

非常简单的动态规划问题选讲

slz

厦门双十中学

2020 年 10 月 4 日

先来一道热身题

你拥有一个天平，需要验证一个质量为 n 的物品（不用遵守左物右码）。
你只有质量为 $1, 4, 16, 64, 256, \dots (4^i)$ 的砝码，每种有无数个。
你希望用最少的砝码称量出质量 n ，并且只关心方案数模 10^9 是多少。
 $n \leq 10^{1000}$

状压dp

大家应该都很熟悉了，所以直接看题吧。

练习题1

有 n 个长度为 d 的01串，第 i 个串是 a_i 。

求有多少个长度任意的序列 b ，满足 $b_i < b_{i+1}$ ，且 $a_{b_i} \wedge a_{b_{i+1}} = a_{b_i}$ 。

答案对 $10^9 + 7$ 取模。

$n \leq 2 \times 10^5, d \leq 16$

练习题2

你有一个 n 个节点的有向图，我们称一个合法的方案是将其中一些边的方向翻转之后使得剩下的图无环。请对于所有合法的方案，将方案中翻转方向的边的数量求和。

答案对998244353取模。

$n \leq 18$ 。

好像可以加强： $n \leq 20$ 。

插头dp

插头dp，又称轮廓线dp，其实本质是状压dp。

插头dp一般是维护一条轮廓线上的每一个单位的状态，每一次把轮廓线往最终目标扩充。

轮廓线的状态一般使用状压实现。

练习题

有一个 $n \times m$ 的盒子，格子之间光路可通。

在盒子的某些地方可以放置镜子（也可以不放置），有些位置不能放置镜子。

如果放置镜子，那么光路为左上、右下联通或左下、右上联通。

如果不放置镜子，那么光路为上下、左右联通。

求从所有 $2 \times (n + m)$ 的边框射入的光的光路总长度的最小值。

$n \leq 10, m \leq 12$ 。

树上dp

树上dp大家应该也很熟悉了。
值得注意的是树上背包的效率是 $O(nk)$ 不是 $O(nk^2)$ 的。

练习题1

给一棵树，每条边有一个方向，从 x_i 指向 y_i 。
求有多少个长度为 n 的排列，且这个排列对于所有边，都满足 $p_{x_i} < p_{y_i}$ 。
 $n \leq 1000$ ，答案对 $10^9 + 7$ 取模。

练习题2

给定一个大小为 n 的树，求对其进行点分治的方案数。
两次点分治不同当且仅当某个连通块的点分中心不同。
 $n \leq 5000$ ，答案对 $10^9 + 7$ 取模。

dp的其他小技巧

当dp有单调性时：单调队列优化、分治转移...

当dp是凸函数时：斜率优化、wqs二分...

当dp的转移比较优美时：数据结构优化...

当dp状态比较难设计时：设计未来状态...

还有很多...

杂题选讲1

给定一棵树，每个点有一个价值 s_i 。

给定 q 组询问，每次询问 x ，求在树上选择恰好 x 个点，使得没有两个被选择的点相连，且被选择点的价值和最大。

$n, q \leq 10^5$

杂题选讲2

有 n 个物品，每个物品有两个价值 a_i, b_i 。

你可以从 n 个物品中选择 k 个物品，并且将物品按一定顺序摆放。放在位置 j 的物品 i 的贡献为 $a_i \cdot (j - 1) + b_i$ 。

你要求出所有可能的 $k(1 \leq k \leq n)$ ，从 n 个物品中选 k 个并摆放的最大贡献。

$n \leq 3 \times 10^5, 0 \leq a_i \leq 10^6, 0 \leq b_i \leq 10^{12}$

杂题选讲3

对于一个长度为 n 的排列 p ，对其建立笛卡尔树（小的为根）。
设笛卡尔树的 $n - 1$ 条边分别连接 x_i, y_i ，那么这个排列的权值为：

$$\sum_{i=1}^{n-1} |p_{x_i} - p_{y_i}|$$

求所有 $n!$ 种排列的价值和。

$$n \leq 100$$

谢谢大家。