

杂题选讲

浙江省杭州第二中学 屠学畅

PROBLEM 1

- 有 n (石子) 个石子, 两个人轮流操作。轮流操作: 第一次取恰好 1 个石子, 之后每次每人一次, 对手取 k 个石子, 则其可以取 $k+1$ 其中 k 是给定的常数。无法行动者为负。
- 圖定求, 求有多少使得初始石子数为 n 时先手必胜。
- $1 \leq l \leq r \leq 10^{14}, 1 \leq k \leq 10^{14}$

STEP 1

- 令 $f_{n,i}$ 表示在固定的 n 值下, 剩余 i 个石子且当前至多取 i 个先手的胜(1) 负(0) 所求即 $f_{n,1}$ 。
- 转移直接枚举当前取的石子数量 x (若存在 $x \leq i$ 则, 否则 $f_{n-x,x+k} =$
- 复, 则 $f_{n,i} = 1$, 否则 $f_{n,i} = 0$ 。
- 复杂度 $O(r^3)$ 。

STEP 2

- 我们发现的后继状态包含了前继状态的后继状态, 也当 $f_{n,i}$ 为1, 所以也为1
- 所以存在一个使得, 即仅在一个前缀上的值是。现在我们只需要
- 求出每个 g_n 使得 $f_{n,i} = [i \geq g_n]$, 即 $f_{n,*}$ 仅在一个前缀上的值是0。即现在我们只需要求出每个 g_n 。
- 令 $g_0 = \infty$ 。令 g_n 即最小的 g 满足 $f_{n,g_n+k} = 0$, 此时 $f_{n,g_n} = 1$ 。
- 复杂度或 $k = 0$ 等价于 $g_n + k < g_{n-g_n}$ 。令 $h_n = n - g_n$, 有 $n - h_i + k < g_{h_n}$, 即 h_n 是最大的 h_n 满足 $g_{h_n} + h_n > n + k$ 。
- 复杂度 $O(r^2)$ 或 $O(r \log r)$ 。

STEP 3

- 观察 g_n 的位置,称这些位置是好的容易发现 $\forall 1 \leq n \leq k+2, g_n = n$ 。
- 假设是好的,对于满足 g_i 满足上页的条件,满足上页的条件,所以开始的这一段和从0开始的一段是相似的,即 $g_n = g_{n-i}$ 。
- 对于 n 如果不是好的,情况和 i 不是好的,情况和上面相同,否则有违反条件的。 $\text{mid}(i, n)$ 只能取在满足条件的所以由第 $\forall 0 < i$ 个好的位置等于从 g_i 开始第 h_n 个好的位置即 n 是好的。所以 i 后第一个好的位置等于从 g_i 开始第一个好的位置 $+i$ 。
- 以此我们找出了所有好的位置,除了平凡的情况,数量只有 $O(\log r)$ 。好的位置把数字分成了若干段,且由于段之间的相似性,我们可以不断减小范围,在 $O(\log r)$ 的时间内计算答案。

评价

- 这是一道思维难度较高的题，从暴力做法入手，不断观察性质、优化，可以得到上述的优美做法。
- 如果无法从正面解决问题，此题另有一种打表的方法，其需要较强的观察能力，由于价值不高这里不作赘述。这也启示我们要从多个角度尝试问题。

PROBLEM 2

- 有一个点的有点的有环图无环图,点的权值由权值由权值决定的第串点决定,值的第的值的权值即s的第i位。
- 后点条条有两条条边边,其模模值两条条边边的起点的权值做与并计算NAND的结果。
- 称字符串的优美度为此时点的权值的权值。
- 求一个包含的字符串,使得将替换为替换为0后得到的字符串的优美度的优美度相同,替换为1替换为1后得到的字符串的优美度与差度串的优美度相同。
- 需要保证的数量是所有可行解中最小的。无解输出-1。
- $n, m \leq 10^5$

SOLUTION OF PROBLEM 2

- 与非运算较难进行分析, 考虑特殊情况, 若全0和全1的优美度相同, 则全0就是一组最优解。
- 否则全0和全1的优美度不同, 记全0的优美度为 f_0 , 全1的优美度为 f_n , 则全0的优美度为 f_0 , 全1的优美度为 f_n 。
- 由于, 所以, 这时便有一组解为 f_n 。因为0的个数不为0, 所以这是一组最优解 f_n , 所以 $\exists i \in [0, n), f_0 = f_i \neq f_{i+1} = f_n$, 这时便有一组解为 $00 \dots 00 2 11 \dots 11$, 因为2的个数不为0, 所以这是一组最优解。
- 可以二分找到这个位置, 时间复杂度 $O(n + m \log n)$ 。

评价

- 这是一道十分巧妙的构造题，大部分人可以想到第一步中的特殊情况，但是与一般的题不同的是，此题中的构造需要利用到全 θ 与全 ψ 度量不同的条件。
- 有些人会猜想答案中至多存在一个2，朝着这个方向，会为接下来的构造提供许多便利。这也启示我们要大胆猜想、小心求证。