线性系统的结构与反馈系统计算

韩 京 清

（科 学 院 数 学 所）

本文介绍以较统一的观点处理线性定常系统各种计算问题的方法．第一部分，介绍用初等变换把系统阵化为文献[1—4]中讨论过的标准形的办法．给出这种标准形与传递阵的关系．根据这种关系，对多项式阵给予新的数值表示，指出两个多项式阵的互质性与对应系统能观测阵（或能控阵）的满秩性一致，给出用这种互质条件求解两种多项式矩阵方程的方法．

第二部分，介绍反馈系统的基本结构——积分器串联形式．指出这种结构对一类非线性系统也存在，并依此讨论了一类非线性系统的能控性和能观测性问题．

第三部分，介绍处理各种计算问题的方法．其中包括：标准分解，最小实现，极点配置，系统解耦，代数 Riccati 方程，输出动态反馈，结构稳定的跟踪系统设计等计算问题．

一、线性定常系统结构与传递阵

对线性系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^n,\ \boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^m,\\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^p.\end{cases} \tag{1.1}$$

实行坐标变换 $\boldsymbol{x}' = T\boldsymbol{x}$，则系统矩阵

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \tag{1.2}$$

变为

$$\left[\begin{array}{c|c} TAT^{-1} & TB \\ \hline CT^{-1} & D \end{array}\right] \tag{1.3}$$

如果把 T 看做对(1.2)的前 n 行的如下初等变换之积：i 行与 j 行对调；对 i 行加 α 乘 j 行；$\alpha \neq 0$ 乘于 i 行，$i, j \leqslant n$，则 T^{-1} 是如下列初等变换之积：j 列与 i 列对调；对 j 列加 $-\alpha$ 乘 i 列；α^{-1} 乘于 i 列．容易证明

定理 1.1 设 B, C 满秩．对系统阵(1.2)的前 n 行实行一系列适当行初等变换，并对前 n 列实行对应的列初等变换，可以把它化为如下标准形式：

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} A_{00} & 0\cdots\cdots & & & & 0 \\ 0 & 0 & [I_1 0] & & 0 & \\ \cdots\cdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & [I_{\nu-1}0] & 0 \\ -A_{\nu0} & -A_0 & -A_1 & \cdots & -A_{\nu-1} & B_\nu \\ \hline C_{00} & C_0 & C_1 & \cdots\cdots & C_{\nu-1} & D \end{array}\right] \tag{1.4}$$

其中，I_i 为 m_i 阶单位阵，B_ν 为 $m\times m$ 非异阵，A_i 为 $m\times m_{i+1}$ 阵，C_i 为 $p\times m_{i+1}$ 阵，m_i 满足

$$m_1\leqslant m_2\leqslant\cdots\leqslant m_{\nu-1}\leqslant m_\nu=m,$$
$$m_0+m_1+\cdots+m_{\nu-1}+m_\nu=n.$$

m_0 是 A_{00} 的阶数.

对偶地，经适当初等变换把系统阵化为

$$\left[\begin{array}{cccc|c} A'_{00} & 0 & 0 & -A_{\mu0} & B_{00}\\ 0 & 0 & & -A_0 & B_0\\ 0 & \begin{bmatrix}I_1\\0\end{bmatrix} & & -A_1 & B_1\\ & & \ddots & \vdots & \vdots\\ & 0 & \begin{bmatrix}I_{\mu-1}\\0\end{bmatrix} & -A_{\mu-1} & B_{\mu-1}\\ \hline 0 & 0\cdots\cdots 0 & & C_\mu & D \end{array}\right] \tag{1.5}$$

这里 I_i 是 p_i 阶单位阵，C_μ 是 $p\times p$ 非异阵，而 p_i 满足 $p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_{\mu-1}\leqslant p_\mu=p$；$p_0+p_1+\cdots+p_\mu=n$. p_0 是 A_{00} 的阶数.

数组 $\{\nu:m_\nu,m_{\nu-1},\cdots,m_1:m_0\}$ 叫做系统的控制结构指数；$\{\mu:p_\mu,p_{\mu-1},\cdots,p_1,p_0\}$ 叫做观测结构指数. 它们不依赖于坐标变换. 显然，ν 为系统的能控指数，μ 为能观测指数. A_{00} 是不能控部分，A'_{00} 是不能观测部分. 当 $m_0=p_0=0$ 时，系统为完全能控且完全能观测. 这时结构指数记为 $\{\nu:m_\nu,m_{\nu-1},\cdots,m_1\}$ 或 $\{\mu:p_\mu,p_{\mu-1},\cdots,p_1\}$.

阵(1.2)化成(1.4)的办法如下：先用行初等变换把 B 化成 $\begin{bmatrix}0\\B_\nu\end{bmatrix}$，使 B_ν 的行数 $=\operatorname{rank} B$，并实行相应的列初等变换，得

$$\left[\begin{array}{cc|c} A'_{\nu-1\nu-1} & B'_{\nu-1} & 0\\ A'_{\nu\nu-1} & A'_{\nu\nu} & B_\nu\\ \hline C'_{\nu-2} & C'_{\nu-1} & D \end{array}\right].$$

然后把 $A'_{\nu-1\nu-1}, B'_{\nu-1}, \begin{bmatrix}A'_{\nu\nu-1}\\C'_{\nu-2}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}A'_{\nu\nu}\\C_{\nu-1}\end{bmatrix}$ 分别看做新的 A, B, C, D，做与前同样手续. 经有限次这种手续，阵(1.2)被化成

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} A'_{00} & 0 & & 0 & & 0\\ A'_{10} & A'_{11} & B_1 & & & \\ \cdots\cdots & & & \ddots & & \\ A'_{\nu-10} & A'_{\nu-11} & \cdots\cdots & & B_{\nu-1} & 0\\ -A'_{\nu0} & -A'_{\nu1} & \cdots\cdots & & -A'_{\nu\nu} & B_\nu\\ \hline C'_{00} & C'_0 & \cdots\cdots\cdots & & C_{\nu-1} & D \end{array}\right] \tag{1.6}$$

其中，B_i 的行数 $=\operatorname{rank} B_i$，$A'_{ii}:m_i\times m_i$ 阵. 再对(1.6)实行列初等变换，把 B_i 变为 $[I_i 0$ 消去 B_i 左边非 0 元(i 必从 1 开始往下做)，并实行相应的行变换就得标准形(1.4). 注意不能用列变换把 B_ν 变成单位阵，因为这种变换不是系统的坐标变换. 至于标准形(1.5 是对(1.2)的转置阵实行上述步骤就能得到.

由标准形(1.4)中的 A_i, C_i 构造多项式阵

$$\begin{cases}\bar{P}(s)=[A_0 0]+[A_1 0]s+\cdots+[A_{\nu-2}0]s^{\nu-2}+A_{\nu-1}s^{\nu-1}+I_\nu s^\nu;\\ \bar{R}(s)=[C_0 0]+[C_1 0]s+\cdots+[C_{\nu-2}0]s^{\nu-2}+C_{\nu-1}s^{\nu-1}.\end{cases}\tag{1.7}$$

这里 $[A_i 0]$ 为 $m\times m$ 阵, $[C_i 0]$ 为 $p\times m$ 阵. 显然, $\bar{P}(s)$ 为列正则, 其列次均为 ν, 而 $\bar{R}(s)$ 为列次均小于 ν 的阵. 系统(1.1)的传递阵可表示为

$$W(s)=\bar{R}(s)\bar{P}^{-1}(s)B_\nu.$$

但是, $\bar{P}(s)$ 和 $\bar{R}(s)$ 有右公因

$$\tilde{I}(s)=\begin{bmatrix}\tilde{I}_1 & & & 0\\ & \tilde{I}_2 s & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tilde{I}_\nu s^{\nu-1}\end{bmatrix}\tag{1.8}$$

$\tilde{I}_1$ 为 m_1 阶单位阵,当 $i\geqslant 2$ 时, $\tilde{I}_i$ 为 m_i-m_{i-1} 阶单位阵. 记

$$P(s)=\bar{P}(s)\tilde{I}^{-1}(s),\quad R(s)=\bar{R}(s)\tilde{I}^{-1}(s)\tag{1.9}$$

则 $P(s)$, $R(s)$ 为多项式阵,且

$$W(s)=R(s)P^{-1}(s)B_\nu\tag{1.10}$$

$\det P(s)$ 的次数等于系统的能控部分维数. 矩阵 $P(s)$ 具有如下性质: 列正则,列次按左大右小次序排列, 列次项系数阵为单位阵. 这种形式的多项式阵叫做列首一阵. 上述讨论说明, 传递函数阵的分母部分 $P(s)$ 总可以化成列首一阵, 而 A_i, C_i 与 $P(s)$, $R(s)$之间的关系是通过(1.9),由(1.7)来决定. 把矩阵

$$[A_0A_1\cdots A_{\nu-1}I_\nu],\quad [C_0C_1\cdots C_{\nu-1}0]\tag{1.11}$$

叫做 $P(s)$ 和 $R(s)$ 的系数阵.

从(1.5)出发计算传递阵, $W(s)$ 可表示为

$$W(s)=C_\mu\bar{P}^{-1}(s)\bar{Q}(s)\tag{1.12}$$

其中

$$\begin{cases}\bar{P}(s)=\begin{bmatrix}A_0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A_1\\0\end{bmatrix}s+\cdots+\begin{bmatrix}A_{\mu-2}\\0\end{bmatrix}s^{\mu-2}+\begin{bmatrix}A_{\mu-1}\\0\end{bmatrix}s^{\mu-1}+I_\mu s^\mu;\\ \bar{Q}(s)=\begin{bmatrix}B_0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\0\end{bmatrix}s+\cdots+\begin{bmatrix}B_{\mu-2}\\0\end{bmatrix}s^{\mu-2}+B_{\mu-1}s^{\mu-1}\end{cases}\tag{1.13}$$

和前面一样. $\bar{P}(s)$, $\bar{Q}(s)$ 有左公因 $\tilde{I}'(s)$. 把这个左公因去掉,可得 $W(s)=C_\mu P^{-1}(s)Q(s)$. 这里 $P(s)$ 是行首一阵(其行次按上大下小次序排列). 把矩阵

$$[A_0^\tau A_1^\tau\cdots A_{\mu-1}^\tau I_\mu]^\tau,\quad [B_0^\tau B_1^\tau\cdots B_{\mu-1}^\tau 0]^\tau\tag{1.14}$$

叫做 $P(s)$, $Q(s)$ 的系数阵.

从以上看, 标准形 (1.4)(1.5) 是单变量情形相伴标准形的直接推广. 把(1.4)叫做能控相伴标准形,而把(1.5)叫做能观测相伴标准形.

二、多项式阵互质条件与多项式阵方程

一个列正则(行正则)阵 $\tilde{P}(s)$ 可按如下方式进行首一化: 决定列置换阵 V (行置换阵 U) 使 $\tilde{P}(s)V(U\tilde{P}(s))$ 为列次按左大右小 (行次按上大下小) 次序排列, 然后决定 $\tilde{P}(s)V$

的列次项系数阵 B_ν^{-1} ($U\tilde{P}(s)$ 的行次项系数阵 C_μ^{-1})，则 $P(s)=B_\nu\tilde{P}(s)V$ ($P(s)=U\tilde{P}(s)C_\mu$) 成为首一列正则阵(首一行正则阵).

下面只讨论 $P(s)$ 为首一阵时的互质条件. 设 $P(s)$ 为 $m\times m$ 列首一阵，$R(s)$ 为 $p\times m$ 阵，其列次均小于对应的 $P(s)$ 的列次 (记做 $\partial_l R(s)<\partial_l P(s)$). 设它们的系数阵为

$$[A_0A_1\cdots A_{\nu-1}I_\nu];\quad [C_0C_1\cdots C_{\nu-1}0]. \tag{2.1}$$

构造矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 0 & [I,0] & & \ddots & 0 \\ & 0 & & & \\ & 0 & & \ddots & [I_{\nu-1}0] \\ -A_0 & -A_1 & \cdots\cdots & & -A_{\nu-1}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ B_\nu\end{bmatrix},\quad C=[C_0C_1\cdots C_{\nu-1}] \tag{2.2}$$

设 μ 为 A, B, C 决定系统的能观测指数. 定义 $P(s)$ 和 $R(s)$ 的结式阵为

$$M_{PR}=\left[\begin{array}{cccccccc} A_0 & A_1\cdots\cdots A_{\nu-1} & I_\nu & & & & 0 \\ & [A_00]\cdots[A_{\nu-2}0] & A_{\nu-1} & I_\nu & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & [A_00]\cdots[A_{\nu-2}0] & A_{\nu-1} & I_\nu & & \\ C_0 & C_1\cdots\cdots C_{\nu-1} & 0 & & & & 0 \\ & [C_00]\cdots[C_{\nu-2}0] & C_{\nu-1} & 0 & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & [C_00]\cdots[C_{\nu-2}0] & C_{\nu-1} & 0 & & \end{array}\right]\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\mu\text{行}\\ \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\mu\text{行}\end{array} \tag{2.3}$$

经适当列变换，M_{PR} 变为

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline C_A & C_{A0}\end{array}\right] \tag{2.4}$$

$$C_A=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{\mu-1}\end{bmatrix},\quad C_{A0}=\begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ C_{\nu-1} & 0 & & & \\ CA\text{ 的最后一块} & \ddots & \ddots & & \\ CA^2\text{ 的最后一块} & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \ddots & \ddots & & C_{\nu-1} & 0\end{bmatrix} \tag{2.5}$$

定理 2.1 设 $P(s)$ 为列首一阵，$\partial_l R(s)<\partial_l P(s)$，则 $P(s)$, $R(s)$ 右互质的充要条件为 C_A 满秩.

设 $P(s)$ 为 $p\times p$ 行首一阵，$Q(s)$ 为 $p\times m$ 阵，$\partial_h Q(s)<\partial_h P(s)$. 这时由 $P(s)$, $Q(s)$ 的系数阵构造

$$A=\begin{bmatrix} 0 & & & -A_0 \\ \begin{bmatrix}I_1\\ 0\end{bmatrix} & & & -A_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \begin{bmatrix}I_{\mu-1}\\ 0\end{bmatrix} & -A_{\mu-1}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}B_0\\ B_1\\ \vdots\\ B_{\mu-1}\end{bmatrix},\quad C=[0\cdots 0\ C_\mu]. \tag{2.6}$$

$$
B_A = [B\ AB \cdots A^{\nu-1}B],\quad B_{A0} = \begin{bmatrix} 0 & B_{\mu-1} & AB\text{的} & A^2B\text{的} & \cdots \text{最后一块} \\ & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & B_{\mu-1} \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{2.7}
$$

这时，$P(s)$，$Q(s)$ 左互质的充要条件为 B_A 满秩．其中 ν 为 (2.6) 的 A，B 决定的能控指数．

下面介绍设计动态补偿器时常遇到的多项式阵方程的求解方法．设有方程

$$
X(s)P(s) + Y(s)R(s) = Z(s)F(s), \tag{2.8}
$$

或

$$
P(s)X(s) + Q(s)Y(s) = F(s)Z(s) \tag{2.9}
$$

其中 P，Q，R，F 是已知多项式阵，Z 是适当选取的，X，Y 是要满足一定条件的未知多项式阵．

对于方程 (2.8)，有

定理 2.2 设 $P(s)$ 为 $m \times m$ 列首一阵，$R(s)$ 是 $p \times m$ 阵，$\partial_l R(s) < \partial_l P(s)$，$F(s)$ 为 $m \times m$ 阵，$\partial_l F(s) < \partial_l P(s)$．又设 $P(s)$，$R(s)$ 右互质．这时方程(2.8)必有解 $X(s)(m \times m$ 阵)，$Y(s)(m \times p$ 阵)及行正则阵 $Z(s)(m \times m$ 阵)，满足

$$
\partial_h X(s) < \partial_h Z(s),\quad \partial_h Y(s) < \partial_h Z(s).
$$

由 P，R，F 的系数阵构造 A，B，C 及 μ．今取

$$
Z(s) = Z_0 + Z_1 s + \cdots + Z_{\mu-1}s^{\mu-1},\quad \det Z_{\mu-1} \neq 0
$$

并把 $X(s)$，$Y(s)$ 表示成

$$
X(s) = X_0 + X_1 s + \cdots + X_{\mu-1}s^{\mu-1}
$$
$$
Y(s) = Y_0 + Y_1 s + \cdots + Y_{\mu-1}s^{\mu-1}
$$

则方程(2.8)等价于如下线性方程组：

$$
\begin{cases} [Y_0 Y_1 \cdots Y_{\mu-1}]C_A = [Z_0 Z_1 \cdots Z_{\mu-1}]F_A; \\ [X_0 X_1 \cdots X_{\mu-1}] = [Z_0 Z_1 \cdots Z_{\mu-1}]F_{A0} - [Y_0 Y_1 \cdots Y_{\mu-1}]C_{A0} \end{cases} \tag{2.10}
$$

其中 F_A，F_{A0} 是由 F_i 构造的 (2.5) 形矩阵．由于 C_A 满秩，这个方程必有解．根据 C_{A0}，F_{A0} 的结构，易知 $X_{\mu-1} = 0$．在方程(2.10)中，把 $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ 化为能观测标准形 (1.5) 就容易求解了．

对于方程(2.9)，有

定理 2.3 设 $P(s)$，$F(s)$ 均为 $p \times p$ 行首一阵，$\partial_h P(s) = \partial_h F(s)$．$Q(s)$ 为 $p \times m$ 阵，$\partial_h Q(s) < \partial_h P(s)$，$P(s)$，$Q(s)$ 左互质．记 ν 为 $W(s) = P^{-1}(s)Q(s)$ 的最小实现能控指数．这时，对任给的 $Z(s)$，$\partial_l Z(s) \leqslant \nu - 1$，方程 (2.9) 均有解 $X(s)$ ($p \times p$ 阵)，$\partial_l X(s) \leqslant \nu - 1$，$Y(s)$ ($m \times p$ 阵)，$\partial_l Y(s) \leqslant \nu - 1$．进一步，记 $\delta = \min\{\partial_{h_i}P(s) - \partial_{h_i}Q(s)\}$ (∂_{h_i} 表示第 i 行行次)，而取 $Z(s)$ 为列次均为 $\nu - \delta$ 的列正则阵，则方程 (2.9) 的解 $X(s)$ 也是列次均为 $\nu - \delta$ 的列正则阵，而 $Y(s)$ 的列次不超过 $\nu - 1$.

取 $Z(s)$ 如下:

$$Z(s) = Z_0 + Z_1 s + \cdots + Z_{\nu-1} s^{\nu-1},$$

$X(s)$, $Y(s)$ 记为

$$X(s) = X_0 + X_1 s + \cdots + X_{\nu-1} s^{\nu-1},$$

$$Y(s) = Y_0 + Y_1 s + \cdots + Y_{\nu-1} s^{\nu-1}.$$

由 $P(s)$, $Q(s)$, $F(s)$ 的系数阵构造 A, B, $F = [F_0^\tau, F_1^\tau \cdots F_{\mu-1}^\tau]^\tau$, B_A, B_{A0}, F_A, F_{A0}. 这时方程(2.9)等价于如下线性方程组:

$$\left\{\begin{array}{l} B_A \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_{\nu-1} \end{bmatrix} = \tilde{F}_A \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_{\nu-1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{\nu-1} \end{bmatrix} = \tilde{F}_{A0} \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_{\nu-1} \end{bmatrix} - B_{A0} \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_{\nu-1} \end{bmatrix} \end{array}\right. \tag{2.11}$$

其中

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}_A \\ \hdashline \tilde{F}_{A0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_A \\ \hdashline F_{A0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_0 & & & \mathbf{0} \\ -A_1 & -\begin{bmatrix} A_0 \\ 0 \end{bmatrix} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -A_{\mu-1} & & & \\ \hdashline I_\mu & -A_\mu & \ddots & \\ & I_\mu & \ddots & -A_{\mu-1} \\ \mathbf{0} & & \ddots & I_\mu \end{bmatrix}$$

当 $\delta \geqslant 2$ 时, B 的后 $\delta - 1$ 块为 0,因而 B_{A0} 的后 δ 块行为 0. 如果 $Z(s)$ 为 $\nu - \delta$ 次多项式阵,则 Z_i 的后 $\delta - 1$ 块为 0,因而由 $\tilde{F}_{A0}$ 的形式,必有

$$X_{\nu-\delta} = Z_{\nu-\delta}, \; X_i = 0, \; i > \nu - \delta.$$

三、反馈系统的积分器串联形式与一类非线性系统的能控、能观测性

对完全能控系统,在标准形(1.4)中取反馈

$$\boldsymbol{u} = -K\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} = B_\nu^{-1}[A_0 A_1 \cdots A_{\nu-1}]\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \tag{3.1}$$

则系统阵变为

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & [I_1 0] & & \mathbf{0} & 0 \\ & \mathbf{0} & \ddots & [I_{\nu-1} 0] & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & B_\nu \\ \hdashline C_0 & C_1 & \cdots\cdots & C_{\nu-1} & 0 \end{array}\right] \tag{3.2}$$

对应于这个阵的系统叫做积分器串联系统．这是系统中最简单的系统．任意完全能控系统经适当坐标变换和状态反馈均可化成这种形式．由于反馈不改变系统的能控性，因此研究与系统的能控性有关问题，都可用对应的积分器串联形式来讨论．这种现象不仅对线性系统存在，而且在一类非线性控制系统中也成立．

设有非线性系统

$$\begin{cases} x_1^{(d_1)} = f_1(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_m, \boldsymbol{u}), \\ x_2^{(d_2)} = f_2(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_m, \boldsymbol{u}), \\ \cdots\cdots \\ x_m^{(d_m)} = f_m(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_m, \boldsymbol{u}). \end{cases} \tag{3.3}$$

其中，$\boldsymbol{z}_i = [x_i, \dot{x}_i, \cdots, x_i^{(d_i-1)}]$, $i = 1, 2, \cdots, m$, $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^m$．记 $\boldsymbol{f} = [f_1 f_2 \cdots f_m]$，$M_i = \{d_1 - i, d_2 - i, \cdots, d_m - i\}$，$\nu = \max M_0$，$m_i = M_{\nu-i}$ 中正整数个数，$n = d_1 + d_2 + \cdots + d_m = m_1 + m_2 + \cdots + m_\nu$.

定理 3.1 设 $U \subset \boldsymbol{R}^m$ 是以原点为内点的集合．如果对任意 $\boldsymbol{v} \in U$，方程

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_m, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$$

在区域 $X \subset \boldsymbol{R}^n$ 内有有界解

$$\boldsymbol{u} = -k(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_m, \boldsymbol{v}),\ [\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2 \cdots \boldsymbol{z}_m] \in X, \tag{3.4}$$

则非线性系统(3.3)在反馈(3.4)之下被化为(3.2)形积分器串联形式（$B_\nu = I_\nu$），因而非线性系统(3.3)在 X 内完全能控．

当然，在 X 内系统 (3.3) 的稳定调节器也是容易构造的．对非线性控制系统来说，定理 3.1 给出了用非线性反馈使系统线性化的办法． 这种线性化已不是局部范围的意义了．

对偶地，考虑一类非线性系统的观测问题．对非线性系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1) + \begin{bmatrix} I_{\mu-1} \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_2, \\ \cdots\cdots \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\mu-1} = \boldsymbol{f}_{\mu-1}(\boldsymbol{x}_1) + \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_\mu, \\ \dot{\boldsymbol{x}}_\mu = \boldsymbol{f}_\mu(\boldsymbol{x}_1) \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}_1) \qquad \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^p. \end{cases} \tag{3.5}$$

有

定理 3.2 如果 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}_1)$ 存在连续逆映象 $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{c}^{-1}(\boldsymbol{y})$，则非线性系统(3.5)完全能观测，且其状态渐近观测器方程为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_1 = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{c}^{-1}(\boldsymbol{y}(t))) + \begin{bmatrix} I_{\mu-1} \\ 0 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_2 - K_1(\hat{\boldsymbol{x}}_1 - \boldsymbol{c}^{-1}(\boldsymbol{y}(t))), \\ \cdots\cdots \\ \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_{\mu-1} = \boldsymbol{f}_{\mu-1}(\boldsymbol{c}^{-1}(\boldsymbol{y}(t))) + \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_\mu - K_{\mu-1}(\hat{\boldsymbol{x}}_1 - \boldsymbol{c}^{-1}(\boldsymbol{y}(t))), \\ \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_\mu = \boldsymbol{f}_\mu(\boldsymbol{c}^{-1}(\boldsymbol{y}(t))) \qquad -K_\mu(\hat{\boldsymbol{x}}_1 - \boldsymbol{c}^{-1}(\boldsymbol{y}(t))). \end{cases} \tag{3.6}$$

其中 K_i, $i = 1, 2, \cdots, \mu$，为使下面矩阵稳定:

$$\begin{bmatrix} -K_1 & \begin{bmatrix} I_{\mu-1} \\ 0 \end{bmatrix} & & \text{\Large 0} \\ \vdots & \text{\Large 0} & \ddots & \\ -K_{\mu-1} & 0 & \cdots\cdots & \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ -K_\mu & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{bmatrix}$$

四、线性系统的标准分解与最小实现

用系统阵化为 (1.6) 的算法容易确定系统的标准分解．先从系统阵中分出能控的和不能控部分，得

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & B_1' \\ \hline C_1' & C_2' & D \end{array}\right]$$

对 A_{22}，C_2' 的转置阵实行化成(1.6)的算法，从 A_{22} 中分出能观测的和不能观测部分，得

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} A_{11} & & 0 & & 0 \\ \hline A_{211} & A_{212} & A_3 & A_{34} & B_1 \\ A_{213} & A_{214} & 0 & A_4 & B_2 \\ \hline C_{11} & C_{12} & 0 & C_4 & D \end{array}\right]$$

可以用行变换把 B_1 的行向量中与 B_2 的行向量线性相关者均给消去（在此过程中还要实行对应的列变换）．因此可以使 B_1 的行向量与 B_2 的行向量线性无关．然后用 C_4 的列消去 C_{11}，C_{12} 中与 C_4 的列线性相关者(当然，也要实行相应行变换)．最后以 $\begin{bmatrix} A_{213} & A_{214} \\ C_{11} & C_{12} \end{bmatrix}$ 为新的 C，A_{11} 为新的 A，分出能观测的和不能观测部分，就得

$$\left[\begin{array}{cccc|c} A_1 & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_3 & A_{34} & B_1 \\ 0 & A_{42} & 0 & A_4 & B_2 \\ \hline 0 & C_2 & 0 & C_4 & D \end{array}\right]$$

其中 B_1 的行向量与 B_2 的行向量线性无关，C_2，C_4 的列向量线性无关．

上述算法也容易确定传递阵的最小实现．设 $W(s)$ 是 $p\times m$ 传递阵．先确定 $W(s)$ 的每列公分母 $p_i(s)$，$i=1,\cdots,m$．每列通分之后由分子所成阵记为 $\tilde{R}(s)$，令 $\tilde{P}(s)=\mathrm{diag}\{p_1(s)\cdots p_m(s)\}$．确定矩阵 B_ν，V，使 $P(s)=B_\nu\tilde{P}(s)V$ 成为列首一阵．$R(s)=\tilde{R}(s)V$．这时 $W(s)=R(s)P^{-1}(s)B_\nu$．由 $P(s)$，$R(s)$ 的系数阵及 B_ν 可构造出 A，B，C．然后按上述算法确能观测部分就能得 $W(s)$ 的最小实现．

五、静态反馈的计算

1. 极点配置

设系统完全能控．希望配置如下指定极点：$\lambda_1=\alpha_1+i\beta_1$，$\lambda_2=\alpha_1-i\beta_1,\cdots$，$\lambda_{2k-1}=\alpha_k+i\beta_k$，$\lambda_{2k}=\alpha_k-i\beta_k$，$\lambda_{2k+1}=\gamma_{2k+1},\cdots$，$\lambda_n=\gamma_n$.

先把系统化为能控标准形(1.4)来决定系数阵 A_i，$i=0,1,\cdots,\nu-1$，及 B_ν．然后，对应积分器串联形（3.2）的主对角线上 k 个 2×2 阵和 $n-2k$ 个元用 $\begin{bmatrix}\alpha_1 & 1\\ -\beta_1^2 & \alpha_1\end{bmatrix}$，$\cdots$，$\begin{bmatrix}\alpha_k & 1\\ -\beta_k^2 & \alpha_k\end{bmatrix}$，$\gamma_{2k+1},\cdots,\gamma_n$ 代替，并把此阵化为（1.4)，从而又定出系数阵 A_i^0，$i=0$，$1,\cdots,\nu-1$．把这两组系数阵相减，就得所需的反馈

$$\boldsymbol{u}=B_\nu^{-1}[A_0+A_0^0A_1+A_1^0\cdots A_{\nu-1}+A_{\nu-1}^0]\boldsymbol{x}.$$

2. 系统的解耦

设 $m=p$．取反馈 $\boldsymbol{u}=-K\boldsymbol{x}+G\boldsymbol{v}$，$\det G\neq 0$，使闭环传递阵 $W(s)=C[SI-A+BK]^{-1}BG$ 成为对角阵．由于系统的能解耦性是与对应积分器串联形的解耦性等价，只须讨论积分器串联形的解耦问题．这后者实际上完全由标准形中 C_i 阵的结构决定．令

$$\bar{C}=[[C_00]\cdots[C_{\nu-2}0]C_{\nu-1}0]],\ [C_i0]:m\times m\text{阵}.$$

记 $[C_i0]$ 的 i 行为 $\bar{C}_{ji}$，并对每个 j 定义数

$$l_j:\bar{C}_{j\nu-l_j}\neq 0,\ \text{而当}\ l>\nu-l_j\ \text{时},\ \bar{C}_{jl}=0.$$

显然，$l_j\geqslant 1$，$\bar{C}$ 的 i 行后面 l_j 块为 0，可以向后移动 l_j 块．$\bar{C}$ 的 i 行向后移动 $l_j(j=1,2,\cdots,m)$ 块所得矩阵记为

$$\tilde{C}=[0[\tilde{C}_10]\cdots[\tilde{C}_{\nu-2}0]\tilde{C}_{\nu-1}\tilde{C}_\nu]$$

这里 $\tilde{C}_i$ 为 $m\times m_{i+1}$ 阵，$i=1,2,\cdots,\nu-1$，$\tilde{C}_\nu$ 为 $m\times m$ 阵．这时，系统完全解耦的充要条件为 $\det\tilde{C}_\nu\neq 0$，而使系统解耦的反馈阵为

$$K=-B_\nu^{-1}[0\tilde{C}_\nu^{-1}\tilde{C}_1\tilde{C}_\nu^{-1}C_2\cdots\tilde{C}_\nu^{-1}\tilde{C}_{\nu-1}]=-B_\nu^{-1}\tilde{C}_\nu^{-1}[0\tilde{C}_1\cdots\tilde{C}_{\nu-1}]$$

$$G=B_\nu^{-1}\tilde{C}_\nu^{-1}.$$

3. 积分器串联系统的代数 Riccati 方程

熟知，系统(1.1)在二次形指标

$$J=\int_0^\infty \boldsymbol{y}^\tau Q\boldsymbol{y}+\boldsymbol{u}^\tau R\boldsymbol{u}dt,\ Q\geqslant 0,\ R>0$$

之下的最优反馈阵为 $K=R^{-1}B^\tau P$，而 P 满足代数 Riccati 方程

$$PA+A^\tau P-PBR^{-1}B^\tau P+C^\tau QC=0$$

对标准形（1.4）而言，K 又可表示为

$$K=R^{-1}B_\nu^\tau[P_{\nu1}P_{\nu2}\cdots P_{\nu\nu}]=[K_0K_1\cdots K_{\nu-1}]$$

$P_{\nu i}$ 是 P 的最后 m 行分成的 $m\times m_{i+1}$ 阵，$K_i=R^{-1}B_\nu P_{\nu i+1}$．进一步，如果 A，B，C 为积分器串联形(3.2)中矩阵，则从代数 Riccati 方得可推出只以 K_i，$i=0,1,\cdots,\nu-1$，为未

知量的代数方程．因而降低 Riccati 方程阶数，并且容易确定迭代求解所需的“稳定初始条件”．

记 $\tilde{B}_\nu = -2B_\nu^{\tau-1}$,并构造多项式阵

$$\tilde{B}_\nu s^\nu + K_{\nu-1}s^{\nu-1} + [K_{\nu-1}0]s^{\nu-2} + \cdots + [K_1 0]s + [K_0 0]$$
$$0s^\nu + C_{\nu-1}s^{\nu-1} + [C_{\nu-2}0]s^{\nu-2} + \cdots + [C_1 0]s + [C_0 0]$$

的 Routh 形矩阵

$$H(K) = \begin{bmatrix} K_{\nu-1} & [K_{\nu-3}0] & [K_{\nu-5}0]\cdots & & \\ \tilde{B}_\nu & [K_{\nu-2}0] & [K_{\nu-4}0]\cdots & & \\ 0 & K_{\nu-1} & [K_{\nu-3}0]\cdots & & \\ 0 & \tilde{B}_\nu & [K_{\nu-2}0] & [K_{\nu-4}0]\cdots & \\ & 0 & & \ddots & [K_0 0] \end{bmatrix}$$

$$H(C) = \begin{bmatrix} C_{\nu-1} & [C_{\nu-3}0] & [C_{\nu-5}0]\cdots & & \\ 0 & [C_{\nu-2}0] & [C_{\nu-4}0]\cdots & & \\ & C_{\nu-1} & [C_{\nu-3}0]\cdots & & \\ & 0 & [C_{\nu-2}0] & [C_{\nu-4}0]\cdots & \\ & 0 & & \ddots & [C_0 0] \end{bmatrix}$$

用 $H_-(K)$, $H_-(C)$ 表示 $H(K)$ 和 $H(C)$ 的偶数块行乘-1所得矩阵,并把它们表成

$$H_-(K) = [H_1(K)\cdots H_\nu(K)],\ H_i(K): m\nu \times m \text{ 阵};$$
$$H_-(C) = [H_1(C)\cdots H_\nu(K)],\ H_i(C): p\nu \times m \text{ 阵}.$$

又记

$$K' = \begin{bmatrix} K_{\nu-1} \\ [K_{\nu-2}0] \\ \vdots \\ [K_0 0] \end{bmatrix},\quad C' = \begin{bmatrix} C_{\nu-1} \\ [C_{\nu-2}0] \\ \vdots \\ [C_0 0] \end{bmatrix}$$

这时 K' 所满足的方程为

$$\begin{aligned} &K'^\tau \mathrm{diag}\{R\cdots R\}H_i(K) + H_i^\tau(K)\mathrm{diag}\{R\cdots R\}K' \\ &= C'^\tau \mathrm{diag}\{Q\cdots Q\}H_i(C) + H_i^\tau(C)\mathrm{diag}\{Q\cdots Q\}C', \\ &i = 1, 2, \cdots, \nu. \end{aligned} \tag{5.1}$$

设系统为完全能观测的非积分器串联形，用反馈 $\boldsymbol{u} = -K^0\boldsymbol{x}$ 化成积分器串联形．这个积分器串联系统不一定完全能观测．但是,如果用 $\begin{bmatrix} C \\ K^0 \end{bmatrix}$ 做为新的观测矩阵,积分器串联系统将成为完全能观测．于是把性能指标改成

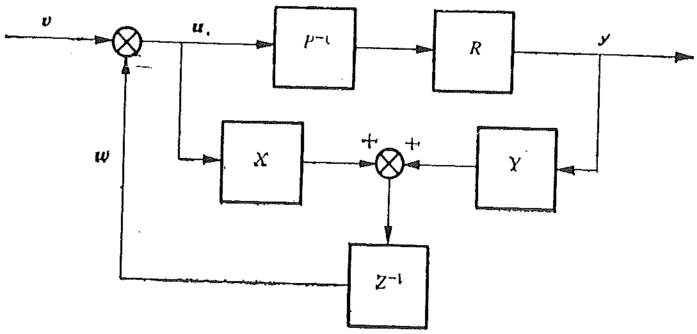
$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \boldsymbol{y}^\tau Q\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^\tau K^{0\tau}RK^0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^\tau R\boldsymbol{u}dt \\ &= \int_0^\infty \boldsymbol{x}^\tau[C^\tau K^{0\tau}]\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ K^0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^\tau R\boldsymbol{u}dt, \end{aligned}$$

并用 $\tilde{C} = \begin{bmatrix} C \\ K^0 \end{bmatrix}$, $\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$ 来代替(5.1)中的 C, Q，就能得到满意的反馈阵．

六、动态反馈的计算

1. 输出动态反馈计算

设对象传递阵为 $W(s)=R(s)P^{-1}(s)$，$p\times m$ 阵，$P(s)$，$R(s)$ 右互质，$\partial_l R(s)<\partial_l P(s)$. 对此设计反馈补偿器，使闭环传递阵变为 $W(s)=R(s)P_1^{-1}(s)$，$P_1(s)$ 为满足 $\partial_l P(s)=\partial_l P_1(s)$，其的列次项系数阵与 $P(s)$ 的列次项系数阵相一致的任意指定 $m\times m$ 列正则阵. 令 $F(s)=P(s)-P_1(s)$，则 $\partial_l F(s)<\partial_l P(s)$. 文[5]中曾讨论如下格式的补偿器:



如果让 $X(s)$，$Y(s)$，$Z(s)$ 满足多项式矩阵方程

$$X(s)P(s)+Y(s)R(s)=Z(s)F(s) \tag{6.1}$$

则上方块图的传递阵为

$$W_1(s)=R(s)(P(s)-F(s))^{-1}=R(s)P_1^{-1}(s)$$

为了使补偿器物理能实现，且使系统正常工作，必须: i) $Z(s)$ 为稳定阵; ii) $\partial_h X(s)\leqslant\partial_h Z(s)$，$\partial_h Y(s)\leqslant\partial_h Z(s)$，iii) 取 $F(s)$ 使 $P_1(s)$ 稳定. 于是补偿器设计问题变成: 对适当给定的 $F(s)$ 和稳定的 $Z(s)$，从 (6.1) 中解出满足 ii) 的 $X(s)$，$Y(s)$ 的问题. 为了解方程 (6.1)，先确定 B_ν，V，使 $\tilde{P}(s)=B_\nu P(s)V$ 为列首一阵，记 $\tilde{X}(s)=X(s)\cdot B_\nu^{-1}$，$\tilde{R}(s)=R(s)V$，$\tilde{F}(s)=F(s)V$，则方程(6.1)变成(2.8)形方程

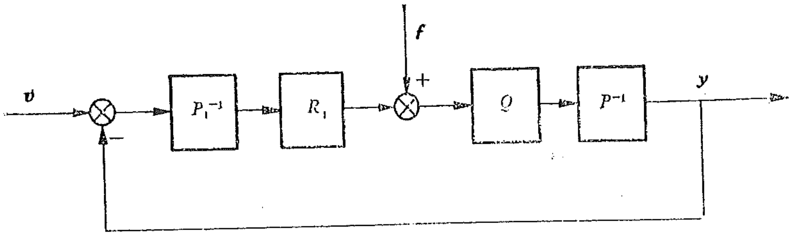
$$\tilde{X}(s)\tilde{P}(s)+Y(s)\tilde{R}(s)=Z(s)\tilde{F}(s) \tag{6.2}$$

这个方程可按定理 2.2 求解. 这样设计的补偿器阶数为 $m(\nu-1)$. 再从方程 $Z(D)\boldsymbol{w}=X(D)\boldsymbol{u}+Y(D)\boldsymbol{y}$ 中去掉 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{y}$ 所不能控部分，就能得到极点配置所需的极小阶补偿器.

2. 用“完全不变性条件”计算“鲁棒”调节器

设对象传递阵为 $W(s)=P^{-1}(s)Q(s)$，输入端有外扰 $\boldsymbol{f}$，输出要跟踪参考信号 $\boldsymbol{v}$. 设 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的每个分量满足微分方程: $k(D)x=0$，$D=\frac{d}{dt}$. 假定 $k(D)$ 的根均不稳定. 要设计一补偿器，使误差 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}\to 0$，且当系统的某些参数受扰动而不破坏系统稳定性时，总能保证 $\boldsymbol{e}\to 0$.

下面介绍如下格式串联补偿器的计算方法:



令 $M(s)=P(s)P_1(s)+Q(s)R_1(s)$，则误差传递关系为

$$e=P_1(s)M^{-1}(s)Q(s)\boldsymbol{f}-P_1(s)M^{-1}(s)P(s)\boldsymbol{v}. \tag{6.3}$$

根据不变性原理中“完全不变性条件”(见[7])上述补偿器要满足如下四个条件:

1) $M(s)$ 为稳定矩阵;

2) $P_1(s)M^{-1}(s)Q(s)$ 和 $P_1(s)M^{-1}(s)P(s)$ 的每列要含有公因子 $k(s)$——“完全不变性”,或“内模原理”;

3) $\partial(\det M(s))=\partial(\det P(s))+\partial(\det P_1(s))$——“非退化条件”. 这时闭环具有“粗略性”或“鲁棒性”;

4) $\partial_l R_1(s)\leqslant\partial_l P_1(s)$.

令 $P_0(s)=\mathrm{diag}\{k(s)\cdots k(s)\}$ ($p\times p$ 阵),并取 $P_1(s)=P_0(s)\ P(s)$，则条件 ii) 被满足. 今取稳定的行正则阵 $F(s)$，满足 $\partial_h F(s)=\partial_h P(s)P_0(s)$ 且 $F(s)$ 的行次项系数阵与 $P(s)$ 一致. 把 $M(s)$ 分解为 $M(s)=F(s)Z(s)$，并取 $Z(s)$ 为适当稳定阵. 记 $Y(s)=R_1(s)$，则求解 $P_1(s), R_1(s)$ 的问题变成求解方程

$$P(s)P_0(s)X(s)+Q(s)Y(s)=F(s)Z(s) \tag{6.4}$$

的问题. 对此方程,有

定理 6.1 设 $P(s)$ 行正则，$P(s), Q(s)$ 左互质，$\partial_h P(s)>\partial_h Q(s)$，$m\geqslant p$. 又设 $k(s)$ 的每个根 λ 不使 $Q(\lambda)$ 降秩. 那么，满足上述四个条件的 $P_1(s), R_1(s)$ 存在，且 $\partial(\det P_1(s))=p(\nu+\sigma-1)$. 这里 ν 为 $W(s)=P^{-1}(s)Q(s)$ 最小实现的能控指数，$\sigma=\partial k(s)$.

显然 $P(s)P_0(s)$ 行正则. 由于 $P(s), Q(s)$ 左互质，$m\geqslant p$，$k(s)$ 的根 λ 不使 $Q(\lambda)$ 降秩,故 $P(s)P_0(s)$ 与 $Q(s)$ 也左互质. 由此对适当选取的 $Z(s)$,方程 (6.4) 是能解的. 为了求解 (6.4)，先确定常阵 U 和 C_μ，使 $\tilde{P}(s)=UP(s)P_0(s)C_\mu$ 为首一行正则阵. 这时 $\tilde{F}(s)=UF(s)C_\mu$ 也成为首一行正则阵. 记 $\tilde{X}(s)=C_\mu^{-1}X(s)$，$\tilde{Q}(s)=UQ(s)$，则方程 (6.4) 变为

$$\tilde{P}(s)\tilde{X}(s)+\tilde{Q}(s)Y(s)=\tilde{F}(s)Z(s) \tag{6.5}$$

这是(2.9)形方程,可按定理 2.3 求解. 由于，$\partial_h\tilde{P}(s)\geqslant\partial_h\tilde{Q}(s)+\sigma+1$，故当 $Z(s)$ 取为其列次均为 $\nu-1$ 的列正则阵时，$\tilde{X}(s)$ 也是列次均为 $\nu-1$ 的列正则阵. 但是，$Y(s)$ 的列次都不超过 $\nu+\sigma-1$，而 $P_1(s)=P_0(s)C_\mu\tilde{X}(s)$ 的列次均为 $\nu+\sigma-1$，故必有 $\partial_l P_1(s)\geqslant\partial_l Y(s)=\partial_l R_1(s)$，即条件 iv) 成立. 也容易证明,条件 iii) 也是成立的.

参 考 文 献

[1] Brunobsky P. A classification of linear controlable systems, Kybernetika, Čislo. 3, 174—178, (1970).

[2] 横山隆三,線形多入力多出力系の canonical form，現代制御理論と計算機制御システム選集，III，(多変数

線形制御システム), 108—114, (1977).
[3] Yokoyama R. Kinnen E, Phase-variable canonical forms for multi-input, multi-output systems, Int. J. Contr., Vol. 17, No. 6, 1297—1312, (1973).
[4] Wang S. H, Davison E. J, Canonical form of linear multivariable systems, SIAM J. Control and Optimization, Vol. 14, No. 2, 236—250, (1976).
[5] Wolovich W. A. Linear multivariable systems, Springer, (1974).
[6] Rosenbrock H. H. Computer-aided control systems design, Acad. Press, (1974).
[7] 钱唯德,完全不变性和"Robust"调节器间的一些关系. 本论文集 (1979).