4章　微分方程式

§1　1階微分方程式（p.100〜p.110）

問1

物体の温度と室温との差は，$20-x$であるから

$$\frac{dx}{dt}=k(20-x)$$

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dt}=-k(x-20)}$$

問2

（1）$\dfrac{dx}{dt}=2Ct$

$x=Ct^2$より，$C=\dfrac{x}{t^2}$

よって

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2tx}{t^2}$$

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dt}=\frac{2x}{t}}$$

（2）$\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{C}{t^2}$

$x=\dfrac{C}{t}$より，$C=xt$

よって

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{xt}{t^2}$$

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dt}=-\frac{x}{t}}$$

問3

$x=(C-15)e^{-kt}+15$に，$t=0$，$x=50$を代入すると

$50=(C-15)e^0+15$

$50=C-15+15$

$C=50$

よって，$x=(50-15)e^{-kt}+15$

すなわち，$\boldsymbol{x=35e^{-kt}+15}$

問4

$x=(t+C)e^t$の両辺をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=1\cdot e^t+(t+C)e^t$$
$$=(t+C)e^t+e^t$$
$$=(t+1+C)e^t$$

また

右辺 $=x+e^t$
$$=(t+C)e^t+e^t$$
$$=(x+1+C)e^t$$

よって，左辺＝右辺

また，1個の任意定数を含むから，関数$x=(t+C)e^t$は与えられた微分方程式の一般解である．

（2）$x=(t+C)e^t$に，$t=0$，$x=1$を代入すると

$1=(0+C)e^0$

$C=1$

よって，特殊解は，$\boldsymbol{x=(t+1)e^t}$

（3）$x=(t+C)e^t$に，$t=1$，$x=2$を代入すると

$2=(1+C)e^1$

$2=e+Ce$

$Ce=2-e$

$C=\dfrac{2}{e}-1$

よって，特殊解は，$\boldsymbol{x=\left(t+\frac{2}{e}-1\right)e^t}$

問5

（1）両辺をxで割ると

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=3t^2$$

両辺をtについて積分すると

$$\int\frac{1}{x}dx=\int 3t^2dt$$

これより，$\log|x|=t^3+c$（cは任意定数）

よって

$|x|=e^{t^3+c}$

$x=\pm e^{t^3+c}$

$=\pm e^c\cdot e^{t^3}$

$C=\pm e^c$ とおくと

$\boldsymbol{x=Ce^{t^3}}$ **（$\boldsymbol{C}$は任意定数）**

（２）両辺に$2x$をかけると

$$2x\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$$

両辺をtについて積分すると

$$\int 2x\,dx=\int\frac{1}{t}dt$$

これより，$\boldsymbol{x^2=\log|t|+C}$ **（$\boldsymbol{C}$は任意定数）**

（３）両辺にxで割ると

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{t^2+1}dt$$

両辺をtについて積分すると

$$\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{2t}{t^2+1}dt$$

$$\log|x|=\int\frac{(t^2+1)'}{t^2+1}dt$$

これより

$\log|x|=\log(t^2+1)+c$（cは任意定数）（$t^2+1\geqq 0$）

$\log|x|-\log(t^2+1)=c$

$$\log\left|\frac{x}{t^2+1}\right|=c$$

よって

$$\left|\frac{x}{t^2+1}\right|=e^c$$

$$\frac{x}{t^2+1}=\pm e^c$$

$$x=\pm e^c(t^2+1)$$

$C=\pm e^c$とおくと

$\boldsymbol{x=C(t^2+1)}$ **（$\boldsymbol{C}$は任意定数）**

（４）$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x^2}{\cos^2 t}$

両辺を$\dfrac{1}{x^2}$で割ると

$$\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\cos^2 t}$$

両辺をtについて積分すると

$$\int\frac{1}{x^2}dx=\int\frac{1}{\cos^2 t}dt$$

これより

$$-\frac{1}{x}=\tan t+C$$

$\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{\tan t+C}}$ **（$\boldsymbol{C}$は任意定数）**

問６

（１）両辺を$\dfrac{1}{x}$で割ると

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{t}$$

両辺をtについて積分すると

$$\int\frac{1}{x}dx=-\int\frac{1}{t}dt$$

これより

$\log|x|=-\log|t|+c$（cは任意定数）

$\log|x|+\log|t|=c$

$\log|xt|=c$

$xt=\pm e^c$

$C=e^c$とおくと

$xt=C$

$$x=\frac{C}{t}$$

これに，$t=1$，$x=2$を代入すると

$$2=\frac{C}{1}$$

$C=2$

よって，求める解は，$\boldsymbol{x=\dfrac{2}{t}}$

（２）$\dfrac{dx}{dt}=e^t\cdot e^{-x}$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{e^t}{e^x}$$

両辺にe^xをかけると

$$e^x\frac{dx}{dt}=e^t$$

両辺をtについて積分すると

$$\int e^x dx=\int e^t dt$$

これより

$e^x=e^t+C$（Cは任意定数）

$x=\log(e^t+C)$

これに，$t=0$，$x=0$を代入すると

$0 = \log(e^0 + C)$

$0 = \log(1 + C)$

$1 + C = 1$より，$C = 0$

よって，求める解は，$x = \log e^t$であるから

$\boldsymbol{x = t}$

$\boxed{問 7}$

（１）i）斉次１階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt} + 2tx = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -2tx$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = -2t$$

両辺をtについて積分すると

$$\int \frac{1}{x}dx = -\int 2tdt$$

これより

$\log|x| = -t^2 + c$（cは任意定数）

$x = \pm e^{-t^2+c}$

$x = \pm e^c \cdot e^{-t^2}$

$C = \pm e^c$とおくと

$x = Ce^{-t^2}$（Cは任意定数）

ii）定数Cをtの関数$u = C(t)$で置き換える．

$x = ue^{-t^2}$となるから，両辺をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}e^{-t^2} + u \cdot \left(-2te^{-t^2}\right)$$

$$= \frac{du}{dt}e^{-t^2} - 2ute^{-t^2}$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}e^{-t^2} - 2ute^{-t^2} + 2t \cdot ue^{-t^2} = 2t$$

$$\frac{du}{dt}e^{-t^2} = 2t$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{2t}{e^{-t^2}}$$

$$\frac{du}{dt} = 2te^{t^2}$$

両辺をtについて積分すると

$$\int du = \int 2te^{t^2}dt$$

ここで，$\int 2te^{t^2}dt$について，$s = t^2$とおくと，

$ds = 2tdt$

よって

$$\int du = \int e^s ds$$

これより，$u = e^s + C$（Cは任意定数）

すなわち，$u = e^{t^2} + C$

よって，求める一般解は

$x = \left(e^{t^2} + C\right)e^{-t^2}$

$\boldsymbol{x = 1 + Ce^{-t^2}}$ **（$\boldsymbol{C}$は任意定数）**

（２）i）斉次１階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt} - x = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = x$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = 1$$

両辺をtについて積分すると

$$\int \frac{1}{x}dx = \int dt$$

これより

$\log|x| = t + c$（cは任意定数）

$x = \pm e^{t+c}$

$x = \pm e^c \cdot e^t$

$C = \pm e^c$とおくと

$x = Ce^t$（Cは任意定数）

ii）$x = ue^t$とおき，両辺をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}e^t + ue^t$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}e^t + ue^t - ue^t = e^t$$

$$\frac{du}{dt}e^t = e^t$$

$$\frac{du}{dt} = 1$$

両辺をtについて積分すると

$$\int du = \int dt$$

$u = t + C$（Cは任意定数）

よって，求める一般解は

$$\boldsymbol{x=(t+C)e^{t}}\ \textbf{（}\boldsymbol{C}\textbf{は任意定数）}$$

$\boxed{\text{問 8}}$

（１）i）斉次１階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt}+x\sin t=0$$

$$\frac{dx}{dt}=-x\sin t$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=-\sin t$$

両辺をtについて積分すると

$$\int\frac{1}{x}dx=-\int\sin t\,dt$$

これより

$\log|x|=\cos t+c$（cは任意定数）

$$x=\pm e^{\cos t+c}$$

$$x=\pm e^{c}\cdot e^{\cos t}$$

$C=\pm e^{c}$とおくと

$x=Ce^{\cos t}$（Cは任意定数）

ii）$x=ue^{\cos t}$とおき，両辺をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}e^{\cos t}+ue^{\cos t}\cdot(-\sin t)$$

$$=\frac{du}{dt}e^{\cos t}-ue^{\cos t}\sin t$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}e^{\cos t}-ue^{\cos t}\sin t+ue^{\cos t}\sin t=2te^{\cos t}$$

$$\frac{du}{dt}e^{\cos t}=2te^{\cos t}$$

$$\frac{du}{dt}=2t$$

両辺をtについて積分すると

$$\int du=\int 2tdt$$

$u=t^{2}+C$（Cは任意定数）

よって，求める一般解は

$x=(t^{2}+C)e^{\cos t}$（Cは任意定数）

これに，$t=0$，$x=e$を代入して

$$e=(0+C)e^{\cos 0}$$

$$e=Ce$$

$$C=1$$

よって，求める解は

$$\boldsymbol{x=(t^{2}+1)e^{\cos t}}$$

（２）i）斉次１階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt}-\frac{2x}{t}=0$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2x}{t}$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=\frac{2}{t}$$

両辺をtについて積分すると

$$\int\frac{1}{x}dx=2\int\frac{1}{t}dt$$

これより

$\log|x|=2\log|t|+c$（cは任意定数）

$$\log x-\log|t|^{2}=c$$

$$\log\left|\frac{x}{t^{2}}\right|=c$$

$$\frac{x}{t^{2}}=\pm e^{c}$$

$$x=\pm e^{c}\cdot t^{2}$$

$C=\pm e^{c}$とおくと

$x=Ct^{2}$（Cは任意定数）

ii）定数Cをtの関数$u=C(t)$で置き換える．

$x=ut^{2}$となるから，両辺をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}t^{2}+2ut$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}t^{2}+2ut-\frac{2}{t}ut^{2}=t$$

$$\frac{du}{dt}t^{2}+2ut-2ut=t$$

$$\frac{du}{dt}t^{2}=t$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{t}{t^{2}}$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{t}$$

両辺をtについて積分すると

$$\int du=\int\frac{1}{t}dt$$

$u=\log|t|+C$（Cは任意定数）

よって，求める一般解は

$x=(\log|t|+C)t^2$（Cは任意定数）

これに，$t=1$，$x=-1$を代入して

$-1=(\log 1+C)\cdot 1^2$

$-1=(0+C)\cdot 1$

$C=-1$

よって，求める解は

$\boldsymbol{x=(\log|t|-1)t^2}$

問 9

（1）$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x+t}{t}$より，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x}{t}+1$・・・①

$u=\dfrac{x}{t}$とおくと，$x=tu$であるから，

両辺をtで微分して

$$\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$$

これを①に代入して

$$u+t\frac{du}{dt}=u+1$$

$$t\frac{du}{dt}=1$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{t}$$

両辺をtについて積分すると

$$\int du=\int\frac{1}{t}dt$$

これより

$u=\log|t|+C$（Cは任意定数）

ここで，$u=\dfrac{x}{t}$であるから

$$\frac{x}{t}=\log|t|+C$$

$\boldsymbol{x=t(\log|t|+C)}$**（$\boldsymbol{C}$は任意定数）**

（2）$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3x^2-t^2}{2tx}$より，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x}{t}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t}{x}$

すなわち，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x}{t}-\dfrac{1}{2\cdot\frac{x}{t}}$・・・①

$u=\dfrac{x}{t}$とおくと，$x=tu$であるから，

両辺をtで微分して

$$\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$$

これを①に代入して

$$u+t\frac{du}{dt}=\frac{3}{2}u-\frac{1}{2u}$$

$$t\frac{du}{dt}=\frac{1}{2}u-\frac{1}{2u}$$

$$t\frac{du}{dt}=\frac{u^2-1}{2u}$$

$$\frac{2u}{u^2-1}\frac{du}{dt}=\frac{1}{t}$$

両辺をtについて積分すると

$$\int\frac{2u}{u^2-1}du=\int\frac{1}{t}dt$$

$$\int\frac{(u^2-1)'}{u^2-1}du=\int\frac{1}{t}dt$$

これより

$\log|u^2-1|=\log|t|+c$（cは任意定数）

$\log|u^2-1|-\log|t|=c$

$$\log\left|\frac{u^2-1}{t}\right|=c$$

$$\frac{u^2-1}{t}=\pm e^c$$

$C=\pm e^c$とおくと

$$\frac{u^2-1}{t}=C$$

ここで，$u=\dfrac{x}{t}$であるから

$$\frac{\left(\frac{x}{t}\right)^2-1}{t}=C$$

$$\frac{\frac{x^2}{t^2}-1}{t}=C$$

$$\frac{x^2-t^2}{t^3}=C$$

$x^2-t^2=Ct^3$

$\boldsymbol{x^2=Ct^3+t^2}$**（$\boldsymbol{C}$は任意定数）**

問 10

（1）$u=\dfrac{x}{t}$とおくと，$x=tu$であるから，

両辺をtで微分して，$\dfrac{dx}{dt}=u+t\dfrac{du}{dt}$

これを微分方程式に代入して

$$u + t\frac{du}{dt} = u + e^{-u}$$

$$t\frac{du}{dt} = \frac{1}{e^u}$$

$$e^u\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}$$

両辺をtについて積分すると

$$\int e^u du = \int \frac{1}{t}dt$$

これより

$e^u = \log|t| + C$（Cは任意定数）

$u = \log(\log|t| + C)$

ここで，$u = \dfrac{x}{t}$であるから

$$\frac{x}{t} = \log(\log|t| + C)$$

$x = t\log(\log|t| + C)$（Cは任意定数）

これに，$t = 1$，$x = 0$を代入して

$0 = 1 \cdot \log(\log 1 + C)$

$0 = \log C$

$C = 1$

よって，求める解は

$\boldsymbol{x = t\log(\log|t| + 1)}$

（２）$t\dfrac{dx}{dt} = 2x - 3t$より，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2x}{t} - 3$・・・①

$u = \dfrac{x}{t}$とおくと，$x = tu$であるから，

両辺をtで微分して

$$\frac{dx}{dt} = u + t\frac{du}{dt}$$

これを①に代入して

$$u + t\frac{du}{dt} = 2u - 3$$

$$t\frac{du}{dt} = u - 3$$

$$\frac{1}{u-3}\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}$$

両辺をtについて積分すると

$$\int \frac{1}{u-3}du = \int \frac{1}{t}dt$$

これより

$\log|u - 3| = \log|t| + c$（$c$は任意定数）

$\log|u - 3| - \log|t| = c$

$$\log\left|\frac{u-3}{t}\right| = c$$

$$\frac{u-3}{t} = \pm e^c$$

$C = \pm e^c$とおくと

$$\frac{u-3}{t} = C$$

$u - 3 = Ct$

$u = Ct + 3$

ここで，$u = \dfrac{x}{t}$であるから

$$\frac{x}{t} = Ct + 3$$

$x = t(Ct + 3)$（Cは任意定数）

これに，$t = 1$，$x = 5$を代入して

$5 = 1 \cdot (C \cdot 1 + 3)$

$5 = C + 3$

$C = 2$

よって，求める解は

$\boldsymbol{x = t(2t + 3) = 2t^2 + 3t}$