

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
HONDURAS**
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS



“ La ciencia es sólo curiosidad organizada ”
-ERIC LANDER

MM-700

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN

Informe de investigación:
“Teoría de control en series de tiempo con TDA”

Tercer periodo, 2019
Fecha: Lunes 16 de diciembre del 2019

Entregado por:

Luis Felipe Flores Machado

Número de cuenta:

20141030258

Contenido

I PRELIMINARES

1	Resumen	5
2	Introducción.	5
3	Extra, etc.	5

II FUNDAMENTOS

4	Teoría de control sobre variedades	7
4.1	Variedades suaves	7
4.2	Estructura diferenciable.	9
4.3	Curvas y espacio tangente.	10
4.4	Haces y campos vectoriales	13
4.5	Ecuaciones diferenciales sobre variedades	15
4.6	Teoría de control.	16
5	Aplicaciones: Análisis topológico de datos	17
5.1	Complejos simpliciales	17
5.2	Homología	18
5.3	Simulación: Dinámica de un carro en el plano	19

III RESULTADOS

6	Análisis de resultados.	24
6.1	Eficiencia de las funciones de distancia	24
7	Conclusiones y trabajos futuros	28

IV REFERENCIAS Y ANEXOS

8	Fichas Bibliográficas	31
9	Códigos de R	34
9.1	Detalles de hardware y software	34
9.2	Proceso de instalación	34
9.3	Círculo muestreado uniformemente	35
9.4	Esfera muestreada uniformemente	36
9.5	Toro muestreado uniformemente	37
10	Bibliografía	39

I

PRELIMINARES

“El peor enemigo del conocimiento no es la ignorancia, es la ilusión de conocimiento.”

-Stephen Hawking

1 Resumen

2 Introducción

En el capítulo 4 y en 4.1

3 Extra, etc.

II

FUNDAMENTOS

*“Estudia duro lo que más te interese
de la manera más indisciplinada,
irreverente y original posible.”*

-Richard Feynman

4 Teoría de control sobre variedades

El escenario natural teórico del análisis de series de tiempo mediante *análisis topológico de dato* (Topological Data Analysis: TDA) es la *dinámica topológica*. Esto es, la teoría de sistemas dinámicos (preferencialmente discretos) cuya función de evolución congenie adecuadamente con la estructura topológica de su espacio de estados.

En este caso, se elegirán como escenarios fundamentales las **variedades suaves**. Esto por dos principales razones:

- Es la estructura mínima para plantear problemas de control que abarquen situaciones físicas clásica y/o de mucha relevancia actual. Para casos de la dinámica de fenómenos sociales o biológicos que, quizá, tengan una estructura no tan *bien portada* se auxiliará de una estructura probabilística o aceptarán singularidades o discontinuidades sobre las variedades suaves, para lo cual seguirán siendo el objeto fundamental.
- Existen métodos de ajuste de datos¹ que, dado un conjunto de puntos observados, encuentran la variedad topológica que mejor represente (contenga) todos los datos y sus propiedades de conectividad (su topología).

Estos métodos son incluso *otra* herramienta topológica para el análisis de datos y pueden ir de la mano con TDA para obtener información robusta de la conectividad de la información.

Con fin de justificar apropiadamente los procedimientos a utilizar en esta investigación, se enunciará el material teórico suficiente para sustentarlo. Esto incluye tanto el estudio de nuestro escenario fundamental, las **variedades suave**, así como resultados de **sistemas dinámicos discretos**, comenzando con las dinámicas particulares que surgen de las ecuaciones diferenciales.

4.1 Variedades suaves

Proseguimos siguiendo una secuencia muy similar a [1]. Recordamos la definición de una variedad **topológica**:

Definición 1. Sea (M, \mathcal{O}) un espacio topológico Hausdorff y paracompacto. Se dice que (M, \mathcal{O}) es una *variedad (topológica) d -dimensional* si para todo punto $p \in M$ existe un vecindario $U(p)$ y un homeomorfismo $x : U(p) \rightarrow x(U(p)) \subset \mathbb{R}^d$. Además, denotamos $\dim(M) = d$.

Intuitivamente tenemos un espacio topológico que, al verlo suficientemente cerca, simula la topología estandar de \mathbb{R}^d . Se solicita que **exista al menos una** manera de hacer esto (mediante el homeomorfismo x) pero a veces es útil aclarar de *qué* forma particular se está logrando. Esta noción es capturada por un *atlas* de *cartas*.

Definición 2. Sea (M, \mathcal{O}) una variedad d -dimensional. Entonces, el par (U, x) donde $U \in \mathcal{O}$ y $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^d$ es un homeomorfismo, es llamado una carta de la variedad M sobre el punto p .

Es común que, una vez elegida una carta, se le llame a x por el nombre de **función de coordenadas** o sencillamente **coordenadas**, pues los conceptos conocidos como *coordenadas esféricas*, etc. son realmente una elección de carta.

¹Llamados “manifold learning”, para un resumen de sus métodos mire [2].

Además tenemos que las **funciones componentes** de $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^d$ son los mapas

$$\begin{aligned} x^i : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \text{proy}_i(x(p)) \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq d$, donde $\text{proy}_i(x(p))$ es la i -ésima componente de $x(p) \in \mathbb{R}^d$ utilizando la base canónica. Los números $x^i(p)$ se conocen como *coordenadas del punto $p \in M$ respecto a la carta (U, x)* .

Notemos que hasta ahora tenemos una estructura topológica pero no una estructura suave, y mucho menos geométrica. Para estas otras debemos definir la noción de *atlas suave*.

Definición 3. Un *atlas* sobre una variedad M es una colección $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ tal que:

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$$

Definición 4. Un *atlas* Dos cartas (U, x) y (V, y) se dicen ser \mathcal{C}^0 -compatibles si $U \cap V = \emptyset$ o si el mapa:

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$$

Es continuo. Además, a este mapa se le conoce como mapa de transición de cartas.

Notemos que $y \circ x^{-1}$ es un mapa de un subconjunto de \mathbb{R}^d a otro subconjunto de \mathbb{R}^d

$$\begin{array}{ccc} & U \cap V \subset M & \\ x \swarrow & & \searrow y \\ x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^d & \xrightarrow{y \circ x^{-1}} & y(U \cap V) \subset \mathbb{R}^d \end{array}$$

Y por ello tiene sentido hablar también de diferenciabilidad de orden k . La definición anterior se puede generalizar fácilmente substituyendo \mathcal{C}^0 por \mathcal{C}^k y \mathcal{C}^∞ para definir compatibilidad k -diferenciable y suave respectivamente.

Terminamos entonces enunciando la siguiente definición:

Definición 5. Un \mathcal{C}^0 -atlas (y respectivamente un \mathcal{C}^k -atlas o un \mathcal{C}^∞ -atlas) es un atlas donde todas sus cartas son \mathcal{C}^0 -compatibles (resp. \mathcal{C}^k y \mathcal{C}^∞ compatibles). A un \mathcal{C}^∞ -atlas se le llama equivalentemente *atlas suave*.

Resulta que si tenemos la noción de un **atlas maximal**, entonces basta con considerar atlas \mathcal{C}^1 -compatibles y un teorema de Whitney garantiza que siempre existirá un atlas \mathcal{C}^∞ contenido. Esto se enuncia de la siguiente manera

Definición 6. Un \mathcal{C}^k atlas \mathcal{A} se dice ser maximal (para $0 \leq k \leq \infty$) si para todo $(U, x) \in \mathcal{A}$ tenemos que $(V, y) \in \mathcal{A}$ para toda carta \mathcal{C}^k -compatible con (U, x) .

Tener un atlas maximal es útil gracias al siguiente teorema.

Teorema 1. (Hassler Whitney)² Todo \mathcal{C}^k atlas, con $k \geq 1$, contiene un \mathcal{C}^∞ atlas. Además, cualesquiera dos \mathcal{C}^k atlas maximales que contienen al mismo \mathcal{C}^∞ atlas son idénticos

Gracias a este resultado, basta con encontrar un \mathcal{C}^1 atlas maximal para ya tener garantía de que existe al menos un \mathcal{C}^∞ atlas. Esto, de manera teórica, reduce drásticamente las condiciones a verificar cuando se tiene la duda de si un espacio particular es capaz de equiparse con una estructura suave necesaria para proseguir con los resultados que estamos discutiendo.

²Una demostración indirecta de esto se encuentra en [6] mediante el teorema de embebimiento de Whitney

4.2 Estructura diferenciable

Aquí nos interesa *levantar* y formalizar la noción conocida de derivada de una función en el análisis usual hacia el escenario de superior generalidad de funciones sobre una variedad suave. Esto con vista final a definir ecuaciones diferenciales sobre variedades.

Definición 7. Sea $\phi : M \rightarrow N$ un mapa donde $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{A}_M)$ y $(N, \mathcal{O}_N, \mathcal{A}_N)$ son \mathcal{C}^k -variedades con $1 \leq k \leq \infty$. Entonces decimos que ϕ es (\mathcal{C}^k -)diferenciable en un punto $p \in M$ si existen dos cartas $(U, x) \in \mathcal{A}_M$ con $p \in U$ y $(V, y) \in \mathcal{A}_N$ con $\phi(p) \in V$, tales que el mapa $y \circ \phi \circ x^{-1}$ es k -veces continuamente diferenciable en el punto $x(p) \in x(U) \subset \mathbb{R}^{\dim M}$ en el sentido usual del análisis real.

Una manera de ver diagramáticamente esta definición es en pensar en la siguiente figura:

$$\begin{array}{ccc} U \subset M & \xrightarrow{\phi} & V \subset N \\ \downarrow x & & \downarrow y \\ x(U) \subset \mathbb{R}^{\dim M} & \xrightarrow{y \circ \phi \circ x^{-1}} & y(V) \subset \mathbb{R}^{\dim N} \end{array}$$

y notar que, para hablar de diferenciabledad sobre funciones entre variedades, se debe *aterizar* (mediante los mapas de coordenadas) hacia un par de regiones en $\mathbb{R}^{\dim M}$ y $\mathbb{R}^{\dim N}$ para explorar la diferenciabledad allí.

Note que se solicita que esto se cumpla para **un** par de cartas y no para cualquiera y puede parecer la definición depende de la elección de cartas, no obstante, el siguiente teorema demuestra que no es el caso.

Teorema 2. La definición 7 de diferenciabledad está *bien definida*

Demostración. Queremos demostrar que si $y \circ \phi \circ x^{-1}$ es diferenciable en el punto $x(p)$ para **algunas** cartas $(U, x) \in \mathcal{A}_M$ con $p \in U$ y $(V, y) \in \mathcal{A}_N$ con $\phi(p) \in V$, entonces $\tilde{y} \circ \phi \circ \tilde{x}^{-1}$ es diferenciable en el punto $\tilde{x}(p)$ para **cualesquiera** otras cartas $(\tilde{U}, \tilde{x}) \in \mathcal{A}_M$ con $p \in \tilde{U}$ y $(\tilde{V}, \tilde{y}) \in \mathcal{A}_N$ con $\phi(p) \in \tilde{V}$.

En otras palabras, que el siguiente diagrama tenga solución:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{x}(U \cap \tilde{U}) \subset \mathbb{R}^{\dim M} & \xrightarrow{\tilde{y} \circ \phi \circ \tilde{x}^{-1}} & \tilde{y}(V \cap \tilde{V}) \subset \mathbb{R}^{\dim N} \\ \uparrow \tilde{x} & & \uparrow \tilde{y} \\ U \cap \tilde{U} \subset M & \xrightarrow{\phi} & V \cap \tilde{V} \subset N \\ \downarrow x & & \downarrow y \\ x(U \cap \tilde{U}) \subset \mathbb{R}^{\dim M} & \xrightarrow{y \circ \phi \circ x^{-1}} & y(V \cap \tilde{V}) \subset \mathbb{R}^{\dim N} \end{array}$$

$\tilde{x} \circ x^{-1}$ (curved arrow from $x(U \cap \tilde{U})$ to $\tilde{x}(U \cap \tilde{U})$) $\tilde{y} \circ y^{-1}$ (curved arrow from $y(V \cap \tilde{V})$ to $\tilde{y}(V \cap \tilde{V})$)

Considere el mapa $\tilde{x} \circ x^{-1}$ en el diagrama anterior. Como las cartas (U, x) y (\tilde{U}, \tilde{x}) pertenecen al mismo \mathcal{C}^k -átlas \mathcal{A}_M , por definición, el mapa de transición de cartas $\tilde{x} \circ x^{-1}$ es \mathcal{C}^k -diferenciable como mapa entre subconjuntos de $\mathbb{R}^{\dim M}$, y similarmente para el mapa $\tilde{y} \circ y^{-1}$. Ahora notemos que podemos escribir:

$$\tilde{y} \circ \phi \circ \tilde{x}^{-1} = (\tilde{y} \circ y^{-1}) \circ (y \circ \phi \circ x^{-1}) \circ (\tilde{x} \circ x^{-1})^{-1}$$

y como la composición de mapas \mathcal{C}^k es de nuevo un mapa \mathcal{C}^k (por resultado conocido del análisis real), obtenemos precisamente lo que queríamos demostrar. \square

Pensando de forma diagramática de nuevo, la anterior definición se ve estar bien definida al pensar intuitivamente que, estando dentro de la variedad (el *objeto* real) podemos tener múltiples maneras de llevar su estructura local hacia una representación en una parte de \mathbb{R}^d para algún d , pero cualesquiera dos representaciones tendrán intersección no vacía. De esta manera, con mapas como $\tilde{x} \circ x^{-1}$, obtenemos una vía de *transferir* estructura mientras dichas funciones sean *suficientemente bien portadas*. Eso está garantizado por la hipótesis de un \mathcal{C}^k -atlas.

Mencionamos ahora dos tipos importantes de funciones diferenciables.

Definición 8. Sea $\phi : M \rightarrow N$ una función biyectiva entre variedades suaves. Si ϕ y ϕ^{-1} son ambas funciones suaves (es decir, \mathcal{C}^∞ -diferenciable), entonces ϕ se dice ser un **difeomorfismo**.

Definición 9. Dos variedades $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{A}_M)$ y $(N, \mathcal{O}_N, \mathcal{A}_N)$ se dicen ser **difeomorfos** si existe un difeomorfismo $\phi : M \rightarrow N$ entre ellas. Denotamos este hecho por $M \cong_{\text{dif}} N$.

Los difeomorfismos, en particular los automorfismos (difeomorfismos de la forma $\phi : M \rightarrow M$), son de interés en estudiar sistemas dinámicos discretos cuya función de evolución se supone preservar la estructura suave de la variedad subyacente.

Esta idea se explorará más a fondo en secciones posteriores, pero se adelante intuitiva de que un difeomorfismo *reordena los puntos* de la variedad M sin perder la conectividad (topología) entre sus puntos y la transición suave entre cartas de nuestro \mathcal{C}^∞ -atlas.

4.3 Curvas y espacio tangente

El segundo tipo de mapa importante viene dado sobre la familia de funciones de la forma $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Note que actualmente podemos determinar cuándo una función entre variedades *es diferenciable* pero no se ha discutido sobre el valor propio de la derivada en un punto, y mucho menos sobre una *función derivada*.

Esto es porque, aunque la *habilidad de derivar* se transfiere entre mapas de transición de cartas, el valor mismo de la derivada **sí cambia** acorde a la elección de carta. Esto, no obstante, es totalmente esperado, pues del análisis usual se conoce que derivar en coordenadas polares o cartesianas dará resultados distintos pues los valores numéricos finales son acorde a tasas de cambio en las coordenadas respectivas.

Sin embargo, para obtener una noción de diferenciabilidad que sí sea independiente de la elección de carta ocupamos recordar la interpretación de la derivada como una recta tangente. En el análisis multivariado sobre \mathbb{R}^d se habla de **derivada direccional** para extender la interpretación de que la derivada es una recta tangente, esta vez tangente a la función en una dirección específica.

Podemos notar que, a pesar de que la derivada direccional igual dependerá de las coordenadas en su valor final, las direcciones en sí no dependen. Es decir, basta con tener un sistema de coordenadas linealmente independiente para obtener direcciones linealmente independientes en una vecindad del punto de derivación.

esta idea será central en definir la noción de **espacio tangente** a una variedad, y para ello proseguimos con la definición de funciones de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$.

Definición 10. Sea M una variedad. Definimos el espacio vectorial infinito-dimensional sobre el cuerpo \mathbb{R} , con conjunto subyacente

$$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es suave}\}$$

y operaciones punto a punto, es decir, para cualquier $p \in M$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$,

$$\begin{aligned}(f + g)(p) &:= f(p) + g(p) \\ (\lambda f)(p) &:= \lambda f(p)\end{aligned}$$

Es fácil verificar que en realidad esto es un espacio vectorial. Notemos también que podemos definir análogamente a $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ donde $U \in \mathcal{O}_M$ es un conjunto abierto de M .

La definición venidera de ecuación diferencial requerirá dos conceptos importantes del cálculo usual con los cuales es fácil abstraer una geometrización del procedimiento de resolverlas, y equivalentemente, de obtener su dinámica.

Estos conceptos son **curva** y **campo vectorial**, pues resolver EDOs no es más que encontrar curvas tangentes a cada punto de un campo vectorial en un dominio adecuado. Proseguimos a discutir la noción de curva sobre una variedad.

Definición 11. Una **curva suave** sobre M es un mapa suave $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$, donde $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{std}, \mathbb{R}})$ es pensado como una variedad 1-dimensional³

Esta definición aplica igualmente para curvas definidas localmente, es decir, sobre un dominio de un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ donde a I se le otorga la topología, $\mathcal{O}_{\text{std}, \mathbb{R}}|_I$, se subconjunto. Es claro que también es una variedad.

Como comentado anteriormente, la derivada direccional es un objeto independiente de coordenadas hasta el momento en que se debe aplicar a una función que tiene representación en *algún* sistema coordenado particular.

No obstante, en caso de las funciones $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ no ocupamos tener una representación sobre alguna carta (más que para verificar su diferenciabilidad) y por ello, definir la derivada direccional sobre estas funciones nos otorga la noción correcta de derivada independiente de coordenadas.

Definición 12. Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva suave que pasa por el punto $p \in M$ para cierto valor $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ (es decir, $\gamma(\lambda_0) = p$). Definimos la derivada direccional sobre p y a lo largo de γ como el mapa lineal

$$\begin{aligned}X_{\gamma, p} : \mathcal{C}^\infty(M) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \\ f &\mapsto (f \circ \gamma)'(\lambda_0)\end{aligned}$$

Note que $(f \circ \gamma) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de una variable y se puede calcular $(f \circ \gamma)'(\lambda_0)$ sin problemas en el sentido usual del cálculo.

Los objetos $X_{\gamma, p}$ son llamados comúnmente **vector tangente** o **velocidad** sobre el punto p y curva γ . Esto es porque tiene todas las propiedades algebraicas que esperaríamos de una velocidad, tal como, al encontrar $X_{\delta, p}$ para una curva $\delta(t) = \gamma(2t)$ obtendremos que $X_{\delta, p} = 2X_{\gamma, p}$.

Estas interpretaciones serán mucho más útiles en el contexto de la dinámica y ecuaciones diferenciales. Proseguimos entonces a definir el **espacio tangente a una variedad** para tener completa nuestra discusión de curvas suaves.

Definición 13. Sea M una variedad y $p \in M$. El espacio tangente de M en el punto p es un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{R} , con conjunto subyacente

$$T_p M := \{X_{\gamma, p} \mid \gamma \text{ es una curva suave sobre } p\}$$

y operaciones de adición y producto escalar definidas punto a punto acorde a cómo se discute en [1], donde se demuestra que realmente el resultado de dichas operaciones tiene una curva subyacente a la cual es tangente de nuevo.

³Aquí $\mathcal{O}_{\text{std}, \mathbb{R}^d}$ se refiere a la topología estandar sobre \mathbb{R}^d , inducida por la norma euclidea.

Como $T_p M$ es un espacio vectorial para cada $p \in M$, una pregunta inmediata y natural es la de su dimensión (como espacio vectorial, que en general podría diferir de la dimensión $\dim(M)$ definida en términos topológicos independientemente).

Resulta que se puede demostrar que, en efecto, $\dim(M) = \dim(T_p M)$ al encontrar una base que tiene tantos vectores como la dimensión de \mathbb{R}^d que modela localmente a M . Esto es intuitivo ya que esperamos que, similar a cómo las estructuras topológicas y diferenciales de \mathbb{R}^d han sido heredadas a M localmente, podamos tener cierta injerencia de la estructura de espacio vectorial, de nuevo, al menos localmente.

Para ello, consideremos la siguiente manipulación de la expresión de $X \in T_p M$ con auxilio de alguna carta $(U, x) \in \mathcal{A}$ que contenga a p .⁴

$$\begin{aligned}
X(f) &= (f \circ \gamma)'(\lambda_0) && \text{Definición de } X(f) \\
&= (f \circ \text{id}_M \circ \gamma)'(\lambda_0) && \text{Insertando mapa identidad en } M, \text{id}_M \\
&= (f \circ (x^{-1} \circ x) \circ \gamma)'(\lambda_0) && \text{Substituyendo equivalente expresión para } \text{id}_M \\
&= \underbrace{((f \circ x^{-1}) \circ (x \circ \gamma))}'(\lambda_0) && \text{Asociando para notar forma de funciones} \\
&\quad \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \\
&= [(x^i \circ \gamma)'(\lambda_0)] [\partial_i (f \circ x^{-1})(x(\gamma(\lambda_0)))] && \text{Usando regla de la cadena multivariada} \\
&= X(x^i) [\partial_i (f \circ x^{-1})(x(p))] && \text{Notando la presencia de } X(x^i) \text{ y } x(p) \\
&=: X(x^i) \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_p && \text{Definiendo el **símbolo** para } \partial_i (f \circ x^{-1})(x(p))
\end{aligned}$$

donde en la quinta igualdad existe una sumatoria implícita en $i = 1, \dots, n$ acorde a convención de sumatorias de Einstein. En resumen, vemos que, para una función arbitraria $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tenemos que:

$$X(f) = X(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p (f).$$

Observe que el primer término de la derecha es un número (ya que es $X : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ ya evaluado), mientras que el segundo es un símbolo definido para representar:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p (\cdot) := \partial_i (\cdot \circ x^{-1})(x(p))$$

que es una función que toma como argumento una función en $\mathcal{C}^\infty(M)$ y retorna un número. Es decir, pertenece a $T_p M$.

Al ser f arbitraria, podemos escribir compactamente nuestro resultado de la siguiente manera

$$X = X(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

Y, al ser $X \in T_p M$ arbitrario, se llega a la conclusión que cualquier elemento de $T_p M$ puede ser escrito como suma estos objetos.

⁴A partir de ahora se representará a $X_{\gamma,p}$ como simplemente X , omitiendo la curva γ y el punto p , ya que siempre está claro que existen.

Cabe recalcar que el símbolo de derivada parcial es utilizado debido a que, si se considera el caso en que $M = \mathbb{R}^d$ con su topología usual y atlas $\mathcal{A} = \text{id}_{\mathbb{R}^d}$, recobramos la definición usual de derivación parcial en dirección de la i -ésima componente.

Esto muestra que, en efecto, los vectores en $T_p M$ son generalizaciones del concepto de derivada direccional, y el espacio entero es un espacio vectorial que, intuitivamente, se puede pensar como *todas las posibles direcciones* en que se puede medir la variación de una función de variable real sobre el espacio.

4.4 Haces y campos vectoriales

En esta sección se definirá la noción de **campo vectorial** sobre una variedad como funciones que asignan a cada punto de $p \in M$ de una variedad, un vector tangente X en $T_p M$. Esto, no obstante, se desea hacer de una forma *suave*, para poder garantizar la existencia y unicidad de la solución. Es decir, la condición de ser lipschitz continua se está garantizando desde la estructura misma de la variedad en que trabajaremos.

Esta variedad de interés es el llamado **haz fibrado tangente** de M . Para ello, desarrollaremos primero las definiciones básicas necesarias de teoría de haces.

Definición 14. Un **haz**⁵ (de variedades topológicas⁶) es una terna (E, π, M) donde E y M son variedades topológicas llamadas respectivamente *espacio total* y *espacio base*, y sea $\pi : E \rightarrow M$ es un mapa continuo y sobreyectivo llamado *mapa de proyección*.

Es común denotar al haz (E, π, M) como $E \xrightarrow{\pi} M$. Un ejemplo clásico de haz puede ser la *banda de Möbius* o un cilindro, aunque el cilindro es un ejemplo de lo que llamamos **variedad producto** que sencillamente es una variedad que resulta de un producto cartesiano de espacios topológicos equipados con la topología producto. Toda variedad producto es un haz, pero claramente hay haces que no son variedades producto.

No obstante, particularizamos a un tipo de haz llamado **haz fibrado**. Para ello, definimos lo siguiente

Definición 15. Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un haz y $p \in M$. Entonces, $F_p := \text{preim}_{\pi}(\{p\})$ es llamada **fibra** en el punto p .

Intuitivamente, la fibra en el punto p contiene literalmente una fibra delgada (como un *hilo* de puntos) del espacio total E tal que el mapa de proyección π manda hacia el *mismo punto base* en M .

Definición 16. Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un haz y F una variedad. Entonces, a $E \xrightarrow{\pi} M$ se le llama **haz fibrado**, con fibra típica F , si:

$$\forall p \in M : \text{preim}_{\pi}(\{p\}) \cong_{\text{top}} F$$

En general, la definición de fibra permite que cada fibra tenga estructura distinta, no obstante, dicha generalidad no nos interesa para definir campos vectoriales suaves, cuya definición resulta naturalmente de la siguiente:

Definición 17. Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un haz. Un mapa $\sigma : M \rightarrow E$ es llamado una **sección (transversal)** del haz si $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$.

⁵En inglés se le llaman **bundles**, y aun se puede ver en pláticas y textos en español una leve discusión por determinar el nombre estandar.

⁶Pues puede ser un haz conformado de otros objetos, en particular para nuestro mayor interés, variedades suaves.

Pensando en el ejemplo del cilindro, una sección transversal tomaría tal cual el significado usual de la palabra: Sería cualquier corte transversal del cilindro, independiente del ángulo de corte. Es fácil ver que, considerando cualquiera de esos cortes, el mapa de proyección lo mapea de vuelta a todo M .

Las secciones de un haz son por si mismas suficientemente importantes en el estudio de los haces que existe un símbolo estándar para describirlas. Este es:

$$\Gamma(M, E) := \{\sigma : M \rightarrow E \mid \sigma \text{ es suave y } \pi \circ \sigma = \text{id}_M\}$$

y a veces denotado $\Gamma(E)$ cuando el espacio base está claro en el contexto o no es importante. Proseguimos ahora a definir la clase de haces principales para nuestra aplicación.

Definición 18. Sea M una variedad suave, definimos su **haz fibrado tangente** (o a veces solamente **haz tangente**) como el haz con espacio total⁷

$$TM := \bigcup_{p \in M} (T_p M \times \{p\}) \cong_{\text{dif}} \bigcup_{p \in M} T_p M$$

donde la unión tomada es una unión disjunta, junto al mapa de proyección canónico,

$$\begin{aligned} \pi : TM &\rightarrow M \\ X &\mapsto p \end{aligned}$$

donde p es el $p \in M$ único al cual X es tangente.

Estamos listos para definir la noción de *campo vectorial* a continuación,

Definición 19. Sea M una variedad y $TM \xrightarrow{\pi} M$ su haz tangente. Un **campo vectorial** sobre M es una sección suave de TM . Es decir, un mapa suave $\sigma : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$.

Con la notación anterior, el conjunto de todos los campos vectoriales se denota por $\Gamma(TM)$. Es bueno notar que otra manera equivalente de definir los campos vectoriales es como **derivaciones**⁸ sobre el álgebra de funciones en $\mathcal{C}^\infty(M)$, es decir, mapas \mathbb{R} -lineales,

$$\sigma : \mathcal{C}^\infty(M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\infty(M)$$

tal que se satisface la *regla de Leibniz* respecto al producto de funciones en $\mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\sigma(fg) = f\sigma(g) + g\sigma(f)$$

Esta definición puede ser más útil en algunos casos.

⁷La estructura de variedad suave de TM se demuestra en detalle en [1].

⁸Las derivaciones son una clase extensa de mapas lineales sobre álgebras, de las cuales la **derivada** es sólo un ejemplo de ello.

4.5 Ecuaciones diferenciales sobre variedades

Comenzamos la discusión de las ecuaciones diferenciales y su dinámica al establecer la definición de una EDOV (ecuación diferencial sobre variedad).

Definición 20. Sea $TM \xrightarrow{\pi} M$ un haz tangente y $q : \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva suave sobre M . Además, sea $V \in \Gamma(TM)$. Llamamos **ecuación diferencial ordinaria** (sobre variedad suave) a una familia de igualdades verificables entre vectores tangentes en TM de la forma

$$V(q(t)) = \dot{q}(t) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{q} : I &\rightarrow TM \\ t &\mapsto X_{q,q(t)} \end{aligned}$$

es la función cuya imagen es el vector tangente a cada punto trazado por q a través del parámetro $t \in I$.

Observe que, si se piensa también en $V(q)$ como una función de I en TM , entonces obtenemos una versión más compacta de la igualdad:

$$V(q) = \dot{q}$$

donde se ha abusado levemente en la notación al considerar $V(q) \equiv V|_I(q)$. Es claro que esta familia de igualdades se tienen que verificar eligiendo primero un dominio I de la curva a verificar y debe suceder que la igualdad sea válida para todo $t \in I$. No obstante, es una forma que no es intuitiva, práctica ni útil de pensar siempre.

Por ello, similar al caso de ecuaciones diferenciales en el sentido usual, nos enfocaremos en encontrar una curva solución que cruce geoméricamente por cierto punto, y le llamaremos *valor inicial*. Esto permite que el problema también sea más inmediatamente aplicado y resuelto.

Definición 21. Un **problema de valor inicial** (PVI) es una ecuación diferencial junto a un valor determinado inicial $q_0 \in M$. Es decir:

$$\begin{aligned} V(q(t)) &= \dot{q}(t) \\ q(0) &= q_0 \end{aligned}$$

cuya solución denotaremos $q_{q_0}(t)$ para tener explícito el punto inicial.

Una función natural a desear es la que conocemos como **mapa de Poincaré**

$$\begin{aligned} q : M \times \mathbb{R} &\rightarrow M \\ (q_0, t) &\mapsto q_{q_0}(t) \end{aligned}$$

que nos mapea cada par (q_0, t) al **estado** (o punto en M , el **espacio de configuraciones**), $q_{q_0}(t) \in M$, t unidades de tiempo después de haber partido del inicio q_0 .

Esto nos da una noción de **flujo** sobre el espacio de configuraciones. Es una noción meramente *dinámica* que, dado un inicio $q_0 \in M$, provee un orden determinista en que ocurrirá una secuencia de puntos futuros $q_{q_0}(t) \in M$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Nos gustaría pensar más dentro de las líneas inspiradas por el párrafo anterior, particularmente: encontrar dinámicas inducidas por nuestro campo vectorial $V \in \Gamma(TM)$ (información geométrica) que estén resumidas en formas de operadores que transformen puntos en M en otros puntos de M .

Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 22. Llamamos flujo al tiempo t sobre M al mapa

$$\begin{aligned} P^t : M &\rightarrow M \\ q_0 &\mapsto q_{q_0}(t) \end{aligned}$$

Parece ser sólo un leve cambio de la definición de mapa de Poincaré, no obstante este sutil cambio permite hablar sobre propiedades algebraicas de la composición de estos flujos.

Por ejemplo:

- $P^t \circ P^s = P^{t+s} = P^s \circ P^t$
- $P^0 = \text{id}_M$
- $P^t \circ P^{-t} = \text{id}_M = P^0$

Estas propiedades son fácilmente verificables mediante cálculo directo y la propiedad de unicidad de curvas solución discutidas en [4]. No obstante, es más importante la discusión intuitiva de su significado.

La primera de ellas nos muestra que la operación de *composición de funciones* dotadas al espacio de flujos es conmutativa y, particularmente, el resultado de componer ambos mapas, no trivialmente, es otro flujo. Esto es por que fluir t unidades y luego s da el mismo resultado que considerar una cantidad de tiempo $s + t$ y fluir con ella.

La segunda de ellas habla sobre un elemento identidad, que corresponde precisamente a fluir una cantidad 0 de tiempo, como intuitivamente debería ser.

La última es no trivial en general, pues fluir para tiempos pasados podría no ser posible en muchos sistemas de la realidad. No obstante, para fenómenos que están descritos por ecuaciones diferenciales bajo las condiciones aquí asumidas, sí es el caso.

Estas propiedades, en conjunto, hacen al espacio de flujos un **grupo algebraico**. Esto es importante, pues entonces se puede plantear la definición de un sistema dinámico independiente de las ecuaciones diferenciales o todo el formalismo de campos vectoriales aquí mostrado.

Hemos de notar que, en caso que la tercera condición no se cumpla, y el espacio sea realmente sólo un **monoide**, se estará correspondiendo a sistemas no reversibles. Estos son comunes (por ejemplo, en termodinámica no cuasi-estática, en geles y vidrios, etc.), pero mayoría de teoría detrás aquí escrita sirve sin correcciones significativas para dicho caso.

4.6 Teoría de control

Para controlar la dinámica de un sistema (sus flujos) se debe pensar en una dependencia de la ecuación diferencial correspondiente de un parámetro $u \in U$, donde U , el espacio de control, es en general un conjunto arbitrario⁹. Es decir, planteamos el llamado **sistema de control**:

$$\dot{q} = V_u(q)$$

Esto, en términos de flujos, nos permite tener un valor de parámetro $u_1 \in U$ *ejerciendo* durante un tiempo t_1 y luego otro valor $u_2 \in U$ en un tiempo t_2 . Es decir, el conjunto de estados que se explorará es:

$$\{P_{u_2}^{t_2} \circ P_{u_1}^{t_1}(q_0) \mid t_1, t_2 \geq 0\}$$

⁹aunque frecuentemente es útil que sea una variedad en sí misma.

Se puede generalizar un poco al caso donde, aunque sólo hayan dos controles $u_1, u_2 \in U$, puedan haber varios tiempos $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}^+}$ en los cuales se va cambiando de un control hacia el otro.

Es claro que en dicho caso, la posible dinámica resultante dependerá de las propiedades de conmutatividad de los flujos, pues si conmutan completamente, no importa cuántos tiempos se añadan, se caerá al mismo caso inicial.

La dinámica que se tratará en este documento es una del cso no conmutativo, y por ende, la estrategia de selección para los tiempos $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}^+}$ es crucial para determinar el conjunto de puntos alcanzables a partir de una condición inicial.

Esto inspira la siguiente definición.

Definición 23. El **conjunto alcanzable** de un sistema de control (con controles **constantes por partes**) desde un punto $q_0 \in M$ por un tiempo $t \geq 0$ se define como:

$$\mathcal{A}_{q_0}(t) := \left\{ P_{u_k}^{\tau_k} \circ \dots \circ P_{u_1}^{\tau_1}(q_0) \mid \tau_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \tau_i = t, u_i \in U, k \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

y, para tiempos arbitrarios:

$$\mathcal{A}_{q_0} := \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{A}_{q_0}(t)$$

La meta práctica es encontrar, para un lapso de tiempo fijo t , encontrar un conjunto de controles U y una distribución de tiempos $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}^+}$ tal que el conjunto alcanzable a ese tiempo sea el más grande posible, o el correspondiente a cierto interés particular a la aplicación.

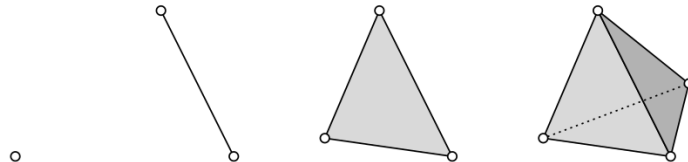
Otro posible escenario alternativo es uno en que nuestros controles posibles, U , ya están determinados acorde a ciertas restricciones físicas, y esto puede ya sea, determinar el conjunto maximal del cual podemos extraer controles (por ejemplo, restringir a que U sea alguna variedad) o restringir por completo a que U sea un espacio específico, como ser el caso del carro en un plano a considerar más adelante.

5 Aplicaciones: Análisis topológico de datos

5.1 Complejos simpliciales

Como objeto fundamental en el cálculo de propiedades topológicas del espacio de fase de nuestros datos se utilizarán los **simplejos** y **complejos simpliciales**.

Su definición formal se dará a continuación, pero primero es importante discutir su significado geométrico. Observe la siguiente figura.



En orden, se tienen ilustrados simplejos de 0, 1, 2, y 3 dimensiones. Esto corresponde, intuitivamente, a una colección de vértices, conocido como su **conjunto de vértices**, y todas las combinaciones afines que generan dichos vértices pensados como vectores en \mathbb{R}^n .

Es posible siempre triangulizar una variedad diferenciable de forma que sea homeomorfa a un complejo simplicial como los anteriores. Eso permite estudiar las propiedades topológicas de un espacio sólo en base de propiedades de los simplejos que, como veremos, tienen una natural estructura más algebraica que facilita el cómputo y cuantificación de dichos invariantes topológicos.

Ahora, su definición formal.

Definición 24. Un **complejo simplicial abstracto (finito)** es una colección \mathcal{S} de conjuntos no vacíos y finitos tales que, si $A \in \mathcal{S}$ y $B \subset A$, entonces $B \in \mathcal{S}$

Definimos además la **orientación** de un **simplejo** $A = \{v_0, \dots, v_{n-1}\} \in \mathcal{S}$ como las clases de equivalencia sobre el espacio de permutaciones de A diciendo que dos permutaciones son equivalentes según paridad.

5.2 Homología

Con propósito a cuantificar propiedades algebraicas de ciclos (que corresponderán a agujeros topológicos) se provee la noción de una p-cadena.

Definición 25. Una **p-cadena** sobre un complejo simplicial K correspondiente a $\sigma \in K$ es una función, $c : C_p(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que:

- $c(\sigma) = 1$
- $c(\sigma')$ si σ y σ' son orientaciones opuestas del mismo simplejo
- $c(\tau) = 0$ para todo otro simplejo $\tau \neq \sigma$.

A partir de ahora se utilizará un leve abuso de notación denotando a la p-cadena del simplejo σ con el mismo símbolo σ . Es decir, $c(\sigma) = \sigma$. Esto, pues el procedimiento de definir una p-cadena es sólo para heredar una estructura algebraica de \mathbb{Z} de manera local.

Esto sirve para definir la siguiente función, que resulta ser un homomorfismo, tal cual demostrado en [5].

Definición 26. Se define el homomorfismo,

$$\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$$

cuyas imágenes son de la forma:

$$\partial_p \sigma = \partial_p[v_0, \dots, v_p] = \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p]$$

donde \hat{v}_i significa que la entrada i -ésima debe ser retirada.

Intuitivamente este operador, conocido como **operador de frontera**, cuantifica la presencia de cada **cara** del simplejo (subconjunto de un simplejo) en base a su orientación.

Esto, como se verá en la siguiente definición, provee una descripción de ciclos y agujeros de un complejo simplicial.

Definición 27. Sea $Z_p(K)$ el kernel de ∂_p y $B_p(K)$ la imagen de ∂_{p+1} . Entonces,

$$H_p(K) := Z_p(K) / B_p(K)$$

se conoce como el **grupo de homología de orden p**.

El grupo $Z_p(K)$ es usualmente llamado **grupo de ciclos**, pues sus elementos encuentran los p -ciclos que existen en el complejo simplicial.

Similarmente, el grupo $B_p(K)$ es comúnmente llamado grupo de fronteras, pues sus elementos serán combinaciones lineales de los elementos de la frontera de los simplejos p -dimensionales. Además, al igualar dichas combinaciones lineales a cero, obtenemos relaciones que nos identifican los bores de cada simplejo, causando que la definición de grupo de homología verdaderamente capture los agujeros de dimensión p .

5.3 Simulación: Dinámica de un carro en el plano

Consideremos la dinámica de un vehículo orientado con ángulo θ respecto a la horizontal y velocidad lineal u_1 :

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = u_1 \cos(\theta) \\ \dot{x}^2 = u_1 \sin(\theta) \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

y su rotación con velocidad angular u_2 ,

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = 0 \\ \dot{x}^2 = 0 \\ \dot{\theta} = u_2. \end{cases}$$

El parámetro de control es $u = (u_1, u_2)$ los cuales podemos permitir tomar valores en algún subconjunto $U \subset \mathbb{R}^2$. Es decir, nuestra ecuación diferencial de control es:

$$\dot{q} = V_u(q) = u_1 V_1(q) + u_2 V_2(q), \quad q \in M$$

donde:

$$V_1(q) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \{q = (x, \theta) \mid x \in \mathbb{R}^2, \theta \in S^1\}$$

Como se ve claro, el espacio de fase a explorar es M , el interior de un toro sólido (es decir, sin su frontera). Es to se ve intuitivo si consideramos cada sección transversal, S_θ para un $\theta \in S^1$ fijo, como una bola abierta, que sabemos del análisis usual, es homeomorfo (y en contexto de variedades, difeomorfo incluso) a \mathbb{R}^2 , que es el espacio generado por las coordenadas libres x, y .

Entonces, un estado se puede pensar como una posición sobre el disco transversal S_θ que, a medida el carro toma una trayectoria dictada por sus velocidades lineales y angulares $u_1, u_2 \in U$, va rotando hacia otros discos, cruzándolos cada uno en puntos distintos (x_θ, y_θ) y formando así una trayectoria que explota el interior del toro $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2 \times S^1$.

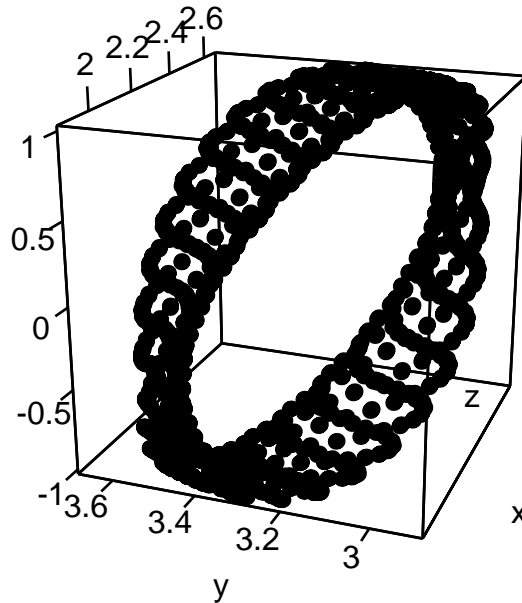
Como platicado en la sección en teoría de control, el conjunto de parámetros de control, U , puede ser arbitrario, aunque usualmente considerado una variedad con propiedades topológicas deseadas. No obstante, el caso para el cual se anunció el concepto de *conjunto alcanzable* fue para cuando se tiene un número contable $u_i \in U$ de parámetros de control con cada u_i siendo constante por tramos.

El resultado más importante se dará para este caso de controles constantes por tramos, no obstante, se exploran otros tipos de controles. Por ejemplo,

```

initial <- c(2, 3, 0)
prueba_1 <- carrito(2000, 100, initial)
plot3d(prueba_1, xlab = "x", ylab = "y", zlab = "z", size=6)
if (!rgl.useNULL())
  play3d(spin3d(axis = c(0, 0, 1), rpm = 20), duration = 0.6)

```



donde la función `carrito(n,t,r0)` está definida en los anexos, y tiene como entradas (en orden) el número n de puntos a generar, la longitud t del intervalo en el cual simular la dinámica, y el punto inicial r_0 del cual partir la simulación. Esta simulación fue hecha mediante las ecuaciones anteriormente presentadas y con método de diferencias finitas sencillo.

Los parámetros de control utilizados en esta simulación fueron

$$u_1(x) = 10 \sin(x)^2$$

$$u_2(x) = 1900.$$

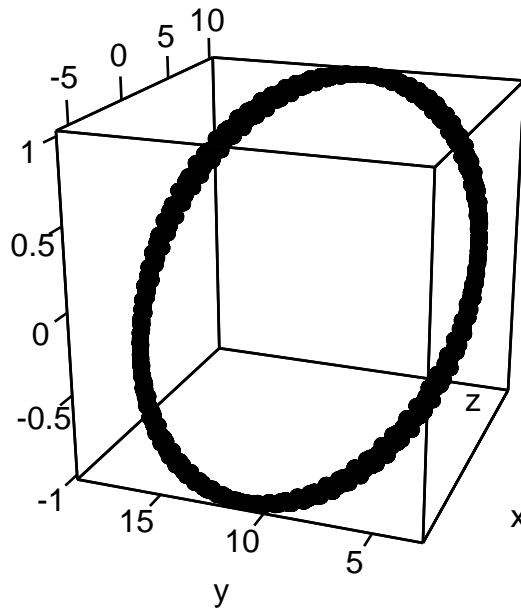
Las constantes 10 y 1900 son realmente arbitrarias y a lo mucho lo que hace un impacto es su cociente, y no sus valores individuales.

Este, similar a la dinámica de rotación sobre un círculo, determina teóricamente si habrá órbitas periódicas u órbitas densas. En ese sentido, el cociente tan solo determina la escala de la dinámica, pero sus propiedades topológicas intrínsecas vienen dadas por la racionalidad del cociente.

En la sección de trabajos futuros se discutirá un poco más sobre las posibilidades de optimizar la selección de parámetros de control en U tal que explote con densidad el espacio de fase.

Tenemos ahora este otro caso:

```
initial <- c(2, 3, 0)
prueba_1 <- carrito(2000, 100, initial)
plot3d(prueba_1, xlab = "x", ylab = "y", zlab = "z", size=6)
if (!rgl.useNULL())
  play3d(spin3d(axis = c(0, 0, 1), rpm = 20), duration = 0.6)
```



En este caso los controles fueron

$$u_1(x) = \sin(x)^2$$

$$u_2(x) = 4.$$

Intuitivamente el espacio de estados alcanzables ha colapsado de la figura anterior a sólo un anillo debido a que la velocidad angular es mucho más cercana a la lineal en este caso. Eso quiere decir que, a medida que gira el carro, se traslada una menor cantidad lineal, casi insignificante en este caso, resultando en sólo explorar el subespacio de fase de una rotación sobre el dominio de θ .

Un caso más interesante surge cuando definimos un control seccionado que se ajuste de forma periódica a otras constantes a medida que el tiempo avanza. Esto se logra con aritmética modular, es decir, se definen

```
u1 <- function(x) 10
u2 <- function(x) ifelse(x%%7 == 0, 10, 0) +
  ifelse(x%%5 == 0, 10, 3) +
  ifelse(x%%3 == 0, 10, 5)
```

Expresadas matemáticamente como

$$u_1(x) = 10$$

$$u_2(x) = f_7(10, 0)(x) + f_5(10, 3)(x) + f_3(10, 5)(x)$$

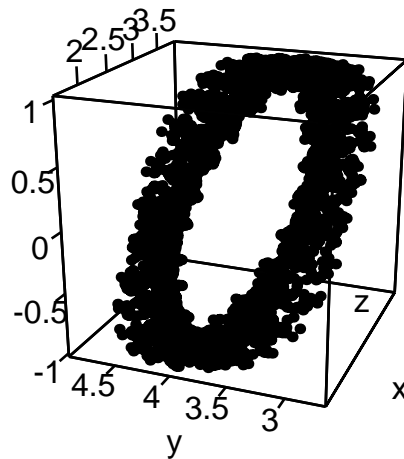
donde $f_n(a, b)$ se define para todo $x \in \mathbb{R}$ como

$$f_n(a, b)(x) := \begin{cases} a & \text{si } x \bmod n = 0 \\ b & \text{si } x \bmod n \neq 0 \end{cases}$$

Esto causa que el carro sea libre de trasladarse durante ciertos lapsos específicos de tiempo, mientras no hay mucha velocidad de giro. La velocidad de giro irá aumentando en otros puntos en que las condiciones de las $f_n(a, b)$ se cumplan.

Mostramos su dinámica a continuación:

```
initial <- c(2, 3, 0)
prueba_1 <- carrito(2000, 100, initial)
plot3d(prueba_1, xlab = "x", ylab = "y", zlab = "z", size=4)
if (!rgl.useNULL())
  play3d(spin3d(axis = c(0, 0, 1), rpm = 20), duration = 0.6)
```



En este caso se ve una exploración mucho más densa en el espacio de fase total esperado, que es, como anteriormente demostrado, un toro sólido sin frontera. Este es el caso para estas funciones de control, y para cualesquiera otras que permitan las traslaciones por lapsos de tiempo considerables.

Como visto en el último ejemplo y algunos anteriores, esto es posible al acotar la velocidad de giro; es decir, la función u_2 , con un valor que no sobrepase “demasiado” el valor de u_1 .

Esto puede formalizarse diciendo que $u_2 < u_1$ μ -casi seguro, en el sentido de teoría de la medida, utilizando una función de medida μ apropiada, o *natural*, dependiente del espacio de fase del sistema y el espacio de controles.

En este sentido, una vía futura de investigación puede ser el estudio de cómo elegir μ (dado un espacio de fase fijo) sistemáticamente para proveer perspicacia de las elecciones de $u \in U$ minimales que garanticen la exploración densa (o total) del espacio de fase, así, alcanzando la mayoría (o todos) los estados.

III

RESULTADOS

*“El propósito principal de la demostración no
es verificar, si no, **comprender**”*

-Arnold Ross

6 Analisis de resultados

6.1 Eficiencia de las funciones de distancia

Todas las dinámicas anteriores se pueden analizar mediante el concepto de **diagramas de código de barra** explicado en la sección de fundamentos. No obstante, nos concentraremos en dos dinámicas que verdaderamente ilustren perspectivas interesantes sobre el funcionamiento del algoritmo y su poder de análisis.

Como inicial prueba, se mostrará el caso simulado de un toro. Esto se logra utilizando un comando propio del paquete TDA, cuyo código y ejecución se discute en mayor detalle en los anexos. El comando de iniciación es:

```
torusSample <- torusUnif(n = 10000, a = 0.9, c = 2.5)
```

Empíricamente, mediante métodos de graficados (como con el paquete **rgl** de R, para graficación en 3D), se estiman intervalos específicos para las variables x, y, z para servir como dominio de cuadriculación con propósito de utilizar una función de distancia más sofisticada que la euclídea y que requiera información de la distribución local de cada punto.

Guardamos los límites elegidos para dichos intervalos,

```
Xlim <- c(-4, 4)
Ylim <- c(-4, 4)
Zlim <- c(-2, 2)
```

Particularmente, la función distancia que se utilizará será la **estimación de densidad de kernel** (KDE: Kenel Density estimation). Esta es elegida por su mejor rendimiento para el cómputo de diagramas de código de barra, que son los que nos interesan.

No obstante, se mencionan a continuación un par de alternativas con sus ventajas:

- La función `distFct(X, Grid)`, que calcula, para un punto $g \in G$ (el dominio, `Grid`, limitado anteriormente por los intervalos elegidos) la imagen de la función d :

$$d(g) = \inf_{x \in X} \|x - g\|_2$$

donde el conjunto X es el conjunto de puntos en nuestros datos, ingresado como parámetro en `distFct(X, Grid)`. Esta función devuelve como imagen la distancia euclídea entre un punto cualquiera g del dominio, y encuentra el dato $x \in X$ más cercano.

Cuando se ejecuta para todo g se espera una gráfica con valores muy cercanos a cero en las vecindades de cada punto, incrementando sólo en regiones con poca densidad de puntos. En dicho sentido, puede verse como el inverso de una densidad de puntos.

- La función `dtm(X, Grid, m0, r = 2, weight = 1)`. Esta calcula la llamada *distancia a la función medida*¹ en el conjunto de puntos `Grid`, usando una medida empírica uniforme sobre el conjunto de puntos X . Dada una medida de probabilidad P , la distancia a la función medida, para cada $y \in \mathbb{R}^d$, está definida por:

$$d_{m_0}(y) := \left(\frac{1}{m_0} \int_0^{m_0} (G_y^{-1}(u))^r du \right)^{1/r}$$

¹Por siglas en inglés, “distance to measure function”.

donde $G_y(t) = P(\|X - y\| \leq t)$, $m_0 \in (0, 1)$ y $r \in [1, \infty)$ son parámetros ajustables. Dado la distribución a estimar de los puntos sobre el conjunto \mathbf{X} , la distribución empírica que el comando `dtm` utiliza para estimar la función real es:

$$\hat{d}_{m_0}(y) := \left(\frac{1}{k} \sum_{x_i \in N_k(y)} \|x_i - y\|^r \right)^{1/r}$$

donde $k = \lceil m_0 n \rceil$ y $N_k(y)$ es el subconjunto de los k vecinos más cercanos al punto y entre los candidatos x_1, \dots, x_n .

Luego de hacer suficientes pruebas con las anteriores dos funciones de distancia y la elegida, `kde`, se concluye que `kde` muestra resultados más estables para, al menos, el caso de gráficos de código de barra.

La función `kde(X, Grid, h, kertype = "Gaussian", weight = 1)` se define de la siguiente manera. Dado la colección de puntos \mathbf{X} , la función `kde` calcula el estimador de densidad de kernel sobre `Grid` utilizando un kernel Gaussiano con parámetro de suavidad h definido de la siguiente manera:

$$p_X(x) = \frac{1}{n(\sqrt{2\pi}h)} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{\|x - X_i\|_2^2}{2h^2}\right).$$

Para construir la cuadrícula del dominio se utiliza un parámetro `by` que guarde, ya sea un número con el tamaño de paso homogéneo que se utilizará en todas las direcciones, o un vector del mismo tamaño que la dimensión del espacio donde yacen los datos, cuyas entradas serán los tamaños de paso individuales para cada dirección.

Esto puede ser útil cuando una o más de las direcciones tiene una escala muy diferente a las otras y utilizar un tamaño de paso general puede resultar pérdida de información (sobrestimando la escala) o tiempo de cómputo grande (subestimando la escala).

En mayoría se casos, esto se evita por completo al no utilizar dichos valores de la variable, si no que normalizarlos hacia una misma escala. No obstante, eso puede no ser siempre posible si hay propiedades dinámicas de interés que dependan de la escala.

Se guarda el valor para el parámetro `by`.

```
by <- 0.2
```

Se cuadrícula el dominio G .

```
Xseq <- seq(from = Xlim[1], to = Xlim[2], by = by)
Yseq <- seq(from = Ylim[1], to = Ylim[2], by = by)
Zseq <- seq(from = Zlim[1], to = Zlim[2], by = by)
```

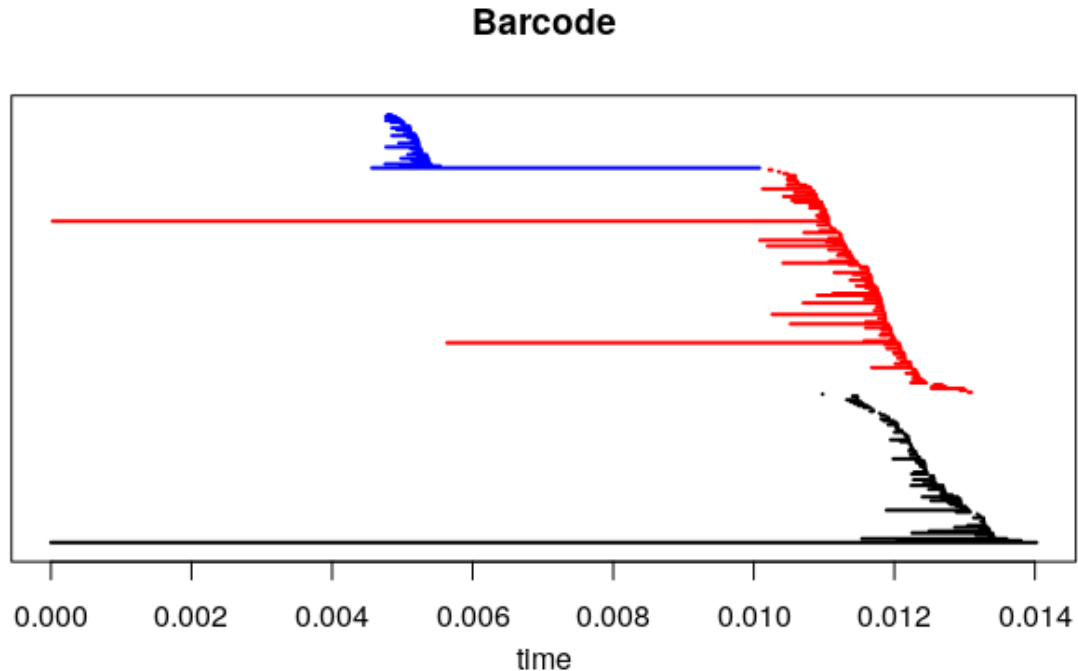
Por último, se guarda el dominio cuadrículado para uso de nuestra función distancia

```
Grid <- expand.grid(Xseq, Yseq, Zseq)
```

A continuación se puede ya guardar el diagrama de código de barra en una variable `Diag`. Esto se logrará mediante la función `gridDiag` que utilizará los datos \mathbf{X} , la cuadrícula `Grid=cbind(Xlim, Ylim, Zlim)` con divisiones de tamaño `by`.

```
Diag <- gridDiag(X = torusSample, FUN = kde, lim = cbind(Xlim, Ylim, Zlim),
  by = by, sublevel = FALSE, library = "Dionysus",
  printProgress = FALSE, h = 0.7)
```

Esto resulta en diagramas del siguiente tipo: En este caso, el diagrama corresponde a un toro.



Recordemos que los grupos de homología del toro son:

$$H_0(\mathbb{T}) = \mathbb{Z}$$

$$H_1(\mathbb{T}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$H_2(\mathbb{T}) = \mathbb{Z}$$

y $H_i(\mathbb{T}) = \{0\}$ para $i \geq 3$. Esto en el gráfico de códigos de barra se puede ver de la siguiente forma:

- Las barras azules corresponden a agujeros bidimensionales. Es decir, volúmenes “inflables” que separan el espacio \mathbb{R}^3 en dos componentes conexas al restarla. Este corresponde al interior del toro.

La barra que cuenta es la única que sobrepasa el cierta tolerancia indicada por un nivel de significancia pero que, en este caso, es claro de ver que solo una es considerablemente mayor a lo que podría ser cualquier significancia considerad en práctica.

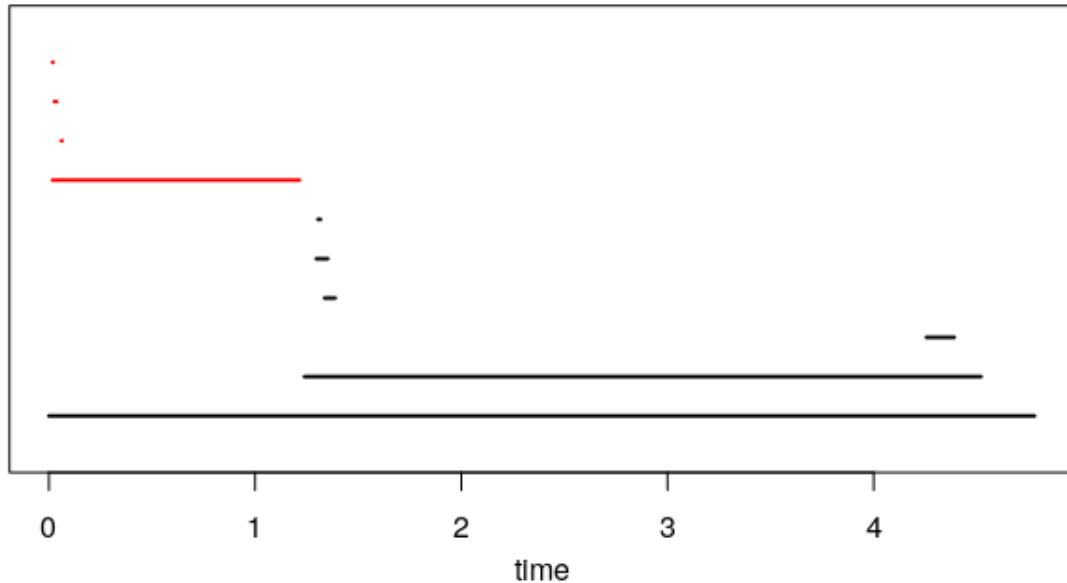
- Las barras rojas corresponden a agujeros de una dimensión. Se puede observar un conjunto de barras pequeñas dominadas por dos largas que corresponden a cada sumando libre \mathbb{Z} en el grupo de homología H_1 .

Esto se interpreta como los ciclos independientes que existen en el toro, pues es homeomorfo a $S^1 \times S^1$.

- Por último, las barras negras corresponden al grupo H_0 , que equivale al número de componentes conexas que existen. En este caso vemos una clara barra de color negro.

A continuación presentamos los gráficos de código de barra correspondientes a las simulaciones de la dinámica del carro en el plano correspondientes a las siguientes dinámicas:

Barcode



con la dinámica:

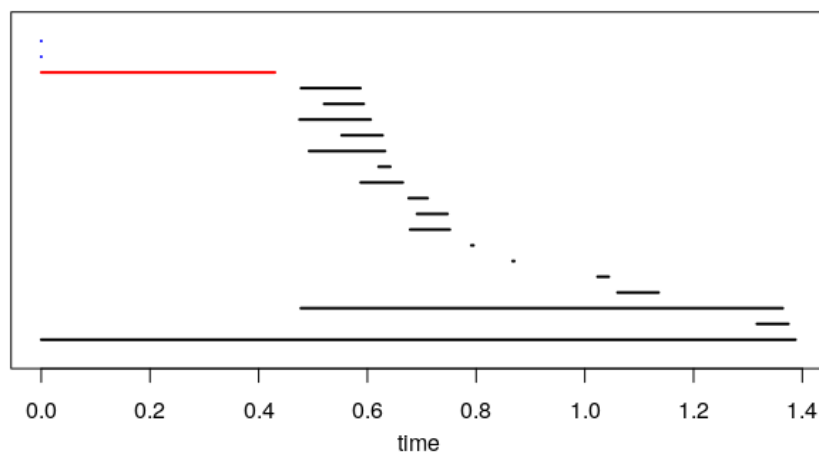
$$u_1(x) = \sin(x)^2$$

$$u_2(x) = 4.$$

Como comentamos en el marco teórico, se espera que el espacio de fase de dicha dinámica corresponda a un toro sólido que tiene precisamente una componente conexa y un ciclo independiente, con cero agujeros bidimensionales (y trivialmente cero agujeros de mayor dimensión).

Esto quiere decir que esperamos ver una línea negra correspondiente a la componente conexa. Esto es precisamente lo observado en la imagen anterior, una línea dominante de color negro.

Barcode



La figura anterior corresponde a la dinámica:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 10 \\ u_2(x) &= f_7(10, 0)(x) + f_5(10, 3)(x) + f_3(10, 5)(x) \end{aligned}$$

discutiva anteriormente. Esta muestra un mayor ruido en el grupo de homología H_0 debido a que ciertas partes tienen menor grosor que otras y pueden simular componentes no conexas a ciertas distancias d . Esto, no obstante no causa que las conclusiones de la topología del espacio de fase cambien.

7 Conclusiones y trabajos futuros

Las conclusiones de este trabajo se pueden resumir en la siguiente lista, que toma forma de sugerencias a trabajos futuros posibles.

1. Estudiar la distribución de **tiempos de cambio** para los parámetros de control $u_i \in U$ tal que se garantice la densidad de los estados visitados en el espacio de fase (en términos de una medida sobre la variedad)
2. Aplicar TDA junto a resultados de linealización de EDOV como los de [4].
3. Crear softwares que automaticen los procedimientos realizados en este estudio para una óptima verificación de otros casos.

A continuación se expandirá sobre ello.

1. Como visto en secciones anteriores, las dinámicas en teoría de control dependerán de parámetros $u \in U$, donde U es algún espacio de parámetros. Aquí, por facilidad de su definición, se ha tratado con controles u_i finitos² que van entrando en acción a partir de ciertos tiempos t_i que forman una partición en el intervalo de tiempo de la dinámica.

Es claro que, al ser una partición finita, no es posible que el intervalo, I , de tiempos del sistema dinámico sea no acotado. Esto reduce la situación al caso de elegir $\{t_i\}_{i=1}^N$ que estén distribuidos en diferentes localidades de I para controlar el sistema que comienza en el punto inicial $q_0 \in M$.

Esto, en términos de una medida, es equivalente a una suma finita de medidas de Dirac. Es decir, para todo conjunto medible $E \subseteq I$, tenemos

$$\mu_{q_0}(E) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{t_i}(E),$$

donde,

$$\delta_{t_i}(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \in E \\ 0 & \text{si } t_i \notin E \end{cases}$$

No obstante, los puntos t_i pueden verse como puntos $q_i = \gamma(t_i) \in M$ sobre nuestra variedad, a lo largo de la curva que sigue nuestra dinámica a partir de un punto inicial q_0 .

Como la meta es encontrar controles que sean capaces de generar un conjunto maximal alcanzable para todo punto inicial, el formalismo anterior parece ser un mejor enfoque.

²Pues incluso el caso contable no tiene forma de ser implementada en memoria finita de computadoras clásicas.

Es decir, se propone como trabajo futuro buscar una medida μ sobre la variedad M que indique los tiempos de cambio para los controles u_i , esta vez con $i = 1, \dots, N_{q_0}$, donde N_{q_0} depende de cada punto inicial.

2. En el libro de Agrachev [4] se enuncia un teorema sobre linearización global. Este se enuncia, con notación acorde a este documento, a continuación.

Teorema 3. Sea M una variedad suave, conexa y n -dimensional, y considere un conjunto de campos vectoriales $\chi_0, \dots, \chi_m \in \Gamma(TM)$. Entonces existe un difeomorfismo

$$\Phi : M \rightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

donde \mathbb{T}^k es el toro k -dimensional con $k \leq n$, tal que

$$(\Phi_*\chi_0)(x) = Ax + c$$

$$(\Phi_*\chi_i)(x) = b_i \quad i = 1, \dots, m$$

para todo $x \in \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, con A siendo una matriz $n \times n$ tal que $Ae_i = 0$ para $i = 1, \dots, k$ y $c, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^n$ tales que permitirán el control total³ del sistema si y sólo si lo siguiente se cumple:

- $(\text{ad } \chi_0)^j \chi_i$ son campos vectoriales completos
- $\text{gen}\{q \circ (\text{ad } \chi_0)^j \chi_i \mid j = 0, \dots, n-1; i = 0, \dots, m\} = T_q M$
- $q \circ [\text{ad } \chi_0)^{j_1} \chi_{i_1}, \text{ad } \chi_0)^{j_2} \chi_{i_2}] = 0 \quad q \in M, 0 \leq j_1, j_2 \leq n, 0 \leq i_1, i_2 \leq m.$

En el teorema se utilizó la función ad definida para todo $V \in \Gamma(TM)$ como:

$$\text{ad } V := \text{Ad} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} P^t \right)$$

donde P^t es el flujo a lo largo del campo vectorial⁴ y Ad está definida, para toda función de tipo $B : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ como:

$$(\text{Ad } B)V := B \circ V \circ B^{-1}$$

La intuición de este teorema es que la no-linealidad que el conjunto de campos vectoriales χ_0, \dots, χ_m introduce a la ecuación diferencial se puede “esconder” en la misma variedad mediante un difeomorfismo.

Un trabajo propuesto a futuro puede ser el estudio de cómo TDA es capaz de encontrar o ayudar a diseñar estos difeomorfismos que linealizen las dinámicas observadas en los datos para un más fácil ajuste cuantitativo.

3. En lo elaborado en este documento, se tuvo que hacer un ajuste manual de los parámetros, tanto las dimensiones del mallado a realizar, su fineza, parámetros de suavidad de la distancia, y la función distancia misma que parecía, empíricamente, funcionar de una mejor manera.

Se espera que a futuro, cuando el estado del arte de los métodos de TDA esté más refinado y sus algoritmos mejor entendidos, se sea capaz de automatizar muchas etapas, si no es que todas, de este proceso que ha sido manual aquí.

Esto se proyecta, y además propone como un trabajo posible a futuro, que se logre mediante un análisis exploratorio y estructural de los datos con técnicas de aprendizaje de máquina (machine learning).

³Es decir, que todos los estados sean alcanzables



⁴y por ende su derivada, especificando el punto, es la derivada de una curva, que es un vector tangente. Ahora, sin especificar el punto, se vuelve un campo vectorial.

IV

REFERENCIAS Y ANEXOS

“Si me propongo demostrar algo, no soy un científico real. Tengo que aprender a seguir a dónde me llevan los hechos, tengo que aprender a azotar mis prejuicios ...”

-Lazzaro Spallanzani

	<p align="center">“ANÁLISIS TOPOLÓGICO DE DATOS Y TEORÍA DE CONTROL SOBRE VARIEDADES”</p>		
FICHA SINÓPTICA			FICHA No 001-A-S
Título Original	Topological Data Analysis of Financial Time Series: Landscapes of Crashes		
Título	Análisis topológico de datos de series de tiempo financieras: Panorama de choques		
Autor(es)	Gidea, Marian; Katz, Yuri		
Enfoque del artículo			
Síntesis			Palabras clave
<p>El artículo se enmarca dentro de las disciplina emergente conocida como “Análisis topológico de datos” (TDA por siglas en inglés) como conjunto de herramientas para tratar el ruido en series de tiempo. Particularmente en métodos que analizan complejos de Vietoris-Rips con diagramas y panoramas (landscapes) de persistencia para obtener información homológica de la topología de sus datos.</p> <p>Esto se realiza tanto para conjuntos de datos “sintéticos”:</p> <ul style="list-style-type: none">• Puntos generados desde una versión estocástica, mediante ruido Gaussiano, del mapa de Hénon• Datos generados por Monte Carlo de un ruido blanco con varianza creciente• Datos generados por Monte Carlo de un ruido blanco con varianza del inverso de una distribución Gamma <p>así como en datos empíricos de una serie de tiempo financiera: recopilación diaria de cuatro mercado de valores de los estados unidos:</p> <ul style="list-style-type: none">• S&P 500• DJIA• NASDAQ• Russel 2000 <p>Entre el 23 de diciembre de 1987 y 8 de diciembre del 2016 (total de 7301 días de intercambios).</p>			<ul style="list-style-type: none">• Complejo de Vietoris-Rips• Homología• Diagramas de persistencia• Panorama de persistencia• Series de tiempo
Contenido relevante a la investigación			
Síntesis			Palabras clave
<p>Los puntos de mayor relevancia para la investigación actual son:</p> <ul style="list-style-type: none">• El fundamento teórico de los métodos de TDA• Ejemplos ilustrativos de su uso como forma de comparar resultados propios. <p>También este artículo sirve como motivación a indagar en la teoría de homología detrás de los métodos actuales de TDA y explorar el estado del arte de nuevos métodos homológicos y cohomológicos.</p> <p>Esto último en vista que el segundo punto toral de la investigación, la teoría de control sobre variedades, gana mucho de tratar los invariantes topológicos desde la “resolución” diferencial de su estructura, e implementar teorías como la cohomología de De Rham puede fortalecer el puente entre ambas disciplinas (TDA y teoría de control).</p>			<ul style="list-style-type: none">• TDA• Homología• Cohomología de De Rham
Documento	Artículo de investigación		
Base de dato	Science Direct		
Doi	10.1016/j.physa.2017.09.028		



“ANÁLISIS TOPOLÓGICO DE DATOS Y TEORÍA DE CONTROL SOBRE VARIEDADES”



FICHA SINÓPTICA

FICHA No 001-L-S

Título Original	Control Theory from the Geometric Viewpoint
Título	Teoría de control desde un punto de vista geométrico
Autor(es)	A. Agrachev, Andrei; L. Sachkov, Yuri

Tópicos del libro

Síntesis	Palabras clave
<p>Los autores desarrollan el planteamiento de ecuaciones diferenciales ordinarias (tanto autónomas como no autónomas) desde un punto de vista geométrico. Esto lo logran primero partiendo de la bien conocida equivalencia entre campos vectoriales y ecuaciones diferenciales autónomas (reduciendo primero la ecuación de cualquier orden hacia un sistema de primer orden y escribirla como</p> $V(x(t)) = \dot{x}(t) \quad ; \quad \begin{cases} x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \end{cases}$ <p>y argumentando que entender las soluciones de la EDO es entender las curvas tangentes a V) y luego generalizando a campos vectoriales sobre variedades, utilizando así las herramientas de la geometría diferencial para plantear el problema fundamental del control de una dinámica.</p> <p>Se discuten, además de varios ejemplos ilustrativos físicos, conceptos como “conjuntos de estados alcanzables” y la “retroalimentación” para plantear la teoría del control óptimo generalizado. Esto enriquecido con teoremas que hablan de simetrías geométricas mediante grupos de Lie.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Teoría de control • Ecuaciones diferenciales • Geometría diferencial • Dinámica • Modelación física

Tópicos relevantes a la investigación

Síntesis	Palabras clave
<p>Ya conociendo la teoría de grupos y álgebras de Lie, así como dinámica sobre variedades, se hará un enfoque fuerte en la parte del control, y una vista ambiciosa a la teoría del control óptimo.</p> <p>Además, se buscará la aplicación de teoremas importantes desarrollados en el libro, como teoremas de linealización local y global, y el “teorema de la órbita”.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Control óptimo • Linealización • Órbitas

Documento	Libro de tema especializado
Editora	Addison Wesley
Cap. relevantes	Capítulos 1, 4, 5 y 10; añadiendo posibles ejemplos importantes de otros.



“ANÁLISIS TOPOLÓGICO DE DATOS Y TEORÍA DE CONTROL SOBRE VARIEDADES”



FICHA SINÓPTICA

FICHA No 002-L-S

Título Original	Elements of Algebraic Topology
Título	Elementos de topología algebraica
Autor(es)	R. Munkres, James
Tópicos del libro	
Síntesis	Palabras clave
<p>El presente documento es un clásico de la formación de pregrado y referencia válida en posgrado para tópicos de <i>topología algebraica</i> y sus aplicaciones. Expone ideas centrales sobre complejos simpliciales y sus grupos de homología.</p> <p>El libro, no obstante, asume conocimientos estándares previos de topología y teoría de grupos. Estos se asumirán dominados a un nivel universal de pregrado, ya que forman parte del pñsum estanar de la licenciatura.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Complejos simpliciales • Homología • Topología algebraica
Tópicos relevantes a la investigación	
Síntesis	Palabras clave
<p>Se utilizará el presente libro como referencia principal de teoremas útiles en homología y cohomología, así como dualidad con variedades topológicas. Esto fundamentará, con el rigor de estándar general matemático, los resultados más aplicados que se expondrán en la investigación.</p> <p>Nos concentraremos en utilizar dichas definiciones y resultados para comprobar la validez y enriquecer la interpretación de los resultados que se tendrán los ejemplos a discutir.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Homología • Complejo simplicial • Variedad topológica
Documento	Libro de formación común
Editora	Springer-Verlag Berlin Heidelberg
Cap. relevantes	Capítulos 1, 2, 7 y 8.

9 Códigos de R

9.1 Detalles de hardware y software

Aquí se anexarán los códigos de R tanto de instalación de paquetes necesarios para lograr hacer funcionar los paquetes de TDA en una computadora sin R, como los utilizados para la sección de aplicaciones. Los ejemplos utilizados aquí son principalmente inspirados del manual de usuario [7].

Se debe comentar que dicha instalación, así como la ejecución del código se ha realizado con un procesador Intel(R) Core(TM) i7-8750H CPU @ 2.20GHz, gráficos Intel® UHD Graphics 630 (Coffeelake 3x8 GT2), y en sistema Pop!_OS 19.10 de 64-bit.

El lenguaje utilizado es R con version 3.6.1 (fecha de salida: 2019-07-05) y con uso de la interfaz con R-studio con version 1.2.1335. Todos los códigos fueron ejecutados con éxito hasta la fecha de entrega de este documento, anotada en portada.

9.2 Proceso de instalación

A continuación se ilustra el orden adecuado (y propósito) de instalación de las dependencias que ocupa el paquete TDA en R. Es importante mencionar que estas son dependencias diferentes y por encima de la paquetería estandar de R y dependencias propias de R (como paquetes en c++).

Esto significa que, incluso siguiendo estos pasos, se puede necesitar instalar cierta paquetería desde la terminal de su sistema operativo. Se asume que trabaja en la última actualización compatible con las especificaciones antes mencionadas. Con esto dicho, exponemos el siguiente código

```
#####
# instalando paquetes requisitos de TDA
#####
install.packages(pkgs = "FNN")
install.packages(pkgs = "igraph")
install.packages(pkgs = "scales")

#####
# Instalando TDA y visualizador 3D
#####
install.packages(pkgs = "TDA")
install.packages("rgl", dependencies = TRUE)

#####
# Cargando TDA y visualizador 3D
#####
library(package = "TDA")
library(rgl)
library(magick)
r3dDefaults$windowRect <- c(100, 100, # Cambia el tamaño por defecto de
                             1000, 1000) # la ventana de plot3D
```

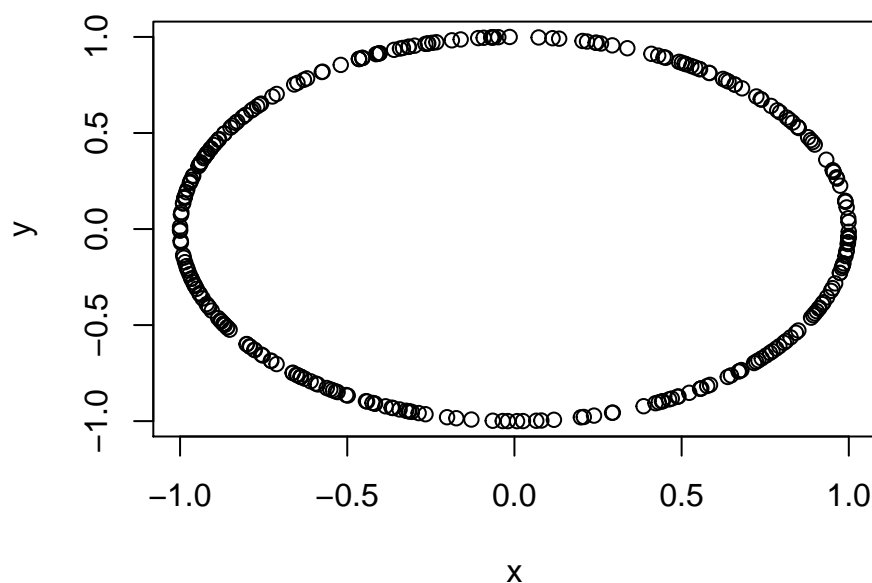
Se cargan los paquetes específicos para hacer TDA y graficación en 3D (con posibilidad de grabarlo en video) mediante rgl. Además se carga la paquetería magick que sirve para una mejor captura de video desde los gráficos tridimensionales de rgl.

```
#####
# Cargando TDA y visualizador 3D
#####
library(package = "TDA")
library(rgl)
knit_hooks$set(rgl = hook_rgl)
library(magick)
r3dDefaults$windowRect <- c(100, 100,
                             800, 800) # Cambia el tamaño por defecto de
                                         # la ventana de plot3D
```

9.3 Círculo muestreado uniformemente

Probamos las funciones básicas del paquete TDA. Por ejemplo, tenemos la habilidad de hacer un muestreo con distribución uniforme sobre el dominio de un círculo con radio dado.

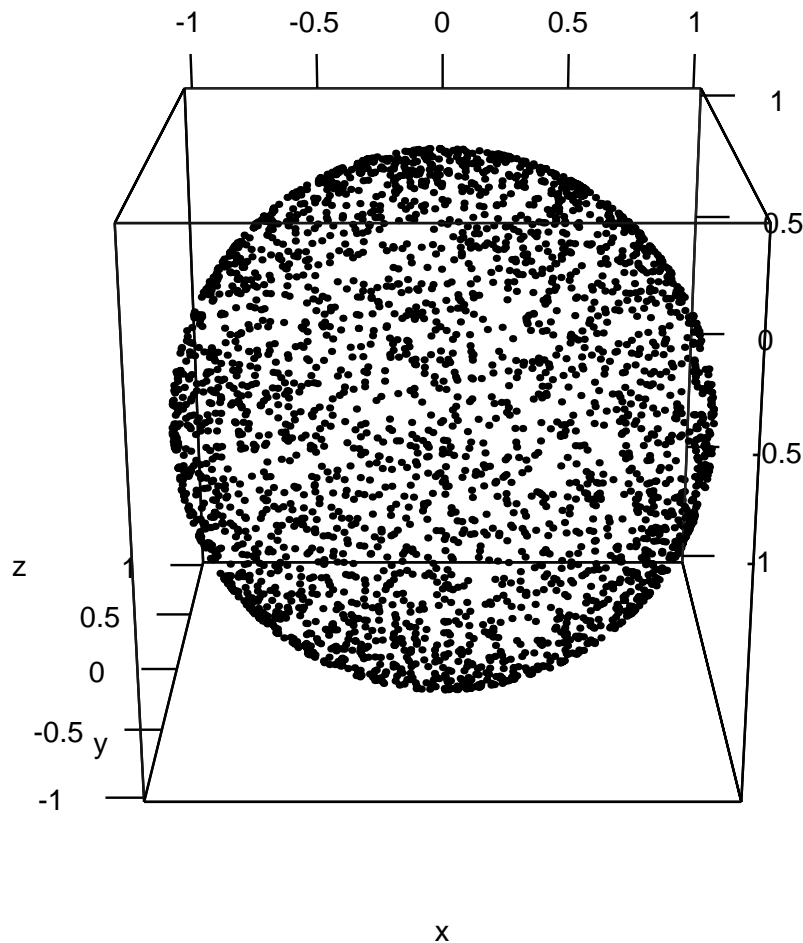
```
#####
# Construyendo figuras artificiales
#####
circleSample <- circleUnif(n = 300, r = 1)
plot(circleSample)
```



9.4 Esfera muestreada uniformemente

Además, podemos hacer gráficos tridimensionales (de los cuales aquí se mostrará sólo una captura de pantalla automática por parte del paquete rgl) como el de una nube de puntos muestreados uniformemente en la superficie de una esfera:

```
sphereSample <- sphereUnif(n = 3000, d = 2, r = 1)
plot3d(sphereSample, xlab = "x", ylab = "y", zlab = "z")
```

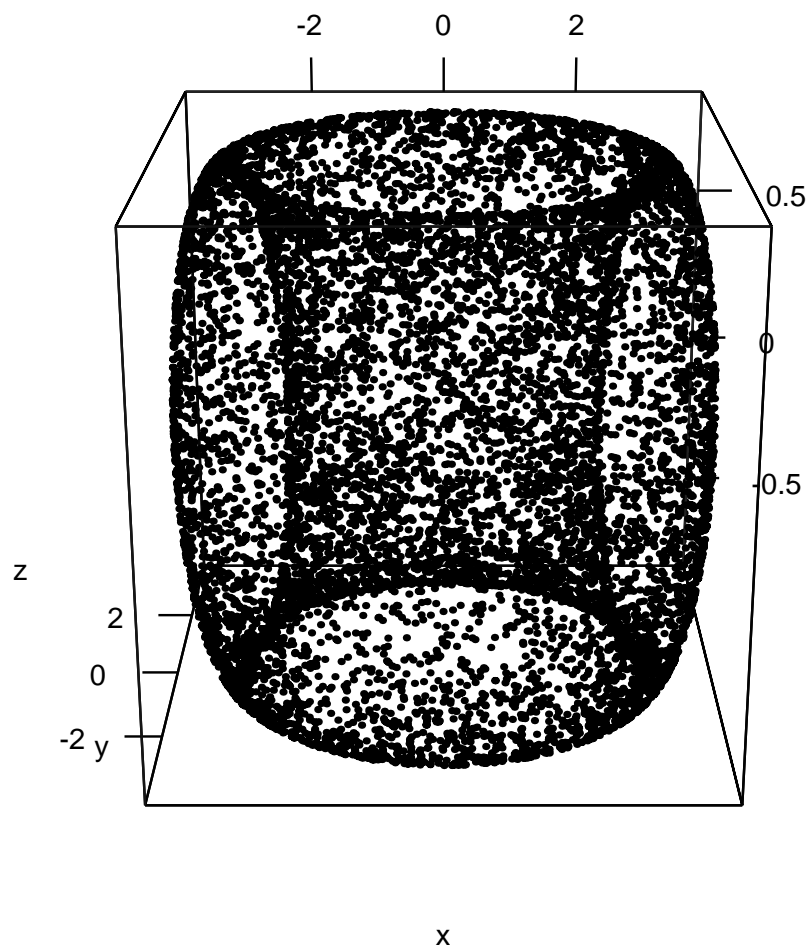


Las dinámicas analizadas fueron de tres dimensiones con motivo ilustrativo del funcionamiento del algoritmo, y lograr verificar y conseguir una intuición del resultado con mayor fluidez. No obstante, el paquete no tiene por qué limitarse sólo a tres dimensiones al momento de realizar el cálculo de los grupos de homología y su representación en código de barra.

9.5 Toro muestreado uniformemente

Con mayor relevancia a la aplicación mostrada en el documento, tenemos también un muestreo uniforme sobre la superficie de un toro:

```
torusSample <- torusUnif(n = 10000, a = 0.8, c = 3)
plot3d(torusSample, xlab = "x", ylab = "y", zlab = "z")
```



Note que los parámetros de los radios interiores y exteriores del toro son totalmente personalizables. Esto, no obstante, no debería cambiar las conclusiones topológicas logradas mediante el análisis de homología persistente.

Además, mediante el comando

```
movie3d(spin3d(), duration=5, dir="videos", movie = "toro")
```

es posible hacer girar la figura (mediante `spin3d()`) mientras se está grabando fotogramas de la animación generada.

Ahora se presentan los códigos ejecutados para obtener las dinámicas en la sección de resultados. La dinámica del carro sobre un plano viene programada mediante la siguiente función:

```
#####
# Dinámica de un carro en un plano
#####

carrito <- function(n, t, initial){
  h <- t/n
  x <- numeric(n)
  y <- numeric(n)
  theta <- numeric(n)
  x[1] <- initial[1]
  y[1] <- initial[2]
  theta[1] <- initial[3]
  # Mobious
  u1 <- function(x) 10*sin(x)^2
  u2 <- function(x) 1900
  # Anillo
  u2 <- function(x) sin(x/3)^2+cos(2*x)
  u1 <- function(x) 4
  for (k in 1:n) {
    x[k+1] <- h*u1(k)*cos(theta[k])+x[k]
    y[k+1] <- h*u1(k)*sin(theta[k])+y[k]
    theta[k+1] <- h*u2(k)+theta[k]
  }
  carrito <- data.frame(x,y,sin(theta))
}
```

donde se han incluido dos pares de valores para las funciones de control u_1, u_2 , una que explora una subvariedad con propiedades de banda de mobious y otra para un anillo. Además, para el caso discutido teóricamente, se tienen los siguientes controles constantes por tramos:

```
# Constante por tramos
u1 <- function(x) 10
u2 <- function(x) ifelse(x%%7 == 0, 10, 0) +
  ifelse(x%%5 == 0, 10, 0) +
  ifelse(x%%3 == 0, 10, 5)
```

Bibliografía

- [1] F. Schuller (2013), Lectures on the Geometric Anatomy of Theoretical Physics. Presentado durante año académico 2013/2014 en el instituto “Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg”. Curso grabado en: https://www.youtube.com/playlist?list=PLPH7f_7ZlzxTi6kS4vCmv4ZKm9u8g5yic
- [2] Cayton, L. (2005). Algorithms for manifold learning. Univ. of California at San Diego Tech. Rep, 12(1-17), 1.
- [3] Gidea, M., & Katz, Y. (2018). Topological data analysis of financial time series: Landscapes of crashes. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 491, 820-834.
- [4] Agrachev, A. A., & Sachkov, Y. (2013). Control theory from the geometric viewpoint (Vol. 87). Springer Science & Business Media.
- [5] Munkres, J. R. (2018). Elements of algebraic topology. CRC Press.
- [6] Hirsch, M. W. (2012). Differential topology (Vol. 33). Springer Science & Business Media.
- [7] Fasy, Brittany T.; Kim, Jisu; Lecci, Fabrizio; Clement, Maria; Millman, David L. & Rouvreau, Vincent (2019). TDA: Statistical Tools for Topological Data Analysis. <https://CRAN.R-project.org/package=TDA>.