

ICPC题目选讲

清华大学交叉信息研究院 杨骏昭

2020上海区域赛

L. Traveling in the grid world

- 平面无限大格点图，从 $(0,0)$ 走到 (n,m) ，每次只能从一个格点走一条线段到另一个格点，且线段不能经过其他格点。求最短路径长度。
- $1 \leq n, m \leq 1000000$
- $n, m \leq 1e18?$

L. Traveling in the grid world

- Hint 1: 多段折线有可能更优吗? 调整法遇到不合法线段怎么办? 请给出证明。

L. Traveling in the grid world

- Hint 2: 考虑选择的格点到直线的距离? 任意格点到直线的距离和最小距离的关系?

A. Wowoeat

- 一条由 n 个线段组成的不自交的折线，你可以选定一条两个端点在折线上但是其他部分不与折线相交的线段，将折线上两 endpoints 间的部分替换成这条线段。求操作后折线长度的最小值。
- $n \leq 200$

A. Wowoeat

- Hint: 调整法考虑最优线段上的端点数? 最优解端点数可能为1吗?

H. Rice Arrangement

- 有两组 k 个 $[0, n)$ 间的整数，称为 a 和 b 。将他们两两匹配，并为每对分配整数 c 使得 $((a+c) \bmod n) = b$ ，最小化 $(\max(o, c \text{ 的最大值}) - \min(o, c \text{ 的最小值}))$ 。
- $n \leq 1e9, k \leq 5000$

H. Rice Arrangement

- **Hint:** 将匹配考虑成圆环上的有向线段，可以推出什么性质？能否破坏为链？请给出证明。

K. Traveling Merchant

- n 个点 m 条边无向图，给定每个点黑色或白点。
从一个点离开时会翻转这个点的颜色，判断是否存在从一号点出发的无限长的黑白相间的路径。
- $1 \leq n, m \leq 200000$

K. Traveling Merchant

- Hint 1: 点双联通分量满足任意三个点 x, y, z , 存在一条 $x \rightarrow y \rightarrow z$ 的简单路径。(why?)

K. Traveling Merchant

- Hint 2: 考虑最大流最小割定理。还能得到点双的什么性质?

3. Octasaction

- 给定 n 个三维立方体 $(x_0, y_0, z_0) - (x_1, y_1, z_1)$
判断是否存在三个平面 $x=a, y=b, z=c$ 使得每个立方体都和至少一个平面有交。
- $n \leq 100000$

3. Octasaction

- Hint 1: 考虑立方体对解 (a,b,c) 的限制。(类比二维情况, 可以枚举一维)

3. Octasaction

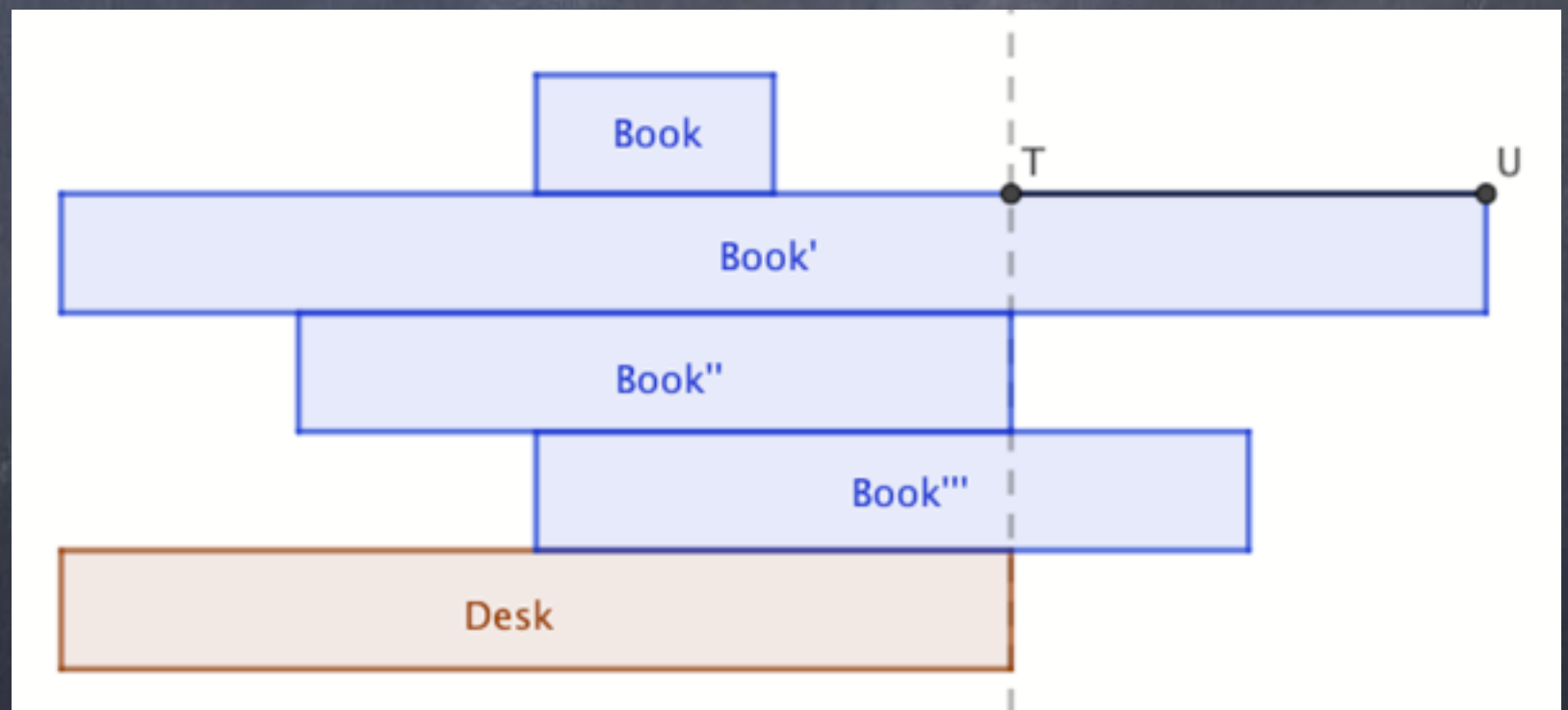
- Hint 2: 枚举一维后对时间使用线段树trick使操作变为add和rollback, 如何快速判断十字形的交非空? (考虑补集的并?)

小米邀请赛决赛

3. Rikka with book

- 给定 n 块木板的宽度及质量，将他们叠起来放在桌边，求稳定状态下从桌边延伸出的最长长度。

- $n \leq 20$



3. Rikka with book

- Hint ○: 稳定条件为对于每个支撑面，支撑物的重心落在支撑面内。

3. Rikka with book

- **Hint 1:** 用贡献答案的书分为上下两部分，下部分重心一定最靠右。平衡条件和答案的贡献可以独立算吗？

M. Rikka with employees

- 给定一棵 n 个节点的树。你有一个栈，可以进行将未入栈的一个节点压栈、弹栈两种操作。使用不超过 $9e6$ 次操作，使得对于每个节点 x 都在某个时刻出现过这样的状态：有且仅有 x 的子树的节点未入栈。
- $n \leq 100000$

M. Rikka with employees

- Hint 1: 菊花图? 蜈蚣图?

M. Rikka with employees

- Hint 2: 按照重链分治?
- 关于操作次数复杂度:
构建若干个size和为 n 的线段的线段树, 如何使
线段树上总线段长度 $O(n \log n)$?

L. Rikka with generals

- 给定 n 个节点的树，每个节点初始有一个数字，这些数字形成一个 n 的排列。每次操作可以交换树上相邻的且数字相邻的数字。求初始状态可以到达的不同状态数（取模）。
- $n \leq 200000$

L. Rikka with generals

- **Hint:** 一个数字只需要关心与它相邻的两个数字的位置，且相邻的数字至多只需要交换一次。能否按照数字从小到大动态规划？

C. Rikka with Random tree

- 给定一个随机生成树的算法：以1号节点为根，对于*i*号节点等概率随机选择一个*i*的因数号节点作为父亲。
求树上所有点对距离和的期望（取模）。
- $n \leq 300000$

C. Rikka with Random tree

- Hint 1: $\text{dis}(x, y) = \text{depth}(x) + \text{depth}(y) - 2\text{depth}(\text{Lca}(x, y))$.
- 由期望的线性性, $E[\text{depth}(x)]$ 很好计算。
如何处理 $E[\text{depth}(\text{Lca}(x, y))]$?

C. Rikka with Random tree

- Hint 2: 预处理 $f(x, y)$ 表示 x 是 y 的祖先的概率
- $$E[\text{Lca}(x, y) = p] = f(p, x) * f(p, y) - E[\text{Lca}(x, y) = q] * f(p, q)^2$$

A. Rikka with Game

- n 个人玩游戏，给定所有人都知道的双向朋友关系。游戏一开始某人被选为恶龙，进行若干轮：
 - 1. 每轮一开始所有非龙玩家独立决定是否屠龙，但是与龙玩家为朋友的玩家不会屠龙。
 - 2. 龙玩家会被编号最小的屠龙玩家杀死，下一轮该屠龙玩家成为龙。若无屠龙，则游戏结束。
- 游戏结束后，活着的龙玩家获得100分，活着的非龙玩家获得10分，死掉的玩家获得1分。对于每个 i ，求第 i 个玩家初始被选为龙时游戏是否会在第一轮结束。每个人仅最大化自己的得分。 $n \leq 500$

A. Rikka with Game

- Hint 1: 最优策略下，屠龙者成龙后一定不会被杀。在同时做决定是否屠龙的阶段时，屠龙与否一定会改变自己的最终收益，所以在多个人屠龙的局面被避免后最优策略唯一，且可以视为编号从小到大依次做决定。

A. Rikka with Game

- Hint 2:

一个局面一个人当龙没被杀当且仅当所有能杀他的人杀了他之后都会被杀。(被杀：没被杀的反命题)

- 设 $P(x)$ 为某个局面当龙的人是否没被杀。 $P(x)$ 为真当且仅当所有 $P(y)$ 为假 (y 是 x 可转移的状态)

- 终止条件？无可转移状态 $P(x) = \text{true}$

- 考虑相似的博弈模型...?

A. Rikka with Game

- 所有状态及转移形成一个DAG，两个人在DAG上进行博弈
[$P(x)$ 为真]当且仅当所有[$P(y)$ 为假]
[当前状态是失败态]当且仅当所有[转移都是胜利态]
 $P(x)$ =状态 x 是否是失败态
- 考虑朋友关系的补图，初始第 x 个人成龙没被杀可以被转化为：
一个棋子初始被放在 x 号点，两个人轮流将棋子移动到相邻的之前没放过的点，不能移动则输。龙没被杀等价于该初始状态为失败态。
- Hint 3: 考虑朋友关系补图的最大匹配、增广路

A. Rikka with Game

- 经典博弈模型结论：后手必胜当且仅当存在不包含 x 点的最大匹配
- 假设存在不包含 x 点的最大匹配，那么先手每步都会走到一个匹配点上，否则将会存在一个增广路径。所以后手每步都一定可以走匹配边。
- 逆否命题？

A. Rikka with Game

- 经典博弈模型结论：后手必胜当且仅当存在不包含 x 点的最大匹配
- 假设存在不包含 x 点的最大匹配，那么先手每步都会走到一个匹配点上，否则将会存在一个增广路径。所以后手每步都一定可以走匹配边。
- 逆否命题：所有最大匹配都包含 x 点，那么不存在一条从 x 点出发到一个未匹配点的交错路径，所以先手每步走匹配边一定必胜。

B. Rikka with Maximum Segment sum

- Hint: 分治?

B. Rikka with Maximum Segment sum

- 给定长度为 n 的序列，求所有区间的区间最大子段和的和。
- $n \leq 100000$

Thank you