简单多项式 & 生成函数

CraZYali

2020 年 1 月 19 日

我其实真的不会这种东西啊。
所以就讲一点点板子和我会的题了。
时间比较匆忙，所以课件难免有瑕疵，将就着看吧。

多项式的定义

$$F(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

其中我们称 n 为多项式 $F(x)$ 的**阶 (deg)**。
需要注意的是，在这里多项式 $F(x)$ 同样也是序列 $< a_0, a_1, a_2 \dots a_{n-1}, a_n >$ 的**普通生成函数**。
OI 的多项式操作一般都涉及到倍增和二分，所以我们一般会把多项式的长度扩展到 2^k。

泰勒展开

泰勒级数用无限项连加式来表示一个函数，这些相加的项由函数在某一点的导数求得。(from wikipedia)
这要求被展开的函数可导。

泰勒展开

泰勒级数用无限项连加式来表示一个函数，这些相加的项由函数在某一点的导数求得。(from wikipedia)
这要求被展开的函数可导。
式子：

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \end{aligned}$$

求导

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \\
F'(x) &= \sum_{i=0}^{n} i a_i x^{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} x^i
\end{aligned}
$$

求导

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \\
F'(x) &= \sum_{i=0}^{n} i a_i x^{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} x^i
\end{aligned}
$$

零次项没了。

积分

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$\int F(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} a_i x^{i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} a_{i-1} x^i$$

积分

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$\int F(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} a_i x^{i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} a_{i-1} x^i$$

零次项有了。

以下我把所有要求的多项式都称为 B，对于小规模的已知答案称为 A。
对于一些关于极限的证明我不会，所以没有了（也不需要）。
可能会把 $F(x)$ 省略写成 F。

多项式求逆

$$
\begin{aligned}
F(x)\cdot B(x) &\equiv 1 \pmod{x^n}\\
F(x)\cdot B(x) &\equiv 1 \pmod{x^{\frac{n}{2}}}\\
F(x)\cdot A(x) &\equiv 1 \pmod{x^{\frac{n}{2}}}\\
F\cdot(A-B) &\equiv 0 \pmod{x^{\frac{n}{2}}}\\
A^2+B^2-2AB &\equiv 0 \pmod{x^n}\\
A^2F+B-2A &\equiv 0 \pmod{x^n}\\
B \equiv 2A-A^2F & \pmod{x^n}
\end{aligned}
$$

多项式开方

$$
\begin{aligned}
A(x)^2 &\equiv F \pmod{x^{\frac{n}{2}}} \\
A^2 - F &\equiv 0 \pmod{x^{\frac{n}{2}}} \\
(A^2 - F)^2 &\equiv 0 \pmod{x^n} \\
(A^2 + F)^2 &\equiv 4FA^2 \pmod{x^n} \\
\frac{(A^2 + F)^2}{4A^2} &\equiv F \pmod{x^n} \\
B &\equiv \frac{A^2 + F}{2A} \pmod{x^n}
\end{aligned}
$$

多项式的反转

设

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

则称多项式 $F(x)$ 的**反转为**

$$F^R(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} x^i$$

也就是系数的反转。

多项式的反转

设

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

则称多项式 $F(x)$ 的**反转**为

$$F^R(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} x^i$$

也就是系数的反转。
易知

$$F^R(x) = x^n F(\frac{1}{x})$$

多项式除法

不专业的定义：若

$$F(x) = G(x) \cdot D(x) + R(x)$$

，且当 F 的阶为 n，G 的阶为 m 时，$D(x)$ 的阶为 $n - m$，则我们认为 D, R 是 F 除 G 的商和余数。

多项式除法

$$
\begin{aligned}
F(x) &= G(x)D(x) + R(x) \\
x^n F(\frac{1}{x}) &= x^m G(\frac{1}{x}) x^{n-m} D(\frac{1}{x}) + x^n R(\frac{1}{x}) \\
F^R(x) &= G^R(x) D^R(x) + x^n R(\frac{1}{x}) \\
F^R(x) &\equiv G^R(x) D^R(x) && \pmod{x^{n-m+1}} \\
D^R(x) &\equiv \frac{F^R(x)}{G^R(x)} && \pmod{x^{n-m+1}}
\end{aligned}
$$

多项式牛顿迭代

我们有一个多项式函数 $H(B)$，希望求它的零点。

多项式牛顿迭代

我们有一个多项式函数 $H(B)$，希望求它的零点。
把 H 在 A 处泰勒展开。

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{H^{(i)}(A)}{i!}(B-A)^i \equiv 0 \pmod{x^n}$$

由于我们构造 B 的方式为在 A 后面添加一些项，所以其实我们有：

$$H(B) \equiv H(A) + H'(A)(B-A) \pmod{x^n}$$

$$B \equiv A - \frac{H(A)}{H'(A)} \pmod{x^n}$$

多项式对数函数

模意义下没法定义 e，所以我们定义的多项式的 $\ln$ 为这个多项式和麦克劳林级数的复合。

$$\ln F(x)=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{F^{(i)}(x)}{i}$$

根据定义，$\left[x^0\right]F(x)=1$。
它拥有我们一般意义下的性质。

多项式对数函数

模意义下没法定义 e，所以我们定义的多项式的 $\ln$ 为这个多项式和麦克劳林级数的复合。

$$\ln F(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{F^{(i)}(x)}{i}$$

根据定义，$\left[x^0\right] F(x) = 1$。
它拥有我们一般意义下的性质。

$$\ln' F(x) = \frac{F'(x)}{F(x)}$$

$$\ln F(x) = \int \frac{F'(x)}{F(x)}$$

多项式指数函数

根据定义，$\left[x^0\right] F(x) = 0$。
用牛顿迭代来做。

$$
\begin{aligned}
\exp F &= B \\
F &= \ln B \\
H(B) &= F - \ln B = 0 \\
B &\equiv A - \frac{F - \ln A}{-\frac{1}{A}} \pmod{x^n} \\
&\equiv A + AF - A \ln A \pmod{x^n}
\end{aligned}
$$

多项式快速幂

这东西有什么用？

多项式快速幂

这东西有什么用？
假设我们现在有一个 $F(x)$ 满足 $\left[x^0\right] F(x) = 1$，那么我们可以发现

$$\begin{aligned} F(x) &= \exp \ln F(x) \\ F(x)^k &= \exp \ln F(x)^k \\ &= \exp k \ln F(x) \end{aligned}$$

小朋友与二叉树

Source: Codeforces 438E
定义一棵有点权的二叉树是合法的，当且仅当所有点权都在集合 S 中。
给出集合 S，对于求有多少棵权值和为 1 到 m 的合法二叉树。
$|S|, m \leq 10^5$

小朋友与二叉树

考虑对集合 S 做一个生成函数 G，答案的生成函数为 F。
则易知

$$F = F^2G + 1$$
$$F = \frac{2}{1 \pm \sqrt{1 - 4G}}$$

显然只能取加号。

城市规划

Source: Luogu 4841

求出 $n \leq 130000$ 个点的简单 (无重边无自环) 有标号无向连通图。

城市规划

先转为无标号。
记 F 为无向图的生成函数，G 为无向连通图的生成函数。
我们有：

$$F=\sum_{k\geq 0}\frac{G^k}{k!}$$

$$F'=\sum_{k\geq 0}\frac{G'\cdot kG^{k-1}}{k!}$$

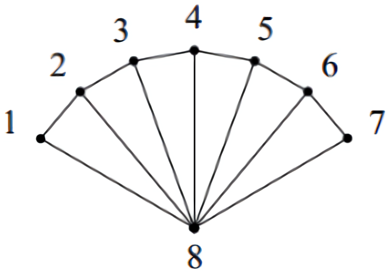
$$=G'\sum_{k\geq 0}\frac{G^k}{k!}$$

$$=G'F$$

$$\therefore G=\ln F$$

扇形生成树

Source: 《具体数学》



求 n 个点的扇形图的生成树个数，对 p 取膜。

$n \leq 10^5, p = 998244353$

扇形生成树

设 F 为答案的生成函数，$f_n = [x^n]\,F(x)$。

$$
\begin{aligned}
f(n) &= f(n-1) + f(n-1) + f(n-2) + f(n-3) + \ldots + f(2) + 1 \\
&= f(n-1) + f(n-1) + f(n-2) + f(n-3) + \ldots + f(2) + f(1) \\
F(x) &= 2xF(x) + x^2F(x) + x^3F(x) + x^4F(x) + \ldots \\
&= xF(x) + F(x) \cdot \frac{x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x(1-x)^2}{(1-x)^2 - x}
\end{aligned}
$$

扇形生成树

设 F 为答案的生成函数，$f_n = [x^n]\,F(x)$。

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(n-1) + f(n-1) + f(n-2) + f(n-3) + \ldots + f(2) + 1 \\
&= f(n-1) + f(n-1) + f(n-2) + f(n-3) + \ldots + f(2) + f(1) \\
F(x) &= 2xF(x) + x^2F(x) + x^3F(x) + x^4F(x) + \ldots \\
&= xF(x) + F(x)\cdot\frac{x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x(1-x)^2}{(1-x)^2 - x}
\end{aligned}$$

加强一下

$$n \le 10^{18}, p = 10^9 + 7?$$

扇形生成树

设 F 为答案的生成函数，$f_n = [x^n]\,F(x)$。

$$
\begin{aligned}
f(n) &= f(n-1) + f(n-1) + f(n-2) + f(n-3) + \ldots + f(2) + 1 \\
&= f(n-1) + f(n-1) + f(n-2) + f(n-3) + \ldots + f(2) + f(1) \\
F(x) &= 2xF(x) + x^2F(x) + x^3F(x) + x^4F(x) + \ldots \\
&= xF(x) + F(x) \cdot \frac{x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x(1-x)^2}{(1-x)^2 - x}
\end{aligned}
$$

加强一下

$$n \leq 10^{18}, p = 10^9 + 7?$$

有理展开定理推出通项即可。

美妙的序列

Source: 51nod 1514

对于一个长度为 n 的排列，如果在 1 到 $n-1$ 这些位置后面将排列断开，总可以从右边找到一个小于左边的所有数的数，则称该排列为“美妙的”。

求有多少个长度为 $n \leq 10^5$ 的“美妙的”排列，对 998244353 取模。

美妙的序列

一个序列不合法等价于存在一个位置 $i < n$，使得 $p_{1..i}$ 是一个长度为 i 的排列。

美妙的序列

一个序列不合法等价于存在一个位置 $i < n$，使得 $p_{1..i}$ 是一个长度为 i 的排列。
设 f_n 为答案，F 为 f 的生成函数。

$$f_n = n! - \sum_{i=1}^{n-1} i! f_{n-i} \tag{1}$$

(1) 式已经可以分治 FFT 做了。但这还不够好

美妙的序列

一个序列不合法等价于存在一个位置 $i < n$，使得 $p_{1..i}$ 是一个长度为 i 的排列。
设 f_n 为答案，F 为 f 的生成函数。

$$f_n = n! - \sum_{i=1}^{n-1} i! f_{n-i} \tag{1}$$

(1) 式已经可以分治 FFT 做了。但这还不够好
设 G 为 $n!$ 的生成函数。

$$\sum_{i=0}^{n-1} i! f_{n-i} = n!$$

$$\therefore \forall n \geq 0, \sum_{i=0}^{n-1} i! f_{n-i} = n! - [n = 0]$$

Transforming Sequence

Source: Codeforces 623E

求有多少个长度为 n 的序列满足以下条件:

- 值域为 $[1, 2^k)$
- 前缀或单调递增

答案对~~10^9+7~~998244353 取模。

$n \le 10^{18}, k \le 30000$

Transforming Sequence

首先，n 不可能超过 k，否则答案为 0。

Transforming Sequence

首先，n 不可能超过 k，否则答案为 0。
考虑设 $f_{i,j}$ 为前 i 个数的前缀或中有 j 个数位（不考虑是哪 j 个）上是 1 的方案数，记 $\hat{F}_i$ 为 $f_{i,j}$ 的指数型生成函数。

$$f_{i,j} = \sum_{p=0}^{j-1} f_{i-1,p} 2^p \binom{j}{p}$$

$$\frac{f_{i,j}}{j!} = \sum_{p=0}^{j-1} \frac{f_{i-1,p}}{p!} 2^p \frac{1}{(j-p)!}$$

$$\frac{f_{i,j}}{j!} x^j = \sum_{p=0}^{j-1} \frac{f_{i-1,p}}{p!} x^p 2^p \frac{1}{(j-p)!} x^{j-p}$$

$$\frac{f_{i,j}}{j!} x^j = \sum_{p=0}^{j} \frac{f_{i-1,p}}{p!} (2x)^p \frac{1}{(j-p)!} x^{j-p} - \frac{f_{i-1,j}}{j!} x^j$$

Transforming Sequence

所以我们有:

$$\hat{F}_i(x) = \hat{F}_{i-1}(2x)(e^x - 1)$$

进一步写一写，我们发现:

$$\hat{F}_1(x) = e^x - 1$$

$$\hat{F}_2(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 1)$$

$$\hat{F}_3(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 1)(e^{4x} - 1)$$

$$\hat{F}_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(e^{2^i x} - 1)$$

Transforming Sequence

所以我们有：

$$\hat{F}_i(x) = \hat{F}_{i-1}(2x)(e^x - 1)$$

进一步写一写，我们发现：

$$\hat{F}_1(x) = e^x - 1$$
$$\hat{F}_2(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 1)$$
$$\hat{F}_3(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 1)(e^{4x} - 1)$$
$$\hat{F}_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(e^{2^i x} - 1)$$

这个东西倍增求一求就可以了，时间复杂度是

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(n \log n) = O(n \log^2 n)$$

Thank you!