練習問題 2-A

1.　求める面積をSとする．

（１）$\dfrac{dx}{dt}=-\sin t$

求める面積は，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$における図形の面積の

4倍であり，この区間では，$-\sin t\leqq 0$で，

符号は一定であるから

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin 2t\cdot(-\sin t)|dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}|-(2\sin t\cos t)\cdot\sin t|dt$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}|-\sin^2 t\cos t|dt$$

$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$において，$-\sin^2 t\cos t\leqq 0$ であるから

$$S=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos t\,dt$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)\cos t\,dt$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t-\cos^3 t)dt$$

$$=8\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,dt\right)$$

$$=8\left(\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{3}\right)$$

$$=8\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

$$=8\cdot\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{8}{3}}$$

（２）求める面積は，曲線と，$\theta=0$，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$で囲まれた

部分の12倍であるから

$$S=12\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}r^2d\theta$$

$$=6\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos^2 3\theta)^2d\theta$$

$$=6\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^4 3\theta\,d\theta$$

$3\theta=t$とおくと，$3d\theta=dt$より，$d\theta=\dfrac{1}{3}dt$

また，θとtの対応は

θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{6}$
t	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$

よって

$$S=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\cdot\frac{1}{3}dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt$$

$$=2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{8}\pi}$$

2.　それぞれの曲線の長さをlとする．

（１）$\dfrac{dx}{dt}=t$，$\dfrac{dy}{dt}=t^2$

よって

$$l=\int_0^1\sqrt{t^2+(t^2)^2}dt$$

$$=\int_0^1\sqrt{t^2+t^4}dt$$

$$=\int_0^1|t|\sqrt{1+t^2}dt$$

$$=\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}dt\quad ※t\geqq 0\text{ より}$$

$\sqrt{1+t^2}=u$とおくと，$1+t^2=u^2$より，

$2tdt=2udu$，すなわち，$tdt=udu$

また，tとuの対応は

t	0	$\to$	1
u	1	$\to$	$\sqrt{2}$

したがって

$$l=\int_1^{\sqrt{2}}u\cdot udu$$

$$=\int_1^{\sqrt{2}}u^2du$$

$$= \left[\frac{1}{3}u^3\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)}$$

（２）$r' = 1$であるから

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1}\, d\theta \quad ※\text{p.} 112 \text{ 問 } 15 \text{ より}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\theta\sqrt{\theta^2+1} + \log\left|\theta + \sqrt{\theta^2+1}\right|\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \log\left|2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right|\right)$$

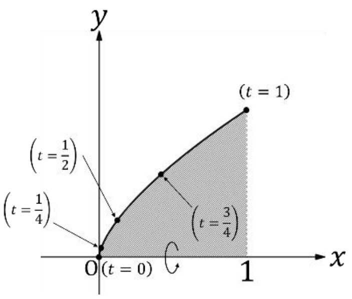
$$-\frac{1}{2}(0 + \log 1)$$

$$= \pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2}\log\left|2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right|$$

$$= \boldsymbol{\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2}\log\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right)}$$

3. tにいろいろな値を代入すると

t	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
x	0	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{27}{64}$	1
y	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$	1



$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 \geqq 0$$

よって，求める体積をVとすると

$$V = \pi\int_0^1 y^2 \left|\frac{dx}{dt}\right| dt$$

$$= \pi\int_0^1 (t^2)^2 |3t^2| dt$$

$$= 3\pi\int_0^1 t^6 dt$$

$$= 3\pi\left[\frac{1}{7}t^7\right]_0^1$$

$$= 3\pi\cdot\frac{1}{7} = \boldsymbol{\frac{3}{7}\pi}$$

4.

（１）与式 $= \lim_{b\to\infty}\int_2^b x^{-\frac{3}{2}} dx$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_2^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left\{-\frac{2}{\sqrt{b}} - \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$= 0 + \sqrt{2} = \boldsymbol{\sqrt{2}}$$

（２）与式 $= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{a-\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$

$\sqrt{a^2-x^2} = t$とおくと，$a^2 - x^2 = t^2$であるから，

$-2xdx = 2tdt$より，$xdx = -tdt$

また，xとtの対応は

x	0	$\to$	$a-\varepsilon$
t	a	$\to$	$\sqrt{a^2-(a-\varepsilon)^2}$

よって

ここで，$\sqrt{a^2-(a-\varepsilon)^2} = \sqrt{2a\varepsilon-\varepsilon^2}$であるから，

$$\text{与式} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{\sqrt{2a\varepsilon-\varepsilon^2}} \frac{1}{t}\cdot(-tdt)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\int_a^{\sqrt{2a\varepsilon-\varepsilon^2}} dt\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\sqrt{2a\varepsilon-\varepsilon^2}}^a dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[t\right]_{\sqrt{2a\varepsilon-\varepsilon^2}}^a$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(a - \sqrt{2a\varepsilon-\varepsilon^2}\right) = \boldsymbol{a}$$

【別解】※先に置換積分

$\sqrt{a^2-x^2} = t$とおくと，$a^2 - x^2 = t^2$であるから，

$-2xdx = 2tdt$より，$xdx = -tdt$

また，xとtの対応は

x	0	$\to$	a
t	a	$\to$	0

よって

$$\text{与式} = \int_a^0 \frac{1}{t}\cdot(-tdt)$$

$$= \int_0^a dt$$

$$= \left[t\right]_0^a$$

$$= a - 0 = \boldsymbol{a}$$

（3）与式 $= \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x^2}dx$

$-x^2 = t$とおくと，$-2xdx = dt$より，$xdx = -\frac{1}{2}dt$

また，xとtの対応は

x	0	$\to$	b
t	0	$\to$	$-b^2$

よって

$$与式 = \lim_{b\to\infty}\int_0^{-b^2} e^t\cdot\left(-\frac{1}{2}dt\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b^2} e^t dt$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_{-b^2}^{0} e^t dt$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[e^t\right]_{-b^2}^{0}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(e^0 - e^{-b^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1-0) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

【別解】※先に置換積分

$-x^2 = t$とおくと，$-2xdx = dt$より，$xdx = -\frac{1}{2}dt$

また，xとtの対応は

x	0	$\to$	∞
t	0	$\to$	$-\infty$

よって

$$与式 = \int_0^{-\infty} e^t\cdot\left(-\frac{1}{2}dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^t dt$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^t dt$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left[e^t\right]_a^0$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(e^0 - e^a\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1-0) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

（4）与式 $= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{\log x}{x}dx$

$\log x = t$とおくと，$\frac{1}{x}dx = dt$

また，xとtの対応は

x	ε	$\to$	1
t	$\log\varepsilon$	$\to$	0

よって

$$与式 = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\log\varepsilon}^{0} t\,dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{\log\varepsilon}^{0}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{-\frac{1}{2}(\log\varepsilon)^2\right\} = -\infty$$

したがって，**広義積分は存在しない.**

【別解】※先に置換積分

$\log x = t$とおくと，$\frac{1}{x}dx = dt$

また，xとtの対応は

x	0	$\to$	1
t	$-\infty$	$\to$	0

よって

$$与式 = \int_{-\infty}^{0} t\,dt$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 t\,dt$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}a^2\right) = -\infty$$

したがって，**広義積分は存在しない.**

5.

（1）時刻tにおける点 P の速度を$v(t)$とすると

$$v(t) = v(0) + \int_0^t \alpha(t)dt$$

$$= 12 + \int_0^t (-8)\,dt$$

$$= 12 - 8\int_0^t dt$$

$$= 12 - 8\left[t\right]_0^t$$

$$= \boldsymbol{12 - 8t}$$

ここで，速度が0になるのは，$12-8t=0$より

$$t=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

（2）道のりは，$\int_0^4 |v(t)|dt$ で求められる．

$v(t)=12-8t$であるから

$0 \leqq t \leqq \frac{3}{2}$ のとき，$|v(t)|=12-8t$

$\frac{3}{2} < t \leqq 4$ のとき，$|v(t)|=-(12-8t)$

よって，求める道のりは

$$\int_0^4 |v(t)|dt=\int_0^{\frac{3}{2}}(12-8t)dt+\int_{\frac{3}{2}}^4\{-(12-8t)\}dt$$

$$=4\int_0^{\frac{3}{2}}(3-2t)dt-4\int_{\frac{3}{2}}^4(3-2t)dt$$

$$=4\Big[3t-t^2\Big]_0^{\frac{3}{2}}-4\Big[3t-t^2\Big]_{\frac{3}{2}}^4$$

$$=4\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{4}\right)-4\left\{(12-16)-\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{4}\right)\right\}$$

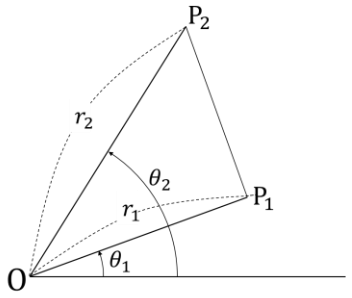
$$=4\cdot\frac{9}{4}-4\left(-4-\frac{9}{4}\right)$$

$$=9+16+9=\mathbf{34}$$

練習問題 2-B

1.

（1）



$\triangle OP_1P_2$において，余弦定理より

$$(P_1P_2)^2={r_1}^2+{r_2}^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)$$

$$={r_1}^2+{r_2}^2-2r_1r_2\cos\{-(\theta_1-\theta_2)\}$$

$$={r_1}^2+{r_2}^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$

$P_1P_2>0$であるから

$$P_1P_2=\sqrt{{r_1}^2+{r_2}^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$$

【別解】

極座標を直交座標で表すと

$P_1(r_1\cos\theta_1,\ r_1\sin\theta_1)$

$P_2(r_2\cos\theta_2,\ r_2\sin\theta_2)$

よって

$$P_1P_2=\sqrt{(r_1\cos\theta_1-r_2\cos\theta_2)^2+(r_1\sin\theta_1-r_2\sin\theta_2)^2}$$

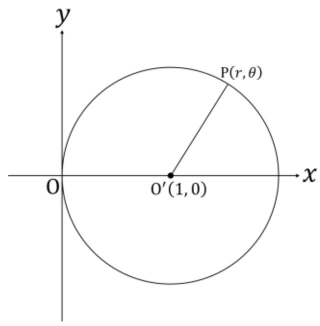
$$=\sqrt{({r_1}^2\cos^2\theta_1-2r_1r_2\cos\theta_1\cos\theta_2+{r_2}^2\cos^2\theta_2)+({r_1}^2\sin^2\theta_1-2r_1r_2\sin\theta_1\sin\theta_2+{r_2}^2\sin^2\theta_2)}$$

$$=\sqrt{{r_1}^2(\cos^2\theta_1+\sin^2\theta_1)+{r_2}^2(\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2)-2r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)}$$

$$=\sqrt{{r_1}^2\cdot 1+{r_2}^2\cdot 1-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$$

$$=\sqrt{{r_1}^2+{r_2}^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$$

（2）図のように，O′(1，0)とする．



$PO'=1$であるから，（1）より

$$PO'=\sqrt{r^2+1^2-2\cdot r\cdot 1\cos(\theta-0)}$$

$$=\sqrt{r^2+1-2r\cos\theta}=1$$

よって

$$r^2+1-2r\cos\theta=1$$

$$r^2-2r\cos\theta=0$$

$$r(r-2\cos\theta)=0$$

これより，$r=0$・・・① または，$r=2\cos\theta$・・・②

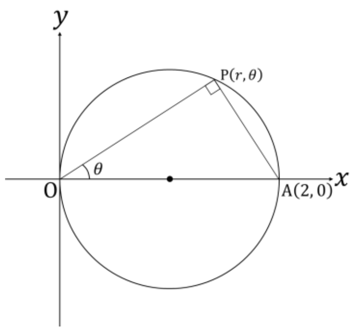
ここで，②において，$\theta=\frac{\pi}{2}$とすれば，$r=0$ となるので，②は，①の条件を含む．

よって，$\boldsymbol{r=2\cos\theta}$

逆にこの式を満たす点は，円周上にある．

【別解】

図のように，A(2，0)とする．



$\triangle OAP$において，$\angle OAP=90°$であるから

$$\cos\theta=\frac{OP}{OA}=\frac{r}{2}$$

すなわち，$\boldsymbol{r=2\cos\theta}$

逆にこの式を満たす点は，円周上にある．

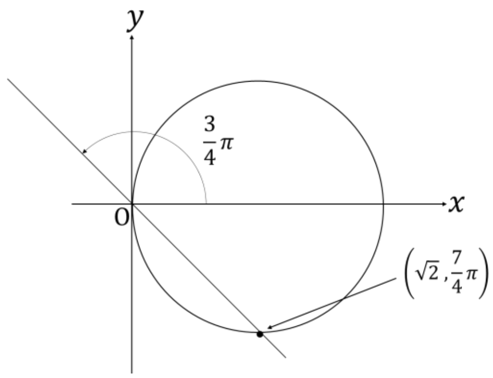
※補足

$r = 2\cos\theta$ において，例えば$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$とすると，

$r = -\sqrt{2}$となり，$r < 0$となる．

このとき，点$(r,\ \theta)$は，点$(-r,\ \theta + \pi)$を表すと約束することがある．この場合では

$$\left(-\sqrt{2}\,,\ \frac{3}{4}\pi\right) \to \left(\sqrt{2}\,,\ \frac{7}{4}\pi\right)$$

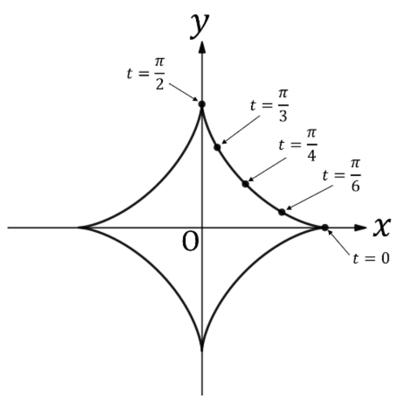


2. tのいろいろな値に対するx，yの値を求めると

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
x	a	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a$	$\frac{1}{8}a$	0
		$0.65a$	$0.35a$	$0.13a$	
y	0	$\frac{1}{8}a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a$	a
		$0.13a$	$0.35a$	$0.65a$	

t	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
x	$-\frac{1}{8}a$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}a$	$-\frac{3\sqrt{3}}{8}a$	$-a$
	$-0.13a$	$-0.35a$	$-0.65a$	
y	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a$	$\frac{1}{8}a$	0
	$0.65a$	$0.35a$	$0.13a$	

※$\pi < t \leqq 2\pi$は省略．



（1）求める面積をSとする．

$$\frac{dx}{dt} = 3a\cos^2 t\cdot(-\sin t) = -3a\cos^2 t\sin t$$

求める面積は，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$における図形の面積の

４倍であり，この区間では，$-3a\cos^2 t\sin t \leqq 0$で，符号は一定であるから

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} |a\sin^3 t\cdot(-3a\cos^2 t\sin t)|dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} |-3a^2\sin^4 t\cos^2 t|dt$$

$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} |-a^2\sin^4 t\cos^2 t|dt$$

$-a^2\sin^4 t\cos^2 t \leqq 0$であるから

$$S = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^4 t\cos^2 t\,dt$$

$$= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\,(1 - \sin^2 t)dt$$

$$= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t)dt$$

$$= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 12a^2\left(\frac{3}{16}\pi - \frac{5}{32}\pi\right)$$

$$= 12a^2\cdot\frac{1}{32}\pi = \boldsymbol{\frac{3}{8}\pi a^2}$$

（2）求める曲線の長さをlとする．

$$\frac{dx}{dt} = 3a\cos^2 t\cdot(-\sin t) = -3a\cos^2 t\sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cdot\cos t = 3a^2\sin^2 t\cos t$$

求める曲線の長さは，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$における図形の

曲線の長さの４倍であるから，

$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t)}dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t}\,dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}|3a\cos t\sin t|\,dt$$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で，$3a\cos t\sin t \geqq 0$ であるから

$$l = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\,dt$$

$$= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2t}{2}dt$$

$$= 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt$$

$$= 6a\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -3a(\cos\pi - \cos 0)$$

$$= -3a(-1-1) = \boldsymbol{6a}$$

（３）求める体積をVとする．

$$\frac{dx}{dt} = 3a\cos^2 t\cdot(-\sin t) = -3a\cos^2 t\sin t$$

求める体積は，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における曲線をx軸の

まわりに回転してできる回転体の体積の２倍であり，

この区間では，$-3a\cos^2 t\sin t \leqq 0$で，符号は一定

であるから

$$V = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}y^2\left|\frac{dx}{dt}\right|dt$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^3 t)^2|-3a\cos^2 t\sin t|dt$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^6 t\cdot(3a\cos^2 t\sin t)dt$$

$$= 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\cos^2 t\,dt$$

$$= 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\,(1-\sin^2 t)\,dt$$

$$= 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7 t - \sin^9 t)dt$$

$$= 6\pi a^3\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} - \frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)$$

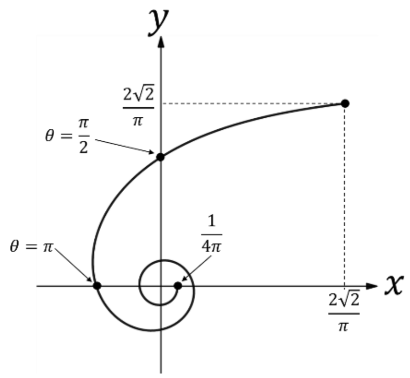
$$= 6\pi a^3\left(\frac{16}{35} - \frac{128}{315}\right)$$

$$= 6\pi a^3\cdot\frac{16}{315} = \boldsymbol{\frac{32}{105}\pi a^3}$$

3.

（１）θのいろいろな値に対するrの値を求めると

θ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
r	$\frac{4}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{2}{3\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{1}{3\pi}$	$\frac{2}{7\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$
	1.27	0.63	0.32	0.21	0.16	0.13	0.11	0.09	0.08



（２）曲線の長さをlとする．

$r' = -\dfrac{1}{\theta^2}$ であるから

$$r^2 + (r')^2 = \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\theta^2}\right)^2$$

$$= \frac{\theta^2+1}{\theta^4}$$

よって

$$l = \int_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}\sqrt{\frac{\theta^2+1}{\theta^4}}d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}\frac{1}{\theta^2}\sqrt{\theta^2+1}d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}\left(-\frac{1}{\theta}\right)'\sqrt{\theta^2+1}d\theta$$

$$= \left[-\frac{1}{\theta}\sqrt{\theta^2+1}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}\left(-\frac{1}{\theta}\right)\left(\sqrt{\theta^2+1}\right)'d\theta$$

$$= \left[-\frac{1}{\theta}\sqrt{\theta^2+1}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\theta^2+1}}\cdot 2\theta\,d\theta$$

$$= \left[-\frac{1}{\theta}\sqrt{\theta^2+1}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}\frac{1}{\sqrt{\theta^2+1}}d\theta$$

$$= \left[-\frac{1}{\theta}\sqrt{\theta^2+1}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi} + \left[\log\left|\theta+\sqrt{\theta^2+1}\right|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\sqrt{16\pi^2+1} + \frac{1}{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+1}$$

$$+\log\left|4\pi+\sqrt{16\pi^2+1}\right|-\log\left|\frac{\pi}{4}+\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+1}\right|$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\sqrt{16\pi^2+1}+\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+1}$$

$$+\log\left(4\pi+\sqrt{16\pi^2+1}\right)-\log\left(\frac{\pi}{4}+\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+1}\right)$$

$$=-\boldsymbol{\frac{1}{4\pi}\sqrt{16\pi^2+1}+\frac{1}{\pi}\sqrt{\pi^2+16}}$$

$$\boldsymbol{+\log\left(4\pi+\sqrt{16\pi^2+1}\right)-\log\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{\pi^2+16}\right)}$$

4.

i）$k=1$のとき

$$与式=\int_0^1\frac{dx}{x}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\log|x|\Big]_\varepsilon^1$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}(-\log\varepsilon)=\infty$$

よって，この広義積分は存在しない．

ii）$k\neq1$のとき

$$与式=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x^k}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1x^{-k}dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{1}{1-k}x^{1-k}\right]_\varepsilon^1$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{1-k}(1-\varepsilon^{1-k})$$

ここで，$1-k<0$，すなわち$k>1$のとき，

$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{1-k}=\infty$であるから

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{1-k}(1-\varepsilon^{1-k})=\infty$$

$1-k>0$，すなわち$k<1$のとき，

$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{1-k}=0$であるから

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{1-k}(1-\varepsilon^{1-k})=\frac{1}{1-k}$$

よって，$0<k<1$ のとき，$\int_0^1\frac{dx}{x^k}=\frac{1}{1-k}$

$k\geqq1$ のとき，$\int_0^1\frac{dx}{x^k}=\infty$であるから，

積分の値は存在しない．

※$k\leqq0$のときは，普通の積分となる．

5.

i）$k=1$のとき

$$与式=\int_1^\infty\frac{dx}{x}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\Big[\log|x|\Big]_1^b$$

$$=\lim_{b\to\infty}\log b=\infty$$

よって，この広義積分は存在しない．

ii）$k\neq1$のとき

$$与式=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^k}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_1^bx^{-k}dx$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-k}x^{1-k}\right]_1^b$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-k}(b^{1-k}-1)$$

ここで，$1-k<0$，すなわち$k>1$のとき，

$\lim_{b\to\infty}b^{1-k}=0$であるから

$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-k}(b^{1-k}-1)=\frac{1}{1-k}\cdot(-1)=\frac{1}{k-1}$$

$1-k>0$，すなわち$k<1$のとき，

$\lim_{b\to\infty}b^{1-k}=\infty$であるから

$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-k}(b^{1-k}-1)=\infty$$

よって，$k>1$ のとき，$\int_1^\infty\frac{dx}{x^k}=\frac{1}{k-1}$

$0<x\leqq1$ のとき，$\int_1^\infty\frac{dx}{x^k}=\infty$であるから，

積分の値は存在しない．

※$k\leqq0$のときは，積分の値は存在しない．