

基于 Matlab 的线性调频信号的时频分析

石珂

北京邮电大学电信工程学院, 北京 (100876)

E-mail: zzusk@126.com

摘要: 一个公认的观点是: 任何一种时频分布如果对线性调频信号不能提供好的时频聚集性, 那么它便不适合用作非平稳信号时频分析的工具。由于单分量 LFM 信号的 Wigner—Ville 分布是冲激线谱, 所以用 Wigner—Ville 分布分析单分量 LFM 信号是非常合适的。但对于多分量信号, 由于交叉项的存在, 时频平面就会变得模糊不清。而 Radon—Wigner 变换、分数阶 Fourier 变换和 Chirp—Fourier 变换在处理多分量信号时就比 Wigner—Ville 分布理想的多, 但这几种变换的性能也不尽相同。本文就着重比较它们的优劣^[1]。

关键词: 时频分析 LFM 信号 Wigner—Ville 分布 Radon—Wigner 变换 分数阶 Fourier 变换 离散 Chirp—Fourier 变换

1. 引言

信号与信息处理是信息科学中近十几年发展最为迅速的学科之一。传统的统计信号处理有三个基本的假设: 线性、高斯性和平稳性。而现代信号处理则以非线性、非高斯性和非平稳性信号作为分析与处理的对象。在现代信号处理中, 非平稳信号处理的发展尤其引人注目。

分析和处理平稳信号的最常用也是最主要的方法是 Fourier 分析。Fourier 变换是在整体上将信号分解为不同的频率分量, 而缺乏局域性信息。即它不能告诉我们某种频率分量发生在哪些时间内, 而这对非平稳信号是十分重要的。为了分析和处理非平稳信号, 人们对 Fourier 分析进行了推广乃至根本性的革命, 提出并发展了一系列新的信号分析理论: 短时 Fourier 变换、Wigner—Ville 分布、Gabor 变换、小波变换、Radon—Wigner 变换、分数阶 Fourier 变换等。本文的研究重点为 Wigner—Ville 分布、Wigner—Ville 分布、分数阶 Fourier 变换、离散 Chirp—Fourier 变换^[1-2]。

在非平稳信号的研究过程中, 有一种特殊的非平稳信号: chirp 信号, 又称线性调频 (Linear Frequency Modulation, LFM) 信号, 研究价值较高。这是因为: (1) chirp 信号在时频平面中呈现直线型, 因而常常作为衡量一种时频分析方法是否有效的手段; (2) 作为大的时间——频带积的扩频信号, 它广泛地出现在通信、雷达、声呐和地震勘探等系统; 在扩频通信中, 线性调频信号提供了一种具有高度抗干扰能力的调频方案; (3) 在生物医学信号分析方面, chirp 信号用于 CT 信号的时频分析; (4) 用于故障诊断的振动信号中也存在着大量的 chirp 信号成分。因此, 本文也将 LFM 信号作为研究对象^[3]。

2. 各时频分析方法对 LFM 信号的分析

2.1 对单分量信号的分析

一个公认的观点是: 任何一种时频分布如果对线性调频信号不能提供好的时频聚集性,

那么它便不适合用作非平稳信号时频分析的工具。时频聚集性也即要求它在时频平面上是高度聚集的。时频分布的提出源于局部性,局部性的正确描述又与信号的时频聚集性密切相关,而聚集性是衡量时频分布的重要指标。适合用作时频聚集性评价的典型非平稳信号为线性调频信号。假设使用幅度为 1 的单分量线性调频信号 LFM: $Z(t) = e^{j2\pi\left(f_0 t + \frac{1}{2}mt^2\right)}$ 。这种信号广泛用在雷达,声呐和地震等探测系统中。如在雷达等探测系统中,当目标作等加速运动时,其回波即为 LFM 信号。对于空间线性阵列,若信号源位于近场,则沿阵列分布的信号也近似为 LFM 信号,合成孔径雷达利用了这一特性^[4]。

下面计算 LFM 信号 $Z(t)$ 的 Wigner-Ville 分布。乘积信号为:

$$\begin{aligned} Z\left(t + \frac{\xi}{2}\right) Z^*\left(t - \frac{\xi}{2}\right) &= e^{j2\pi\left[f_0\left(t + \frac{\xi}{2}\right) + \frac{1}{2}m\left(t + \frac{\xi}{2}\right)^2\right]} e^{-j2\pi\left[f_0\left(t - \frac{\xi}{2}\right) + \frac{1}{2}m\left(t - \frac{\xi}{2}\right)^2\right]} \\ &= e^{j2\pi(f_0 + m)t\xi} \end{aligned}$$

将其代入分布的定义式,则:

$$\begin{aligned} W_{LFM}(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} Z\left(t + \frac{\xi}{2}\right) Z^*\left(t - \frac{\xi}{2}\right) e^{-j2\pi f\xi} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\xi(f + mt)} e^{-j2\pi f\xi} d\xi \\ &= \delta[f - (f_0 + mt)] \end{aligned}$$

由此可知:单分量 LFM 信号 WVD 分布为沿直线 $f = f_0 + mt$ 分布的冲激线谱。即:分布的幅值集中出现在表示信号的瞬时频率变化律的直线上。分布为冲激线谱的结论只适用于无穷长 LFM 信号。在实际应用中,信号长度总是有限长的。此时 WVD 分布呈背鳍状。WVD 分布对单分量 LFM 信号具有比其它时频分布更好的时频聚集性。

2. 2 对多频率信号的分析

虽然 Wigner-Ville 分布对单分量线性调频信号 LFM 具有比其它时频分布更好的时频聚集性,但对于多分量信号,交叉项会产生“虚假信号”。交叉项是二次型或双线性时频分布的固有结果,它们来自多分量信号中不同信号分量之间的交叉作用。时频分布里的信号项产生于信号每个分量本身,它们与时频分布具有有限支撑的信号的物理性质是一致的。也就是说,如果给出信号 $z(t)$ 及其谱的先验知识,则信号项在时频平面上只出现在我们希望它们出现的那些地方,与信号项的情况相反,交叉项是时频分布里的干扰产物,它们在时域与/或频域表现出与原信号的物理性质相矛盾的结果。

如果 LFM 信号存在多个分量时(实际信号常如此,如同时存在多个目标),分量之间的交叉项就会使时频平面变得模糊不清。特别是在信噪比不高的场合,甚至难于发现各个 LFM 信号分量。由于理想 LFM 信号的 Wigner-Ville 分布为直线型冲激函数,有限长度的 LFM 信号的 Wigner-Ville 分布为背鳍状,所以其 Wigner-Ville 分布的时频平面沿相应直线作积分平滑,是一种理想选择。Radon-Wigner 变换正是基于此而提出的。它是对信号的

Wigner-Ville 分布的时频平面作直线积分投影的 Radon 变换, 统称对信号作 Radon-Wigner 变换。

在Wigner-Ville分布的时频平面里, 惯用 w 轴的截距 w_0 和斜率 m 为参数表示直线。因此, 当需要沿 $w=w_0+mt$ 作直线积分时, 可将积分路径(直线PQ)的参数 (u, α) 替换成 (m, w_0) , 且两对参数之间的关系为: $m = -\cot\alpha, w_0 = u / \sin\alpha$ 。

若求信号 $z(t)$ 的Radon-Wigner变换, 并以参数 (m, w_0) 表示积分路径, 则有:

$$\begin{aligned} D_z(u, \alpha) &= \int_{PQ\text{线}} W_z(t, w) dv' \\ &= \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} W_z(t, w) \delta(u - u') du' dv' \\ &= \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} W_z(t, w) \delta[\sin\alpha(w - w_0 - mt)] dw dt \\ &= \frac{1}{|\sin\alpha|} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} W_z(t, w) \delta[w - (w_0 + mt)] dw dt \\ &= \frac{1}{|\sin\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} W_z(t, w_0 + mt) dt \quad \begin{matrix} m = -\cot\alpha \\ w_0 = u / \sin\alpha \end{matrix} \end{aligned}$$

上式表明, 若 $z(t)$ 是参数为 w_0 和 m 的LFM信号, 则积分值最大; 而当参数偏离 w_0 与/或 m 时, 积分值迅速减小, 即对一定的LFM信号, 其Radon-Wigner变换会在对应的参数 (m, w_0) 处呈现尖峰。我们自然会想到: 多分量的LFM信号的特性在Radon-Wigner平面里更加突出。即表现为各个尖峰, 因而更有利于区别交叉项和噪声。利用Radon-Wigner变换一定能够获得更好的性能。

作为时频分析方法之一, 分数阶傅里叶变换^[5-6]与 Wigner-Ville 分布(WVD), Radon-Wigner 变换(RWT)分别有着一定的数学关系, 借助它们的联系, 可进一步说明分数阶傅里叶变换的物理意义。信号 $x(t)$ 的 Wigner-Ville 分布函数的定义为^[2]

$$W_x(t, w) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\xi}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\xi}{2}\right) e^{-jw\xi} d\xi$$

作为能量型时频表示, WVD满足许多期望的数学性质, 这里给出其边缘特性

$$\begin{aligned} |x(t)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int W_x(t, w) dw \\ |X(w)|^2 &= \int W_x(t, w) dt \end{aligned}$$

对WDF旋转 α 角度, 即对Wigner分布实施Radon变换, 其结果是

$$\begin{aligned} R[W(t, w)] &= \int W_x(u \cos \alpha - v \sin \alpha, u \sin \alpha + v \cos \alpha) dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u' \cos \alpha - v' \sin \alpha, u' \sin \alpha + v' \cos \alpha) \end{aligned}$$

而信号 $x(t)$ 的 p 阶分数阶傅里叶变换 $X_p(u)$ 的WVD就是将信号 $x(t)$ 的WVD 旋转 α 角度, 即WVD对于分数阶傅里叶变换具有旋转不变性, 所以有

$$|X_p(u)|^2 = R_\alpha |W_x(t, w)|$$

可以看出, WVD 对时间轴与频率轴的积分分别是信号在 t 时刻的瞬时功率和信号在频率 w 的谱密度, 而信号 $x(t)$ 的WVD对与时间成 α 角度的轴的积分投影对应着角度为 α 的分数阶傅里叶变换的幅度平方, 这进一步从能量的角度说明分数阶傅里叶变换作为广义傅里叶变换的含义。正弦信号在时频平面是一条平行于时间轴的直线, 即它的频率不随时间变化, 可视为旋转角度为 0° 的完全时间域表示; 冲击函数在时频平面是一条平行于频率轴的直线, 可视为旋转角度为 90° 的完全频率域表示; chirp 信号在时频平面是一条斜率为调频率的直线, 当该信号的某一角度的分数阶傅里叶变换与其调频率一致时, 在无限长度的理想情况下, 表现为幅度为无穷大的冲击, 在信号长度有限的情况下, 其分数阶傅里叶变换呈现极大值, 这就是Chirp信号在分数阶傅里叶变换域的特点。

离散Chirp-Fourier变换是最近提出的一种有效的线性调频信号检测技术, 它Fourier变换的一种推广形式, 可同时匹配chirp信号的中心频率和调频率。本文利用修正离散Chirp-Fourie变换(MDCFT)实现干扰信号的检测和参数估计, 从而实现对干扰的自适应抑制。分析和仿真表明, 该方法可对LFM干扰有着极好的抑制效果; 同时, 由于Chirp-Fourie变换是一维的线性变换, 可借助快速傅里叶变换(FFT)实现, 与基于WVD的算法相比, 不仅避免了交叉项干扰, 而且降低了计算的复杂度, 其实现更为简便^[7-9]。

3. 基于Matlab^[10-11]的上机仿真过程及结果分析

3. 1 对单分量信号的仿真及结果分析

(1): 输入解析信号为 $x(t) = e^{j\pi kt^2}$ 的 WVD 分布:

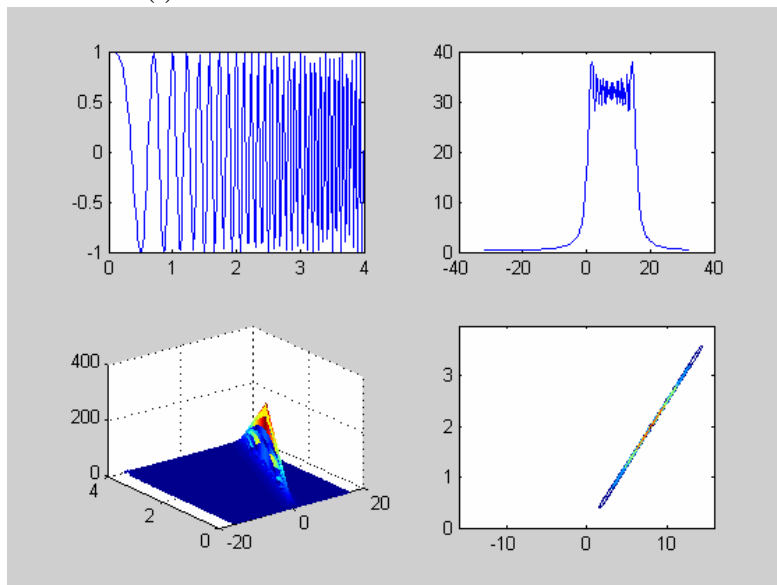


图 3.1.1 单分量信号的 WVD 分布

(2): 在上述解析信号中加入噪声后, 用 WVD 分布分析其性能:

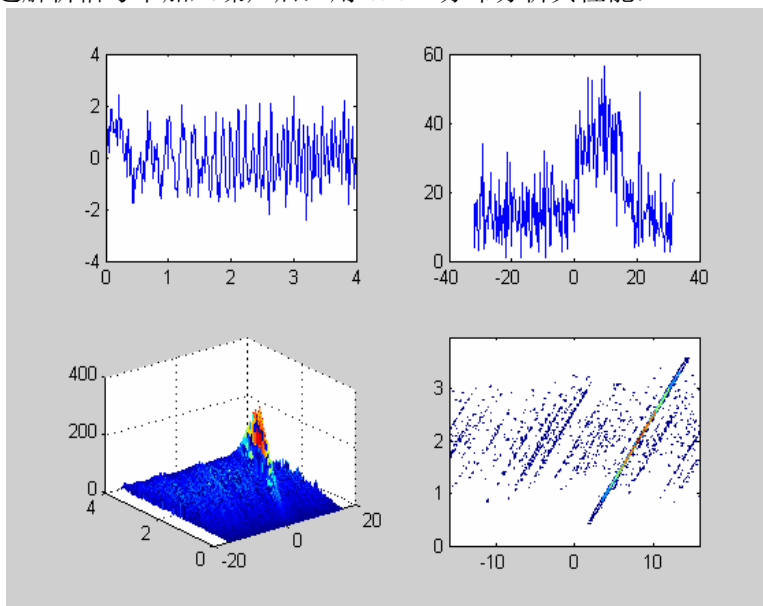


图 3.1.2 加入噪声的单分量信号的 WVD 分布

由图 3.1.1 可以看出实际结果与前面的理论推导一致。在实际应用中, 信号长度总是有限长的, 此时 WVD 分布呈背鳍状。

由图 3.1.2 可以得到 WVD 变换对噪声不太敏感, 时频变换后信噪比较高。但当干扰的幅度大到一定程度时, WVD 变换的结果会严重变差, 甚至分析不出结果。

(3): 前两个图是输入解析信号为 $x(t) = e^{j\pi kt^2}$ 的 Radon-Wigner 变换, 后两个图是在这个解析信号中加入噪声以后用 Radon-Wigner 变换对其进行的分析:

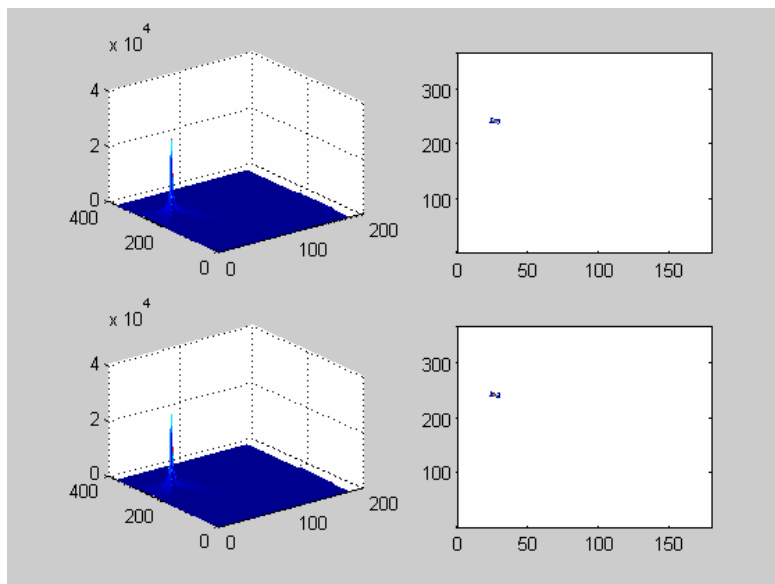


图 3.1.3 单分量信号的 Radon-Wigner 变换

由理论分析可知, 当旋转角度 α 与线性调频信号的斜率相适应时, Radon-Wigner 变换将出现一个峰值。这个分析在图中得到了证实。

(4): 图 3.1.4 前两个图是输入解析信号为 $x(t) = e^{j\pi kt^2}$ 的分数阶傅里叶变换, 后两个图是在

这个解析信号中加入噪声以后用分数阶傅里叶变换对其进行的分析：

分数阶傅里叶变换与 Radon-Wigner 变换的紧密联系在图 3.1.3 和图 3.1.4 的仿真中也可以得到证实。

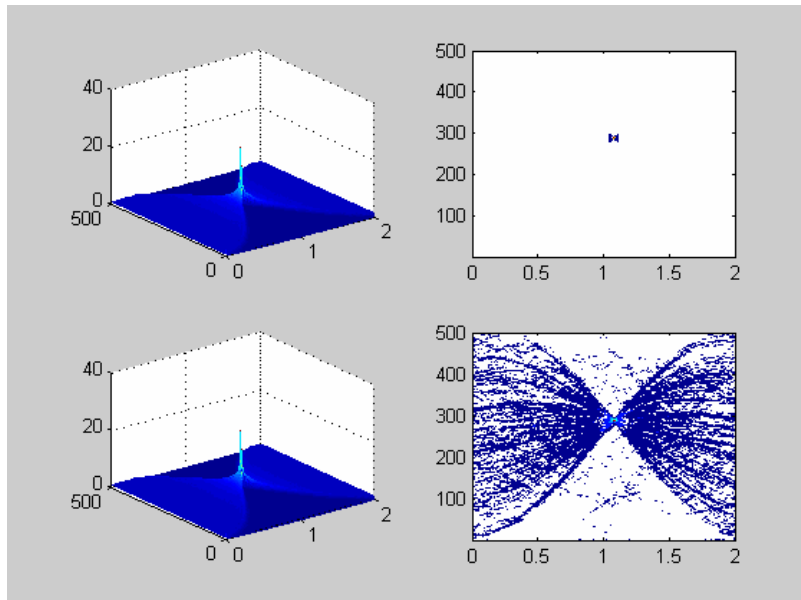


图 3.1.4 单分量信号的分数阶傅里叶变换

(5): 图 3.1.5 的前两个图是输入中心频率是 10, 调频率是 20 的单分量线性调频信号后的 Chirp-Fourier 变换, 后两个图是在这个信号中加入噪声以后用 Chirp-Fourier 变换对其进行的分析。

通过这个仿真, 还将证明一个重要性质: Chirp-Fourier 变换可同时匹配线性调频信号的中心频率和调频率。

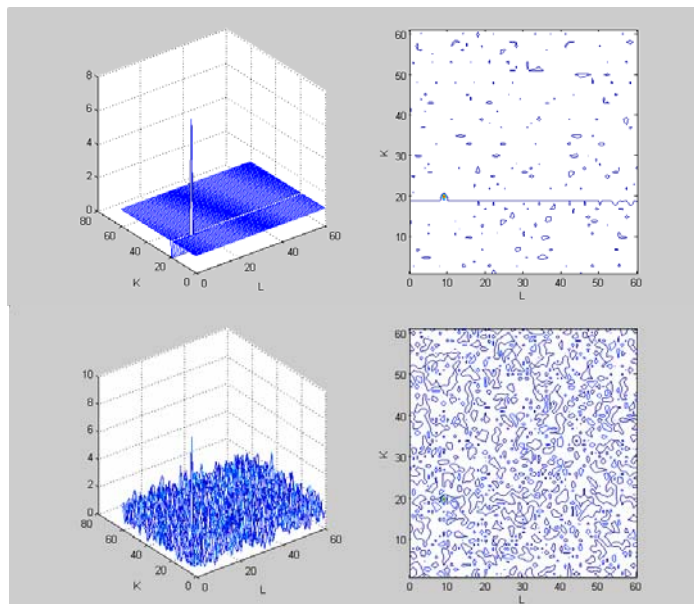


图 3.1.5 单分量信号的 Chirp-Fourier 变换

比较结论: 从以上几个仿真图形可以看出, 对单分量的 LFM 信号而言, 上述几个变换

都有非常好的时频聚集性，特别是 Wigner-Ville 分布与理论结果完全一致。在抗噪声方面，对比几个图可知，Radon-Wigner 变换和 Chirp-Fourier 变换要比 Wigner-Ville 分布和分数阶傅里叶变换更好。而对于分数阶傅里叶变换和 Wigner-Ville 分布，分数阶傅里叶变换的抗噪声性能要好。

3.2 对多分量信号的仿真及结果分析

(1): 一个多分量的线性调频信号的 WVD:

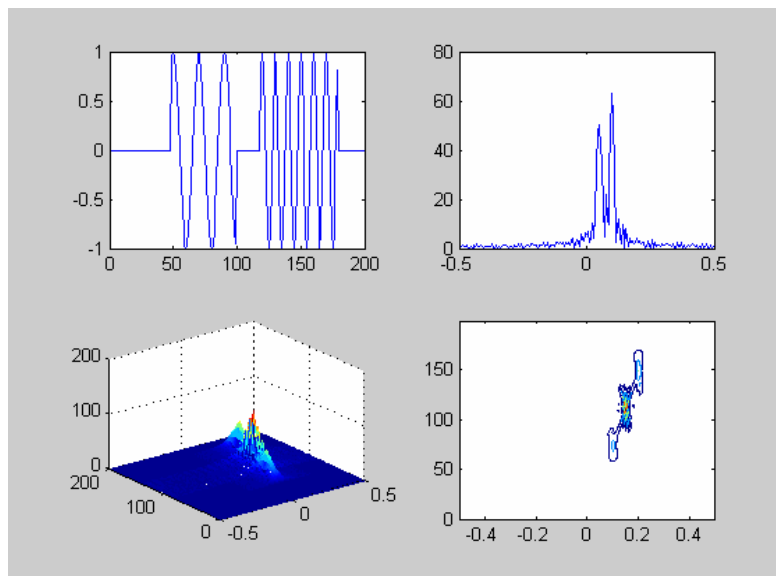


图 3.2.1 多分量信号的 WVD

(2): 一个多分量的线性调频信号的 Radon-Wigner 变换:

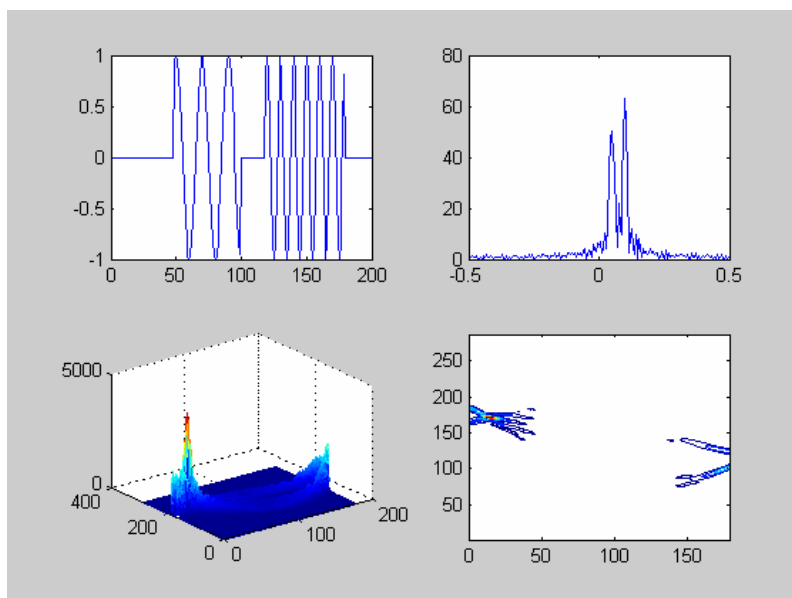


图 3.2.2 多分量信号的 Radon-Wigner 变换

(3): 一个多分量的线性调频信号的分数阶傅里叶变换:

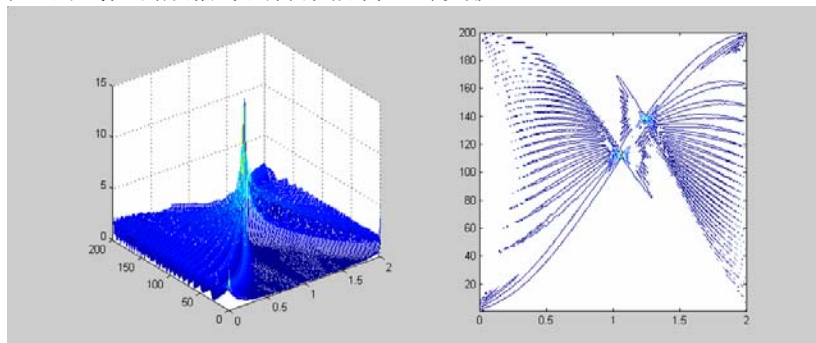


图 3.2.3 多分量信号的分数阶傅里叶变换

(4): 一个多分量的线性调频信号 (含两个分量, 中心频率和调频率分别为 $l_1=10, k_1=20; l_2=20, k_2=20$) 的 Chirp-Fourier 变换:

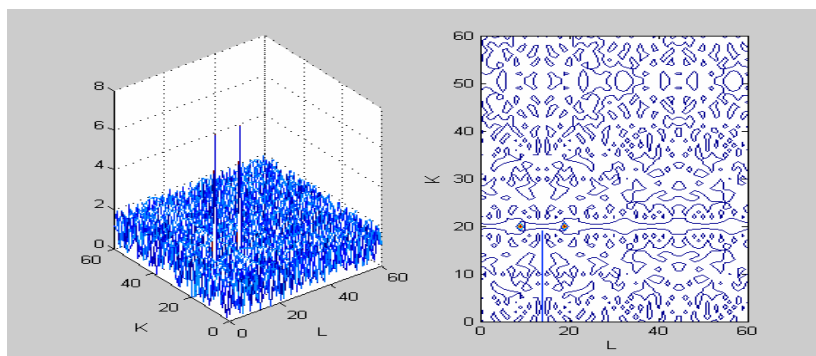


图 3.2.4 多分量信号的 Chirp-Fourier 变换

比较结论: 从以上四个图可以看出, 对于多分量信号, Wigner-Ville 分布由于存在交叉项, 时频平面模糊不清, 而其他三种变换则可以检测到两个信号。从图中还可以看到, Chirp-Fourier 变换的效果是最好的。而且我们从图中还可以清楚地看到线性调频信号的中心频率和调频率。

4 LFM 信号的应用

线性调频 (LFM, chirp) 信号广泛地应用于雷达、声纳和通信等信息系统中。在这类系统中, LFM 信号的检测与参数估计是一个重要的研究课题, 受到特别的关注。

下面给出一个基于 FRFT 的 MTD 雷达信号处理过程的防真实例^[12]。假设有一个运动目标, 回波信号为 $s(t) = \exp(-j\pi f_i t - j\pi w_i t^2) + n(t)$, 其中 $n(t)$ 为杂波信号, 信号参数为: $f=5, w=0.8$ 。 $n(t)$ 是均值为零, 方差为 1 的高斯白噪声, 信噪比为 3 dB, 观测时间为 3.2ms, 采样频率为 20KHZ, 采样点数为 $N = 3.2 \times 10^{-3} \times 20 \times 10^3 = 64$ 采用分数阶 Fourier 域的扫描上算法对该回波信号作计算机仿真, 仿真结果如图 4.1.1 所示。

从图 4.1.1 中可以清楚看到一个 LFM 信号的存在, 而且目标的峰值非常突出, 受杂波的影响相对较小。因此采用 FRFT 的 MTD 雷达的抗干扰能力较强。另外由于目标的特征非常明显, 可以通过适当提高杂波门限的方法来减小虚警概率

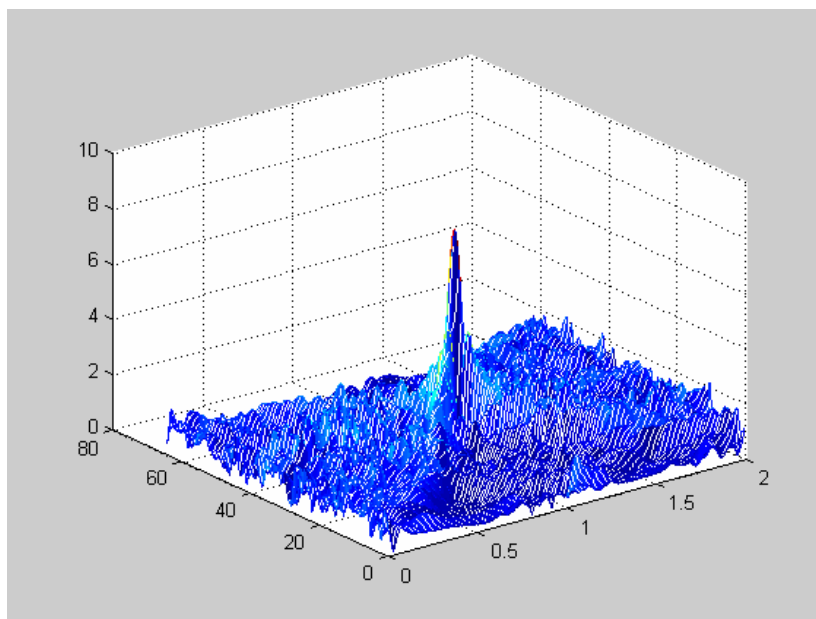


图 4.1.1 基于 FRFT 的 MTD 雷达信号处理过程的仿真

5 结束语

非平稳信号是现代信号处理的主要研究对象之一，对其有很多种理论分析方法。本文介绍的 Wigner-Ville 分布，Radon-Wigner 变换，分数阶傅里叶变换，Chirp-Fourier 变换是其中比较常用和重要的几种。本文对这几种变换做了初步的介绍，进而对它们进行了一些比较。这有助于进一步了解各种变换的性能和作信号分析时选择合适的变换。

时频分布之所以受到很多研究人员和信号处理领域的工程人员的重视，是因为它有很多传统傅立叶变换所不具备的性质。由时频分析的定义可知时频表示能给出信号在时域和频域的信息。经过几十年的发展，时频分析理论已趋于成熟，并逐渐在实际应用中崭露头角，近年来已在实际的非平稳信号处理中获得了十分广泛的应用。如：信号检测与分类，时频域滤波，信号综合，系统辨识和谱估计等。在 IEEE 的期刊和国际会议上发表的与采用时频工具处理非平稳干扰有关的论文及研究报告共有 100 余篇，其中以美国 Villanova 大学 Moeness G.Amin 教授的成果最为显著。

时频分析是一个前景很广阔的研究方向，虽然取得了一定的成就，但理论体系尚不十分完备，需要进一步的发展。

参考文献

- [1] 张贤达，保铮 《非平稳信号分析与处理》[M] 1998 年 9 月第 1 版 国防工业出版社
- [2] 沈民奋，孙丽莎 《现代随机信号与系统分析》[M]1998 年 6 月第 1 版 科学出版社
- [3] 于凤芹，曹家麟 《基于分数阶傅里叶变换的多分量 Chirp 信号的检测与参数估计》《语音技术》2004 年第 1 期
- [4] 孙泓波，郭欣，顾红，苏卫民，刘国岁 《修正 Chirp-Flourier 变换及其在 SAR 运动目标检测中的应用》《电子学报》2003 年第 1 期

- [5] 董永强, 陶然, 周思永, 王越 《基于分数阶傅里叶变换的SAR运动目标检测与成像》《兵工学报》1999年第2期
- [6] 陶然, 齐林, 王越 《分数阶 Fourier 变换的原理与应用》[M] 2004 年 8 月第 1 版 清华大学出版社
- [7] 董永强, 陶然, 周思永, 王越 《含未知参数的多分量chirp信号的分数阶傅里叶分析》《北京理工大学学报》1999年第5期
- [8] 陈辉, 王永良 《利用离散Chirp-Flourier变换技术估计调频信号参数》《空军雷达学院学报》2001年第1期
- [9] 齐林, 穆晓敏, 朱春华 《DSSS 系统中基于 Chirp-Fourier 变换的扫频干扰抑制算》《电讯技术》2004年第4期
- [10] 李勇, 徐震等 《MATLAB 辅助现代工程数字信号处理》[M] 2002 年 10 月第 1 版 西安电子科技大学出版社
- [11] 胡昌华, 周淘, 夏启兵, 张伟 《基于 MATLAB 的系统分析与设计——时频分析》[M]2001 年 7 月第 1
- [12] 王小宁, 许家栋 《离散调频-傅里叶变换及其在雷达成像中的应用》《系统工程与电子技术》2002年第3期

Time-Frequency Analysis of Liner Frequency Modulation Signal Based on Matlab

ShiKe

Beijing University of Posts and Telecommunications

Abstract: It is recognized that if a kind of time_frequency distribution does not have good time_frequency assemble quality to liner frequency modulation signal, it isn't a suitable time_frequency analysis tool for analyzing unsteady signal. Because the Wigner—Ville distribution of single frequency LFM signal is a line, it is fit for analyzing the single frequency LFM signal. However, for many frequencies composition signals, as a result of the cross interference, the time_frequency plane will become illegible. Yet, Radon—Wigner Transform, Fractional Fourier Transform and Chirp-Fourier Transform are much better than Wigner—Ville distribution. Further more, these transforms are different in other performance. This article stresses the advantages and disadvantages of them.

Keywords: time-frequency analysis; liner frequency modulation signal; Wigner-Ville distribution; Radon-Wigner transform; Fractional Fourier transform; Discrete Chirp-Fourier transform