

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
HONDURAS**  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS



*“ El propósito de la demostración no es verificar, es comprender. ”*

-ARNOLD ROSS

**MM-515**  
**ECUACIONES DIFERENCIALES NUMÉRICAS**

**Reporte Técnico de  
Proyecto de Aplicación:**

**“Migración de poblaciones”**

Tercer periodo, 2018

Fecha: Lunes 10 de Diciembre del 2018

---

**Entregado por:**

Luis Felipe Flores Machado    20141030258

Óscar Adrián Hernández    20141001351

# Resumen

En el presente informe se analiza, mediante el método de diferencias finitas (MDF) y su implementación en `OCTAVE`, un caso sencillo (pero suficientemente lleno de generalidad) de un modelo poblacional-migratorio propuesto.

Este modelo explora los efectos que migraciones locales pueden tener en el destino futuro de la natalidad de una población y cómo pequeños movimientos internos pueden significar la diferencia entre un equilibrio, una sobrepoblación o la irremediable extinción.

Nuestro caso particular analizado proporciona el contexto de una población humana sujeta a no vivir cerca de una frontera política (condiciones de Dirichlet) con una geometría rectangular, condiciones iniciales de sobrepoblación local y una distribución de puntos de intereses que motivan su migración.

# Índice general

<b>1. TEORÍA</b>	<b>3</b>
1.1. Introducción . . . . .	4
1.2. Marco teórico . . . . .	4
1.2.1. Fenomenología de la población . . . . .	4
1.2.2. Fenomenología de la dinámica . . . . .	5
1.2.3. El término fuente . . . . .	8
1.3. Planteamiento del problema . . . . .	9
<b>2. RESOLUCIÓN NUMÉRICA</b>	<b>10</b>
2.1. Metodología de solución del problema . . . . .	11
2.1.1. Discretización del problema . . . . .	11
2.2. Presentación de resultados . . . . .	18
2.2.1. Experimento 1 . . . . .	19
2.2.2. Experimento 2 . . . . .	21
2.2.3. Experimento 3 . . . . .	22
<b>3. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS</b>	<b>25</b>
3.1. Conclusiones . . . . .	26
3.2. Progresos futuros . . . . .	26
3.3. Agradecimientos . . . . .	27
<b>4. REFERENCIAS</b>	<b>28</b>

# Capítulo 1

## TEORÍA

*“Si desea describir la verdad,  
deje la elegancia al sastre.”*

*-Ludwig Boltzmann*

## 1.1. Introducción

Desde el momento en que el ser humano se estableció de su vida nómada a una sedentaria hemos observado desarrollos complejos en la organización cooperativa que tenemos como especie. A diferencia de otros mamíferos, nosotros hemos construido civilizaciones complejas a grande escala al establecernos estáticos en regiones estratégicas de tierra, nutriéndonos de sus recursos al planificar acorde.

Sin embargo, esto no significa que la migración (movimiento de población que consiste en dejar el lugar de residencia para establecerse en otra región, generalmente por causas económicas o sociales) no juegue un rol fundamental en la culminación de estas civilizaciones y sus propiedades. Aquí exploraremos los efectos que migraciones locales pueden tener en el destino futuro de la natalidad de una población y cómo pequeños movimientos internos pueden significar la diferencia entre un equilibrio, una sobrepoblación o la irremediable extinción.

## 1.2. Marco teórico

Antes de ser capaces de plantear adecuadamente el problema a tratar, debemos construir los conceptos fundamentales del modelo. Esto lo lograremos mediante consideraciones fenomenológicas y argumentos que nos ubiquen en la realidad que queremos representar. Proseguimos en la siguiente sección con la definición de la función principal del modelo,  $\eta(X, t)$ . Esta corresponde a una etiqueta que representará fielmente la población cercana a ese punto  $X$  en ese tiempo.

Para ser más precisos, pretendemos que  $\eta(X, t) = a \in \mathbb{R}$  siempre y cuando en una vecindad centrada en  $X$  (de tamaño predeterminado por nuestra resolución  $\epsilon$  de la geografía) vivan en promedio  $a$  personas (hablando de promedio temporal) en la ventana de tiempo  $(t - \epsilon_t, t + \epsilon_t)$  determinada por otra resolución del progreso temporal  $\epsilon_t$ .

### 1.2.1. Fenomenología de la población

Para abstraer el concepto fenomenológico de una “población” y sus características que nos ayudarán a representarla y predecirla teóricamente, enlistamos a continuación las asunciones más básicas y casi obvias sobre su naturaleza. Estas las cuales adoptaremos casi axiomáticamente:

1. La población es cuantificable escalarmente sin ambigüedad (es un número) y, asumiendo régimen absoluto de tiempo y espacio, puede ser asignado unívocamente a cada evento  $(X, t)$ ; donde  $X$  representa las coordenadas espaciales elegidas del modelo particular y  $t$  una escala de tiempo elegida.

Es decir, la población es una **función** de la forma:

$$\begin{array}{ll} \eta : \Omega \times G_t \longrightarrow \mathbb{R} & \Omega : \text{Conjunto de todas las coordenadas } X. \\ (X, t) \longmapsto \eta(X, t) & G_t : \text{Grupo de evolución del tiempo al cual} \\ & \text{pertenece } t. \end{array}$$

A partir de ahora, tomaremos a  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , de manera que perfectamente  $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  y a  $G_t = [0, T]$  para  $T$  positivo<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Además,  $T \neq \infty$ , previendo que probablemente el universo termine algún día.

2. La función  $\eta(X, t)$  es una función continua por separado sobre  $\Omega$  para todo  $t \in G_t$  fijo<sup>2</sup> y viceversa continua sobre  $G_t$  para todo  $X \in \Omega$  fijo, aunque no sea continua en todo su dominio  $\mathcal{D} := \Omega \times [0, T]$ .
3. Tenemos que  $\eta(X, t) \geq 0$  para todo  $(X, t) \in \mathcal{D}$ . Cuando  $\eta(X, t) = 0$  se entiende como el caso en el que existe una región suficientemente pequeña, centrada en  $X$  donde hay 0 personas viviendo en promedio. Esto se interpreta como un estado de total extinción local.<sup>3</sup>
4. La función  $\eta(X, t)$  es además clase  $\mathcal{C}^2$  sobre  $\Omega$ . Esto es un aspecto que ocupa argumentarse desde un lado más social. Las personas, si asumimos que cerca de todas poseen un instinto a sobrevivir (y organizarse para lograrlo), van a migrar en conjuntos numerosos que les permitan establecerse, reproducirse y sobrevivir en tal proceso migratorio.

Esto lo traducimos a que, para cualquier  $\tilde{t} \in G_t$  fijo, la distribución espacial  $\eta(X, \tilde{t})$  de las personas será suficientemente suave localmente debido a conglomeraciones familiares, amistades, y otras unidades de microsociedades que asumimos necesarias dentro de nuestra población.

5. La función  $\eta(\tilde{X}, t)$  es al menos derivable sobre todo  $t \in G_t$  una vez fijando  $\tilde{X} \in \Omega$ . Esto es debido que no consideraremos nunca causas de muerte suficientemente inmediatas para que el número de habitantes cambia tan drásticamente para romper la derivabilidad de la función. Además, las otras causas del crecimiento de  $\eta(\tilde{X}, t)$  son la migración y la natalidad; las cuales ambas son de ritmo lento.

Cualquier función  $\eta(X, t)$  que escojamos como población inicial para nuestro problema de valor de frontera y inicial (PVFI) deberá cumplir con al menos estas propiedades. El diseño de tales funciones se realizará durante el planteamiento del problema con consideraciones que busquen imitar tendencias reales.

Con estas propiedades generales en vista, proseguimos a continuación a estudiar los mecanismos de evolución que puede tener  $\eta(X, t)$  en su dinámica.

### 1.2.2. Fenomenología de la dinámica

Los mecanismos propuestos son inspirados en ecuaciones conocidas de la física: Convección, advección, radiación, difusión (en general, transporte). Tomaremos los siguientes dos:

1. **Convección:** Como término central de nuestro modelo pues, inspirado en cómo la materia bajo convección se transporta (o a su energía) en direcciones preferenciales determinadas por un campo de direcciones  $\vec{C}$ , notamos la analogía a cómo la población tiende a migrar en caminos preterminados por intereses culturales.

Estos pueden ser, por el lado positivo, la preferencia de vivir cerca de algún mercado específico, una institución educativa, o área verde. O bien modelar el escape de una zona insegura, movilizaciones por extorción, incomodidades por sobrepoblación/invasión (discutido en el siguiente punto) o ser tan neutral como contener la tasa de mudanzas usuales que las personas realizar por trivialidades menores.

---

<sup>2</sup>Esto es totalmente falso en el caso real, pues la población toma realmente valores restringidos a  $\mathbb{Z}^+$ . Sin embargo, para las escalas a considerar posteriormente, cualquier diferencia local es fielmente representada por una aproximación continua.

<sup>3</sup>Aunque podríamos declarar extinciones irremediables desde mucho antes dado un parámetro  $\alpha$  definido posteriormente

El término convectivo se expresa por  $\nabla \cdot (\eta(x, y, t) \vec{C}(x, y))$ . Este término mide un flujo neto local del campo vectorial  $\vec{C}(x, y)$  desde el punto  $(x, y)$  donde sea evaluado luego de haberse escalado con nuestra medida de población local  $\eta(x, y)$  para ese tiempo fijo  $t$ .

Ese flujo neto corresponde al movimiento colectivo de personas hacia regiones cercanas y los efectos que este proceso tiene en su población total. Para ver mejor esto, desglosemos la expresión anterior con esta identidad:

$$\nabla \cdot (\eta(x, y, t) \vec{C}(x, y)) = \underbrace{\vec{C}(x, y) \cdot \nabla \eta(x, y, t)}_{\text{Flujo de } \eta \text{ en dirección de } \vec{C}} + \underbrace{\eta(x, y, t) \nabla \cdot \vec{C}(x, y)}_{\text{Proporción de } \eta \text{ que cambia debido a la divergencia}^4 \text{ de } \vec{C}}$$

El primer término corresponde al cambio espacial en  $\eta(x, y, t)$  a tiempo constante que ocurre por **traslación** en dirección de  $\vec{C}(x, y)$ . El segundo término es el cambio en  $\eta(x, y, t)$  debido al **nacimiento o fallecimiento** de personas durante el recorrido.

Es evidente entonces que podemos controlar aspectos complejos como la inseguridad u actividades de procreación que conlleva viajar por cierta ruta mediante  $\nabla \cdot \vec{C}(x, y)$ .

Las propiedades que debe tener el campo vectorial de convección (o de intereses, por su interpretación)  $\vec{C}(x, y)$  no son tan exigentes, pues vemos que solo ocupa ser derivable. Esto no ocupa ser en todo el dominio  $\Omega$ , pues de hecho la influencia de los puntos de interés puede estar situada de manera muy concentrada alrededor de ellos, y ser totalmente cero en puntos alejados.

Esto abre la posibilidad a funciones  $\vec{C}(x, y)$  que tengan soporte compacto y necesiten ser derivables solamente en el interior de tal soporte. Esto nos ayudará más adelante a modelar situaciones más cercanas a la realidad.

Cabe destacar como último comentario, que el vector de convección  $\vec{C}(x, y)$  no depende del tiempo en nuestro caso. Sin embargo, en la realidad, los intereses de las personas pueden perfectamente estar cambiando a distintas maneras.

El primer caso sencillo que podríamos mencionar es en el cual  $\vec{C}(x, y, t)$  sea periódica en el tiempo y dictada por una ecuación diferencial que hable sobre la economía regional. Ésta estaría acoplada a la primera e incluso, si quisiésemos volverlo más realista, estar acoplada a una tercera ecuación para la divergencia de  $\vec{C}(x, y, t)$ , que vimos que describe la viabilidad de migrar por ciertas rutas; las cuales ahora cambiarán debido a la segunda ecuación.

Sin embargo, durante este informe consideraremos solamente el caso estático, argumentado con que  $\vec{C}(x, y)$  describe aquellos intereses suficientemente fundamentales para ser siempre relevantes a escalas largas de tiempo. Mientras que los intereses más cambiantes y de escala micro serán promediados estadísticamente hacia un efecto global que puede también estar contenido en  $\vec{C}(x, y)$ .

---

<sup>4</sup>En física, los flujos que tienen divergencia igual a cero corresponden a materiales que preservan densidad constante durante el flujo. Análogamente, si este término fuese cero ( $\vec{C}$  fuese libre de divergencia), correspondería a que la densidad de población que se mueve no está cambiando, es decir, no mueren ni nacen durante el recorrido.

2. **Difusión:** El segundo término necesario para simular de manera realista el comportamiento de la población en masa es la difusión. La difusión describe tendencia de las personas de alejarse de la sobrepoblación: Moviéndose desde regiones de mayor concentración poblacional hacia regiones de menos concentración.<sup>5</sup>

Es importante notar que los procesos difusivos tienen su origen en asumir que las “las partículas” (en nuestro caso, individuos de la población) se mueven de manera aleatoria sin dirección preferencial a priori (precisamente, movimiento Browniano).

Esta asunción no es descabellada considerar, pues de hecho captura el comportamiento de las personas que migran sin motivación inicial no trivial o bien las micro-migraciones del diario vivir cuando personas hacen turismo, hay encargos y recursos que son además transportados de región a región.

La difusión está modelado por un término de la forma:

$$\nabla (D(x, y) \cdot \nabla \eta(x, y, t))$$

donde  $D$  representa un **coeficiente de difusividad** que sirve para medir lo propenso que la cantidad  $\eta(x, y)$  de difundirse desde el punto  $(x, y)$  evaluado. La dependencia de  $D$  en coordenadas espaciales tiene sentido cuando hablamos de materiales físicos que no son homogéneos en todos sus puntos  $(x, y)$ . Sin embargo, para nuestro caso,  $D$  será una constante.

Esto se argumenta con la asunción de que nuestra geografía a considerar no tiene regiones que varíen tan drásticamente en su capacidad de sostener viviendas y que existe una organización adecuada para ello.  $D$  podría cambiar de región a región solo en el caso que en que una región  $R_1$  alcance su estado de “sobrepoblación” mucho antes que alguna región  $R_2$ .

Esto reduce el término difusivo hacia:

$$\begin{aligned} \nabla (D \cdot \nabla \eta(x, y, t)) &= D \nabla \cdot \nabla \eta(x, y, t) \\ &= D \nabla^2 \eta(x, y, t) \end{aligned}$$

Los términos de convección y difusión anteriores pueden presentarse de manera general en la siguiente **ecuación de difusión-convección**:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = D \nabla^2 \eta(x, y, t) - \nabla \cdot (\eta \vec{C}) + R$$

Donde  $R$  es un término fuente, que describe la “entrada” y “salida” de la cantidad  $\eta(x, y, t)$ <sup>6</sup> En nuestro caso, esto describe la natalidad y mortalidad natural de nuestra población. Los mecanismos por los cuales una población puede o no decidir reproducirse pueden ser complejos localmente, pero hay modelos poblacionales discutidos desde hace mucho tiempo y recopilados en textos modernos como en [3]. Este término fuente será punto de discusión en la sección a continuación.

---

<sup>5</sup>Se puede argumentar que las personas buscan también estar rodeada de una cantidad prudente de otras personas y no siempre alejarse sin límite. Esto, sin embargo, será tratado por otro término de la ecuación que se equilibrará con la difusión en casos que la población local disminuya tanto que no sea sensato que sigan escapando de la región.

<sup>6</sup>En física puede modelar la entrada/salida de materia o de energía en sus distintas manifestaciones.



### 1.2.3. El término fuente

El modelo más simple en biología de poblaciones es el modelo de **crecimiento sin restricción** dado por la ecuación diferencial sobre una población  $N(t)$  siguiente:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t)$$

Su solución representa una etapa temprana en la colonización de una región vírgen en sus recursos donde  $\alpha$  representa el recurso disponible para el consumo de la especie con población  $N(t)$ . Alrededor del siglo XIX, P.-F Verulst[3] propuso un modelo más elaborado, conocido hoy día como el **modelo logístico**, en el cual es posible describir una saturación de los recursos (o, equivalentemente, una capacidad máxima de los recursos de la región para avastecer a la población). La ecuación que la dicta es la siguiente:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t) (K - N(t))$$

Como tenemos que  $\alpha > 0$ , el estado con  $N = 0$  es inestable y la población crece monotónicamente hacia  $N(t = +\infty) = K$  pero sin pasarse de tal valor y, de hecho, acercándose a él asintóticamente y cada vez a menor ritmo. La constante  $K$  usualmente, en biología, se le conoce como *capacidad de carga*.

Una segunda mejora (conocida como **efecto Allee**) ocurre en los 1950s cuando se supone además que una densidad de población  $N(t)$  muy baja (menos a una  $K_-$  dada) llevaría a una crisis de reproducción y eventual extinción por falta de encuentros frecuentes entre individuos. Esto se modela por la ecuación llamada **ecuación biestable** que tiene la siguiente forma:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K_-}\right) \left(\frac{N(t)}{K_+} - 1\right)$$

Los puntos de equilibrio son  $N(t) = 0$  y  $N(t) = K_+$  siendo estables y  $N(t) = K_-$  inestable, representando la tendencia a crecer fuera del rango de una población peligrosamente escasa.

Si ahora nosotros consideramos al término fuente  $R$  de la sección anterior como este último, obtenemos la siguiente ecuación<sup>7</sup>

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = D \nabla^2 \eta - \nabla \cdot (\eta \vec{C}) + N \eta (1 - \eta) (\eta - \alpha)$$

donde, enlistando todos los términos esta vez:

- **$D$  : Constante de difusión.** Dicta el ritmo al cual los individuos decidirán irse disipando de zonas demasiado pobladas hacia otras menos pobladas.
- **$\vec{C}$  : Campo vectorial de convección/intereses.** Dicta las direcciones y rutas que los individuos prefieren tomar durante las migraciones.
- **$N$  : Taza de natalidad.** Controla el ritmo al cual están naciendo los individuos. Equivalentemente, el ritmo de crecimiento de  $\eta(x, y, t)$  que es proporcional a si mismo.
- **$\alpha$  : Parámetro de mínima densidad.** Es un parámetro que yace entre 0 y 1; controla cuál es el mínimo valor que  $\eta(x, y, t)$  puede tomar antes de que su crecimiento sea penalizado por la poca frecuencia de encuentros de individuos.<sup>8</sup>

<sup>7</sup>Que comparte su estructura con la conocida ecuación de reacción-difusión de **Allen–Cahn**. Utilizada, por ejemplo, para describir la separación de fase termodinámica en un sistemas de aleaciones multi-componentes.

<sup>8</sup>El término  $\alpha$  es el que se encarga de equilibrar realistamente la difusión. Pues, si desde algún punto  $(x, y)$ , la población se difunde demasiado a sus alrededores, la población de las vecindades cercana se verá penalizada por bajas densidades. Esto bajará rápidamente las densidades y el modelo responderá como si los individuos ahora prefieren regresar a la cercanía de  $(x, y)$ .

### 1.3. Planteamiento del problema

Para el problema principal a resolver consideraremos una región sencilla. Particularmente la región  $\Omega = [0, 1]^2$ . Además, asumiremos que en los puntos de la frontera  $(x, y) \in \partial\Omega$  de nuestra región, habrá población  $\eta(x, y, t) = 0$ , argumentado de ser una frontera política regional que incita a no vivir demasiado cerca de ella.

Además, el tiempo que consideraremos para la simulación será finito. Es decir,  $G_t = [0, T]$ , donde  $T$  es de hecho razonablemente corto. Esto es por varias razones:

- Viabilidad de la simulación: Con visión a realizar muchas simulaciones que respalden fielmente nuestras conclusiones, necesitamos permitir que se hagan en una ventana de tiempo real sensata.
- Culminación hacia el equilibrio: Utilizamos la justa ventana de tiempo en la cual usualmente el sistema alcanza un comportamiento en el cual el equilibrio es casi evidente. Es decir, ya sea un comportamiento en el que  $\eta(x, y, t)$  ya casi no cambia en el tiempo por que la difusión se equilibró con la convección y natalidad, o porque la inevitable extinción está clara, o bien la inevitable sobrepoblación sin cota.

Lo anterior se traduce al siguiente planteamiento del problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} = D \nabla^2 \eta - \nabla \cdot (\eta \vec{C}) + N \eta (1 - \eta) (\eta - \alpha) \\ \eta(x, y, 0) = f(x, y) & (x, y) \in \Omega = [0, 1]^2, \quad t \in [0, T] \\ \eta(x, y, t) = 0 & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

este problema será resuelto numéricamente en detalle en la siguiente sección. Se utilizarán métodos de diferencias finitas centrado en el esquema de integración numérica con Runge-Kutta de orden 4. Esto debido a la no linealidad de nuestra ecuación diferencial.

## Capítulo 2

# RESOLUCIÓN NUMÉRICA

*“La ciencia es solo curiosidad organizada.”*

*-Eric Lander*

## 2.1. Metodología de solución del problema

Nuestro objetivo es resolver la ecuación:

$$\partial_t \eta(x, y, t) = D \nabla^2 \eta(x, y, t) - \nabla \cdot [\eta(x, y, t) \vec{C}(x, y)] + N \eta(x, y, t) [1 - \eta(x, y, t)] [\eta(x, y, t) - \alpha] \quad (2.1)$$

Para esto, utilizaremos métodos en diferencias finitas para discretizar los operadores diferenciales involucrados en la ecuación (2.1). Además, el método de integración de Runge-Kutta de orden cuatro (RK4) para hacer la evolución del tiempo. Todo esto se llevará a cabo en GNU OCTAVE.

### 2.1.1. Discretización del problema

#### Mallado del espacio

Para nuestro problema, consideraremos un modelo simple en el cual la población está dentro de un rectángulo, definido en el primer cuadrante de  $\mathbb{R}^2$  con uno de sus vértices en el origen. O sea,  $X = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq L_x \wedge 0 \leq y \leq L_y\}$  donde  $L_x, L_y \in \mathbb{N}$ . Para el mallado de este, consideraremos una partición a lo largo del eje  $x$  de  $N_x + 1$  unidades de la forma  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N_x-1} < x_{N_x} = L_x$  y a lo largo del eje  $y$  otra partición de  $N_y + 1$  unidades de la forma  $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{N_y-1} < y_{N_y} = L_y$ , donde  $N_x, N_y \in \mathbb{N}$ . Luego con estas definimos el tamaño de paso  $h = L_x/N_x = L_y/N_y$ <sup>1</sup>. Y entonces, haciendo uso del comando `meshgrid` obtendremos el mallado deseado para nuestra región  $X$ .

**Ejemplo 2.1:** Implimentar un mallado en OCTAVE del cuadrado  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  con 50 particiones en el eje  $x$  y 50 particiones en el eje  $y$ .

Para esto, en la consola ejecutamos los siguientes:

```
>> Lx = 1; Nx = 50; h = Lx/Nx; x = 0:h:Lx;
>> Ly = 1; Ny = 50; y = 0:h:Ly;
>> [x,y] = meshgrid(x,y);
```

con lo cual, obtenemos el mallado deseado, en las variables  $x$  e  $y$ . Para poder visualizarlo:

```
>> plot(x,y)
>> hold on
>> plot(y,x)
```

y obtenemos como resultado: (Figura 2.1)

Para hacer referencia a uno de los nodos en los que se particionó nuestro espacio utilizaremos la convención:  $\eta_{i,j} = \eta(x_i, y_j, t)$  donde  $0 \leq i \leq N_x$  y  $0 \leq j \leq N_y$ . Además, el conteo de estos se realiza con la misma estructura del conteo de OCTAVE: de arriba hacia abajo, de izquierda a derecha.

#### Discretización de operadores diferenciales

Una vez realizado el mallado espacial, nos enfocaremos en discretizar los operadores que utilizaremos para resolver la ecuación (2.1). Para esto, utilizaremos las ecuaciones de aproximación en diferencias finitas:

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta_{i,j} \approx \frac{\eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j}}{2h} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta_{i,j} \approx \frac{\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1}}{2h} \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup>Realmente se podría definir un tamaño de paso distinto para cada eje, pero por simplicidad haremos que sean el mismo. Además, note que así  $h = x_k - x_{k-1} = y_k - y_{k-1}$  con  $1 \leq k \leq N_x, N_y$ .

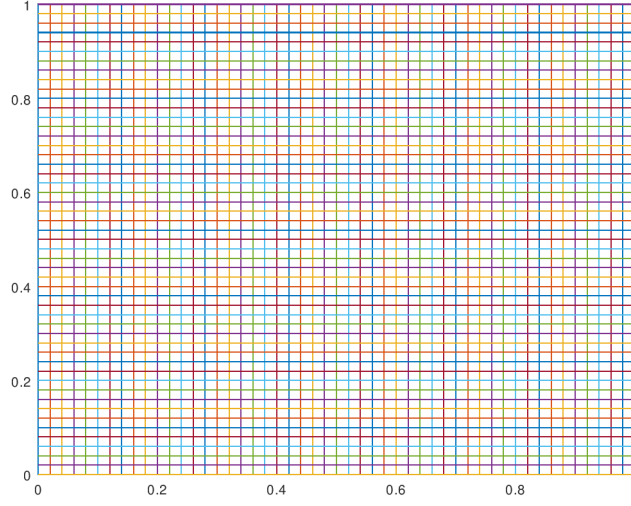


Figura 2.1: Mallado realizado en el ejemplo 2.1.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta_{i,j} \approx \frac{\eta_{i-1,j} - 2\eta_{i,j} + \eta_{i+1,j}}{h^2} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \eta_{i,j} \approx \frac{\eta_{i,j-1} - 2\eta_{i,j} + \eta_{i,j+1}}{h^2} \quad (2.5)$$

Si tenemos condiciones de Dirichlet, sabemos que  $\eta_{i,j} = 0$  si  $i = 0 \vee j = 0$ . i.e.:  $\eta(x, y, t) = 0$  si  $(x, y) \in \partial[0, 1]^2$ . Luego, considerando esto y la ecuación (2.2) obtenemos:

$$\begin{aligned} i = 1 : \frac{\partial}{\partial x} \eta_{1,j} &\approx \frac{\eta_{2,j} - \eta_{0,j}}{2h} = \frac{\eta_{2,j}}{2h} \\ i = 2 : \frac{\partial}{\partial x} \eta_{2,j} &\approx \frac{\eta_{3,j} - \eta_{1,j}}{2h} \\ &\vdots \\ i = k : \frac{\partial}{\partial x} \eta_{k,j} &\approx \frac{\eta_{k+1,j} - \eta_{k-1,j}}{2h} \\ &\vdots \\ i = N_x - 2 : \frac{\partial}{\partial x} \eta_{N_x-2,j} &\approx \frac{\eta_{N_x-1,j} - \eta_{N_x-3,j}}{2h} \\ i = N_x - 1 : \frac{\partial}{\partial x} \eta_{N_x-1,j} &\approx \frac{\eta_{N_x,j} - \eta_{N_x-2,j}}{2h} = \frac{-\eta_{N_x-2,j}}{2h} \end{aligned}$$

Ó, de forma matricial:

$$\frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\begin{bmatrix} \eta_{1,j} \\ \eta_{2,j} \\ \vdots \\ \eta_{k,j} \\ \vdots \\ \eta_{N_x-2,j} \\ \eta_{N_x-1,j} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\eta}} \approx \frac{1}{2h} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \eta_{1,j} \\ \eta_{2,j} \\ \vdots \\ \eta_{k,j} \\ \vdots \\ \eta_{N_x-2,j} \\ \eta_{N_x-1,j} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\eta}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{\eta} \approx \mathbf{D1} \boldsymbol{\eta} \quad (2.6)$$

Similarmente, de la ecuación (2.3) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\begin{bmatrix} \eta_{i,1} \\ \eta_{i,2} \\ \vdots \\ \eta_{i,k} \\ \vdots \\ \eta_{i,N_y-2} \\ \eta_{i,N_y-1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\eta}} &\approx \frac{1}{2h} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & & & & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \eta_{i,1} \\ \eta_{i,2} \\ \vdots \\ \eta_{i,k} \\ \vdots \\ \eta_{i,N_y-2} \\ \eta_{i,N_y-1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\eta}} \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{\eta} \approx \mathbf{D1} \boldsymbol{\eta} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Note que las ecuaciones (2.6) y (2.7) difieren únicamente en dos aspectos: las dimensiones de  $\mathbf{D2}$  (en la primera tiene dimensiones  $(N_x - 1) * (N_x - 1)$  y en la segunda  $(N_y - 1) * (N_y - 1)$ ), y lo que representa el vector  $\boldsymbol{\eta}$ , pues en la ecuación (2.6) representa la función  $\eta(x, y, t)$  evaluada en el mallado hecho para  $x$  y en la ecuación (2.7) es la función  $\eta(x, y, t)$  evaluada en el mallado hecho para  $y$ .

Además, considerando condiciones de Dirichlet y la ecuación (2.4) obtenemos:

$$\begin{aligned} i = 1 : \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta_{1,j} &\approx \frac{\eta_{0,j} - 2\eta_{1,j} + \eta_{2,j}}{h^2} = \frac{-2\eta_{1,j} + \eta_{2,j}}{h^2} \\ i = 2 : \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta_{2,j} &\approx \frac{\eta_{1,j} - 2\eta_{2,j} + \eta_{3,j}}{h^2} \\ &\vdots \\ i = k : \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta_{k,j} &\approx \frac{\eta_{k-1,j} - 2\eta_{k,j} + \eta_{k+1,j}}{h^2} \\ &\vdots \\ i = N_x - 2 : \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta_{N_x-2,j} &\approx \frac{\eta_{N_x-3,j} - 2\eta_{N_x-2,j} + \eta_{N_x-1,j}}{h^2} \\ i = N_x - 1 : \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta_{N_x-1,j} &\approx \frac{\eta_{N_x-2,j} - 2\eta_{N_x-1,j} + \eta_{N_x,j}}{h^2} = \frac{\eta_{N_x-2,j} - 2\eta_{N_x-1,j}}{h^2} \end{aligned}$$

Ó, de forma matricial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial^2 x} \underbrace{\begin{bmatrix} \eta_{1,j} \\ \eta_{2,j} \\ \vdots \\ \eta_{k,j} \\ \vdots \\ \eta_{N_x-2,j} \\ \eta_{N_x-1,j} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\eta}} &\approx \frac{1}{h^2} \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D2}} \underbrace{\begin{bmatrix} \eta_{1,j} \\ \eta_{2,j} \\ \vdots \\ \eta_{k,j} \\ \vdots \\ \eta_{N_x-2,j} \\ \eta_{N_x-1,j} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\eta}} \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial^2 x} \boldsymbol{\eta} \approx \mathbf{D2} \boldsymbol{\eta} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Similarmente, considerando condiciones de Dirichlet y la ecuación (2.5) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial^2 y} \underbrace{\begin{bmatrix} \eta_{i,1} \\ \eta_{i,2} \\ \vdots \\ \eta_{i,k} \\ \vdots \\ \eta_{i,N_y-2} \\ \eta_{i,N_y-1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\eta}} &\approx \frac{1}{h^2} \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D2}} \underbrace{\begin{bmatrix} \eta_{i,1} \\ \eta_{i,2} \\ \vdots \\ \eta_{i,k} \\ \vdots \\ \eta_{i,N_y-2} \\ \eta_{i,N_y-1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\eta}} \\
&\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \boldsymbol{\eta} \approx \mathbf{D2} \boldsymbol{\eta} \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Donde, una vez más, las diferencias entre las ecuaciones (2.8) y (2.9) vienen únicamente en las dimensiones de  $\mathbf{D2}$  (en la primera tiene dimensiones  $(N_x - 1) * (N_x - 1)$  y en la segunda  $(N_y - 1) * (N_y - 1)$ ), y lo que representa el vector  $\boldsymbol{\eta}$ , pues en la ecuación (2.8) representa es la función  $\eta(x, y, t)$  evaluada en el mallado hecho para  $x$  y en la ecuación (2.9) es la función  $\eta(x, y, t)$  evaluada en el mallado hecho para  $y$ .

Hasta ahora, sólo hemos encontrado una discretización para los operadores de primera y segunda derivada parcial respecto a nuestras variables espaciales. Pero (como se verá a continuación) estas sientan las bases para los operadores diferenciales que nuestra ecuación (2.1) involucra.

Para discretizar el operador  $\nabla^2$ , lo que necesitamos es notar que en nuestra función  $\eta(x, y, t)$  el efecto que tiene es:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \eta(x, y, t) &= \frac{\partial^2}{\partial^2 x} \eta(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \eta(x, y, t) = \left( \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \right) \eta(x, y, t) \\
&\Rightarrow \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}
\end{aligned}$$

Tentativamente, uno podría pensar que bastaría con sumar las discretizaciones deducidas anteriormente (2.8) y (2.9) para los operadores de segunda derivada parcial respecto a  $x$  e  $y$  para obtener una discretización del operador  $\nabla^2$ . Pero, recordemos que estas matrices no necesariamente tienen las mismas dimensiones. Sin embargo, esta es la idea que perseguimos para poder discretizar  $\nabla^2$ .

Notemos que el operador  $\partial_x^2$  actúa únicamente en el espacio de la variable  $x$  y el operador  $\partial_y^2$  opera en el espacio de la variable  $y$ . Sin embargo nosotros estamos trabajando en el espacio producido por el producto cartesiano de estos dos. Entonces, justamente esa es la clave. Bastaría con hacer un producto tal que haga que nuestras discretizaciones operen el espacio producto de  $x$  e  $y$ . Para ello, hacemos uso del comando `kron` en `OCTAVE`, el cual lo que hará será hacer el producto de Kronecker con nuestras discretizaciones y las identidades del espacio contrario para que así estas pertenezcan al mismo espacio y puedan ser sumadas sin problema. i.e.:

$$\nabla^2 \approx \mathbf{D2}(x) \otimes \mathbb{1}(y) + \mathbb{1}(x) \otimes \mathbf{D2}(y) =: \mathbf{L2} \tag{2.10}$$

donde,

$\mathbf{D2}(x)$ : Discretización del operador de segunda derivada respecto de  $x$ .

$\mathbf{D2}(y)$ : Discretización del operador de segunda derivada respecto de  $y$ .

$\mathbb{1}(x)$ : Matriz identidad del espacio de la variable  $x$ .

$\mathbb{1}(y)$ : Matriz identidad del espacio de la variable  $y$ .  $\otimes$  : Producto de Kronecker.

**Ejemplo 2.2:** Considerando condiciones de Dirichlet y el mallado espacial hecho en el ejemplo 2.1, implementar en OCTAVE la discretización del operador  $\nabla^2$ .

Para esto, ejecutamos en la consola los siguientes comandos:

```
>> D2x = (1/h^2)*spdiags(ones(Nx-1,1)*[1,-2,1],-1:1,Nx-1,Nx-1);
>> D2y = (1/h^2)*spdiags(ones(Ny-1,1)*[1,-2,1],-1:1,Ny-1,Ny-1);
>> Ex = speye(Nx-1);
>> Ey = speye(Ny-1);
>> L2 = kron(D2x,Ey)+kron(Ex,D2y);
```

donde,

D2x: Discretización del operador de segunda derivada respecto de  $x$ .

D2y: Discretización del operador de segunda derivada respecto de  $y$ .

Ex: Matriz identidad del espacio de la variable  $x$ .

Ey: Matriz identidad del espacio de la variable  $y$ .

L: Discretización del operador  $\nabla^2$ .

Para discretizar el operador  $\nabla \cdot$ , una vez más tenemos que analizar el efecto que tiene en nuestra ecuación (2.1):

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [\eta(x, y, t)\vec{C}(x, y)] &= \eta(x, y, t)\nabla \cdot [\vec{C}(x, y)] + \vec{C}(x, y) \cdot \nabla[\eta(x, y, t)] \\ &= \eta(x, y, t)[\partial_x C_x(x, y) + \partial_y C_y(x, y)] + \vec{C}(x, y) \cdot [\partial_x \eta(x, y, t)\hat{x} + \partial_y \eta(x, y, t)\hat{y}] \\ &= \eta(x, y, t)[\partial_x C_x(x, y) + \partial_y C_y(x, y)] + [C_x(x, y)\partial_x \eta(x, y, t) + C_y(x, y)\partial_y \eta(x, y, t)]\end{aligned}$$

Entonces, utilizando las discretizaciones deducidas anteriormente para las derivadas de primer orden espaciales (Ecuaciones 2.2 y 2.3) podemos reescribir la expresión anterior en forma matricial así:

$$\nabla \cdot [\eta(x, y, t)\vec{C}(x, y)] \approx \boldsymbol{\eta}[\mathbf{D1}(x)\mathbf{C}_x + \mathbf{D1}(y)\mathbf{C}_y] + [\mathbf{C}_x\mathbf{D1}(x)\boldsymbol{\eta} + \mathbf{C}_y\mathbf{D1}(y)\boldsymbol{\eta}] \quad (2.11)$$

donde,

$\boldsymbol{\eta}$ : función  $\eta(x, y, t)$  evaluada en el mayado para  $x$  e  $y$ .

$\mathbf{C}_x$ : componente  $x$  del campo vectorial  $\vec{C}(x, y)$  evaluada en el mayado para  $x$  e  $y$ .

$\mathbf{C}_y$ : componente  $y$  del campo vectorial  $\vec{C}(x, y)$  evaluada en el mayado para  $x$  e  $y$ .

$\mathbf{D1}(x)$ : Discretización del operador de primera derivada respecto a  $x$ .

$\mathbf{D1}(y)$ : Discretización del operador de primera derivada respecto a  $y$ .

Con esto, logramos discretizar los operadores diferenciales involucrados en la ecuación (2.1).

## Discretización de las condiciones iniciales

Una vez hecha la discretización de los operadores diferenciales proseguimos a la discretización de las condiciones iniciales para luego hacer la resolución numérica de la evolución temporal de la ecuación (2.1). Aunque podría parecer obvia la discretización de las condiciones iniciales, hay que tomar ciertos factores en cuenta:

- Los tamaños de las matrices de discretización de condiciones iniciales deben de ser conformables con las matrices de discretización de los operadores diferenciales deducidas en las ecuaciones (2.10) y (2.11).



- La condiciones iniciales deben de ser discretizadas considerando las condiciones de frontera existentes para el problema.

**Ejemplo 2.3:** Considerando condiciones de Dirichlet, el mallado espacial hecho en el ejemplo 2.1, y

$$\begin{cases} \eta(x, y, 0) = \cos(\pi x/2) \cos(\pi y/2) \\ \vec{C}(x, y) = -y\hat{x} + x\hat{y} \end{cases}$$

haga la discretización correspondiente en **OCTAVE** para la ecuación (2.11).

Para esto, en la consola de **OCTAVE** ingresamos:

```
>> n = cos(pi*x/2).*cos(pi*y/2); n = n(2:Ny,2:Nx); n = n(:);
>> Cx = -y; Cx = Cx(2:Ny,2:Nx); Cx = Cx(:);
>> Cy = x; Cy = Cy(2:Ny,2:Nx); Cy = Cy(:);
>> D1x = (1/2*h)*spdiags(ones(Nx-1,1)*[-1,0,1],-1:1,Nx-1,Nx-1);
>> D1y = (1/2*h)*spdiags(ones(Ny-1,1)*[-1,0,1],-1:1,Ny-1,Ny-1);
>> Ex = speye(Nx-1);
>> Ey = speye(Ny-1);
>> D1x = kron(D1x,Ey);
>> D1y = kron(Ex,D1y);
>> Grad = n.*(D1x*Cx+D1y*Cy)+Cx.*(D1x*n)+Cy.*(D1y*n);
```

Donde la variable **Grad** contiene la discretización solicitada.

Note que los operadores de primera derivada se necesitan en el espacio producto de las variables  $x$  e  $y$ , por lo que se utiliza la técnica vista en el ejemplo 2.2 para cada operador.

Además, note que para que las condiciones iniciales cumplan la condición de Dirichlet, no se consideran ni las primeras ni las últimas filas y columnas de la matriz que resulta de evaluar las funciones en los mallados hechos para  $x$  e  $y$ ; y, para que sean conformables estas discretizaciones con la de los operadores diferenciales, se pasan a una matriz de  $[(Nx - 1) * (Ny - 1)] \times 1$ , i.e.: un vector columna de  $(Nx - 1) * (Ny - 1)$ .

## Solución numérica

Ya con las discretizaciones antes planteadas, proseguimos a hacer la solución numérica temporal de la ecuación (2.1):

$$\partial_t \eta(x, y, t) = D \nabla^2 \eta(x, y, t) - \nabla \cdot [\eta(x, y, t) \vec{C}(x, y)] + N \eta(x, y, t) [1 - \eta(x, y, t)] [\eta(x, y, t) - \alpha]$$

Ó, considerando las ecuaciones 2.10 y 2.10:

$$\partial_t \boldsymbol{\eta} \approx D \mathbf{L}^2 \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta} [\mathbf{D1}(x) \mathbf{C}_x + \mathbf{D1}(y) \mathbf{C}_y] - [\mathbf{C}_x \mathbf{D1}(x) \boldsymbol{\eta} + \mathbf{C}_y \mathbf{D1}(y) \boldsymbol{\eta}] + N \boldsymbol{\eta} [1 - \boldsymbol{\eta}] [\boldsymbol{\eta} - \alpha]$$

donde las variables en negrita indican las discretizaciones vistas anteriormente.

Para esto, consideraremos el método de Runge-Kutta de orden 4. El cual establece que, para una ecuación diferencial de la forma  $y'(t) = f(t, y)$  con condición inicial  $y(t_0) = y_0$  el algoritmo para realizar la integración numérica en un intervalo  $[0, T]$  es:

$$\begin{aligned} k_1 &= h_t f(t_i, y_i) \\ k_2 &= h_t f(t_i + h_t/2, y_i + k_1/2) \\ k_3 &= h_t f(t_i + h_t/2, y_i + k_2/2) \\ k_4 &= h_t f(t_i + h_t, y_i + k_3) \\ y_{i+1} &= y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \end{aligned}$$

donde:  $0 \leq i \leq N_t$ ,  $i \in \mathbb{Z}_*^+$ ,  $N_t \in \mathbb{Z}^+$ ;  $ht = T/Nt$ ,  $T > 0$ .

Entonces para nuestro caso, si definimos la función:

$$f(\boldsymbol{\eta}) := D\mathbf{L2} \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}[\mathbf{D1}(x)\mathbf{C}_x + \mathbf{D1}(y)\mathbf{C}_y] - [\mathbf{C}_x\mathbf{D1}(x)\boldsymbol{\eta} + \mathbf{C}_y\mathbf{D1}(y)\boldsymbol{\eta}] + N\boldsymbol{\eta}[1 - \boldsymbol{\eta}][\boldsymbol{\eta} - \alpha]$$

el problema se reduce a reolver:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}' = f(\boldsymbol{\eta}) \\ \boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}_0 \end{cases}$$

**Ejemplo 2.4:** Implementar un algoritmo para resolver el problema:

$$\begin{cases} \partial_t \eta(x, y, t) = D\nabla^2 \eta(x, y, t) - \nabla \cdot [\eta(x, y, t)\vec{C}(x, y)] + N\eta(x, y, t)[1 - \eta(x, y, t)][\eta(x, y, t) - \alpha] \\ \eta(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial[0, 1]^2 \\ \eta(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \\ \vec{C}(x, y) = -y\hat{x} + x\hat{y} \end{cases}$$

donde,  $(x, y, t) \in [0, 1]^2 \times [0, 1]$ ;  $D = 0,05$ ,  $N = 16$ ,  $\alpha = 0,3$ .

Para esto, en la consola de OCTAVE implementamos:

```
# Mallado espacial:
>> Lx = 1; Nx = 25; h = Lx/Nx; x = 0:h:Lx;
>> Ly = 1; Ny = 25; h = Ly/Ny; y = 0:h:Ly;
>> [x,y] = meshgrid(x,y);

# Tiempo:
>> T = 1; Nt = 1000; ht = T/Nt;

# Constantes:
>> k = 0.05; Nat = 16; alpha = 0.3;

# Discretización de operadores:
>> D1 = @(N) (1/2*h)*spdiags(ones(N,1)*[-1,0,1],-1:1,N,N);
>> D2 = @(N) (1/h^2)*spdiags(ones(N,1)*[1,-2,1],-1:1,N,N);
>> E = @(N) speye(N);

>> Dx = kron(D1(Nx-1),E(Ny-1)); Dy = kron(E(Nx-1),D1(Ny-1));
>> D2x = kron(D2(Nx-1),E(Ny-1)); D2y = kron(E(Nx-1),D2(Ny-1));
>> L2 = D2x+D2y;

# Condiciones iniciales:
>> n = sin(pi*x).*sin(pi*y); n = n(2:Ny,2:Nx); n = n(:);
>> N = zeros(Ny+1,Nx+1); N(2:Ny,2:Nx) = reshape(n,Ny-1,Nx-1);

# Vector de convección:
>> Cx = -y; Cx = Cx(2:Ny,2:Nx); Cx = Cx(:);
>> Cy = x; Cy = Cy(2:Ny,2:Nx); Cy = Cy(:);

# Función auxiliar para la evolución del tiempo:
f = @(n) k*L2*n-n.*(Dx*Cx+Dy*Cy)-(Cx.*(Dx*n)+Cy.*(Dy*n))+Nat*n.*(1-n).*(n-alpha);

# Solución temporal:
```

```

>> for j = 1:Nt
>>   surf(x,y,N);
>>   axis([0,Lx,0,Ly,-1,1]);
>>   pause(0.01);

>>   k1 = ht*f(n);
>>   k2 = ht*f(n+k1/2);
>>   k3 = ht*f(n+k2/2);
>>   k4 = ht*f(n+k3);
>>   n += (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;

>>   N(2:Ny,2:Nx) = reshape(n,Ny-1,Nx-1);
>> endfor

```

De donde obtenemos como resultado: Figura 2.2.

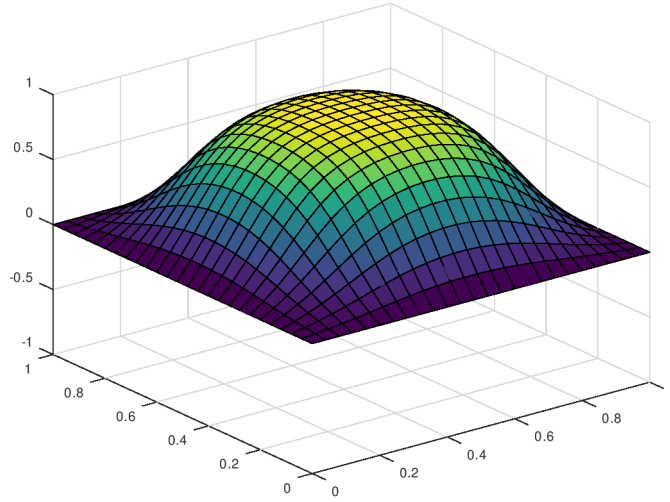


Figura 2.2: Solución del ejemplo 2.4.

## 2.2. Presentación de resultados

En esta sección se presentan los resultados de tres experimentos. Todos posean como estructura global resolver el problema:

$$\begin{cases} \partial_t \eta(x, y, t) = D \nabla^2 \eta(x, y, t) - \nabla \cdot [\eta(x, y, t) \vec{C}(x, y)] + N \eta(x, y, t) [1 - \eta(x, y, t)] [\eta(x, y, t) - \alpha] \\ \eta(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial[0, 1]^2 \\ \eta(x, y, 0) = \eta_0(x, y) \\ \vec{C}(x, y) = C_x(x, y) \hat{x} + C_y(x, y) \hat{y} \end{cases}$$

donde,  $(x, y, t) \in X \times [0, T]$ ,  $X \subset \mathbb{R}^2 \wedge T > 0$ .

Las variaciones en cada experimento se producen en cinco aspectos: la región espacial  $X$ , el intervalo de integración  $[0, T]$ , las constantes  $(D, N, \alpha)$ , la condición inicial  $\eta_0(x, y)$  y el vector de convección  $\vec{C}(x, y)$ . Como método de solución se utilizó la misma estructura de resolución que se usó en el ejemplo 2.4.

### 2.2.1. Experimento 1

Para este experimento se utilizaron las siguientes consideraciones:

Espacio:  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .

Para esto, en OCTAVE:

```
>> L = 1; M = 50; h = L/M; xx = yy = 0:h:L;
>> [x,y] = meshgrid(xx,yy);
```

Tiempo:  $t \in [0, 4]$ .

Para esto, en OCTAVE:

```
>> T = 4; Nt = 2000; ht = T/Nt;
```

Constantes:  $D = 0,05, N = 13, \alpha = 0,5$ .

Para esto, en OCTAVE:

```
>> D = 0.05; N = 13; alpha = 0.5;
```

Condición inicial:  $\eta_0(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \exp\{ -[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \}$  con  $x_0 = 0,9, y_0 = 0,9$ .

Para esto, en OCTAVE:

```
>> x0 = 0.9; y0 = 0.9;
>> n = sin(pi*x).*sin(pi*y).*exp(-(x-x0).^2+(y-y0).^2);
>> n = n(2:M,2:M);
>> n = n(:);
```

Vector de convección:  $\vec{C}(x, y) = C_x(x, y)\hat{x} + C_y(x, y)\hat{y}$ , donde:

$$C_x(x, y) \begin{cases} 1000x & , (x, y) \in [0,5, 1] \times [0,5, 1] \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases} \wedge C_y(x, y) \begin{cases} 1000x & , (x, y) \in [0,5, 1] \times [0,5, 1] \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases}$$

Para esto, en OCTAVE primero creamos las siguientes variables auxiliares<sup>2</sup>:

```
# Primer cuadrante
>> Regr1 = M/2:M-1;
>> Regc1 = 1:M/2;

# Segundo cuadrante
>> Regr2 = M/2:M-1;
>> Regc2 = M/2:M-1;

# Tercer cuadrante
>> Regr3 = 1:M/2;
>> Regc3 = 1:M/2;

# Cuarto cuadrante
>> Regr4 = 1:M/2;
>> Regc4 = M/2:M-1;
```

las cuales nos ayudaran a definir estas funciones seccionadas con mayor facilidad. Luego:

---

<sup>2</sup>Estas variables auxiliares se utilizarán en los siguientes experimentos también.

```

# Funciones auxiliares:
>> fcx1 = @(x,y) 1000*x;
>> fcy1 = @(x,y) 1000*x;

# Vectores de convección:
>> cx = zeros(M-1,M-1);
>> cx(Regr2, Regc2) = fcx1(x,y)(Regr2, Regc2);
>> cx = cx(:);

>> cy = zeros(M-1,M-1);
>> cy(Regr2, Regc2) = fcy1(x,y)(Regr2, Regc2);
>> cy = cy(:);

```

Considerando lo anterior, y prosiguiendo a resolver como en el ejemplo 2.4 obtuvimos:

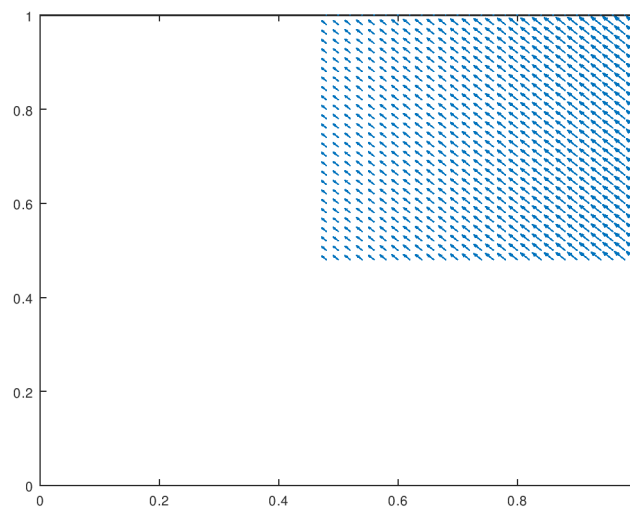


Figura 2.3: Campo de convecciones del experimento 1

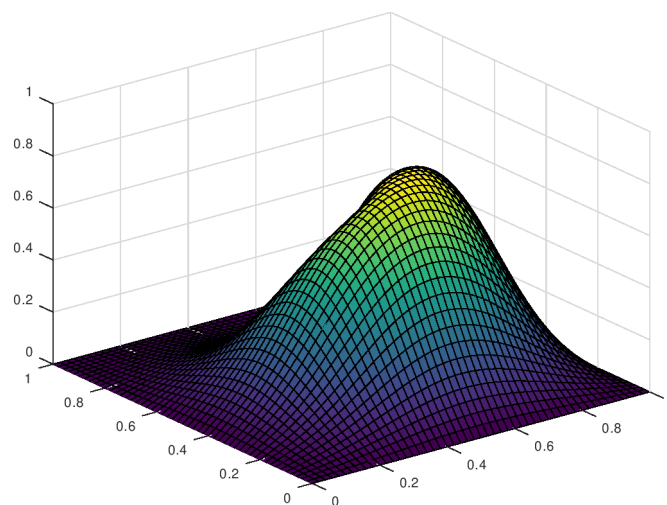


Figura 2.4: Densidad de población del experimento 1

### 2.2.2. Experimento 2

Para este experimento se utilizaron las siguientes consideraciones: Espacio:  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .

Para esto, en OCTAVE:

```
>> L = 1; M = 50; h = L/M; xx = yy = 0:h:L;
>> [x,y] = meshgrid(xx,yy);
```

Tiempo:  $t \in [0, 4]$ .

Para esto, en OCTAVE:

```
>> T = 4; Nt = 2000; ht = T/Nt;
```

Constantes:  $D = 0,05, N = 13, \alpha = 0,5$ .

Para esto, en OCTAVE:

```
>> D = 0.05; N = 13; alpha = 0.5;
```

Condición inicial:  $\eta_0(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \exp\{ -[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \}$  con  $x_0 = 0,9, y_0 = 0,9$ .

Para esto, en OCTAVE:

```
>> x0 = 0.9; y0 = 0.9;
>> n = sin(pi*x).*sin(pi*y).*exp(-((x-x0).^2+(y-y0).^2));
>> n = n(2:M,2:M);
>> n = n(:);
```

Vector de convección:  $\vec{C}(x, y) = C_x(x, y)\hat{x} + C_y(x, y)\hat{y}$ , donde:

$$C_x(x, y) \begin{cases} 2000x & , (x, y) \in [0,5, 1] \times [0,5, 1] \\ -2000x & , (x, y) \in [0, 0,5] \times [0, 0,5] \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases} \wedge C_y(x, y) \begin{cases} 2000x & , (x, y) \in [0,5, 1] \times [0,5, 1] \\ -2000x & , (x, y) \in [0, 0,5] \times [0, 0,5] \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases}$$

Para esto, en OCTAVE :

# Funciones auxiliares:

```
>> fcx1 = @(x,y) 2000*x;
>> fcy1 = @(x,y) 2000*x;
>> fcx2 = @(x,y) -2000*x;
>> fcy2 = @(x,y) -2000*x;
```

# Vectores de convección:

```
>> cx = zeros(M-1,M-1);
>> cx(Regr2, Regc2) = fcx1(x,y)(Regr2, Regc2);
>> cx(Regr3, Regc3) = fcx2(x,y)(Regr3, Regc3);
>> cx = cx(:);
```

```
>> cy = zeros(M-1,M-1);
>> cy(Regr2, Regc2) = fcy1(x,y)(Regr2, Regc2);
>> cy(Regr3, Regc3) = fcy2(x,y)(Regr3, Regc3);
cy = cy(:);
```

Considerando lo anterior, y prosiguiendo a resolver como en el ejemplo 2.4 obtuvimos:

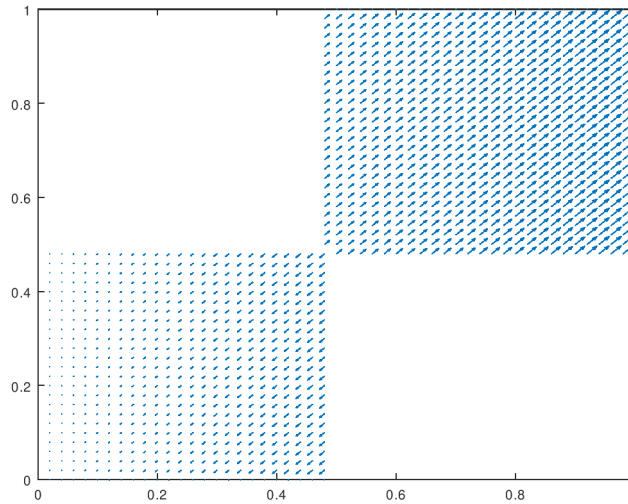


Figura 2.5: Campo de convecciones del experimento 2

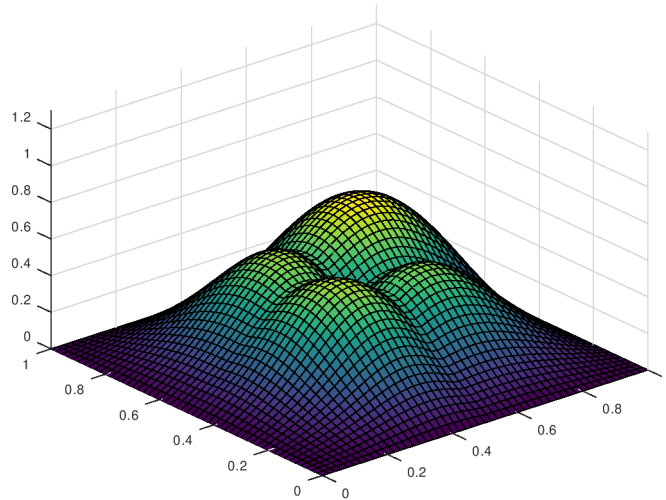


Figura 2.6: Densidad de población del experimento 2

### 2.2.3. Experimento 3

Para este experimento se utilizaron las siguientes consideraciones: Espacio:  $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ .

Para esto, en OCTAVE:

```
>> L = 1; M = 50; h = 2*L/M; xx = yy = -L:h:L;
>> [x,y] = meshgrid(xx,yy);
```

Tiempo:  $t \in [0, 4]$ .

Para esto, en OCTAVE:

```
>> T = 4; Nt = 2000; ht = T/Nt;
```

Constantes:  $D = 0,05, N = 16, \alpha = 0,5$ .

Para esto, en OCTAVE:

```
>> D = 0.05; N = 16; alpha = 0.5;
```

Condición inicial:  $\eta_0(x, y) = \cos(\pi x/2) \cos(\pi y/2)$ .

Para esto, en OCTAVE:

```
>> n = cos(pi/2*x).*cos(pi/2*y);
>> n = n(2:M,2:M);
>> n = n(:);
```

Vector de convección:  $\vec{C}(x, y) = C_x(x, y)\hat{x} + C_y(x, y)\hat{y}$ , donde:

$$C_x(x, y) \begin{cases} 2000y & , (x, y) \in [0, 5, 1] \times [0, 5, 1] \cup [0, 0, 5] \times [0, 0, 5] \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases}$$

$$C_y(x, y) \begin{cases} -2000x & , (x, y) \in [0, 5, 1] \times [0, 5, 1] \cup [0, 0, 5] \times [0, 0, 5] \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases}$$

Para esto, en OCTAVE :

# Funciones auxiliares:

```
>> fcx1 = @(x,y) 2000*y;
>> fcy1 = @(x,y) -2000*x;
>> fcx2 = @(x,y) 2000*y;
>> fcy2 = @(x,y) -2000*x;
```

# Vectores de convección:

```
>> cx = zeros(M-1,M-1);
>> cx(Regr2, Regc2) = fcx1(x,y)(Regr2, Regc2);
>> cx(Regr3, Regc3) = fcx2(x,y)(Regr3, Regc3);
>> cx = cx(:);
```

```
>> cy = zeros(M-1,M-1);
>> cy(Regr2, Regc2) = fcy1(x,y)(Regr2, Regc2);
>> cy(Regr3, Regc3) = fcy2(x,y)(Regr3, Regc3);
>> cy = cy(:);
```

Considerando lo anterior, y prosiguiendo a resolver como en el ejemplo 2.4 obtuvimos:



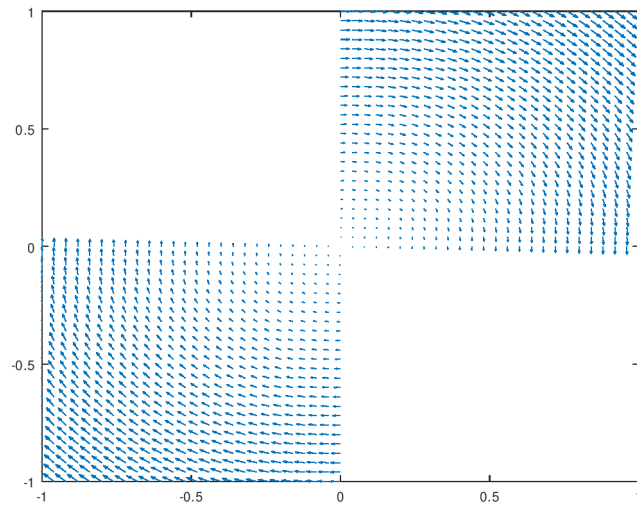


Figura 2.7: Campo de convecciones del experimento 3

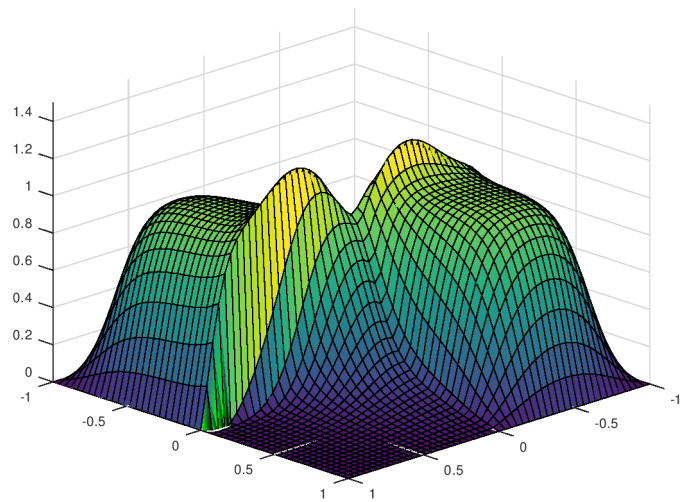


Figura 2.8: Densidad de población del experimento 3

## Capítulo 3

# CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

*“El peor enemigo del conocimiento no es la  
ignorancia, es la ilusión de conocimiento.”*

*-Stephen Hawking*

### 3.1. Conclusiones

Aquí discutiremos observaciones generales e interpretaciones detalladas de lo que representan las visualizaciones de nuestra solución  $\eta(x, y, t)$  en cada uno de los experimentos anteriores. Para ello, es bueno recordar y enfatizar en cuál es nuestro escenario contextual inicial.

Nuestra población  $\eta(x, y, t)$  va a cambiar mediante los siguientes mecanismos:

- Difusión Al preferir establecerse en las regiones de menor sobrepoblación relativa.
- Convección Al tener preferencias a priori en las direcciones/rutas para migrar debido a motivaciones específicas de cierta región (como mayor bienestar, calidad de vida o sencillo entretenimiento). Además aquí se contempla los efectos de pérdida o ganancia de población **durante** el trayecto de micro-migración.
- reproducción y uso de recursos: Determinada por cierta tasa de natalidad y tope de capacidad de carga que tienen los recursos de la región.

Nosotros esperaríamos que el modelo sea suficientemente robusto para predecir efectos como la extinción debido a una sobre abundancia de migración, o la sobrepoblación local debido a una acumulación de intereses (medido por la convección).

Ambos efectos se observan en los experimentos 2 y 1 respectivamente (y una mezcla de ambos en el experimentos 3). Para ser más particulares, en el experimento 1 se lleva a la población hacia un solo punto de interés, y vemos que  $\eta(x, y, t)$  crece sin cota en esa región dada, a pesar que la natalidad no es tanto para que eso ocurra de manera natural.

Por otro lado, en el experimento 2 observamos que, al dividir la población en cuatro cúmulos más pequeños respecto al inicial, logramos disminuir la población local lo suficiente para que no puedan soportarse por sí solas y caigan lentamente hacia el régimen destinado a la extinción. Todo eso a pesar que la natalidad debería ser suficiente para mantener estable a  $\eta(x, y, t)$  en otras condiciones.

### 3.2. Progresos futuros

La presentación y análisis del modelo propuesto en este informe no está cerca de ser exhaustivo hacia las posibilidades de interpretación que pueden existir con esta ecuación. Por ello, enlistamos aquí algunos de los posibles caminos a los cuales es posible proseguir para extender lo discutido aquí.

Como extensiones al trabajo actual, existen las siguientes posibilidades:

- Considerar otras condiciones de frontera, como la de no flujo (condiciones de Neumann) que modelen la cuarentena dentro de nuestra población. O condiciones generales de Robin que modelen la más realista tasa de migración internacional que depende de la actual migración (pues, en práctica, las corrientes de migración y sus motivaciones impactan socialmente lo suficiente para ir motivando a otros a migrar o no migrar con ellos).
- Extender las propiedades de  $\vec{C}(x, y)$  y  $D$  hacia el caso más general en el que dependan del tiempo y de las coordenadas espacial respectivamente. Esto además, como mencionado antes, acoplarlo a otro modelo externo.

- Explorar distintas geometrías a la rectangular. Esto brindará mayor realismo y efectos que solo pueden llegar a realmente apreciarse cerca de irregularidades geométricas.

Un ejemplo de esto viene de una analogía con la biología molecular: El emprisionamiento dinámico. Esto hace referencia a cuando un material, en no equilibrio, progresa al cambio de fase, pero restricciones geométricas causan que ciertas regiones no alcancen nunca el equilibrio y se vean emprisionadas en otras fases termodinámicas a las de mínima energía.

El equivalente para nuestro modelo de población sería el escenario de una región donde  $\eta(x, y, t)$  no alcance el equilibrio que sus parámetros inicialmente le dicten, si no que se vea imposibilitado de alcanzarlo por la geometría que le rodea y el efecto asimétrico de poblaciones periféricas.

- Realizar un análisis de múltiples poblaciones (cada una con parámetros y comportamientos distintos) y la manera en que estas se mezclarán y afectarán las migraciones y crecimientos de la otra.
- Implementar términos que modelen enfermedades locales y epidemias dentro de la población, pues estas igual juegan un rol en determinar las rutas de interés migratorio y mortalidad dentro de la región.

### 3.3. Agradecimientos

Se agradece profundamente a la Universidad Autónoma Nacional de Honduras (UNAH) por brindarnos una oportunidad de estudio superior y a nuestros profesores a lo largo de la carrera. Particularmente a Fredy Vides en esta ocasión, por su cátedra que hizo posible la culminación de este proyecto.

Además, agradecemos las provechosas pláticas que existieron con nuestros compañeros de clase, ya que sin ellas no hubiesemos podido alimentar tan rápidamente nuestra curiosidad y aumentado nuestro conocimiento con tanta fluidez.

## Capítulo 4

# REFERENCIAS

*“Si me propongo demostrar algo, no soy un científico real. Tengo que aprender a seguir a dónde me llevan los hechos, tengo que aprender a azotar mis prejuicios ...”*

*-Lazzaro Spallanzani*

# Bibliografía

- [1] Richard L. Burden and J. Douglas Faires. *Numerical analysis*. Cengage Learning, 9, 2010.
- [2] Michael Ebert, Marcelo R. y Reissig. *Methods for Partial Differential Equations*.
- [3] Benoît Perthame. *Transport equations in biology*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [4] Fredy Vides. *Introducción al Cómputo Científico con Octave/MATLAB*, 2018.