練習問題 1-A

1.

（１）与式 $= (16a^8)^{\frac{1}{4}}$

$= 16^{\frac{1}{4}} \cdot (a^8)^{\frac{1}{4}}$

$= (2^4)^{\frac{1}{4}} \cdot a^2$

$= \boldsymbol{2a^2}$

（２）与式 $= \left\{(a^{-2})^{\frac{1}{6}}\right\}^3$

$= a^{-2\times\frac{1}{6}\times 3}$

$= a^{-1}$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{a}}$

（３）与式 $= \left\{(a^3)^{\frac{1}{4}}\right\}^2 \times a^{\frac{1}{2}}$

$= a^{3\times\frac{1}{4}\times 2} \times a^{\frac{1}{2}}$

$= a^{\frac{3}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}$

$= a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}$

$= \boldsymbol{a^2}$

（４）与式 $= (a^2)^{\frac{1}{3}} \div a^{\frac{1}{4}}$

$= a^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{1}{4}}$

$= a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}$

$= a^{\frac{8-3}{12}}$

$= a^{\frac{5}{12}}$

$= \boldsymbol{\sqrt[12]{a^5}}$

2.

（１）それぞれの数を，3を底として表すと

$\sqrt[4]{9} \to 3^{\frac{1}{2}}$

$3^{-\frac{1}{2}} \to 3^{-\frac{1}{2}}$

$1 \to 3^0$

$\sqrt[3]{9} \to 3^{\frac{2}{3}}$

$9^{-\frac{1}{3}} \to 3^{-\frac{2}{3}}$

$y = 3^x$は，単調に増加するから

$3^{\frac{2}{3}} > 3^{\frac{1}{2}} > 3^0 > 3^{-\frac{1}{2}} > 3^{-\frac{2}{3}}$

したがって

$\boldsymbol{\sqrt[3]{9}}$，$\boldsymbol{\sqrt[4]{9}}$，$\boldsymbol{1}$，$\boldsymbol{3^{-\frac{1}{2}}}$，$\boldsymbol{9^{-\frac{1}{3}}}$

（２）それぞれの数を，0.3を底として表すと

$1 \to 0.3^0$

$0.3^{-2} \to 0.3^{-2}$

$\dfrac{1}{0.3} \to 0.3^{-1}$

$\sqrt{0.3} \to 0.3^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[3]{0.3} \to 0.3^{\frac{1}{3}}$

$y = 0.3^x$は，単調に減少するから

$0.3^{-2} > 0.3^{-1} > 0.3^0 > 0.3^{\frac{1}{3}} > 0.3^{\frac{1}{2}}$

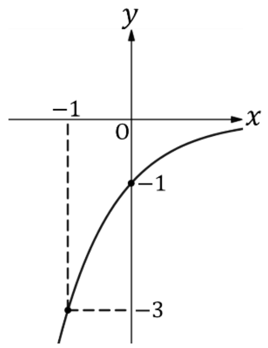
したがって

$\boldsymbol{0.3^{-2}}$，$\boldsymbol{\dfrac{1}{0.3}}$，$\boldsymbol{1}$，$\boldsymbol{\sqrt[3]{0.3}}$，$\boldsymbol{\sqrt{0.3}}$

3.

（１）この関数のグラフは，$y = 3^x$のグラフを，

原点に関して対称移動したものである．

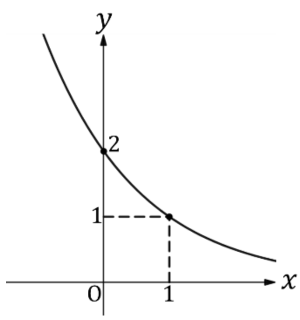


（２）$y = 2^{1-x}$

$= 2^{-(x-1)}$

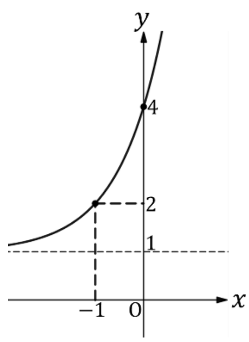
この関数のグラフは，$y = 2^{-x}$のグラフを，

x軸方向に1平行移動したものである．



（３）この関数のグラフは，$y = 3^x$のグラフを，

x軸方向に-1，y軸方向に1平行移動したものである．



4.

（１） $(2^2)^{x-1} = 2^3$

$2^{2x-2} = 2^3$

よって

$2x - 2 = 3$

$2x = 5$

$\boldsymbol{x = \frac{5}{2}}$

（２） $(2^2)^x - 2^x \cdot 2^1 - 8 = 0$

$(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 8 = 0$

$2^x = X > 0$とおく.

$X^2 - 2X - 8 = 0$

$(X + 2)(X - 4) = 0$

$X = -2,\ 4$

$X = 2^x > 0$より，$X = 4$

よって

$2^x = 4$

$2^x = 2^2$

$\boldsymbol{x = 2}$

5.

（１） $(3^2)^x < \left(\sqrt{3}\right)^{-1}$

$3^{2x} < \left(3^{\frac{1}{2}}\right) - 1$

$3^{2x} < 3^{-\frac{1}{2}}$

底が1より大きいので

$2x < -\frac{1}{2}$

$\boldsymbol{x < -\frac{1}{4}}$

（２） $(2^{-1})^{1-3x} > (2^2)^{-1}$

$2^{3x-1} > 2^{-2}$

底が1より大きいので

$3x - 1 > -2$

$3x > -1$

$\boldsymbol{x > -\frac{1}{3}}$

6.

（１） 与式 $= \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

$= a^1 - b^{-1}$

$\boldsymbol{= a - b^{-1} = a - \frac{1}{b}}$

（２） 与式 $= \left\{\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{4}}\right)^2\right\}\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)$

$= \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)$

$= \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2$

$= a^1 - b^1 = \boldsymbol{a - b}$

（３） 与式 $= \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}$

$= \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3$

$= a^1 - b^1 = \boldsymbol{a - b}$

練習問題 1-B

1.

（１） $\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

$= x^1 + 2x^0 + x^{-1}$

$= x + x^{-1} + 2$

$= 18 + 2 = 0$

$x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} > 0$ より

$x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{20} = \boldsymbol{2\sqrt{5}}$

（２） $\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 x^{-\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{x}}\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^3$

$= x^1 + 3x^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{2}{3}} + x^{-1}$

$= x + x^{-1} + 3x^{\frac{1}{3}} + 3x^{-\frac{1}{3}}$

$= 18 + 3\left(x^{\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{1}{3}}\right)$

すなわち

$\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)^3=18+3\left(x^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}\right)$

$\left(x^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}\right)=X$とおく．

$X^3=18+3X$

$X^3-3X-18=0$

$f(X)=X^3-3X-18$とすると，$f(3)=0$より，

$f(x)$は，$X-3$を因数にもつ．

$$\begin{array}{r l}
 & X^2+3X+6 \\ \cline{2-2}
X-3 & \big)X^3 \qquad\quad -3X-18 \\
 & X^3-3X^2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad 3X^2-3X-18 \\
 & \qquad 3X^2-9X \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 6X-18 \\
 & \qquad\qquad 6X-18 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$(X-3)(X^2+3X+6)=0$

$(X-3)=0$より，$X=3$

$X^2+3X+6=0$の判別式をDとすると，

$D=3^2-4\cdot1\cdot6$

$\quad=9-24=-15<0$より，虚数解となり，

実数解はもたない．

よって，$X=3$

したがって

$\boldsymbol{x^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}=3}$

2.

（１）それぞれの数を，2を底として表すと

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}=\left(\sqrt[3]{16}\right)^{-1}=\left\{(2^4)^{\frac{1}{3}}\right\}^{-1}=2^{-\frac{4}{3}}$

$\dfrac{\sqrt[8]{2^{-1}}}{2}=\dfrac{(2^{-1})^{\frac{1}{8}}}{2}=\dfrac{2^{-\frac{1}{8}}}{2}=2^{-\frac{1}{8}-1}=2^{-\frac{9}{8}}$

$8^{-\frac{2}{5}}=(2^3)^{-\frac{2}{5}}=2^{-\frac{6}{5}}$

$y=2^x$は単調に増加するから

$2^{-\frac{4}{3}}<2^{-\frac{6}{5}}<2^{-\frac{9}{8}}$

よって

$\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}}$，$\boldsymbol{8^{-\frac{2}{5}}}$，$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt[8]{2^{-1}}}{2}}$

（２）それぞれの数を，4乗根にして表すと

$\sqrt[4]{3^2}=\sqrt[4]{9}$

$\sqrt[4]{10}=\sqrt[4]{10}$

$\left(\sqrt[4]{2}\right)^3=\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4]{8}$

$y=\sqrt[4]{x}$は単調に増加するから

$\sqrt[4]{8}<\sqrt[4]{9}<\sqrt[4]{10}$

よって

$\boldsymbol{\left(\sqrt[4]{2}\right)^3}$，$\boldsymbol{\sqrt[4]{3^2}}$，$\boldsymbol{\sqrt[4]{10}}$

3.

$3^x+3^{-x}=3$の両辺を２乗すると

$(3^x+3^{-x})^2=3^2$

$(3^x)^2+2\cdot3^x\cdot3^{-x}+(3^{-x})^2=9$

$3^{2x}+2+3^{-2x}=9$

よって，$3^{2x}+3^{-2x}=9-2=7$・・・①

$(3^x-3^{-x})^2=(3^x)^2-2\cdot3^x\cdot3^{-x}+(3^{-x})^2$

$\qquad=3^{2x}-2+3^{-2x}$

$\qquad=3^{2x}+3^{-2x}-2$

①より，$3^{2x}+3^{-2x}=7$であるから

$(3^x-3^{-x})^2=7-2=5$

ここで，$3^x>0$，$3^{-x}>0$なので，$3^x-3^{-x}>0$

よって，$3^x-3^{-x}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

4.

（１）$2^x=X$とおく．ただし，$X>0$・・・①

$(2^2)^x-3\cdot2^x+2<0$

$(2^x)^2-3\cdot2^x+2<0$

$X^2-3X+2<0$

$(X-1)(X-2)<0$

$1<X<2$

したがって，$1<2^x<2$

すなわち，$2^0<2^x<2^1$

であるから，$\boldsymbol{0<x<1}$

（２）$4^x=X$とおく．ただし，$X>0$

$2\cdot4^x\cdot4^1-6\cdot4^x+1=0$

$8\cdot(4^x)^2-6\cdot4^x+1=0$

$8X^2-6X+1=0$

$(4X-1)(2X-1)=0$

$X=\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{2}$

$X=\dfrac{1}{4}$より

$4^x=4^{-1}$

$x=-1$

$X=\dfrac{1}{2}$より

$4^x=2^{-1}$

$2^{2x}=2^{-1}$

$2x = -1$

$x = -\dfrac{1}{2}$

以上より

$\boldsymbol{x = -1,\ -\dfrac{1}{2}}$

（３）$2^x = X$とおく．ただし，$X > 0$・・・①

$(2^2)^x - 7 \times 2^x - 8 \leqq 0$

$(2^x)^2 - 7 \times 2^x - 8 \leqq 0$

$X^2 - 7X - 8 \leqq 0$

$(X+1)(X-8) \leqq 0$

$-1 \leqq X \leqq 8$

これと，①より，$0 \leqq X \leqq 8$

したがって，$0 < 2^x \leqq 8$

$0 < 2^x$は常に成り立つので，$2^x \leqq 8$

すなわち，$2^x \leqq 2^3$であるから，$\boldsymbol{x \leqq 3}$

（４）２式を上から①，②とする．

$2^x = X$，$2^{-y} = Y$とおく．

ただし，$X > 0$，$Y > 0$

①より

$2^x \cdot 2^1 + 2^1 \cdot 2^{-y} = 9$

$2X + 2Y = 9$・・・①'

②より

$2^x \cdot 2^{-y} \cdot 2^1 = 4$

$2XY = 4$

$XY = 2$・・・②'

②'より

$X = \dfrac{2}{Y}$であるから

これを①'に代入すると

$2 \cdot \dfrac{2}{Y} + 2Y = 9$

$\dfrac{4}{Y} + 2Y = 9$

$4 + 2Y^2 = 9Y$

$2Y^2 - 9Y + 4 = 0$

$(2Y-1)(Y-4) = 0$

$Y = \dfrac{1}{2}$，4

$Y = \dfrac{1}{2}$のとき，$X = 4$

$Y = 4$のとき，$X = \dfrac{1}{2}$

すなわち

$2^{-y} = 2^{-1}$のとき，$2^x = 2^2$より，

$x = 2$のとき，$y = 1$

$2^{-y} = 2^2$のとき，$2^x = 2^{-1}$より，

$x = -1$のとき，$y = -2$

以上より，$\boldsymbol{(x,\ y) = (2,\ 1),\ (-1,\ -2)}$

【別解】

②より，$2^{x-y+1} = 2^2$であるから

$x - y + 1 = 2$

$y = x - 1$

これを①に代入して

$2^{x+1} + 2^{1-(x-1)} = 0$

$2^{x+1} + 2^{2-x} = 9$

$2^x \cdot 2^1 + 2^2 \cdot 2^{-x} = 9$

$2 \cdot 2^x + \dfrac{4}{2^x} = 9$

$2 \cdot (2^x)^2 + 4 = 9 \cdot 2^x$

$2^x = X$とおく．ただし，$X > 0$

$2X^2 - 9X + 4 = 0$

$(2X-1)(X-4) = 0$

$X = \dfrac{1}{2}$，4

$X = \dfrac{1}{2}$より，$2^x = 2^{-1}$であるから，$x = -1$

$X = 4$より，$2^x = 2^2$であるから，$x = 2$

$x = -1$のとき，$y = -1 - 1 = -2$

$x = 2$のとき，$y = 2 - 1 = 1$

以上より，$\boldsymbol{(x,\ y) = (2,\ 1),\ (-1,\ -2)}$

5.

不等式を整理すると

$a^{-(3x+2)} > (a^2)^{\frac{1}{3}}$

$a^{-3x-2} > a^{\frac{2}{3}}$

i）$0 < a < 1$のとき

$y = a^x$は単調に減少するので

$-3x - 2 < \dfrac{2}{3}$

$3x + 2 > -\dfrac{2}{3}$

$3x > -\frac{2}{3} - 2$

$3x > -\frac{8}{3}$

$x > -\frac{8}{9}$

ii）$a > 1$のとき

$y = a^x$は単調に増加するので

$-3x - 2 > \frac{2}{3}$

$3x + 2 < -\frac{2}{3}$

$3x < -\frac{2}{3} - 2$

$3x < -\frac{8}{3}$

$x < -\frac{8}{9}$

以上より

$$\begin{cases} \boldsymbol{0 < a < 1} \textbf{のとき} \quad \boldsymbol{x > -\frac{8}{9}} \\ \boldsymbol{a > 1} \textbf{のとき} \quad \boldsymbol{x < -\frac{8}{9}} \end{cases}$$

6.

（１）与式 $= \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}\right)$

$= \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)\left\{\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2 - a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} + \left(b^{\frac{1}{4}}\right)^2\right\}$

$= \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^3 + \left(b^{\frac{1}{4}}\right)^3$

$= \boldsymbol{a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{b^3}}$

（２）与式 $= (ab^3)^{\frac{1}{2}} \times (a^2b^4)^{-\frac{1}{3}} \times \left\{3 \times \left(\frac{a}{3b}\right)^{-5}\right\}^{\frac{1}{6}}$

$= a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} \times a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} \times \{a \times (3b)^{-1}\}^{-\frac{5}{6}}$

$= a^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} \times b^{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} \times a^{-\frac{5}{6}} \times (3b)^{\frac{5}{6}}$

$= a^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}} \times b^{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{5}{6}} \times b^{\frac{5}{6}}$

$= a^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}} \times b^{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{5}{6}} \times 3^{\frac{1}{6}+\frac{5}{6}}$

$= 3^1 \times a^{\frac{3-4-5}{6}} \times b^{\frac{9-8+5}{6}}$

$= 3a^{-1}b^1 = \boldsymbol{\frac{3b}{a}}$

7.

$a > 0$より，$a^x > 0$，$a^y > 0$なので，相加平均と相乗平均の大小関係より

$\frac{\sqrt{a^x} + \sqrt{a^y}}{2} \geqq \sqrt{\sqrt{a^x}\sqrt{a^y}}$

$= \sqrt{a^{\frac{1}{2}x}a^{\frac{1}{2}y}}$

$= \sqrt{a^{\frac{1}{2}(x+y)}}$

$= \left\{a^{\frac{1}{2}(x+y)}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$= a^{\frac{1}{4}(x+y)}$

よって

$\frac{\sqrt{a^x} + \sqrt{a^y}}{2} \geqq a^{\frac{x+y}{4}}$

等号が成り立つのは，

$a^x = a^y$，すなわち，$x = y$のとき．

8.

$2x + 3y = 1$ より，$x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}y$

よって

$4^x + 8^y = 2^{2x} + 8^y$

$= 2^{2\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}y\right)} + 8^y$

$= 2^{1-3y} + 8^y$

$= 2^1 \cdot 2^{-3y} + 8^y$

$= \frac{2}{2^{3y}} + 8^y$

$= \frac{2}{8^y} + 8^y$

ここで，$8^y > 0$ であるから，$\frac{2}{8^y} > 0$

よって，相加平均と相乗平均の大小関係より

$\frac{2}{8^y} + 8^y \geqq 2\sqrt{\frac{2}{8^y} \cdot 8^y}$

$= 2\sqrt{2}$

したがって，$4^x + 8^y \geqq 2\sqrt{2}$であるから

最小値は，$2\sqrt{2}$

また，等号が成り立つのは，$\frac{2}{8^y} = 8^y$のとき

であるから

$(8^y)^2 = 2$

$8^{2y} = 2$

$(2^3)^{2y}=2$

$2^{6y}=2$

すなわち，$6y=1$

$y=\dfrac{1}{6}$

また，このとき，

$x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$

以上より

最小値は，$\boldsymbol{2\sqrt{2}}$　$\left(\boldsymbol{x=\dfrac{1}{4}}\text{，}\boldsymbol{y=\dfrac{1}{6}}\textbf{のとき}\right)$