题目选讲

QAQAutoMaton

2020 年 6 月 4 日

AGC032F - One Third

- 有一个周长为 1 的圆，你现在想在上面随机 n 个点 $A_1 \dots A_n$，并选出两个点之间的弧，使得弧长 $\overset{\frown}{AB}$ 最接近 $\frac{1}{3}$。

AGC032F - One Third

- 有一个周长为 1 的圆，你现在想在上面随机 n 个点 $A_1 \dots A_n$，并选出两个点之间的弧，使得弧长 $\overset{\frown}{AB}$ 最接近 $\frac{1}{3}$。
- 假设每一个点位置独立且每个点在圆上等概率随机，求 $\min |\overset{\frown}{AB} - \frac{1}{3}|$ 的期望，输出模 $(10^9 + 7)$。

AGC032F - One Third

- 有一个周长为 1 的圆，你现在想在上面随机 n 个点 $A_1 \dots A_n$，并选出两个点之间的弧，使得弧长 $\widehat{AB}$ 最接近 $\frac{1}{3}$。
- 假设每一个点位置独立且每个点在圆上等概率随机，求 $\min|\widehat{AB} - \frac{1}{3}|$ 的期望，输出模 $(10^9 + 7)$。
- $n \le 10^6$

题解

题解

- 考虑将 $|\widehat{AB} - \frac{1}{3}|$ 变成距离的形式。

题解

- 考虑将 $|\widehat{AB}-\frac{1}{3}|$ 变成距离的形式。
- $\widehat{AB}=\min(|A-B|,1-|A-B|)$

题解

- 考虑将 $|\overset{\frown}{AB} - \frac{1}{3}|$ 变成距离的形式。
- $\overset{\frown}{AB} = \min(|A-B|, 1-|A-B|)$

$$
\begin{aligned}
&|\overset{\frown}{AB} - \frac{1}{3}| \\
=&|\min(|A-B|, 1-|A-B|) - \frac{1}{3}| \\
=&\min(|A-B-\frac{1}{3}|, |B-A-\frac{1}{3}|, |1-A+B-\frac{1}{3}|, |1-B+A-\frac{1}{3}|) \\
=&\min(|A-(B+\frac{1}{3})|, |(B-\frac{1}{3})-A|, |1-(A-(B-\frac{1}{3}))|, |1-((B+\frac{1}{3})-A)|)
\end{aligned}
$$

题解

- 考虑将 $|\widehat{AB}-\frac{1}{3}|$ 变成距离的形式。
- $\widehat{AB}=\min(|A-B|,1-|A-B|)$

$$
\begin{aligned}
&|\widehat{AB}-\frac{1}{3}| \\
=&|\min(|A-B|,1-|A-B|)-\frac{1}{3}| \\
=&\min(|A-B-\frac{1}{3}|,|B-A-\frac{1}{3}|,|1-A+B-\frac{1}{3}|,|1-B+A-\frac{1}{3}|) \\
=&\min(|A-(B+\frac{1}{3})|,|(B-\frac{1}{3})-A|,|1-(A-(B-\frac{1}{3}))|,|1-((B+\frac{1}{3})-A)|)
\end{aligned}
$$

- 令 $B'=B+\frac{1}{3},B''=B-\frac{1}{3}$

题解

- 考虑将 $|\overset{\frown}{AB} - \frac{1}{3}|$ 变成距离的形式。
- $\overset{\frown}{AB} = \min(|A-B|, 1-|A-B|)$

$$\begin{aligned}
&|\overset{\frown}{AB} - \frac{1}{3}| \\
=&|\min(|A-B|, 1-|A-B|) - \frac{1}{3}| \\
=&\min(|A-B-\frac{1}{3}|, |B-A-\frac{1}{3}|, |1-A+B-\frac{1}{3}|, |1-B+A-\frac{1}{3}|) \\
=&\min(|A-(B+\frac{1}{3})|, |(B-\frac{1}{3})-A|, |1-(A-(B-\frac{1}{3}))|, |1-((B+\frac{1}{3})-A)|)
\end{aligned}$$

- 令 $B' = B + \frac{1}{3}, B'' = B - \frac{1}{3}$
- 则 $|\overset{\frown}{AB} - \frac{1}{3}| = \min(\overset{\frown}{AB'}, \overset{\frown}{AB''})$

题解

- 考虑将 $|\overset{\frown}{AB}-\frac{1}{3}|$ 变成距离的形式。
- $\overset{\frown}{AB}=\min(|A-B|,1-|A-B|)$

$$
\begin{aligned}
&|\overset{\frown}{AB}-\frac{1}{3}|\\
=&|\min(|A-B|,1-|A-B|)-\frac{1}{3}|\\
=&\min(|A-B-\frac{1}{3}|,|B-A-\frac{1}{3}|,|1-A+B-\frac{1}{3}|,|1-B+A-\frac{1}{3}|)\\
=&\min(|A-(B+\frac{1}{3})|,|(B-\frac{1}{3})-A|,|1-(A-(B-\frac{1}{3}))|,|1-((B+\frac{1}{3})-A)|)
\end{aligned}
$$

- 令 $B'=B+\frac{1}{3},B''=B-\frac{1}{3}$
- 则 $|\overset{\frown}{AB}-\frac{1}{3}|=\min(\overset{\frown}{AB'},\overset{\frown}{AB''})$
- 对于每个 A_i，加上 $A_i+\frac{1}{3}$ 和 $A_i-\frac{1}{3}$ 两个点，一共 $3n$ 个点。

题解

- 考虑将 $|\widehat{AB}-\frac{1}{3}|$ 变成距离的形式。
- $\widehat{AB}=\min(|A-B|,1-|A-B|)$

$$
\begin{aligned}
&|\widehat{AB}-\frac{1}{3}|\\
=&|\min(|A-B|,1-|A-B|)-\frac{1}{3}|\\
=&\min(|A-B-\frac{1}{3}|,|B-A-\frac{1}{3}|,|1-A+B-\frac{1}{3}|,|1-B+A-\frac{1}{3}|)\\
=&\min(|A-(B+\frac{1}{3})|,|(B-\frac{1}{3})-A|,|1-(A-(B-\frac{1}{3}))|,|1-((B+\frac{1}{3})-A)|)
\end{aligned}
$$

- 令 $B'=B+\frac{1}{3},B''=B-\frac{1}{3}$
- 则 $|\widehat{AB}-\frac{1}{3}|=\min(\widehat{AB'},\widehat{AB''})$
- 对于每个 A_i，加上 $A_i+\frac{1}{3}$ 和 $A_i-\frac{1}{3}$ 两个点，一共 $3n$ 个点。
- 若 A_i 是红色，$A_i+\frac{1}{3}$ 是蓝色，$A_i-\frac{1}{3}$ 是绿色，
- 那么求的就是两个不同色点的距离的最小值。

题解

- 注意到可以只考虑 A_1 到 $A_1 + \frac{1}{3}$ 这一段弧的答案。

题解

- 注意到可以只考虑 A_1 到 $A_1+\frac{1}{3}$ 这一段弧的答案。
- 简要说明：如果最优解和这个区间交 $=0$，一定可以两个点同时 $+\frac{1}{3}$ 或 $-\frac{1}{3}$ 使得相交 >0

题解

- 注意到可以只考虑 A_1 到 $A_1+\frac{1}{3}$ 这一段弧的答案。
- 简要说明：如果最优解和这个区间交 $=0$，一定可以两个点同时 $+\frac{1}{3}$ 或 $-\frac{1}{3}$ 使得相交 >0
- 如果相交且不包含，由于两个点颜色不同，则「最优解」和区间的交点一定和两个点中任意一点颜色不同，且距离一定 $\leq$「最优解」，这两个区间一定可以转化为被区间包含。

题解

- 注意到可以只考虑 A_1 到 $A_1+\frac{1}{3}$ 这一段弧的答案。
- 简要说明：如果最优解和这个区间交 $=0$，一定可以两个点同时 $+\frac{1}{3}$ 或 $-\frac{1}{3}$ 使得相交 >0
- 如果相交且不包含，由于两个点颜色不同，则「最优解」和区间的交点一定和两个点中任意一点颜色不同，且距离一定 $\leq$「最优解」，这两个区间一定可以转化为被区间包含。
- 那么问题变成了 $n-1$ 个点分别在 $[0,\frac{1}{3})$ 中随机，且颜色也随机。且 0 的颜色为红，$\frac{1}{3}$ 的颜色为蓝，求不同色区间长度最小值。

题解

- 注意到可以只考虑 A_1 到 $A_1+\frac{1}{3}$ 这一段弧的答案。
- 简要说明：如果最优解和这个区间交 $=0$，一定可以两个点同时 $+\frac{1}{3}$ 或 $-\frac{1}{3}$ 使得相交 >0
- 如果相交且不包含，由于两个点颜色不同，则「最优解」和区间的交点一定和两个点中任意一点颜色不同，且距离一定 $\leq$「最优解」，这两个区间一定可以转化为被区间包含。
- 那么问题变成了 $n-1$ 个点分别在 $[0,\frac{1}{3})$ 中随机，且颜色也随机。且 0 的颜色为红，$\frac{1}{3}$ 的颜色为蓝，求不同色区间长度最小值。
- 「不同色区间」也只用考虑相邻两个点颜色不同的情况

题解

- 考虑将问题拆成有 k 个区间端点颜色不同的概率和这 k 个区间 min 的期望，这两个显然独立。

题解

- 考虑将问题拆成有 k 个区间端点颜色不同的概率和这 k 个区间 min 的期望，这两个显然独立。
- 前面一部分只用考虑长度为 n+1，第 1 个为红，第 n+1 个为蓝，其它的位置在三种颜色中随机的序列。

题解

- 考虑将问题拆成有 k 个区间端点颜色不同的概率和这 k 个区间 min 的期望，这两个显然独立。
- 前面一部分只用考虑长度为 n+1，第 1 个为红，第 n+1 个为蓝，其它的位置在三种颜色中随机的序列。
- dp 计算 $f_{n,0/1/2}$ 表示长度为 $n+1$，相邻两个不同，第 1 个为 0，最后一个为 $0, 1, 2$ 的序列个数

题解

- 考虑将问题拆成有 k 个区间端点颜色不同的概率和这 k 个区间 min 的期望，这两个显然独立。
- 前面一部分只用考虑长度为 n+1，第 1 个为红，第 n+1 个为蓝，其它的位置在三种颜色中随机的序列。
- dp 计算 $f_{n,0/1/2}$ 表示长度为 $n+1$，相邻两个不同，第 1 个为 0，最后一个为 $0,1,2$ 的序列个数
- 答案自然是 $\frac{f_{k,1}\binom{n}{k}}{3^{n-1}}$

题解

- 考虑将问题拆成有 k 个区间端点颜色不同的概率和这 k 个区间 min 的期望，这两个显然独立。
- 前面一部分只用考虑长度为 n+1，第 1 个为红，第 n+1 个为蓝，其它的位置在三种颜色中随机的序列。
- dp 计算 $f_{n,0/1/2}$ 表示长度为 $n+1$，相邻两个不同，第 1 个为 0，最后一个为 $0,1,2$ 的序列个数
- 答案自然是 $\frac{f_{k,1}\binom{n}{k}}{3^{n-1}}$
- 后面一部分考虑 $s=\frac{1}{3}$ 为长度，设 $P(x)$ 为选出 k 段都 $\geq xs$ 的概率。

题解

- 考虑将问题拆成有 k 个区间端点颜色不同的概率和这 k 个区间 min 的期望，这两个显然独立。
- 前面一部分只用考虑长度为 n+1，第 1 个为红，第 n+1 个为蓝，其它的位置在三种颜色中随机的序列。
- dp 计算 $f_{n,0/1/2}$ 表示长度为 $n+1$，相邻两个不同，第 1 个为 0，最后一个为 $0,1,2$ 的序列个数
- 答案自然是 $\frac{f_{k,1}\binom{n}{k}}{3^{n-1}}$
- 后面一部分考虑 $s=\frac{1}{3}$ 为长度，设 $P(x)$ 为选出 k 段都 $\geq xs$ 的概率。
- 注意到长度为 1 的中满足某几个区间 $\geq x$ 的方案和先在 $1-xk$ 中选点，然后给这几个区间 $+x$ 一一对应，所以 $P(x)=(1-kx)^{n-1}$ 如果 $0\leq x\leq\frac{1}{k}$

题解

- 考虑将问题拆成有 k 个区间端点颜色不同的概率和这 k 个区间 min 的期望，这两个显然独立。
- 前面一部分只用考虑长度为 n+1，第 1 个为红，第 n+1 个为蓝，其它的位置在三种颜色中随机的序列。
- dp 计算 $f_{n,0/1/2}$ 表示长度为 $n+1$，相邻两个不同，第 1 个为 0，最后一个为 $0,1,2$ 的序列个数
- 答案自然是 $\frac{f_{k,1}\binom{n}{k}}{3^{n-1}}$
- 后面一部分考虑 $s=\frac{1}{3}$ 为长度，设 $P(x)$ 为选出 k 段都 $\geq xs$ 的概率。
- 注意到长度为 1 的中满足某几个区间 $\geq x$ 的方案和先在 $1-xk$ 中选点，然后给这几个区间 $+x$ 一一对应，所以 $P(x)=(1-kx)^{n-1}$ 如果 $0\leq x\leq\frac{1}{k}$
- 则期望长度为 $\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{k}}(1-kx)^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3nk}$

题解

- 考虑将问题拆成有 k 个区间端点颜色不同的概率和这 k 个区间 min 的期望，这两个显然独立。
- 前面一部分只用考虑长度为 n+1，第 1 个为红，第 n+1 个为蓝，其它的位置在三种颜色中随机的序列。
- dp 计算 $f_{n,0/1/2}$ 表示长度为 $n+1$，相邻两个不同，第 1 个为 0，最后一个为 $0, 1, 2$ 的序列个数
- 答案自然是 $\frac{f_{k,1}\binom{n}{k}}{3^{n-1}}$
- 后面一部分考虑 $s = \frac{1}{3}$ 为长度，设 $P(x)$ 为选出 k 段都 $\geq xs$ 的概率。
- 注意到长度为 1 的中满足某几个区间 $\geq x$ 的方案和先在 $1 - xk$ 中选点，然后给这几个区间 $+x$ 一一对应，所以 $P(x) = (1 - kx)^{n-1}$ 如果 $0 \leq x \leq \frac{1}{k}$
- 则期望长度为 $\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{k}}(1 - kx)^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3nk}$
- 则答案就是 $\sum_k \frac{f_{k,1}\binom{n}{k}}{3^n nk}$

题解

- 考虑将问题拆成有 k 个区间端点颜色不同的概率和这 k 个区间 min 的期望，这两个显然独立。
- 前面一部分只用考虑长度为 n+1，第 1 个为红，第 n+1 个为蓝，其它的位置在三种颜色中随机的序列。
- dp 计算 $f_{n,0/1/2}$ 表示长度为 $n+1$，相邻两个不同，第 1 个为 0，最后一个为 $0,1,2$ 的序列个数
- 答案自然是 $\frac{f_{k,1}\binom{n}{k}}{3^{n-1}}$

- 后面一部分考虑 $s=\frac{1}{3}$ 为长度，设 $P(x)$ 为选出 k 段都 $\geq xs$ 的概率。
- 注意到长度为 1 的中满足某几个区间 $\geq x$ 的方案和先在 $1-xk$ 中选点，然后给这几个区间 $+x$ 一一对应，所以 $P(x)=(1-kx)^{n-1}$ 如果 $0\leq x\leq\frac{1}{k}$
- 则期望长度为 $\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{k}}(1-kx)^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3nk}$
- 则答案就是 $\sum_k\frac{f_{k,1}\binom{n}{k}}{3^nnk}$
- 时间复杂度 $O(n)$。

CF1172F - Nauuo and Bug

Function — a fake way to calculate sum modulo p

```
function ModAdd(x, y, p)
    if x + y < p then
        return x + y
    else
        return x + y − p

function Sum(A, l, r, p)
    result ← 0
    for i ← l to r do
        result ← ModAdd(result, A[i], p)
    return result
```

CF1172F - Nauuo and Bug

Function — a fake way to calculate sum modulo p

```
function ModAdd(x, y, p)
    if x + y < p then
        return x + y
    else
        return x + y − p

function Sum(A, l, r, p)
    result ← 0
    for i ← l to r do
        result ← ModAdd(result, A[i], p)
    return result
```

- 给定 A, p，q 次询问 l, r 求 Sum(A,l,r,p)。

CF1172F - Nauuo and Bug

Function — a fake way to calculate sum modulo p

```
function ModAdd(x, y, p)
    if x + y < p then
        return x + y
    else
        return x + y − p

function Sum(A, l, r, p)
    result ← 0
    for i ← l to r do
        result ← ModAdd(result, A[i], p)
    return result
```

- 给定 A, p，q 次询问 l, r 求 Sum(A,l,r,p)。
- $n \le 10^6, q \le 2 \cdot 10^5, |a_i| \le 10^9, 1 \le p \le 10^9$。

题解

- 考虑 $f_i(x) = \mathrm{ModAdd}(x, a_i, p)$，则答案为 $(f_r \circ f_{r-1} \circ \cdots f_l)(0)$。

题解

- 考虑 $f_i(x) = \mathrm{ModAdd}(x, a_i, p)$，则答案为 $(f_r \circ f_{r-1} \circ \cdots f_l)(0)$。
- 注意到 f 是分段函数，则 $(f_r \circ f_{r-1} \circ \cdots f_l)$ 也是一个分段函数，函数值一定形如 $x + \sum_{i=l}^{r} a_i - yp$。

题解

- 考虑 $f_i(x) = \mathrm{ModAdd}(x, a_i, p)$，则答案为 $(f_r \circ f_{r-1} \circ \cdots f_l)(0)$。
- 注意到 f 是分段函数，则 $(f_r \circ f_{r-1} \circ \cdots f_l)$ 也是一个分段函数，函数值一定形如 $x + \sum_{i=l}^{r} a_i - yp$。

性质

- 性质 1：在得到的分段函数中，y 一定严格不减。

题解

- 考虑 $f_i(x) = \mathrm{ModAdd}(x, a_i, p)$，则答案为 $(f_r \circ f_{r-1} \circ \cdots f_l)(0)$。
- 注意到 f 是分段函数，则 $(f_r \circ f_{r-1} \circ \cdots f_l)$ 也是一个分段函数，函数值一定形如 $x + \sum_{i=l}^{r} a_i - yp$。

性质

- 性质 1: 在得到的分段函数中，y 一定严格不减。
- 性质 2: $0 \le y \le r - l + 1$。

题解

- 考虑 $f_i(x) = \mathrm{ModAdd}(x, a_i, p)$，则答案为 $(f_r \circ f_{r-1} \circ \cdots f_l)(0)$。
- 注意到 f 是分段函数，则 $(f_r \circ f_{r-1} \circ \cdots f_l)$ 也是一个分段函数，函数值一定形如 $x + \sum_{i=l}^{r} a_i - yp$。

性质

- 性质 1：在得到的分段函数中，y 一定严格不减。
- 性质 2：$0 \le y \le r - l + 1$。

- 由于一共只会做 $r - l + 1$ 次 ModAdd，每次最多会 $-p$ 一次，所以性质 2 显然。

题解

- 考虑 $f_i(x)=\mathrm{ModAdd}(x,a_i,p)$，则答案为 $(f_r\circ f_{r-1}\circ\cdots f_l)(0)$。
- 注意到 f 是分段函数，则 $(f_r\circ f_{r-1}\circ\cdots f_l)$ 也是一个分段函数，函数值一定形如 $x+\sum_{i=l}^{r}a_i-yp$。

性质

- 性质 1: 在得到的分段函数中，y 一定严格不减。
- 性质 2: $0\le y\le r-l+1$。

- 由于一共只会做 $r-l+1$ 次 ModAdd，每次最多会 $-p$ 一次，所以性质 2 显然。
- 对于性质 1，考虑 $a=x$ 和 $b=x+1$ 经过这些 ModAdd 后减的次数

题解

- 考虑 $f_i(x) = \text{ModAdd}(x, a_i, p)$，则答案为 $(f_r \circ f_{r-1} \circ \cdots f_l)(0)$。
- 注意到 f 是分段函数，则 $(f_r \circ f_{r-1} \circ \cdots f_l)$ 也是一个分段函数，函数值一定形如 $x + \sum_{i=l}^{r} a_i - yp$。

性质

- 性质 1：在得到的分段函数中，y 一定严格不减。
- 性质 2：$0 \le y \le r - l + 1$。

- 由于一共只会做 $r - l + 1$ 次 ModAdd，每次最多会 $-p$ 一次，所以性质 2 显然。
- 对于性质 1，考虑 $a = x$ 和 $b = x + 1$ 经过这些 ModAdd 后减的次数
- 当两边次数相同的时候，$b = a + 1$，一定不会 a 加完之后减而 b 不减。

题解

- 考虑 $f_i(x) = \text{ModAdd}(x, a_i, p)$，则答案为 $(f_r \circ f_{r-1} \circ \cdots f_l)(0)$。
- 注意到 f 是分段函数，则 $(f_r \circ f_{r-1} \circ \cdots f_l)$ 也是一个分段函数，函数值一定形如 $x + \sum_{i=l}^{r} a_i - yp$。

性质

- 性质 1：在得到的分段函数中，y 一定严格不减。
- 性质 2：$0 \le y \le r - l + 1$。

- 由于一共只会做 $r - l + 1$ 次 ModAdd，每次最多会 $-p$ 一次，所以性质 2 显然。
- 对于性质 1，考虑 $a = x$ 和 $b = x + 1$ 经过这些 ModAdd 后减的次数
- 当两边次数相同的时候，$b = a + 1$，一定不会 a 加完之后减而 b 不减。
- 如果 b 比 a 多一次，则 $b = a - p + 1$，由于 $p \ge 1$，一定不会 a 减 b 不减，但是 b 减 a 不减之后又会变成次数相同的情况。

题解

- 考虑 $f_i(x) = \mathrm{ModAdd}(x, a_i, p)$，则答案为 $(f_r \circ f_{r-1} \circ \cdots f_l)(0)$。
- 注意到 f 是分段函数，则 $(f_r \circ f_{r-1} \circ \cdots f_l)$ 也是一个分段函数，函数值一定形如 $x + \sum_{i=l}^{r} a_i - yp$。

性质

- 性质 1: 在得到的分段函数中，y 一定严格不减。
- 性质 2: $0 \le y \le r - l + 1$。

- 由于一共只会做 $r - l + 1$ 次 ModAdd，每次最多会 $-p$ 一次，所以性质 2 显然。
- 对于性质 1，考虑 $a = x$ 和 $b = x + 1$ 经过这些 ModAdd 后减的次数
- 当两边次数相同的时候，$b = a + 1$，一定不会 a 加完之后减而 b 不减。
- 如果 b 比 a 多一次，则 $b = a - p + 1$，由于 $p \ge 1$，一定不会 a 减 b 不减，但是 b 减 a 不减之后又会变成次数相同的情况。
- 所以 a 减的次数一定不会超过 b 减的次数。

题解

- 那么现在可以直接分块，每段暴力维护分段函数，询问时二分。但是时间复杂度是 $O(n\sqrt{n\log n})$ 的，过不了

题解

- 那么现在可以直接分块，每段暴力维护分段函数，询问时二分。但是时间复杂度是 $O(n\sqrt{n\log n})$ 的，过不了
- 考虑如何快速合并两个分段函数。

题解

- 那么现在可以直接分块，每段暴力维护分段函数，询问时二分。但是时间复杂度是 $O(n\sqrt{n\log n})$ 的，过不了
- 考虑如何快速合并两个分段函数。
- 注意到 y 严格不减。按顺序考虑第一个函数的每一段。每次移动到下一段，第一个函数的 y 会 $+1$，由于 y 一定不减所以第二个函数的 y 最多会减一

题解

- 那么现在可以直接分块，每段暴力维护分段函数，询问时二分。但是时间复杂度是 $O(n\sqrt{n\log n})$ 的，过不了
- 考虑如何快速合并两个分段函数。
- 注意到 y 严格不减。按顺序考虑第一个函数的每一段。每次移动到下一段，第一个函数的 y 会 $+1$，由于 y 一定不减所以第二个函数的 y 最多会减一
- 直接双指针即可 $O($ 段数 $)$ 合并。

题解

- 那么现在可以直接分块，每段暴力维护分段函数，询问时二分。但是时间复杂度是 $O(n\sqrt{n\log n})$ 的，过不了
- 考虑如何快速合并两个分段函数。
- 注意到 y 严格不减。按顺序考虑第一个函数的每一段。每次移动到下一段，第一个函数的 y 会 $+1$，由于 y 一定不减所以第二个函数的 y 最多会减一
- 直接双指针即可 $O($ 段数 $)$ 合并。
- 建线段树即可，时间复杂度 $O(n\log n + q\log^2 n)$。

The End

Thanks!