1章　微分法

§1　関数の極限と導関数（p.2～p.28）

問1

（1）与式 $= 2^4 = \mathbf{16}$

（2）与式 $= 3^1 = \mathbf{3}$

（3）与式 $= \sin\dfrac{\pi}{2} = \mathbf{1}$

問2

（1）$\displaystyle\lim_{x\to1} x^2 = 1^2 = 1$

$\displaystyle\lim_{x\to1} x = 1$

よって，与式 $= 1 + 1 = \mathbf{2}$

（2）与式 $= \sin\pi = \mathbf{0}$

（3）$\displaystyle\lim_{x\to1}(x+1) = 1 + 1 = 2$

$\displaystyle\lim_{x\to1}(x-2) = 1 - 2 = -1$

よって，与式 $= \dfrac{2}{-1} = \mathbf{-2}$

問3

（1）与式 $= \displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x(2x+5)}{5x}$

$= \displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2x+5}{5}$

$= \dfrac{0+5}{5} = \mathbf{1}$

（2）与式 $= \displaystyle\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}$

$= \displaystyle\lim_{x\to2}(x+1)$

$= 2 + 1 = \mathbf{3}$

（3）与式 $= \displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{(2x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)}$

$= \displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{2x+1}{x+1}$

$= \dfrac{2\cdot(-2)+1}{-2+1}$

$= \dfrac{-4+1}{-1} = \mathbf{3}$

（4）与式 $= \displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x+1}$

$= \displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{x+1}$

$= \displaystyle\lim_{x\to-1}\{(x-1)(x^2+1)\}$

$= (-1-1)\{(-1)^2+1\}$

$= -2\cdot2 = \mathbf{-4}$

問4

（1）与式 $= \displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}$

$= \dfrac{4-0}{2+0} = \mathbf{2}$

（2）与式 $= \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}$

$= \dfrac{3-0}{1+0+0} = \mathbf{3}$

（3）与式 $= \displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$

$= \dfrac{0+0}{1+0+0} = \mathbf{0}$

（4）与式 $= \displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x^2+1}{x^2}}$

$= \displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4+\frac{1}{x^2}}{1}}$

$= \sqrt{4+0} = \mathbf{2}$

問5

（1）与式 $= \displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)}$

$= \displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x}$

$= \displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x}$

$= \displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}$

$= \mathbf{0}$

（２）与式 $=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{1+0}+1}=\mathbf{1}$

問６　$y=f(x)$とおく．

（１）$\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{3^2-1^2}{2}$

$=\dfrac{8}{2}=\mathbf{4}$

（２）$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{b^2-a^2}{b-a}$

$=\dfrac{(b+a)(b-a)}{b-a}$

$=\boldsymbol{a+b}$

問７

$f'(3)=\lim_{z\to3}\dfrac{f(z)-f(3)}{z-3}$

$=\lim_{z\to3}\dfrac{z^2-3^2}{z-3}$

$=\lim_{z\to3}\dfrac{(z+3)(z-3)}{z-3}$

$=\lim_{z\to3}(z+3)$

$=3+3=\mathbf{6}$

問８

$f'(a)=\lim_{z\to a}\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$

$=\lim_{z\to a}\dfrac{z^2-a^2}{z-a}$

$=\lim_{z\to a}\dfrac{(z+a)(z-a)}{z-a}$

$=\lim_{z\to a}(z+a)$

$=a+a=\boldsymbol{2a}$

【別解】

$f'(a)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{(a+h)^2-a^2}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{2ah+h^2}{h}$

$=\lim_{h\to0}(2a+h)$

$=2a+0=\boldsymbol{2a}$

点$(2,\ 4)$における接線の傾きは，

$f'(2)=2\cdot2=\mathbf{4}$

問９

（１）$y=f(x)$とおく．

$f'(x)=\lim_{z\to x}\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$

$=\lim_{z\to x}\dfrac{z^3+2-(x^3+2)}{z-x}$

$=\lim_{z\to x}\dfrac{z^3-x^3}{z-x}$

$=\lim_{z\to x}\dfrac{(z-x)(z^2+zx+x^2)}{z-x}$

$=\lim_{z\to x}(z^2+zx+x^2)$

$=x^2+x^2+x^2=\boldsymbol{3x^2}$

【別解】

$\dfrac{dy}{dx}=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{(x+h)^3+2-(x^3+2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$

$=\lim_{h\to0}(3x^2+3xh+h^2)$

$=3x^2+0+0=\boldsymbol{3x^2}$

$x=1$における微分係数は，$f'(1)=3\cdot1^2=\mathbf{3}$

（2）$y=f(x)$とおく.

$$f'(x)=\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

$$=\lim_{z\to x}\frac{z^2+3z-(x^2+3x)}{z-x}$$

$$=\lim_{z\to x}\frac{z^2-x^2+3z-3x}{z-x}$$

$$=\lim_{z\to x}\frac{(z+x)(z-x)+3(z-x)}{z-x}$$

$$=\lim_{z\to x}(z+x+3)$$

$$=x+x+3=\mathbf{2x+3}$$

【別解】

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+3(x+h)-(x^2+3x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2+3x+3h-x^2-3x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2+3h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2x+h+3)$$

$$=2x+0+3=\mathbf{2x+3}$$

$x=1$における微分係数は，$f'(1)=2\cdot 1+3=\mathbf{5}$

$\boxed{\text{問 10}}$

（1）$y'=3\cdot(x^2)'$

$=3\cdot 2x=6x$

（2）$y'=-(x^3)'+\left(\sqrt{2}\right)'$

$=-3x^2+0=\mathbf{-3x^2}$

（3）$y=\frac{2}{3}x^3+x$

$$y'=\frac{2}{3}\cdot(x^3)'+(x)'$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 3x^2+1=\mathbf{2x^2+1}$$

（4）$y'=\frac{(x^6+x^4)'}{2}$

$$=\frac{(x^6)'+(x^4)'}{2}$$

$$=\frac{6x^5+4x^3}{2}$$

$$=\mathbf{3x^5+2x^3}$$

$\boxed{\text{問 11}}$

（1）$y'=(x+2)'(2x-5)+(x+2)(2x-5)'$

$=1\cdot(2x-5)+(x+2)\cdot 2$

$=2x-5+2x+4$

$=\mathbf{4x-1}$

（2）$y'=(2x-1)'(2x^2-3x+1)$

$+(2x-1)(2x^2-3x+1)'$

$=2\cdot(2x^2-3x+1)+(2x-1)(4x-3)$

$=4x^2-6x+2+(8x^2-10x+3)$

$=\mathbf{12x^2-16x+5}$

（3）$s'=(t^2+3)'(t^3+2)+(t^2+3)(t^3+2)'$

$=2t\cdot(t^3+2)+(t^2+3)\cdot 3t^2$

$=2t^4+4t+3t^4+9t^2$

$=\mathbf{5t^4+9t^2+4t}$

（4）$y'=\frac{(2x)'(x+3)-2x(x+3)'}{(x+3)^2}$

$$=\frac{2\cdot(x+3)-2x\cdot 1}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{2x+6-2x}{(x+3)^2}$$

$$=\mathbf{\frac{6}{(x+3)^2}}$$

（5）$s'=-\frac{(t-4)'}{(t-4)^2}=-\mathbf{\frac{1}{(t-4)^2}}$

（6）$y'=(x^2)'+3\cdot\left(\frac{1}{x+1}\right)'$

$$=2x+3\cdot\left(-\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}\right)$$

$$=\mathbf{2x-\frac{3}{(x+1)^2}}$$

$\boxed{\text{問 12}}$

（1）$y'=(x+2)'(x-1)(x-4)$

$+(x+2)(x-1)'(x-4)$

$+(x+2)(x-1)(x-4)'$

$=1\cdot(x-1)(x-4)$

$+(x+2)\cdot 1\cdot(x-4)$

$+(x+2)(x-1)\cdot 1$

$=(x^2-5x+4)+(x^2-2x-8)+(x^2+x-2)$

$=\mathbf{3x^2-6x-6}$

（2）$y'=(t^2+2)'(t^2-1)(t^2-5)$

$+(t^2+2)(t^2-1)'(t^2-5)$

$+(t^2+2)(t^2-1)(t^2-5)'$

$$= 2t\cdot(t^2-1)(t^2-5)$$
$$+(t^2+2)\cdot 2t\cdot(t^2-5)$$
$$+(t^2+2)(t^2-1)\cdot 2t$$
$$= 2t(t^4-6t^2+5)$$
$$+2t(t^4-3t^2-10)$$
$$+2t(t^4+t^2-2)$$
$$= 2t(3t^4-8t^2-7)$$
$$= \boldsymbol{6t^5-16t^3-14t}$$

問 13

（１） $y = x^{-5}$

$y' = -5x^{-6}$

$= -\dfrac{\mathbf{5}}{\boldsymbol{x^6}}$

（２） $s = 3t^{-4}$

$s' = 3\cdot(-4)t^{-5}$

$= -12t^{-5}$

$= -\dfrac{\mathbf{12}}{\boldsymbol{t^5}}$

（３） $y' = 3\cdot(-2)x^{-3}+2\cdot(-3)x^{-4}$

$= \boldsymbol{-6x^{-3}-6x^{-4}}$

（４） $s = 3t^2+t^{-3}$

$s' = 3\cdot 2t+(-3)t^{-4}$

$= \boldsymbol{6t-\dfrac{3}{t^4}}$

問 14

（１） $y' = \dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}$

$= \boldsymbol{\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}$

$= \dfrac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}}$

（２） $y = x^{\frac{3}{5}}$

$y' = \dfrac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}$

$= \dfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$

$= \dfrac{3}{5x^{\frac{2}{5}}} = \boldsymbol{\dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}}$

（３） $y = x\cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$

$y' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$

$= \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}\sqrt{x}}$

問 15

（１） $y' = (x+1)'\sqrt{x}+(x+1)\left(\sqrt{x}\right)'$

$= 1\cdot\sqrt{x}+(x+1)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \sqrt{x}+\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}$

$= \dfrac{2x+x+1}{2\sqrt{x}}$

$= \boldsymbol{\dfrac{3x+1}{2\sqrt{x}}}$

（２） $y' = \dfrac{\left(\sqrt{x}\right)'(x-1)-\sqrt{x}(x-1)'}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(x-1)-\sqrt{x}\cdot 1}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{x-1-2x}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$

$= \boldsymbol{\dfrac{-x-1}{2(x-1)^2\sqrt{x}}}$

問 16

（１） $y' = -2\cdot 5(-2x+1)^4$

$= \boldsymbol{-10(-2x+1)^4}$　**※教科書解答誤値**

（２） $y' = 2\cdot\dfrac{5}{2}(2x-3)^{\frac{5}{2}-1}$

$= \boldsymbol{5(2x-3)^{\frac{3}{2}}}$

$= \boldsymbol{5\sqrt{(2x-3)^3}}$

（３） $y = (3x+1)^{\frac{3}{2}}$

$y' = 3\cdot\dfrac{3}{2}(3x+1)^{\frac{3}{2}-1}$

$= \boldsymbol{\dfrac{9}{2}(3x+1)^{\frac{1}{2}}}$

$= \boldsymbol{\dfrac{9}{2}\sqrt{3x+1}}$

（４） $y = (5x+1)^{-2}$

$y' = 5\cdot(-2)(5x+1)^{-3}$

$= \boldsymbol{-10(5x+1)^{-3}}$

$$= -\frac{\mathbf{10}}{(\mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^{\mathbf{3}}}$$

問 17

（１）与式 $= \lim_{\theta\to 0}\dfrac{\frac{5}{3}\sin 5\theta}{\frac{5}{3}\cdot 3\theta}$

$$= \frac{5}{3}\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 5\theta}{5\theta}$$

$$= \frac{5}{3}\cdot 1 = \mathbf{\frac{5}{3}}$$

（２）与式 $= \lim_{\theta\to 0}\dfrac{\frac{\theta}{2\theta}}{\frac{\sin 2\theta}{2\theta}}$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sin 2\theta}{2\theta}}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\frac{\sin 2\theta}{2\theta}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

（３）与式 $= \lim_{\theta\to 0}\dfrac{(1-\cos 2\theta)(1+\cos 2\theta)}{\theta^2(1+\cos 2\theta)}$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2 2\theta}{\theta^2(1+\cos 2\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2 2\theta}{\theta^2(1+\cos 2\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin^2 2\theta}{\theta^2}\cdot\frac{1}{1+\cos 2\theta}\right)$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\left\{\left(\frac{\sin 2\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos 2\theta}\right\}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\left\{\left(\frac{2\sin 2\theta}{2\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos 2\theta}\right\}$$

$$= 2^2\lim_{\theta\to 0}\left\{\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos 2\theta}\right\}$$

$$= 4\cdot 1^2\cdot\frac{1}{1+\cos 0}$$

$$= 4\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \mathbf{2}$$

問 18

（１）$y' = (\sin x)' + (\cos x)'$

$$= \cos x + (-\sin x)$$

$$= \mathbf{\cos\boldsymbol{x} - \sin\boldsymbol{x}}$$

（２）$y' = (\sin x)'\cos x + \sin x\,(\cos x)'$

$$= \cos x\cos x + \sin x\,(-\sin x)$$

$$= \mathbf{\cos^2\boldsymbol{x} - \sin^2\boldsymbol{x}}$$

$$= \mathbf{\cos 2\boldsymbol{x}}$$

問 19

（１）$y' = \mathbf{3\cos(3\boldsymbol{x}+2)}$

（２）$y' = -2\cdot\{-\sin(3-2x)\}$

$$= \mathbf{2\sin(3-2\boldsymbol{x})}$$

（３）$y' = 3\cdot\dfrac{1}{\cos^2 3x}$

$$= \mathbf{\frac{3}{\cos^2 3\boldsymbol{x}}}$$

問 20

（１）$y' = \mathbf{-2\boldsymbol{e}^{-2\boldsymbol{x}}}$

（２）$y' = (x^2)'e^x + x^2(e^x)'$

$$= 2xe^x + x^2e^x$$

$$= \boldsymbol{x(x+2)e^x}$$

（３）$y' = (e^x)'\sin x + e^x(\sin x)'$

$$= e^x\sin x + e^x\cos x$$

$$= \boldsymbol{e^x}(\mathbf{\sin\boldsymbol{x} + \cos\boldsymbol{x}})$$

（４）$y' = (e^{2x})'\cos 3x + e^{2x}(\cos 3x)'$

$$= 2e^{2x}\cos 3x + e^{2x}\{3\cdot(-\sin 3x)\}$$

$$= \boldsymbol{e^{2x}}(\mathbf{2\cos 3\boldsymbol{x} - 3\sin 3\boldsymbol{x}})$$

（５）$y' = \dfrac{(e^x)'x - e^x(x)'}{x^2}$

$$= \frac{e^x x - e^x\cdot 1}{x^2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{e^x(x-1)}{x^2}}$$

（６）$y = \dfrac{1}{e^{\frac{x}{2}}} = e^{-\frac{x}{2}}$

$$y' = -\mathbf{\frac{1}{2}}\cdot\boldsymbol{e^{-\frac{x}{2}}}$$

$$= -\mathbf{\frac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{e^x}}}}$$

問 21

（１）与式$= 3\cdot\log e$

$$= 3\cdot 1 = \mathbf{3}$$

（２）与式$= \log e^{-2}$

$= -2 \cdot \log e$

$= -2 \cdot 1 = \mathbf{-2}$

（３）与式$= \log e \cdot e^{\frac{1}{2}}$

$= \log e^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{3}{2} \cdot \log e$

$= \frac{3}{2} \cdot 1 = \mathbf{\frac{3}{2}}$

$\boxed{\text{問 22}}$

（１）$y' = (x)' \log x + x(\log x)'$

$= 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}$

$= \boldsymbol{\log x + 1}$

（２）$y' = 3 \cdot \frac{1}{3x-2} = \boldsymbol{\frac{3}{3x-2}}$

（３）$y' = -1 \cdot \frac{1}{-x} = \boldsymbol{\frac{1}{x}}$

$\boxed{\text{問 23}}$

（１）$y' = \boldsymbol{5^x \log 5}$

（２）$y' = \left(\frac{1}{3}\right)^x \log \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3^x} \log 3^{-1}$

$= \boldsymbol{-3^{-x} \log 3}$

$\boxed{\text{問 24}}$

（１）$y' = \boldsymbol{\frac{1}{x \log 2}}$

（２）$y' = 2 \cdot \frac{1}{(2x+1)\log 3}$

$= \boldsymbol{\frac{2}{(2x+1)\log 3}}$

$\boxed{\text{問 25}}$

（１）$y' = 2 \cdot \frac{1}{2x+1} = \boldsymbol{\frac{2}{2x+1}}$

（２）$y' = -1 \cdot \frac{1}{3-x}$

$= \boldsymbol{\frac{-1}{3-x}} = \boldsymbol{\frac{1}{x-3}}$

$\boxed{\text{問 26}}$

（１）$-2h = t$とおくと，$h \to 0$のとき，$t \to 0$

また，$h = -\frac{t}{2} \to \frac{1}{h} = -\frac{t}{2}$となるから，

与式 $= \lim_{t \to 0} (1+t)^{-\frac{2}{t}}$

$= \lim_{t \to 0} \left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{-2}$

$= e^{-2} = \boldsymbol{\frac{1}{e^2}}$

（２）$\frac{2}{x} = t$とおくと，$x \to \infty$のとき$t \to 0$

また，$x = \frac{2}{t}$となるから，

与式 $= \lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{2}{t}}$

$= \lim_{t \to 0} \left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{2}$

$= \boldsymbol{e^2}$