sie das vollständige Messergebnis an.

Zusatzaufgaben

1.4.3 Verteilungsdichten, Verteilungsfunktionen, Erwartungswerte

Gelegentlich sind Verteilungsdichten oder Verteilungsfunktionen ohne einen Beispieldatensatz gegeben (entweder wurden sie aus einem nicht mehr vorhandenen Datensatz geschätzt oder sie beruhen auf theoretischen Überlegungen). In diesem Fall müssen die interessierenden statistischen Parameter aus der Verteilungsdichte oder der Verteilungsfunktion bestimmt werden. Es sei die Verteilungsdichte

$$f_x(x) = \begin{cases} 1/2; & 0 < x \leq 1 \\ 1/4; & 1 < x \leq 3 \\ 0; & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

1. Skizzieren Sie die Verteilungsdichte.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ .
Ergebnis: $\mu = \frac{5}{4}$, $\sigma = 0,88$
3. Geben Sie die zugehörige Verteilungsfunktion an und skizzieren Sie sie.

Ergebnis:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}, & 1 < x \leq 3 \\ 1, & 3 < x \end{cases}$$

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Zufallsexperiment der Wert (Realisierung) für x im Bereich $[0,5; 1,5]$ liegt?
Ergebnis: $P(0,5 \leq x \leq 1,5) = \frac{3}{8}$
5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Zufallsexperiment der Wert für x im Bereich $[1; 100]$ liegt?

Ergebnis: $P(1 \leq x \leq 100) = \frac{1}{2}$

1.4.4 Auswertung einer Messreihe

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R [Ω]	4713,7	4706,5	4689,3	4712,5	4686,4	4680,9	4688,6	4710,2	4682,8	4720,4

Tabelle 1.2: Messwerte des Widerstandes

1. Es sind der Mittelwert und die Standardabweichung aus den 10 Messwerten zu berechnen.

Ergebnis: $\bar{x} = 4699,1 \Omega$, $s = 14,9 \Omega$

2. Es ist die Standardabweichung des Mittelwerts zu berechnen.

Ergebnis: $s_{\bar{x}} = 4,71 \Omega$

3. Es ist das vollständige Messergebnis für den Wert des Widerstandes anzugeben. Die absoluten Fehlergrenzen des Messgerätes seien $\pm 0,01\%$ des Messbereichendwertes und der Messbereich $10 \text{ k}\Omega$.

Ergebnis: $R = (4699,1 \pm 4,74) \Omega$

4. Wie groß müsste der Stichprobenumfang N sein, damit die Messunsicherheit maximal 1Ω beträgt?

Ergebnis: $N \geq 333$

5. Angenommen die Messwerte seien normalverteilt und Erwartungswert sowie Standardabweichung wurden exakt geschätzt, d.h. $\bar{x} = \mu$ und $s = \sigma$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Messwert außerhalb des durch die Messunsicherheit aufgespannten Intervalls liegt?

Ergebnis: $P(x \notin [\bar{x} - u, \bar{x} + u]) = 74,9\%$

6. Angenommen die Messwerte sind normalverteilt. Wie groß ist das Intervall, in dem der Erwartungswert μ der Messwerte mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegt? Wie groß ist dieses Intervall für eine Wahrscheinlichkeit von 99% ?

Ergebnis: $V_{95} = [4688 \Omega, 4710 \Omega]$, $V_{99} = [4684 \Omega, 4714 \Omega]$

Tabellen

Wechselspannungsspezifikationen

Wechselspannungsspezifikationen sind für Wechselspannungs-Sinuswellensignale $>5\%$ von Bereich. Für Eingänge von 1% bis 5% von Bereich und $<50\text{ kHz}$ zusätzlichen Fehler von $0,1\%$ von Bereich hinzufügen, und für 50 kHz bis 100 kHz $0,13\%$ von Bereich hinzufügen.

Maximaleingang..... 750 V eff. oder 1000 V Spitze (8845A), 1000 V eff. oder 1414 V Spitze (8846A) oder Produkt 8×10^7 volt-Hertz (es gilt der jeweils kleinere Wert) für alle Bereiche.

Messmethode Wechselstromgekoppelter Echteffektivwert (rms). Misst die Wechselstromkomponente von Eingang mit bis zu 1000 V Gleichspannungsbias auf allen Bereichen.

Wechselstromfilter-Bandbreite:

Langsam 3 Hz – 300 kHz

Mittel 20 Hz – 300 kHz

Schnell 200 Hz – 300 kHz

Gleichtaktunterdrückung 70 dB bei 50 Hz oder 60 Hz $\pm 0,1\%$ (1 k Ω Unsymmetrie)

Spitzenfaktor-Fehler (trifft nur auf nicht-sinusförmige Spannungen zu)

Unsymmetrie) 5:1 auf Gesamtmessbereich

Zusätzliche Spitzenfaktorfehler ($<100\text{ Hz}$)..... Spitzenfaktor 1-2, 0,05 % von Gesamtmessbereich

Spitzenfaktor 2-3, 0,2 % von Gesamtmessbereich

Spitzenfaktor 3-4, 0,4 % von Gesamtmessbereich

Spitzenfaktor 4-5, 0,5 % von Gesamtmessbereich

Eingangskennndaten

Bereich	Auflösung	Anzeigewert			Eingangsimpedanz
		4½ Stellen	5½ Stellen	6½ Stellen	
100 mV	100,0000mV	10 μV	1 μV	100 nV	1 M Ω $\pm 2\%$ parallelgeschaltet mit <100 pF
1 V	1,000000 V	100 μV	10 μV	1 μV	
10 V	10,00000 V	1mV	100 μV	10 μV	
100 V	100,0000 V	10 mV	1 mV	100 μV	
1000 V	1,000,000 V	100 mV	10mV	1 mV	

Bild 1.1: Auszug (S. 1-13) aus: Bedienungshandbuch 8845A/8846A Digital Multimeter Fluke 8845A/8846A

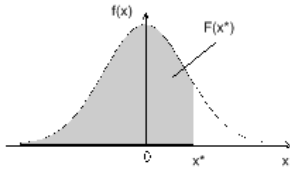
8846A GenauigkeitGenauigkeit: $\pm(\% \text{ Messwert} + \% \text{ Bereich})$

Bereich	Frequenz	24 Stunden (23 \pm 1 °C)	90 Tage (23 \pm 5 °C)	1 Jahr (23 \pm 5 °C)	Temperaturkoeffizient/ °C Außenluft 18 bis 28 °C
100 mV	3 – 5 Hz	1,0 + 0,03	1,0 + 0,04	1,0 + 0,04	0,1 + 0,004
	5 – 10 Hz	0,35 + 0,03	0,35 + 0,04	0,35 + 0,04	0,035 + 0,004
	10 Hz – 20 kHz	0,04 + 0,03	0,05 + 0,04	0,06 + 0,04	0,005 + 0,004
	20 – 50 kHz	0,1 + 0,05	0,11 + 0,05	0,12 + 0,05	0,011 + 0,005
	50 – 100 kHz	0,55 + 0,08	0,6 + 0,08	0,6 + 0,08	0,06 + 0,008
	100 – 300 kHz ^[1]	4,0 + 0,50	4,0 + 0,50	4,0 + 0,50	0,20 + 0,02
1 V	3 – 5 Hz	1,0 + 0,02	1,0 + 0,03	1,0 + 0,03	0,1 + 0,003
	5 – 10 Hz	0,35 + 0,02	0,35 + 0,03	0,35 + 0,03	0,035 + 0,003
	10 Hz – 20 kHz	0,04 + 0,02	0,05 + 0,03	0,06 + 0,03	0,005 + 0,003
	20 – 50 kHz	0,1 + 0,04	0,11 + 0,05	0,12 + 0,05	0,011 + 0,005
	50 – 100 kHz	0,55 + 0,08	0,6 + 0,08	0,6 + 0,08	0,06 + 0,008
	100 – 300 kHz ^[1]	4,0 + 0,50	4,0 + 0,50	4,0 + 0,50	0,2 + 0,02
10 V	3 – 5 Hz	1,0 + 0,02	1,0 + 0,03	1,0 + 0,03	0,1 + 0,003
	5 – 10 Hz	0,35 + 0,02	0,35 + 0,03	0,35 + 0,03	0,035 + 0,003
	10 Hz – 20 kHz	0,04 + 0,02	0,05 + 0,03	0,06 + 0,03	0,005 + 0,003
	20 – 50 kHz	0,1 + 0,04	0,11 + 0,05	0,12 + 0,05	0,011 + 0,005
	50 – 100 kHz	0,55 + 0,08	0,6 + 0,08	0,6 + 0,08	0,06 + 0,008
	100 – 300 kHz ^[1]	4,0 + 0,50	4,0 + 0,50	4,0 + 0,50	0,2 + 0,02
100 V	3 – 5 Hz	1,0 + 0,02	1,0 + 0,03	1,0 + 0,03	0,1 + 0,003
	5 – 10 Hz	0,35 + 0,02	0,35 + 0,03	0,35 + 0,03	0,035 + 0,003
	10 Hz – 20 kHz	0,04 + 0,02	0,05 + 0,03	0,06 + 0,03	0,005 + 0,003
	20 – 50 kHz	0,1 + 0,04	0,11 + 0,05	0,12 + 0,05	0,011 + 0,005
	50 – 100 kHz	0,55 + 0,08	0,6 + 0,08	0,6 + 0,08	0,06 + 0,008
	100 – 300 kHz ^[1]	4,0 + 0,50	4,0 + 0,50	4,0 + 0,50	0,2 + 0,02
1000 V	3 – 5 Hz	1,0 + 0,015	1,0 + 0,0225	1,0 + 0,0225	0,1 + 0,00225
	5 – 10 Hz	0,35 + 0,015	0,35 + 0,0225	0,35 + 0,0225	0,035 + 0,00225
	10 Hz – 20 kHz	0,04 + 0,015	0,05 + 0,0225	0,06 + 0,0225	0,005 + 0,00225
	20 – 50 kHz	0,1 + 0,03	0,11 + 0,0375	0,12 + 0,0375	0,011 + 0,00375
	50 – 100 kHz ^[2]	0,55 + 0,06	0,6 + 0,06	0,6 + 0,06	0,06 + 0,006
	100 – 300 kHz ^{[1][2]}	4,0 + 0,375	4,0 + 0,375	4,0 + 0,375	0,2 + 0,015

[1] Typisch 30 % Messwertfehler bei 1 MHz

[2] 1000 V Spannungsbereich ist auf 8×10^7 Volt-Hertz begrenzt

Bild 1.2: Auszug (S. 1-143) aus: Bedienungshandbuch 8845A/8846A Digital Multimeter Fluke 8845A/8846A



Ablesebeispiel= $F(1.56)=0.9406$
 Erweiterung der Tabelle: $F(-x^*)=1-F(x^*)$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0,1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0,2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0,3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0,4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0,5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0,6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0,7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0,8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0,9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1,0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1,1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1,2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1,3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1,4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1,5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1,6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1,7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1,8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1,9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2,0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817

Bild 1.3: Werte der Standardnormalverteilung

Tabelle 1.3: Werte der Student-t-Verteilung

Anzahl N der Einzelwerte	Werte für t und $\frac{t_p}{\sqrt{N}}$							
	1 σ -Regel $P = 68,3 \%$		3 σ -Regel $P = 99,73 \%$		$P = 95 \%$		$P = 99 \%$	
	t_p	$\frac{t_p}{\sqrt{N}}$	t_p	$\frac{t_p}{\sqrt{N}}$	t_p	$\frac{t_p}{\sqrt{N}}$	t_p	$\frac{t_p}{\sqrt{N}}$
	t_p	$\frac{t_p}{\sqrt{N}}$	t_p	$\frac{t_p}{\sqrt{N}}$	t_p	$\frac{t_p}{\sqrt{N}}$	t_p	$\frac{t_p}{\sqrt{N}}$
(2)	(1,8)	(1,3)	(235)	(166)	(12,7)	(9,0)	(64)	(45)
3	1,32	0,76	19,2	11,1	4,3	2,5	9,9	5,7
4	1,20	0,60	9,2	4,6	3,2	1,6	5,8	2,9
5	1,15	0,51	6,6	3,0	2,8	1,24	4,6	2,1
6	1,11	0,45	5,5	2,3	2,6	1,05	4,0	1,6
8	1,08	0,38	4,5	1,6	2,4	0,84	3,5	1,24
10	1,06	0,34	4,1	1,29	2,3	0,72	3,25	1,03
20	1,03	0,23	3,4	0,77	2,1	0,47	2,9	0,64
30	1,02	0,19	3,3	0,60	2,05	0,37	2,8	0,50
50	1,01	0,14	3,16	0,45	2,0	0,28	2,7	0,38
100	1,00	0,10	3,1	0,31	2,0	0,20	2,6	0,26
200	1,00	0,07	3,04	0,22	1,97	0,14	2,6	0,18
sehr groß (über 200)	1,0	0	3,0	0	1,96	0	2,58	0