積分定数Cは省略.

練習問題 2-A

1.

（1）与式 $= \displaystyle\int \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+4)'}{x^2+4}dx$

$= \dfrac{1}{2}\log|x^2+4|$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\log(x^2+4)}$

（2）$\log x = t$とおくと，$\dfrac{1}{x}dx = dt$

よって

与式 $= \displaystyle\int t^2 dt$

$= \dfrac{1}{3}t^3$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{3}(\log x)^3}$

（3）$\sin x = t$とおくと，$\cos x\,dx = dt$

与式 $= \displaystyle\int (1+t^4)dt$

$= t + \dfrac{1}{5}t^5$

$= \boldsymbol{\sin x + \dfrac{1}{5}\sin^5 x}$

（4）$9 - x^2 = t$とおくと，$-2xdx = dt$より，

$x\,dx = -\dfrac{1}{2}dt$

よって

与式 $= \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\left(-\frac{1}{2}dt\right)$

$= -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int t^{-\frac{1}{2}}dt$

$= -\dfrac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}}$

$= -\sqrt{t}$

$= \boldsymbol{-\sqrt{9-x^2}}$

（5）与式 $= (2x+1)\cdot\dfrac{1}{2}\sin 2x - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (2x+1)'\cdot\sin 2x\,dx$

$= \dfrac{1}{2}(2x+1)\sin 2x - \displaystyle\int \sin 2x\,dx$

$= \dfrac{1}{2}(2x+1)\sin 2x - \left(-\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{2}(2x+1)\sin 2x + \dfrac{1}{2}\cos 2x}$

（6）与式 $= x^2\cdot(-e^{-x}) + \displaystyle\int (x^2)'e^{-x}dx$

$= -x^2e^{-x} + 2\displaystyle\int xe^{-x}dx$

$= -x^2e^{-x} + 2\left\{x\cdot(-e^{-x}) + \displaystyle\int x'e^{-x}dx\right\}$

$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\cdot(-e^{-x})$

$= \boldsymbol{-(x^2+2x+2)e^{-x}}$

2.

（1）与式 $= \displaystyle\int \frac{1-\cos 2x}{2}dx$

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (1-\cos 2x)dx$

$= \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\sin 2x\right)$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x}$

（2）与式 $= \displaystyle\int \sin^2 x\cdot\sin x\,dx$

$= \displaystyle\int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$

$\cos x = t$とおくと，$-\sin x\,dx = dt$より，

$\sin x\,dx = -dt$

よって

与式 $= \displaystyle\int (1-t^2)\cdot(-dt)$

$= \displaystyle\int (t^2-1)dt$

$= \dfrac{1}{3}t^3 - t$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x}$$

3.

（１）$e^x - e^{-x} = t$とおくと，$(e^x + e^{-x})dx = dt$

また，xとtの対応は

x	0	$\to$	1
t	0	$\to$	$e-\frac{1}{e}$

よって

$$与式 = \int_0^{e-\frac{1}{e}} t^2 dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{e-\frac{1}{e}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}\left(e - \frac{1}{e}\right)^3}$$

（２）$与式 = \left[x^2 \cdot (\log x)^2\right]_1^e - \int_1^e x^2 \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x} dx$

$$= e^2 - 2\int_1^e x \log x\, dx$$

$$= e^2 - 2\left(\left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \log x\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x} dx\right)$$

$$= e^2 - 2\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\int_1^e x\, dx\right)$$

$$= e^2 - e^2 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}(e^2 - 1)}$$

（３）$与式 = \left[x^3 e^x\right]_0^1 - \int_0^1 3x^2 e^x dx$

$$= e - 3\int_0^1 x^2 e^x dx$$

$$= e - 3\left(\left[x^2 e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx\right)$$

$$= e - 3e + 6\int_0^1 xe^x dx$$

$$= -2e + 6\left(\left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx\right)$$

$$= -2e + 6e - 6\left[e^x\right]_0^1$$

$$= -2e + 6e - 6(e-1) = \boldsymbol{6 - 2e}$$

（４）$与式 = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx + \int_0^{\sqrt{2}} \frac{3x}{\sqrt{4-x^2}} dx$

ここで

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \left[\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin^{-1} 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

また，$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{3x}{\sqrt{4-x^2}} dx$において，$4 - x^2 = t$とおくと，

$-2xdx = dt$より，$xdx = -\frac{1}{2}dt$

xとtの対応は

x	0	$\to$	$\sqrt{2}$
t	4	$\to$	2

よって

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{3x}{\sqrt{4-x^2}} dx = 3\int_4^2 \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \left(-\frac{1}{2}dt\right)$$

$$= \frac{3}{2}\int_2^4 t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_2^4$$

$$= 3(2 - \sqrt{2})$$

$$= 6 - 3\sqrt{2}$$

以上より，$与式 = \boldsymbol{\frac{\pi}{4} + 6 - 3\sqrt{2}}$

4.

$x - 3 = t$より，$dx = dt$

また，xとtの対応は

x	3	$\to$	5
t	0	$\to$	2

よって

$$与式 = \int_3^5 \frac{dx}{(x-3)^2 - 9 + 13}$$

$$= \int_3^5 \frac{dx}{(x-3)^2 + 4}$$

$$= \int_0^2 \frac{dt}{t^2 + 4}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{t}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2}(\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$$

5.

（１）$x = a\sin t$ より，$dx = a\cos t\,dt$

また，x と t の対応は

x	0	$\to$	$\frac{a}{2}$
t	0	$\to$	$\frac{\pi}{6}$

よって

$$与式 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a\cos t\,dt}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2\cos^2 t}}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a\cos t}{|a\cos t|}dt$$

$a > 0$，また，$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{6}$ においては，

$\cos t > 0$ であるから，$a\cos t > 0$

したがって

$$与式 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a\cos t}{a\cos t}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$$

$$= \Big[t\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

（２）$x = a\tan t$ より，$dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt$

また，x と t の対応は

x	0	$\to$	$\sqrt{3}a$
t	0	$\to$	$\frac{\pi}{3}$

よって

$$与式 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{a}{\cos^2 t}dt}{(a^2 + a^2\tan^2 t)^2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{a}{\{a^2(1+\tan^2 t)\}^2\cos^2 t}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{a}{a^4(1+\tan^2 t)^2\cos^2 t}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{a}{a^4\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2\cos^2 t}dt$$

$$= \frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 t}}$$

$$= \frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\,dt$$

$$= \frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$= \frac{1}{2a^3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2t)dt$$

$$= \frac{1}{2a^3}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{2a^3}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2a^3}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}$$

6.

まず，被積分関数が偶関数であるかを判別する．

$f(x) = \cos mx\cos nx$ とおくと

$f(-x) = \cos m(-x)\cos n(-x)$

$= \cos(-mx)\cos(-nx)$

$= \cos mx\cos nx = f(x)$

よって，$f(x)$ は偶関数である．

$$与式 = 2\int_0^{\pi} \cos mx\cos nx\,dx$$

$$= 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\{\cos(mx+nx) + \cos(mx-nx)\}dx$$

$$= \int_0^{\pi} \{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\}dx \quad ・・・①$$

i）$m \neq n$ のとき，①より

$$与式 = \int_0^{\pi} \{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\}dx$$

$$= \left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x + \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{m+n}\sin(m+n)\pi + \frac{1}{m-n}\sin(m-n)\pi$$

$$-\left(\frac{1}{m+n}\sin 0 + \frac{1}{m-n}\sin 0\right)$$

$$= 0$$

ii）$m = n$ のとき，①より

与式 $= \int_0^{\pi} (\cos 2mx + \cos 0x) dx$

$= \int_0^{\pi} (\cos 2mx + 1) dx$

$= \left[\frac{1}{2m} \sin 2mx + x \right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{2m} \sin 2m\pi + \pi - \left(\frac{1}{2m} \sin 0 + 0 \right)$

$= \pi$

よって，$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n のとき) \\ \pi & (m = n のとき) \end{cases}$

練習問題 2-B

1.

（１）与式 $= \int \sin^4 x \cdot \sin x\, dx$

$= \int (\sin^2 x)^2 \sin x\, dx$

$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x\, dx$

$\cos x = t$とおくと，$-\sin x\, dx = dt$であるから

$\sin x\, dx = -dt$

よって

与式 $= \int (1 - t^2)^2 \cdot (-dt)$

$= -\int (1 - 2t^2 + t^4) dt$

$= -t + \frac{2}{3} t^3 - \frac{1}{5} t^5$

$= \boldsymbol{-\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x}$

（２）与式 $= \int \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} dx$

$= \int \frac{1 + \sin x}{1 - \sin^2 x} dx$

$= \int \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} dx$

$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx$

$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

$= \tan x + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ において，$\cos x = t$とおくと

$-\sin x\, dx = dt$であるから，$\sin x\, dx = -dt$

よって

$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{t^2} \cdot (-dt)$

$= -\int t^{-2} dt$

$= t^{-1}$

$= \frac{1}{t}$

$= \frac{1}{\cos x}$

以上より，与式 $\boldsymbol{= \tan x + \frac{1}{\cos x} = \tan x + \sec x}$

（３）与式 $= \int \frac{(2x + 2) + 3}{x^2 + 2x + 2} dx$

$= \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx + \int \frac{3}{x^2 + 2x + 2} dx$

$= \int \frac{(x^2 + 2x + 2)'}{x^2 + 2x + 2} dx + \int \frac{3}{(x + 1)^2 - 1 + 2} dx$

$= \log|x^2 + 2x + 2| + \int \frac{3}{(x + 1)^2 + 1} dx$

$\int \frac{3}{(x + 1)^2 + 1} dx$ において，$x + 1 = t$とおくと，

$dx = dt$であるから

$\int \frac{3}{(x + 1)^2 + 1} dx = 3 \int \frac{1}{t^2 + 1} dt$

$= 3 \tan^{-1} t$

$= 3 \tan^{-1}(x + 1)$

また，$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$であるから，

与式 $\boldsymbol{= \log(x^2 + 2x + 2) + 3 \tan^{-1}(x + 1)}$

（４）与式 $= \frac{1}{2} x^2 \log(x - 1) - \int \frac{1}{2} x^2 \{\log(x - 1)\}' dx$

$= \frac{1}{2} x^2 \log(x - 1) - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x - 1} dx$

$= \frac{1}{2} x^2 \log(x - 1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x - 1} dx$　　・・・①

$\int \frac{x^2}{x - 1} dx$ において，被積分関数の分子を

分母で割ると

$$
\begin{array}{r}
x+1 \\
x-1\,\overline{)\,x^2} \\
\underline{x^2-x} \\
x \\
\underline{x-1} \\
1
\end{array}
$$

よって

$$\int \frac{x^2}{x-1}dx = \int \left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + \log|x-1|$$

$\log(x-1)$の真数条件より，$x-1>0$なので

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + \log(x-1)$$

これを①に代入して

$$与式 = \frac{1}{2}x^2\log(x-1) - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}x^2 + x + \log(x-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log(x-1) - \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x-1) - \frac{1}{4}x(x+2)}$$

2.

$\cos x = t$とおくと，$-\sin x\,dx = dt$であるから，

$\sin x\,dx = -dt$

また，xとtの対応は

x	0	$\to$	π
t	1	$\to$	-1

よって

$$与式 = \int_1^{-1} \frac{-dt}{1+t^2}$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}dt$$

ここで，被積分関数は偶関数であるから，

$$与式 = 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$= 2\left[\tan^{-1} t\right]_0^1$$

$$= 2(\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0)$$

$$= 2\cdot\frac{\pi}{4} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

（２） $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$ より，$1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ なので

$$与式 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \left|\cos\frac{x}{2}\right| dx$$

ここで，$\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{2}{3}\pi$のとき，$\frac{\pi}{4} \leqq \frac{x}{2} \leqq \frac{\pi}{3}$であるから

$$\cos\frac{x}{2} \geqq 0$$

よって

$$与式 = \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \cos\frac{x}{2}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\left[2\sin\frac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \boldsymbol{\sqrt{6} - 2}$$

（３） $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ より， $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$

$$与式 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot \tan^2 x\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}\right)\sin x\,dx$$

$\cos x = t$とおくと，$-\sin x\,dx = dt$より，

$\sin x\,dx = -dt$

また，xとtの対応は

x	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$
t	1	$\to$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって

$$与式 = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t}\right)(-dt)$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t}\right)dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2t^2} - \log|t|\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}$$

$$= -\frac{1}{2} - \log 1 - \left(-1 - \log\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + 0 + 1 + \log 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log 2$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}(1-\log 2)}$$

3.

両辺に，$x(x+1)(x-1)^2$をかけると

左辺 $= x^2+x+4$

右辺 $= a(x+1)(x-1)^2+bx(x-1)^2$

$$+cx(x+1)(x-1)+dx(x+1)$$

$$=ax^3-ax^2-ax+a+bx^3-2bx^2+bx$$

$$+cx^3-cx+dx^2+dx$$

$$=(a+b+c)x^3+(-a-2b+d)x^2$$

$$+(-a+b-c+d)x+a$$

これが，xについての恒等式であるから

$$\begin{cases} a+b+c=0 & \cdot\cdot\cdot ① \\ -a-2b+d=1 & \cdot\cdot\cdot ② \\ -a+b-c+d=1 & \cdot\cdot\cdot ③ \\ a=4 & \cdot\cdot\cdot ④ \end{cases}$$

④をそれぞれに代入して，式を整理すると，

$$\begin{cases} b+c=-4 & \cdot\cdot\cdot ④ \\ -2b+d=5 & \cdot\cdot\cdot ⑤ \\ b-c+d=5 & \cdot\cdot\cdot ⑥ \end{cases}$$

④と⑥の両辺を足して，

$2b+d=1$

これと，⑤の両辺を足して，

$2d=6$

$d=3$

これを，⑤に代入して，$-2b=2$より，

$b=-1$

これを，④に代入して，$-1+c=-4$より，

$c=-3$

以上より，$\boldsymbol{a=4,\ b=-1,\ c=-3,\ d=3}$

（２）　（１）の結果を用いて

与式 $=\displaystyle\int\left(\frac{4}{x}+\frac{-1}{x+1}+\frac{-3}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}\right)dx$

$$=4\log|x|-\log|x+1|$$

$$-3\log|x-1|+3\cdot\{-(x-1)^{-1}\}$$

$$=\log|x|^4-\log|x+1|-\log|x-1|^3-\frac{3}{x-1}$$

$$=\boldsymbol{\log\left|\frac{x^4}{(x+1)(x-1)^3}\right|-\frac{3}{x-1}}$$

4.

$x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ より，$dx=\dfrac{1}{2}(e^t+e^{-t})dt$

よって

分母 $=\sqrt{\left(\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2+1}$

$$=\sqrt{\frac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{4}+1}$$

$$=\sqrt{\frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{(e^t+e^{-t})^2}{4}}$$

$$=\left|\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right|$$

$=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$　　※$e^t+e^{-t}>0$ より

したがって

左辺 $=\displaystyle\int\frac{\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})dt}{\frac{e^t+e^{-t}}{2}}$

$$=\int dt$$

$$=t$$

ここで，$x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ を変形すると

$$x=\frac{(e^t-e^{-t})\times e^t}{2\times e^t}$$

$$x=\frac{(e^t)^2-1}{2e^t}$$

$(e^t)^2-2xe^t-1=0$

２次方程式の解の公式を用いて，$e^t>0$より

$$e^t=\frac{2x+\sqrt{4x^2+4}}{2}$$

$$=x+\sqrt{x^2+1}$$

両辺の自然対数をとると

$\log e^t=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$t=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

よって，左辺$=t=$右辺

5.

（１）$\sin(\pi - x) = \sin x$より

$$左辺 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n(\pi - x)\,dx$$

$\pi - x = t$とおくと，$-dx = dt$より，$dx = -dt$

また，xとtの対応は

x	$\frac{\pi}{2}$	$\to$	π
t	$\frac{\pi}{2}$	$\to$	0

よって

$$左辺 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n t \cdot (-dt)$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n t\,dt$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt$$

定積分の値は，変数の文字には無関係なので

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = 右辺$$

以上より，$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n x\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$

（２）与式 $\displaystyle= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^7 x\,dx$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx$$

$$= 2 \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{32}{35}}$$

6. 部分積分法を用いる．

$$I_n = \int (\log x)^n \cdot 1\,dx$$

$$= (\log x)^n \cdot x - \int n(\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \cdot x\,dx$$

$$= x(\log x)^n - n\int (\log x)^{n-1} dx$$

ここで，$\displaystyle\int (\log x)^{n-1} dx = I_{n-1}$で，$n - 1 \geqq 0$ より

$n \geqq 1$であるから

$I_n = x(\log x)^n - nI_{n-1} \quad (n \geqq 1)$

また，$\displaystyle\int (\log x)^3 dx$ の値は

$$I_3 = x(\log x)^3 - 3I_2$$

$$= x(\log x)^3 - 3\{x(\log x)^2 - 2I_1\}$$

$$= x(\log x)^3 - 3\{x(\log x)^2 - 2(\log x - I_0)\}$$

$$= x(\log x)^3 - 3x(\log x)^2 + 6(\log x - x)$$

$$= \boldsymbol{x(\log x)^3 - 3x(\log x)^2 + 6\log x - 6x}$$