

Water Problem Choose Talk

May 4, 2021

- 计数
 - dp
 - 组合
 - 多项式
 - 常规操作
 - bluestein
 - 下降幂多项式
 - 集合幂级数
- 数论
 - 数论函数
 - gcd/质因数分解/二次剩余/...
- MO 相关（构造，交互，方程求解，简单不等式等）
- * 计算几何

来个热身题，给定 n ，求长度为 n 的数组 a ，元素和是 1，令

$$a_{n+1} = a_1:$$

$$\max \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1}$$

提示：

$$2ab \leq \frac{1}{2}(a+b)^2 = \frac{1}{2}$$

$$4(ab+bc+ca) = 2(a+b+c)^2 - 2a^2 - 2b^2 - 2c^2 \geq 2 - 2(ab+bc+ca)$$

$$ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$$

$$ab+bc+cd+da = (a+c)(b+d) \leq \frac{1}{4}\sqrt{a+b+c+d} = \frac{1}{4}$$

$n = 2, 3, 4$ 的答案在提示里, $n > 4$ 时答案为 $\frac{1}{4}$ ($a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$)。

定义 $p' = 1, (ab)' = a'b + ab'$, 给定 $n \leq 10^{15}$, 求:

$$\sum_{i=1}^n \gcd(i, i')$$

有 n 个人在河的左岸，每个人知道一条互不相同的信息，河的左岸有一艘船，可以坐下两个人。

进行 $n - 1$ 次，每次有两个人划船过河至右岸，如果需要可以让右岸一个人划船回左岸，在河中央两人可以交流他们知道的所有信息。

求知道信息数量最少的人最多知道多少信息，求方案。

有 n 个人在河的左岸，每个人知道一条互不相同的信息，河的左岸有一艘船，可以坐下两个人。

进行 $n - 1$ 次，每次有两个人划船过河至右岸，如果需要可以让右岸一个人划船回左岸，在河中央两人可以交流他们知道的所有信息。

求知道信息数量最少的人最多知道多少信息，求方案。

不妨考虑一个简化版问题：所有人都在右岸，每次两个人划船划一圈回右岸。

Solution 2

答案显然随 n 不减，不妨求答案为 m 时最小的 n ，先考虑简化版，连接每一对一起划船的人，这样会连成一棵树（不然取任意一颗子树，都可以得到更小的 n ）。

考虑第一条边，断掉后得到两棵树，若两个树的答案为 m_1, m_2 ，这整棵树的答案不大于 $\min(m_1, m_2) + 1$ ，所以可得

$f(m) \geq 2f(m-1), f(1) = 1$ ，得 $f(m) \geq 2^{m-1}$ 。

考虑构造，若一个人知道 k 条信息，其它 $2^{m-k} - 1$ 个人都只知道 1 条信息（初始时 $k = 1$ ），连接一个知道 1, k 条信息的人，剩下可以变为两个 $k + 1$ 的子问题。

不难发现，这样得到一棵树，并且由根（ $k = 1$ 时取的那个人）向叶子边权（时间）递增。

由根开始 dfs，每次父亲由右岸回来，并接儿子过岸，就得到了一个合法的解。

回到原题，答案为 $\lfloor \log n + 1 \rfloor$ ，前 $2^{\lfloor \log n \rfloor}$ 个人向上面那样构造，后面的人随便派个人接来就好了。

<https://codeforces.com/problemset/problem/1188/E>

<https://codeforces.com/problemset/problem/1349/D>

Solution 4

令 A 状态为开始的状态, B 状态为所有饼干在同一个人手里的状态。

令 $f(x)$ 中的 x^t 次项表示 t 回合第一次由 A 到 B 的概率, $g(x)$ 表示 t 回合由 A 到 B 的概率, $h(x)$ 表示 t 回合由 B 到 B 的概率。

则 $fh = g, f = \frac{g}{h}$, 则答案

$$f'(1) = \left(\frac{g}{h}\right)'(1) = \left(\frac{g'h - h'g}{h^2}\right)(1) = \frac{g'(1)h(1) - h'(1)g(1)}{h^2(1)}.$$

考虑 B 状态饼干在的人, 饼干只有在他手上和不在他手上两个状态, DP 计算即可。

求 $n = 10^{11}$ 时下式的值 ($\sigma(i)$ 表示 i 的约数和):

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma(ij)$$

$$\sigma(ij) = \sum_{u|i, v|j} [(u, v) = 1] \frac{jv}{u}$$

之后就有手就行了。

<https://codeforces.com/problemset/problem/1375/F>

考虑 $c > b > a$ ，且 c 是最后选择的，那么以下操作先手可以获胜：

操作 $2c - b - a$ ，然后一定变成等差数列，操作公差即可。

先操作 ∞ ，然后变为上述情况。

1. 试证明任意无向图，均存在一种染色方案，使得任意一个点和与它相邻的点中有奇数个被染黑。
2. 12 个零件，1 个次品（略重或略轻），1 个天平，3 次以内找出并确定次品比标准重或轻。

Solution 7.1

考虑高消过程中无解情况：奇数行的异或和为 0，单取这些行和对应的列，有：

$$\begin{bmatrix} 1 & & A \\ & \ddots & \\ A^T & & 1 \end{bmatrix}$$

但它们有奇数个 1，所以它们异或和不可能为 0。

先比 $1234|5678$ ，如果平，比较 $123|9ab$ ，平则比较 $1|c$ ，否则比较 $9|a$ 。

否则令左小于右（反之同理），比较 $125|367$ ，若平，比较 $1|4$ 。

否则，若左小于右，比较 $1|2$ ，否则比较 $6|7$ 。

通过上面的比较，一定能找出次品并确定质量。

`https://codeforces.com/problemset/problem/1326/G`

Solution 8

显然，可以先划分出根的 spiderweb tree (下简称 st)，然后递归划分子树。

所以对于每个子树 r 找出划分方案递归即可。

为了简便，先假设 r 不为叶子，并认为所有节点的儿子按斜率排序。

首先可以发现凸包上的叶子的 dfs 序是递增的（考虑 r 到叶子的路径，它们一定没有非递增的方案）。

考虑枚举前两个叶子，记录后两个叶子，然后枚举下一个叶子，可以通过前两个叶子判断这个叶子是否合法。

r 为叶子时对 r 连出的边同样考虑即可。

复杂度 $O(n^6)$ 。

但是考虑一个简化问题：如何统计一个点集中凸包的数量。

枚举一个点，它作为最下方的点，然后类似凸包地 DP 即可，复杂度 $O(n^4)$ 。

总复杂度优化为了 $O(n^5)$ 。

常数很小，应该可以通过，可以使用前缀和优化至 $O(n^3)$ （总复杂度 $O(n^4)$ ）。