有向图的“割点”和“桥”

陈孙立

南京外国语学校

August 3, 2020

Contents

1 前言

2 算法流程
- 定义
- 分析
- 最终算法

3 支配树简介

4 总结

前言

无向图中的割点（桥）是指满足：删去它之后图的连通分量个数增加的点（边）。在线性时间内求出图中所有割点和桥的 Tarjan 算法已经被大家熟知。

前言

无向图中的割点（桥）是指满足：删去它之后图的连通分量个数增加的点（边）。在线性时间内求出图中所有割点和桥的 Tarjan 算法已经被大家熟知。

在有向图中，与连通分量性质相似的是强连通分量，求出所有强连通分量可以使用 Tarjan 算法 [1]。自然地，我们可以定义有向图的“割点”和“桥”，指删去它之后强连通分量个数增加的点和边，本次营员交流我就将介绍求出一个有向图的所有割点和桥的方法，它使用了支配树 (Dominator Tree) 的相关知识。

定义

一个有向图 $G = (V, E)$ ，其中 V 是节点集，E 是边集。本文中 n 一律表示 $|V|$ ，m 一律表示 $|E|$ 。G 中的一条路径指一个节点序列 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ 满足 $(v_i, v_{i+1}) \in E, 1 \le i < k$ ，路径的起点为 v_1 ，终点为 v_k 。

定义

一个有向图 $G=(V,E)$ ，其中 V 是节点集，E 是边集。本文中 n 一律表示 $|V|$ ，m 一律表示 $|E|$ 。G 中的一条路径指一个节点序列 $v_1,v_2,\ldots,v_k$ 满足 $(v_i,v_{i+1})\in E, 1\le i<k$ ，路径的起点为 v_1 ，终点为 v_k 。

若对于点 u,v ，存在一条 u 到 v 的路径和一条 v 到 u 的路径，则称 u 和 v 强连通。强连通关系是一个等价关系，形成的等价类称为强连通分量。

定义

一个有向图 $G=(V,E)$ ，其中 V 是节点集，E 是边集。本文中 n 一律表示 $|V|$ ，m 一律表示 $|E|$ 。G 中的一条路径指一个节点序列 $v_1,v_2,\ldots,v_k$ 满足 $(v_i,v_{i+1})\in E, 1\le i<k$ ，路径的起点为 v_1 ，终点为 v_k 。

若对于点 u,v ，存在一条 u 到 v 的路径和一条 v 到 u 的路径，则称 u 和 v 强连通。强连通关系是一个等价关系，形成的等价类称为强连通分量。

图 $G\backslash\{u\}$ 为在图 G 中删去点 u 和以 u 为某一端点的边后形成的图。图 $G\backslash\{(u,v)\}$ 为在图 G 中删去边 (u,v) 后形成的图。

定义

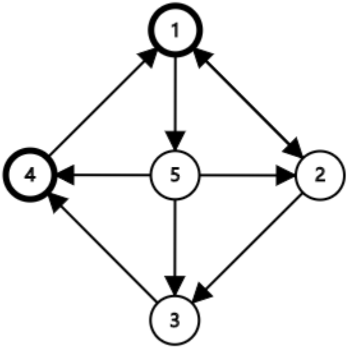
一个有向图 $G = (V, E)$ ，其中 V 是节点集，E 是边集。本文中 n 一律表示 $|V|$ ，m 一律表示 $|E|$ 。G 中的一条路径指一个节点序列 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ 满足 $(v_i, v_{i+1}) \in E, 1 \leq i < k$ ，路径的起点为 v_1 ，终点为 v_k 。

若对于点 u, v ，存在一条 u 到 v 的路径和一条 v 到 u 的路径，则称 u 和 v 强连通。强连通关系是一个等价关系，形成的等价类称为强连通分量。

图 $G \backslash \{u\}$ 为在图 G 中删去点 u 和以 u 为某一端点的边后形成的图。图 $G \backslash \{(u, v)\}$ 为在图 G 中删去边 (u, v) 后形成的图。

若图 G 的强连通分量个数和图 $G \backslash \{u\}$ 不相等，则称 u 是图 G 的强割点 (strong articulation point)。若图 G 的强连通分量个数和图 $G \backslash \{(u, v)\}$ 不相等，则称 (u, v) 是图 G 的强桥 (strong bridge)。

例子



在上图中，1 和 4 是图中仅有的强割点，(4,1) 和 (3,4) 两条边是图中仅有的强桥。

定义 - 续

在有向图 G 中，给定源 s ，如果点对 u , v 满足任意从 s 到 v 的路径都经过 u ，则称点 u 支配 (dominate) 点 v。不难发现如果 u 支配 v 且 v 支配 w 则 u 也支配 w ，即支配关系满足传递性。

定义 - 续

在有向图 G 中，给定源 s ，如果点对 u , v 满足任意从 s 到 v 的路径都经过 u ，则称点 u 支配 (dominate) 点 v。不难发现如果 u 支配 v 且 v 支配 w 则 u 也支配 w ，即支配关系满足传递性。

对于一个不是 s 的点 v ，一定存在一个点 $x \neq v$ 使得对于任意支配点 v 的点 u ，都满足 $u = x$ 或 $u = v$ 或 u 支配 x ，此时 x 就是 v 的直接支配点 (immediate dominator)。

定义 - 续

在有向图 G 中，给定源 s ，如果点对 u , v 满足任意从 s 到 v 的路径都经过 u ，则称点 u 支配 (dominate) 点 v。不难发现如果 u 支配 v 且 v 支配 w 则 u 也支配 w ，即支配关系满足传递性。

对于一个不是 s 的点 v ，一定存在一个点 $x \neq v$ 使得对于任意支配点 v 的点 u ，都满足 $u = x$ 或 $u = v$ 或 u 支配 x ，此时 x 就是 v 的直接支配点 (immediate dominator)。

在给定 s 后，直接支配关系形成一棵树，称为支配树 (dominator tree)，用 $DT(G, s)$ 表示。

定义 - 续

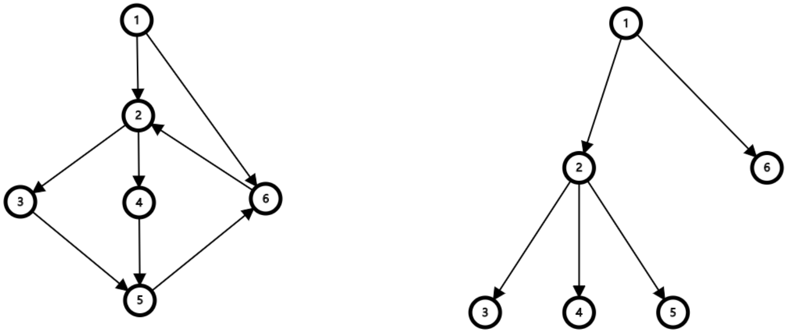
在有向图 G 中，给定源 s ，如果点对 u , v 满足任意从 s 到 v 的路径都经过 u ，则称点 u 支配 (dominate) 点 v。不难发现如果 u 支配 v 且 v 支配 w 则 u 也支配 w ，即支配关系满足传递性。

对于一个不是 s 的点 v ，一定存在一个点 $x \neq v$ 使得对于任意支配点 v 的点 u ，都满足 $u = x$ 或 $u = v$ 或 u 支配 x ，此时 x 就是 v 的直接支配点 (immediate dominator)。

在给定 s 后，直接支配关系形成一棵树，称为支配树 (dominator tree)，用 $DT(G, s)$ 表示。

这里不加证明地给出结论：存在 $O(n + m)$ 时间内求出 $DT(G, s)$ 的算法 [2]。之后将简单叙述 OI 中比较实用的 $O((n + m) \log n)$ 的求支配树算法。

例子



上面右图是左图在 $s = 1$ 时的支配树。

做法 1

在无向图中，求割点和桥可以对每个连通分量分别考虑；同样地，在有向图中，可以对每个强连通分量分别考虑。容易证明，有向图 G 的强割点和强桥一定是其强连通分量的割点和桥的并，因此之后若无说明，凡提到图 G 都代指有向强连通图 $G=(V,E)$ 。一个最基本的做法是：

做法 1

在无向图中，求割点和桥可以对每个连通分量分别考虑；同样地，在有向图中，可以对每个强连通分量分别考虑。容易证明，有向图 G 的强割点和强桥一定是其强连通分量的割点和桥的并，因此之后若无说明，凡提到图 G 都代指有向强连通图 $G=(V,E)$ 。一个最基本的做法是：

做法 1：枚举每个点 v ，使用 Tarjan 算法 [1] 在 $O(n+m)$ 时间里求出 $G\backslash\{u\}$ 的强连通分量个数。再枚举每条边 (u,v) ，使用 Tarjan 算法求出 $G\backslash\{(u,v)\}$ 的强连通分量个数。

做法 1

在无向图中，求割点和桥可以对每个连通分量分别考虑；同样地，在有向图中，可以对每个强连通分量分别考虑。容易证明，有向图 G 的强割点和强桥一定是其强连通分量的割点和桥的并，因此之后若无说明，凡提到图 G 都代指有向强连通图 $G=(V,E)$ 。一个最基本的做法是：

做法 1：枚举每个点 v ，使用 Tarjan 算法 [1] 在 $O(n+m)$ 时间里求出 $G\backslash\{u\}$ 的强连通分量个数。再枚举每条边 (u,v) ，使用 Tarjan 算法求出 $G\backslash\{(u,v)\}$ 的强连通分量个数。

此做法最坏需要对每条边求一遍强连通分量，复杂度为 $O(m(n+m))$ ，若只求强割点复杂度为 $O(n(n+m))$ ，是不可接受的。

做法 2

引理 1： 点 v 是强割点当且仅当存在点 $x \neq v, y \neq v$ 满足所有 x 到 y 的路径都经过 v 。边 (u, v) 是强桥当且仅当存在点 x, y 满足所有 x 到 y 的路径都经过边 (u, v) 。

做法 2

引理 1： 点 v 是强割点当且仅当存在点 $x \neq v, y \neq v$ 满足所有 x 到 y 的路径都经过 v 。边 (u, v) 是强桥当且仅当存在点 x, y 满足所有 x 到 y 的路径都经过边 (u, v) 。

证明： 若点 v 是强割点，则 $G \backslash \{u\}$ 不再是强连通图，会存在两个点 x, y 使得没有 x 到 y 的路径，也就是 G 中 x 到 y 的所有路径都经过 v ；另一方面，若所有 x 到 y 的路径都经过 v 则删掉点 v 之后 x 和 y 就不再强连通了。引理后半部分证明类似。 □

做法 2

对于 $DT(G,s)$ 来说，如果点 $u \neq s$ 支配某点 $v \neq u$，则称 u 是 $DT(G,s)$ 的非平凡支配点。根据**引理 1**，v 是割点当且仅当存在点 x 使得 v 是 $DT(G,x)$ 中的非平凡支配点。于是可以得到虽然复杂度和做法 1 相同但不那么显然的做法 2：

做法 2

对于 $DT(G,s)$ 来说，如果点 $u \neq s$ 支配某点 $v \neq u$，则称 u 是 $DT(G,s)$ 的非平凡支配点。根据**引理 1**，v 是割点当且仅当存在点 x 使得 v 是 $DT(G,x)$ 中的非平凡支配点。于是可以得到虽然复杂度和做法 1 相同但不那么显然的做法 2：

做法 2：枚举点 s 并求出 $DT(G,s)$ 中所有非平凡支配点，它们的并就是强割点集合。

做法 2

对于 $DT(G,s)$ 来说，如果点 $u \neq s$ 支配某点 $v \neq u$ ，则称 u 是 $DT(G,s)$ 的非平凡支配点。根据**引理 1**，v 是割点当且仅当存在点 x 使得 v 是 $DT(G,x)$ 中的非平凡支配点。于是可以得到虽然复杂度和做法 1 相同但不那么显然的做法 2：

做法 2：枚举点 s 并求出 $DT(G,s)$ 中所有非平凡支配点，它们的并就是强割点集合。

这个做法的复杂度仍然是 $O(n(n+m))$ 。求强桥时，可以对每条边 (u,v) 建立辅助点 $E_{u,v}$ ，把边 (u,v) 删去并加入边 $(u,E_{u,v})$ 和 $(E_{u,v},v)$ ，不难发现 (u,v) 是强桥当且仅当 $E_{u,v}$ 在新图中是强割点，于是仍然可以得到类似的做法。

做法 3

做法 2 来源于**引理 1**，现在我们证明一个**引理 1**的加强，这里仅考虑强割点，强桥可以类似地解决。

做法 3

做法 2 来源于**引理 1**，现在我们证明一个**引理 1**的加强，这里仅考虑强割点，强桥可以类似地解决。

引理 2：点 v 是强割点当且仅当对于任意 $x \neq v$ 都存在一个点 $y \neq v$，使得以下之一成立：

- 1. 任意 x 到 y 的路径都经过 v
- 2. 任意 y 到 x 的路径都经过 v

做法 3

做法 2 来源于**引理 1**，现在我们证明一个**引理 1**的加强，这里仅考虑强割点，强桥可以类似地解决。

引理 2：点 v 是强割点当且仅当对于任意 $x \neq v$ 都存在一个点 $y \neq v$ ，使得以下之一成立：

- 1. 任意 x 到 y 的路径都经过 v
- 2. 任意 y 到 x 的路径都经过 v

证明：若 v 是强割点，则图 $G \backslash \{u\}$ 不是强连通图，那么考察与 x 不在同一强连通分量里的某点 y ，要么不存在 x 到 y 的路径，要么不存在 y 到 x 的路径。由于 G 是强连通的，可得引理的条件成立；另一方面，若引理的条件成立则 x 和 y 不再强连通。 $\square$

做法 3

根据**引理 2**，我们只要选择任意点 x ，就可以确定所有除 x 之外的强割点。“任意 x 到 y 的路径都经过 v “这一条件已经可以通过求解支配树 $DT(G,x)$ 解决。对于和它对称的条件，我们可以建立反图的支配树解决。

做法 3

根据**引理 2**，我们只要选择任意点 x ，就可以确定所有除 x 之外的强割点。“任意 x 到 y 的路径都经过 v “这一条件已经可以通过求解支配树 $DT(G,x)$ 解决。对于和它对称的条件，我们可以建立反图的支配树解决。

具体来说，我们定义图 $G=(V,E)$ 的反图 $G^R=(V,E^R)$ 为顶点集合不变，并把所有边反向得到的图，即图 G 的边 (u,v) 对应图 G' 的边 (v,u) 。对于反图有如下性质：

做法 3

根据**引理 2**，我们只要选择任意点 x ，就可以确定所有除 x 之外的强割点。“任意 x 到 y 的路径都经过 v “这一条件已经可以通过求解支配树 $DT(G,x)$ 解决。对于和它对称的条件，我们可以建立反图的支配树解决。

具体来说，我们定义图 $G=(V,E)$ 的反图 $G^R=(V,E^R)$ 为顶点集合不变，并把所有边反向得到的图，即图 G 的边 (u,v) 对应图 G' 的边 (v,u) 。对于反图有如下性质：

性质： G 是强连通图当且仅当 G^R 是强连通图。更进一步地，点 v 是图 G 的强割点当且仅当 v 是 G^R 的强割点；边 (u,v) 是图 G 的强桥当且仅当边 (v,u) 是图 G^R 的强桥。

做法 3

根据**引理 2**，我们只要选择任意点 x ，就可以确定所有除 x 之外的强割点。“任意 x 到 y 的路径都经过 v “这一条件已经可以通过求解支配树 $DT(G,x)$ 解决。对于和它对称的条件，我们可以建立反图的支配树解决。

具体来说，我们定义图 $G=(V,E)$ 的反图 $G^R=(V,E^R)$ 为顶点集合不变，并把所有边反向得到的图，即图 G 的边 (u,v) 对应图 G' 的边 (v,u) 。对于反图有如下性质：

性质： G 是强连通图当且仅当 G^R 是强连通图。更进一步地，点 v 是图 G 的强割点当且仅当 v 是 G^R 的强割点；边 (u,v) 是图 G 的强桥当且仅当边 (v,u) 是图 G^R 的强桥。

以上性质都可以直接从定义得到。

做法 3

由此，只要求出 $DT(G,x)$ 和 $DT(G^R,x)$ ，就能得到所有除 x 之外的强割点了。最后，再使用 Tarjan 算法判断 x 是否是强割点，即可求出图中所有的强割点。

做法 3

由此，只要求出 $DT(G,x)$ 和 $DT(G^R,x)$ ，就能得到所有除 x 之外的强割点了。最后，再使用 Tarjan 算法判断 x 是否是强割点，即可求出图中所有的强割点。

对于强桥我们有类似的结论。为了求出所有强桥，可以通过之前提到的拆点的方法直接套用求强割点的算法，也可以修改支配树算法得到“支配边”，本质上也和拆点相同，但常数更小。

最终算法

做法 3:

- 1. 任取一点 s ，并使用 Tarjan 算法判断 s 是否是强割点。
- 2. 对原图进行拆点，即对每条边 (u, v) 建立辅助点 $E_{u,v}$ ，把边 (u, v) 删去并加入边 $(u, E_{u,v})$ 和 $(E_{u,v}, v)$ 得到新图 G' 。
- 3. 求出 $DT(G', s)$ 和 $DT(G'^R, s)$ 。
- 4. 对于每个原图 G 中的点 u ：若 $u = s$ 则在第一步中已经判断；若 $u \neq s$ 则 u 是强割点当且仅当 u 是 $DT(G', s)$ 的非平凡支配点或 $DT(G'^R, s)$ 的非平凡支配点。由此可以得到所有强割点。
- 5. 对于每个原图 G 中的边 (u, v) ：(u, v) 是强割点当且仅当 $E_{u,v}$ 是 $DT(G', s)$ 的非平凡支配点或 $E_{v,u}$ 是 $DT(G'^R, s)$ 的非平凡支配点。由此可以得到所有强桥。

这个算法的时间复杂度和求支配树的复杂度相同。

定义

支配树的概念前文中已有介绍，这里简单介绍使用带权并查集的 $O((n+m)\log n)$ 的支配树算法，以下均为给定图 G 和源 s 时的情况。由于时间关系，我将着重于做法而略去大部分的证明。

我们的算法建立在 dfs 序和 dfs 树上，这里假设已经求出一个从 s 开始的 dfs 树，并**按照 dfs 序重新标号**，重标号后 $s=1$ 。

定义

支配树的概念前文中已有介绍，这里简单介绍使用带权并查集的 $O((n+m)\log n)$ 的支配树算法，以下均为给定图 G 和源 s 时的情况。由于时间关系，我将着重于做法而略去大部分的证明。

我们的算法建立在 dfs 序和 dfs 树上，这里假设已经求出一个从 s 开始的 dfs 树，**并按照 dfs 序重新标号**，重标号后 $s=1$ 。

定义：对于一个点 $x \neq s$ ，定义它的半支配点 (semi-dominator) 为标号最小的 v 满足：

- 1. v 是 s 的祖先
- 2. 存在一条路径 $v=p_1,\ldots,p_k=x$ 且对于所有 $p_i(2\leq i\leq k-1)$ 都有 $p_i\geq x$ 。

记 x 的半支配点 $\mathrm{sdom}(x)=v$ 。

求出 sdom

为了求出所有点的半支配点，可以从大到小考虑所有点。设当前在求点 x 的半支配点 $\mathrm{sdom}(x)$，且所有比 x 大的点的半支配点都已求出。假设有边连向 x 的点集为 S，可以证明我们事实上只需要考虑以下两种情况作为 $\mathrm{sdom}(x)$ 的候选。

- 1. $y \in S$ 且 $y < x$，此时 y 是 $\mathrm{sdom}(x)$ 的候选之一。
- 2. $y > x$ 且存在 $z \in S$ 使得 y 是 z 的祖先，此时 $\mathrm{sdom}(y)$ 是 $\mathrm{sdom}(x)$ 的候选之一。

在以上两种情况所确定的候选值中取最小即可得到 $\mathrm{sdom}(x)$ 的值。

求出 sdom

为了求出所有点的半支配点，可以从大到小考虑所有点。设当前在求点 x 的半支配点 $\mathrm{sdom}(x)$ ，且所有比 x 大的点的半支配点都已求出。假设有边连向 x 的点集为 S ，可以证明我们事实上只需要考虑以下两种情况作为 $\mathrm{sdom}(x)$ 的候选。

- 1. $y \in S$ 且 $y < x$ ，此时 y 是 $\mathrm{sdom}(x)$ 的候选之一。
- 2. $y > x$ 且存在 $z \in S$ 使得 y 是 z 的祖先，此时 $\mathrm{sdom}(y)$ 是 $\mathrm{sdom}(x)$ 的候选之一。

在以上两种情况所确定的候选值中取最小即可得到 $\mathrm{sdom}(x)$ 的值。

对于第一种情况可以直接对每条边考虑；对于第二种，可以使用带权并查集，处理完点 x 后把它的所有孩子在并查集上 link 起来，并维护路径最小值即可，这里的并查集只有路径压缩，所以复杂度为 $O((n+m)\log n)$ 。

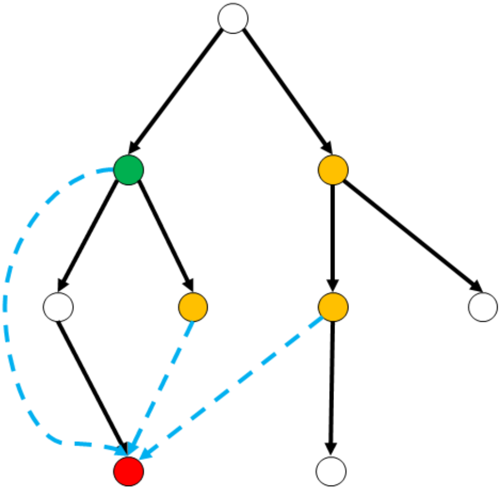


Figure: 上图红点代表当前求解 sdom 的点，绿点表示第一类候选，黄点表示第二类候选。

求出支配树

这里不加证明地给出如下定理。

定理： 对图 G 以 s 为根做 dfs，并求出所有点的 sdom。保留 dfs 树上的所有边，并对每个 x 加入新边 $(\mathrm{sdom}(x), x)$ ，得到新图 G' ，则 $DT(G, s)$ 和 $DT(G', s)$ 相同。

求出支配树

这里不加证明地给出如下定理。

定理：对图 G 以 s 为根做 dfs，并求出所有点的 sdom。保留 dfs 树上的所有边，并对每个 x 加入新边 $(\mathrm{sdom}(x), x)$ ，得到新图 G' ，则 $DT(G, s)$ 和 $DT(G', s)$ 相同。

新图 G' 是一个有向无环图。对于这样的图，存在简洁的求出支配树的方法。具体来说，按照拓扑序从小到大考虑所有点，依次确定每个点的直接支配点，逐渐构建整个支配树，每确定一个点的直接支配点，相当于在当前树上新增了一个叶子。

假设当前考虑到点 x ，所有连向它的边为 $(c_1, x), \ldots, (c_k, x)$ ，则 x 的直接支配点 $\mathrm{sdom}(x)$ 是 $\mathrm{sdom}(c_1), \ldots, \mathrm{sdom}(c_k)$ 在支配树上的的最近公共祖先。使用倍增求 LCA 的算法，可得复杂度为 $O((n+m)\log n)$ 。结合之前使用普通的带权并查集复杂度，可以在 $O((n+m)\log n)$ 时间内求出 $DT(G, s)$ 。

无向图的割点和桥是大家熟知的概念，然而有向图的对应概念知道的却不算多。强割点和强桥除了判断之外，还有许多和无向图对应的变种值得研究，如割集（删掉若干个点/边使得强连通分量个数增加）等，希望能通过这次营员交流让更多同学了解并深入探讨。

无向图的割点和桥是大家熟知的概念，然而有向图的对应概念知道的却不算多。强割点和强桥除了判断之外，还有许多和无向图对应的变种值得研究，如割集（删掉若干个点/边使得强连通分量个数增加）等，希望能通过这次营员交流让更多同学了解并深入探讨。

感谢 CCF 给了我这次营员交流的机会。

感谢同学、教练、父母的支持。

感谢大家的倾听，预祝大家在冬令营中取得好成绩。

参考资料

[1] Robert E. Tarjan, *Depth-first search and linear graph algorithms*
[2] Adam L. Buchsbaum, Haim Kaplan, Anne Rogers, Jeffery R. Westbrook, *A new, simpler linear-time dominators algorithm*
[3] Giuseppe F. Italianoa, Luigi Laura b, Federico Santaroni, *Finding strong bridges and strong articulation points in linear time*