



# 图论入门



# Jump

- 在数轴上有  $n$  个跳跃重心  $a_1, a_2, \dots, a_n$ 。
- 你每次可以选择一个跳跃重心，跳到当前位置关于它对称的地方去。
- $Q$  次询问，每次给出起点  $S$  和终点  $T$ ，询问从起点到终点最少需要跳多少步，无解输出  $-1$ 。
- $1 \leq n \leq 200, 0 \leq a_i, S, T \leq 10000, 1 \leq Q \leq 100000$ 。

# Today is a rainy day

- 给定两个数字串  $S$  和  $T$ ，长度均为  $n$ ，且仅包含数字 123456。
- 你每次可以进行下面两种操作：
  - (1) 修改串的某一位。
  - (2) 选定两个数字  $x; y (1 \leq x; y \leq 6)$ ，把串中所有数字等于  $x$  的都改为  $y$ 。
- 求把  $S$  改成  $T$  的最少步数。
- $1 \leq n \leq 100$ 。

# Walk

- 给定一张  $n$  个点的有向图，点  $i$  的权值是  $val_i$ ，若  $val_i \text{ and } val_j = val_j$ ，则  $i$  向  $j$  连单向边。
- 另外在给定  $m$  条有向边，求 1 到每个点最短经过的边数。
- $n \leq 200000, m \leq 300000, 0 \leq val_i \leq 2^{20}$ 。

# 树上传送

- 给定一棵树， $i$  号点可以花费  $v_i$  的代价，传送到距离不超过  $d_i$  的点去。
- 求 1 号点到所有点的最短路。
- $n \leq 300000$ 。

# Road

- 给定一张  $n$  个点的无权图，求两两点之间的最短路。
- $n \leq 5000$ 。

# Travel

- 给定一张  $n$  个点的完全图，其中  $m$  条边的权值为  $a$ ，其余的为  $b$ ，给定这  $m$  条边，求从 1 到  $n$  的最短路。
- $n \leq 100000, m \leq 500000$ 。

# Kirakira

- 对于给定的  $n$ ，有函数： $f(x) = \prod_{i=1}^n (x \bmod i)$ 。
- 对于给定的  $n$  ( $n > 0$ )，求出  $f(x)$  的连续值。
- 求出这个无限长的图中的最大的环的长度。
- 求出这个无限长的图中的最大的环的长度。
- $n \leq 10000$
- $n \leq 10000$



# Boruvka's algorithm

- 初始时每个点是一个联通块。
- 每轮过程每个联通块找个最小的出边。
- 最多  $\log n$  次结束过程

# 更优秀的复杂度？

- 对某个点开始使用 Prim 算法。
- 在使用 Fibonacci 堆的情况下，复杂度是  $O(m+n \log(\text{size of heap}))$ 。
- 当堆的大小达到  $k$  时暂时结束算法，重新找一个点开始 Prim。
- 每次 Prim 直到堆的大小达到  $k$  或者连接到了已经找好的树结束。
- 当所有点都在一个生成树里时，收缩整棵树。
- 递归后的  $n' = 2m/k$
- 取  $k=2^{(2m/n)}$
- 单层复杂度严格  $O(m)$ , 递归层数是  $\beta(m,n)=\min\{i:\log_i(n)\leq m/n\}$
- 如果  $m=n\log_k(n)$ ，那么复杂度是  $O(m)$

# 生成树

- 次小生成树
- 严格次小生成树
- 最小比率生成树，每条边有  $a, b$  两个属性，最小化  $\sum(a)/\sum(b)$
- 最小乘积生成树，每条边有  $a, b$  两个属性，最小化  $\sum(a)*\sum(b)$
- 单点度最小生成树，限制某个点的度数
- 多点度最小生成树，保证限制的点之间不相邻？（

# 新年的繁荣

- 一张  $n$  个点的图，每个点有权值  $v_i$ ，两个点相连的收益是两个点  $a$  and  $b$  起来的值，求最大生成树。
- $n \leq 100000$ ,  $a_i \leq 2^{18}$ 。

# 生成树计数

- Matrix-Tree 定理
- 证明?

# 带权图生成树计数

- 权是乘法
- 权是加法？

# 有向图生成树计数

- 度数变为入度
- 以  $x$  为根特别需要  $x$  行  $x$  列的代数余子式

# 有向图欧拉回路计数

## ■ Best Theorem

■ 有向图  $G$  的欧拉回路数是  $1$  (其中  $\tau_1(G)$  表示以  $1$  为根的有向生成树的数量)。



# Expectation

- 给定一个  $n$  个点， $m$  条边的无向图，每条边有两个权值  $a, b$ ，求按照  $a$  建出来的生成树的  $b$  的期望。
- $n \leq 100000, m \leq 200000$ , 相同的  $a$  的数量不超过 30。

# 白金元首与独舞

- 给定一个  $n$  行  $n$  列的网格，每个格子有一个向上下左右的箭头或未填。
- 给每个未填的格子填入一个符号，使得从每个位置出发都能在有限步内走出网格。  
。
- $n, m \leq 200$ , 未填的格子数量  $\leq 300$

# 带权生成树计数

- 权值是加法的情况到底应该怎么做？

# 生成树

- 给定一张  $n$  个点， $m$  条边的无向图，每条边有红绿蓝三种颜色
- 要求绿边数量不超过  $g$ ，蓝边不超过  $b$  的生成树数量，答案对  $10^9 + 7$  取模
- $n \leq 40$

# 生成树计数

- 给定一个带权无向图，定义一棵生成树的权值是边权和的  $k$  次方，求所有生成树的权值和，答案对  $10^9 + 7$  取模
- $n, k \leq 50$

# Riddle

- 有  $n$  个点， $m$  条边， $k$  个点集，满足这些点集恰好是全集的一个划分。
- 现在要求从每个集合内选一个点，满足对于任意一条边，两个点至少被选中一个。
  -
- $n, m, k \leq 1000000$

# Flag

- 数轴上有  $n$  对点  $x_i, y_i$ ，从每对点分别选出一个，最大化选出的点之间的距离的最小值。
- $n \leq 10000$ 。

# POI2009 lyz

- 有  $1-n$  号的鞋各  $k$  双，已知  $x$  号脚可以穿  $x$  到  $x+d$  大小的鞋。
- 有  $m$  次操作，每次来了  $x_i$  个  $r_i$  号脚的人， $x_i$  负表示走。
- 对于每次操作都输出是否够。
- $N \leq 200000, k \leq 10^9, m \leq 500000$



# Rooms

- 给出一个由小写字母组成的  $n*m$  的矩阵，定义一个房间是联通的同字符四联通块。
- $Q$  次询问，每次给出一个矩阵，问多少房间与矩阵有交。
- $N, m \leq 2000, q \leq 5000$

# Xor cycle

- 给一个带权无向图，求 xor 最大的回路
- $N \leq 100000, m \leq 200000$

# 遥远的星系

- 给定一个  $n$  个点的图，图中存在  $m$  条边  $(u, v, w)$ ，表示如果从  $u$  走到  $v$  要花费恰好  $w$ ，反之从  $v$  到  $u$  花费  $-w$ 。
- 有  $q$  次询问，每次询问是否能从  $u$  走到  $v$  花费恰好  $w$ 。每条边允许经过很多次。
- $n, m, q \leq 10^6$

# Field Action

- 有一个  $N \times M$  的矩阵，还有  $Q$  条关系，每条关系都是如果某个矩阵中任意格子被激活了，那么第二个矩阵中所有格子都被激活了。
- 如果需要激活所有格子，最少需要手动激活多少个格子。
- $N, m \leq 300, Q \leq 10^5$

# CF402E

- 现在有一个  $N$  阶非负方阵  $M$ ，满足对角线元素大于 0，求是否存在  $k$ ，满足  $M^k$  的所有数都大于 0。
- $N \leq 2000$

# Bajtocja

- 给定  $d$  张无向图，每张图都有  $n$  个点。一开始，在任何一张图中都没有任何边。
- 接下来有  $m$  次操作，每次操作会给出  $a; b; k$ ，在第  $k$  张图中的点  $a$  和点  $b$  之间添加一条无向边。
- 你需要在每次操作之后输出有序数对  $(a; b)$  的个数，满足  $1 \leq a; b \leq n$ ，且  $a$  点和  $b$  点在  $d$  张图中都连通。
- $1 \leq d \leq 200; 1 \leq n \leq 5000; 1 \leq m \leq 1000000$ 。

# Rally

- 给定一张  $n$  个点  $m$  条边的有向无环图，每条边长度都是 1。
- 请找到一个点，使得删掉这个点后剩余图中最长路径最短。
- $2 \leq n \leq 500000; 1 \leq m \leq 1000000$ 。

# Tournament cycle

- 求有多少  $N$  个点的竞赛图存在长度为  $K$  的环。
- $N$  ,  $K \leq 5000$



# 时空阵

- 求多少  $n$  个点的没有重边自环的无向图满足点 1 到  $n$  的距离恰好是  $k$
- $N \leq 100$