

图论

rushcheyo

May 1, 2021

最短路

给一张有向正权图，求 1 号点所在最小环。

$N \leq 10000, M \leq 200000$

Source: bzoj

二进制分组 $O(\log N)$ 次最短路。

二进制分组 $O(\log N)$ 次最短路。

观察一下最短路树，其实就是要走至少一条横叉边，用一次最短路算个 DP。

最小环

给一张无向正权图，求每个点所在最小环。

$$N \leq 300$$

暴力的做法是分治 Floyd。

然而无向图，直接枚举一条横叉边更新答案就行了。

取 mod 最短路

给一张无向连通图，求两个点模 k 意义下的最短路。

$$n, m \leq 10^5, k \leq 10^9$$

Source: jcvb

Farm and Factory

给定一个 N 个点, M 条边的带权无向图, 现新增一个点, 新点会向原图中若干点连边, 现在要确定连边方案, 边权为任意非负实数, 要求在满足 1、2 到每个点的最短路都不经过新点的情况下, 最小化新点到每个点的最短距离和。

$$N \leq 10^5, M \leq 3 \times 10^5$$

Source: CERC 2012

给一个 $w \times h$ 的网格，建一张图，有 n 个点 m 组边，每个点都有一个坐标，第 i 边从 p_i 出发，连向一个矩阵的所有点，边权均为 t_i 。求 1 号点出发的单源最短路。

$n \leq 70000, m \leq 150000$ ，内存限制 128MB。

Source: NOI 2019

边权最短路可以转化成点权最短路，考虑 Dijkstra 取出的点 dis 是递增的，因此每个点最多被更新一次。

现在问题变成了，每次取出并删除一个矩形中的点，强制在线。线段树套 `std::set` 就行。

最短路练习题

输入 $1 \sim n$ 的排列 p , $p_1 = n, p_n = n - 1$, 建一张图, 每个点向它左边第一个比它大的点和右边第一个比它大的点连长为 1 的无向边, m 次询问两个点之间最短路。

$$n, m \leq 10^5$$

Source: IOI 2018 集训队自选题

考虑笛卡尔树，每个点连出的两条边分别是其父亲和到根路径上第一个改变方向的点。

- 路径必然经过 LCA 到根路径上的一点。
无横叉边，显然。

那么先考虑一个点 u 走向其祖先 v 。

- u 一定是，先能跳的越高越好，下一步要跳过 v 时，要么直接沿树边到 v ，要么跳过 v 再沿树边下来。
这是因为 x 到 y 路径上的点向上都指 y ，且只有 x 有向下指的边，上下乱走无意义。

于是我们只需枚举一个中转点，算两次点到祖先即可。

首先中转点可以是 LCA，其他情况，显然必须经过由 x 或 y 跳过 LCA 的第一个点。于是就做完了。

Simple APSP Problem

给定 $W \times H$ 的网格，其中 N 个格子是障碍，计算所有 $W \times H - N$ 个非障碍点两两最短路长度和。

$$H, W \leq 10^6, N \leq 30$$

Source: AtCoder Peterzavodsk Contest 001

考虑相邻两个没有障碍的行 A, B ，两个点最短路经过中间边当且仅当一个在 A 及其上方，另一个在 B 及其下方，那么把这部分贡献算完后就可以把两行缩起来，点权改成 2。最后得到一个 $O(N)$ 行 $O(N)$ 列的网格，跑 $O(N^4)$ 暴力即可。

给一张 n 个点 m 条边的无向正边权图，询问 q 次：将边 t_j 的边权改为 x_j 后，1 到 n 的最短路。

来源：Codeforces 1163F

只用考虑删边最短路。我们任求一条 1 到 n 的最短路，然后考虑每条边的贡献，其实是对最短路上一个区间的边取 min。

Complete The Graph

给一张 n 个点 m 条边的无向正整数边权图, s 号点到 t 号点的最短路为 L 。

由于技术故障, 有些边上的边权被擦去了。你需要还原被擦去的这些边权 (重新填上一个正整数边权), 使得 s 到 t 的最短路仍为 L 。如有多解输出任意一个即可。

$n, m \leq 500000$

Source: Codeforces 715B 加强

我们把一个前缀的边赋为 x ，一个后缀的边赋为 $x + 1$ ，由于连续性一定可行。

给一个合法括号序列 S 和正整数数组 $L[], R[], P[]$, 建一张有向图图, i 往 $i-1$ 连边权 L_i 的边, 往 $i+1$ 连边权 R_i 的边, 往与其匹配的括号 j 连边权 P_i 的边。 Q 次询问两点最短路。

$$N, Q \leq 10^5$$

Source: Google Code Jam 2020 Round 2

考虑：计算从一个点出发的单源最短路并更新答案后，就可以把这个点删去。

断言：我们可以删掉两个点，使得每个连通块的大小不超过 $\frac{2}{3}n$ 。

Proof.

建出括号序列树，我们找一个大小至少是 $\frac{2}{3}n$ 的子树，如果存在儿子大小至少是 $\frac{1}{3}n$ ，那么删掉该儿子的两个括号就行；否则一定能找到一个符合条件的前缀。 \square

因此分治即可。

给一个无向连通图，每个点最多在 k 个环上，回答 q 次查询：

1. 标记点 v ;
2. 查询离 v 最近的标记点。

$n \leq 100000, m, q \leq 200000, k \leq 10$

Source: 300iq contest 3

树上的情况用点分治比较方便，那么 k 仙人掌也得用点分治。

我们任取一个生成树，考虑重心及其子树。用上一题的技巧，我们可以将横叉边都删去，那么递归下去建点分树就好。

$w \times h$ 网格（无向带权）图， q 次询问两个点最短路。

$w \times h \leq 20000, q \leq 10^5$

Source: ZJOI 2016

取短边分治。

Journey from Petersburg to Moscow

给一张 n 个点 m 条边的无向正整数边权图，对 $1 \leq k \leq n - 1$ 输出，如果一条路的长度记成其最大的 k 条边的和，1 到 n 的最短路。

$n, m \leq 3000$

Source: NEERC 2017

固定 k 。如果经过的边数不到 k ，那么答案就是 1 到 n 的直接最短路径；否则，枚举第 k 大的边权为 x ，将所有边权值改为 $\max(0, w - x)$ ，求出 $1 \sim n$ 的最短路加上 xk 更新答案即可。

有一张无向图，每条边的边权是一个一次函数
 $kx + b (k \in \{-1, 0, 1\}, |b| \leq 10^9)$ ，计数整数 x 使得 1 到 n 不存在负环，答案可能为无穷大。

$$n \leq 100, m \leq 10000$$

Source: UOJ Round #2 B

合法的 x 明显是区间。

二分 x 的最大值 x_0 ，将 $x = x_0$ 带入判断负环，如果不存在负环那合法， x 的上界只会更大；如果存在负环，考虑任取一个负环，令 k 表示其边权和前 x 的系数。

- $k = 0$ ，那么显然无解；
- $k > 0$ ，此时减小 x 这个环只会负的更多，那么 x 的上界比 x_0 大；
- $k < 0$ ，此时增大 x 这个环只会负的更多，那么 x 的上界比 x_0 小。

有一个 n 个点边带权的连通无向图，边集用 k 个集合 s_1, \dots, s_k 和 k 个整数 w_1, \dots, w_k 表示， (s_i, k_i) 表示 $\forall u \neq v \in s_i$ 有边 (u, v, k_i) ，求两两最短路之和。

$$n \leq 10^5, k \leq 18$$

这里的关键就是，把团看成点来建图求出最短路后，两个点的距离就是所在团的距离。

当然，所在团可能有很多个。我们枚举其中一个点，把剩下的团按到这个点距离排序依次加入即可。要用到高维前缀和。

最短路计数

有一个长度为 n 的，仅含小写字母的字符串。

把每个位置看作 1 个点，相邻位置之间连一条边，可以得到一条 n 个点的链；再在字符相同的位置之间连一条边，得到一张图。

现在请你对于每个 l ，求出在这张图上有多少点对之间最短路边数为 l 。

$$n \leq 10^6, |\Sigma| \leq 16$$

Source: kczno1

数轴上 n 个点，第 i 个点往 $[l_i, i]$ 内连长为 1 的无向边，每次询问 x 到 $[l, r]$ 的最短路之和。保证 $x > r$ 。

$n, q \leq 300000$

Source: PKUSC 2018

路径一定是，向右走最多一步，然后不断向左走。

此外注意到两步到达的条件，就可以倍增。

$n \leq 100$ 个点的有向图，从 1 走到 2 再走回去，最少经过多少个不同的点？

Source: WF 2006

K 短路

平面图

输出平面图，边已经极角排序，支持删边和查询连通性，强制在线。

$$n, q \leq 2 \times 10^5$$

Source: ftiasch

平面图

给一张极大平面图，求有多少种加边的方案 (不能加重边和自环)，使得加边后的图是一个三分图。

一个图被称为三分图，当且仅当存在一个方案，可以将图划分成三个点集，使得不存在任意一条边在一个点集内部。

$$5 \leq n \leq 10^5$$

Source: whzzt

有一个 $R \times C$ 的网格图，给 (r, c) 和每个点是 WASD 的字符串 S ，表示把 (r, c) 出发的这条路径染黑。 Q 次询问，问一个矩形内有多少白连通块。

$$M \leq 10^5, R, C, Q \leq 2 \times 10^5$$

Source: APIO 2017

给双联通平面图，每次查询一个环内的点数。

可以证明皮克公式。

$$n, m, q \leq 10^5$$

竞赛图

一些性质

- 缩点后是一条链
- 强连通竞赛图有哈密顿环
- pancyclic
- 怎么判竞赛图强连通？
- 怎么判竞赛图度数序列合法？
- 竞赛图哈密顿路的数量是奇数

计算 n 个点的竞赛图强连通分量数之和。

输入竞赛图，计算 K 元环个数。

$$N \leq 2000, 3 \leq K \leq 5$$

有 n 个人，每个人有 k 项属性，两个人对战只要一个人不被另一个人碾压就可能赢，问加入前 i 个人后可能获胜的球队数目。

给一张竞赛图，对每条边输出：这条边反向后的强连通分量个数。

$$N \leq 2000$$

给定 n 阶竞赛图，定义“反转”一个顶点表示将和它有关的边全部反向，现要用一系列反转操作获得一个强连通竞赛图，求最短的反转序列的长度和方案数。

$$n \leq 2000$$

竞赛图，把 $1, 2, \dots, n$ 排成一列，每次把相邻两个留下胜者，问哪些人可能赢。

$$n \leq 2000$$

一个环, a_i 是连接 i 和 $(i + 1) \bmod n$ 之间的道路的长度, 现在有 q 个运输计划, 第 i 个计划要从 s_i 运到 t_i 。每条道路只能允许走过一个方向的人。因此你要给每条道路定一个方向, 保证每个运输计划都能完成, 并在此基础上最小化总共花费的时间。

$$n, q \leq 10^5$$

连通性

给一个混合图，把有向边定向使得留下一个强连通图。

$n, m \leq 5000$

Source: UOJ 134

给个有向图，求有多少点能在原图或反向图中到达其他所有点。

$$n \leq 10^6$$

Wide Swap

有一个 $1 \sim n$ 的排列 $P_1 \sim P_N$ ，你可以执行如下操作任意多次：

选取两个下标 $i, j (1 \leq i < j \leq N)$ ，还需满足 $j - i \geq K$ 且 $|P_i - P_j| = 1$ ，然后交换 P_i 与 P_j 的值。

请问你能得到的字典序最小的排列是什么？ 请输出它。

$$1 \leq N \leq 5 \times 10^5$$

给一张有向图，保留不超过 $2n$ 条边使得强连通关系不变。

Source: NEERC 2017

给一张有向图，保留不超过 $2n$ 条边使得强连通关系不变。

Source: NEERC 2017

无向图？ 双连通？

给一个边双连通图，保留尽可能少的边，使得仍然边双连通。

$$n \leq 14$$

有向图，把所有简单环拿出来建图，边相交的环连边，求连通块数。

$$n, m \leq 10^6$$

给无向图，求有多少个点不包含在任何奇环内。

给无向图，多次查询两个点的简单路径上是否有长为奇数的路径。

$$n, m, q \leq 10^5$$

生成树

无向图，动态修改点的颜色，求不同色点间边权的最小值

$$n, m, q \leq 10^5$$

Source: USACO Open 17

We Need More Managers!

有 n 个长为 m 的 01 串，两个串连边权为 $\text{popcount}(a \text{ xor } b)$ 的边，求最小生成树。

$n \leq 200000, m \leq 20$

Source: NEERC 2017

给一棵正边权树，建一个图， u 和 v 连边权为 $\text{dis}(u, v) + A_u + A_v$ 的边，求最小生成树。

Source: AtCoder CODE FESTIVAL 2017 Final

给定一张无向连通图，多次询问删掉 k 条边之后是否连通，强制在线。

$$N \leq 10^5, M \leq 5 \times 10^5, Q \leq 50000, K \leq 15$$

Source: bzoj 3569 (Petr)

假面舞会

有 n 个面具，有 $k(k \geq 3)$ 类面具，只有戴第 i 类面具的人才能看到戴第 $i \bmod k + 1$ 类面具的人的编号。有 m 条信息，形如戴 a_i 号面具的人看到了 b_i 号面具的编号，问 k 的最小值和最大值。

Source: NOI 2008

给有向图，邻接矩阵为 A ，求最小的 k, l 使得 $\forall i \geq k, A^i = A^{i+d}$ 。

$n \leq 200, m \leq 3000$

度数与欧拉回路

混合图欧拉回路

Counting Trailing Zeros

给一张无向连通图，保留字典序最小的边集（不需要连通）使得度数为奇数的点尽可能多。

$$n, m \leq 10^5$$

Three Circuits

AGC 032C

Two Trees

两棵有根树，构造数组 X 使得两棵树每个点子树和都是 ± 1 。

Source: AGC

Source: Comet OJ

一个有 n 个点的无向图

求所有这样的点:

从它开始走, 只要当前点有一条连出去的未访问过的边就要继续走, 每次必须走一条之前没有访问过的边, 无论怎么走都会走出一条欧拉回路

$$n \leq 10^5$$

- $n \leq 10^6$ 个点 $m \leq 10^6$ 条边的无向图
- 路径是好的当且仅当它经过 $m \div 2$ 条边两次，剩下两条边一次
- 求有多少个这样的好路径，两个路径不同当且仅当经过路径的 multiset 不同

有一些区间 $[l_i, r_i]$ ，黑白染色使得覆盖每个点的黑区间和白区间数量差不超过 1.

$$n \leq 10^5$$

动态图

有向图，支持删边，单点加，查询一个点所在强连通块前 b 大的和。

$$n, m, q \leq 10^5$$

动态加边点双、边双

$2 \times n$ 网格图，支持加边删边，查桥的数量，强制在线。

$$n, q \leq 2 \times 10^5$$

Short But Scary

给定一棵 n 个点的无根树，点的编号依次为 1 到 n 。每条树边的状态都是“可用”或者“不可用”之一，一开始所有树边的状态都是“可用”。

你需要支持 2 种操作：

- 1 $u\ v$ ，将 u 点到 v 点简单路径上的所有树边的状态都进行修改，即“可用”的变成“不可用”，“不可用”的变成“可用”。
- 2 x ，查询通过当前可用的树边， x 点能到达的点数（包括 x 点本身）。

$$n, m \leq 10^5$$

二分图、匹配、最大流、最小割

最大流最小割定理

给一张图，问能否分成两棵生成树的不交并。

$n \leq 2000, m \leq 4000$

Source: UOJ Round #11 B

点仙人掌，支持修改边权、查两点最大流。

Source: Codechef

一个无向图，外面连了一圈边权 10^9 的大环，剩下边权不超过 10^5 ，求全局最小割。

$$N, M \leq 7000$$

给一张外平面图，带边权，求任意两点最小割之和。

$n \leq 200000$

Source: EC final

Exhausted?

ARC 076F

XOR Replace

每次可以把一个数变成所有数的异或和，问能否把 $a[1..n]$ 变成 $b[1..n]$ 。

$$n \leq 10^5$$

一堆数，求个排列最大化最大子段和，有 m 条限制，形如 a_i 必须在 b_i 前。

$$n \leq 50$$

Source: TopCoder

一个 DAG，拓扑序是 $1 \sim n$ ，边只有包含没有相交，边有边权，点有颜色，求一条 1 到 n 的最短路使得每个颜色的点要么全部经过要么全部不经过。

Source: TCO SemiFinal

给二分图，每侧 n 个点，求多少个点的子集存在完美匹配

$$n \leq 20$$

线图与弦图

求一个树的 2 阶线图的两两最短路之和。

$$n \leq 5 \times 10^5$$

Source: jiry_2 MUT 2019

求一个图的 k 阶线图的最大独立集。

$n, m \leq 1000, 1 \leq k \leq 9$

Source: 300iq codechef

给线图，求一个可能的原图

$$n, m \leq 10^6$$

给一棵树，随便补边，求多少种方案获得一张图，其线图为弦图。

$$n \leq 2 \times 10^5$$

给一棵树和 X ，查询：把 $[l, r]$ 拿出来，如果 $\text{dis}(u, v) \leq X$ ，就在 u, v 间连一条边，回答连通块个数。

$$n \leq 3 \times 10^5, q \leq 6 \times 10^5$$

Source: THUWC 2020