

A soft, pastel-colored illustration of a young girl with long, flowing purple hair and large blue eyes. She is wearing a yellow hat with a small purple cat-ear-like detail and a light blue dress. She is sitting in a large, light blue oval bathtub, which is surrounded by green ivy leaves. The scene is bathed in a warm, golden light, suggesting a sunset or sunrise. The text is overlaid on the center of the image.

我也不知道该叫什么好了就这样吧

Dfkdsmbd

2019 年 3 月 25 日

现在有给定一个长度为 m 的字符串，要生成一个长度为 n 的字符串，要求 n 的子串不能存在 m ，求出长度为 n 的字符串合法方案数，答案模998244353，字符集 $k \leq 10^9$ ， $n, m \leq 10^5$

如长度为 m 的字符串aaa，那么现在生成长度为5的字符串，aaaaa就是不合法的，abcde是合法的。

最简单的暴力

以下默认长度为 n 的串为大串，长度为 m 的为小串
 $dp[i][j]$ 表示目前大串放到了第 i 位，小串匹配了 j 位的时候方案数。暴力枚举下一个字符是什么，时间复杂度 $O(nmk)$
利用kmp可以优化到 $O(nm^2)$

一个错误的试探

我们考虑省略一维状态，设 $dp[i]$ 表示目前大串放了 i 个的合法情况
那么有一个错误的转移式

$$dp[i] = k \cdot dp[i - 1] - dp[i - m]$$

就是说把 $i - m$ 后面放上一整个不合法的小串

这个错误很明显，因为这个式子没有考虑一种情况，即没有填满 m 个就已经不合法的情况

启发

我们可不可以通过一些技巧处理掉这个漏算的情况？

答案是有的

设 $g[i]$ 表示目前大串考虑到第 i 位没出现小串的概率， $f[i]$ 表示大串第 i 位正好出现第一个小串的概率

那么最后的答案就是 $g[n] \cdot k^n$

那么首先我们可以得到这么一个式子

$$g[i] = g[i+1] + f[i+1]$$

很好理解，放入一个字符可能合法可能不合法

深化改革(雾)

继续考虑刚才我们所想的，从 i 后面放上一整个不合法的子串
那么就是 $k^{-m}g[i]$ ，因为你钦定走了 m 步
这个时候相当于放入小串的前缀使得，这个大串变得不合法。
满足这个性质的前缀……不就是kmp处理出来的border集合吗
于是又可以得到第二个等式

$$k^{-m}g[i] = \sum_{j=1}^m [j \in \text{border}] f[i+j] k^{-m+j}$$

$$g[i] = \sum_{j=1}^m [j \in \text{border}] f[i+j] k^j$$

小细节+进一步整理

之所以是 k^{-m+j} ，是因为 $f[i+j]$ 里面包含了到 $i+j$ 这一位恰好不合法的概率。为了下一步操作的更方便，我们令

$$a[m-i] = [i \in \text{border}]k^i$$

式子可以变成下面的形式了

$$g[i] = \sum_{j=1}^m a[m-j]f[i+j]$$

因为当 $m < i$ 时， $a[i] = 0$ ，所以上面的式子等价于

$$g[i] = \sum_{j=0}^{i+m} a[i+m-j]f[j]$$

你问我转化成生成函数好不好，我当然是兹磁的

列出生成函数

$$G(x) = \sum_i g[i]x^i, F(x) = \sum_i f[i]x^i, A(x) = \sum_{i=0}^m a[i]x^i$$

那么根据刚才那个等式

$$x^m G(x) = A \cdot F(x)$$

巨浪，巨浪，不断地增长！

$$xG(x) + 1 = G(x) + F(x)$$

$$F(x) = \frac{x^m G(x)}{A(x)}$$

$$1 = G(x) \left(1 - x + \frac{x^m}{A(x)} \right)$$

$$G(x) = \frac{1}{1 - x + \frac{x^m}{A(x)}}$$

UVA1697 Baggage

给定一排长度为 $4n$ 的格子，编号从 $-2n+1$ 到 $2n$ ，每个编号为正的格子中有一个物品，其中每个编号为奇数的格子中有一个B类物品，编号为偶数的格子中有一个A类物品

比如[B][A][B][A][B][A][B][A]

你只能进行一种操作：选择某两个相邻的格子，要求这两个格子中都有物品，然后移动到另外两个相邻的空格子中，不能改变两个格子的相对位置

要求进行最少的操作使得所有物品以AAA...ABBB...B(n 个A和 n 个B)的形式排列在一起

梦里不觉秋已深 余情岂是为他人

$n = 3, ans = 3$

[] [] BABABA

ABB [] [] ABA

ABB BAA [] []

AAABBB [] []

明眸青丝俏佳人 芳心寸断只缘春

$n = 4, ans = 4$

[][]BABABABA

ABBABAB[][]A

ABBA[][]BBAA

A[][]ABBBBAA

AAAABBBB[][]

为什么你会这么熟练啊!

考虑递归

[][]BABA(BABA.....BABA)BABA

ABBABA(BABA.....BABA)B[][]A

ABBA[][](BABA.....BABA)BBAA

到这里我们通过递归将[][](BABA.....)改变成(AAAA.....BBBBB.....)[][]

ABBA(AAAA.....BBBBB)[][]BBAA

然后

A[][]A(AAAA.....BBBBB)BBBBBAA

AAAA(AAAA.....BBBBB)BBBBB[][]

修改次数为 n ,只需要预处理 $n = 4, 5, 6, 7$ 即可