

最速反馈控制的不变性*

韩京清

(中国科学院数学与系统科学研究院系统科学研究所, 北京 100080)

摘要 变结构控制对系统模型和扰动具有一定的不变性是众所周知的事实. 最速反馈控制是以其开关曲线为滑动曲线的变结构控制. 本文用变结构控制理论来讨论修正了的最速反馈控制对一定范围的系统扰动具有完全的不变性, 即完全能够抑制一定范围的扰动作用, 而且闭环系统的所有轨线, 在理论上, 都以有限时间到达原点. 这就为设计高效非线性反馈提供了一条有效途径, 还给出了避免高频颤震来实现最速反馈控制的数字化办法.

关键词 最速反馈控制, 变结构控制, 扰动抑制.

MR(2000) 主题分类号 93D09

二阶纯积分环节的最速反馈控制的开关曲线是上世纪 50 年代末最优控制理论早已阐述清楚了, 曾试图应用于反馈控制的设计上^[1]. 然而, 由于没有找到避免颤震现象的合适办法和数字控制技术没有足够发达, 没能在反馈控制设计上得到广泛应用. 实际上, 最速反馈控制可以看作以其开关曲线为滑动曲线的变结构控制. 变结构控制对系统模型和扰动具有一定的不变性是众所周知的事实^[2-3]. 本文用变结构控制理论来讨论由不同形式滑动曲线所生成的变结构控制对系统模型和扰动的抑制能力上的差异, 指出最速反馈控制型变结构控制具有较理想的抑制扰动的能力, 因此用它来设计反馈控制应该会比较理想的. 至于闭环系统中避免颤震的问题, 文中也指出了数字化实现最速反馈控制的具体公式, 是离散系统的最速反馈控制律. 这个反馈控制律用于数字化控制, 完全能够避免高频颤震现象并能实现很好的闭环动态性能.

我们考察的被控对象为如下二阶系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = w + u, \end{cases} \quad (1)$$

其中 w 是对系统的所有扰动的总和, 包括系统确定性模型及不确定模型的作用 (可称为系统的内扰) 和所有外扰作用, u 是控制输入, 可以取系统状态变量的反馈函数: $u = u(x_1, x_2)$.

今设

$$s = s(x_1, x_2) = 0, \quad s(0, 0) = 0, \quad sx_2 < 0 \quad (2)$$

* 国家自然科学基金 (60174027) 资助课题.

收稿日期: 2002-07-10, 收到修改稿日期: 2003-12-05.

是把整个相平面分成 $s > 0$ 和 $s < 0$ 的两部分并且通过原点的一曲线.

对系统 (1) 取如下形式的反馈控制:

$$u = -r_1 \text{sign}(s), \quad (3)$$

得闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -r_1 \text{sign}(s) + w, \end{cases} \quad (4)$$

先考察曲线 (2) 为直线

$$s = x_1 + kx_2 \quad (5)$$

的情形.

这时,

$$u = -r_1 \text{sign}(x_1 + kx_2), \quad (6)$$

系统 (4) 成为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -r_1 \text{sign}(x_1 + kx_2) + w, \end{cases} \quad (7)$$

变结构系统到达滑动线的到达条件为

$$s\dot{s} < 0. \quad (8)$$

由于

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{\partial s}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial s}{\partial x_2} (-r_1 \text{sign}(s) + w) = x_2 + k(-r_1 \text{sign}(s) + w), \\ s\dot{s} &= sx_2 - ks(-r_1 \text{sign}(s) - w) = |s|(x_2 \text{sign}(s) - kr_1 + kw \text{sign}(s)). \end{aligned}$$

欲使此式成为负, 必须满足

$$\left(\frac{x_2}{k} + w\right) \text{sign}(s) < r_1. \quad (9)$$

如果假定 w 是不确定扰动, 满足限制条件 $|w| < r_2 < r_1$, 那么

$$\left|\frac{x_2}{k}\right| < r_1 - r_2 \quad (10)$$

时能保证满足到达条件 (8). 也就是说, 在直线 $s = 0$ 上, 不等式 (10) 所限定的线段 L (如图 1 上连接点 a, b 的线段) 上是满足到达条件 (8) 的.

由于系统 (7) 的加速度的绝对值始终大于 $r_1 - r_2$, 线段 L 附近的轨线总以有限时间到达 L (见图 1). 在 L 上的速度方向是按 Filippov^[3,4] 定义, 是由 L 两侧速度方向的凸组合, 即

$$\alpha[x_2, -r_1 + w] + (1 - \alpha)[x_2, r_1 + w] = [x_2, (1 - 2\alpha)r_1 + w]$$

与线段 L 的相切条件

$$\frac{x_2}{k} + (1 - 2\alpha)r_1 + w = 0$$

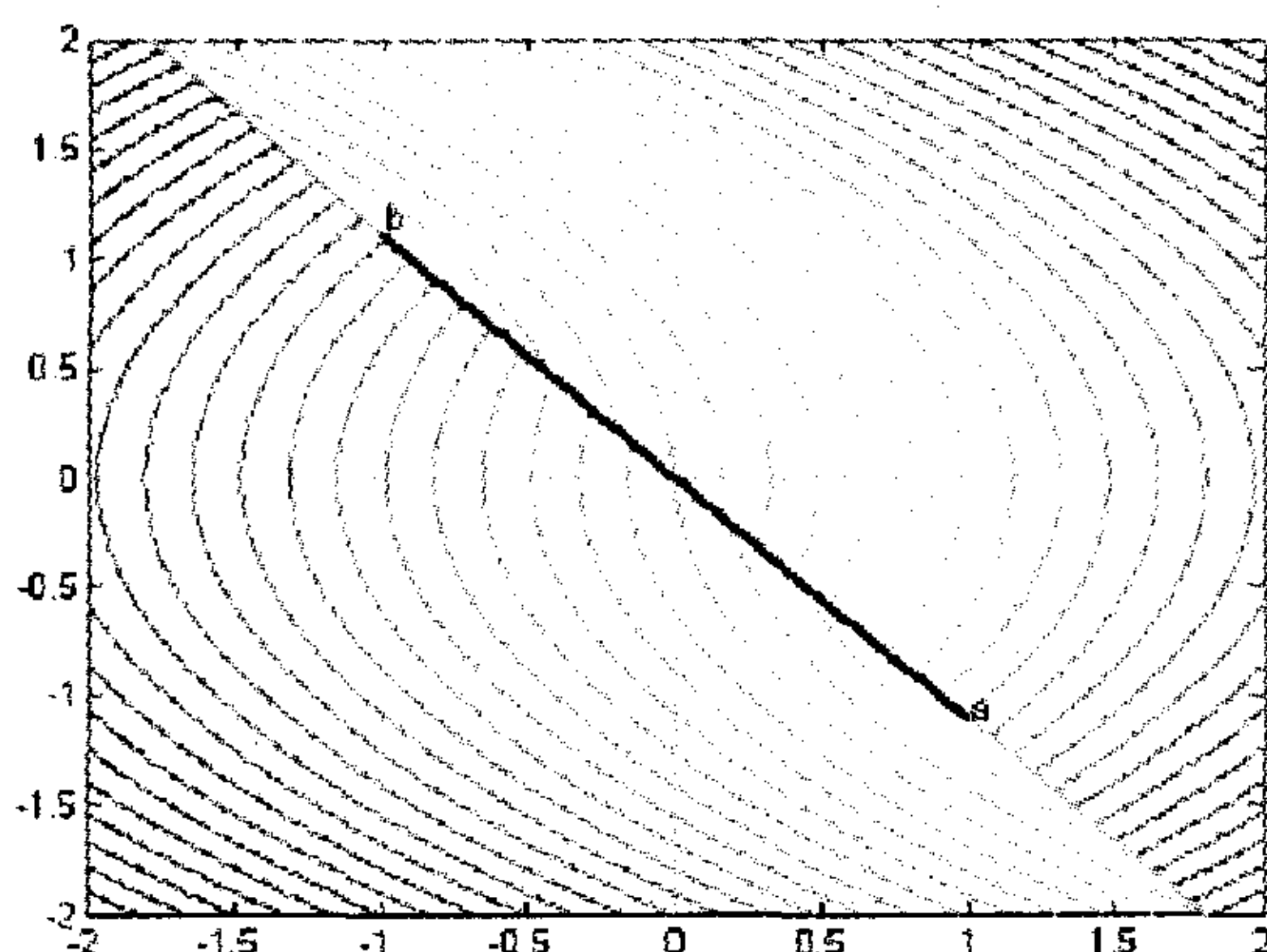


图 1

来决定. 于是线段 L 上的运动方程变成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{x_2}{k}. \end{cases}$$

它与扰动 w 无关, 但其运动沿线段 L 以指数衰减率收敛于原点. 至于远离 L 的轨线, 由于系统 (7) 的加速度 $\ddot{x}_2 = -r_1 \text{sign}(x_1 + kx_2) + w < 0$, 要么经有限次切换到达线段 L 的非原点, 然后以指数衰减率收敛于原点, 要么, 特殊情形, 经几次切换, 以有限时间直接到达原点. 不管什么情形, 只要扰动 w 的作用不超出 $r_2 (< r_1)$ 界限, 变结构系统 (7) 能抑制其作用而使所有轨线收敛于原点, 但基本上是以指数衰减率收敛的. 以上就是以直线为滑动曲线的变结构控制系统轨线特性.

在这里, 直线 $s = x_1 + kx_2 = 0$ 的斜率 $-\frac{1}{k}$ 是常值. 但变结构系统 (7) 的轨线斜率则是

$$\frac{-r_1 \text{sign}(s) + w}{x_2},$$

只要 $|x_2|$ 足够大, 就有

$$\left| \frac{-r_1 \text{sign}(s) + w}{x_2} \right| < \frac{1}{k},$$

总有一部分轨线从直线 $s = 0$ 离去, 因而不能满足到达条件. 因此, 要想在整个滑动曲线上都要满足到达条件, 滑动曲线不能取固定斜率的直线, 必须取随 $|x_2|$ 的增大斜率能变小的曲线.

下面我们考察一种非直线形滑动曲线所生成的变结构控制的扰动抑制能力.

当 $w \equiv 0$ 时, 被控系统 (1) 为纯积分器串联型. 在限制条件 $|u| < r$ 下, 其最速反馈控制就是以开关曲线

$$s = x_1 + \frac{x_2|x_2|}{2r} = 0 \quad (11)$$

为滑动曲线的变结构控制:

$$u = -r \operatorname{sign}\left(x_1 + \frac{x_2 |x_2|}{2r}\right). \quad (12)$$

现在把反馈控制 (12) 中的增益 r 改为 r_1 , 括号中 r 保持不变, 得

$$u = -r_1 \operatorname{sign}\left(x_1 + \frac{x_2 |x_2|}{2r}\right), \quad (13)$$

把它代到系统 (1) 中, 得变结构系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -r_1 \operatorname{sign}\left(x_1 + \frac{x_2 |x_2|}{2r}\right) + w. \end{cases} \quad (14)$$

这个闭环系统对总扰动 (内扰和外扰的总和) w 的抑制能力和动态特性如何呢?

由于对式 (11) 定义的滑动曲线 $s = 0$ 来说

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{x_2}{r} \operatorname{sign}(x_2) = \frac{|x_2|}{r}.$$

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial s}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \left(x_2 - \frac{r_1}{r} |x_2| \left(\operatorname{sign}(s) - \frac{w}{r_1}\right)\right). \quad (15)$$

于是

$$s\dot{s} = s \left(x_2 - \frac{r_1}{r} |x_2| \left(\operatorname{sign}(s) - \frac{w}{r_1}\right)\right) = |s| |x_2| \left(\operatorname{sign}(s) \left(\operatorname{sign}(x_2) + \frac{w}{r}\right) - \frac{r_1}{r}\right).$$

欲使

$$\frac{r_1}{r} > \operatorname{sign}(s) \left(\operatorname{sign}(x_2) + \frac{w}{r}\right)$$

成立, 由于

$$\left|\operatorname{sign}(s) \left(\operatorname{sign}(x_2) + \frac{w}{r}\right)\right| < 1 + \frac{|w|}{r},$$

只要假定

$$|w| < r_2, \quad r + r_2 < r_1, \quad (16)$$

就有

$$s\dot{s} < 0. \quad (17)$$

由曲线 (11) 定义的滑动曲线 (开关曲线), 当条件 (16) 成立时, 在整个滑动曲线上都满足到达条件 (17) (见图 2).

进一步, 变结构系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -r_1 \operatorname{sign}(s) + w, \end{cases} \quad |w| < r_2, \quad (18)$$

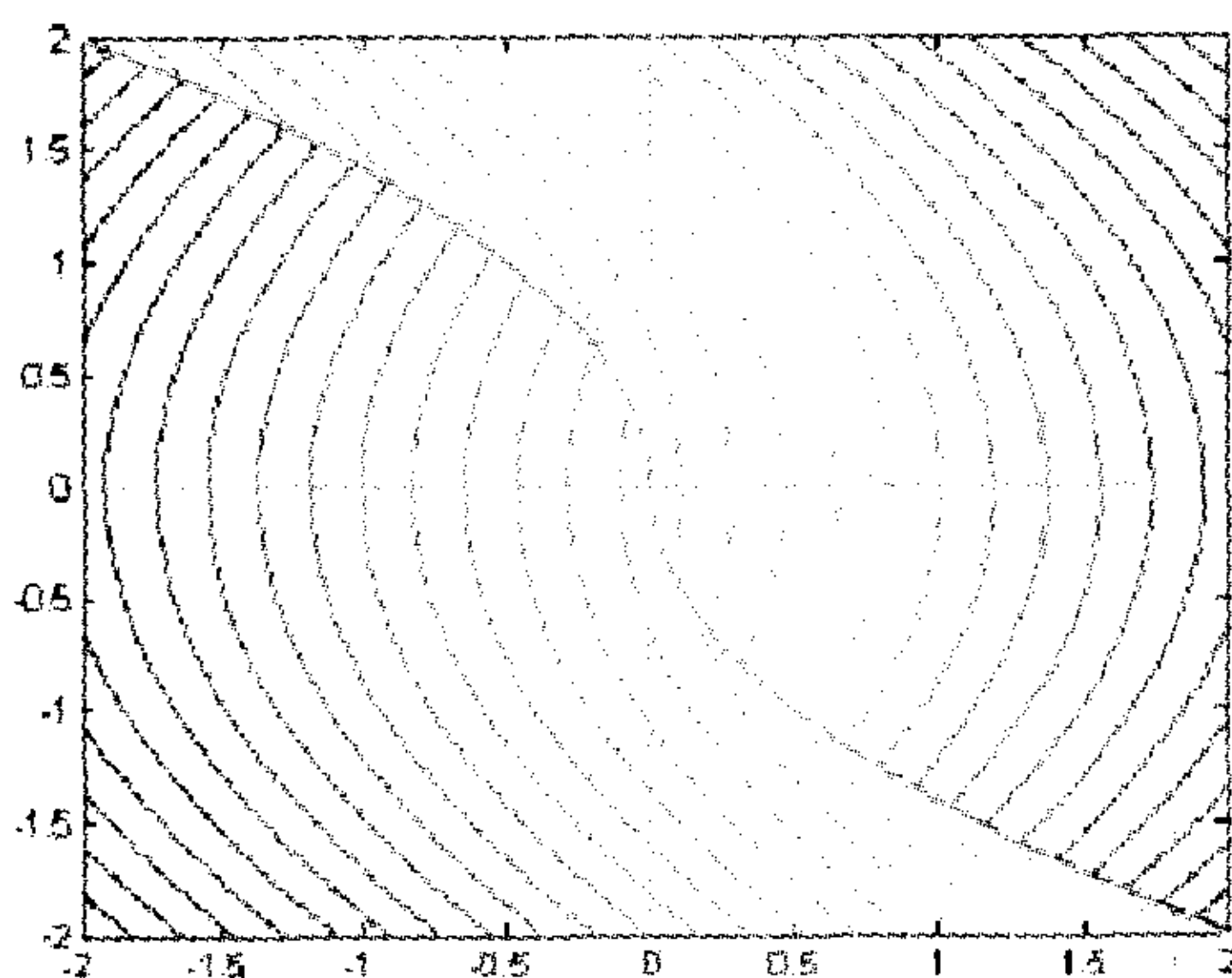


图 2

的第二个方程右端加速度满足如下不等式

$$-(r_1 + r_2) \leq -(r_1 \text{sign}(s) + w) \leq -(r_1 - r_2), \quad s > 0;$$

$$(r_1 - r_2) \leq -(r_1 \text{sign}(s) + w) \leq (r_1 + r_2), \quad s < 0.$$

其绝对值总是大于等于 $r_1 - r_2 > 0$, 而轨线到达滑动曲线之前其加速度不会变号, 因此从开关曲线以外的初始点出发的轨线总是以有限时间到达滑动曲线 $s = 0$. 在滑动曲线上, 轨线的方向是按 Filippov 的定义, 是滑动线两侧轨线方向的凸组合来决定, 即

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \alpha(r_1 + w) + (1 - \alpha)(-r_1 + w), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -r_1(1 - 2\alpha) + w, \end{cases}$$

其中, α 是由相切条件

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x_1}, \frac{\partial s}{\partial x_2} \right) \begin{bmatrix} x_2 \\ -r_1(1 - 2\alpha) + w \end{bmatrix} = \left(1, \frac{|x_2|}{r} \right) \begin{bmatrix} x_2 \\ -r_1(1 - 2\alpha) + w \end{bmatrix} = 0$$

决定出

$$-r_1(1 - 2\alpha) = -r \text{sign}(x_2) - w.$$

因此, 在滑动曲线 $s = 0$ 上的运动应满足微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -r_1(1 - 2\alpha) + w, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -r \text{sign}(x_2), \end{cases}$$

也与扰动 w 无关, 且此轨线的加速度大小总是 $r > 0$, 也是以有限时间到达原点的.

由此得到如下定理

定理 在控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = w + u, \end{cases} \quad (19)$$

中取变结构反馈控制

$$u = -r_1 \operatorname{sign}\left(x_1 + \frac{x_2 |x_2|}{2r}\right), \quad r < r_1, \quad (20)$$

那么闭环系统能够完全抑制满足不等式

$$|w| < r_2 = r_1 - r \quad (21)$$

的任意扰动 w 的作用, 并且闭环系统的所有轨线最多切换一次后沿滑动曲线以有限时间到达原点.

换句话说, 当考察扰动 (内扰和外扰之总和) 作用范围 (21) 的控制问题时, 只要取变结构控制 (20), 那么, 不管扰动 w 在此范围怎么作用, 闭环系统的轨线最多切换一次以有限时间到达原点. 变结构反馈控制 (20) 对扰动作用 w , $|w| < r_2$ 是完全不变的, 而且所有轨线都以有限时间到达原点.

由前述变结构反馈控制 (6) 所得的闭环系统与变结构反馈控制 (20) 所得的闭环系统都完全能够抑制扰动 w ($|w| < r_2$) 的作用而使轨线都收敛于原点, 但两者有很大的区别. 前者不能在整个滑动曲线上, 只能在有限线段上满足到达条件, 而其轨线可能需要多次切换来到达滑动线而沿滑动线以指数衰减率收敛于原点. 但后者是在整个滑动曲线上都满足到达条件, 而其轨线最多切换一次而沿滑动曲线以有限时间到达原点. 这种意义上看, 变结构反馈控制 (20) 的效率比起变结构反馈控制 (6) 更大.

对系统的扰动限制 $|w| < r_2$ 是否太苛刻了?

如果把系统 (1) 改写为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = w(x_1, x_2, t) + u, \end{cases} \quad (22)$$

那么, 当系统被有效控制时, 状态变量 x_1, x_2 一般不可能变的很大, 在实际控制过程中, x_1, x_2 总是在有限范围内变化, 因此 $|w(x_1, x_2, t)| < r_2$ 的假定在实际控制过程中是能够接受的条件.

从上面的分析可以看出, 在理论上, 不管 $w(x_1, x_2, t)$ 是什么函数, 只要有界区域 M 有 $|w(x_1, x_2, t)| < r_2$, $\forall (x_1, x_2) \in M$, 那么选取 $r_1 > r + r_2$, 由变结构反馈控制 (20) 所得的闭环系统, 从区域 M 内出发的相轨线, 都以有限时间到达原点.

最速反馈控制 (20) 对被控系统 (1) 的这个性质可以称之为最速反馈控制对系统模型和扰动的不变性原理或简称最速反馈控制的不变性原理.

从这个原理来看, 被控对象 (22) 中的 $w(x_1, x_2, t)$ 是线性还是非线性并不重要, 重要的是在控制过程中 $|w(x_1, x_2, t)|$ 的取值范围. 因此, 两种系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = w(x_1, x_2, t) + u, \end{cases} \quad w(x_1, x_2, t) < r_2,$$

和

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = w(t) + u, \end{cases} \quad w(t) < r_2,$$

的控制问题不应该有什么本质上的区别.

在实际应用中, 我们很难准确地在开关线上进行切换, 因此在滑动曲线上总是产生人们并不希望的高频颤震. 为了消除这种高频颤震, 容易想到的是把开关函数 $\text{sign}(s)$ 改成线性饱和函数

$$\text{sat}(s, \delta) = \begin{cases} \text{sign}(s), & |s| > \delta; \\ \frac{s}{\delta}, & |s| \leq \delta. \end{cases} \quad (23)$$

然而, 大量的实践表明, 这种方法本质上不能消除开关线上的高频颤震. 我们在文 [5] 中给出了离散系统

$$\begin{cases} x_1(t+h) = x_1(t) + hx_2(t), \\ x_2(t+h) = x_2(t) + hu, \end{cases} \quad |u| < r, \quad (24)$$

的最速反馈控制

$$d = rh_1, \quad d_0 = dh_1, \quad y = x_1 + h_1x_2,$$

$$a_0 = \sqrt{d^2 + 8r|y|},$$

$$a = \begin{cases} x_2 + \frac{y}{h_1}, & |y| \leq d_0; \\ x_2 + \frac{\text{sign}(y)(a_0 - d)}{2}, & |y| > d_0, \end{cases}$$

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} -r\frac{a}{d}, & |a| \leq d; \\ -r\text{sign}(a), & |a| > d. \end{cases} \quad (25)$$

其中, h 是采样步长. 这个反馈函数, 当 $h_1 = h$ 时成为上述离散系统的最速反馈控制. 把最速反馈函数 (20)

$$u = -r_1 \text{sign}\left(x_1 + \frac{x_2|x_2|}{2r}\right), \quad r < r_1$$

改写成函数

$$u = -r_1 \text{sign}\left(x_1 + \frac{\sqrt{\frac{r_1}{r}}x_2|\sqrt{\frac{r_1}{r}}x_2|}{2r_1}\right).$$

然后记 $c = \sqrt{\frac{r_1}{r}}$, 那么上式变成

$$u = -r_1 \text{sign}\left(x_1 + \frac{cx_2|cx_2|}{2r_1}\right). \quad (26)$$

在这里参数 c 起着阻尼的作用, 因此称它为“阻尼因子”. 这个反馈函数记作

$$\text{fhan}(x_1, cx_2, r, h_1). \quad (27)$$

把这个函数用于状态反馈来配置闭环动态时, 通常取 $h_1 > h$. 因此又可以引入一个参数 $k_h > 1$, 使 fhan 变成 $\text{fhan}(x_1, cx_2, r, k_h h)$. 这里三个参数 r, c, k_h 分别成为控制量增益、阻尼因子和快速因子. 参数 r 的选取取决于系统的扰动 w 的大小, 必须 $r > |w|$, 但是大到一定程度就可以了再大也没用; 参数 c 大, 就起阻尼作用, 抑制振荡, 延缓跟踪速度等; 参数 $k_h > 1$ 在闭环稳定的情况下, 越小跟踪地越快, 精度越高. 把函数 (20) 和 (23) 用于状态反馈控制, 都避免不了滑动曲线上的高频颤震, 但是把函数 $\text{fhan}(x_1, cx_2, r, h_1)$ 用于数值化的控制算法, 能很有效地消除滑动曲线上的高频颤震. 图 3 依次是函数 $u = -\text{fhan}(x_1, x_2, r, h)$ 和 $u = -\text{rsat}(x_1 + \frac{x_2|x_2|}{2r}, \delta)$ 的等高线:

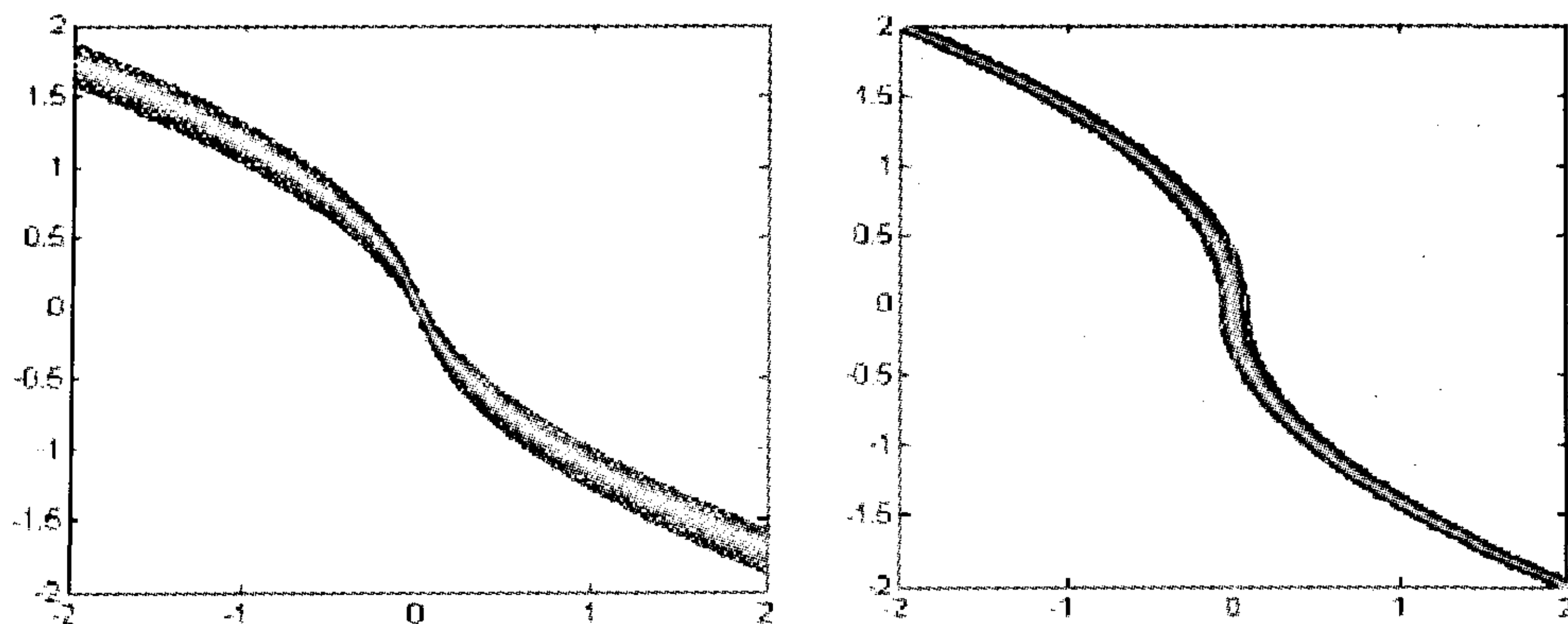


图 3

两者的控制量取区间内部值的线性区域的几何形状有很大差异. 控制量取线性区域的这种差异在数值计算和实际应用中显示出本质上的不同.

由于函数 fhan 具有快速并消除颤震的特殊功能, 因此用它来进行状态反馈的非线性配置^[6]、非线性 PID^[7] 和自抗扰控制器^[8] 等中的非线性组合, 是很理想的非线性函数.

总之, 在变结构控制方法中, 适当的非线性滑动曲线所确定的变结构控制系统比线性滑动线所确定的变结构控制系统具有更好动态品质的系统. 最速反馈控制系统就是以其开关曲线为滑动曲线的变结构控制系统, 是具有比较理想的动态品质的闭环系统.

参 考 文 献

- [1] 宋健, 韩京清. 最速控制系统的分析与综合. 自动化学报, 1965, 3(3): 121-129.
- [2] 高为炳. 变结构控制理论基础. 北京: 中国科学技术出版社, 1990.
- [3] 胡跃明. 非线性控制系统理论及其应用. 北京: 国防工业出版社, 2002.

- [4] Filippov A F. Differential Equations with Discontinuous Right-hand Side. Netherland: Kluwer, Dordrecht, 1988.
- [5] 韩京清, 袁露林. 跟踪 - 微分器的离散形式. 系统科学与数学, 1999, 19(3): 268-273.
- [6] 韩京清. 非线性控制系统状态反馈的实现. 控制与决策, 1991, 6(3): 161-167.
- [7] 韩京清. 非线性 PID 控制器. 自动化学报, 1994, 20(4): 487-490.
- [8] 韩京清. 自抗扰控制器及其应用. 控制与决策, 1998, 13(1): 19-23.
- [9] 韩京清. 从 PID 技术到自抗扰控制技术. 控制工程, 2002, 9(3): 13-18.

INVARIABILITY OF TIME OPTIMAL FEEDBACK CONTROL

Han Jingqing

*(Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and Systems Science,
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)*

Abstract It's well-known that variable structure control is invariable for the system parameter variation and unmodelled dynamical uncertainties to some extent. The time optimal feedback control is one of variable structure controls, whose sliding-curve is its switching-curve. Based on variable structure control theory, that the time optimal feedback control is invariable for the system parameter altering within some limit is analyzed and is rectified as that it not only can restrain the disturbance within some boundry, but also make all the trajectory of the closed loop system arrive at the origin in finite time in the theory. So a method of designing efficient nonlinear feedback is given, and a digital technique of realizing the time optimal feedback control and avoiding chatting of high frequency is presented.

Key words Time optimal feedback control, variable structure control, disturbance-restraining.