Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

A 和 B 在玩一款网络游戏；

A 能玩游戏的时间是 N 个区间，B 能玩游戏的时间是 M 个区间；

A,B 独自玩游戏时，他们每单位时间能获得 1 的经验值；

A,B 一起玩游戏时，如果他们的经验值之差不大于 C，他们将在每单位时间中额外获得 1 的经验值；

最大化 A 所能获得的经验值；

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

A 和 B 在玩一款网络游戏；

A 能玩游戏的时间是 N 个区间，B 能玩游戏的时间是 M 个区间；

A,B 独自玩游戏时，他们每单位时间能获得 1 的经验值；

A,B 一起玩游戏时，如果他们的经验值之差不大于 C，他们将在每单位时间中额外获得 1 的经验值；

最大化 A 所能获得的经验值；

$N, M \leq 2 * 10^5, C \leq 10^{18}$

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

先证明一个结论：

Lemma 1: 一定有一种最优策略，在所有能一起玩游戏的时间中，即使经验值之差大于 C，他们也会一起玩游戏；

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

先证明一个结论：

Lemma 1: 一定有一种最优策略，在所有能一起玩游戏的时间中，即使经验值之差大于 C，他们也会一起玩游戏；

反证法：考虑可能不一起玩游戏的几种情况：

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

先证明一个结论：

Lemma 1: 一定有一种最优策略，在所有能一起玩游戏的时间中，即使经验值之差大于 C，他们也会一起玩游戏；

反证法：考虑可能不一起玩游戏的几种情况：

1.A/B 经验值太高，想等一等另一个人:

可以让 A/B 在之前少一点独自玩游戏的时间，一定不会变得更劣；

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

先证明一个结论：

Lemma 1: 一定有一种最优策略，在所有能一起玩游戏的时间中，即使经验值之差大于 C，他们也会一起玩游戏；

反证法：考虑可能不一起玩游戏的几种情况：

1.A/B 经验值太高，想等一等另一个人:

可以让 A/B 在之前少一点独自玩游戏的时间，一定不会变得更劣；

2.A/B 先攒一点经验，以便后面一起玩：

把另一个人后面独自游戏的时间提前不会更劣；

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

先证明一个结论：

Lemma 1: 一定有一种最优策略，在所有能一起玩游戏的时间中，即使经验值之差大于 C，他们也会一起玩游戏；

反证法：考虑可能不一起玩游戏的几种情况：

1.A/B 经验值太高，想等一等另一个人:

可以让 A/B 在之前少一点独自玩游戏的时间，一定不会变得更劣；

2.A/B 先攒一点经验，以便后面一起玩：

把另一个人后面独自游戏的时间提前不会更劣；

3.A 已经远超了 B:

B 玩不玩已经无所谓了；

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

接下来考虑一个函数 $y = f(x)$:
x 为 $Score_A - Score_B$, $f(x)$ 为 $max(Score_A)$

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

接下来考虑一个函数 $y = f(x)$:
x 为 $Score_A - Score_B$, $f(x)$ 为 $max(Score_A)$
我们按时刻维护这个函数，会有 3 种修改操作：

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

接下来考虑一个函数 $y = f(x)$:
x 为 $Score_A - Score_B$, $f(x)$ 为 $max(Score_A)$
我们按时刻维护这个函数，会有 3 种修改操作：
1. 当前时段只有 A 能玩游戏，时长为 X：
相当于用原函数的图像和线段 $(0,0)-(X,X)$ 做闵科夫斯基和，把得到的结果的上边界作为新的函数；

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

接下来考虑一个函数 $y = f(x)$:
x 为 $Score_A - Score_B$, $f(x)$ 为 $max(Score_A)$
我们按时刻维护这个函数，会有 3 种修改操作：
1. 当前时段只有 A 能玩游戏，时长为 X：
相当于用原函数的图像和线段 $(0,0)-(X,X)$ 做闵科夫斯基和，把得到的结果的上边界作为新的函数；
2. 当前时段只有 B 能玩游戏，时长为 X：
相当于用原函数的图像和线段 $(0,0)-(-X,0)$ 做闵科夫斯基和，把得到的结果的上边界作为新的函数；

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

接下来考虑一个函数 $y = f(x)$:

x 为 $Score_A - Score_B$, $f(x)$ 为 $max(Score_A)$

我们按时刻维护这个函数，会有 3 种修改操作：

1. 当前时段只有 A 能玩游戏，时长为 X：

相当于用原函数的图像和线段 $(0,0)-(X,X)$ 做闵科夫斯基和，把得到的结果的上边界作为新的函数；

2. 当前时段只有 B 能玩游戏，时长为 X：

相当于用原函数的图像和线段 $(0,0)-(-X,0)$ 做闵科夫斯基和，把得到的结果的上边界作为新的函数；

2. 当前时段 A,B 都能玩游戏，时长为 X：

相当于用在 $[-C,C]$ 区间上的 $y = y + 2*X$，其他位置 $y = y + X$;

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

如果只有操作 1 和操作 2，不难发现 $y(x)$ 是单调增的;

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

如果只有操作 1 和操作 2，不难发现 $y(x)$ 是单调增的;
且对于相邻的两个 x，函数的变化量要么是 $(+1, +1)$，要么是 $(+1, +0)$

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

如果只有操作 1 和操作 2，不难发现 $y(x)$ 是单调增的;

且对于相邻的两个 x，函数的变化量要么是 $(+1, +1)$，要么是 $(+1, +0)$

这有什么好处呢？

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

如果只有操作 1 和操作 2，不难发现 $y(x)$ 是单调增的;
且对于相邻的两个 x，函数的变化量要么是 $(+1,+1)$，要么是 $(+1,+0)$
这有什么好处呢？
每次做闵可夫斯基和的时候，最多多出 $O(1)$ 段函数；
所以就可以比较方便的维护这个函数；

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

如果只有操作 1 和操作 2，不难发现 $y(x)$ 是单调增的;

且对于相邻的两个 x，函数的变化量要么是 $(+1,+1)$，要么是 $(+1,+0)$

这有什么好处呢？

每次做闵可夫斯基和的时候，最多多出 $O(1)$ 段函数；

所以就可以比较方便的维护这个函数；

但操作 3 可能会打破这个规律，在 $x=\pm C$ 的时候不再满足；

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

如果只有操作 1 和操作 2，不难发现 $y(x)$ 是单调增的;

且对于相邻的两个 x，函数的变化量要么是 $(+1,+1)$，要么是 $(+1,+0)$

这有什么好处呢？

每次做闵可夫斯基和的时候，最多多出 $O(1)$ 段函数;

所以就可以比较方便的维护这个函数;

但操作 3 可能会打破这个规律，在 $x=\pm C$ 的时候不再满足;

所以我们想修改函数的定义，使最优解的答案的位置和值不变而满足之前的性质;

然后还要先证明一个比较重要的结论:

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

然后还要先证明一个比较重要的结论:

Lemma 2: 如果函数上存在两个点 x_1, x_2，满足 $C \leq x_1 < x_2$ 且 $y(x_1) > y(x_2)$，那么 $y(x_2)$ 不可能成为最优解。

换句话说，在差值已经 $> C$ 的情况下，如果差值更大而分数变小，则差值更大的不可能成为最优解。

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

然后还要先证明一个比较重要的结论:

Lemma 2: 如果函数上存在两个点 x_1, x_2，满足 $C \le x_1 < x_2$ 且 $y(x_1) > y(x_2)$，那么 $y(x_2)$ 不可能成为最优解。

换句话说，在差值已经 $> C$ 的情况下，如果差值更大而分数变小，则差值更大的不可能成为最优解。

证明比较显然，就差值小的只要和差值大的一起做同样的操作就行;

在差值大的只有 B 在玩游戏时适当调整自己, 差值小就可以永远比差值大的优;

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

然后还要先证明一个比较重要的结论:

Lemma 2: 如果函数上存在两个点 x_1, x_2，满足 $C \le x_1 < x_2$ 且 $y(x_1) > y(x_2)$，那么 $y(x_2)$ 不可能成为最优解。

换句话说，在差值已经 $> C$ 的情况下，如果差值更大而分数变小，则差值更大的不可能成为最优解。

证明比较显然，就差值小的只要和差值大的一起做同样的操作就行；

在差值大的只有 B 在玩游戏时适当调整自己, 差值小就可以永远比差值大的优；

同样的，在差值小于 $-C$ 时也有相似的结论：

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

然后还要先证明一个比较重要的结论:

Lemma 2: 如果函数上存在两个点 x_1, x_2，满足 $C \leq x_1 < x_2$ 且 $y(x_1) > y(x_2)$，那么 $y(x_2)$ 不可能成为最优解。

换句话说，在差值已经 $> C$ 的情况下，如果差值更大而分数变小，则差值更大的不可能成为最优解。

证明比较显然，就差值小的只要和差值大的一起做同样的操作就行；

在差值大的只有 B 在玩游戏时适当调整自己, 差值小就可以永远比差值大的优；

同样的，在差值小于 $-C$ 时也有相似的结论：

Lemma 3: 如果函数上存在两个点 x_1, x_2，满足 $x_2 < x_1 \leq C$ 且 $y(x_1) > y(x_2) + (x_1 - x_2)$，那么 $y(x_2)$ 不可能成为最优解。

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

所以对于原函数，在每次操作后进行以下两个操作都不会改变最优解：

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

所以对于原函数，在每次操作后进行以下两个操作都不会改变最优解：

1. 对区间 $[C, +\infty)$ 中的所有 $y(x)$ 对 $y(C)$ 取 max；
2. 对区间 $(-\infty, -C]$ 中的所有 $y(x)$ 对 $y(-C) - (-C - x)$，取 max；

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

所以对于原函数，在每次操作后进行以下两个操作都不会改变最优解：

1. 对区间 $[C, +\infty)$ 中的所有 $y(x)$ 对 $y(C)$ 取 max；
2. 对区间 $(-\infty, -C]$ 中的所有 $y(x)$ 对 $y(-C) - (-C - x)$，取 max；

这样在 $\pm C$ 时函数就满足之前的条件了；

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

由于每次操作之后，整个函数最多被多分出 $O(1)$ 段，所以函数的总段数不会超过 $O(N+M)$；

且每次取 max 操作后被每一侧更新的区间一定只有一段；

Problem1:[CF856F]To Play or not to Play

由于每次操作之后，整个函数最多被多分出 $O(1)$ 段，所以函数的总段数不会超过 $O(N+M)$；

且每次取 max 操作后被每一侧更新的区间一定只有一段；

随便用一个数据结构，（Splay 之类的），维护一下就好了。

$O((N+M)\log(N+M))$