問1

（1）与式 $= 0\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & -2\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}1 & -4\\ 3 & 1\end{vmatrix}$

$= 0 - 3\{1\cdot(-2) - (-3)\cdot 3\} + 0$

$= -3\cdot 7 = \mathbf{-21}$

（2）小行列式の計算はサラスの方法を用いる．

与式 $= 0\begin{vmatrix}0 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & -4 & 0\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}-1 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 4\\ 0 & -4 & 0\end{vmatrix}$

$+(-2)\begin{vmatrix}-1 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}-1 & 0 & -2\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -4\end{vmatrix}$

$= 0 - (0 + 0 + 8 - 16 - 0 - 0)$

$- 2\{0 + 0 - 2 - (-4) - 0 - 0\}$

$= 8 - 4 = \mathbf{4}$

問2　小行列式の計算はサラスの方法を用いる．

（1）与式 $= 0 + (-1)^{3+2}\cdot(-5)\begin{vmatrix}1 & -5 & 1\\ 1 & -4 & 4\\ 0 & 0 & -4\end{vmatrix} + 0 + 0$

$= 5(16 + 0 + 0 + 0 - 20 - 0)$

$= 5\cdot(-4) = \mathbf{-20}$

（2）与式 $= 0 + 0 + 0 + (-1)^{4+1}\cdot 3\begin{vmatrix}4 & -1 & 2\\ 5 & 2 & -4\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}$

$= -3\{-16 + 12 + 10 - (-16) - 10 - 12\}$

$= -3\cdot 0 = \mathbf{0}$

問3　それぞれの行列をAとし，逆行列は余因子行列を用いて導出する．

$|A| = \begin{vmatrix}3 & -4 & 2\\ 2 & -4 & 3\\ -2 & 0 & -1\end{vmatrix}$

$= 12 + 24 + 0 - 0 - 8 - 16 = 12 \neq 0$

よって，与えられた行列は**正則である．**

小行列式を求めると

$D_{11} = \begin{vmatrix}-4 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix} = 4$　　$D_{12} = \begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & -1\end{vmatrix} = 4$

$D_{13} = \begin{vmatrix}2 & -4\\ -2 & 0\end{vmatrix} = -8$　　$D_{21} = \begin{vmatrix}-4 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix} = -8$

$D_{22} = \begin{vmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix} = 1$　　$D_{23} = \begin{vmatrix}3 & -4\\ -2 & 0\end{vmatrix} = -8$

$D_{31} = \begin{vmatrix}-4 & 2\\ -4 & 3\end{vmatrix} = -4$　　$D_{32} = \begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 5$

$D_{33} = \begin{vmatrix}3 & -4\\ 2 & -4\end{vmatrix} = -4$

以上より

$\tilde{A} = \begin{pmatrix}D_{11} & -D_{21} & D_{31}\\ -D_{12} & D_{22} & -D_{32}\\ D_{13} & -D_{23} & D_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -4 & -4\\ -4 & 1 & -5\\ -8 & 8 & -4\end{pmatrix}$

よって

$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}4 & -4 & -4\\ -4 & 1 & -5\\ -8 & 8 & -4\end{pmatrix}}$

（2）$|A| = \begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ -3 & -1 & 1\\ -2 & -3 & 4\end{vmatrix}$

$= -4 + 4 + 27 - (-3) - 24 - 6$

$= 0$

よって，与えられた行列は**正則でない．**

問4

（1）与えられた連立方程式を，行列を用いて表すと

$\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$

ここで，$|A| = \begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -4\end{vmatrix} = -8 - (-3) = -5$

また

$\Delta_1 = \begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & -4\end{vmatrix} = -4 - (-9) = 5$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$

よって，クラメルの公式より

$x = \dfrac{5}{-5} = -1,\ \ y = \dfrac{5}{-5} = -1$

したがって，$\boldsymbol{x = y = -1}$

（2）与えられた連立方程式を，行列を用いて表すと

$\begin{pmatrix}3 & -5 & -5\\ 2 & -7 & -5\\ 5 & 6 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$

ここで，$A = \begin{pmatrix}3 & -5 & -5\\ 2 & -7 & -5\\ 5 & 6 & -2\end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix}3 & -5 & -5\\ 2 & -7 & -5\\ 5 & 6 & -2\end{vmatrix}$

$= 42 + 125 - 60 - (-90 + 20 + 175) = 2$

また

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -1 & -7 & -5 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 75 + 30 - (0 - 10 + 105)$$

$$= 10$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & -1 & -5 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 6 + 0 - 30 - (-45 + 0 + 25)$$

$$= -4$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & -7 & -1 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -63 + 25 + 0 - (-18 - 30 + 0)$$

$$= 10$$

よって，クラメルの公式より

$$x = \frac{10}{2} = 5,\ y = \frac{-4}{2} = -2,\ z = \frac{10}{2} = 5$$

したがって，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}) = (\mathbf{5},\ \mathbf{-2},\ \mathbf{5})$

問５

（１）係数行列の行列式の値が０となればよいので

$$\begin{vmatrix} 5 & k \\ \frac{15}{2} & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6 - k \cdot \frac{15}{2} = 0$$

すなわち，$60 - 15k = 0$であるから，$\boldsymbol{k = 4}$

このときの係数行列を変形すると

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ \frac{15}{2} & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程式にもどすと，$5x + 4y = 0$

$y = t$とおくと，$x = -\dfrac{4}{5}t$

よって，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \left(-\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{t}\right)$ **（$\boldsymbol{t}$は$\mathbf{0}$ではない任意の数）**

（２）係数行列の行列式の値が０となればよいので

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ k & 7 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 6k - 7 - (-14 - 9 - 4k)$$

$$= -2k + 4 = 0$$

すなわち，$2k = 4$であるから，$\boldsymbol{k = 2}$

このときの係数行列を変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程式にもどすと

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \cdot\cdot\cdot ① \\ \quad\ \ y - z = 0 \cdot\cdot\cdot ② \end{cases}$$

②より，$z = y$

①に代入すると

$$x + 3y - y = 0$$

$$x + 2y = 0$$

$$x = -2y$$

$z = t$とおけば，$y = t$，$x = -2t$

よって，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}) = (\mathbf{-2}\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{t},\ \boldsymbol{t})$

（$\boldsymbol{t}$は$\mathbf{0}$ではない任意の数）

問６

（１）与えられた２つのベクトルを並べてできる行列の行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 - (-1) = 16 \neq 0$$

よって，**線形独立**である．

（２）与えられた３つのベクトルを並べてできる行列の行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 6 - 40 - (-4 - 12 - 15)$$

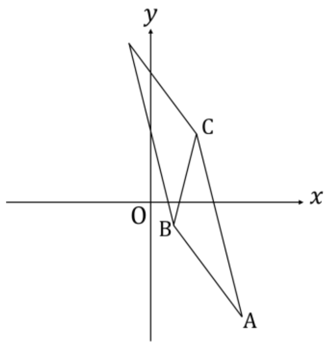
$$= 0$$

よって，**線形従属**である．

問７

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$



△ABCの面積は，AB，ACを隣り合う２辺とする平行四辺形の半分である．

２つのベクトルを並べてできる行列の行列式の値

を求めると

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -24 - (-8) = -16$$

よって

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |-16| = \mathbf{8}$$

問８

３つのベクトルを並べてできる行列の行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 0 - 15 - (-3 + 40 + 0)$$

$$= -36$$

よって，平行六面体の体積は，$|-36| = \mathbf{36}$