２章　偏微分

§１　偏微分法（p.30～p.44）

問１

与えられた平面の方程式は，$3x - 2y + z - 5 = 0$とかけるので，法線ベクトルの１つは，

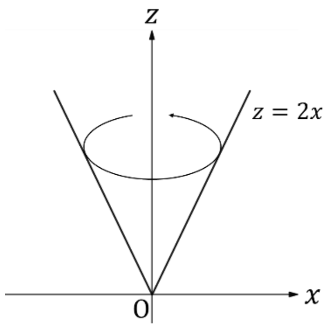
$(3,\ -2,\ 1)$

※法線ベクトルはこの１つに限らず，このベクトルの実数倍されたベクトルはすべて法線ベクトルである．

問２

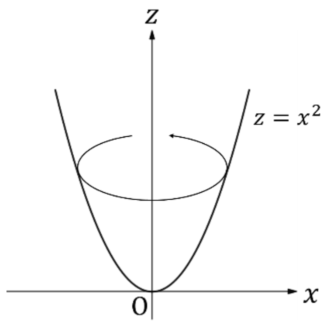
（１）$y = 0$,（$x \geqq 0$）とすれば，$\boldsymbol{z = 2x}$

よって，求める曲面は，**zx平面上のこの曲線を，z軸のまわりに回転してできる回転面**である．



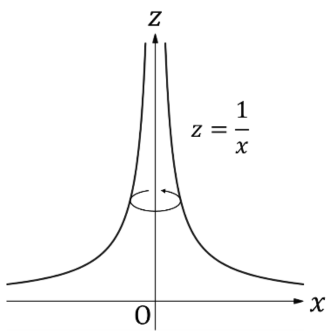
（２）$y = 0$とすれば，$\boldsymbol{z = x^2}$（$\boldsymbol{x \geqq 0}$）

よって，求める曲面は，**zx平面上のこの曲線を，z軸のまわりに回転してできる回転面**である．



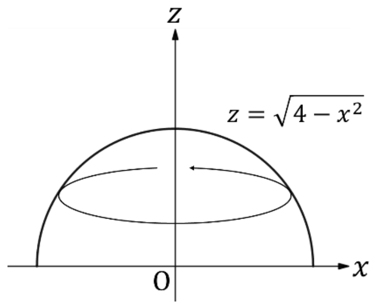
（３）$y = 0$, $x \geqq 0$ とすれば，$\boldsymbol{z = \dfrac{1}{x}}$（$\boldsymbol{x > 0}$）

よって，求める曲面は，**zx平面上のこの曲線を，z軸のまわりに回転してできる回転面**である．



（４）$y = 0$とすれば，$\boldsymbol{z = \sqrt{4 - x^2}}$（$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq 2}$）

よって，求める曲面は，**zx平面上のこの曲線を，z軸のまわりに回転してできる回転面**である．



問３

（１）
$$z_x = 3 \cdot 1 \cdot y^3 - 2 \cdot 4x^3 y^2 = \boldsymbol{3y^3 - 8x^3 y^2}$$
$$z_y = 3x \cdot 3y^2 - 2x^4 \cdot 2y = \boldsymbol{9xy^2 - 4x^4 y}$$

（２）
$$z_x = \cos 2x \cdot 2 \cdot \cos y = \boldsymbol{2\cos 2x \cos y}$$
$$z_y = \sin 2x \cdot (-\sin y) = \boldsymbol{-\sin 2x \sin y}$$

（３）
$$z_x = \frac{1}{3x - 2y} \cdot 3 = \boldsymbol{\frac{3}{3x - 2y}}$$
$$z_y = \frac{1}{3x - 2y} \cdot (-2) = \boldsymbol{-\frac{2}{3x - 2y}}$$

（４）
$$z_x = e^{-3y} \cdot (-\sin 2x \cdot 2) = \boldsymbol{-2e^{-3y} \sin 2x}$$
$$z_y = e^{-3y} \cdot (-3) \cdot \cos 2x = \boldsymbol{-3e^{-3y} \cos 2x}$$

（５）
$$z_x = \frac{3(x + y) - (3x - 5y) \cdot 1}{(x + y)^2} = \frac{3x + 3y - 3x + 5y}{(x + y)^2} = \boldsymbol{\frac{8y}{(x + y)^2}}$$
$$z_y = \frac{-5(x + y) - (3x - 5y) \cdot 1}{(x + y)^2} = \frac{-5x - 5y - 3x + 5y}{(x + y)^2} = \boldsymbol{-\frac{8x}{(x + y)^2}}$$

（６）$z_x = \mathbf{2e^y}$

$z_y = -2ye^y + (2x - y^2)e^y$

$= (\mathbf{2x - 2y - y^2})\mathbf{e^y}$

$\boxed{\text{問４}}$

（１）$f_x(x,\ y) = 3x^2 - y$

$f_y(x,\ y) = -x + 3y^2$

これより

$f_x(1,\ 2) = 3 \cdot 1^2 - 2 = \mathbf{1}$

$f_y(1,\ 2) = -1 + 3 \cdot 2^2 = \mathbf{11}$

（２）$f_x(x,\ y) = e^{x^2+y^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2+y^2}$

$f_y(x,\ y) = e^{x^2+y^2} \cdot 2y = 2ye^{x^2+y^2}$

これより

$f_x(1,\ 2) = 2 \cdot 1 \cdot e^{1^2+2^2} = \mathbf{2e^5}$

$f_y(1,\ 2) = 2 \cdot 2 \cdot e^{1^2+2^2} = \mathbf{4e^5}$

（３）$f_x(x,\ y) = \tan \pi x$

$$f_y(x,\ y) = x \cdot \frac{1}{\cos^2 \pi y} \cdot \pi = \frac{\pi x}{\cos^2 \pi y}$$

これより

$f_x(1,\ 2) = \tan \pi = \mathbf{0}$

$$f_y(1,\ 2) = \frac{\pi}{\cos^2 2\pi} = \frac{\pi}{1} = \boldsymbol{\pi}$$

（４）$$f_x(x,\ y) = 1\sqrt{x+4y} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+4y}}$$

$$= \frac{2 \cdot \left(\sqrt{x+4y}\right)^2 + x}{2\sqrt{x+4y}}$$

$$= \frac{2(x+4y) + x}{2\sqrt{x+4y}}$$

$$= \frac{2x + 8y + x}{2\sqrt{x+4y}} = \frac{3x+8y}{2\sqrt{x+4y}}$$

$$f_x(x,\ y) = x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+4y}} \cdot 4$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x+4y}}$$

これより

$$f_x(1,\ 2) = \frac{3 \cdot 1 + 8 \cdot 2}{2\sqrt{1 + 4 \cdot 2}} = \frac{19}{2\sqrt{9}} = \mathbf{\frac{19}{6}}$$

$$f_y(1,\ 2) = \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{1 + 4 \cdot 2}} = \frac{2}{\sqrt{9}} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

$\boxed{\text{問５}}$

（１）$f_x(x,\ y,\ z) = \mathbf{2x}$

$f_y(x,\ y,\ z) = \mathbf{-2y - z}$

$f_z(x,\ y,\ z) = \mathbf{2z - y}$

これより

$f_x(1,\ 0,\ 1) = 2 \cdot 1 = \mathbf{2}$

$f_y(1,\ 0,\ 1) = -2 \cdot 0 - 1 = \mathbf{-1}$

$f_z(1,\ 0,\ 1) = 2 \cdot 1 - 0 = \mathbf{2}$

（２）$$f_x(x,\ y,\ z) = \mathbf{\frac{2}{z}}$$

$$f_y(x,\ y,\ z) = -\mathbf{\frac{1}{z}}$$

$$f_z(x,\ y,\ z) = -\mathbf{\frac{2x - y}{z^2}}$$

これより

$$f_x(1,\ 0,\ 1) = \frac{2}{1} = \mathbf{2}$$

$$f_y(1,\ 0,\ 1) = \frac{-1}{1} = \mathbf{-1}$$

$$f_z(1,\ 0,\ 1) = -\frac{2 \cdot 1 - 0}{1^2} = \mathbf{-2}$$

$\boxed{\text{問６}}$

（１）$z_x = 4x^3 - 2y$

$z_y = -2x + 3y^2$

よって，$dz = z_x dx + z_y dy$

$= (\mathbf{4x^3 - 2y})\mathbf{dx} + (\mathbf{3y^2 - 2x})\mathbf{dy}$

（２）$$z_x = \frac{1}{\cos^2(x - 2y)}$$

$$z_y = \frac{1}{\cos^2(x-2y)} \cdot (-2y) = -\frac{2y}{\cos^2(x-2y)}$$

よって，$dz = z_x dx + z_y dy$

$$= \mathbf{\frac{1}{\cos^2(x-2y)}dx - \frac{2}{\cos^2(x-2y)}dy}$$

$\boxed{\text{問７}}$

$V = \dfrac{1}{3}x^2y$であるから

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2}{3}xy$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{3}x^2$$

よって，$\Delta V \fallingdotseq \dfrac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial V}{\partial y}\Delta y$

$$= \mathbf{\frac{2}{3}xy\Delta x + \frac{1}{3}x^2\Delta y}$$

問 8

（１）$z_x = 2x,\ z_y = 2y$

これより，$x = 1,\ y = 1$のとき，$z_x = 2,\ z_y = 2$

であるから，求める接平面の方程式は

$$z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1)$$

整理して

$$z - 2 = 2x - 2 + 2y - 2$$

$$\mathbf{2x + 2y - z = 2}$$

（２）$z_x = -\dfrac{2}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x = -\dfrac{4x}{(x^2+y^2)^2}$

$$z_y = -\frac{2}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2y = -\frac{4y}{(x^2+y^2)^2}$$

$x = 1,\ y = -1$のとき

$$z = \frac{2}{1^2 + (-1)^2} = \frac{2}{2} = 1$$

また，$z_x = -1,\ z_y = 1$であるから，

求める接平面の方程式は

$$z - 1 = -1(x - 1) + 1\{y - (-1)\}$$

整理して

$$z - 1 = -x + 1 + y + 1$$

$$\boldsymbol{x - y + z = 3}$$

問 9

$$\frac{dx}{dt} = \cos 2t \cdot 2 = 2\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = -\sin 3t \cdot 3 = -3\sin 3t$$

よって，$\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

$$= \boldsymbol{2\cos 2t \frac{\partial z}{\partial x} - 3\sin 3t \frac{\partial z}{\partial y}}$$

問 10

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1(2x+y) - (x-y)\cdot 2}{(2x+y)^2}$$

$$= \frac{2x + y - 2x + 2y}{(2x+y)^2} = \frac{3y}{(2x+y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-1(2x+y) - (x-y)\cdot 1}{(2x+y)^2}$$

$$= \frac{-2x - y - x + y}{(2x+y)^2} = \frac{-3x}{(2x+y)^2}$$

また，$\dfrac{dx}{dt} = e^t,\ \dfrac{dy}{dt} = -e^{-t}$

よって，$\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

$$= \frac{3y}{(2x+y)^2}e^t + \frac{-3x}{(2x+y)^2}(-e^{-t})$$

$$= \frac{3ye^t + 3xe^{-t}}{(2x+y)^2}$$

$$= \frac{3e^{-t}e^t + 3e^te^{-t}}{(2e^t + e^{-t})^2}$$

$$= \frac{3+3}{(2e^t + e^{-t})^2} = \boldsymbol{\frac{6}{(2e^t + e^{-t})^2}}$$

問 11

$z_x = 2x,\ z_y = 2y$

$x_u = 3,\ x_v = 2,\ y_u = 2,\ y_v = -1$

よって

$$\begin{aligned} z_u &= z_x x_u + z_y y_u \\ &= 2x \cdot 3 + 2y \cdot 2 \\ &= 6x + 4y \\ &= 6(3u + 2v) + 4(2u - v) \\ &= 18u + 12v + 8u - 4v \\ &= \boldsymbol{26u + 8v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_v &= z_x x_v + z_y y_v \\ &= 2x \cdot 2 + 2y \cdot (-1) \\ &= 4x - 2y \\ &= 4(3u + 2v) - 2(2u - v) \\ &= 12u + 8v - 4u + 2v \\ &= \boldsymbol{8u + 10v} \end{aligned}$$