練習問題 1-A

1.

（１）与式 $= 2\begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 4 & 10 \\ 8 & 14 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 24 & 21 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12+3-12 & 4+4-24 & 10+(-3)-21 \\ 8+4-3 & 14+1-9 & -2+6-6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-16} & \mathbf{-14} \\ \mathbf{9} & \mathbf{6} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

（２）与式 $= \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 12 & -9 \\ 12 & 3 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 16 & 14 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6-9+8 & 2-12+16 & 5-(-9)+14 \\ 4-12+2 & 7-3+6 & -1-18+4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{28} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{10} & \mathbf{-15} \end{pmatrix}$$

2.

（１）$3X + 2B = X + 6A$ より

$$3X - X = 6A - 2B$$

$$2X = 6A - 2B$$

$$X = 3A - B$$

$$= 3\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 9 & 18 \\ 6 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3-5 & 12-1 \\ 9-(-3) & 18-1 \\ 6-1 & 18-4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{11} \\ \mathbf{12} & \mathbf{17} \\ \mathbf{5} & \mathbf{14} \end{pmatrix}$$

（２）$X + 5A + 2B = 3(X + 3A)$ より

$$X + 5A + 2B = 3X + 9A$$

$$x - 3X = 9A - 5A - 2B$$

$$-2X = 4A - 2B$$

$$X = -2A + B$$

$$= -2\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -6 & -12 \\ -4 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2+5 & -8+1 \\ -6+(-3) & -12+1 \\ -4+1 & -12+4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{-9} & \mathbf{-11} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-8} \end{pmatrix}$$

3.

（１）与式 $= \begin{pmatrix} 0+3+0 & 16+9+0 & 0+12+0 \\ 0-1-8 & 4-3+0 & 0-4-2 \\ 0+2+4 & -8+6+0 & 0+8+1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{25} & \mathbf{12} \\ \mathbf{-9} & \mathbf{1} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-2} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$$

（２）与式 $= \begin{pmatrix} 24+20 & 0+16 & 8+20 \\ 3-25 & 0-20 & 1-25 \\ 12-5 & 0-4 & 4-5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{44} & \mathbf{16} & \mathbf{28} \\ \mathbf{-22} & \mathbf{-20} & \mathbf{-24} \\ \mathbf{7} & \mathbf{-4} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

4.

（１）$3 \cdot 6 - (-2) \cdot (-9) = 0$ であるから，**正則でない．**

（２）$1 \cdot 7 - 5 \cdot 2 = -3 \neq 0$ であるから，**正則である．**

逆行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

5.

与えられた行列が正則であるための条件は，

$a \cdot 4 - (-2) \cdot 6 \neq 0$ であるから，$4a + 12 \neq 0$

すなわち，$\boldsymbol{a \neq -3}$

このとき，逆行列は

$$\begin{pmatrix} a & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4a+12}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{4(a+3)}}\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-6} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

6.

$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ はいずれも正則であるから，

$$\begin{pmatrix}4 & 5\\3 & 4\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{16-15}\begin{pmatrix}4 & -5\\-3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -5\\-3 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{0-1}\begin{pmatrix}-2 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

ここで，与えられた等式の両辺に，

左から$\begin{pmatrix}4 & 5\\3 & 4\end{pmatrix}^{-1}$を，右から$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}^{-1}$をかけると

$$\begin{pmatrix}4 & 5\\3 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4 & 5\\3 & 4\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}4 & 5\\3 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & -4\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}^{-1}$$

すなわち

$$EAE = \begin{pmatrix}4 & 5\\3 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & -4\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix}4 & -5\\-3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -4\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}8-5 & -16+0\\-6+4 & 12+0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3 & -16\\-2 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}6-16 & 3+0\\-4+12 & -2+0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\mathbf{-10} & \mathbf{3}\\\mathbf{8} & \mathbf{-2}\end{pmatrix}$$

7. かける順番に注意して展開する．

左辺 $= AA - AB + BA - BB$

$= A^2 - B^2 - AB + BA$

これが右辺と等しくなるための条件は，

$-AB + BA = 0$

したがって，$\boldsymbol{AB = BA}$

練習問題 1-B

1.

$X = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$とすると

$$X^2 = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ca+dc & cb+d^2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\c(a+d) & bc+d^2\end{pmatrix}$$

よって，$X^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}$となるためには

$$\begin{cases}a^2+bc = 1 & \cdots ①\\ b(a+d) = 0 & \cdots ②\\ c(a+d) = 0 & \cdots ③\\ bc+d^2 = 4 & \cdots ④\end{cases}$$

④より，$bc = 4 - d^2$

①に代入して，$a^2 + (4 - d^2) = 1$

すなわち，$a^2 - d^2 = -3$

これより

$(a+d)(a-d) = -3$であるから，$a + d \neq 0$

②，③において，$a + d \neq 0$より，$bc = 0$

①，④に代入して，$a^2 = 1$，$d^2 = 4$

すなわち，$a = \pm 1$，$d = \pm 2$

以上より

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\\mathbf{0} & \mathbf{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\\mathbf{0} & \mathbf{-2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{0}\\\mathbf{0} & \mathbf{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{0}\\\mathbf{0} & \mathbf{-2}\end{pmatrix}$$

2.

（１）$A^2 = \begin{pmatrix}1 & a\\b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\b & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+ab & a+ac\\b+bc & ab+c^2\end{pmatrix}$

また，$3A = \begin{pmatrix}3 & 3a\\3b & 3c\end{pmatrix}$であるから

$$\begin{cases}1+ab = 3\\ a+ac = 3a\\ b+bc = 3b\\ ab+c^2 = 3c\end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases}ab = 2 & \cdots ①\\ a(c-2) = 0 & \cdots ②\\ b(c-2) = 0 & \cdots ③\\ ab+c^2-3c = 0 & \cdots ④\end{cases}$$

a，bは正の整数であるから，①より，

$(a,\ b) = (1,\ 2)$，または，$(a,\ b) = (2,\ 1)$・・・⑤

また，①を④に代入すると

$c^2 - 3c + 2 = 0$

$(c-1)(c-2) = 0$

よって，$c = 1$，2

$c = 1$を②，③に代入すると，

$-a = 0$，$-b = 0$となり，⑤に矛盾する．

$c=2$のとき，②，③は任意のa，bについて成り立つ．

以上より，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=(\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{2}),\ (\mathbf{2},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2})$

（２）$A^2=3A$を利用して

$$
\begin{aligned}
A^n &= A^{n-2}A^2 = A^{n-2}\cdot 3A \\
&= 3A^{n-1} \\
&= 3A^{n-3}A^2 = 3A^{n-3}\cdot 3A \\
&= 3^2 = A^{n-2} \\
&= \cdots \\
&= \boldsymbol{3^{n-1}A}
\end{aligned}
$$

【別解】

$A^2=3A$より，$A^3=3A^2=3\cdot 3A$

$=3^2A$

$A^3=3^2A$より，$A^4=3A^3=3\cdot 3A^2$

$=3^3A$

よって，$A^n=3^{n-1}A$・・・①と推測できるので，

これを数学的帰納法によって証明する．

[1]$n=1$のとき

左辺$=A^1=A$，右辺$=3^0A=A$

よって，$n=1$のとき，①は成り立つ．

[2]$n=k$のとき，①が成り立つと仮定する．

$A^k=3^{k-1}A$

$n=k+1$のとき

$$
\begin{aligned}
A^{k+1} &= 3^{k+1}AA \\
&= 3^{k-1}A^2 \\
&= 3^{k-1}\cdot 3A \\
&= 3^kA = 3^{(k+1)-1}A
\end{aligned}
$$

よって，$n=k+1$のときも①が成り立つ．

[1], [2]から，すべての自然数nについて①が成り立つ．

以上より，$A^n=\boldsymbol{3^{n-1}A}$

3.

（１）左辺$=\dfrac{1}{\cos^2\theta-(-\sin^2\theta)}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

右辺$=\begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

よって，左辺＝右辺

（２）三角関数の加法定理を用いる．

左辺$=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta) \\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}$$

右辺$=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}$$

よって，左辺＝右辺

4.

Aは正則なので，逆行列A^{-1}が存在して，

$AA^{-1}=A^{-1}A=E$

${}^tA$に，右から${}^t(A^{-1})$をかけると

$$
\begin{aligned}
{}^tA\,{}^t(A^{-1}) &= {}^t(A^{-1}A) \\
&= {}^tE = E
\end{aligned}
$$

${}^tA$に，左から${}^t(A^{-1})$をかけると

$$
\begin{aligned}
{}^t(A^{-1})\,{}^tA &= {}^t(AA^{-1}) \\
&= {}^tE = E
\end{aligned}
$$

よって，${}^tA\,{}^t(A^{-1})={}^t(A^{-1})\,{}^tA=E$であるから，

${}^tA$は正則であり，逆行列は${}^t(A^{-1})$となるので，

$({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$

5. 背理法を用いて証明する．

Aは正則であると仮定すると，逆行列A^{-1}が存在して

$AA^{-1}=E$となる．

$A^n=O$の両辺に，右から$(A^{-1})^n$をかけると

$A^n(A^{-1})^n=O(A^{-1})^n$

ここで

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \underbrace{(AA\cdots A)}_{n\text{個}}\underbrace{(A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1})}_{n\text{個}} \\
&= \underbrace{AA\cdots A}_{(n-1)\text{個}}(AA^{-1})\underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{(n-1)\text{個}} \\
&= \underbrace{AA\cdots A}_{(n-1)\text{個}}E\underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{(n-1)\text{個}} \\
&= \underbrace{AA\cdots A}_{(n-1)\text{個}}\underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{(n-1)\text{個}} \\
&= \cdots \\
&= AA^{-1} = E
\end{aligned}
$$

また，右辺$=O$であるから，$E=O$となり，これは

仮定に矛盾する．よって，行列Aは正則でない．

6.

（１）与式 $= E(E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1})$

$-A(E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1})$

$= (E^2 + EA + EA^2 + \cdots + EA^{n-1})$

$-(AE + A^2 + A^3 + \cdots + A^n)$

$= (E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1})$

$-(A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n)$

$= E - A^n = E - O = \boldsymbol{E}$

（２）与式 $= (E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1})E$

$-(E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1})A$

$= (E^2 + AE + A^2E + \cdots + A^{n-1}E)$

$-(EA + A^2 + A^3 + \cdots + A^n)$

$= (E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1})$

$-(A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n)$

$= E - A^n = E - O = \boldsymbol{E}$

（３）$E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1} = B$とおけば，

（１），（２）より

$(E - A)B = B(E - A) = E$

よって，$E - A$は正則であり，逆行列は

$(E - A)^{-1} = B = \boldsymbol{E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}}$