根号数据结构

成都七中　nzhtl1477

Notice

- 如果没有专门说明
- 默认 `n = 1e5 , m = 1e5`

分块基础

分块的分类

- 静态分块
- 动态分块

- 静态分块指的是放一些关键点，预处理关键点到关键点的信息来加速查询的，不能支持修改
- 目前认为：如果可以离线，静态分块是莫队算法的子集

- 动态分块指的是把序列分为一些块，每块维护一些信息，可以支持修改

动态分块基础

下列提到的分块默认为动态分块

分块基础

- 要实现:
- 1. 区间加
- 2. 区间和

- 朴素来做，可以有 O(1) 修改 O(n) 查询以及 O(n) 修改 O(1) 查询的暴力做法

- 这个问题可以套用根号平衡达到 O(sqrt(n)) 修改 O(sqrt(n)) 查询

- 我们可以把 sqrt(n) 个元素放一块里面维护

分块基础

- 我们把每次操作完整覆盖的块定义为“整块”
- 把每次操作没有完整覆盖的块定义为“零散块”

分块基础

- 每次操作最多经过 O(sqrt(n)) 个整块，以及 2 个零散块
- 所以我们可以 O(1) 维护整块信息， O(sqrt(n)) 查询零散块信息
- 这样就达到了 O(msqrt(n)) 的复杂度

分块

- 一个度数　　，只有三层的树

分块

- 每次修改只用更新: 个 size 为 1 的节点以及 2 个 size 为 的节点
- 注意到我们不用维护那个 size 为 n 的根节点的信息

分块的作用

- 所以如果在分治结构上很难快速合并某些信息，我们就可以利用分块来做

经典问题

- 维护一个序列
- 1. 区间加
- 2. 查询区间小于 x 的数个数

Solution

- 如果是单点修改，我们可以用树套树实现
- 但是区间修改后树套树无法快速合并信息
- 比如我们维护了 cur 的一个名次数据结构
- cur 的左儿子没有发生变化
- cur 的右儿子被整体加了
- 这样我们无法通过这两个儿子的名次数据结构快速维护出 cur 的名次数据结构
- 也无法直接在 cur 的名次数据结构上操作
- 所以分治结构无法在低复杂度解决这个问题

Solution

- 分块，维护每块的 OV （就是排序后的数组）
- 每次区间加的时候
- 整块可以打一个标记
- 零散块可以重构

- 每次查询的时候
- 整块查询小于 x 的数，这个整块的标记为 y （也就是说这一块所有数都加了 y ）
- 则等价于查整块的排序后的数组里面小于 x-y 的数的个数
- 这个可以二分
- 零散块就直接暴力查询块内在查询区间内的数是否满足条件

Complexity

- 设有 x 个块
- 查询复杂度:
- 整块 O(log(n / x)) * x
- 零散块 O(n / x)
- 修改复杂度:
- 整块 O(1)
- 零散块 O(n / x) （重构的时候用归并）
- 按照根号平衡算一算可以发现
- 总复杂度 O(msqrt(nlogn))
- 此时块大小为 sqrt(nlogn)

Solution

- 大概有另外两个 O(msqrt(n)) 的做法
- 不过没有什么太大的实用价值，写起来很麻烦，常数较大，不一定比 O(msqrt(nlogn)) 做法快，也基本上没人会
- 所以这里就不讲了

[Ynoi2017] 由乃打扑克

- 维护一个序列
- 1. 区间加
- 2. 查询区间 k 小

Solution

- 如果直接套用上一题的做法
- 每次查询的时候二分答案，然后查询区间中小于 ans 的数个数
- 复杂度是 O(msqrt(nlogn)logn) 的
- 很遗憾，被我卡掉了

Solution

- 将块大小设为 sqrt(n)logn
- 每次修改显然复杂度为 sqrt(n)logn
- 二分答案，每次查询
- 则有 sqrt(n)/logn 个整块，这部分复杂度为 O(sqrt(n)) 单次
- 有 sqrt(n)logn 个零散的点，这部分复杂度为 O(sqrt(n)logn) 单次
- 想办法优化掉零散点的复杂度

Solution

- 可以预先先把零散的两个块归并成为一个假的块
- 这样我们每次二分答案之后只用在这个假的块上面二分即可

- 总复杂度 O(msqrt(n)logn)

Solution

- 存在 O(msqrt(nlogn)) 的算法，基于复杂的多序列二分，not practical

用根号平衡来优化数据结构复杂度

根号平衡

- 维护一个序列，支持：
- O(1) 单点修改，O(sqrt(n)) 区间和

根号平衡

- 分块维护块内和，每次修改的时候更新块内和以及该位置在数组上的值
- 查询的时候就和普通分块一样查

根号平衡

- 修改:

- 查询:

根号平衡

- 维护一个序列，支持：
- O(sqrt(n)) 单点修改， O(1) 区间和

根号平衡

- 分块维护块内前缀和和块外前缀和
- 也就是说维护每个块块内前 x 数的和
- 以及维护前 x 的块的和
- 更新的时候分别更新这两个前缀和
- 查询的时候把这两个前缀和拼起来

根号平衡

- 修改:

- 查询:

根号平衡

- 维护一个序列，支持：
- O(sqrt(n)) 区间加， O(1) 查单点

根号平衡

- 直接分块

根号平衡

- 修改:

- 查询:

根号平衡

- 维护一个序列，支持：
- O(1) 区间加，O(sqrt(n)) 查单点

根号平衡

- 每次对区间 [l,r] 加 x 的时候
- 差分为前缀 [1,l-1] 减 x，前缀 [1,r] 加 x
- 同时在数组上和块上打标记
- 使得区间 [l,r] 加 x
- 查询的时候就扫过块外的标记和块内的标记即可

根号平衡

- 修改:

- 查询:

根号平衡

- 维护一个集合，支持:
- O(1) 插入一个数
- O(sqrt(n)) 查询 k 小
- 值域 O(n)

根号平衡

- 离散化后对值域进行分块
- 还是维护第 `i` 个块里面有多少个数
- 查询的时候从第一个块开始往右跑
- 最多走过 `sqrt(n)` 个整块和 `sqrt(n)` 个零散的数

根号平衡

- 修改:

- 查询:

根号平衡

- 维护一个集合，支持:
- O(sqrt(n)) 插入一个数
- O(1) 查询 k 小

根号平衡

- 值域分块
- 对于每个数维护一下其在哪个块里面
- 对于每个块维护一个 OV （有序表）表示这个块内的所有数存在的数，从小到大
- 这样我们修改的时候只会改变 sqrt(n) 个数所从属的块
- 查询的时候定位到其所属于的块，然后找到其在该块中对应的值

根号平衡

- 修改:

- 查询:

CodeChef Chef and Churu

- 给长为 n 的序列，给定 m 个函数，每个函数为序列中第 li 到第 ri 个数的和
- 有 q 个两种类型的操作：

- 1 x y 把序列中的第 x 个数改为 y
- 2 x y 求第 x 个函数到第 y 个函数的和

Solution

- 因为函数不变，所以把函数分块
- 维护一个前 i 个块的函数的前缀和，代表前 i 个块中每个序列上的点的出现次数
- 然后再维护一个前 i 个块的函数的答案
- 每次修改只需要查询这个序列上的点在前 i 个块的函数中的出现次数即可
- 然后零散的部分，即用一个 O(sqrt(n)) 修改， O(1) 查询的分块维护即可

- O(nsqrtn + msqrtn) = O(msqrtn)

Solution

- 可能存在 polylog 做法，但我想了想不会，这里只是通过此题介绍一下分块

Luogu3863 序列

给定一个长度为 n 的序列，给出 q 个操作，形如：

$1\ l\ r\ x$ 表示将序列下标介于 $[l,r]$ 的元素加上 x （请注意，x 可能为负）

$2\ p\ y$ 表示查询 a_p 在过去的多少秒时间内不小于 y （不包括这一秒，细节请参照样例）

开始时为第 0 秒，第 i 个操作发生在第 i 秒。

输入输出样例

输入 #1 复制

```
3 3
1 3 5
2 1 2
1 1 2 -3
2 1 1
```

输出 #1 复制

```
0
2
```

说明/提示

样例一说明：位置 1 在第 0 秒到第 3 秒的值为 $1,1,-2,-2$。对于第一个查询，前 $1-1=0$ 秒中有 0 秒时间不小于 2；对于第二个查询，前 $3-1=2$ 秒中有 2 秒时间不小于 1，分别为第 0 秒，第 1 秒。

对于 30% 的数据，保证 $n,q\leq 1000$

对于 70% 的数据，保证 $n,q\leq 50000$

对于 100% 的数据，保证 $2\leq n,q\leq 100000$，$1\leq l\leq r\leq n$，$1\leq p\leq n$，$-10^9\leq x,y,a_i\leq 10^9$

Solution

- 考虑离线扫描线扫序列维，数据结构维护时间维
- 问题转换为区间加区间 rank 问题

简单莫队算法

普通莫队算法

- 理想莫队信息：维护一个子集的信息，支持 O(a) 插入一个元素，O(b) 删除一个元素，无法比直接暴力更高效地合并
- 问题：给出一个点集，多次询问点集的一个子集的信息
- 这里只考虑类似区间信息的维护

普通莫队的本质

- 假设有两个区间询问
- [l1,r1],[l2,r2]
- 如果我们可以 O(x) 插入或者删除一个元素
- 即我们已经得到了 [l,r] 的答案
- 可以 O(x) 转移得到
- [l,r+1],[l,r-1],[l-1,r],[l+1,r] 的答案
- 那么我们可以 O(x * (|r1-r2|+|l1-l2|))
- 由 [l1,r1] 的答案得到 [l2,r2] 的答案

普通莫队的本质

- 于是序列长 n，有 m 个询问
- 我们可以以一种特殊的顺序依次处理每个询问
- 使得 sigma(|li-li-1| + |ri-ri-1|) 在一个可以接受的范围内

- 可以对序列分块，然后把询问排序
- 排序的时候以左端点所在块编号为第一关键字
- 右端点位置为第二关键字

普通莫队的本质

- 可以证明这样的复杂度是 O(nsqrt(m) + m) 的

普通莫队的本质

- 不是 `msqrt( n )` 吗?
- 然而的确是 `nsqrt( m )` 的

普通莫队的本质

- 有没有更优的做法呢

- 我们可以用曼哈顿距离最小生成树去近似这个问题
- 把每个询问 [l,r] 看做二维平面上的点
- 于是我们按照建出来的曼哈顿距离最小生成树去 DFS
- 这个做法的复杂度和最优转移一定是同阶的

- 曼哈顿距离最小生成树和刚刚介绍的排序算法的最坏复杂度是一样的，所以莫队问题可以直接按块排序

普通莫队的优秀写法

普通莫队卡常数的基本方法

- 排序要按照奇偶分别排
- 这样可以块一倍
- 调那个常数可以块 10% 左右

```
block = n / sqrt( m * 2 / 3 );
```

经典问题

- 查询一个区间中每个数出现次数的平方和

Solution

- 裸上莫队，定义 `cnt[x]` 为 `x` 的出现次数
- 每次更新的时候，如果插入一个 `x`
- 则 `ans += 2 * cnt[x] + 1`
- 如果删除一个 `x`
- 则 `ans -= 2 * cnt[x] - 1`

Notice

- 此题存在 O(n^1.41) 的算法，依赖快速矩阵乘法而 not practical

[Ahoi2013] 作业

- 查询区间 [l,r] 中值在 [a,b] 内的不同数个数
- n <= 1e5 , m <= 1e6

Solution1

- 这是个特殊的三维偏序
- 由于这个题的特殊性质所以可以用莫队实现

Solution1

- 首先可以跑个莫队
- 维护一个树状数组

- 复杂度 O(nsqrt(m)logn)

Solution1

- 这类莫队有一个通用的优化方法

- 莫队总共修改 O(nsqrt(m)) 次
- 查询只有 O(m) 次

- 树状数组修改和查询复杂度 O(logn)
- 但是如果用值域分块的话
- 值域分块可以 O(1) 修改 O(sqrt(n)) 查询

Solution1

- 于是我们对这个进行根号平衡

- 修改 O(nsqrt(m)) 次，每次 O(1)
- 查询 O(m) 次，每次 O(sqrt(n))

- 总复杂度 O(nsqrt(m) + msqrt(n)) = O(msqrt(n))

Solution2

- 显然存在 polylog 解法，这里不做介绍

[Ynoi2016] 这是我自己的发明

- 给一个树，n 个点，有点权，初始根是 1
- m 个操作，每次操作：
- 1. 将树根换为 x
- 2. 给出两个点 x，y，从 x 的子树中选每一个点，y 的子树中选每一个点，如果两个点点权相等，ans++，求 ans

- n <= 1e5 , m <= 5e5

Hint

- 肯定是按照 DFS 序转换为区间查询
- 两个区间不好维护，但是这个信息具有可减性
- 可以考虑差分

Solution

- 按照 DFS 序转换为区间查询
- 然后考虑差分
- [l1,r1] - [l2,r2] 的询问
- 可以差分为:
- F(l1,r1,l2,r2)=F(1,r1,1,r2)-F(1,l1-1,1,r2)-F(1,r1,1,l2-1)+F(1,l1-1,1,l2-1)
- 这样都变成了前缀的区间
- 就可以在这个上面跑莫队了

Solution

- 这个题 m=5e5，然后这个差分会导致最多差分出 9 个询问
- 询问最后有 5e6 个左右，排序的 O(mlogm) 比较慢
- 可以考虑对莫队的询问进行基数排序
- 总复杂度 O(nsqrt(m) + m)

Bzoj3920 Yunna 的礼物

- 序列，查询区间中出现次数 k1 小的数中值第 k2 小的数

- 卡空间

Technology

- 我们可以考虑进行高维离散化
- 比如说，对于一个数 x ，其在序列中出现了 y 次
- 开个 vector < int > v[MAXN]
- 在 v[1] , v[2] ... v[y] 中都 push_back(x)
- 然后对于每个 vector ，分别进行离散化
- 这样就保证了空间线性

Technology

- 高维离散化这个技巧还可以用来在 1e5 的范围下跑二维树状数组
- 即对于每次树状数组修改的时候，把所有涉及到的节点保存下来，然后对这些节点进行离散化

Solution

- 于是我们离散化之后
- 就可以边跑莫队边维护一个值域分块来搞了
- O(nsqrt(m) + msqrt(n)) = O(msqrt(n))

Bzoj4241 历史研究

- 序列，定义 Chtholly(l,r,x) 为 x 在区间 [l,r] 中出现次数，查询一个区间中最大的 x*Chtholly(l,r,x)

Solution

- 可能出现的答案只有 n 种
- 和刚刚那个题类似，一个数 x 出现次数为 y ，则答案有可能为
- x*1,x*2...x*y
- 于是将这些可能的值放一起离散化
- 然后就可以套用值域分块来
- O(nsqrt(m) + msqrt(n)) 做了

[Ynoi2015] いずれその陽は落ちるとしても

- 给你一个序列 a，每次查询一个区间 [l,r]。
- 这个区间一共可以形成 2^(r-l+1) 个子序列，即每个数出现或者不出现，定义一个子序列对答案的贡献为其去重之后的和，即如果一个数 x 在这个子序列里出现了多次，那么只算一次。
- 查询区间 [l,r] 里面每个子序列的贡献的和。
- 然而由乃为了让这个题变麻烦，所以每次的膜数不一样。

Solution

- 考虑单次询问怎么算
- 对于数 x，假设出现了 y 次，区间长度是 len
- 则 x 对答案的贡献是
- 是除了 x 之外的数有这么多个不同的子序列，这些对 x 的贡献没有影响
- 是所有 x 构成的子序列中有 种至少包含一个 x，有 1 种不包含 x

Solution

- 如果每次模数一样的话，直接边跑莫队维护就可以了。。。
- 然而每次模数不一样

Solution

- 注意到贡献分为两部分　　与
- 其中第一部分非常好维护
- 第二部分的贡献，可以把出现次数相同的数一起维护贡献
- 注意到一个区间中只有 O(sqrt(n)) 种不同的出现次数

Solution1

- 因为 1+2+...+sqrt(n) = O(n)
- 这是一个自然根号
- 所以我们可以用一个均摊的莫队来维护区间可能的出现次数，从而维护区间中所有出现次数
- 然后为了 O(1) 实现快速幂，我们可以每次 O(sqrt(n)) 算出
- 2^1,2^2…2^sqrt(n) % p
- 以及 2^sqrt(n),2^2sqrt(n)…2^sqrt(n)*sqrt(n) % p
- 总复杂度 O(nsqrt(m) + msqrt(n)) = O(msqrt(n))

Solution2

- 我们可以直接在快速幂上跑类似 finger search 的东西
- 如果维护了 sorted 的次幂，我们已知 2^x，需要求 2^y，保证 x<=y，则可以 O(log(y-x)) 处理，而不用 O(logy) 的时间

- 这样可以证明复杂度是 O(sqrtn)，大家可以利用高数知识自己证一下

Luogu3245 HNOI2016 大数

- 给一个数字串以及一个质数 p
- 多次查询这个数字串的一个子串里有多少个子串是 p 的倍数

Solution

- 记 `suf[i]` 为 `i -> n` 构成的后缀串
- 如果对于 `l,r` 有 `suf[l] % p == suf[r+1] % p`
- 则 `s[l...r] * 10 ^ ( n - r - 1 )` 为 `p` 的倍数

Solution

- 对 p=2,5 时特判
- p!=2,5 时 s[l...r] * 10 ^ (n - r - 1) 为 p 的倍数
  即意味着 s[l...r] 为 p 的倍数

- 离散化一下，然后就变成小 Z 的袜子了

Luogu3604 美好的每一天

- 给一个小写字母的字符串
- 每次查询区间有多少子区间可以重排成为一个回文串
- n,m<=6e4

Solution

- 什么条件等价于重排成为一个回文串?
- 1. 所有数都出现偶数次
- 2. 只有一个数出现奇数次
- 有什么转换的形式方便维护一个数出现的奇偶性?

Solution

- 奇偶性可以想到异或
- 我们令’a’ -> 1,’b’ -> 2,’c’ -> 4…,’z’ -> 1<<25
- 如果维护一个前缀 xor 和 b， b[i]=b[i-1]^(1<<a[i]-1)
- 则一个区间 [i,j] 的 xor 和等于 [1,i-1]^[1,j]，也就是等于 b[i-1]^b[j]
- 发现出现次数都是偶数等价于 b[i-1]^b[j]=0
- 出现次数都是奇数等价于 b[i-1]^b[j]=2^k,k=0…25

Solution

- 于是问题就变成了
- 区间有多少二元组 (i,j) 满足 b[i-1]^b[j]==0,1,2,4,…2^25
- 每次 for 26 个元素即可
- 设字符集为 c
- O(nsqrtnc)

经典问题

- 查询区间逆序对个数

吐槽

- 区间逆序对所有人都以为是 msqrtnlogn 的
- 我无聊想了想能不能优化
- 然后发现可以

Brute

- 可以莫队，转移的时候就是查询区间小于 x 的数个数
- 维护区间值域上的树状数组
- 复杂度 O(nsqrt(m)logn)

- 然而区间逆序对为什么要带 log

Solution

- 为什么要维护区间树状数组?

Solution1

- 可以维护一个可持久化块状树
- 或者称为可持久化值域分块吧
- 可以理解为把分块的树可持久化一下

Solution1

- 根号平衡:
- 可持久化 Trie :
- O(logn) 插入 + 可持久化
- O(logn) 查询区间小于 x 的数个数

- 可持久化块状树:
- O(sqrtn) 插入 + 可持久化
- O(1) 查询区间小于 x 的数个数

Solution1

- 序列长 n，我们插入 n 次，单次 O(sqrtn)
- 莫队转移 O(nsqrt(m)) 次，单次 O(1)
- 总复杂度 O(nsqrt(m) + nsqrt(n)) = O(nsqrt(m))

Solution2

- 等等再讲

But

- 由于树状数组带一个不可卡的 1/2 常数
- 所以树状数组复杂度大概为 nsqrt(m)logn/2
- 而两个不带 log 做法的常数则偏大
- 大概为 nsqrt(m) * 5 左右
- 而且这个做法空间是 O(nsqrtm)，O(nsqrtn)的，导致常数变大

Question

- 难道这个 logn 不可卡吗

Answer

- 可卡
- 只需把空间优化到 O(n + m) 即可

Notice

- 此题存在 O(n^1.41) 的算法，依赖快速矩阵乘法而 not practical

莫队二次离线

- 即区间逆序对的 Solution2
- 这里说明一下其本质：

- 将莫队当做是 O(nsqrt(m)) 次查询区间中满足特定特征的性质的数的某个信息
- 如果这个信息具有可减性，可以差分
- 考虑差分后变成 O(nsqrt(m)) 次查询前缀中满足特定特征的性质的数的某个信息

莫队二次离线

- 传统莫队:
- 插入次数 O(nsqrt(m))
- 查询次数 O(nsqrt(m))

- 二次离线莫队:
- 插入次数 O(n)
- 查询次数 O(nsqrt(m)) (带 2 倍常数)

莫队二次离线

- 由于只插入 O(n) 次
- 所以我们可以考虑把根号平衡向插入的方向移动
- 插入代价可以较高，从而降低查询代价

具体实现：区间逆序对的 Solution2

- 考虑离线莫队产生的转移
- 设当前我们在询问 x，要转移到询问 y
- 即每次 [l,r] -> [l,r+1],[l,r-1],[l+1,r],[l-1,r] 的时候，设这次转移是求区间小于 z 的数个数
- 我们差分一下，在 l-1 处打上一个标记 (x,z)，在 r 处打上一个标记 (x,-z)
- 然后扫一遍，用值域分块维护就可以 O(1) 知道每次转移的贡献了
- 总复杂度 O(nsqrt(m))
- 空间复杂度 O(nsqrt(m))

Problem

- 由于要把莫队的过程整个离线下来
- 这个由于差分，所以自带 2 倍常数
- 又每次查询需要维护两个 `int ( n , m = 1e5 )`
- 所以空间常数巨大（随机数据下都要 500MB 空间左右）
- 又由于寻址不连续，所以只是离线这一步就要花费巨大的时间
- 所以这是一个空间和时间都消耗很大的算法

Possibility

- 可不可以优化这个的空间呢?

Optimization

- 如果可以把空间优化至 O(n + m)
- 则一切问题都解决了
- （时间消耗大的最大问题是空间太大导致内存访问代价过高引起的）

Optimization

- 深入挖掘这个莫队的性质
- 发现莫队只有 O(m) 次本质不同的询问：
- 区间 [l1,r1-1] 内与 a[r1] 有关的一个信息
- 区间 [l1,r1-2] 内与 a[r1-1] 有关的一个信息
- 区间 [l1,r1-3] 内与 a[r1-2] 有关的一个信息
- ......
- 区间 [l1+1,r1] 内与 a[l1] 有关的一个信息
- 区间 [l1+2,r1] 内与 a[l1+1] 有关的一个信息
- 区间 [l1+3,r1] 内与 a[l1+2] 有关的一个信息
- ......

Optimization

- 这个明显很有规律
- 可以针对莫队的 4 种转移推一下其贡献
- 发现有 6 种贡献:
- +/- 前缀 x 内序列区间为 [l,r] 的所有数的贡献
- +/- 前缀 [l,r] 内其右边 +1 位置的数的贡献
- +/- 前缀 [l,r] 内其自己的贡献

- 第一种可以直接在每个地方开个 vector，然后 push_back 一个 pair 表示区间来实现
- 后面两种可以通过打差分标记来实现

Optimization

- 这个存在简洁很多的写法，讲后面的题的时候回提到

树上莫队

- 查询链信息
- 查询子树信息

- 如果是查询子树的理想莫队信息，那么子树信息可以启发式合并上来，是 $\mathtt{polylog}$ 的

树上莫队

- 查询链的信息
- 有多种实现方法
- 第一种是将树的联通块分块，在树上跑莫队
- 另一种是将树的括号序分块，在括号序上跑莫队
- 我们也可以使用更好的树分块方法，不过链太弱了所以没有必要
- 无论代码难度，常数来说都是括号序更优
- 这里只介绍括号序

括号序

- 即 DFS 树的时候
- 进入 x 点就 push_back(+x)
- 走出 x 点就 push_back(-x)

- 莫队转移的时候
- 如果新加入的值是 +x，就加入 x
- 如果新加入的值是 -x，就删除 x
- 如果新删除的值是 +x，就删除 x
- 如果新删除的值是 -x，就加入 x

带修改莫队

- 普通的莫队是在转移二元组状态 (l,r)
- 如果带修改，可以加上一维表示时间
- 把状态变成三元组状态 (l,r,t)
- 这个新的状态可以在一个可以 O(1) 转移到
- (l,r,t-1) (l,r,t+1)
- (l-1,r,t) (l+1,r,t)
- (l,r-1,t) (l,r+1,t)

- 可以用和普通莫队类似的方法排序转移，做到 O(n^5/3)

不删除莫队

- 莫队转移需要可以在一个可以接受的复杂度达到：
- 由 (l,r) 转移到 (l-1,r),(l+1,r),(l,r-1),(l,r+1)
- 然而有的信息不支持快速删除（比如 max）
- 可以通过一些方法使得其只要支持按顺序撤销，而不用支持删除

经典问题

- 序列，多次查询一个区间 [l,r] 内
- 最小的 |ai-aj| , l <= i , j <= r
- 1<=n,ai<=2e5

Brute

- 显然可以莫队 + 数据结构维护
- O(nsqrt(m)logn)
- 需要数据结构支持查询前驱后继，还要开个堆维护一下，每次还要修改三次
- 由于值域小，可以做到 O(nsqrt(m)loglogn)
- 常数巨大

Possibility

- 可不可以用区间逆序对那个方法优化呢?
- 然而区间逆序对能优化复杂度的原因是因为信息具有可减性，可以通过差分来降低复杂度
- 区间前驱后继明显没有这种性质

Solution

- 考虑一个数据结构
- 支持:
- $O(1)$ 插入
- $O(1)$ 查询一个存在的数的前驱后继

- 是否存在这样的数据结构?
- 在值域有限并且强制在线情况下
- 最优是 vEB 树的 $\Theta(\log\log v)$，这个是确界

Solution

- 考虑一个数据结构
- 支持:
- O(1)删除
- O(1)查询一个存在的数的前驱后继

- 是否存在这样的数据结构?
- 可以用链表维护

Solution

- 也就是说
- 如果我们查询区间 [l,r]
- 然后我们有区间 [x,y] 的值域链表
- 满足 x <= l , r <= y
- 则可以 O(x - l + r + y + sqrt(n)) 搞出区间 [l,r] 的信息

Solution

- 即从两边开始，把 [x,l-1] 和 [r+1,y] 的所有数都删除掉
- 删除 x 的时候
- 将 x-pre(x) ， suf(x)-x 删除
- 将 suf(x)-pre(x) 插入
- 即可以维护出新的区间的答案了

Solution

- 整个的区间为 [x,y]
- 蓝色的区间为 [l,r]
- 即我们需要删除绿色的区间里面所有的数

Solution

- 考虑撒 t 个关键点
- 如果维护了关键点到关键点的信息
- 则我们 [x,y] 只要找到最近的关键点 l 满足 l<=x，最近的关键点 r 满足 y<=r 即可 O(n/t) 从区间 [l,r] 转移到区间 [x,y]
- 我们知道所有关键点的位置后
- 可以离线每个询问，就知道每个询问是由哪一对关键点得来的

Solution

- 可以考虑撒 n/sqrt(m) 个点
- 于是对于每个询问，转移的复杂度为 O(n/sqrt(m))
- 每个关键点需要 O(n) 处理其到每个关键点的链表以及值域分块
- 复杂度为 O(n^2/sqrt(m))
- 总复杂度 O(n^2/sqrt(m) + n/sqrt(m)*m) = O(nsqrt(m))

Notice

- 删除点之后还需要撤回这个删除
- 这个可以按时间维护一个栈来搞

- 优化的本质是:
- 无法 O(1) 插入
- 但是可以 O(1) 撤销

Notice

- 其实不删除莫队和静态分块一定程度上是等价的
- 区别:
- 1. 不删除莫队的常数较小
- 2. 不删除莫队利用了之前状态的信息，也就是说如果不支持快速可持久化，不删除莫队的复杂度会比静态分块更优

Notice

- 这个题有 nlognlogv 的线段树做法
- 可以去 cf 上翻翻

Bzoj4358 permu

- 查询一个区间中最长的值域连续段
- 值域连续段 [x,y] 即区间中存在 [x,y] 内所有数
- 值域连续不意味着序列上连续

Solution 引用自 ccz181078 博客

- 若维护当前区间 [l,r] 中每个值向左右延伸到的最远位置
- 实际只要维护值域的每个边缘点向另一侧延伸的最远位置
- 可以 O(1) 转移到 [l,r+1] 或 [l-1,r]
- 但是这个由于是个取 max 的过程，所以不支持删除

- 于是可以套用不删除莫队的做法即可

CodeChef QCHEF

- 序列，每个询问求区间 [L,R] 中值相同时，位置差的最大值
- 即最大的 |x-y| 使得 L<=x,y<=R 且 a[x]==a[y]

Solution

- 和上一个题差不多
- 对于每个值维护一下最左边和最右边的点
- 然后跑不删除莫队即可

Luogu5386 [Cnoi2019] 数字游戏

- 给定一个排列，多次询问，求一个区间 `[l,r]` 有多少个子区间的值都在区间 `[x,y]` 内。

Solution

- 这个题我们可以考虑用莫队跑值域区间
- 我们把值在目前莫队跑的区间内的序列位置标为 1，否则标为 0
- 发现答案就是在序列的一个区间中，每个极长 1 的段的 size 的平方，这样的东西

Solution

- 我们对序列分块后，每个块维护块内的答案，这样如果我们知道每次修改的极长 1 段的位置，我们就可以 O(1) 修改了
- 上面一题给出了一个不删除莫队维护极长 1 段的方法，直接套用就行了

- 总时间复杂度 O(nsqrtm + msqrtn)

静态分块基础

下列提到的分块默认为静态分块

分块的本质

- 通过预处理信息来达到更好的复杂度
- 功能为莫队算法的子集
- 也就是说除非强制在线，不然静态分块一定不如莫队

经典问题

- 给一个序列，每次查询一个区间的众数，强制在线

Solution1

- 之前几个题属于带修改的动态分块，这个题就属于只带查询的静态分块了
- 如何合并信息?
- 对于众数有一个性质：
- 如果 x 是集合 A 里面的众数，我们往集合 A 里面加入集合 B 里面的所有数
- 现在新集合的众数只会是 x 或者集合 B 里面的数

Solution1

- 序列上每隔根号个数放一个关键点

- 预处理每两个关键点之间的众数
- 这个可以以每个关键点为开头 for 一下序列实现

Solution1

- 查询的时候
- 我们已经预处理了黄色部分的众数了
- 只需要加入蓝色的点，蓝色的点只有　　一个一个验证即可

Solution1

- 验证的时候需要快速查询一个数在一个区间中出现次数
- 如果用可持久化 Trie 来维护，单次查询 O(logn)
- 总复杂度 O(msqrt(n)logn) 了

Solution1

- 注意到
- 我们只需要支持一个可持久化的数据结构
- 插入 n 次，查询 msqrtn 次
- 这个可以利用根号平衡
- 也就是说我们需要有一个可持久化的数据结构支持
- O(sqrt(n)) 插入，O(1) 查询

- 显然可以利用可持久化块状树（可持久化值域分块）实现

Solution1

- 还有另一个做法
- 即维护每个值在前 i 个块中的出现次数
- 这个数在第 x 到第 y 个块中出现次数
- 即为在前 y 个块中的出现次数减去前 x-1 个块中的出现次数
- 每次先把零散加进去
- 这样就可以 O(1) 查询一个数在区间中出现次数了

Solution1

- 通过用这个
- 可以做到复杂度
- O(nsqrt(m))

Technology

- 这样的区间众数空间是 O(nsqrt(n)) 的
- 可以进行一次根号分治做到 O(n^1.25)
- 还有个论文方法可以做到空间 O(n)，而且基本上没常数

Solution2

- 我们可以对每个值开个 vector，记下每个位置在 vector 中的位置
- 可以发现，假设我们现在在 x 位置，我们目前众数出现次数为 y，现在在从右往左边扫
- 那我们只需要 check 答案是否会增大 1 就可以了
- 那么就是 vector[belong(x) + y] 这个位置在不在区间 [l,r] 内部
- 这个我们可以 O(1) 找到，所以可以 O(1) 拓展
- 这样达成了线性空间

Technology

- 离线存在 O(n^1.48541) 的算法，基于对 max-plus 形式的稀疏矩阵乘法的优化， not practical

经典问题

- 强制在线，查询区间逆序对

Solution

- 主要思想还是通过差分和归并来优化复杂度
- 考虑把序列分成 `sqrtn` 块
- 预处理任意两个关键点之间的信息

Solution

- 查询答案的时候:
- 答案为 `l` 和 `r` 整块内的贡献
- 加上两个零散块对整块块内贡献
- 加上零散块之间贡献
- 红色为整块内贡献
- 绿色为两个零散块对整块贡献
- 黄色为零散块间贡献

Solution

- 设 f(l,r) 为第 l 到第 r 个块之间的逆序对个数
- 设 g(l,r) 为第 l 个块中任选一个数 x，第 r 个块中任选一个数 y，
- 如果 x>y 则 ans++
- 即第 l 个块与第 r 个块可以造成的贡献

- 差分，可得 f(l,r)=f(l+1,r)+f(l,r-1)-f(l+1,r-1)+g(l,r)
- g(l,r) 即对于 l 中每个数查询 r 中大于其的数个数
- 这个可以归并实现
- 这部分总复杂度 O(sqrt(n) * sqrt(n) * sqrt(n)) = O(nsqrt(n))

Solution

Solution

- 零散块对整块的贡献可以差分
- 即预处理出零散块对前 i 个整块的贡献
- 于是对 [l,r] 这些整块的贡献即 pre[r] - pre[l-1]
- 考虑到零散块最多只有 O(n) 种
- 整块有 O(sqrt(n)) 个
- 于是复杂度 O((n+m)sqrt(n))

Solution

- 零散块对零散块的贡献可以归并得到
- O(sqrt(n))
- 总复杂度 O(nsqrt(n) + msqrt(n))

- 常数较大

经典问题

- 强制在线，序列，多次查询一个区间 [l,r] 内
- 最小的 |ai-aj| , l <= i , j <= r

Solution

- 还是用刚刚的方法
- 可以`O( nsqrt( n ) )`预处理出块内的答案
- 考虑一个零散块会和哪些块有贡献

- 必然是从其前面那个块开始的一个后缀

Solution

- 于是可能的零散块 - 整块贡献只有 nsqrt(n) 种
- 对于每个零散块维护一个后缀 min 即可
- 零散块和零散块的贡献还是归并得到

- O((n+m)sqrt(n))

多区间合并

- 给定一个序列，多次查询区间幺半群信息
- 幺半群可以粗略认为是可以 O(1) 合并，不能差分的信息
- 预处理复杂度： O(n * f(n,k))，查询的时候合并 k 次， k+1 个区间
- k=0： f(n,0)=n
- k=1： f(n,1)=logn，所谓的“猫树”
- k=2： f(n,2)=loglogn，所谓的“ sqrt-tree”
- k=3,4： f(n,3)=f(n,4)=log*n
- …
- k=α(n)： f(n,α(n))=α(n)

根号分治

根号分治

- 一个不怎么好的抽象：
- 有 n 个数和为 m，则最多有 m/a 个数大于 a
- 剩下的数都不大于 a

- 如果对于每个大于 a 的数我们可以 O(x) 维护
- 那我们就以 O(xa) 的额外复杂度保证了这些数都 <=a

经典问题

- 给一张 n 个节点 m 条边的无向图
- n,m,q<=1e5
- 1. 把 x 点权加 y
- 2. 查询 x 相邻的点权和

Solution

- 图中每个点的度数和是 m
- 我们可以对这个度数进行根号分治
- 度数 >=sqrt(m) 的点最多只有 sqrt(m) 个
- 度数 <sqrt(m) 的点一圈的点点数不足 sqrt(m)

Solution

- 对每个度数 >=sqrt(m) 的点维护答案
- 每次修改
- 枚举所有度数 >=sqrt(m) 的点，如果和修改点相邻，则更新答案
- 每次查询
- 如果这个点度数 >=sqrt(m)，直接输出维护的答案
- 如果这个点度数 <sqrt(m)，直接暴力查
- 总复杂度 O(qsqrt(m))

经典问题

- 序列 a，每次给个 x 和 y
- 查询最小的 |i-j|
- 使得 ai==x,aj==y

Solution

- 对于颜色进行根号分治
- 出现次数大于 sqrt(n) 的颜色只有 sqrt(n) 种
- 预处理这些颜色到每个颜色的答案
- 这一步是 O(sqrt(n) * n) = O(nsqrt(n)) 的

Solution

- 这样如果查询的 x 和 y
- 其中有一个是出现次数大的颜色
- 我们可以 O(1) 得到答案
- 如果没有呢?

Solution

- 如果没有，那最多有各 sqrt(n) 个位置值为 x， y
- 可以进行归并排序来维护答案
- 这部分复杂度为 O(msqrt(n))

- 总复杂度 O(nsqrt(n) + msqrt(n))

IOI2009 Regions

- N 个节点的树，有 R 种属性，每个点属于一种属性。
- 有 Q 次询问，每次询问 r1,r2，回答有多少对 (e1,e2) 满足 e1 属性是 r1，e2 属性是 r2，e1 是 e2 的祖先。

Solution

- 把询问离线一下（为了线性空间）
- 还是对颜色进行根号分治
- 推推式子即可

SHOI2006 Homework

- 1 X : 在集合 S 中加入一个 X, 保证 X 在当前集合中不存在。
- 2 Y : 在当前的集合中询问所有 X mod Y 最小的值
- X,Y <= 1e5

Solution

- 考虑根号分治
- 对于 sqrtn 以内的 Y，每次修改即更新所有这个的答案
- 对于 sqrtn 以上的 Y，即需要支持:
- O(sqrtn) 修改，O(1) 查询前驱后继
- 我们对值域分块
- 每个块中位置维护出
- 1. 块内其前面最近的 X
- 2. 如果块内其前面没有 X，则维护出其最近的有 X 的块

Solution

- 修改的时候，我们修改 X 所在块内的 1
- 然后枚举每个后缀的块，将其 2 对这个块取 max
- 同时维护块内最后的一个 X
- 查询时，如果当前查询的 kY 在块内有 1 的答案，则使用
- 否则使用其 2 的答案的块的最后的一个 X

- 总时间复杂度 O(msqrtv)

Luogu3591 [POI2015]ODW

- 树，点权，多次查询，每次给 x ， y ， k
- 求从 x 开始，每次跳过 k 个节点跳到 y ，所经过节点的和
- 保证跳到 y

Brute

- 考虑对 k 根号分治
- 如果 k <= sqrt(n), 可以将询问离线，对每个 k=1...sqrt(n) 都跑一遍
- 如果 k > sqrt(n), 最多跳上 sqrt(n) 次

- k <= sqrt(n) 时单次可以做到 O(n)
- k > sqrt(n) 时用倍增 / 树链剖分求 k 祖先，单次 O(logn)
- 总复杂度 O(nsqrt(n) + msqrt(n)logn)
- 简单根号平衡后达到 O(msqrt(nlogn))

Improved Algorithm

- 可以用 O(1) k 祖先的方法来实现
- 预处理可以写 O(nsqrt(n)) 的，这样查询常数较小

- 或者可以用树链剖分，边跑边找出这个重链上所有该算进去的点
- O(sqrt(n) + logn)

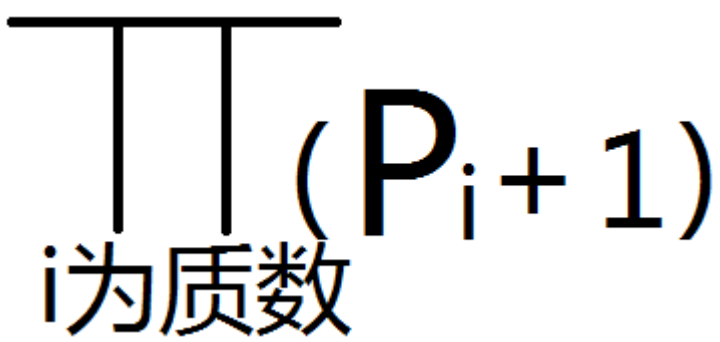
[Ynoi2015] いまこの時の輝きを

- 查询一个区间乘积的约数个数

- mod 19260817
- 值域 v<=1e9

Brute

- 一个数的约数个数
- 即为：



- Pi 为 i 出现次数
- 对于每个数，质因子的个数只有 logv 个

- （我不会打公式）

Brute

- 可以莫队暴力维护区间的这个东西
- 每次转移 O(logv)
- 总复杂度 O(nsqrt(m)logv)

•TLE

Improved Brute

- 考虑到一个数本质不同的约数个数并没有 logv 个
- 最坏的情况是 2*3*5*7... 这样
- 其实这个的个数是 O(logv/loglogv)
- 还是莫队转移
- O(nsqrt(m)logv/loglogv)

- TLE

Solution

- 可以用根号分治优化复杂度
- 一个数大于 v^1/3 的质因数只有 2 个
- 小于等于 v^1/3 的质数只有 v^{1/3}/logv 个
- 当 v=1e9 时，小于 1000 的质数只有 168 个

Solution

- 跑莫队的时候只维护大于 v^1/3 的质数的贡献
- 这一部分是 O(nsqrt(m)) 的
- 小于等于 v^1/3 的质数，每个开一个前缀和，就可以 O(1) 知道其在区间中出现次数
- 这一部分是 O(m v^{1/3} /logv) 的
- 然后对于每个数分解质因数是 O(n v^1/4) 的
- 总复杂度 O(n(v^{1/4}) + m(v^{1/3})/logv + nsqrt(m))

根号重构

根号重构

- 本质为时间分块

- 假设：
- 可以 O(x) 重构整个序列
- 可以 O(y) 算出一个修改操作对一次查询的影响
- 如果每隔 t 个修改重构整个序列
- 则复杂度为 O(tx)+O(m^2/ty)

经典问题

- 带 `link cut` 树上路径 `kth`
- （基于树分块也可以同复杂度维护，这里讲根号重构的做法）

Solution

- 根号重构，每过 sqrtm 次重构一次
- 这样一次操作会转换为查询 sqrtm 段上次重构后的树链的 kth
- 用可持久化 Trie 维护，在这 sqrtm 个 Trie 上一起二分
- 每次查询复杂度 O(sqrtmlogn)
- 每次重构复杂度 O(nlogn)
- 总复杂度 O(msqrtmlogn + nsqrtmlogn) = O((n+m)sqrtmlogn)

树上分块

Topology cluster partition

- 真实的树分块——Topology Cluster Partition
- 树分块将 n 个结点的树分成了一些块的并，满足下列性质:
- 1. 每个块是树
- 2. 每个块中有两个特殊的点，称为端点 1 和端点 2 。
- 3. 不同块的边集不相交
- 4. 一个块中的顶点，除端点外，其余顶点不在其它块中出现
- 5. 如果一个顶点在多个块中出现，那么它一定是某一个块的端点 2，同时是其余包含这个顶点的块的端点 1
- 6. 如果把所有块的端点作为点，每块的端点 1 和端点 2 连有向边，则得到一棵有根树

Topology cluster partition

- 怎么求出来呢?
- 可以发现这个 cluster 和 top tree 的 cluster 是一样的，所以我们把原树的 top tree 建出来，然后从中提取 O(sqrt(n)) 所对应的那一层即可，时间复杂度 O(nlogn)
- 有没有简单一点的做法?

Topology cluster partition

- 这里给出树分块的一个实现，满足块数和每块大小均为 O(sqrtn)：
- 在有根树中，每次选一个顶点 x，它的子树大小超过 sqrtn，但每个孩子的子树大小不超过 sqrtn， 把 x 的孩子分成尽可能少的块（以 x 为端点 1，但暂时允许有多个端点 2，且每块至多有 2sqrtn 个顶点），然后删掉 x 的子树中除 x 外的部分。
- 重复直到剩下的点数不超过 sqrtn，自成一块。
- 这样就求出一个保证块中顶点数和块数均为 O(sqrtn)的树分块（块间可以共用一些顶点，但每条边只属于一个块），如果一个块有多个端点（即被多个块共用的点），则在块内将这些端点建出虚树，将虚树上的每条边细分为一个新的块，以保证最终每个块只有两个端点。

树分块

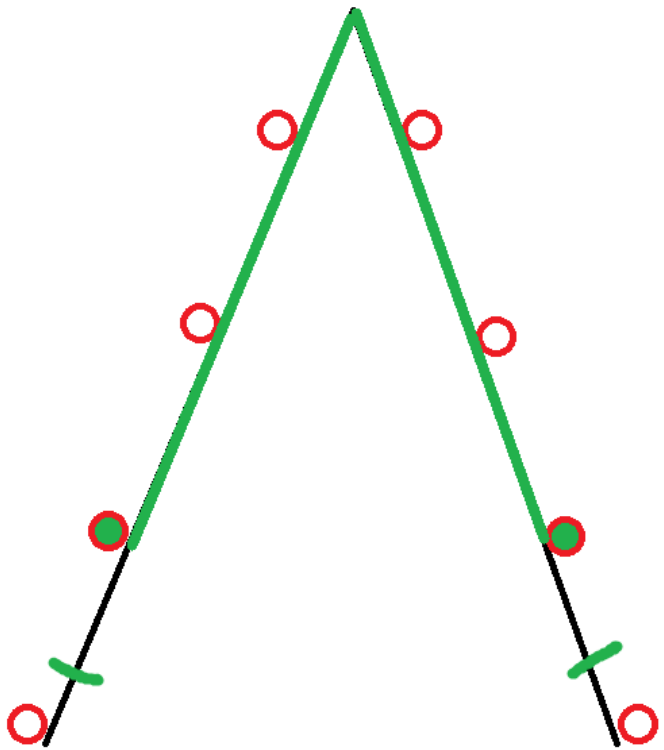
- 不过一般我们树分块可以更简单一些，因为一般只需要查链信息
- 随机撒 O(sqrtn) 个点，期望复杂度是正确的

COT

- 树，点权
- 强制在线，查询链颜色数

Solution

- 进行树分块，预处理任意两个关键点之间有多少种颜色
- 每次查询的时候一直往上跑，找到最近的关键点，得到整块的答案



Solution

- 对于零散部分的贡献，即需要查询这个颜色是否在一条链上出现过
- 可以考虑使用 O(sqrtn) 修改， O(1) 查询的可持久化树上前缀和，其实就是一个可持久化数组
- 于是可以计算零散部分贡献，每次查询的时候零散部分共 O(sqrtn) 个点

- 这样时间复杂度 O(msqrtn)，空间复杂度 O(nsqrtn)，（空间复杂度其实是 O(n^(1+eps))）

简单的例题

[Ynoi2009] ra1rmdq

给定一棵 n 个节点的树，树有边权，与一个长为 n 的序列 a。

定义节点 x 的父亲为 $fa(x)$，根 rt 满足 $fa(rt) = rt$。

定义节点 x 的深度 $dep(x)$ 为其到根简单路径上所有边权和。

有 m 次操作：

`1 l r`：对于 $l \leq i \leq r$，$a_i := fa(a_i)$。

`2 l r`：查询对于 $l \leq i \leq r$，最小的 $dep(a_i)$。

- 边权是非负的

Solution

- 考虑对序列分块
- 每个整块向上跳时，假设点 `a[i]` 到达了一个点 `x`，这个点之前被 `a[j]` 到达过
- 则 `a[j]` 为 `a[i]` 祖先
- 由于边权非负，所以 `a[j]` 支配了 `a[i]`
- 如果只涉及到整块操作，则 `a[i]` 无意义

Solution

- 于是可以发现，序列上每个块内，树上每个点只会被访问一次
- 这里均摊访问 O(nsqrtn) 个点
- 零散块重构的时候可以直接维护，这里不涉及到破坏均摊复杂度
- 为了减少空间复杂度和时间常数，可以使用逐块处理的 trick

- 总时间复杂度 O((n+m)sqrtn)

[Ynoi2010]D1T2

- 序列
- 1. 区间染色
- 2. 区间选出两个数相等的方案数

Solution

- 这题不弱于小 Z 的袜子，而小 Z 的袜子双向规约矩阵乘法，故难以 polylog 解决
- 考虑分块

大概的思想

- 使用一个数组 A[i][j] 来表示第 i 个块对第 j 个块的答案
- 这里表示的意思是从第 i 个块中选出一个数，第 j 个块中选出一个数，相等的方案数

Solution

- 先对原序列分块
- 考虑区间染色的颜色段均摊，对块进行分类
- 不妨设询问数和序列长度均为 B^2；（可以理解为 B=sqrtn）
- 将序列分为 B 块，每块大小为 B；
- 每个块有两个状态:
- 状态 1：块由一些段组成，每段内颜色相同
- 状态 2：整个块只有一种颜色

题解

- 在状态 1 表示的块中，维护一个序列表示依次出现的段的颜色、长度
- 在状态 2 表示的块中，维护块的颜色

Solution

- 记 A(x,y),x<y，表示块 x 到块 y 中，选取两个元素，都在状态 1 的块中，颜色相同的方案数；
- 记 B[x] 为块 x 内选取两个元素，颜色相同的方案数。
- 记 t[x,y] 表示块 x 中颜色 y 的元素个数，以 t[1..x,y] 的和的形式记录。

Solution

- 接下来考虑几个基本操作:

- (a). 在状态 1 表示下，块 x 中颜色 y 的元素个数增加了 z ;

- A[x,x']+=t[x',y]*z
- B[x]+=t[x,y]*z+z*(z-1)/2
- t[x,y]+=z
- 复杂度：由于枚举 x'，所以复杂度是 O(B)的

Solution

- (b). 将一个块 x 染色为 y，并变为状态 2 表示;

- 如果 x 在状态 1，使用不超过 B 次 (a) 将块内所有颜色清空;
- 将 x 设为状态 2，并记录颜色为 y，修改 B 数组。

- (c). 将一个块 x 从状态 2 表示变为状态 1 表示;

- 使用一次 (a) 即可。

Solution

- 用基本操作可以组合出题目需要的预处理，修改和查询:
- (1). 预处理
- 可以将每个块初始置为空，转为不超过 B^2 次区间染色。

Solution

- (2). 区间染色

- 区间染色需要在区间端点所在的块进行 (a)(c) 操作并维护段的情况，在完整块进行 (b) 操作；
- 由于每次区间染色只增加 O(1) 段，操作 (a) 的次数是均摊 O(1) 的。
- 操作 (b)(c) 除去调用 (a) 的情况，时间复杂度为 O(1) 。
- 每次 (a) 操作涉及到 A1[x,*],A2[*,x],t[x,y] 的修改，修改后重新计算前缀和，时间复杂度为 O(B) 。

Solution

- (3). 区间查询

- 对于类型 1 的完整块之间的贡献，需要查 A 的矩形和（转为 A 中 O(B) 次区间和，差分可得），以及 B 的区间和；
- 统计零散部分和类型 2 的块中，查出每种颜色的出现次数，并查询 t 数组的区间和，这里我们对 t 数组建一个前缀和可以答案都查询复杂度单次 O(1)，即维护块前缀和，可以得到其余的贡献。

- 综上，时空复杂度均为 O(B^3)。

[Ynoi2011]D1T1

- 序列
- 1 x y z : a[y] , a[y+x] , … a[y + kx] += z，这里 y + (k+1)x > n，且 y < x
- 2 l r : a[l] + a[l+1] + … + a[r] 的和

Solution

- 若 $x \geqslant n$，则我们暴力给每个位置加，需要加的次数为 $O(sqrtn)$ 次。由于需要查询区间和，用分块维护，总修改、查询复杂度为 $O(msqrtn)$。
- 若 $x < sqrtn$，我们需要用另外的方法维护。
- 注意到单次修改是针对整个序列的元素，所以对 x,y 相同的修改，我们可以累加它的贡献。

Solution

- 我们对每个 x，维护 y 的前缀、后缀和。对于一次询问，我们可以当成把序列分成了若干个大小为 x 的块。
- 中间的整块元素，每个块里肯定所有的 y 都有，增加的贡献就是关于 x 的修改总和。所有块的贡献相同，可以 O(1) 算。
- 边角的话，由于我们记录了前缀、后缀和，也可以 O(1) 算。两个端点在同一个块中，则直接前缀和相减即可。
- 总时间复杂度 O(msqrtn)

[Ynoi2011]D2T2

- 给你一个长为 n 的序列，有 m 次查询操作。
- 每次查询操作给定参数 l,r,b，需输出最大的 x，使得存在一个 a，满足 $0\le a<b$，使得 $a,a+b,a+2b,\dots,a+(x-1)b$ 都在区间 $[l,r]$ 内至少出现过一次。
- 如果不存在 $[0,a-1]$ 内的数，则输出 0。

Solution

- 考虑对 b 的大小进行根号分治
- 对较大的 b，我们考虑莫队维护出区间的 bitset A
- 然后把这个 bitset 每 b 个为一组
- 初始是一个大小为 b 的，全 1 的 bitset B
- 然后每次 and 上我们目前 A 最前 b 位，然后 A >>= b
- 这样当我们 B == 0 时，相当于找到答案了
- 时间复杂度 O(nsqrtm + nm/b + nm/w)

Solution

- 对于比较小的 b，可以对每个 b 跑一次莫队，这里分别维护 b 个 bitset，第 x 个 bitset 表示 mod b=x 的元素
- 每次对这 b 个 bitset 找第一个 0 即可
- 这部分的时间复杂度为 O(nsqrt(bm) + nm/w)

- 总时间复杂度 O(nm/w)

CodeForces 840E. In a Trap

- 一棵树，点有点权 ai，每次查询 u 到 v 路径上的 max(ai xor dis(i,v))，保证 u 是 v 的祖先。
- 值域是 [0,65536]

Solution

[Ynoi2012]D2T2

- 给你一棵边权为 1，且以 1 为根的有根树，每个点有初始为 0 的点权值，定义两个点的距离为其在树上构成的简单路径的长度，需要支持两种操作：

- 1 a x y z：把 a 子树中所有与 a 的距离模 x 等于 y 的节点权值加 z。

- 2 a：查询 a 节点的权值。

- 2019 Multi-University Training Contest 8 G

Solution

- 这个问题的形式目前我并不会 polylog，于是考虑根号分治
- 考虑对于每次修改，如果 x 大该如何维护
- 可以对原树按照深度分层，每层的节点按照在原树的 DFS 序上的位置排序，转换为在 n / x 层上区间加
- 需要 O(1) 进行区间加，和找出每层在哪个区间进行区间加
- 前者平凡，使用一个 O(1) 区间加 O(sqrtn) 查询单点的分块即可，后者需要一些技巧性的方法

Solution

- 可以根号重构，每次对原树进行长链剖分，维护合并上来的每个节点每个深度的 DFS 序最小位置和 DFS 序最大位置
- 我采用了一个更好的做法：
- 记每个节点的深度为 dep，DFS 序上所对应的区间左端点为 l，右端点为 r，自己在 DFS 序上的位置为 l
- 建立两个新的森林 F1，F2
- F1 中 x 向 y 连边当且仅当 dep[y] = dep[x] + 1，l[x] < l[y]，且 l[y] 最小
- F2 中 x 向 y 连边当且仅当 dep[y] = dep[x] + 1，l[x] > r[y]，且 r[y] 最小

Solution

- 可以证明一个节点 a 在 F1 上的 k 层祖先即为节点 a 在原树子树中深度比其大 k 的所有节点里面 DFS 序最小的节点，在 F2 上的 k 层祖先即为节点 a 在原树子树中深度比其大 k 的所有节点里面 DFS 序最大的节点
- 于是我们可以通过在这两个森林中找 k 祖先来找到我们需要加的区间，这里可以每次批量找 n / x 个区间的端点，O(logn + n / x) 在轻重链剖分结构上找出即可
- 于是可以 O(sqrtn + n / x) 解决

Solution

- 考虑对于每次修改，如果 x 小该如何维护
- 可以对每个 x，将原树按照深度 mod x 进行分层，每次查询的节点对于每个 x 只会出现在一层中，于是需要查询 x 次
- 对于每个 x，对于每个 0...x-1 的余数，将其按照 DFS 序排序，这里按照 DFS 序枚举就可以 O(n) 达成，子树修改即变成区间加
- 这样可以使用一个 O(sqrtn) 区间加 O(1) 查询单点的分块维护，这里区间的左右端点可以二分得到
- 于是可以一次 O(nx) 的预处理加上单次复杂度 O(sqrtn + x) 解决
- 在 x=sqrtn 处进行根号分治，即总时间复杂度 O((n + m)sqrtn)，空间复杂度 O(n + m)

Hdu 6615

- There is a tree with vertex 1 as a root. All vertices of the tree are colored.
  Your task is to determine the number of sub-trees with exactly k distinct colors.
  There are two types of queries.
  1 u c : paint vertex u with color c.
  2 k : answer the query.

- 2019 Multi-University Training Contest 4

Solution

- 每个点维护子树颜色个数
- 将 x 位置颜色从 y 改到 z
- 对每个颜色维护子树中其出现的次数
- 每次修改一个位置的颜色则相当于 O(1) 次链 +1-1 的操作
- 相当于链 +1-1，全局 x 出现次数

Solution

- 这个形式强于区间 +1-1 区间 0 个数，这个我们目前认为难以 polylog 解决，考虑分块
- 对原树进行树分块，维护簇路径的值域数组，表示簇路径上每个值出现次数
- 然后对簇路径的操作可以 O(1) 完成，又只有 O(sqrtn) 个零散的点

- 总时间复杂度 O(msqrtn)，空间复杂度可以做到 O(n + m)

[Ynoi2013]D1T2

Chimuzu 手上有一个数字序列 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ 和一个运算符序列 $\{p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\}$。其中 p_i 只能为 $+$ 或 $\times$。

我们定义一个区间 $[l, r]$ 的权值 $w(l, r)$ 为将字符串

$$a_l\ p_l\ a_{l+1}\ p_{l+1} \cdots a_{r-1}\ p_{r-1}\ a_r$$

写下来之后，按照运算符的优先级计算出的结果。

下面给出一个运算的例子：

若 $a = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$，$p = \{+, \times, \times, +, \times\}$，那么有：

$$w(1, 6) = 1 + 3 \times 5 \times 7 + 9 \times 11 = 205$$

$$w(3, 6) = 5 \times 7 + 9 \times 11 = 134$$

Chimuzu 需要你对这两个序列进行修改，同时查询某个给定区间的权值。

你需要维护这 3 个操作：

操作一：给定 l, r, x，将$a_l, a_{l+1}, \ldots, a_r$ 全部修改成 x。

操作二：给定 l, r, y：将 $p_l, p_{l+1}, \ldots, p_r$ 全部修改成 y，0 表示 $+$，1 表示 $\times$。

操作三：给定 l, r：查询 $w(l, r) \bmod 1000000007$ 的值。

Solution

- 对原序列建一棵线段树，考虑怎么在线段树上面修改和查询
- 定义 极长“X” 段为一个极长的子区间，使得区间中符号均为乘法

区间值修改

- 回忆起前面一个莫队题的性质，这道题中同样存在：
- 维护出区间中每个极长的“X”段的长度，可以发现这个存在一个自然根号：
- 假设区间长度为 size，则最多只有 O(sqrt(size)) 种极长“X”段的长度
- 每次对区间进行值修改的时候，即对这个长度为 O(sqrt(size)) 的多项式进行插值，暴力计算即可，插值复杂度为 O(sqrt(size))，即可以 O(sqrt(size)) 的时间将一个节点值进行修改，同时维护信息

区间符号修改

- 每次对区间符号进行修改的时候，区间的信息只会变成区间和或者区间乘积，所以我们每个节点要维护区间和和区间乘积
- 符号修改之后，这个节点的极长“X”段只会有0(1)种了
- 符号进行修改可能影响一些节点的极长“X”段，考虑如何维护这个

区间符号修改

- 对一个节点，我们可以归并两个儿子的极长“X”段，来维护出这个节点的极长“X”段
- 对一个大小为 size 的节点进行归并，代价是 O(sqrt(size)) 的
- 注意需要特判左儿子的最右极长“X”段是否和右儿子的最左极长“X”段进行合并

区间信息合并

- 合并区间信息的时候，只需要把左右儿子信息加起来，同时特判 0(1) 个位置即可
- 这 0(1) 个位置就是左儿子的最右部分和右儿子的最左部分
- 可以处理：
- 标记对标记的影响
- 标记对信息的影响
- 信息和信息的合并
- 所以我们正确性有保证了

Complexity

- 我们所有地方的复杂度都是 O(sqrt(size)) 的
- 线段树在每层只会递归到 2=O(1) 个节点中，所以每层只有 O(1) 个节点的信息需要更新

Complexity

- T(n) = T(n / 2) + O(sqrtn)
- sqrt(n) + sqrt(n /2) + sqrt(n / 4) + … + sqrt(1) = O(sqrtn)
- 空间:
- T(n) = 2T(n / 2) + O(sqrtn)
- sqrt(n) + 2sqrt(n / 2) + 4sqrt(n / 4) + … + nsqrt(1) = O(n)
- 总时间复杂度O(msqrtn)，空间复杂度O(n)

- 由于我不会多项式技术，所以不确定是否存在更优做法，但目前感觉不容易优一个poly(n)

CF700D Huffman Coding on Segment 3100

- 给一个长为 n 的串，有 q 次询问，每次询问一个区间的最小二进制编码长度，即在可以唯一还原的前提下，将这一段子串转化为长度最小的二进制编码。

Solution

- 哈夫曼编码就是把每个出现过的元素提出来，按照出现次数加权，做合并果子
- 哈夫曼树在排序后可以做到线性
- 维护两个队列，第一个是初始的所有排好序的元素，第二个保存合成的所有元素，初始为空
- 每次从每个队列中选前 2 大的元素，找最小的两个合成，合成后放入第二个队列末端

Solution

- 有一个性质是不同的出现次数是 O(sqrtn) 的，考虑 1+2+…+n=n(n+1)/2
- 考虑使用莫队维护出区间每个数的出现次数，从小到大排序
- 这个有多种维护方法，我之前写过的方法是记录下莫队转移时所有变化，然后到一个查询区间时一起处理掉，用莫队上一个处理的询问维护的区间不同的出现次数，以及记录的转移，得到这个区间的所有出现次数
- 时间复杂度 O(nsqrtm+msqrtn)

Solution

- 这里考虑可以批处理同一个出现次数出现很多次的情况
- 如果当前最小是相同的 x 个 a，则可以合并出 x/2 个 2a
- 我们边维护两个队列边缩点
- 复杂度分析：
- 每 O(1) 次合并，下一次可能合并出的元素大小至少变大 1
- 经过 O(sqrtn) 次合并，只可能合并出 >sqrtn 的元素了
- 而这两个队列如果均 >sqrtn，则有 O(sqrtn) 个元素
- 每次合并减少一个元素，此时合并 O(sqrtn) 次
- 时间复杂度 O(nsqrtm+msqrtn)

[Ynoi2013]D2T2

- 给一个长为 n 的序列，有 m 次查询操作。
- 查询操作形如 l r L R，表示将序列中值在 [L,R] 内的位置保留不变，其他的位置变成 0 时，序列中 [l,r] 区间内的最大子段和，这个子段可以是空的。

Solution

- 先研究全局查询的情况，考虑离散化后所有值域区间对应的不同的序列只有 O(n^2) 种，我们可以分治来维护两边的最大前缀和，最大后缀和，最大子段和。
- 合并的时候，左儿子有个答案矩阵，右儿子也有个同规模的答案矩阵，我们把这两个稀疏化一下（大概就是说你每次把块内存在的值归并上来，这个矩阵会变大常数倍），然后就可以合并了，每次合并的是 O(n^2) 的
- 所以这里我们有 T(n) = 2T(n / 2) + O(n ^ 2)，解得 T(n) = O(n ^ 2)

Solution

- 我们先在外层对序列分块，这样有 O(sqrtn) 个 O(sqrtn) 大小的块，每个块的分治预处理代价是 T(sqrtn) = O(n) 的，所以预处理的总复杂度是 O(sqrtn) * O(n) = O(nsqrtn) 的
- 我们对序列每个块逐个处理，然后每次合并出答案即可
  时间复杂度 O((n + m)sqrtn)，空间复杂度 O(n + m)

[Ynoi2014] 空の上の森の中の

- 线段树是一种特殊的二叉树，满足以下性质:
  每个点和一个区间对应，且有一个整数权值;
  根节点对应的区间是 [1,n];
  如果一个点对应的区间是 [l,r]，且 l<r，那么它的左孩子和右孩子分别对应区间 [l,m] 和 [m+1,r]，其中 m=[(l+r)/2];
  如果一个点对应的区间是 [l,r]，且 l=r，那么这个点是叶子； 如果一个点不是叶子，那么它的权值等于左孩子和右孩子的权值之和。
  珂朵莉需要维护一棵线段树，叶子的权值初始为 0，接下来会进行 m 次操作：
  操作 1：给出 l,r,a，对每个 x 将 [x,x] 对应的叶子的权值加上 a，非叶节点的权值相应变化;
  操作 2：给出 l,r,a，询问有多少个线段树上的点，满足这个点对应的区间被 [l,r] 包含，且权值小于等于 a。

Solution

- 可以证明这个线段树只有 O(logn) 种不同大小的节点
- 对于每种节点大小分层，维护一个数据结构，支持：
- 1. 区间加
- 2. 单点修改
- 3. 区间 rank
- 这个是一个经典问题，目前上界是 O(msqrtn) ，我们通过一些规约证明了这个问题不弱于一个 sqrtn*sqrtn 的矩阵乘法，所以目前认为难以达到 O(n*polylogn) 的复杂度

Solution

- 可以证明线段树的每层只有 O(1) 种不同大小的节点，那么我们的总时间复杂度是
- O(msqrtn + msqrt(n/2) + msqrt(n/4) + …) = O(msqrtn)
- 空间复杂度可以通过一些 trick 做到 O(n + m)

[Ynoi2016]D1T1 掉进兔子洞

- 有 m 个询问，每次询问三个区间 [l1,r1] [l2,r2] [l3,r3]
- 记 f(x , l , r) 表示区间 [l,r] 中 x 的出现次数
- 查询：sum(i = 1 to n) min(f(i , l1 , r1) , f(i , l2 , r2) , f(i , l3 , r3))

Brute

- 先考虑如果每个数不相同怎么做
- 莫队跑出每个区间的值域 `bitset`，然后 `&` 起来，这些就是被删掉的数了

Solution

- 想办法转换一下
- 先离散化，假设数 x 离散化后的位置是 y ，然后 x 出现 z 次
- 那么 y,y+1…y+z-1 这些位置都是 x 的
- 莫队维护区间 bitset 的时候
- 假设区间中 y 出现了 w 次
- 则我们把 y,y+1…y+w-1 这些位置填上 1
- y+w…y+z-1 这些位置填上 0

Solution

- 用这样处理过的 bitset，& 起来
- & 后得到的 bitset 里面的 1 的个数就是删掉的所有数了

- 总复杂度 O(nsqrt(m) + nm/w) = O(nm/w)

Note

- 这里为了方便，每次只给了三个区间，所以理论上来说可以跑一个 6 维的莫队，但我可以每次给任意 k 个区间，这样的算法复杂度就会变成 O(n^(2-eps))

[Ynoi2017]D1T1 由乃的玉米田

- 序列，每次给参数 l r c
- 查区间 [l,r] 是否可以选出两个数 a,b 使得：
- a+b=c
- a-b=c
- a*b=c
- a/b=c
- 值域 1e5
- 除法是整除，也就是说 3/2 这种情况下认为二者不能除

Solution

- 对于 * 操作
- a*b=c 可以枚举 c 的约数
- 即对于 i|c，查询区间中是否同时存在 i 和 c/i
- 这个是一个自然根号，是一个小于 sqrt(c) 的东西

Solution

- 对于 / 操作
- 先离线询问
- 然后可以扫描线右端点，维护左端点的答案

Solution

- 假设新的右端点是 r，上面的值是 x
- 则对于每个 x 的的约数 y， y 最近一次出现的位置 l 到现在的右端点位置 r
- 包含 [l,r] 这个区间所有区间都可以选出 (x,y) 这一对数使得其比利为 x/y

- 于是我们根据这个扫描线即可，要扫两遍
- 复杂度是 c 的约数个数

Solution

- 对于 - 操作
- 维护区间的值域上的 bitset
- 每次如果 bitset & (bitset << c) 后不是 0
- 则找到两个数 a,b 使得 a-b=c
- 本质为用 bitset 优化了 bool 数组的匹配

- 然后就可以莫队维护区间的值域 bitset 了
- 加操作维护一个反的 bitset 即可

Solution

- +的复杂度：O(nsqrt(m) + vm/w)
- -的复杂度：O(nsqrt(m) + vm/w)
- *的复杂度：O($n\tau(v)$)
- /的复杂度：O($n\tau(v)$)

- 存在理论复杂度更优的做法，但是常数较大而not practical

矩阵乘法相关规约

Why

- 为什么这些题我们要用分块来处理？不能分治吗

Reason

- 很多分块题是不弱于 sqrtn*sqrtn 大小的矩阵乘法的
- 由于目前矩阵乘法上界只做到了 O(n^2.373)，所以目前技术做这些分块题无法低于 O(n^(1+x))， x is const， x > 0

目前有规约的问题

- 小 Z 的袜子（区间每个数出现次数平方和）：双向规约 01 矩阵乘法，已经低于了 O(n^1.5)
- 区间逆序对：双向规约 01 矩阵乘法，已经低于了 O(n^1.5)
- 区间众数：单向规约布尔矩阵乘法，已经低于了 O(n^1.5)
- 链颜色数：单向规约 01 矩阵乘法

目前有规约的问题

- 区间出现次数奇数次的数个数：单向规约 01 矩阵乘法
- 区间最大的 li-jl 满足 ai==aj：单向规约 max-plus 矩阵乘法（好像是）
- 区间加，区间小于 x 的数个数：单向规约 01 矩阵乘法
- 区间加，区间 kth ：单向规约 01 矩阵乘法

例子

- 假设给你一个黑箱，可以解决链颜色数问题，如何用这个黑箱来解决 01 矩阵乘法?
- 指 `Ans[i][j] = sum_k A[i][k] * B[k][j]`，值是 `[0, 1]` 中的整数

规约

- 我们可以构造一棵:
- 根有 sqrtn 叉，下面接了 sqrtn 条链的树，总共 sqrtn 种权值
- 每次选出前 sqrtn/2 条链，和后 sqrtn/2 条链，总共有 O(n) 种不同的询问，询问这些链的并的颜色数
- 记:
- A[i][j] 表示第 i 条链是否有第 j 种颜色，这里 i<sqrtn/2
- B[k][j] 表示第 k 条链是否有第 j 种颜色，这里 k>=sqrtn/2

规约

- 可以发现我们的询问即
- Ans[i][j] = sum_k A[i][k] * B[j][k]
- 令 C = B^T
- 则
- Ans[i][j] = sum_k A[i][k] * C[k][j]

规约

- 由于值域是 01，所以 & 和 * 等价，把每个数取反之后 | 就变成 & 了
- 所以
- Ans[i][j] = sum_k A[i][k] * C[k][j]

- 我们通过这个黑箱实现了 sqrtn*sqrtn 01 矩阵的矩阵乘法
- 注意到这里规约是单向的，也就是说我们无法依靠快速矩阵乘法来得到低于 O(n^1.5) 的链颜色数算法

大分块

目前最复杂的根号数据结构题

[Ynoi2018] 未来日记

- 最初分块
- 2017 Multi-University Training Contest 4 M

- 给你一个序列
- 1. 区间所有 x 变成 y
- 2. 区间 kth

[Ynoi2018] 未来日记

- 对这题的评价： 8-9/11

Solution

- 先考虑如何求区间第 k 小值。对序列和权值都进行分块，设 bi,j 表示前 j 块中权值在 i 块内的数字个数， ci,j 表示前 j 块中数字 i 的出现次数。那么对于一个询问 [l,r] ，首先将零碎部分的贡献加入到临时值域分块数组 tb 和 tc 中，然后枚举答案位于哪一块，确定位于哪一块之后再暴力枚举答案即可在 O(sqrt n) 的时间内求出区间第 k 小值。
- 这个做法类似于在可持久化 Trie 上一起二分来查询区间 kth ，不过是在分块结构上一起跑来进行查询。

Solution

- 接着考虑如何实现区间 [l,r] 内 x 变成 y 的功能。显然对于零碎的两块，可以直接暴力重构整块。对于中间的每个整块，如果某一块不含 x ，那么无视这一块；否则如果这一块不含 y ，那么只需要将 x 映射成 y ；否则这一块既有 x 又有 y ，这意味着 x 与 y 之间发生了合并，不妨直接暴力重构整块。因为有 c 数组，我们可以在 O(1) 的时间内知道某一块是否有某个数。

Solution

- 考虑什么情况下会发生重构，也就是一个块内发生了一次合并的时候。一开始长度为 n 的序列会提供 O(n) 次合并的机会，而每次修改会对零碎的两块各提供一次机会，故总合并次数不超过 O(n+m)，而每次合并的复杂度是 O(sqrtn) 的，因此当发生合并时直接重构并不会影响复杂度。

Solution

- 那么现在每块中的转换情况只可能是一条条互不相交的链，只需要记录每个初值转换后是什么，以及每个现值对应哪个初值即可。遇到查询的时候，我们需要知道零碎部分每个位置的值，不妨直接重构那两块，然后遍历一遍原数组 `a` 即可得到每个位置的值。

- 在修改的时候，还需要同步维护 `b` 和 `c` 数组，因为只涉及两个权值，因此暴力修改 `j` 这一维也是可以承受的。

- 总时间复杂度 `O( (n+m)sqrtn )`，空间复杂度 `O( nsqrtn )`

Solution

- 这题主要的思路就是通过对序列和权值一起进行分块，然后让序列分块的 O(sqrtn) 部分乘上值域分块的 O(1) 部分，序列分块的 O(1) 部分乘上值域分块的 O(sqrtn) 部分，从而达到了复杂度的平衡。

[Ynoi2018] 五彩斑斓的世界

- 第二分块
- Codeforces 897 E

- `1 l r x` ： 把区间 [l,r] 所有大于 x 的数减去 x
- `2 l r p` ： 查询区间 [l,r] 内的 x 的出现次数
- 值域 1e5

[Ynoi2018] 五彩斑斓的世界

- 对这题的评价： 6/11

Solution

- 这个值域 1e5 很明显复杂度和值域有关

Solution

- 考虑分块，可以发现每块的最大值总是不增的
- 总的所有块的最大值和当块大小为 O(sqrt(n)) 时为 O(nsqrt(n))
- （假设值域和 n 同阶）
- 考虑怎么利用这个性质

Solution

- 可以发现：假设区间所有大于 x 的减 x，最大值为 v
- 这个操作等价于把区间中所有数减 x，之后小于 0 的再加 x
- 当 v >= x * 2 时，可以把所有 [1,x] 内的数合并到 [x+1,x*2] 上
- 当 v < x * 2 时，可以把所有 [x+1,v] 内的数合并到 [1,v-x] 上

Complexity

- 如果 v >= x * 2
- 我们用 O(x) * O(数据结构复杂度) 的代价使得块内的最大值减少了 O(x)
- 如果 v < x * 2
- 我们用 O(v - x) * O(数据结构复杂度) 的代价使得块内的最大值减少了 O(v - x)

Solution

- 所以要用一个数据结构支持:
- O(1) 把块内值为 x 的全部变成 x+v 或者 x-v
- O(sqrt(n)) 求出块内经过大量操作后，每个数的值

- 第一种是整块操作的时候要用
- 第二种是重构零散块的时候要用

Solution1

- 维护这个有很多种方法
- 可以每块维护一个值域上的链表
- 定义 `f[i][j]` 为第 `i` 块里面所有值为 `j` 的数的下标的链表
- 区间所有 `x` 变成 `x+v` 即 `link( x , x + v )`
- 然后维护一下块内可能出现的所有数
- 每次重构的时候即遍历所有可能出现的数，然后遍历其中真正出现的数的链表即可

Solution1

- 不过链表常数巨大。。。
- 这个应该跑的很慢

Solution2

- 可以每块每个值维护一个 vector
- 然后启发式合并这个 vector
- 这个做法由于对缓存友好，所以会跑的快一些

Solution3

- 可以用一个并查集维护
- 这个并查集由于只支持:
- 1. merge(x , y)
- 2. for(i = 1 ; i <= sqrtn ; i++) find(i)
- 所以复杂度是O(1)的并查集
- 本质上和链表的做法是差不多的，不过常数好很多

- 时间复杂度O((n+m)sqrtn)，空间复杂度O(nsqrtn)

[Ynoi2019]Another

- [前]第三分块

- 树，每个点有编号
- 1.改一条边的边权
- 2.查询一个点到一个编号区间[l,r]的点的距离和

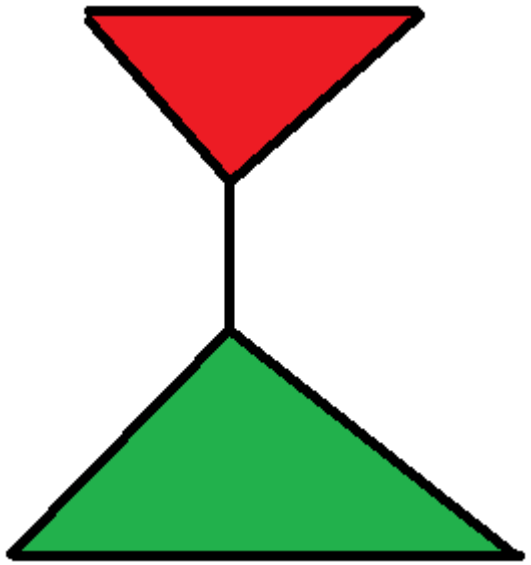
[Ynoi2019]Another

- 对这题的评价： 5/11

Solution

- 对点的编号序列分块
- 考虑维护 `f(j,i)` 表示 `dfs` 序为 `i` 的点到前 `j` 个块的距离和
- 修改一条边的边权的时候，看造成什么样的影响：

Solution



的点和绿色的点之间互相影响

- 仅考虑 i 块，可以 O(1) 知道第 i 块里面有多少在红色的部分里面，设这个为 x
- 于是对 dfs 序在绿色部分的所有 i，把 f(j,i) 加上 x* 修改的 v，相当于我们要对 f 再做一个 O(1) 修改 O(sqrtn) 查询的分块结构

Solution

- 查询的时候，我们要查点 i 到 [l,r] 的贡献，就找离 l 和 r 分别最近的两个块端点，然后 O(sqrtn) 查出 i 到这两个前缀块的答案，然后把这两个差分一下
- 于是我们解决了整块的答案，考虑怎么查询零散

Solution

- 零散部分每次有 O(sqrtn) 个两点间距离和
- 然后现在考虑怎么快速查两个点之间的距离和
- dist(i,j) = dep[i] + dep[j] – 2 * dep[lca(i,j)]
- 每次改变边权，相当于对 dfs 序的一段进行区间加，于是我们对 dfs 序再次分块，实现一个 O(sqrtn) 区间加， O(1) 查单点的平衡
- 使用 O(1)lca 的话，我们就可以 O(1) 计算两点之间的 dist 了
- 于是问题得到解决
- 时间复杂度 O((n+m)sqrtn)，空间复杂度 O(nsqrtn)

[Ynoi2018] 天降之物

- 第四分块
- 51nod　算法马拉松 35

- 序列 a
- 1. 把所有 x 变成 y
- 2. 查询最小的 |i-j| 使得 ai==x,aj==y

[Ynoi2018] 天降之物

- 对这题的评价： 5/11

Solution

- 考虑根号分治
- 定义一个值 `x` 出现次数为 `size[x]`
- 如果没有修改操作，则预处理所有 `size` 大于 `sqrtn` 的值到所有其他值的答案，以及每个值出现位置的一个排序后的数组
- 查询的时候如果 `x` 和 `y` 中有一个是 `size` 大于 `sqrtn` 的，则可以直接查询预处理的信息，否则进行归并
- `O( nsqrtn + msqrtn )`

Solution

- 有修改操作即在这个做法上改良，因为发现这个做法的根号平衡并没有卡满，所以有改良余地
- 假设把所有 x 变成 y
- 由于可以用一些技巧使得 x 变成 y 等价于 y 变成 x ，所以不妨设 size[x] < size[y]
- 定义 size 大于 sqrtn 为大， size 小于等于 sqrtn 为小
- 定义 ans[x][y] 为 x 到 y 去除附属集合的部分的答案（附属集合是什么下面有说）
- x 取遍所有值， y 只有所有大的值，总 O(sqrtn) 个

Solution

- 修改：
- 如果 x 和 y 均为大，则可以暴力重构，O(n)处理出 y 这个值对每个其他值的答案，因为这样的重构最多进行O(sqrtn)次，所以这部分复杂度为O(nsqrtn)
- 如果 x 和 y 均为小，则可以直接归并两个值的位置的排序后的数组，单次O(sqrtn)，所以这部分复杂度为O(msqrtn)
- 如果 x 为小， y 为大，发现小合并进大的均摊位置数为O(n)，对这个再次进行根号平衡
- 对于每个大，维护一个附属的位置集合，这个位置集合的大小不超过 sqrtn
- 每次把小的 x 合并入大的 y 的时候，即合并入这个附属集合，并且用 x 到所有大的值的答案更新 y 到所有大的值的答案，这样
- 如果合并后附属集合大小超过 sqrtn，则O(n)重构 y 到所有值的答案，这个过程最多进行O(sqrtn)次，均摊复杂度O(nsqrtn)
- 由于大的值个数 <= sqrtn , 附属集合大小 <= sqrtn，这一部分是单次O(sqrtn)的，所以这部分复杂度为O(msqrtn)

Solution

- 查询:
- 如果 x 和 y 均为大，则在维护的答案中查询 min(ans[x][y] , ans[y][x])，然后将 x 的附属集合和 y 的附属集合进行归并，这一部分是单次 O(sqrtn) 的，所以这部分复杂度为 O(msqrtn)
- 如果 x 和 y 均为小，则进行一次归并即可，所以这部分复杂度为 O(msqrtn)
- 如果 x 为小， y 为大，则在维护的答案中查询 ans[x][y]，然后将 x 和 y 的附属集合进行归并，这一部分是单次 O(sqrtn) 的，所以这部分复杂度为 O(msqrtn)
- 由于维护了所有可能的贡献，而且更新是取 min，正确性也得到了保障
- 时间复杂度 O((n+m)sqrtn)，空间复杂度 O(nsqrtn)

Solution

- 存在序列分块的做法

[Ynoi2019] 宝石

- 第五分块

这是一道交互题。

给定平面上的 n 个点，第 $i+1$ 个点为 (x_i, y_i)，初始值为 d_i，$0 \le i < n$；

你需要按顺序进行 m 次操作，所有操作在一开始已知；

第 $j+1$ 次操作给出三个数 a_j, b_j, c_j，以及 o_j，表示半平面 $a_j x + b_j y < c_j$，$0 \le j < m$；

你需要按顺序执行：

首先令 $s_j = \epsilon_D$，然后对每个满足 $a_j x_i + b_j y_i < c_j$ 的 i，先将 s_j 修改为 $s_j + d_i$，后将 d_i 修改为 $o_j \cdot d_i$；

完成这些修改后，就得到了这次操作的答案 s_j；

其中 d_i 属于抽象的数据类型 D，o_j 属于抽象的数据类型 O；

D 上定义了抽象的运算 $+ : D \times D \to D$；

D, O 上定义了抽象的运算 $\cdot : O \times D \to D$；

O 上定义了抽象的运算 $\cdot : O \times O \to O$；

ϵ_D 是 D 中的一个特殊的元素，称为单位元；

ϵ_O 是 O 中的一个特殊的元素，称为单位元；

这些操作满足性质：

对任意 $a, b, c \in D$，有 $a + b = b + a$，$(a + b) + c = a + (b + c)$，$a + \epsilon_D = \epsilon_D + a = a$；

对任意 $u, v, w \in O$，有 $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$，$u \cdot \epsilon_O = \epsilon_O \cdot u = u$；

对任意 $u, v \in O$，$a, b \in D$，有 $(u \cdot v) \cdot a = u \cdot (v \cdot a)$，$u \cdot (a + b) = (u \cdot a) + (u \cdot b)$，$\epsilon_O \cdot a = a$，$u \cdot \epsilon_D = \epsilon_D$；

执行每次 $+$ 或 $\cdot$ 运算有一定的代价，具体地，在计算 $a + b$ 或 $a \cdot b$ 时如果 a, b 都不是 ϵ_D 或 ϵ_O，则代价为1，否则代价为0。你需要保证每个答案正确，且总代价不能超过当前子任务的**代价上限**。

子任务	n	m	代价上限	分值	依赖
1	2×10^4	10^3	4×10^7	5	
2	2×10^4	10^3	8×10^5	15	1
3	2×10^5	10^2	4×10^7	5	
4	2×10^5	10^2	1.25×10^6	15	3
5	2^{16}	10^4	8×10^7	20	
6	2×10^5	10^4	2.5×10^7	10	
7	2×10^5	10^4	1.25×10^8	15	
8	2×10^5	10^4	2.5×10^7	15	1~7

[Ynoi2019] 宝石之国

[Ynoi2018] 末日时在做什么？有没有空？可以来拯救吗？

- 第六分块

- 序列
- 1. 区间加任意数，在 [-2^(w-1),2^(w-1)-1] 内
- 2. 查询区间最大子段和

[Ynoi2018] 末日时在做什么？有没有空？可以来拯救吗？

- 对这题的评价： 8/11

- 先看一个这题的弱化版

[Ynoi2015] 世界で一番幸せな女の子

- 维护序列支持:
- 1. 全局加
- 2. 区间最大子段和

Solution1

- 由于可以加负数
- 设 `pre[x]` 为 `x` 时刻全局加的值
- 按照 `pre` 从小到大处理
- 这样就转换为了只加正数

Solution1

- 考虑分块
- 每块维护一下块内长为 1…sqrt(n) 的最大前缀，最大后缀，最大子段和
- 如果一个整块加了，那么这个整块块内的最大子段长度肯定是不降的

Solution1

- 每次查询的时候按照当前的全局加标记确定出每个块内的最大子段和
- 然后把跨块的询问用左边块的最大后缀和右边块的最大前缀拼起来
- 即可

- 总复杂度 O(msqrt(n) + nsqrt(n))

Solution2

- 这个根号太屑了，考虑 polylog

Solution2

- 线段树维护：
- 每个节点的左，右，内部最大子段和的凸函数
- 凸函数是一个区间的半平面交，每个下标 `x` 对应的意义是这个节点被整体加了 `x` 后，该节点的左，右，内部最大子段和的值是多少
- 设左最大子段和是 `pre`，右最大子段和是 `suf`，内部最大子段和是 `mid`

Solution2

- 然后建树的时候可以发现
- `cur -> pre[i] = max( cur -> left -> pre[i] , cur -> right -> pre[i] + cur -> left -> sum );`
- `cur -> suf[i] = max( cur -> left -> suf[i] + cur -> right -> sum , cur -> right -> suf[i] );`
- `cur -> mid[i] = max( cur -> left -> mid[i] , cur -> right -> mid[i] , cur -> left -> suf[i] + cur -> right -> pre[i] );`
- 这个可以类比单点修改区间最大子段和理解

Solution2

- 我们来看看这个需要支持什么操作
- 需要支持:
- 1. 把一个凸函数加上一个常数
- 2. 求一个凸函数 a，满足 a[i] = max(b[i] , c[i])，其中 b， c 为凸函数
- 3. 求一个凸函数 a，满足 a[i] = b[i] + c[i]，其中 b，c 为凸函数

Solution2

- 可以发现这三个性质都满足
- 而且可以通过归并两个儿子的凸函数来得到 cur 的凸函数
- 于是预处理复杂度 O(nlogn)
- 每次查询的时候直接在线段树上查询区间即可

- 总复杂度 O((n+m)logn)

Solution

- 考虑把全局加区间最大子段和的做法拓展到区间加区间最大子段和：
- 先考虑加正数怎么做
- 如果朴素地来实现的话我们可以对序列进行分块，每块开一个数据结构
- 这样复杂度是 O((n+m)sqrt(nlogn)) 的，因为整块的线段树可以均摊 O(1) 直接在根上打标记，主要是零散部分代价比较高

Solution

- 发现零散部分直接重构整棵线段树代价是 O(slogs) 的，过大
- 发现本题使用的线段树并不需要支持区间查询，只是一个分治结构而已
- 考虑每次修改的时候，对于每个被修改到的节点 cur ，只会有 cur 的一个儿子被修改
- 于是我们可以通过归并 cur 的两个儿子的凸函数信息来得到 cur 的新的信息，没有必要重构整棵线段树，只需要部分重构

Solution

- 由于归并复杂度是 O(节点大小) 的，而且每层只归并一个节点，所以零散部分修改复杂度变为了 O(s + s / 2 + s / 4 + ... + 1) = O(s)
- 于是得到了一个时间复杂度均摊 O(sqrtn) 的算法

- 时间复杂度 O((n+m)sqrtn)，空间复杂度 O(nlogn)

Solution

- 加任意数?
- 逐块处理
- 发现每次操作的零散块只有 O(1) 个，我们离线，然后逐个块处理，对每个块算出我们需要的信息即可，具体细节可能比较复杂
- 这样我们可以对每个块进行基数排序，把询问和点一起排序，让其从加任意数变成加正数
- 这里值域是 Θ(m2^w)，由 RAM 的假设认为 w=Θ(logn)，在这个假设下基数排序是线性的，所以我们同复杂度解决了加任意数

- 时间复杂度 O((n+m)sqrtn)，空间复杂度 O(n + m)

[Ynoi2018] 駄作

- 第七分块
- THUPC 2019 A

- 无边权树
- 树上的一个**邻域**定义为到点 x 距离不超过 y 条边的点集， x 称为邻域的**中心**， y 称为邻域的**半径**。
- 给一棵 n 个点的树， m 次询问，每次给出两个邻域，问两个邻域中各取一个点，两两点对间的距离之和 。
- $n,m\leq 100000$

[Ynoi2018] 駄作

- 对这题的评价： 10/11

一些记号和定义

- 对于树上的顶点 a,b，顶点集 S,S1,S2，定义 d(a,b) 表示顶点 a 到 b 的距离，若 a=b 则 d(a,b)=0，否则 d(a,b) 是 a,b 间简单路径的边数；另外定义
- d(S,a) = d(a,S) = ∑ d(a,b)[b∈S]
- d(S1,S2) = ∑ d(a,S2)[a∈S1] 。
- 树 T 上的一个邻域 NT(x,y) 定义为到顶点 x 距离不超过 y 条边的顶点集。x 称为邻域的中心，y 称为邻域的半径。

Preknowledge

- 真实的树分块—— Topology Cluster Partition
- 树分块将 n 个结点的树分成了一些块的并，满足下列性质：
- 1. 每个块是树
- 2. 每个块中有两个特殊的点，称为端点 1 和端点 2 。
- 3. 不同块的边集不相交
- 4. 一个块中的顶点，除端点外，其余顶点不在其它块中出现
- 5. 如果一个顶点在多个块中出现，那么它一定是某一个块的端点 2 ，同时是其余包含这个顶点的块的端点 1
- 6. 如果把所有块的端点作为点，每块的端点 1 和端点 2 连有向边，则得到一棵有根树

Preknowledge

- 这里给出树分块的一个实现，满足块数和每块大小均为 O(sqrtn) :
- 在有根树中，每次选一个顶点 x，它的子树大小超过 sqrtn，但每个孩子的子树大小不超过 sqrtn， 把 x 的孩子分成尽可能少的块（以 x 为端点 1，但暂时允许有多个端点 2，且每块至多有 2sqrtn 个顶点），然后删掉 x 的子树中除 x 外的部分。重复直到剩下的点数不超过 sqrtn，自成一块。 这样就求出一个保证块中顶点数和块数均为 O(sqrtn) 的树分块（块间可以共用一些顶点，但每条边只属于一个块），如果一个块有多个端点（即被多个块共用的点），则在块内将这些端点 建出虚树，将虚树上的每条边细分为一个新的块，以保证最终每个块只有两个端点。

Solution1

- 如果只有单次询问，可以进行转化：
- $d(S1,S2) = \sum[d(a,c)*|S2|+d(b,c)*|S1|-2d(lca(a,b),c)][a\in S1,b\in S2]$，其中 c 是任意一个点。 这里我们取 c 为根节点，这样把两两顶点间的距离和转化为了点集内顶点的深度和以及两两顶点间 lca 的深度和：
- $d(S1,S2) = \sum[dep(a)*|S2|+dep(b)*|S1|-2dep(lca(a,b))][a\in S1,b\in S2]$
- 对 lca 部分可以在 O(n) 时间内求出：初始化树的边权为 0，将 S1 中的每个顶点到根的路径的边权 +1，求 S2 中每个顶点到根的路径的边权和之和。

Solution1

- 首先进行树分块，方便起见，认为一个块包含块中除了端点 1 之外的点，这样每个点就恰好 属于一个块。 预处理每个块 B （端点为 a1,a2）中的 d(NB(ai,x),aj)（i,j=1,2），需要 O(n)时间和空间。
-
- 树 T 的一个邻域可以拆分为这个邻域和每个块的交。
- 对于块 B，若 x 在 B 中，则 NT(x,y)∩B=NB(x,y)；否则设 z 是 B 中距离 x 较近的端点，距离为 d，则 NT(x,y)∩B=NB(z,y-d)。

Solution1

- 求两个邻域间的距离和，只需考虑这两个邻域和每个块的交。求块 B1,B2 的两个邻域 n1=NB1(x1,y1)和 n2=NB2(x2,y2)间的距离和。 如果 xi 不是 Bi 的端点，则显式地求出 ni 以及 ni 到 Bi 的端点的距离和，这需要 O(sqrtn)的时间。

Solution1

- 当 B1≠B2 时，设 a 为 B1 中最靠近 B2 的端点，b 为 B2 中最靠近 B1 的端点，n1 和 n2 间的距离和 d(n1, n2)=d(a,b)*|n1|*|n2|+d(n1,a)*|n2|+d(n2,b)*|n1|。通过在块构成的树上 dfs，这部分可以在 O(sqrtn)时间内处理。
- 当 B1=B2 时，如果 x1 和 x2 都是 B1 的端点，每块每次询问这种情况出现至多 1 次，这里暂不考虑，最后再离线处理；否则每次询问这种情况只出现 O(1)次，可以 O(sqrtn)暴力处理。

Solution1

- 离线处理的部分，枚举每个块 B，再枚举询问（只需考虑两个邻域的中心都不在 B 中的询问） 计算贡献，有 O(n) 个询问形如 d(NB(a,y1),NB(b,y2))，对 <a,b> 的 4 种情况分别计算。由于块中 点数的限制， <y1,y2> 实际只有 O(n) 种（y1,y2=O(sqrtn)）。 仍然转化为求两两点间 lca 的深度和，枚举 y1，维护初始边权为 0，将 NB(a,y1) 中每个点到 根路径上的边权 +1 后得到的树，此时每个 y2 对应的答案是 NB(b,y2) 中每个点到根的路径的 边权和之和。这部分时间和空间都是 O(n) 的。
- 时间复杂度 O((n + m)sqrtn)，空间复杂度 O(n)

Solution2

- 本题还存在利用静态 top tree （RC 分治）来简化问题的做法，但是限于问题的复杂性还是只能做到 O((n + m)sqrtn) 时间复杂度

[Ynoi????]??????

- 第八分块
- 未知

[Ynoi????]??????

- 第九分块
- 未知

[Ynoi2019] 魔法少女 site

- 第十分块
- 序列
- 1 x y ： x 位置修改为 y
- 2 l r x ： 查询区间 [l,r] 有多少子区间的 max <= x

[Ynoi2019] 魔法少女 site

- 对这题的评价： 6/11

Solution

- 这是带修改不删除莫队，首先这个问题是四维的，一维时间维，一维值域维，两维序列维，考虑莫队维护（ 时间 ，max ）的二元组，数据结构维护序列维：每次离线处理 O(sqrtn)个操作。

Solution

- 令 x 递增扫描，维护一个与原序列等长的 01 序列，其中一个位置为 1 当且仅当原序列中此处的值小于等于 x 且在这些操作中没有修改过这个位置，支持将 0 变成 1，查询内每个段（定义段为 01 序列上的极长区间，满足区间内均为 1）的贡献（长度 *（长度 -1)/2)。

Solution

- 当 x 与某个询问的 x 相同时，处理这个询问，对于在这个询问前被修改过的位置，需要将 0 变为 1，处理完这个询问后撤销操作；另外还需要将位置暂时设为 0，在询问结束后恢复。为支持上述操作，对每个由 1 组成的段，在段的两端记录这个段的另一端的位置，在将 0 变成 1 时可以 O(1) 维护段的变化情况。

Solution

- 使用分块实现 O(1) 单点加 O(sqrtn) 查询区间和，将每个段的贡献记录在段的左端点上，在段发生改变时动态维护。为了支持将位置暂时设为 0 （此时需要知道这个位置当前是否为 0，若非 0 还需要知道这个位置所在的段的左右端点），还需要支持 O(sqrtn) 查询一个位置左边的第一个左端点，并在段发生改变时 O(1) 更新一个位置是否是某个段的左端点，这同样可以使用分块实现。
- 综上所述，可以在 O(n) 时间内处理 O(sqrtn) 个操作，总的时间复杂度为 O((n + m)sqrtn)。

[Ynoi????]??????

- 第十一分块
- 未知

[Ynoi????]??????

- 第十二分块
- 未知

[Ynoi????]??????

- 第十三分块
- 未知

[Ynoi2018]GOSICK

- 第十四分块

- 序列，值域和 n 同阶
- 每次给出一个区间 [l,r]，查询存在多少二元组 (i,j) 满足 l <= i , j <= r，且 ai 是 aj 倍数

[Ynoi2018]GOSICK

- 对这题的评价： 8/11

Solution

- 我们考虑莫队维护，不失一般性这里只讨论莫队的四种拓展方向里面的一种
- 每次把区间 `[l,r]` 拓展到 `[l,r+1]` 的时候需要维护 `a[r+1]` 和 `[l,r]` 这段区间的贡献
- 这里利用莫队二次离线的 `trick`：
- 莫队就可以抽象为 `nsqrtm` 次转移，每次查询一个序列中的位置对一个区间的贡献
- 这个贡献是可以差分的， 也就是说把每次转移的 `a[r+1]` 对区间 `[l,r]` 的贡献差分为 `a[r+1]` 对前缀 `[1,r]` 的贡献减去对前缀 `[1,l-1]` 的贡献

Solution

- 然后通过这个差分我们可以发现，我们把 O(nsqrtm) 次的修改降低到了 O(n) 次修改，因为前缀只会拓展 O(n) 次
- 于是我们每次可以较高复杂度拓展前缀和，因为插入次数变成了 O(n) 次
- 然后这里我们离线莫队的转移的时候可以做到线性空间，因为每次莫队是从一个区间转移到另一个区间：
- 我们记下 pre[i] 为 i 的前缀区间的答案， suf[i] 为 i 的后缀区间的答案

Solution

- 不失一般性，只考虑把区间 [l1,r1] 拓展到区间 [l1,r2]:
- [l1,r1] 区间的答案为红色部分的贡献， [l1,r2] 区间的答案为红色部分加上绿色部分的贡献， r2 的前缀贡献为所有的贡献， r1 的前缀贡献为红色的贡献与前两个蓝色的贡献
- 于是我们可以把绿色的贡献，也就是两次询问的差量差分为 pre[r2]-pre[r1]-{[1,l1-1] 对 [r1+1,r2] 的贡献 }

Solution

- 这里每个位置开个 vector 存一下就可以了，相当于说在 l1-1 位置 push_back(pair < int , int > (r1 + 1 , r2))，然后扫描线扫到的时候直接暴力进行处理就可以了
- 于是我们达成了 O(n + m) 的空间复杂度将莫队给二次离线
- 现在考虑怎么算这个贡献，我们要高效计算区间 [l,r] 对 x 的贡献时
- 先把贡献拆开变成： [l,r] 中 x 的倍数个数， [l,r] 中 x 的约数个数

Solution

- [l,r] 中 x 的倍数个数：每次前缀加入一个数 a[i] 的时候，我们把 a[i] 的约数位置所对应的数组 pre1 的位置都 ++ 然
- 后查询的时候直接查 pre1[x] 即可得到 x 倍数个数
- [l,r] 中 x 的约数个数：这里考虑对 x 的约数进行一次根号分治

Solution

- 对于所有 x 大于 sqrtn 的约数，我们拓展前缀的时候维护，即每次把 a[i] 的倍数位置所对应的数组 pre2 的位置都 ++
- 然后查询的时候直接查 pre2[x] 即可得到 x 大于 sqrtn 的约数个数
- 对于所有 x 小于 sqrtn 的约数，我们考虑每次直接枚举区间 [l,r] 中 1,2,...sqrtn 的出现次数
- 这里可以先枚举 1,2,...sqrtn，然后预处理一个前缀和，O(n + m) 算出对每个询问的贡献，从而节省空间
- 于是我们得到了一个总时间复杂度 O(n(sqrtn + sqrtm))，空间 O(n + m) 的做法

[Ynoi????]??????

- 第十五分块
- 未知

Thanks for listening

1974015903