

最小内向森林问题

浙江省杭州学军中学 张哲宇

什么是最小内向森林问题

给定带权有向图，对于特定 k ，求出包含 k 条边的最小内向森林，记为 MDF_k 。

本次交流将会给出一种时间复杂度为 $O(E \log E)$ 解决最小内向森林问题的方法。

目录

- ▶ 简单介绍最小树形图算法
- ▶ 借助拟阵发现性质
- ▶ 凸优化算法
- ▶ 分析与优化
- ▶ 优先内向树扩张算法

最小树形图算法

“朱刘算法”是一种解决最小树形图问题的优秀算法。
该算法基于以下两个非常重要的引理。

将一个结点的所有出边的权值同时加减，不影响最优解的树的形态。

如果图上所有边权非负，那么边权全为 0 的环可以视为一个结点。

最小树形图算法

- ▶ 1)、将所有边权变成非负。
- ▶ 2)、任选一个待确定出边的结点 u 。
- ▶ 3)、将 u 的最小的出边边权变成0, 然后将这条边作为这个结点的出边。如果出边形成了环, 则将这个环缩成单个结点。
- ▶ 4)、如果还有待确定出边的结点则返回2)。

使用拟阵发现性质

最小内向森林问题可以转化成拟阵交的问题，
所以：

最小内向森林问题关于边数的数列是凸的，
即 $\text{MDF}_i - \text{MDF}_{i-1} \leq \text{MDF}_{i+1} - \text{MDF}_i$ 。

凸优化

- ▶ 如果对于任意的斜率，都能求出该斜率在凸函数上的切点。那么通过二分斜率，就能较为精确地求出凸函数上的某一点。

凸优化

▶ 令 T 表示新建一个点 t 作为内向树的根, 将 V 中的每一个点向其连一条权值为 α 的有向边后, 最小树形图问题的答案。

$$\text{▶ } T(\alpha) = \min_{x \in [0, |V|)} \text{MDF}_x + (|V| - x) * \alpha$$

凸优化

- ▶
- ▶ 综上所述, 可以使用凸优化解决最小内向森林问题, 时间复杂度为 $O(E \log E \log_{(1/2)} \varepsilon)$ 。

分析与优化

- ▶ 在凸优化算法中，新建结点是很有优化空间的操作。希望能分析出新建结点的意义，以发掘更多的性质。

分析与优化

- ▶ 回忆一下“朱刘算法”。
- ▶ 如果将每次选完点后的操作称为一轮，那么每轮过后，所选的边形成内向树森林。
- ▶ 对于森林中的每一棵内向树，反复选择该内向树的根，即可求出该内向树扩张代价。

分析与优化

- ▶ 新建 t 的实际意义就是:
- ▶ 当某棵最优内向树对 t 之外扩张代价大于的时候, 对这个内向树对答案的影响到此为止。

分析与优化

把每个结点的最小出边变成 0 时，根节点
的出边减少值最大。

充分

该内向树是最优内向树。

► 我们希望通过改变 u 结点选择的顺序使得所有内向树都是最优内向树。

分析与优化

- ▶ 三分斜率 mid 。
- ▶ 在之后的过程中，始终将所有的最小出边都控制为 0：并重复以下两个操作：
 - ▶ 1)、选择出边减少值最小的点，如果引出一条边的最小代价大于 mi 就删去这棵内部树。
 - ▶ 2)、将 u 的最小的出边作为这个结点的出边。如果出边形成了环，则将这个环缩成一个结节点。

分析与优化

▶ 把内向树 A 接到内向树 B 上，内向树 B 的内
缩操作不变。

“选择出边减少值最少的点 u ”

结果一样

“选择扩张代价最小的内向树的根”

分析与优化

- ▶ 因为选择的内向树扩张代价不降，所以此时就不需要二分了。
- ▶ 去掉二分的同时也不难发现，中间过程中的每一个内向树森林，都是其边数下最优的。

优先内向树扩张算法

- ▶ 1) 、起初有 $|V|$ 个内向树，每个内向树是一个点。
- ▶ 2) 、令现在的边集为 E_{now} ，记录 $\text{MDF}_{|E_{\text{now}}|} =$
- ▶ 3) $\forall (E_{\text{now}})$ 求出现在每个内向树扩张代价。
- ▶ 4) 、如果现在没有内向树可以扩张代价退出。
- ▶ 5) 、选择代价最小的内向树扩张，返回 2) 。

优先内向树扩张算法

- ▶ 暴力实现的瓶颈在于求每个内向树的扩张代价。
- ▶ 预先执行所有的内缩操作，即可直接得到每棵内向树的扩张代价。
- ▶ 在最外层使用堆来维护扩张代价最小的内向树。
- ▶ 综上所述， $O(n \log n)$ 求出所有的 MDF_i 。

总结

- ▶ 优先内向树扩张算法能解决最小内向森林问题，同时严格强于一般的最小树形图算法。
- ▶ 欢迎各位与我深入探讨或对本文内容批评指正。

感谢

- ▶ 集训队教练和中国计算机协会提供的本次学习交流的机会。
- ▶ 徐先友教练对我的指导。

谢谢大家