

杂题选讲

任轩笛

PKU

2020 年 7 月 26 日

CyclesAndColorings

Codechef CYCLECOL

题意

给你一张连通无向图，你要么找一个三染色，要么找一个奇环使得删去后图仍然连通。

范围

$$n \leq 10^5, m \leq 2 \times 10^5。$$

BoardPainting

SRM 577 1000pts

题意

$n \times m$ 的网格里有一些 # 号需要消除，每次可以选一段横向或纵向的连续 # 号一起消掉，不能选择空格或者已消除的格子。问最少需要消除几次。

范围

$$n, m \leq 50。$$

Enclosing Triangle

SRM 585 1000pts

题意

有一个正方形，边长为 m ，给出 n 个正方形内的特殊点，求有多少顶点坐标为整数，且都在正方形边上的三角形，覆盖所有特殊点。

范围

$$n \leq 20, m \leq 10^5.$$

BearDestroys

SRM 671 900pts

题意

有一个 $n \times m$ 的矩阵，每个点上写着 S（南）或 E（东），每个格子里种着一棵高度为 2 的树。

一只熊来推树，他推的顺序为第一行从左到右、第二行从左到右……

如果他推一棵树时，这个点已经被倒下的树覆盖了，就跳过；如果能按照格子上写的方向推树，就推；否则如果能按另一个方向推树，就推；都不行也跳过。

这样他最后总共会推倒若干棵树。对于所有 2^{nm} 种矩阵，求他推倒的树的数量之和，取模。

范围

$$n \leq 13, m \leq 30.$$

题意

有一个 $n \times m$ 的网格，每个格子是草原或者城镇。要用修若干首尾相接的铁路把所有城镇串起来。

有些城镇里有人，他们希望穿过所在城镇的铁路是弯的。问最多能满足多少人的需求。无解输出-1。

范围

$$n, m \leq 25。$$

题意

有一排 n 个数，选出了一个数。

你可以问若干次：某个区间内是否包含了选出的数。

求在所有 $2^{n \times (n+1)/2}$ 种问法中，有多少种能够唯一确定答案。

范围

$$n \leq 400.$$

简单题

来源不明

题意

二维平面上初始时有若干个点，接着会按时间顺序来 n 个以 $(0,0)$ 为左下角的矩形，要计算当前这个矩形围成的区域内有多少点。

范围

$$n \leq 5000?$$

$$\sum ans_i \leq 10^7?$$

$$n \leq 100000?$$

$$n \leq 1000000?$$

triangle

Bytedance Camp 2019 Day 2, Div A, Prob K

题意

给出平面上 n 个点，问有多少三角形和线段的二元组没有公共点。

范围

$$n \leq 300。$$

IncreasingNumber

SRM 452 1000pts

题意

求满足下列条件的数字个数：

- ▶ 共有 n 位数码
- ▶ 没有前导 0
- ▶ 从高位到低位非降
- ▶ 模 $m = 0$

范围

$$n \leq 10^{18}, m \leq 500。$$

segment

来源不明

题意

一个长为 n 的序列需要被分成若干连续的段，其中第 i 个元素所在段的长度必须 $\geq a_i, \leq b_i$ 。求满足限制的情况下，最多能分成几段，以及划分成尽量多段的方案数。

范围

$$n \leq 10^6.$$

题意

有 N 个信号塔, 第 i 个塔的位置是 i , 信号强度 X_i (X_i 保证互不相同)。

有 N 个人, 第 i 个人的位置是 i , 一个人往左走一格要 A 秒, 往右走一格要 B 秒。

这些人之间要传递信息, 具体地, 如果 i 有信息, 那么 i 会依次做以下操作:

- 选择一个 j 满足 $1 \leq j \leq i$, 并找到一个 k 使得 $j \leq k \leq i$ 并且 X_k 最大来保证通信。
- i, j 同时向 k 移动, 先到的会等另一个人直到两个人都到达。
- 等到 i, j 都到达 k 时, 信息的传递**瞬间完成**, 并且 i, j **瞬间回到原来的位置**。
- 之后** i 会失去信息**, j 会获得信息。

请对每个 i 计算, 如果初始 i 有信息, 那么最少多少时间以后信息可以传递到 1, 并输出最少时间的方案数, **方案数对 2^{32} 取模**。

一个方案可以被描述成 $P_1 = i, P_2, P_3, \dots, P_t = 1$, 表示信息的传递是 $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow \dots \rightarrow P_t$ 。

两个方案被认为是不同的当且仅当 t 不同或者存在一个 $1 \leq i \leq t$ 使得 P_i 不同。

特殊地, 对于 1, 我们认为最少时间是 0, 方案数为 1。

范围

$$n \leq 8 \times 10^5.$$

题意

给一个 $n \times n$ 的矩阵 A ，问 A 能否被置换矩阵以非负系数线性表出。如果不可以输出-1，否则求一组解，要求用这些矩阵表出 A 的方式唯一。

范围

$$n \leq 50.$$

Checking matrix multiplication

随机算法选讲

给三个 $n \times n$ 矩阵 A, B, C , 问是否 $A \times B = C$.

Testing Polynomial Identities

随机算法选讲

以字符串形式读入一个多项式，问它是否是零多项式。

Checking associativity

随机算法选讲

大小为 n 的集合 X 上有一种运算 \circ ，要判断这个运算是否满足结合律。

Checking commutativity

随机算法选讲

设 G 是个 n 个元素的集合，有个 G 上的运算 \circ ，想知道它满不满足交换律。

Fingerprinting

随机算法选讲

要检验两个 n 位的数是否相同。

Pattern matching

随机算法选讲

问一个小串是否在大串中出现过。

Primality Testing

随机算法选讲

给一个数，判它是否是质数。

The Probabilistic Method

随机算法选讲

一句话概括：用随机期望 ≥ 1 (< 1) 来证明至少有一种方案 ≥ 1 (< 1)。

The Probabilistic Method

随机算法选讲

一句话概括：用随机期望 ≥ 1 (< 1) 来证明至少有一种方案 ≥ 1 (< 1)。

另一个角度理解：考虑一个方案中所有的元素，它坏的概率是 p ，union bound 得到至少有一个坏的概率 < 1 ，则存在方案没有坏的元素。

The Probabilistic Method

随机算法选讲

Ramsey number $R_{n,m}$ 是说至少多少个点的图，能保证边二染色时要么有一个 n 个点的红色团，要么有一个 m 个点的蓝色团。 $n = m$ 时简写成 R_n 。

The Probabilistic Method

随机算法选讲

$$R_k > 2^{k/2}.$$

The Probabilistic Method

随机算法选讲

存在一个割，至少 $\frac{|E|}{2}$ 条边。

The Probabilistic Method

随机算法选讲

存在独立集大小 $\geq \sum_{v \in V} \frac{1}{\deg(v)+1}$ 。

The Probabilistic Method

随机算法选讲

定义 $c(G)$ 是把 G 画在平面上, 边交叉的最少数量。
对于平面图有 $m \leq 3n - 6$ 。

The Probabilistic Method

随机算法选讲

定义 $c(G)$ 是把 G 画在平面上，边交叉的最少数量。

对于平面图有 $m \leq 3n - 6$ 。

考虑在最优画法中把交点都新建成点，这样加了 c 个点 $2c$ 条边变成了平面图，于是

$$m' \leq 3n' - 6 \Rightarrow m + 2c \leq 3n + 3c - 6 \Rightarrow c \geq m - 3n + 6。$$

现在用 probabilistic method 试图得到一个不一样的界。

The Probabilistic Method

随机算法选讲

对 $m \geq 4n$ 的图有 $c(G) \geq \frac{m^3}{64n^2}$ 。

The Probabilistic Method

随机算法选讲

$n \times n$ 网格，每行每列有个开关可以切换整行/整列状态，求最大能点亮多少盏灯。

Dimension Reduction

随机算法选讲

想要把高维空间中的 n 个点映射到低维，尽可能地保持距离。