4章　積分の応用

§2　いろいろな応用（p.132〜p.146）

問1　求める図形の面積をSとする．

（1）$\dfrac{dx}{dt} = 4t$

$0 < t < 1$において，$4t > 0$で，

符号は一定であるから

$$S = \int_0^1 |t(1-t)\cdot 4t|dt$$

$$= 4\int_0^1 |t^2(1-t)|dt$$

$0 \leqq t \leqq 1$において，$t^2(1-t) \geqq 0$であるから

$$S = 4\int_0^1 t^2(1-t)dt$$

$$= 4\int_0^1 (t^2 - t^3)dt$$

$$= 4\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4\right]_0^1$$

$$= 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

（2）$\dfrac{dx}{dt} = -a\sin t$

$0 < t < \pi$において，$-a\sin t < 0$で，符号は一定．

また，この半円はy軸に関して対称だから

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |a\sin t\,(-a\sin t)|dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |-a^2\sin^2 t|dt$$

$0 \leqq t \leqq \pi$において，$-a^2\sin^2 t \leqq 0$であるから

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\,dt$$

$$= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt$$

$$= 2a^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\pi a^2}$$

問2　求める曲線の長さをlとする．

$\dfrac{dx}{dt} = -a\sin t$，$\dfrac{dy}{dt} = a\cos t$

よって

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2}dt$$

$$= \int_0^{2\pi} |a|dt$$

$$= \int_0^{2\pi} a\,dt \qquad ※a > 0\text{ より}$$

$$= \Big[at\Big]_0^{2\pi} = \boldsymbol{2\pi a}$$

（2）$\dfrac{dx}{dt} = e^t\cos t - e^t\sin t = e^t(\cos t - \sin t)$

$\dfrac{dy}{dt} = e^t\sin t + e^t\cos t = e^t(\sin t + \cos t)$

よって

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\{e^t(\cos t - \sin t)\}^2 + \{e^t(\sin t + \cos t)\}^2}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{e^{2t}\cdot 2(\cos^2 t + \sin^2 t)}dt$$

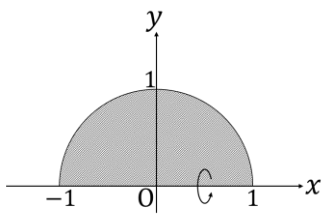
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2e^{2t}}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}e^t dt$$

$$= \sqrt{2}\Big[e^t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^0\right) = \boldsymbol{\sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)}$$

問3　求める体積をVとする．



$0 < t < \pi$において，$\dfrac{dx}{dt} = -a\sin t < 0$ で，

符号は一定である.

また，この半円はy軸に関して対称だから

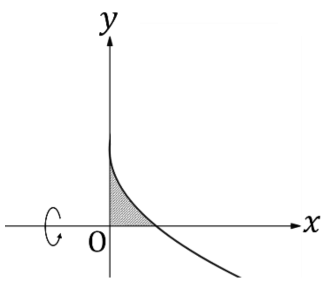
$$V = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin t)^2|-a\sin t|dt$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\sin^3 t\,dt$$

$$= 2\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,dt$$

$$= 2\pi a^3\cdot\frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

問4　求める体積をVとする.



$0 < t < 1$ において，$\dfrac{dx}{dt} = 2t > 0$ で符号は一定.

$$V = \pi\int_0^1(1-t)^2|2t|dt$$

$$= 2\pi\int_0^1 t(1-t)^2dt$$

$$= 2\pi\int_0^1(t^3-2t^2+t)dt$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\pi\cdot\frac{1}{12} = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

問5

（1）$x = 2\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}$

$= 2\cdot\dfrac{1}{2} = 1$

$y = 2\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}$

$= 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

よって，$\boldsymbol{(1,\ \sqrt{3})}$

（2）$x = \sqrt{3}\cdot\cos\pi$

$= \sqrt{3}\cdot(-1) = -\sqrt{3}$

$y = \sqrt{3}\cdot\sin\pi$

$= 2\cdot 0 = 0$

よって，$\boldsymbol{(-\sqrt{3},\ 0)}$

（3）$x = 4\cdot\cos\dfrac{3}{2}\pi$

$= 4\cdot 0 = 0$

$y = 4\cdot\sin\dfrac{3}{2}\pi$

$= 4\cdot(-1) = -4$

よって，$\boldsymbol{(0,\ -4)}$

問6

（1）$r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}$

$= \sqrt{4} = 2$

また，$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$より，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$

よって，$\boldsymbol{\left(2,\ \frac{\pi}{6}\right)}$

（2）$r = \sqrt{1^2+(-1)^2}$

$= \sqrt{2}$

また，$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$より，$\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

よって，$\boldsymbol{\left(\sqrt{2},\ -\frac{\pi}{4}\right)}$，または，$\boldsymbol{\left(\sqrt{2},\ \frac{7}{4}\pi\right)}$

（3）$r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}$

$= \sqrt{4} = 2$

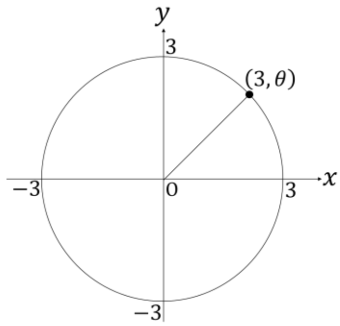
また，$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$より，$\theta = \dfrac{7}{6}\pi$

よって，$\boldsymbol{\left(2,\ \frac{7}{6}\pi\right)}$，または，$\boldsymbol{\left(2,\ -\frac{5}{6}\pi\right)}$

問7

（1）任意のθについて，$r = 3$であるから，

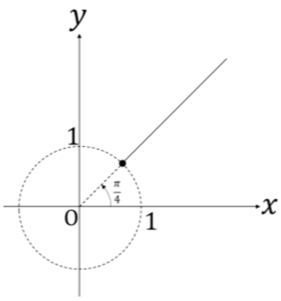
原点を中心とする半径3の円を表す.



（２）任意の$r(\geqq 1)$について，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$であるから，

原点を通りx軸の正の向きとのなす角が$\dfrac{\pi}{4}$である

半直線を表す．ただし，$r \geqq 1$であることに注意.

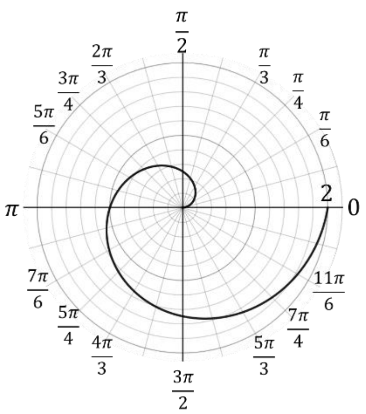


$\boxed{問8}$

（１）θのいろいろな値に対するrの値を求めると

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	1
	0	0.17	0.25	0.33	0.50	0.67	0.75	0.83	1

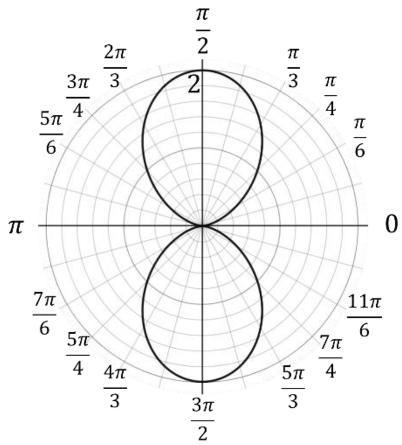
θ	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r	$\frac{7}{6}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{11}{6}$	2
	1.17	1.25	1.33	1.50	1.67	1.75	1.83	2



（２）θのいろいろな値に対するrの値を求めると

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0

θ	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0



$\boxed{問9}$　それぞれの図形の面積をSとする．

（１）$S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^2 d\theta$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 4\theta^2 d\theta$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \theta^2 d\theta$$

$$=2\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\frac{2}{3}\left\{\pi^3-\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\left(\pi^3-\frac{\pi^3}{8}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{8}\pi^3=\boldsymbol{\frac{7}{12}\pi^3}$$

（２）$S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{0}^{\pi} r^2 d\theta$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left(e^{-\theta}\right)^2 d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} e^{-2\theta} d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2\theta}\right]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{4}\left(e^{-2\pi}-e^{0}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}\left(e^{-2\pi}-1\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}\left(1-e^{-2\pi}\right)}$$

（３）求める面積は，曲線と，$\theta = 0$，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$で囲まれた部分の面積の８倍であるから

$$S = 8 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2\theta)^2 d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2\theta \, d\theta$$

$2\theta = t$とおくと，$2d\theta = dt$より，$d\theta = \dfrac{1}{2}dt$

また，θとtの対応は

θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$
t	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$

よって

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \frac{1}{2} dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

$\boxed{\text{問 10}}$　それぞれの曲線の長さをlとする．

（１）$r' = \cos\theta - \sin\theta$であるから

$$\begin{aligned} r^2 + (r')^2 &= (\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2 \\ &= \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta \\ &\qquad + \cos^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta \\ &= 2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= 2 \end{aligned}$$

よって

$$l = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{2} d\theta$$

$$= \sqrt{2}\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$= \sqrt{2}\left\{\frac{3}{4}\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \pi = \boldsymbol{\sqrt{2}\pi}$$

（２）$r' = 3\sin^2\dfrac{\theta}{3} \cdot \dfrac{1}{3}\cos\dfrac{\theta}{3} = \sin^2\dfrac{\theta}{3}\cos\dfrac{\theta}{3}$であるから

$$r^2 + (r')^2 = \left(\sin^3\frac{\theta}{3}\right)^2 + \left(\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}\right)^2$$

$$= \sin^6\frac{\theta}{3} + \sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}$$

$$= \sin^4\frac{\theta}{3}\left(\sin^2\frac{\theta}{3} + \cos^2\frac{\theta}{3}\right)$$

$$= \sin^4\frac{\theta}{3}$$

よって

$$l = \int_0^{3\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta$$

$$= \int_0^{3\pi} \sqrt{\sin^4\frac{\theta}{3}} d\theta$$

$$= \int_0^{3\pi} \left|\sin^2\frac{\theta}{3}\right| d\theta$$

$$= \int_0^{3\pi} \sin^2\frac{\theta}{3} d\theta \quad ※\sin^2\frac{\theta}{3} \geqq 0 \text{ より}$$

$\dfrac{\theta}{3} = t$とおくと，$\dfrac{1}{3}d\theta = dt$より，$d\theta = 3dt$

また，θとtの対応は

θ	0	$\to$	3π
t	0	$\to$	π

よって

$$l = \int_0^{\pi} \sin^2 t \cdot 3dt$$

$$= 3\int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt$$

$$= 3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 t \, dt\right)$$

$$= 3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt\right) \quad ※\text{p. 118 の}\mathbf{5.}\text{より}$$

$$= 3 \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{2}\pi}$$

$\boxed{\text{問 11}}$

（１）与式 $= \displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \Big[2\sqrt{x+1}\Big]_{-1+\varepsilon}^{0}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} 2\left(\sqrt{1} - \sqrt{-1+\varepsilon+1}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} 2\left(1 - \sqrt{\varepsilon}\right)$$

$$= 2(1 - 0) = \mathbf{2}$$

【別解】

$$与式=\left[2\sqrt{x+1}\right]_{-1}^{0}$$
$$=2\left(\sqrt{1}-\sqrt{0}\right)$$
$$=2(1-0)=\mathbf{2}$$

（2）$与式=\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^{1-\varepsilon}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{-2\left(\sqrt{1-(1-\varepsilon)}-\sqrt{1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{-2\left(\sqrt{\varepsilon}-1\right)\right\}$$
$$=-2(0-1)=\mathbf{2}$$

【別解】

$$与式=\left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^1$$
$$=-2\left(\sqrt{0}-\sqrt{1}\right)$$
$$=-2(0-1)=\mathbf{2}$$

（3）$与式=\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}\int_{-2+\varepsilon}^{2-\varepsilon'}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}\left[\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_{-2+\varepsilon}^{2-\varepsilon'}$$
$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}\left\{\sin^{-1}\frac{1}{2}(2-\varepsilon')-\sin^{-1}\frac{1}{2}(-2+\varepsilon)\right\}$$
$$=\sin^{-1}1-\sin^{-1}(-1)$$
$$=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\boldsymbol{\pi}$$

【別解】

$$与式=\left[\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_{-2}^{2}$$
$$=\sin^{-1}\frac{2}{2}-\sin^{-1}\frac{-2}{2}$$
$$=\sin^{-1}1-\sin^{-1}(-1)$$
$$=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\boldsymbol{\pi}$$

問 12

$$与式=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right]_{1+\varepsilon}^{2}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\log\left|2+\sqrt{2^2-1}\right|-\log\left|1+\varepsilon+\sqrt{(1+\varepsilon)^2-1}\right|\right\}$$
$$=\log\left(2+\sqrt{3}\right)-\log\left|1+0+\sqrt{1^2-1}\right|$$
$$=\log\left(2+\sqrt{3}\right)-\log 1$$
$$=\mathbf{\log\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

問 13

（1）$与式=\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^3}$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^b$$
$$=\lim_{b\to\infty}\left\{\frac{1}{-2b^2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=0-\left(-\frac{1}{2}\right)=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

【別解】

$$与式=\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^{\infty}$$
$$=0-\left(-\frac{1}{2}\right)=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

（2）$与式=\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-3x}dx$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^b$$
$$=-\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-3b}-e^0\right)$$
$$=-\frac{1}{3}(0-1)=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

【別解】

$$与式=\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^{\infty}$$
$$=-\frac{1}{3}\left(0-e^0\right)$$
$$=-\frac{1}{3}(0-1)=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

（3）$与式=\displaystyle\lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}\int_a^b\frac{dx}{9+x^2}$

$$=\lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}\left[\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}\right]_a^b$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}\left(\tan^{-1}\frac{b}{3}-\tan^{-1}\frac{a}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$

【別解】

$$与式 = \left[\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$

$\boxed{\text{問 14}}$

この点のt秒後の座標を$x(t)$とすると

$$x(t) = 10 + \int_0^t 12\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)dt$$

$$= 10 + 12\left[\frac{1}{2}\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)\right]_0^t$$

$$= 10 + 6\left\{\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\frac{\pi}{6}\right\}$$

$$= 10 + 6\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) - 6\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \boldsymbol{7 + 6\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$\boxed{\text{問 15}}$

（１）$-N'(t)$が$N(t)$に比例するので

$$-N'(t) = \lambda N(t)$$

$N(t)$は原子の個数だから，$N(t) > 0$なので，

両辺を$-N(t)$で割ると

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = -\lambda$$

この両辺をtで積分すると

$$\int \frac{N'(t)}{N(t)}dt = -\int \lambda\, dt$$

$$\log N(t) = -\lambda t + C$$

よって

$$N(t) = e^{-\lambda t + C}$$

$$= e^C e^{-\lambda t}$$

e^Cは定数なので，これをC'とおくと，$N(t) = C'e^{-\lambda t}$

$t = 0$のとき，$N(t) = N_0$であるから

$$N_0 = C'e^0$$

$$N_0 = C'$$

よって，$\boldsymbol{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}$・・・①

（２）$N(t) = \frac{1}{2}N_0$となる時刻を求めればよいので,

これを①に代入して

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\lambda t}$$

$N_0 \neq 0$ であるから，$e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$

よって，$-\lambda t = \log\frac{1}{2} = -\log 2$

したがって，$t = \boldsymbol{\frac{\log 2}{\lambda}}$