# 杂题选讲

DXYMASTER

# 「USACO 2020.1 Platinum」Falling Portals

- 有 $N$ 个世界，每个世界有一个传送门。初始时，世界 $i$（对于 $1 \le i \le N$）位于 $x$ 坐标 $i$，$y$ 坐标 $A\_i$。每个世界里还有一头奶牛。在时刻 0，所有的 $y$ 坐标各不相同，然后这些世界开始坠落：世界 $i$ 沿着 $y$ 轴负方向以 $i$ 单位每秒的速度移动。
- 在任意时刻，如果两个世界在某一时刻 $y$ 坐标相同（可能是非整数时刻），传送门之间就会「同步」，使得其中一个世界的奶牛可以选择瞬间传送到另一个世界。
- 对于每一个 $i$，在世界 $i$ 的奶牛想要去往世界 $Q_i$。帮助每头奶牛求出如果她以最优方案移动需要多少时间。
- 每个询问的输出是一个分数 $a/b$，其中 $a$ 和 $b$ 为互质的正整数，或者 $-1$，如果不可能到达。

- 实际上就是走斜率单调增加的线（要求斜率大于0）。
- 冷静分析可以发现的是最多走两步：如果是同向的连续两次显然不如直接一次。如果连续两次逆向，不难发现的是也一定可以减少次数。
- 如果只走一步是显然可以特判的。对于走两步的情况：
- 一定是走到右上，然后走回下方（或者走到左下回到上方）。
- 实际上我们只需要考虑最后一步走了多少，算这个东西其实就是关于纵坐标大于等于起点的所有点的凸包上求一个切线。
- 于是动态维护凸包即可。
- 复杂度 $O(N\log N)$

# 「USACO 2019.12 Platinum」Tree Depth

- 对于所有长度为 n，有 k 个逆序对的排列，求每个位置（下标）在笛卡尔树（这里以最小值作为根）的深度之和，对给定质数 $M$ 取模。
- $1 \le N \le 300, 0 \le K \le \frac{N(N-1)}{2}$。
- Bonus：$N \le 3000$

- 实际上可以考虑生成函数：如果硬点了 $i$ 是 $j$ 的笛卡尔树上的父亲，
- 那么 $i$ 一定是 $i$ 和 $j$ 区间中的最小值。那么可以考虑先填写区间中的值，再填 $i$ ，再填区间外的值的话，不难得到生成函数：
- $\prod_{k=0,k\neq|j-i|}^{k<n}\frac{(1-x^k)}{1\text{-x}}$ 。
- 那么每次暴力除掉一项就能 $O(n^2)$ 做出来这道题了。

# CF 1214G

- 有一个$n \times m$的矩阵M，其元素值为0/1.
- 初始所有元素都是0
- 每次操作可以翻转第 $a$ 行的第 $i \in [l, r]$ 的所有元素 $M[a][i]$
- 每次翻转结束后，输出一个矩形左上角为(x1,y1) 右上角为(x2,y2) 使得满足：
  - $1 \le x1 < x2 \le n, 1 \le y1 < y2 \le m$
  - 矩形的四个角，同侧异色，对角同色。
- 如果没有任何矩形满足条件，则输出 -1

- $1 \le n, m \le 2000, 1 \le q \le 500000$

# solution

- 观察性质，实际上我们就是在询问有没有两行的 1 不属于包含关系。
- 那么实际上可以发现，我们将所有行按照 1 的大小排序之后，如果存在两行不是包含关系，则必定有两行相邻的不是包含关系。
- 那么将其排序之后，暴力维护相邻两行是否能行即可。

# CF 1214H

- 给出一个 $n$ 个点的树，给出颜色种类数 $k$ ，现在要给每一个点染色，每一个点只能染一种颜色，求一种染色方案，使得树上任意一条点数为 $k$ 的简单路径包含k$k$种颜色，若没有输出 No，若存在第一行输出 Yes，第二行输出 $n$ 个整数，第 $i$ 个数字表示 $i$ 号点的颜色
- $n \le 200000, k \ge 2$

- 特判 $k = 2$
- 如果任意三个点两两距离大于等于 $k$，则无解。
- 那么考虑先将直径随意染色。对于剩下的点其实可以考虑距离哪个端点比较近。
- 对于挂在直径上的点，最多距离一个端点长度 $\geq k$。那么顺着这个端点继续填。
- 那么我们其实按照顺着哪个端点填将其分成了两个部分。
- 首先如果同一个部分内的两个点距离 $\geq k$，那么一定会导致这两个点和对应的直径端点两两距离 $\geq k$ 。而考虑不在同一部分内的点，显然他们之间任意一个长度 $= k$ 的路径都满足条件。

# JOISC2020 Day1 T3

- 给一个 $(0,0),(N,0),(0,N)$ 的等腰直角三角形，初始有 $M$ 个灰尘你需要支持以下操作 Q 次：
- 在某位置加入一个灰尘
- 询问某个灰尘的坐标
- **H**操作用一个 $L_i$ 的扫把把所有灰尘向上推：形式化地说，每个 $X$ 坐标 $< L_i$ 的灰尘会向上走到 $\max(Y坐标, N-L_\mathrm{i})$。
- **V**操作用一个 $L_i$ 的扫把把所有灰尘向右推（参照上一个操作）。
- $M \le 5*10^5, N \le 10^9, Q \le 10^6$。 时限 10s

# solution

- 可以将每个灰尘看成一段区间，而每次操作实际上就是让 $L$ 在 $X$ 左边的 R 和 X 取 min （或者反过来）。
- 我们考虑只有一个操作的时候怎么做：有一个坐标是不动的。显然只需要考虑对不动得坐标维护一个平衡树/线段树即可。

- 考虑没有那个操作显然直接维护会变得非常困难。
- 我们考虑将每个区间从mid拆开：现在就变成了两个单向操作的区间。整体的思路是想要对单向操作分别维护，而超过mid的时候进行重构，这样重构次数是 $M\log$ 的。
- 如何判断重构呢？我们如果是移动 L，可以考虑在 R 的平衡树上进行查询，每次找到 R 的平衡树上 mid 小于 L 中 R 最大的，判断是否能够重构即可。
- 复杂度 $O(\mathrm{M}\ \log^2\ )$。

# JOISC2020 Day2 T1

- 交互题
- 有 $2N(N \le 500)$ 只变色龙，N 只性别为 X 以及 N 只性别为 Y。
- 每个变色龙有一个**原色**：X里面两两不同，Y里面两两不同，并且每只变色龙能找到一个和他**原色**相同的。
- 每只变色龙都**爱上**了一只变色龙。关于恋爱对象的可公开情报如下：
  - 每只变色龙都很专一于唯一一只异性的变色龙。
  - 一只变色龙和它的恋爱对象的原色不同。
  - 不存在两只变色龙同时追求另一只变色龙。
- 你可以询问一个集合的变色龙，对于一只在集合里面的变色龙 $s$，令 $t$ 为它的恋爱对象。$s$ 的**肤色**由以下方式决定：
  - 如果 $t$ 参加了这场会议，则 $s$ 的肤色为 $t$ 的**原色**。
  - 如果 $t$ 没参加这场会议，则 $s$ 的肤色为 $s$ 的**原色**。
- 然后你可以得到这个集合中的变色龙的**肤色**种类数
- 你最多能询问 20000 次，你想要知道所有相同原色的变色龙。

- 首先考虑你已经知道性别的情况下：你可以考虑直接对于一个点进行二分：（是否递归下去的依据是颜色是否等于集合大小）
- 这样对于每个X变色龙，你可以得到的是三个点：一个是入度，一个是出度，一个是颜色相等的。（或者只有颜色相等的）。
- 考虑已知这三个点的情况下：你考虑询问两个变色龙以及当前变色龙，发现只有：当前变色龙 + 入度 + 同色 的答案是 1。于是可以找到出度。
- 于是二分图的情况就被解决了。

- 可以发现能够二分的条件实际上是单独查询的时候颜色个数等于集合大小。
- 那么每次能够加入则加入，如果不能加入的话，其实一定是与集合内部有边的。
- 那么二分次数就是 $3N$ 的，其余的各种判断大概只需要花费 7N 次操作，可以通过本题。

# CF 1239F - Swiper, no swiping!

- 给一个无向图（无重边自环），删除若干个点（不能是所有或空集），满足剩下的点度数在 $(mod\ 3)$ 意义下不变。保证图联通。
- $n, m \le 2 * 10^6$

- 为了方便，我们用 $Z, A, B$ 表示 $mod\ 3 = 0,1,2$ 的点。
- 首先可以判断掉一些简单的情况：
  - 1. 有 $Z$ 点，只保留这一个点即可。
  - 2. 有两个 $A$ 点之间有边，只保留这两个点即可。
- 那么现在的情况就是：有若干个 $A$ 和 $B$，其中 $A$ 之间没有边。

- 那么考虑如果 $B$ 有环，找出来最小的环即可。
- 所以剩余的情况 $B$ 构成森林。
- 考虑这个时候，如果有多个 $A$ ，那么显然是可以从一个 $A$ 直接走到另外一个 $A$ 的。
- 剩余的情况就只有一个 $A$。

- 考虑每一颗树有多少个点会连向 $A$ 。最开始的情况是三个点组成一条链。
- 实际上连的边数（对 3 取模）是 点数*2 - 边数*2 $mod$ 3。
- 所以一棵树连出去的边 $mod\ 3 = 2$。那么至少会有两棵树。
- 至少有两棵树的话，不难在两颗树上找各到一条路径，首尾都与 $A$ 相连，这个时候保留这两个环即可。