网络流及其相关

1 普通网络流

> 网络流主要用来解决一些带限制求最有解的问题
> 其模型为一个有向图，其中有两个特殊的点源`S(Sources)`和汇`T(Sinks)`，每条边有指定的容量`(Capacity)`，求满足条件的从`S`到`T`的最大流`(MaxFlow)`。

几个基本性质

- F<x,y> < C<x,y>，即每条边流量小于其上限
- 流量守恒，$\sum f<x,u> = \sum f<v,x>$
- 斜对称性，$f<x,y>=-f<y,x>$

割与割集

- 在残量网络上，所有$f<x,y>=C<x,y>$的边称之为该图的割，所有的割边组成的集合叫做割集
- 割集一定将图分为两部分，我们把与源点联通的点集称为S,与汇点联通的点集称为T，则不存在任意点$x \in S$ && $x \in T$,并且$S|T=$全集。

增广路定理：网络达到最大流当且仅当残留网络中没有增广路。

基本算法

EK，可以证明最多增广EV次，每次bfs找最短的增广路，所以复杂度为VE^2。

$dinic$,每次将可以到达的点分层，每次增广只增广相邻两层的点，时间复杂为EV^2。

关于根本不会的isap。

相关题目

士兵占领

题目描述

有一个$M*N$的棋盘，有的格子是障碍。现在你要选择一些格子来放置一些士兵，一个格子里最多可以放置一个士兵，障碍格里不能放置士兵。我们称这些士兵占领了整个棋盘当满足第i行至少放置了Li个士兵, 第j列至少放置了Cj个士兵。现在你的任务是要求使用最少个数的士兵来占领整个棋盘。

题解

考虑每个士兵的贡献，如果第i行和第j列都未达到要求，则在这里放士兵的贡献为2，否则为1，那显然贡献为2的士兵越多，答案不会更劣，直接拿行和列做最大匹配即可。

luogu1251餐巾计划问题

题目描述 一个餐厅在相继的 N 天里,每天需用的餐巾数不尽相同。假设第 i 天需要 ri块餐巾(i=1,2,...,N)。餐厅可以购买新的餐巾,每块餐巾的费用为 p分;或者把旧餐巾送到快洗部,洗一块需 m 天,其费用为 f 分;或者送到慢洗部,洗一块需 n 天(n>m),其费用为 s 分(s<f)。 每天结束时,餐厅必须决定将多少块脏的餐巾送到快洗部,多少块餐巾送到慢洗部,以及多少块保存起来延期送洗。但是每天洗好的餐巾和购买的新餐巾数之和,要满足当天的需求量。 试设计一个算法为餐厅合理地安排好 N 天中餐巾使用计划,使总的花费最小。编程找出一个最佳餐巾使用计划。

题解

- 每个点拆成两个Xi和Yi，Xi表示当天用完的，Yi表示当天要用的。
- 先将每个点拆成两个，Xi和Yi
- 1.从源点向每个Xi连条流量为ri，0费用的边
- 2.从每个Yi向汇点连条流量为ri，0费用的边
- 3.从每个Xi向$Xi+1$连条流量无限，0费用的边,表示你可以把当天的留到下一天处理。
- 4.从每个Xi向$Yi+m$连流量无限，费用为f的边
- 5.从每个Xi向$Yi+n$连流量无限，费用为s的边
- 6、从S向每个Yi连一条容量为无穷大，费用为p的有向边。

hdu3599

题面描述 给定n个点($n<=1500$)的无向图，求最多同时有多少条不相交的最短路

题解 最短路+最大流

CTSC1999家园

题面描述

由于人类对自然资源的消耗，人们意识到大约在 2300 年之后，地球就不能再居住了。于是在月球上建立了新的绿地，以便在需要时移民。令人意想不到的是，2177 年冬由于未知的原因，地球环境发生了连锁崩溃，人类必须在最短的时间内迁往月球。

现有 n 个太空站位于地球与月球之间，且有 m 艘公共交通太空船在其间来回穿梭。每个太空站可容纳无限多的人，而每艘太空船 i 只可容纳 H[i]个人。每艘太空船将周期性地停靠一系列的太空站，每一艘太空船从一个太空站驶往任一太空站耗时均为 1。人们只能在太空船停靠太空站(或月球、地球)时上、下船。

初始时所有人全在地球上，太空船全在初始站。试设计一个算法，找出让所有人尽快地全部转移到月球上的运输方案。

对于给定的太空船的信息，找到让所有人尽快地全部转移到月球上的运输方案。

n（太空站个数），m（太空船个数）和 k（需要运送的地球上的人的个数）。其中 n<=13 m<=20, 1<=k<=50。

题解

我们首先用并查集判断是否有解

发现因为太空站的个数很少，所以答案不会很大，我们枚举答案（最好是二分），每次相当于多了一天，对每个点都多建一个点，对每个点从上次向这次连一条流量无限的边，代表人留在这里，对与他相连的点连一条流量为飞船运载量的边。知道最大流大于等于k时就是答案。

最小割-最大流最小割定理

网络的最大流等于最小割，具体的证明分三部分

1.任意一个流都小于等于任意一个割

这个很好理解 自来水公司随便给你家通点水 构成一个流 恐怖分子随便砍几刀 砍出一个割 由于容量限制 每一根的被砍的水管子流出的水流量都小于管子的容量 每一根被砍的水管的水本来都要到你家的 现在流到外面 加起来得到的流量还是等于原来的流 管子的容量加起来就是割 所以流小于等于割 由于上面的流和割都是任意构造的 所以任意一个流小于任意一个割

2.构造出一个流等于一个割

当达到最大流时 根据增广路定理 残留网络中s到t已经没有通路了 否则还能继续增广 我们把s能到的的点集设为S 不能到的点集为先将每个点拆成两个，Xi和Yi

3.最大流等于最小割

设相等的流和割分别为Fm和Cm 则因为任意一个流小于等于任意一个割 任意F≤Fm=Cm≤任意C 定理说明完成，证明如下:

```
对于一个网络流图G=(V,E)，其中有源点s和汇点t，那么下面三个条件是等价的:
1. 流f是图G的最大流
2. 残留网络Gf不存在增广路
3. 对于G的某一个割(S,T)，此时f(S,T) = C(S,T)
```

首先证明1 -> 2:

```
我们利用反证法，假设流f是图G的最大流，但是残留网络中还方存在有增广路p，其流量为fp。则我们有流
f'=f+fp>f。这与f是最大流产生矛盾。
```

接着证明2 -> 3:

```
假设残留网络Gf不存在增广路，所以在残留网络Gf中不存在路径从s到达t。我们定义S集合为: 当前残留网络中s能够到
达的点。同时定义T=V-S。
此时(S,T)构成一个割(S,T)。且对于任意的u∈S,v∈T，有f(u,v)=c(u,v)。若f(u,v)<c(u,v)，则有
Gf(u,v)>0，s可以到达v，与v属于T矛盾。
因此有f(S,T)=Σf(u,v)=Σc(u,v)=C(S,T)。
```

最后证明3 -> 1:

由于f的上界为最小割，当f到达割的容量时，显然就已经到达最大值，因此f为最大流。

tip:最小割建模时，通常先是认为获得最大利益，建模是将代价附在边权上，割掉此边代表不选，最后减去最小割代价即是最大获利。

最大权闭合图

定义:在一张图中，每个节点都有权值，有正有负，现在选出一些点，要求如果选了A，那么所有A指向的点也要选，现在要最大化收益。

证明最小割所产生的两个集合中，其源点S所在集合(除去S)为最大权闭合图。
先我们记一个简单割的容量为C,且S所在集合为N，T所在集合为M。
则C=M中所有权值为正的点的权值(即S与M中点相连的边的容量)+N中所有权值为负的点权值的绝对值。记(C=x1+y1);
我们记N这个闭合图的权值和为W。
则W=N中权值为正的点的权值-N中权值为负的点的权值的绝对值。记(W=x2-y2);
则W+C=x1+y1+x2-y2。
因为明显y1=y2，所以W+C=x1+x2;
x1为M中所有权值为正的点的权值，x2为N中权值为正的点的权值。
所以x1+x2=所有权值为正的点的权值之和(记为TOT).
所以我们得到W+C=TOT.整理一下W=TOT-C.
到这里我们就得到了闭合图的权值与简单割的容量的关系。
因为TOT为定值，所以我们欲使W最大，即C最小，即此时这个简单割为最小割，此时闭合图为其源点S所在集合(除去S)。得正。
至此，我们就将最大权闭合图问题转化为了求最小割的问题。求最小割用最小割容量=最大流，即可将问题转化为求最大流的问题。

```
* 从最小割的角度考虑建模，首先默认选择所有正权的点，再小A是一个电影迷，他收集了上百部的电影，打算从中挑出若干部在假期看完。他根据自己的口味和网上的介绍，对每部电影X都打了一个分数vX，表示自己喜欢的程度。这个分数的范围在-1000至1000之间，越大表示越喜欢。小A每看一部电影X，他的体验值就会加上vX。

另外，因为某些电影是组成一个系列的，比如著名的《终结者》系列、《黑客帝国》系列等等，如果小A只看了前一部而没有看后一部的话，他就会觉得不是很爽。准确来讲，对于任意两部不同的电影X,Y，他们可能存在一个依赖值dXY，表示如果小A看了X但是没看Y，他的体验值就会减少dXY。（注意与观看的顺序无关，只要两部都看过，就不会减少体验值）

现在他要选出若干电影来看，使得得到的总的体验值最大。如果他无法得到正的体验值，就输出0。减去最小代价。
* 从源点向所有正权点连边，边权为点权，从所有负权点向汇点连边，边权为点权绝对值。
* 每割掉一个正权点的边就代表不选此点，每割掉一个负权点的边就代表选择此点
* 对于限制条件(A,B,C)，按C正负分类连边，割掉此边代表将A,B划在两个集合中付出的代价
```

最小割相关题目

luogu2762 太空飞行计划问题

题目描述

W 教授正在为国家航天中心计划一系列的太空飞行。每次太空飞行可进行一系列商业性实验而获取利润。现已确定了一个可供选择的实验集合$E=E1，E2，...，Em$，和进行这些实验需要使用的全部仪器的集合$I=I1，I2，...In$。实验Ej需要用到的仪器是l的子集$Rji I$。配置仪器Ik的费用为ck美元。实验Ej的赞助商已同意为该实验结果支付pj美元。W教授的任务是找出一个有效算法，确定在一次太空飞行中要进行哪些实验并因此而配置哪些仪器才能使太空飞行的净收益最大。这里净收益是指进行实验所获得的全部收入与配置仪器的全部费用的差额。

对于给定的实验和仪器配置情况，编程找出净收益最大的试验计划。

题解

最小割，先假设所有实验收益都拿到，所有仪器都不买。

源点向实验连边权为实验费用的边，割掉此边代表不做此试验了

仪器向汇点连边，割掉代表购买此仪器。小A是一个电影迷，他收集了上百部的电影，打算从中挑出若干部在假期看完。他根据自己的口味和网上的介绍，对每部电影X都打了一个分数vX，表示自己喜欢的程度。这个分数的范围在-1000至1000之间，越大表示越喜欢。小A每看一部电影X，他的体验值就会加上vX。

另外，因为某些电影是组成一个系列的，比如著名的《终结者》系列、《黑客帝国》系列等等，如果小A只看了前一部而没有看后一部的话，他就会觉得不是很爽。准确来讲，对于任意两部不同的电影X,Y，他们可能存在一个依赖值dXY，表示如果小A看了X但是没看Y，他的体验值就会减少dXY。（注意与观看的顺序无关，只要两部都看过，就不会减少体验值）

现在他要选出若干电影来看，使得得到的总的体验值最大。如果他无法得到正的体验值，就输出0。

实验向仪器连流量无限的边。

至于输出方案就是S集合里的点。

HNOI2013切糕

题面描述

经过千辛万苦小 A 得到了一块切糕，切糕的形状是长方体，小 A 打算拦腰将切糕切成两半分给小 B。出于美观考虑，小 A 希望切面能尽量光滑且和谐。于是她找到你，希望你能帮她找出最好的切割方案。

出于简便考虑，我们将切糕视作一个长 P、宽 Q、高 R 的长方体点阵。我们将位于第 z层中第 x 行、第 y 列上(1≤x≤P, 1≤y≤Q, 1≤z≤R)的点称为(x,y,z)，它有一个非负的不和谐值 v(x,y,z)。一个合法的切面满足以下两个条件：

1. 与每个纵轴(一共有 P*Q 个纵轴)有且仅有一个交点。即切面是一个函数 f(x,y)，对于所有 1≤x≤P, 1≤y≤Q,我们需指定一个切割点 f(x,y),且 1≤f(x,y)≤R。
2. 切面需要满足一定的光滑性要求，即相邻纵轴上的切割点不能相距太远。对于所有的 1≤x,x’≤P 和 1≤y,y’≤Q，若|x-x’|+|y-y’|=1，则|f(x,y)-f(x’,y’)| ≤D，其中 D 是给定的一个非负整数。 可能有许多切面f 满足上面的条件，小A 希望找出总的切割点上的不和谐值最小的那个。

题解

建R层图，每一层往下一层连边，代表将这个点作为切点。

每层每个点向四周连边，代表可以往旁边走，切别的点。

对于限制条件，每层向上面第D层的相邻点连inf边，代表不能割即可。

4. SHOI2007善意的投票

题面描述

幼儿园里有n个小朋友打算通过投票来决定睡不睡午觉。对他们来说，这个问题并不是很重要，于是他们决定发扬谦让精神。虽然每个人都有自己的主见，但是为了照顾一下自己朋友的想法，他们也可以投和自己本来意愿相反的票。我们定义一次投票的冲突数为好朋友之间发生冲突的总数加上和所有和自己本来意愿发生冲突的人数。

我们的问题就是，每位小朋友应该怎样投票，才能使冲突数最小？

题解

把小朋友按照立场分成左右两组，只向源点或汇点连边，朋友之间连双向边。

割掉与源汇点之间的边代表改变立场，否则割掉立场不同的朋友之间的边。

6.TJOI2010电影迷

题面描述

小A是一个电影迷，他收集了上百部的电影，打算从中挑出若干部在假期看完。他根据自己的口味和网上的介绍，对每部电影X都打了一个分数vX，表示自己喜欢的程度。这个分数的范围在-1000至1000之间，越大表示越喜欢。小A每看一部电影X，他的体验值就会加上vX。

另外，因为某些电影是组成一个系列的，比如著名的《终结者》系列、《黑客帝国》系列等等，如果小A只看了前一部而没有看后一部的话，他就会觉得不是很爽。准确来讲，对于任意两部不同的电影X,Y，他们可能存在一个依赖值dXY，表示如果小A看了X但是没看Y，他的体验值就会减少dXY。（注意与观看的顺序无关，只要两部都看过，就不会减少体验值）

现在他要选出若干电影来看，使得得到的总的体验值最大。如果他无法得到正的体验值，就输出0。

题解

最大权闭合子图模板题。

7.SCOI2009植物大战僵尸

题面描述

有NM个点，每个点有一个权值(有正有负)，代表选这个点的收益，其中每个点都存在一些限制关系，形如(x,y)，表示如果要选择(x,y)，就一定要选这个点。最大化收益。

题解

首先拓扑一下，将成环的点去掉，然后做最大权闭合子图即可。

网络流在二分图方面的应用

二分图最大匹配

建立二分图，源点向第一层点连边，边权为该点可匹配次数，第二层点向汇点一样连边，跑一遍网络流，答案就是最大匹配数，$dinic$的分层操作在二分图上表现优异，复杂度为$mn^{\frac{3}{2}}$

> 最大独立集数=总点数-最大匹配数，显然每个点都不能与其有边的点同时被选，所以将其连边，每一组匹配便代表有一个点不能选

> 最小路径覆盖问题
> 给定有向图G=(V,E)。设P 是G 的一个简单路（顶点不相交）的集合。如果V 中每个顶点恰好在P 的一条路上，则称P是G 的一个路径覆盖。P 中路径可以从V 的任何一个顶点开始，长度也是任意的，特别地，可以为0。G 的最小路径覆盖是G 的所含路径条数最少的路径覆盖。设计一个有效算法求一个有向无环图G 的最小路径覆盖。

```
结论:最小路径覆盖数=总点数-最大匹配数
证明:原本我们首先将原图用n条路径覆盖，每条边只经过每个节点。
现在尽量合并更多的路径(即将两个路径通过一条边首尾相连)。
可以知道，每合并两条路径，图中的路径覆盖数就会减少1。
所以我们需要尽可能的多合并路径，上限即为最大匹配数。
```

二分图相关题目

1.SCOI2015小凸玩矩阵

题面描述

小凸和小方是好朋友，小方给了小凸一个 $n*m(n<=m)$的矩阵 A ，并且要求小凸从矩阵中选出 n 个数，其中任意两个数都不能在同一行或者同一列。现在小凸想知道，选出的 n 个数中第 k大的数的最小值是多少。

题解

二分答案，将问题转换成判断。

显然对每个大于二分的答案的数是可以使行列匹配的，我们只需判断匹配数是否超过k即可。

luogu1402酒店之王

题面描述

XX酒店的老板想成为酒店之王，本着这种希望，第一步要将酒店变得人性化。由于很多来住店的旅客有自己喜好的房间色调、阳光等，也有自己所爱的菜，但是该酒店只有p间房间，一天只有固定的q道不同的菜。

有一天来了n个客人，每个客人说出了自己喜欢哪些房间，喜欢哪道菜。但是很不幸，可能做不到让所有顾客满意（满意的条件是住进喜欢的房间，吃到喜欢的菜）（每个房间和菜都只能供一个人）。

这里要怎么分配，能使最多顾客满意呢?

题解

每个酒店向人连边，人向食物连边，跑最大匹配。

你会发现答案大了，因为可能会有多组食物和酒店通过同一个人匹配了。

所以将每个人拆成两个点，在中间连条一的边。

最小费用最大流

在最大流的基础上给每条边加上一个费用，最小化$\sum f(x,y)*w(x,y)$

仿照dinic做法，每次只增广残量网络上的最短路即可。

最优证明:假设当前最优局面为F,而按照最短路增广一次之后的局面为F',假设同状态下有局面F'',费用比F'小，$R=F''-F$,R不可能有0环，所以R一定是一条增广路，而R费用不可能小于最短路，所以矛盾。

费用流相关题目

luogu4016 负载平衡问题

题面描述

G 公司有 n 个沿铁路运输线环形排列的仓库，每个仓库存储的货物数量不等。如何用最少搬运量可以使 n 个仓库的库存数量相同。搬运货物时，只能在相邻的仓库之间搬运。

题解

这道题有很多优秀~~B~~的解决方法，但我们只讨论费用流的，显然把需要运进的和需要运出的分别放在两边，与源汇点之间连流量为多余或缺少的数量，费用为0,要运出的点向要运进的点连流量无限，费用为最短距离的边即可

SCOI2007修车

题目描述

同一时刻有N位车主带着他们的爱车来到了汽车维修中心。维修中心共有M位技术人员，不同的技术人员对不同的车进行维修所用的时间是不同的。现在需要安排这M位技术人员所维修的车及顺序，使得顾客平均等待的时间最小。

说明：顾客的等待时间是指从他把车送至维修中心到维修完毕所用的时间。(2<=M<=9,1<=N<=60), (1<=T<=1000)

题解

正常想法是把每个人等待的时间加起来，但这样一点也不好算，所以我们换一种思考方式，我们把每个修车师傅拆成n个点，对于第a个点，ak代表在这个师傅这里是倒数第k个修车的，对答案的贡献为$k*T$，把这个作为费用即可

luogu4206学习小组

题目描述

共有n个学生，m个学习小组，每个学生只愿意参加其中的一些学习小组，且一个学生最多参加k个学习小组。每个学生参加学习小组财务处都收一定的手续费，不同的学习小组有不同的手续费。若有a个学生参加第i个学习小组，财务处支付奖励$Ci*a^2$元。在参与学生尽量多的情况下，求财务处最少要支出多少钱。

题解

题目大意：给定一个竞题目大意：给定一个竞赛图，一些边没有指定方向，求一个指定方向的方案使竞赛图中三元环的数量最多

直接做不好做，我们考虑补集法赛图，一些边没有指定方向，求一个指定方向的方案使竞赛图中三元环的数量最多

直接做不好做，我们考虑补集法共有n个学生，m个学习小组，每个学生只愿意参加其中的一些学习小组，且一个学生最多参加个学习小组。每个学生参加学习小组财务处都收一定的手续费，不同的学习小组有不同的手续费。若有个学生参加第个学习小组，财务处支付奖励元。在参与学生（而不是每个学习小组的人数总和）尽量多的情况下，求财务处最少要支出多少钱。

参与学生尽量多，那么每个学生都尽量参与至少一个社团(除非所有社团都达到上限)。

- 从源点向每个学生i连$edge(S,i,k,0)$的边，表示该学生可以参与之多k个社团。
- 从每个学生i向汇点连$$edge(i,T,k-1,0)，表示如果你不想参加了就直接流到汇点去
- 对每个学生向每个社团连$edge(i,j+n,1,-F[j])$，表示加入该社团。
- 对每个社团向汇点连n条边，代表有几个学生加入该社团,每条边为$edge(i+n,T,1,Ci*(2*j-1))$,表示第j个学生加入了该社团产生的贡献变化，因为费用递增，所以一定从最小的开始流。

NOI2008志愿者招募

题面描述 申奥成功后，布布经过不懈努力，终于成为奥组委下属公司人力资源部门的主管。布布刚上任就遇到了一个难题：为即将启动的奥运新项目招募一批短期志愿者。经过估算，这个项目需要N 天才能完成，其中第i 天至少需要Ai 个人。 布布通过了解得知，一共有M 类志愿者可以招募。其中第i 类可以从第Si 天工作到第Ti 天，招募费用是每人Ci 元。新官上任三把火，为了出色地完成自己的工作，布布希望用尽量少的费用招募足够的志愿者，但这并不是他的特长！于是布布找到了你，希望你帮他设计一种最优的招募方案。

题解 我们假设所有天数招募满志愿者数量为inf,所以在招募之前，每天初始数量为$inf-a[i]$，每类志愿者直接从Si到Ti连费用为Ci,流量inf,这样会先增广0费用的边，然后当某些边被流断，就可以通过有费用的招募来补流。

WC2007剪刀石头布

题面描述：给定一个竞赛图，一些边没有指定方向，求一个指定方向的方案使竞赛图中三元环的数量最多

题解:

考虑补集，考虑任意三个人，如果不是三元环，那么一定有一个点有两条出边。

我们可得答案为 $C(n,3)-C(d[u],2)$，现在我们要最小化后面的部分，很明显，$C(n+1,2)-C(n,2)>C(n,2)-C(n-1,2)$,所以越到后面费用越多，我们直接对每个点$n$条边，表示入度为己，对每两个未知的关系的点，我们建一个点，流量为一，向两个点各连条边，表示谁增加一的入度即可。

SDOI2017新生舞会

题买

学校组织了一次新生舞会，Cathy作为经验丰富的老学姐，负责为同学们安排舞伴。

有 nn 个男生和 nn 个女生参加舞会买一个男生和一个女生一起跳舞，互为舞伴。

Cathy收集了这些同学之间的关系，比如两个人之前认识没计算得出 a_{i,j}ai,j

Cathy还需要考虑两个人一起跳舞是否方便，比如身高体重差别会不会太大，计算得出 b_{i,j}bi,j ，表示第i个男生和第j个女生一起跳舞时的不协调程度。

当然，还需要考虑很多其他问题。

Cathy想先用一个程序通过 a$\{i,j\}ai,j \text{ 和 } b${i,j}bi,j 求出一种方案，再手动对方案进行微调。

Cathy找到你，希望你帮她写那个程序。

一个方案中有n对舞伴，假设没对舞伴的喜悦程度分别是$a'_1,a'_2,...,a'_n a1',a2',...,an'$，假设每对舞伴的不协调程度分别是 $b'_1,b'_2,...,b'_n b1',b2',...,bn'$。令

最大化$C=\frac{a1'+a2'+....+an'}{b1'+b2'+....+bn'}$

题解

把分母乘过去，就是个分数规划，二分C,令$a=a-b*C$,这样我们只要做带权最大匹配为证就行。

loj6079 养猫

题面描述 一天中有n个时刻，每个时刻，你的猫需要做出抉择，睡觉并获得si的收益,或者是吃东西并获得ei的收益，但猫要求对于任意一个长度为k的区间，至少要有ms的时间来睡觉，me的时间来吃东西。$(n,k<=10000<=si,ei<=1e9)$

题解 首先强制让猫每天都睡觉，然后考虑用最小的代价将其中一些点改成吃饭，并使其符合条件。

- 设源点为st,汇点为ed，并设一个辅助点d
- 首先st向d连流量为$k-ms$的边，表示你每个长度为k的区间最多能更改这么多点
- d向前k个点连流量为一的边
- 每个点i向$min(i+k,ed)$连费用为$si-ei$的边
- 每个点i向$i+1$连容量为$k-ms-me$的边。

上下界网络流

定义:对每条边规定一个上下界，要求$down<x,y><=F<x,y><=up<x,y>$

无源无汇可行流

> 定义:给出一个上下界循环图，要求求出一个流使得所有边满足上下界要求。

我们令所有的边流量等于up-down,那么最终的每条边的流量即为down+该边流量,建立一个超级源S，一个超级汇T，对于每个点，记录$sum[u]$为点u的所有流出下界之和-流入下界之和，最后如果$sum[u]>0$，则证明流出下界大于流入下界，则建立$edge(S,u,sum[u])$,否则则建立$edge(u,T,-sum[u])$,相当于强制把下界提出来，强制从源点流过去。

如何判断无解？ 记录$tot=\sum sum[u](sum[u]>0)$,如果网络流结果不等于$tot$,则说明有些边未能达到下界要求，无解。

有源有汇最小流

先做出有源有汇可行流，然后删去所有与超级源超级汇相连的边，删去$edge(T, S)$,现在剩下的图上所有的边都已满足下界的条件，现在从$T->S$跑一遍退流即可

有源有汇最大流

先做出有源有汇可行流，然后删去所有与超级源超级汇相连的边，删去$edge(T, S)$,现在剩下的图上所有的边都已满足下界的条件，现在从$S->T$跑一遍加到答案中去即可。

上下界相关题目

1.luogu4311士兵占领

题目前面有。

题解：最直接的想法，给每行每列规定一个下界就行了。

2.POJ2396 Budget

题面描述：给你一个矩阵，告诉你每一行的和是多少，每一列的和是多少，在给一些限制条件限制每个格子里面的数的上下界。让你输出这个矩阵，如果没法输出就输出IMPOSSIBILE

题解

- 把每一行看做一个点， 把每一列看做一个点。
- 建立一个源点s，连接s与每一行，容量上限下限设为该行和。
- 建立一个汇点t，连接每一列与t，容量上限下限设为该列和。
- 对于每一行跟每一列，先连一条下限为0，上限为无穷大的边，然后根据给出的条件修改边上下界。
- 该模型有可行流就有解，解为每行和每列流量。

最小割树

定义:一棵n个点的树，其中每条树上有边权，对任意点对(x,y)，他们的最小割为他们之间路径上的最小值。

blog

[ZJOI2011]最小割

题面描述 小白在图论课上学到了一个新的概念——最小割，下课后小白在笔记本上写下了如下这段话："对于一个图，某个对图中结点的划分将图中所有结点分成两个部分，如果结点s,t不在同一个部分中，则称这个划分是关于s,t的割。

对于带权图来说，将所有顶点处在不同部分的边的权值相加所得到的值定义为这个割的容量，而s,t的最小割指的是在关于s,t的割中容量最小的割"

现给定一张无向图，小白有若干个形如"图中有多少对点它们的最小割的容量不超过x呢"的疑问，小蓝虽然很想回答这些问题，但小蓝最近忙着挖木块，于是作为仍然是小蓝的好友，你又有任务了。$(n <= 150, m <= 3000)$

题解 建出最小割树的过程中暴力算出所有点对之间的最小割

[CQOI2016]不同的最小割

题面描述 学过图论的同学都知道最小割的概念：对于一个图，某个对图中结点的划分将图中所有结点分成两个部分，如果结点s,t不在同一个部分中，则称这个划分是关于 s,t的割。对于带权图来说，将所有顶点处在不同部分的边的权值相加所得到的值定义为这个割的容量，而 s,ts,t 的最小割指的是在关于 s,ts,t 的割中容量最小的割。 而对冲刺 NOI 竞赛的选手而言，求带权图中两点的最小割已经不是什么难事了。我们可以把视野放宽，考虑有 N个点的无向连通图中所有点对的最小割的容量，共能得到$N(N-1)/2$个数值。这些数值中互不相同的有多少个呢？这似乎是个有趣的问题。

题解 建出最小割树，权值不同的边数即为答案。