线性代数

kczno1

2020.2.11.

线性方程

n 元线性方程组：n 个未知数 $x_{1\ldots n}$ 的若干个线性方程组。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

线性组合：对于 n 维向量组 $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ 和系数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$，称 $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m$ 为其对应的线性组合。

线性方程

将一条方程看作一个向量。
方程组的一组解一定也是这些方程的线性组合的解。
如果两个方程组互为线性组合，则两个方程组同解。
同解变形：
交换两个方程的位置
将某个方程乘以非零常数
将某个方程的常数倍加到另一方程上

线性方程

线性方程组的矩阵表示：

$$A = (a'_{i,j})_{m\times n+1} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix}$$

线性方程

行等价：对于两个等大小矩阵 A, B ，满足 B 的每一行都是 A 的行线性组合，A 的每一行都是 B 的行线性组合。
矩阵的行初等变换：
交换两行的位置
将某行乘以非零常数
将某行的常数倍加到另一行上

线性方程

阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

线性方程

最简阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

高斯消元：
利用初等行变换将矩阵化为最简阶梯形矩阵。

题目

Easy:
JSOI2008 球形空间产生器sphere
Medium:
HNOI2011 XOR和路径
HNOI2013 游走
JSOI2009 有趣的游戏
USACO 驱逐猪猡
电阻
Gambler Bo
Hard:
2854: civilization
SDOI2017 硬币游戏
Circles of Waiting

矩阵代数运算

令 $A=(a_{i,j})_{n\times m}$ 。
加减：对于 $B=(b_{i,j})_{n\times m}$，$A\pm B=(a_{i,j}\pm b_{i,j})_{n\times m}$ 。
数乘：$\lambda A=(\lambda a_{i,j})_{n\times m}$ 。
矩阵乘法：对于 $B=(b_{i,j})_{m\times p}$， $AB=(c_{i,j})_{m\times p}$ ，
$c_{i,j}=\sum_{k=1}^{m} a_{i,k}b_{k,j}$ 。
转置：$A^T=(a_{j,i})_{m\times n}$。

矩阵运算律

乘法对加法满足分配律：

$A(B+C)=AB+AC,(B+C)A=BA+CA$

乘法满足结合律：$(AB)C=A(BC)$

乘法一般不满足交换律：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

转置：$(AB)^T=B^TA^T$

NOI2013 矩阵游戏

一个 $n \times m$ 的矩阵 F 满足：
$F_{1,1} = 1, F_{i,j} = aF_{i,j-1} + b(j > 1), F_{i,1} = cF_{i-1,m} + d(i > 1)$ 。
给定 n, m, a, b, c, d ， 求 $F_{n,m} \bmod 10^9 + 7$ 。
$n, m \leq 10^{1000000}, a, b, c, d \leq 10^9$ 。

题目

Medium:
HDU5411 CRB and Puzzle
USACO 奶牛接力跑
Once Again...
DZY Loves Fibonacci Numbers
HNOI2011 数学作业
ICPC Xi’an 2017 Online A Tree
Hard:
NOI2013 向量内积
POI2015 Wycieczki
Fibonacci矩阵
Mathematician QSC
Array Challenge

基本定义

向量空间：对于一个 n 维向量的集合 V ，我们称其是一个向量空间，当且仅当 V 中任意两个向量的任意线性组合仍 $\in V$ 。
生成空间:对于 n 维向量组 $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ ，我们称其生成空间为其所有线性组合组成的集合。

基本定义

线性相关：对于 n 维向量组 $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，我们称其为线性相关的，当且仅当它们可以通过系数不全为 0 的线性组合得到零向量。
线性无关：对于 n 维向量组 $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，我们称其为线性无关的，当且仅当它们不是线性相关的。

基本定义

基：对于一个向量空间 V，我们称 n 维向量组 $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ 是 V 的一组基，当且仅当 a 线性无关，且生成空间为 V。

线性基

例题1：给你 n 个数，问有多少个数能被这 n 个数的某个子集异或得到。

线性基

即这 n 个 L 维向量的生成空间的维数。

线性基

即这 n 个 L 维向量的生成空间的维数。
建一个 $n \times L$ 的矩阵 A，将这 n 个向量作为 A 的行向量。维数即 A 的秩。高斯消元即可。

线性基

例题2：给你 n 个数，m 次询问，每次给出一个 x ，问 x 能否被这 n 个数的某个子集异或得到。

线性基

即判断 x 是否在这 n 个 L 维向量的生成空间里。

线性基

即判断 x 是否在这 n 个 L 维向量的生成空间里。
考虑求出一组基。
建一个 $n \times L$ 的矩阵 A，将这 n 个向量作为 A 的行向量。对 A 高斯消元，最后得到的非零行向量即一组基。

线性基

即判断 x 是否在这 n 个 L 维向量的生成空间里。
考虑求出一组基。
建一个 $n \times L$ 的矩阵 A，将这 n 个向量作为 A 的行向量。对 A 高斯消元，最后得到的非零行向量即一组基。
每个基向量的最高非零位两两不同，对每一位记录它对应的基向量。
询问 x 时，只需从高到低枚举 x 的每一位，如果 x 的这一位为 1，如果这一位不存在对应的基向量，说明无解；否则将 x 异或这一位对应的基向量，然后递归操作。

线性基

例题3：一个集合 S ,初始为空，m 次操作，
每次操作要么给出一个 x ，问 x 能否被 S 的某个子集异或得到；
要么给出一个 x ，往 S 加入这个 x 。

线性基

实际上线性基是支持插入的。
插入 x 时，只需从高到低枚举 x 的每一位，如果 x 的这一位为 1，如果这一位不存在对应的基向量，则将这一位对应的基向量置为 x；否则将 x 异或这一位对应的基向量，然后递归操作。

线性基

例题4：一个集合 S ,初始为空，m 次操作，
每次操作要么给出一个 x ，问 x 能否被 S 的某个子集异或得到；
要么给出一个 x ，往 S 加入这个 x ;
要么给出一个 x ，删除 S 中的 x 。
$m \leq 1000, x \leq 2^{1000}$

线性基

实际上线性基是支持删除的。
对于每个基向量和零向量都保存它是由哪些向量异或得到的。
在删除向量 x 时，查找零向量中是否存在包含 x 的，如果没有就找到基向量里位最低的包含 x 的，将它所保存的信息(由哪些向量异或得到以及值是多少)异或到其余所有含 x 的向量的信息里即可。
时间复杂度 $O(\frac{n^2L}{w})$ 。

题目

Medium:
51nod 异或凑数
WC2011 Xor
HDU Happy Matt Friends
CF Gambling Nim
2016 Petrozavodsk Winter, Moscow SU Trinity Contest A ABBA
shallot
Hard:
HAOI2018 反色游戏
THUSCH 2017 杜老师
SPOJ JZPLIT Turn on the lights

行列式

对于一个 n 阶方阵 A，

$$det(A) = \sum_{p \in S(n)} sgn(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p[i]}$$

其中 $det(A)$ 表示 A 的行列式，也记作 $|A|$；
$S(n)$ 表示 $1 \dots n$ 的全排列；
$sgn(p)$ 表示 $(-1)^{s(p)}$，其中 $s(p)$ 是 p 的逆序对数量。

行列式的几何意义是 n 维平行体的有向体积。

题目

Hard:
HDU Intersection is not allowed!
SPOJ MATCH Perfect Matching
Very Hard:
ICPC Central Europe 2009 (False) faces

生成树相关

拉普拉斯矩阵：图的度数(入度)矩阵减去邻接矩阵
$L_{i,j} = deg(v_i)[i = j] - e_{i,j}$

Matrix-Tree 定理：以 v_i 为根的生成树个数等于删除 L 第 i 行第 i 列后的行列式。

BEST 定理：有向图欧拉回路的数量等于任取一点 v_k 为根的生成树形图个数乘以 $\prod_{i=1}^{n}(deg(v_i) - 1)!$

题目

Medium:
Which Dreamed It
HDU RXD and numbers
HEOI2015 小Z的房间
JSOI2008 最小生成树计数
Very Hard:
ICPC Shanghai 2014 A The Matrix Revolutions
HDU Rikka with Spanning Tree

矩阵对角化

对于 n 阶方阵 M ，如果存在 n 阶可逆矩阵 P ，使得 $D = P^{-1}MP$ 是对角矩阵，则称 M 可对角化。
此时，$M = PDP^{-1}$ ， $M^k = P^{-1}D^kP$ 可以快速计算。

设 $P = [V_1, V_2 \ldots V_n], D_{i,i} = \lambda_i$ ，则由 $MP = PD$ ，得 $[MV_1, MV_2 \ldots MV_n] = [\lambda_1 V_1, \lambda_2 V_2 \ldots \lambda_n V_n]$ ，即 $MV_i = \lambda_i V_i$ 。

特征多项式

对于一个 n 阶方阵 A ，如果存在标量 λ 和非零向量 v ，
使得 $Av = \lambda v$ ，
则称 λ 为 A 的一个特征值，v 为 A 的一个特征向量。

特征多项式

考虑如何判断一个 λ 是不是 A 的特征值。
即 $Av = \lambda v$ 存在非零解。
即 $(A - \lambda I)v = 0$ 存在非零解。
即 $rank(A - \lambda I) < n$ 。
即 $|A - \lambda I| = 0$ 。
$|A - \lambda I|$ 是一个关于 λ 的 n 次多项式 $p(\lambda)$，被称为 A 的特征多项式。

特征多项式

若方阵 A 是多项式 $f(x)$ 的根，即 $f(A)=O$ ，则称 $f(x)$ 是 A 的零化多项式。

哈密尔顿–凯莱定理:

对于一个 n 阶方阵 A ， A 的特征多项式是 A 的零化多项式。

特征多项式

对于一个序列 $a_{0\ldots n-1}$ ，我们说它满足线性递推式 $p_{1\ldots m}$ ，当且仅当 $\forall i \geq m, a_i = \sum_{j=1}^{m} p_j a_{i-j}$ 。

问题：给定 $a_{0\ldots m-1}, p_{1\ldots m}, k$ ，求 a_k 。

矩乘+快速幂：$O(m^3 \log k)$ 。

特征多项式

对于一个多项式 $f(x)=\sum c_i x^i$ ，定义 $G(f)=\sum c_i a_i$ 。
显然 G 满足 $G(f)\pm G(g)=G(f\pm g)$ 。

令 $f(x)=x^m-\sum_{j=1}^{m} x^{m-j}p_j$ ，那么

$G(f)=G(fx)=G(fx^2)=\cdots=0$ 。故 $G(fg)=0$ (g 是任意一个多项式) 。

我们所求即 $G(x^k)$ 。由于 $G(f\lfloor\frac{x^k}{f}\rfloor)=0$ ，有 $G(x^k)=G(x^k \bmod f)$ 。

使用快速幂+多项式取模求出 $x^k \bmod f$ 。

时间复杂度 $O(m^2\log k)$ 或 $O(m\log m\log k)$ 。

题目

Easy:
Shlw loves matrix I
Medium:
LOJ Shlw loves matrix II
BZOJ 矩阵
Hard:
NOI2017 泳池
牛客 特征值
牛客 wyf的超级多项式