

杂题选讲

北京大学 洪华敦

Hunger Game

- 有 N 个箱子，每个箱子有 $a[i]$ 个石头，一开始所有箱子都是关着的
- Alice 和 Bob 轮流操作，每次可以至少打开一个被关闭的箱子，或者选择一个已经开着的箱子拿走里面至少一个石头
- 不能操作的输，求先手必胜还是后手必胜
- $1 \leq N \leq 20$, $0 \leq a[i] < 10^9$

方程最小值

- 给定 $k[i], b[i]$
- 有 n 个函数，第 j 个函数为 $f_j(x) = \sum (|k[i] * x + b[i]|)$ ，其中 $1 \leq i \leq j$
- 对于每个 $j=1 \dots n$ ，求出 $f_j(x)$ 的最小值
- $1 \leq n \leq 10^5$
- $|k[i]| \leq 1000$

DFS序计数

- 给定一个 n 个点的有向图，求合法的 DFS 序的个数
- $n \leq 13$

Xor Product

- 给定一个长度为 n 的数组 $A[1...n]$, 求 $\text{Sum}((A[i] \oplus A[j]) * (A[j] \oplus A[k]) * (A[i] \oplus A[k]))$
- 其中 $1 \leq i < j < k \leq n$
- $n \leq 10^5$, $0 \leq A[i] < 2^{31}$

Rikka with Sequence

- 给定 n 个数 $a[1..n]$, 求有几个子集满足: 子集的异或和等于这个子集里所有数的 AND
- $n \leq 50$, $0 \leq a[i] < 2^{13}$

Perfect Set

- 定义一个集合 S 是 Perfect 的, 当且仅当若 a, b 在 S 中, 则 $a \text{ xor } b$ 也在 S 中
- 给定 K , 求有几个不同的 Perfect 集合 S , 满足里面最大值不超过 K
- $K \leq 10^9$

和异或

- 给定 $a[1\dots n]$, $b[1\dots n]$, 求所有 $(a[i]+b[j])$ 异或起来的值
- $1 \leq n \leq 300000$, $0 \leq a[i], b[i] < 2^{60}$

Halting Problem

- 有一种编程语言，他由 N 个语句组成，第 i 个语句有以下参数：
 $key[i], g0[i], d0[i], g1[i], d1[i], w[i]$
- 你有一个全局变量 X ，当执行第 i 条语句时，如果 $key[i]=X$ ，则令 $X+=d0[i]$ ，并执行第 $g0[i]$ 条语句；否则令 $X+=d1[i]$ ，并执行第 $g1[i]$ 条语句。但是无论如何你都会获得 $w[i]$ 的收益，当执行到第 $N+1$ 条语句时程序结束
- 现在有 Q 次询问，每次给定 T, Y ，询问当全局变量 X 一开始等于 T 时，若执行语句 Y ，最后获得的总收益的值，若无限循环则输出 -1
- $N \leq 10^5$ ，其余数值在 10^{18} 内

Touma Kazusa's Function

给定序列 $a[1...n]$, 有 Q 次询问, 每次询问给定 L, R , 求:

$$\sum_{i=L}^R \sum_{j=L}^R \phi(\gcd(a_i, a_j)) \text{lcm}(a_i, a_j)$$

$$n, Q \leq 10^5, a[i] \leq 10^7$$

时限较大 (15s),

HDU6738

给定一个质数 p , 对于两个整数 $a, b (0 \leq a, b < p)$, 定义 b 是可以表示 a 的, 当且仅当存在正整数 x 满足 $b^x = a \pmod{p}$

定义 $f(u, v)$ 为: 最小的正整数 s , 使得 v 可以表示 $u^s \pmod{p}$

现在给定质数 p 和序列 $a_1 \dots a_n$, 求:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(a_i, a_j) f(a_j, a_i)$$

答案对 p 取模

$$n \leq 10^5, \quad p \leq 10^{18}$$

逆序对

- 给定 n, k , 求有几个长度为 n 的排列, 满足逆序对个数= k
- $n, k \leq 10^5$

背包问题

- 有 n 个物品，每个物品有价值 $w[i]$ ，体积 $v[i]$ ，数量 $s[i]$
- 求体积为 S 的背包最多装下多少价值的物品
- $1 \leq n, v[i] \leq 80, 1 \leq w[i], s[i], S \leq 10^9$

雪山问题

- 给定一个 n 个点， m 条边的有向图，每个点有权值 $w[i]$ ，现在对于给定的某个 K ，你需要选出三条不同的路径，使得他们起点相同，且终点的权值之和为 K ，求方案数
- 对于 $K=1 \dots 3 \cdot \max(w[i])$ 都输出答案
- $n \leq 10000$, $m \leq 30000$, $1 \leq w[i] \leq 400$

Kill

- 一个游戏有 n 个人，游戏的规则是这样的：
- (1). 随机选择一个还未出局的人 x
- (2). x 对剩下的未出局的人都做一次攻击，一个人受到攻击后有 $(1-p)$ 的概率非正常出局
- (3). 让 x 正常出局
- 重复以上步骤，直到所有人都出局
- 求一个人正常出局，且一共受到 K 次攻击的概率
- $n \leq 2000$

The Hanged Man

- 有一个 n 个点的树，每个点有一个体积 $v[i]$ 和收益 $w[i]$
- 现在你能选一个独立集，对于每个 i 输出体积和为 i 的收益和最大的独立集的值
- $n \leq 50$, $m \leq 5000$