卷积、反演、容斥

长沙市一中 AC (ABS&CGZ)

卷积

Convolution

一些定义

$F[n]$：函数F的x^n项系数

$(F*G)$：函数F和G的某一种卷积

F^{-1}：函数F的逆

e：单位元$(e*F=F*e)$

多项式卷积

$$(F*G)[n]=\sum_{i=0}^{n}F[i]G[n-i]$$

狄利克雷卷积

$$(F*G)[n]=\sum_{d|n}F[d]G[\frac{n}{d}]$$

卷积的性质(阿贝尔群的性质)

交换律：$F*G=G*F$

结合律:$(F*G)*H=F*(G*H)$

存在单位元：$e*F=F*e=F$

存在逆元：$F*F^{-1}=e$

狄利克雷卷积

$\mu:$莫比乌斯函数

$\varphi:$欧拉函数

$id: id[x] = x$

$e: e[x] = [x = 1]$

$u: u[x] = 1$

$\mu * u = e$

$\varphi * u = id$

$\mu * id = \varphi$

子集卷积

$$F[S] = \sum_{T \subseteq S} G[T] H[S - T]$$

子集卷积

- 这个过程本身就很繁琐，因此我们只研究如何实现这个卷积
- 子集卷积还可以表示成 $F[S]=\sum_{U\cup V=S,U\cap V=0}G[U]H[V]$
- 因此，我们可以用 FWT 限制 U∪V=S，用元素个数限制 U∩V=0
- 复杂度 $O(n^2 2^n)$

反演

Inversion

反演的定义

F,H 已知→

$$F = G * H$$

$$G = \text{blabla}$$

blabla 是什么？

莫比乌斯反演

定义$u[i]=1$

狄利克雷卷积→ $F=G*u$

莫比乌斯反演

$$F = G * u$$

$$\Rightarrow F * u^{-1} = G$$

u^{-1}是什么？

莫比乌斯反演

伟大的数学家们告诉我们: $u^{-1}[n]=\mu[n]=\begin{cases}(-1)^k(n=\prod_{i=1}^{k}p_i)\\0(\text{其它情况})\end{cases}$

$$(u^{-1}*u)[n]=\sum_{d|n}u^{-1}[d]$$

$$=u[1]+u[p_1]+u[p_2]+\cdots+u[p_1p_2]+\cdots+u[p_1p_2\cdots p_k]$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i$$

$$=(1-1)^k=[k=0]=[n=1]$$

$$=e(\text{单位元})$$

莫比乌斯反演

第一种形式

$$F[n]=\sum_{d|n}G[d]$$

$$G[n]=\sum_{d|n}\mu[\frac{n}{d}]F[d]$$

第二种形式

$$F[n]=\sum_{n|d,d\le N}G[d]$$

$$G[n]=\sum_{n|d,d\le N}\mu[\frac{d}{n}]F[d]$$

莫比乌斯反演 - 例题

- 给你两个数 n， m，求有多少个数对 (a,b) 的 gcd 为 x，其中 $(a \le n, b \le m)$。
- 给你一堆数 $a[i] \le 10^6$，求有多少个子集内的数的 gcd 为 x，对于所有的 x 输出。

矩阵反演（为了直观就叫这个名字算了）

$$G[n]=\sum_{i=0}^{n}A[n][i]F[i]$$

$$F[n]=\sum_{i=0}^{n}B[n][i]G[i]$$

矩阵反演

$$\begin{bmatrix} G[0] \\ G[1] \\ G[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A[0][0] & 0 & 0 \\ A[1][0] & A[1][1] & 0 \\ A[2][0] & A[2][1] & A[2][2] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F[0] \\ F[1] \\ F[2] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F[0] \\ F[1] \\ F[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B[0][0] & 0 & 0 \\ B[1][0] & B[1][1] & 0 \\ B[2][0] & B[2][1] & B[2][2] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} G[0] \\ G[1] \\ G[2] \end{bmatrix}$$

矩阵反演

$$G = AF$$

$$\Rightarrow \vec{F} = A^{-1}\vec{G}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = B$$

$$\Rightarrow AB = E(\text{单位方阵})$$

矩阵反演

$$\sum_{i=m}^{n} B[n][i]A[i][m] = \begin{cases} 0(n \neq m) \\ 1(n = m) \end{cases}$$

二项式反演

二项式反演是一种常见的矩阵反演

最经典的 A 和 B：

$$G[n]=\sum_{i=0}^{n}C_n^iF[i]$$

$$F[n]=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^iG[i]$$

不是很常见的 A 和 B：

$$G[n]=\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iF[i]$$

$$F[n]=\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iG[i]$$

二项式反演

- 第一种类型的二项式反演的证明：

$$
\begin{aligned}
(A\times B)[n][m] &= \sum_{i=m}^{n} B[n][i]A[i][m] \\
&= \sum_{i=m}^{n} (-1)^{i-m} C_n^i C_i^m \\
&= \sum_{i=m}^{n} (-1)^{i-m} C_n^m C_{n-m}^{n-i} \\
&= (-1)^{-m} C_n^m \sum_{i=m}^{n} (-1)^i C_{n-m}^{n-i} \\
&= (-1)^{n-m} C_n^m \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i C_{n-m}^{i} \\
&= (-1)^{n-m} C_n^m (1-1)^{n-m} \\
&= [n=m]
\end{aligned}
$$

二项式反演 - 例题

- n 个元素有 2^n 个子集，问有多少组子集 (1 个或以上) 的交集的大小为 k 。

斯特林反演

- 斯特林反演是另一种常见的矩阵反演。

$$F[n]=\sum_{i=1}^{n} s_n^i G[i]$$

$$G[n]=\sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} S_n^i F[i]$$

S_n^m: 将 n 个元素划分为 m 个圆排列的方案数

s_n^m: 将 n 个元素划分为 m 个集合的方案数

斯特林反演 - 例题

- 给定一个 n*m 的矩阵，求用 c 种颜色染色，有多少种方案，使得任意两行不相同，任意两列不相同。

最值反演

$$MIN(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|+1} MAX(T)$$

$$MAX(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|+1} MIN(T)$$

最值反演

- 证明 (已知最大值求最小值) :
- 将集合内的元素排序，相等的元素任意规定大小关系
- 设 x 为某一元素，其为第 k 大元素
- 则 S 存在 2^{k-1} 个子集以 x 为最小值
- 如果 k>1，则大小为奇数和偶数的子集数量相等 (组合数定理)，系数抵消
- 如果 k=1，则 x 恰好被计算一次，其系数为正

- 不难证明，该反演可以推广到“最大 (小) 值的期望”的计算

k 最值反演

$$kth\max(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-k}C_{|T|-1}^{k-1}\min(T)$$

$$kth\min(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-k}C_{|T|-1}^{k-1}\max(T)$$

k 最值反演

- 以求第 k 小为例：
- 对于第 i(i<k) 大值：没有任何一个子集 T 使得 $C_{|T|-1}^{k-1}$ 非 0 。
- 对于第 i(i≥k) 大值：它被计算的次数为 $\sum_{j=k-1}^{i-1} C_j^{k-1}(-1)^{j-k+1}$ 显而易见，只有 i=k 时这个式子非 0 ，且恰好为 1 。

子集反演

$$F[S]=\sum_{T\subseteq S}G[T]$$

$$G[S]=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S-T|}F[T]$$

两者都可以用 FWT 或高维前缀和 (差分) 优化至 $O(n2^n)$

子集反演

首先有一个结论：$\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|}=[S=0]$

所以：

$$
\begin{aligned}
F[S] &= \sum_{T\subseteq S}[|S|-|T|=0]F[T] \\
&= \sum_{T\subseteq S}\sum_{P\subseteq S-T}(-1)^{|P|}F[T] \\
&= \sum_{P\subseteq S}(-1)^{|P|}\sum_{T\subseteq S-P}F[T] \\
&= \sum_{P\subseteq S}(-1)^{|P|}G[S-P] \\
&= \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S-T|}G[T]
\end{aligned}
$$

子集反演

- 高维前缀和

```
void pre_sum(ll *a)
{
    for(int i=0; i<M; i++)
        for(int j=0; j<N; j++)
            if(j&(1<<i))
                a[j] += a[j^(1<<i)];
}
```

- FWT

```
void fwt_or(ll *a)
{
    for(int i=1; i<N; i<<=1)
        for(int j=0; j<N; j+=(i<<1))
            for(int k=0; k<i; k++)
                a[j+k+i] += a[j+k];
}
```

压惊水题

Eat a Whale Problems

错排问题

- 求有多少种 1 ～ n 的排列满足 P[x]≠x， 设方案数为 F[n]

- 考虑容斥，我们容易计算出至少 i 个位置满足 P[x]=x 的方案数
- 则就是

$$F[n]=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)!$$

错排问题

- 求有多少种 1 ～ n 的排列满足 P[x]≠x， 设方案数为 F[n]
- 还有一种思考方法，根据加法原理 $n!=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F[i]$
- 然后进行二项式反演 $F[n]=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}i!$

一道简单的数学题

- 有 1×n 个格子，有 m 种颜色，要求相邻的两个格子颜色不同，且每种颜色都有的涂色方案 F(n,m)？

一道简单的数学题

- 有 1×n 个格子，有 m 种颜色，要求相邻的两个格子颜色不同，且每种颜色都有的涂色方案 F(n,m)？
- 根据加法原理

$$m(m-1)^{n-1}=\sum_{i=2}^{m}\binom{m}{i}F(n,i)$$

- 二项式反演

$$F(n,m)=\sum_{i=2}^{m}(-1)^{m-k}\binom{n}{i}i(i-1)^{n-1}$$

kosare

- 有 N 个玩具箱和 M 种玩具，一个玩具箱中里有某些种类的玩具。
- 现在要选出一些玩具箱，使得每种玩具都有，求方案数，答案对 1e9+7 取模。
- $N \le 10^6$， $M \le 20$

kosare

- 设 F[S] 表示取到的玩具集合为 S 的子集的方案数
- 设 f[S] 为玩具集合为 S 的子集的盒子个数
- 那么 $F[S]=2^{f[S]}-1$
- 求 f[S] 可以用高维前缀和
- 然后我们需要求的是恰好为 S 集合的方案数，子集反演即可

- 复杂度 $O(M2^M+N)$

按位或

- 刚开始你有一个数字 0 ，每一秒钟你会随机选择一个 $[0,2^n-1]$ 的数字，与你手上的数字进行或操作。选择数字 i 的概率是 p[i] 。保证 $0<=p[i]<=1$ ， $\Sigma p[i]=1$ 问期望多少秒后，你手上的数字变成 2^n-1 。

- $n <= 20$

按位或 (BZOJ4036)

- 每一位变成 1 的时间的最大值的期望
- 最大值的期望≠期望的最大值
- 最大值的期望显然不是很好算
- 但是最大值的期望可以用最大最小反演转化为最小值的期望
- 每个子集的最小值的期望可以很方便计算，利用 FWT 求出即可

~k perm counting

- 如果一个排列 P 满足对于所有的 i 都有 $|P_i-i|\neq k$，则称排列 P 为合法的。现给出 n （排列长度）和 k，求有多少种合法的排列。
- 答案对 998244353 取模

~k perm counting (AGC005D)

- 把位置与值转化为二分图模型，则 Pi=x 相当于图中的一条边
- 把所有的不能放置的关系变成二分图上的一条边
- 则问题为二分图中不选其中任意一条边的方案数

~k perm counting (AGC005D)

- 把位置与值转化为二分图模型，则 Pi=x 相当于图中的一条边
- 把所有的不能放置的关系变成二分图上的一条边
- 则问题为二分图中不选其中任意一条边的方案数
- 正向计数很麻烦，可以考虑容斥，则可以统计至少满足 i 条边的方案数。也就是强制选 i 条边，其他的位置随意排列
- 注意到二分图中的边构成了很多条链，我们可以把每条链拉出来计数，就变成了一个序列问题
- 朴素 dp 可以做到 O(n^2)

~k perm counting (AGC005D)

- 对链进行生成函数
- 长度为 n 的链取 i 条边的方案数是C_{n-m+1}^{m}
- 可以用一一对应来证明
- 然后用多项式的相关操作即可做到理论上的 O(nlogn)

斐波那契最小公倍数

- 给定 n 个整数 a[i]，求 lcm(Fib[a[i]])。
- n <= 50000, a[i] <= 1000000

斐波那契最小公倍数 (51nod1355)

- 有这样一个结论： gcd(Fib[a[i]])=Fib[gcd(a[i])]
- 为啥？这个可以证明，但是没有必要。
- 求几个数的 lcm ，即求它们的每个质数的幂次的最大值，于是可以用最大最小反演转化成不断求子集的 gcd 从而利用到之前的结论。

$$lcm(Fib[S]) = \prod_{T \subseteq S, T \neq 0} \gcd(Fib[T])^{(-1)^{|T|+1}}$$

$$= \prod_{T \subseteq S, T \neq 0} Fib[\gcd(T)]^{(-1)^{|T|+1}}$$

- 接着，我们需要统计每个 d 作为几个子集的 gcd ，使用莫比乌斯反演 (第二类) 即可。

单位根反演

- 求 $\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} C_n^{ik}$
- 其中：
- $k=2,n\le10^{18}$
- $k=4,n\le10^{18}$(LOJ6485)
- $k\le100,n\le10^{18}$
- $k,n\le10^{14}$

单位根反演

- 引理： $\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\omega_k^{in}=[k\mid n]$
- 引理的证明：可以证明，但是没有必要(等比数列求和)。

单位根反演

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i [k \mid i]$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i \left(\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \omega_k^{ij}\right)$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{n} C_n^i \sum_{j=0}^{k-1} \omega_k^{ij}$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{i=0}^{n} C_n^i (\omega_k^j)^i \right)$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (1 + \omega_k^j)^n$$

计算复杂度 O(klogn)

循环之美 (NOI2016)

- 求 k 进制下有多少对 (i,j)(i≤n,j≤m) 满足 i/j 是纯循环小数。
- n,m≤10^9， k≤2000

- 不瞒您说，这道题就是要你求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[(i,j)=1][(j,k)=1]$$

循环之美 (NOI2016)

$$f(n,m,k)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[(i,j)=1][(j,k)=1]$$

$$=\sum_{j=1}^{m}[(j,k)=1]\sum_{i=1}^{n}[(i,j)=1]$$

$$=\sum_{d|k}\mu(d)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor}[(i,jd)=1]$$

$$=\sum_{d|k}\mu(d)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor}[(i,j)=1][(j,d)=1]$$

$$=\sum_{d|k}\mu(d)f(\frac{m}{d},n,d)$$

循环之美 (NOI2016)

- 数一数， f 的状态好像最多只有 $O(w(k)^2)$ 种， 其中 $w(k)$ 为 k 的因子个数
- 所以递归计算复杂度是不会有问题的。
- 递归出口是 f(n,m,1)

$$f(n,m,1)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[(i,j)=1]$$

$$=\sum_{d=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor\mu(d)$$

- 观察发现 f(n,m,1) 可以用杜教筛轻松解决。
- 不难证明， 总复杂度是杜教筛的复杂度， 与之前的递归计算没有太大关系

PPT 中出现的例题

- KOSARE： SPOJ KOSARE
- 按位或： BZOJ4036
- ~k perm counting： AGC005D
- 斐波那契最小公倍数： 51nod1355
- LJJ 学二项式定理： LOJ6485
- 循环之美： BZOJ4652

一些习题

- [SPOJ]GCDMAT
- [BZOJ]3933.
- [HDU]4624
- [LOJ]2542
- [BZOJ]4455
- [BZOJ]4361
- [BZOJ]4767
- [BZOJ]2560
- [BZOJ]4005
- [BZOJ]4596
- [BZOJ]3622
- [BZOJ]3294
- [BZOJ]2839
- [BZOJ]4710
- [CodeForces]809E
- [LOJ]3102

Thank Thee