杂题选讲

任轩笛

PKU

2020 年 7 月 25 日

Anton and Ira

Codeforces #324 (Div.2) E

题意

给出两个排列，要通过交换一些元素把排列 A 改成排列 B，交换 i, j 位置的元素的代价是 $|i-j|$。求最小代价。

范围

$n \leq 2000.$

Anton and Ira

Codeforces #324 (Div.2) E

先把 B 改成 $1 \sim n$，A 对应改掉。
设 pos_i 表示 i 在 A 中的位置，显然答案下界是 $\frac{\sum |i - pos_i|}{2}$。
这个下界能否达到呢？答案是能的。

先把 B 改成 $1 \sim n$，A 对应改掉。

设 pos_i 表示 i 在 A 中的位置，显然答案下界是 $\frac{\sum |i - pos_i|}{2}$。

这个下界能否达到呢？答案是能的。我们需要让每个数每次移动都是往目标方向移。

从大到小考虑每个数，它要往右边移动，考虑它右边有没有数需要往左边移到这个数左侧。根据鸽巢原理，显然是存在至少一个的，那么交换它们继续操作就行了。$O(n^2)$。

GridColoring

SRM 409 900pts

题意

有一个 $n \times m$ 的矩形，每次操作是随机两个点，把这两个点形成的矩形染成黑色。问 k 次操作后染黑的格子的期望个数。

范围

$k \leq 100, n, m \leq 1000$。

GridColoring

SRM 409 900pts

对每个格子分开算贡献，求它没被染黑的概率，就是单次不被染黑的概率的 k 次方。

对每个格子分开算贡献，求它没被染黑的概率，就是单次不被染黑的概率的 k 次方。

一个格子不被一个矩形覆盖，那么矩形要么端点都在这个格子上或下，要么都在这个格子左或右，要么兼而有之。

简单容斥下即可。$O(nm \log k)$。

SplittingFoxes

SRM 544 900pts

题意

一开始 $(0,0)$ 有一个点，面朝 x 轴正方向。

每秒钟每个点会变成 $(S+L+R)$ 个点，其中 S 个点前进一步，L 个点停在原地并左转 $90°$，R 个点停在原地并右转 $90°$。

求 n 秒钟后所有点的 $x \times y$ 之和取模。

范围

$n \leq 10^{18}$。

SplittingFoxes

SRM 544 900pts

直接矩乘肯定是可以搞的，即记录面朝各个方向的点的答案、x 之和、y 之和、点数，16×16 转移下。

这个本质上是讨论了每个点最后一秒的行为。

考虑讨论每个点第一秒的行为。

设 $F(n)$ 表示 n 秒后的答案，$X(n)$ 表示 x 之和，$Y(n)$ 表示 y 之和，$T(n)$ 表示 n 秒后的点数。

SplittingFoxes

SRM 544 900pts

考虑讨论每个点第一秒的行为。

设 $F(n)$ 表示 n 秒后的答案，$X(n)$ 表示 x 之和，$Y(n)$ 表示 y 之和，$T(n)$ 表示 n 秒后的点数。

一个 $(n-1)$ 秒从 $(0,0)$ 走到 (x,y) 的点，在前面添一步 S，则实际坐标是 $(x+1,y)$；在前面添一步 L，实际坐标是 $(-y,x)$；在前面添一步 R，实际坐标是 $(y,-x)$。

于是

$$F(n) = (S - L - R)F(n-1) + S \times Y(n-1)$$

$$X(n) = (R - L) \times Y(n-1) + S \times X(n-1) + S \times T(n-1)$$

$$Y(n) = S \times Y(n-1) + (L - R) \times X(n-1)$$

$$T(n) = (S + L + R) \times T(n-1)$$

4×4 矩乘即可。

Increasing Shortest Path

SPOJ ACPC13

题意

有个 n 个点 m 条边的有向图，有 q 个询问：从 a_i 到 b_i，边权递增，经过不超过 c_i 条边，权值和最小是多少?

范围

$n \leq 150, m, q \leq 5000.$

Increasing Shortest Path

SPOJ ACPC13

对每个起点单独做一遍。

Increasing Shortest Path

SPOJ ACPC13

对每个起点单独做一遍。

设 $dis[i,j]$ 表示终点在 i，已经走了 j 条边时的最短路。

Increasing Shortest Path

SPOJ ACPC13

对每个起点单独做一遍。

设 $dis[i,j]$ 表示终点在 i，已经走了 j 条边时的最短路。

为了处理边权递增的限制，把边按照权值从小到大排序后一条条加进去。

对每个起点单独做一遍。

设 $dis[i,j]$ 表示终点在 i，已经走了 j 条边时的最短路。

为了处理边权递增的限制，把边按照权值从小到大排序后一条条加进去。

假设现在在处理一条边 (u,v,w)，则用 $dis[u,j]+w$ 去更新 $dis[v,j+1]$。这样搞出的路径就都是权值递增的路径。

复杂度 $O(m\log m+n^2m+q)$。

IncreasingNumber

SRM 452 1000pts

题意

求满足下列条件的数字个数：

- 共有 n 位数码
- 没有前导 0
- 从高位到低位非降
- 模 $m = 0$

范围

$n \le 10^{18}, m \le 500$。

IncreasingNumber

SRM 452 1000pts

$f[i,p,k]$ 表示填了前 i 位，第 i 位数字是 p，模 $m=k$ 的方案数。

复杂度 $O(10nm)$。

倍增。

$f[i, L, R, k]$ 表示长度为 2^i 的数字，最高位 L，最低位 R，模 $m = k$ 的方案数。

复杂度 $O(10^3 m^2 \log n)$。

IncreasingNumber

SRM 452 1000pts

考虑每一位对数位和的影响。
本质不同的只有 m 类。
如何解决数位递增?

差分。

合法的数字一定能表示成 $\sum A_i \times 111...111$。其中 $\sum A_i \leq 8$。

IncreasingNumber

SRM 452 1000pts

差分。

合法的数字一定能表示成 $\sum A_i \times 111...111$。其中 $\sum A_i \leq 8$。

按照 111...111 模 m 的值进行分类，预处理出模 $m = i$ 的有 T_i 位，一类类 DP 过去即可。

$O(10^2 m^2)$。

题意

有 n 种硬币，每种有个价值 v_i 和颜色 c_i，每种硬币都有无限个。

q 组询问，给出 s，问最多能用多少种颜色组成 s。

范围

$n \le 30, v_i \le 200000, s \le 10^{18}$。

Little Elephant and Colored Coins

Codechef LECOINS

这种可以无限填充硬币的题，一般是找一枚最小币值的硬币，设其面值为 m，把每个模 $m = i$ 时能拼出的最小价值求出来，然后判 s 是否 $\geq f_{s \bmod m}$ 就行了。

求模域下答案一般是用最短路。

对于这个题，要求最多能用多少种硬币，可以先做一遍背包，搞个 $dis[k][*]$ 表示强制用了 k 种，模 $m = i$ 的答案。然后再在同一层中任意地添硬币补充转移。

后一步跑最短路的话，$O(n^2 m \log m)$，DP 的话 $O(n^2 m)$。

题意

有 n 张卡片，每张都有正反两面，正面有 $1 \sim m$ 的一个子集，反面是它的补集。

q 组询问，给出 l, r，可以把 $l \sim r$ 的卡片任意翻面，使得在正面出现过的数的平方和尽量大。

范围

$n \times m, q \leq 10^6$.

魔法卡片

来源不明

只要 $\log n$ 张卡片就可以覆盖住全集。于是若 $r - l + 1 > \log n$，答案就是全集。

魔法卡片

来源不明

只要 $\log n$ 张卡片就可以覆盖住全集。于是若 $r-l+1>\log n$，答案就是全集。

否则的话可以去暴搜，维护一个链表表示当前哪些数还没被选，使得能够以“剩余数的个数”的复杂度往下搜。

魔法卡片

只要 $\log n$ 张卡片就可以覆盖住全集。于是若 $r-l+1>\log n$，答案就是全集。

否则的话可以去暴搜，维护一个链表表示当前哪些数还没被选，使得能够以“剩余数的个数”的复杂度往下搜。对于一张卡取它正/反面时，两种情况剩余数之和就等于当前剩余的数。因此每一层复杂度都是 $O(m)$。$\log n$ 层就是 $O(m\log n)$。

题意

一棵树，每个点可以染成 m 种颜色之一，要求同色点对距离的最小值恰好为 k，问方案数。

范围

$n \le 10^5, m \le 10^9$，模 $10^9 + 7$。

差分，$\geq k$ 的方案数减去 $\geq k+1$ 的方案数。

差分，$\geq k$ 的方案数减去 $\geq k+1$ 的方案数。
按 BFS 序考虑节点，每次加入一片叶子，算合法的方案数。

差分，$\geq k$ 的方案数减去 $\geq k+1$ 的方案数。
按 BFS 序考虑节点，每次加入一片叶子，算合法的方案数。
直接就乘 $(m-$ 和它距离 $\leq k$ 的点数 $)$。

差分，$\geq k$ 的方案数减去 $\geq k+1$ 的方案数。

按 BFS 序考虑节点，每次加入一片叶子，算合法的方案数。

直接就乘 $(m-$ 和它距离 $\leq k$ 的点数 $)$。

考虑在一种合法染色方案的基础上给新点染一种颜色，和它距离 $\leq k$ 的点的颜色都不能用。这些颜色不会有交，因为那两个点都和新点距离 $\leq k$ 的话，它们之间的距离也 $\leq k$。

差分，$\geq k$ 的方案数减去 $\geq k+1$ 的方案数。

按 BFS 序考虑节点，每次加入一片叶子，算合法的方案数。

直接就乘（$m-$ 和它距离 $\leq k$ 的点数）。

考虑在一种合法染色方案的基础上给新点染一种颜色，和它距离 $\leq k$ 的点的颜色都不能用。这些颜色不会有交，因为那两个点都和新点距离 $\leq k$ 的话，它们之间的距离也 $\leq k$。

点分树上维护下即可。$O(n \log^2 n)$。

题意

给出平面上 n 个点，问有多少三角形和线段的二元组没有公共点。

范围

$n \leq 300$。

triangle

Bytedance Camp 2019 Day 2, Div A, Prob K

直接枚举 5 个点 check。
复杂度 $O(n^5)$，期望得分 30 分。

triangle

Bytedance Camp 2019 Day 2, Div A, Prob K

固定三角形，线段两个端点要么都在里面，要么都在外面，要么一里一外。

都在里面一定合法，一里一外一定不合法，只要计算都在外面的合法对数。

triangle

Bytedance Camp 2019 Day 2, Div A, Prob K

固定三角形，线段两个端点要么都在里面，要么都在外面，要么一里一外。

都在里面一定合法，一里一外一定不合法，只要计算都在外面的合法对数。

可以发现如果线段两个端点都在三角形外面且不合法的话，一定会穿过三角形的两条边。

固定三角形，线段两个端点要么都在里面，要么都在外面，要么一里一外。

都在里面一定合法，一里一外一定不合法，只要计算都在外面的合法对数。

可以发现如果线段两个端点都在三角形外面且不合法的话，一定会穿过三角形的两条边。设两个端点为 X, Y，夹的那个三角形顶点为 O。我们在 O 那里计算，把所有 O 出发的射线按极角排序，在 OX 到 OY 之间，ΔOXY 之外的每两个点都会产生-1 的贡献。

triangle

Bytedance Camp 2019 Day 2, Div A, Prob K

现在问题变成了求给出的点集中三个点形成的三角形内点数。

triangle

Bytedance Camp 2019 Day 2, Div A, Prob K

现在问题变成了求给出的点集中三个点形成的三角形内点数。

可以拆成 3 个以原点为顶点的有向三角形内点数之和。

把原点取成某个顶点，这样能保证原点和任意点的连线上没有别的点。

还需要特判某个顶点在另两个点和原点形成的三角形内的情况。

总复杂度 $O(n^2 \log n + n^3)$。

题意

有一个 $n \times m$ 的网格，每个格子是草原或者城镇。要用修若干首尾相接的铁路把所有城镇串起来。

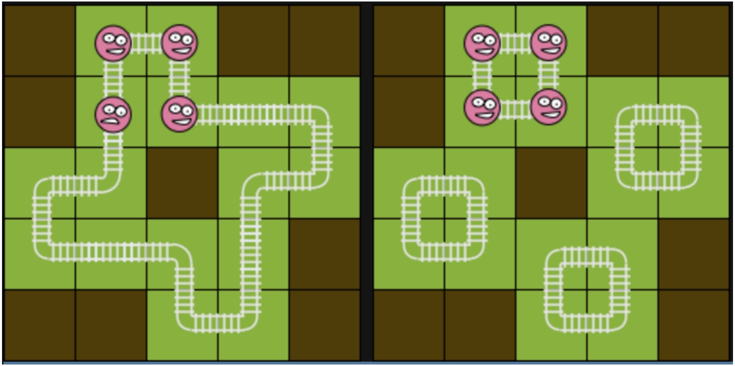
有些城镇里有人，他们希望穿过所在城镇的铁路是弯的。问最多能满足多少人的需求。无解输出-1。

范围

$n, m \leq 25$。

CurvyonRails

SRM 570 900pts



如果不考虑弯不弯的需求，就只要用若干个环把所有城镇串起来，那显然只要每个点度数都是 2 即可。

如果不考虑弯不弯的需求，就只要用若干个环把所有城镇串起来，那显然只要每个点度数都是 2 即可。

黑白染色，白点排在左边，黑点排在右边，白点朝相邻的黑点连容量 1 的边，s 朝白点、黑点朝 t 连容量为 2 的边求最小割即可。

CurvyonRails

SRM 570 900pts

考虑转角的问题，把每个格子拆成 2 个，一个表示水平方向，一个表示竖直方向。s 朝白点、黑点朝 t 连容量 1 的边，每个白点朝对应方向的黑点连容量为 1 的边。

现在如果能满流的话，所有城镇都是转角了。但是可能会无解。

CurvyonRails

SRM 570 900pts

考虑转角的问题，把每个格子拆成 2 个，一个表示水平方向，一个表示竖直方向。s 朝白点、黑点朝 t 连容量 1 的边，每个白点朝对应方向的黑点连容量为 1 的边。

现在如果能满流的话，所有城镇都是转角了。但是可能会无解。

于是在同一个点拆成的两个点之间连容量为 1、费用为 1 的边，如果这两个点通过这条边“交换”了流量，说明这个城镇的铁路其实是直的。跑最小费用最大流即可。

题意

$n \times m$ 的网格里有一些 # 号需要消除，每次可以选一段横向或纵向的连续 # 号一起消掉，不能选择空格或者已消除的格子。问最少需要消除几次。

范围

$n, m \leq 50$。

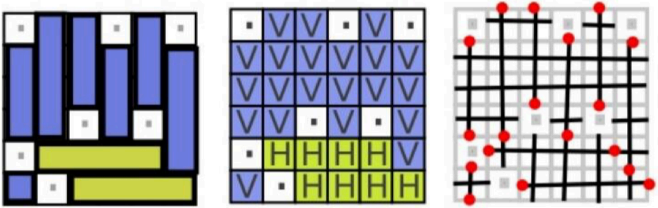
BoardPainting

SRM 577 1000pts

要用尽可能少的 $1 \times k$ 矩形覆盖所有的 #，不能重叠或覆盖到空格。

要用尽可能少的 $1 \times k$ 矩形覆盖所有的 #，不能重叠或覆盖到空格。

将横向的记为 H，纵向的记为 V。

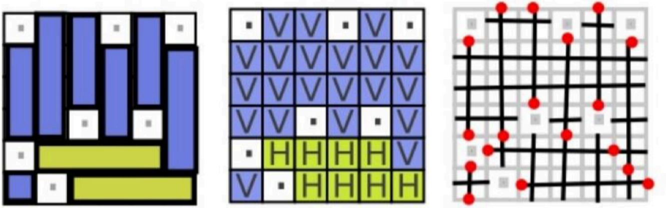


BoardPainting

SRM 577 1000pts

要用尽可能少的 $1 \times k$ 矩形覆盖所有的 #，不能重叠或覆盖到空格。

将横向的记为 H，纵向的记为 V。



考虑矩形的个数，那就是每个矩形的头尾总个数 /2。矩形的头尾必然是 V 和 H 之间的边/V 在纵向与空格或边界的边/H 在横向与空格或边界的边（即图中的红点们）。

那么就比较明确了，最小割，属于 S 集表示该格是 V 格，否则是 H 格。

从 s 向每个 # 连边，容量为其横向连接的边界/空格个数。割这条边即表示填成 H。

从每个 # 向 t 连边，容量为其纵向连接的边界/空格个数。割这条边即表示填成 V。

相邻两个 # 之间连双向容量为 1 的边，表示异割的话付出 1 的代价。

求最小割，除以 2 就是答案。

EnclosingTriangle

SRM 585 1000pts

题意

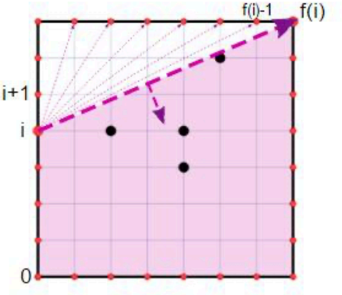
有一个正方形，边长为 m，给出 n 个正方形内的特殊点，求有多少顶点坐标为整数，且都在正方形边上的三角形，覆盖所有特殊点。

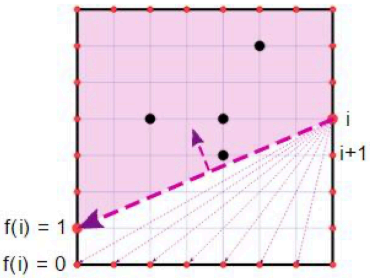
范围

$n \leq 20, m \leq 10^5$.

先把边界点从 0 开始标号，从每个点向前引一条射线，尽量往右拐，满足所有特殊点都在这条射线右侧。设这个点是 a，这条射线另一个端点为 $f(a)$。

求这个的时候把环拉成链再做。





现在就是要求这样的三元组 (a, b, c) 的对数：

$$0 \le a < b < c < N, f(a) \ge b, f(b) \ge c, f(c) \ge a + N$$

现在就是要求这样的三元组 (a, b, c) 的对数：

$$0 \le a < b < c < N, f(a) \ge b, f(b) \ge c, f(c) \ge a + N$$

显然 f 是单调的，于是枚举 a，关于 a 合法的 $b \in (a, f(a)]$，关于 a 合法的 c 是一个后缀。

EnclosingTriangle

SRM 585 1000pts

现在就是要求这样的三元组 (a, b, c) 的对数：

$$0 \leq a < b < c < N, f(a) \geq b, f(b) \geq c, f(c) \geq a + N$$

显然 f 是单调的，于是枚举 a，关于 a 合法的 $b \in (a, f(a)]$，关于 a 合法的 c 是一个后缀。

每次单调地加/删 b，对一个 b，把 $(b, f(b)]$ 给 ± 1，查询后缀和即可。线段树就能解决。$O(N \log N)$。