

Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)

---

Présentée et soutenue par :

Sébastien ROCHE

le jeudi 19 décembre 2013

Titre :

Méthodes de poursuite de phase pour signaux GNSS multifréquence en environnement dégradé

---

École doctorale et discipline ou spécialité :

ED MITT : Signal, image, acoustique et optimisation

Unité de recherche :

Équipe d'accueil ISAE-ONERA SCANR

Directeur(s) de Thèse :

M. Olivier BESSON (directeur de thèse)  
Mme Stéphanie BIDON (co-directrice de thèse)

Jury :

Mme Sylvie MARCOS - Présidente

M. Lionel FILLATRE - Rapporteur

M. Emmanuel DUFLOS - Rapporteur

M. Lionel RIES - Examinateur

M. Olivier BESSON - Directeur de thèse

Mme Stéphanie BIDON - Co-directrice de thèse



# Remerciements

Je remercie tout d'abord les rapporteurs de cette thèse M. Lionel FILLATRE et M. Emmanuel DUFLOS pour la lecture du manuscrit et tout l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Je tiens également à exprimer ma gratitude à Mme Sylvie MARCOS pour avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Cette thèse est le résultat d'un co-financement CNES et Thales Alenia Space. Je remercie donc M. Lionel RIES (Ingénieur CNES) ainsi que M. Michel MONNERAT (Ingénieur Thales Alenia Space) de m'avoir donné l'opportunité de réaliser cette thèse, ainsi que pour leurs expertises dans les systèmes GNSS.

Je veux également remercier M. Olivier BESSON et Mme Stéphanie BIDON qui ont été mes encadrants ISAE. Je tiens particulièrement à remercier Stéphanie pour m'avoir continuellement suivi et orienté durant mes trois années de thèse. Les connaissances techniques et la rigueur de travail qu'elle a su me transmettre sont sans aucun doute les principaux facteurs de l'accomplissement de cette thèse. Je lui exprime donc toute ma gratitude pour m'avoir si bien encadré durant ces trois ans.

Je remercie également le TéSA et son personnel pour leurs disponibilités et leurs réactivités lors de la mise en place de mes missions et de ma soutenance de thèse.

Je n'oublie bien évidemment pas de remercier l'ensemble du personnel du laboratoire (Stéphanie, Valérie, Gilles, Joël, Matthieu, Guillaume, François, Romain, Olivier, Yves), mes collègues de bureau, stagiaires et post-doctorants de l'ENSICA (Francoo, Jpeg, Fred, Txema, Anaïs, Wang, Francisco, Alain, Nabil, Aurélien), les doctorants et post-doctorants GNSS de l'ENAC et Supaéro (Paulo, Syed, Aude, Leslie, Myriam, Lina, Amany, Philipe, Seb, Jérôme) pour la bonne ambiance au labo, les repas de Noël, les séances philosophiques de Fred, les démonstrations de Goluéra, la chasse au lapin, les séances de foot, les multiples récits d'échecs amoureux, les boufes entrez thésards, la chasse aux muffins, les concerts de rock/country à Nashville, les séances de jeu sur smartphone en conférences, le tour de pé-dalo sur le Danube, les dégustations de glaces et pâtisseries Viennoises, la promenade de l'oranger en pot, et plein d'autres moments qui resteront les meilleurs souvenirs de ma thèse. Je tiens également à remercier mes amis (Michaël, Marie, Didi, Géraldine, Remy, Karine, Papi) pour avoir su me remonter le moral dans les moments de doutes.

Enfin, je tiens à terminer en remerciant mes parents qui, par leur soutien, leurs encouragements et leurs sacrifices m'ont permis d'arriver aussi loin et d'obtenir mon doctorat.



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>viii</b>
<b>Table des figures</b>	<b>xiii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction à la navigation par satellites</b>	<b>5</b>
1.1 Présentation des systèmes GNSS . . . . .	6
1.1.1 Le système GPS . . . . .	6
1.1.2 Le système Galileo . . . . .	7
1.1.3 Structure des signaux GPS et Galileo . . . . .	9
1.1.4 La localisation par satellites . . . . .	14
1.1.4.1 Principe de la trilateration . . . . .	14
1.1.4.2 Erreurs et précision intrinsèques du système . . . . .	15
1.2 Réception du signal GNSS . . . . .	16
1.2.1 Description des signaux à la réception . . . . .	16
1.2.1.1 Puissance des signaux à la réception . . . . .	16
1.2.1.2 L'effet Doppler . . . . .	17
1.2.1.3 Perturbations lors de la propagation et de la réception . . . . .	19
1.2.2 Principe de corrélation . . . . .	21
1.2.3 Opérations réalisées par le récepteur GNSS . . . . .	22
1.3 Acquisition du signal GNSS . . . . .	22
1.3.1 Principe de l'acquisition . . . . .	23
1.3.2 Exemples d'acquisition . . . . .	24
1.4 Poursuite du signal GNSS . . . . .	25
1.4.1 Poursuite et observation du retard sur le code . . . . .	25
1.4.2 Poursuite et observation de la phase porteuse . . . . .	28
1.4.3 Poursuite de la fréquence Doppler . . . . .	29
1.5 Calcul de la position utilisateur . . . . .	30
1.6 Bilan . . . . .	31
<b>2 Poursuite de la phase porteuse</b>	<b>33</b>
2.1 Comment suivre la phase porteuse ? . . . . .	34
2.2 Poursuite de phase par boucle à verrouillage . . . . .	35

2.2.1	Structure générale d'une PLL . . . . .	35
2.2.2	Modèle linéaire et analogique de la PLL . . . . .	37
2.2.2.1	Définition de la bande de boucle . . . . .	39
2.2.2.2	Dimensionnement du filtre de boucle . . . . .	39
2.2.2.3	Réponses des boucles . . . . .	43
2.2.3	Boucles à verrouillage de phase numériques . . . . .	45
2.2.3.1	Transformation analogique/numérique . . . . .	46
2.2.3.2	Calcul des coefficients numériques du filtre de boucle . . . . .	48
2.2.4	Comportement en présence de bruit . . . . .	50
2.2.5	Limite du modèle linéaire . . . . .	53
2.2.5.1	Le phénomène de saut de cycle . . . . .	53
2.2.5.2	Développement de phase au sein de la DPLL . . . . .	56
2.3	Poursuite de phase d'un signal multifréquence . . . . .	62
2.3.1	Proportionnalités des phases Doppler . . . . .	62
2.3.2	Déphasage dus aux effets atmosphériques . . . . .	63
2.3.2.1	Les effets ionosphériques . . . . .	63
2.3.2.2	Les effets troposphériques . . . . .	64
2.3.3	Les structures de poursuite de phase multifréquence . . . . .	65
2.4	Bilan . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Systèmes de développement de phase monofréquence pour DPLL</b>	<b>71</b>
3.1	Développement de phase par prédiction de la sortie du discriminateur . . . . .	72
3.1.1	Développement de phase par prédiction polynomiale . . . . .	72
3.1.2	Prédiction de la sortie du discriminateur par analyse des observations de ce dernier via les moindres carrés récursifs pondérés . . . . .	75
3.1.2.1	Modèle d'analyse de la sortie de discriminateur . . . . .	75
3.1.2.2	Prédiction et pré-compensation de la sortie discriminateur . . . . .	76
3.1.2.3	Exemples de poursuite . . . . .	77
3.1.3	Prédiction de la sortie du discriminateur par analyse de la sortie du filtre de boucle via les moindres carrés récursifs pondérés . . . . .	79
3.1.3.1	Modèle d'analyse de la sortie du filtre de boucle . . . . .	80
3.1.3.2	Algorithme itératif de prédiction et pré-compensation . . . . .	80
3.1.3.3	Étape de conversion fréquence/phase . . . . .	82
3.1.3.4	Exemples de poursuite . . . . .	83
3.2	Simulations numériques . . . . .	83
3.2.1	Modèle de génération du signal . . . . .	84
3.2.2	Métriques de performance . . . . .	85
3.2.3	Performances en présence de bruit . . . . .	87
3.2.3.1	Scénario 1 . . . . .	87
3.2.3.2	Scénario 2 . . . . .	91
3.3	Conclusion . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Structure de DPLL avec système de développement de phase multifréquence</b>	<b>93</b>
4.1	Nouvelles structures de boucle de phase multifréquence . . . . .	94
4.1.1	Comment utiliser la diversité en fréquence ? . . . . .	94
4.1.2	Structure de boucle multifréquence fusionnant les sorties de filtre (Méthode d'estimation centralisée) . . . . .	95
4.1.2.1	Structure globale de la boucle . . . . .	96

4.1.2.2	Algorithme de fusion des données : modification de l'algorithme WRLS . . . . .	96
4.1.2.3	Exemples de poursuite . . . . .	99
4.1.3	Structure de boucle multifréquence fusionnant les coefficients polynomiaux (Méthode d'estimation décentralisée) . . . . .	99
4.1.3.1	Structure globale de la boucle . . . . .	100
4.1.3.2	Algorithme de fusion des données . . . . .	100
4.1.3.3	Exemples de poursuite . . . . .	102
4.2	Simulations numériques . . . . .	102
4.2.1	Modèle de génération du signal . . . . .	102
4.2.2	Performances en présence de bruit . . . . .	104
4.3	Conclusion . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Poursuite de phase bifréquence par filtrage Bayésien variationnel</b>	<b>111</b>
5.1	Modèle d'analyse du signal . . . . .	112
5.2	Discriminateur de phase bifréquence : estimateur MML . . . . .	113
5.3	Poursuite de phase par filtrage RVB . . . . .	114
5.3.1	Poursuite de phase par approche Bayésienne . . . . .	115
5.3.2	Filtrage et estimateur RVB . . . . .	116
5.3.2.1	Principe de l'approximation variationnelle . . . . .	116
5.3.2.2	Filtrage Bayésien variationnel restreint . . . . .	117
5.3.2.3	Estimateur RVB . . . . .	119
5.3.3	Structure globale de la poursuite de phase . . . . .	120
5.3.4	Exemples de poursuite . . . . .	120
5.4	Performances du filtrage RVB . . . . .	121
5.4.1	Performances intrinsèques de la poursuite de phase RVB . . . . .	121
5.4.2	Comparaisons avec les DPLL multifréquence . . . . .	123
5.5	Conclusion . . . . .	128
<b>Conclusion</b>		<b>131</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>135</b>
<b>Acronymes</b>		<b>143</b>
<b>Notations</b>		<b>145</b>
<b>A</b>	<b>Détail des calculs de l'étape de conversion de la prédiction de sortie du filtre de boucle en prédiction de sortie du discriminateur</b>	<b>149</b>
A.1	Estimation de la dynamique de phase grâce à la connaissance des coefficients polynomiaux du modèle d'analyse de la sortie du filtre de boucle . . . . .	149
A.2	Modélisation mathématique de l'étape de corrélation . . . . .	150
A.3	Calcul des transformées inverses . . . . .	152
A.3.1	Réponse à un échelon . . . . .	153
A.3.2	Réponse à une rampe . . . . .	154
A.3.3	Réponse à une accélération . . . . .	155
A.4	Validation des expressions de sortie du discriminateur . . . . .	156

<b>B Détails de l'estimation des coefficients polynomiaux par l'algorithme des moindres carrés récursifs pondérés dans le cas d'une estimation multifréquence centralisée</b>	<b>157</b>
B.1 Lemmes d'inversion matricielle . . . . .	157
B.2 Forme récursive de l'algorithme WRRLS dans le cas d'une estimation par la méthode centralisée . . . . .	158
<b>C Etude de la distribution a posteriori <math>\tilde{f}(\phi_k   s_k)</math></b>	<b>163</b>
<b>D Expression de l'estimateur RVB <math>\hat{\phi}_k^{rvb}</math></b>	<b>167</b>
D.1 Expression de $\hat{\phi}_k^{rvb}$ pour $k = 1$ . . . . .	167
D.2 Expression de $\hat{\phi}_k^{rvb}$ pour $k > 1$ . . . . .	168

# Table des figures

1.1	Principe de fonctionnement du GPS . . . . .	6
1.2	Répartition des stations sol GPS . . . . .	7
1.3	Répartition des fréquences GPS et Galileo . . . . .	9
1.4	Structure des signaux GPS et Galileo . . . . .	10
1.5	Fonction d'autocorrélation du code de Gold n° 1 . . . . .	12
1.6	Fonction d'intercorrélation des codes de Gold n° 1 et n° 2 . . . . .	12
1.7	Densités spectrales de puissance du code C/A, du code P et du code $E_6$ . . . . .	13
1.8	Occupation de la bande spectrale $L_1 - E_1$ par les signaux GPS et Galileo . . . . .	14
1.9	Positionnement par trilateration . . . . .	15
1.10	Effet de la configuration géométrique des satellites sur la précision de la mesure de position . . . . .	16
1.11	Principe de l'effet Doppler . . . . .	18
1.12	Géométrie de la dynamique satellite/utilisateur . . . . .	18
1.13	Effet Doppler sur la fréquence porteuse et les codes PRN . . . . .	19
1.14	Illustration du phénomène de multitrajet . . . . .	20
1.15	Schéma bloc des opérations réalisées par le récepteur . . . . .	23
1.16	Exemples de résultats d'acquisition . . . . .	24
1.17	Schéma bloc de l'étape de poursuite . . . . .	25
1.18	Principe de l'estimation du décalage sur le code pseudo-aléatoire . . . . .	26
1.19	Exemple de structure de poursuite du retard sur le code . . . . .	27
1.20	Points de corrélation Early, Late et Prompt . . . . .	27
1.21	Illustration du problème d'ambiguïté entière lors de l'estimation de phase . . . . .	29
1.22	Pré-compensation Doppler sur le code . . . . .	30
1.23	Fonctionnement du positionnement précis par PPP ou RTK . . . . .	32
2.1	Structure des systèmes de poursuite scalaire . . . . .	34
2.2	Structure des systèmes de poursuite vectorielle . . . . .	35
2.3	Structure conventionnelle d'une PLL . . . . .	36
2.4	Caractéristiques de discriminateurs de phase (cf. tableau 2.1 pour les notations des discriminateurs) . . . . .	38
2.5	Modèle linéaire d'une PLL . . . . .	38
2.6	Structure du modèle linéaire d'une PLL analogique d'ordre 1 . . . . .	40
2.7	Positionnement du pôle dans le plan complexe pour une PLL analogique d'ordre 1 . . . . .	40
2.8	Structure du modèle linéaire d'une PLL analogique d'ordre 2 . . . . .	42

2.9	Positionnement des pôles dans le plan complexe pour une PLL analogique d'ordre 2 . . . . .	42
2.10	Structure du modèle linéaire d'une PLL analogique d'ordre 3 . . . . .	43
2.11	Positionnement des pôles dans le plan complexe pour une PLL analogique d'ordre 3 . . . . .	44
2.12	Réponses des PLL d'ordre 1, 2 et 3 à des dynamiques de type échelon, rampe et accélération . . . . .	45
2.13	Influence de la bande de boucle sur le temps de convergence et l'erreur en régime permanent des réponses à un échelon et à une rampe pour une boucle d'ordre 1 . . . . .	46
2.14	Correspondance du plan stable des $p$ et du cercle unité des $z$ pour la transformée bilinéaire . . . . .	47
2.15	Erreur commise sur la valeur de la bande de boucle pour une DPLL d'ordre 1 lors de l'approximation analogique . . . . .	48
2.16	Ecarts entre les valeurs des coefficients analogiques et numériques pour une DPLL d'ordre 1 et d'ordre 2 . . . . .	49
2.17	Ratio entre l'erreur en régime permanent analogique et l'erreur en régime permanent numérique pour une boucle d'ordre 2 . . . . .	51
2.18	Répartition du bruit en sortie de boucle représentée à la figure 2.5 . . . . .	52
2.19	Répartition du bruit en sortie d'une DPLL opérant en régime linéaire avec un discriminateur <i>Arctangent</i> . . . . .	52
2.20	Densités de probabilité du bruit de phase en sortie de DPLL pour diverses valeurs de bande de boucle . . . . .	53
2.21	Points d'équilibres stables et instables d'une DPLL d'ordre 1 . . . . .	55
2.22	Illustration d'un saut de cycle lors d'une poursuite de phase . . . . .	55
2.23	Distribution de l'erreur d'estimation de phase en sortie de DPLL en présence de sauts de cycle . . . . .	56
2.24	Structure de DPLL munie d'un bloc de développement de phase en sortie de discriminateur . . . . .	57
2.25	Illustration du fonctionnement du système de développement de phase en sortie du discriminateur lors d'une poursuite non bruitée . . . . .	58
2.26	Illustration du manque de robustesse au bruit de la DPLL munie d'un système à développement de phase basé sur des techniques de détection de saut de cycle par seuillage . . . . .	59
2.27	Structure du bloc de développement de phase muni d'un gain correctif $K$ . .	59
2.28	Réponse impulsionale et fréquentielle de bloc de développement de phase en fonction du gain $K$ . . . . .	60
2.29	Structure finale du bloc de développement de phase . . . . .	60
2.30	Influence du paramètre $K$ sur le comportement en régime bruité du bloc de développement de phase en sortie du discriminateur . . . . .	61
2.31	Illustration de l'instabilité en régime bruité du bloc de développement de phase en sortie du discriminateur . . . . .	62
2.32	Poursuite de phase bifréquence par PLL par assistance de phase . . . . .	66
2.33	Observations de la sortie du discriminateur et des voies I et Q du produit de corrélation pour une DPLL bifréquence assistée en phase en présence de retard ionosphérique . . . . .	67
2.34	Poursuite de phase bifréquence par PLL assistée en fréquence . . . . .	67

2.35 Observations de la sortie du discriminateur et des voies I et Q du produit de corrélation pour une DPLL bifréquence assistée en fréquence en présence de retard ionosphérique . . . . .	68
3.1 Schéma bloc de la méthode de développement de phase par prédiction et pré-compensation de phase . . . . .	74
3.2 Structure de DPLL munie d'un système de développement de phase analysant les sorties de discriminateur . . . . .	75
3.3 Illustration du fonctionnement du système de prédiction et pré-compensation de la sortie du discriminateur par analyse des observations du discriminateur pour une dynamique de phase constante . . . . .	79
3.4 Illustration du fonctionnement du système de prédiction et pré-compensation de la sortie du discriminateur par analyse des observations du discriminateur pour une dynamique de phase sinusoïdale . . . . .	80
3.5 Structure de DPLL munie d'un système de développement de phase analysant les sorties de filtre de boucle . . . . .	81
3.6 Illustration du fonctionnement du système de prédiction et pré-compensation de la sortie du discriminateur par analyse des observations des sorties du filtre de boucle pour une dynamique de phase constante . . . . .	84
3.7 Illustration du fonctionnement du système de prédiction et pré-compensation de la sortie du discriminateur par analyse des observations des sorties du filtre de boucle pour une dynamique de phase sinusoïdale . . . . .	85
3.8 Exemple schématique de deux poursuites dont les temps de sauts de cycle sont inférieur ou supérieur à $T_{critique}$ . . . . .	86
3.9 Performances en termes de décrochage des DPLL en fonction du $C/N_0$ pour une dynamique de phase de 2 Hz+0.5 Hz/s . . . . .	88
3.10 Distributions des erreurs d'estimation sur l'ensemble de la poursuite pour le niveau de bruit $C/N_0 = 23$ dBHz pour une dynamique de phase de 2 Hz+0.5 Hz/s . . . . .	89
3.11 Performances en termes de sauts de cycle des DPLL en fonction du $C/N_0$ pour une dynamique de phase de 2 Hz+0.5 Hz/s . . . . .	90
3.12 Performances en termes de décrochage des DPLL en fonction du $C/N_0$ pour une dynamique de phase de 3 Hz+1 Hz/s . . . . .	92
4.1 Fonctionnement schématique des méthodes d'estimation centralisée et décentralisée des coefficients polynomiaux lors d'une poursuite de phase multifréquence . . . . .	95
4.2 Structure de la boucle multifréquence dont le système de développement de phase analyse les sorties de filtre par la méthode d'estimation centralisée . .	96
4.3 Exemple de poursuite de phase multifréquence dans le cas de la méthode d'estimation centralisée des coefficients polynomiaux du modèle d'analyse .	100
4.4 Structure de la boucle multifréquence dont le système de développement de phase analyse les sorties de filtre par la méthode d'estimation décentralisée .	101
4.5 Exemple de poursuite de phase multifréquence dans le cas de la méthode d'estimation décentralisée des coefficients polynomiaux du modèle d'analyse .	103
4.6 Performances en termes de décrochage pour une poursuite bifréquence lorsque les deux porteuses ont un même niveau de puissance à la réception . . . .	105
4.7 Performances en termes de sauts de cycle pour une poursuite bifréquence lorsque les deux porteuses ont un même niveau de puissance à la réception .	106

4.8	Distribution des erreurs de poursuite au cours du temps pour des poursuites mono et multifréquence pour $C/N_0 = 23$ dBHz . . . . .	107
4.9	Performances en termes de décrochage pour une poursuite bifréquence lorsque les deux porteuses ont un niveau de puissance différent à la réception (la porteuse la plus puissante est la porteuse $L_1$ ) . . . . .	109
4.10	Performances en termes de sauts de cycle pour une poursuite bifréquence lorsque les deux porteuses ont un niveau de puissance différent à la réception (la porteuse la plus puissante est la porteuse $L_1$ ). De par la différence de puissance des porteuses, les performances des deux porteuses sont observées sur différentes plages de $C/N_0$ . . . . .	110
5.1	Cadre d'étude du signal bifréquence en vue de réaliser une poursuite de phase par filtrage Bayésien . . . . .	112
5.2	Densité de probabilité de l'estimateur MML pour différents cas (les paramètres de référence sont $r = 1.28$ , $\phi_k = 0.5\pi/\bar{r}$ (rad), $\rho = 1$ , $SNR = 0dB$ ) : (a) le $SNR$ varie, (b) $\rho$ varie, (c) $\phi_k$ varie, (d) $r$ varie avec $\phi_k = 0$ . . . . .	115
5.3	Processus de filtrage Bayésien lors d'une approche variationnelle locale . . . . .	118
5.4	Processus de filtrage RVB . . . . .	119
5.5	Structure schématique de la méthode de poursuite de phase par filtrage RVB	120
5.6	Comparaison des estimateurs MML et RVB lors d'une poursuite de phase bifréquence de type rampe . . . . .	121
5.7	Influence du paramètre $\sigma_\phi^2$ lors de la poursuite d'un échelon de phase ( $\pi/(2\bar{r})$ rad) pour les trois cas suivants : Cas 1 : $SNR = 5$ dB, $\rho = 1$ , $r \simeq 1.28$ . Cas 2 : $SNR = 0$ dB, $\rho = 1$ , $r \simeq 1.28$ . Cas 3 : $SNR = 5$ dB, $\rho = 0.8$ , $r \simeq 1.28$ . . . . .	122
5.8	RMSE-mod des poursuites RVB et des poursuites multifréquence centralisées pour la poursuite d'un échelon de $\pi/4$ rad . . . . .	124
5.9	Performances de la poursuite RVB et de la poursuite multifréquence centralisée en termes de décrochage et de sauts de cycle pour la poursuite d'un échelon de $\pi/4$ rad . . . . .	125
5.10	RMSE-mod des poursuites RVB et des poursuites multifréquence centralisées pour une poursuite de rampe de 3 Hz . . . . .	126
5.11	Performances de la poursuite RVB et de la poursuite multifréquence centralisée en termes de décrochage et de sauts de cycle pour une poursuite de rampe de 2 Hz . . . . .	127
5.12	Performances de la poursuite RVB et de la poursuite multifréquence centralisée en termes de décrochage et de sauts de cycle pour une poursuite de rampe de 3 Hz . . . . .	128
5.13	Performances de la poursuite RVB et de la poursuite multifréquence centralisée en termes de décrochage pour une dynamique de 3 Hz+1 Hz/s . . . . .	129
5.14	Exemples de poursuites réalisées par la méthode RVB pour une dynamique de phase de 3 Hz+1 Hz/s et pour $C/N_0 = 24$ dBHz . . . . .	130
A.1	Modélisation de l'étape de corrélation pour une étude linéaire de la DPLL .	150
A.2	Validation des calculs théoriques de sortie du discriminateur pour une DPLL d'ordre 2 . . . . .	156

---

C.1	Allure de la fonction de distribution $\tilde{f}(\phi_k   \mathbf{s}_k)$ ( <b>en rouge</b> ), de sa composante périodique ( <b>en vert</b> ) et de sa composante Gaussienne ( <b>en bleu</b> ). (a) Exemple relatif au cas 1)a) où la fonction est unimodale ( $a_k \leq 1$ et $\hat{\phi}_{k-1}^{rvb} \neq \hat{\phi}_k^{mml} \bmod(\pi/\bar{r})$ ). (b) Exemple relatif au cas 2)a) où la fonction est unimodale ( $a_k > 1$ et $\hat{\phi}_{k-1}^{rvb} \neq \hat{\phi}_k^{mml} \pm \bar{r}^{-1} [\sqrt{a_k^2 - 1} + \arccos(-a_k^{-1})] \bmod(2\pi/\bar{r})$ ) . . . . .	164
C.2	Tableau de variation de la fonction $s(\phi_k)$ dans le cas où $a_k > 1$ et avec pour notation $\hat{\phi}_{k,p}^{mml} = \hat{\phi}_k^{mml} + 2\pi/\bar{r}p$ . La ligne horizontale $s(\phi_k) = 0$ est représentée pour le cas particulier $s(\theta_0) \neq 0 \bmod(2\pi/\bar{r})$ et $s(\Theta_0) \neq 0 \bmod(2\pi/\bar{r})$ . . . . .	166



# Liste des tableaux

1.1	Expressions des densités spectrales des modulations BOC . . . . .	14
1.2	Puissances minimales de réception des signaux GPS et Galileo . . . . .	17
2.1	Expressions des discriminateurs de phase pour PLL . . . . .	37
2.2	Expressions classiques des coefficients du filtre de boucle en fonction de la bande de boucle pour des PLL d'ordre 1, 2 et 3 . . . . .	40
2.3	Expressions des erreurs en régime permanent pour des PLL analogiques d'ordre 1, 2 et 3 . . . . .	45
2.4	Expressions des erreurs en régime permanent pour des PLL numériques d'ordre 1, 2 et 3 . . . . .	50



# Introduction

## CONTEXTE

L'histoire de la navigation par satellites a commencé dans les années 70 avec le développement du système américain GPS (*Global Positioning System*) et a considérablement évolué jusqu'à nos jours avec l'apparition et le développement d'autres systèmes de positionnement, comme par exemple le système russe GLONASS (*GLObal NAVigation Satellite System*) ou le futur système européen Galileo. L'ensemble de ces systèmes de navigation permet à un utilisateur muni d'un récepteur de calculer sa position à tout endroit de la Terre. En effet, si ce dernier est capable d'estimer la distance qui le sépare d'un nombre minimum de satellites, il lui est alors possible de déterminer sa position. Ce mode de positionnement repose sur le principe de trilateration et l'utilisation de signaux datés émis par les multiples satellites de navigation.

La distance entre un satellite et l'utilisateur est mesurée grâce au temps de propagation nécessaire pour que le signal émis par le satellite soit reçu au niveau du récepteur. Pour déterminer ce temps de propagation, le récepteur compare le signal reçu avec une réplique locale qu'il va lui-même créer. Au cours du temps, l'estimation du délai de propagation va être réalisée par des algorithmes de poursuite afin de suivre l'évolution de ce dernier liée aux mouvements relatifs entre l'utilisateur et le satellite.

Actuellement, la technique la plus couramment utilisée pour estimer ce temps de propagation consiste à mesurer le décalage temporel au niveau d'un code binaire contenu dans le signal de navigation. Cette technique d'estimation de distance offre à l'utilisateur une précision de positionnement de l'ordre d'une dizaine de mètres ainsi qu'une bonne robustesse du service en environnement dégradé. Les estimations fournies par ce procédé sont par la suite utilisées par des algorithmes de positionnement dits "standards" implémentés dans la plupart des récepteurs grand public. Il est également possible d'estimer le temps de propagation par l'estimation des rotations de phase sur les porteuses des signaux de navigation. Théoriquement, l'estimation de la phase porteuse permet d'avoir une précision d'estimation de la distance satellite/utilisateur de l'ordre de la longueur d'onde, soit une précision décimétrique. On comprend alors pourquoi les algorithmes de positionnement dits "précis" utilisent des informations de phase en sus des informations de retard sur le code pour calculer la position de l'utilisateur.

## PROBLEMATIQUE ET OBJECTIF

L'implémentation d'algorithmes de positionnement précis au sein de récepteurs grand public est actuellement un des principaux défis de la navigation par satellites. En effet, les applications GNSS ont des demandes de plus en plus fortes en termes de précision du positionnement de l'utilisateur, et ce quel que soit l'environnement dans lequel il évolue. Les récepteurs grand public étant majoritairement utilisés en canyons urbains, ces exigences commerciales ne peuvent pas être satisfaites du fait d'un manque de robustesse des techniques d'estimation de phase en environnement dégradé.

Les travaux de la thèse se sont ainsi focalisés sur l'amélioration de la robustesse de la poursuite de phase en environnement dégradé notamment grâce à la possibilité d'utiliser les futurs signaux civils multifréquence Galileo et GPS. Les problèmes de robustesse des algorithmes de poursuite de phase sont en grande partie liés au phénomène de sauts de cycle résultant de la nature périodique et donc ambiguë des estimateurs de phase. Lors de la poursuite, ce phénomène peut entraîner des biais dans l'estimation de phase ou bien même le décrochage de la poursuite. L'amélioration de la robustesse des algorithmes de poursuite passe donc par l'étude du phénomène de saut de cycle et la prise en compte de ce dernier lors de la poursuite via des approches de développement de phase.

L'objectif de la thèse est donc le développement de nouvelles méthodes d'estimation et de développement de phase multifréquence pouvant opérer à des niveaux de rapport signal à bruit inférieurs aux limites actuelles.

## ORGANISATION DU MANUSCRIT

La thèse est organisée en cinq chapitres qui sont décrits ci-après.

### *Etat de l'art*

Le premier chapitre est un chapitre bibliographique qui a pour but de présenter l'historique et le fonctionnement général des systèmes de navigation par satellites. On y détaille globalement les structures des signaux de navigation, les perturbations qu'ils subissent durant leur propagation ainsi que les diverses opérations réalisées par le récepteur.

Le deuxième chapitre, également bibliographique, se focalise sur l'étape de poursuite de phase. Après avoir détaillé succinctement les diverses méthodes de poursuite de phase existantes, les travaux d'état de l'art se focalisent essentiellement sur les techniques de poursuite réalisées par des boucles à verrouillage. On s'intéresse également aux origines du phénomène de sauts de cycle et aux techniques existantes visant à corriger ce phénomène. Pour finir, on aborde l'aspect multifréquentiel des poursuites de phase des signaux de navigation en décrivant comment il est possible d'exploiter la diversité en fréquence des signaux GNSS et quelles sont les difficultés rencontrées lors de la poursuite de tels signaux.

### *Contributions*

Dans le troisième chapitre, nous allons tenter de réduire le phénomène de sauts de cycle afin de rendre les poursuites de phase plus robustes. Pour ce faire, nous allons opter pour une approche déterministe de correction du phénomène et développer deux nouvelles structures de DPLL (*Digital Phase Locked Loop*) mono-fréquence basées sur un algorithme de développement de phase par prédition et pré-compensation [1]. Plus précisément, ces nouvelles

architectures se basent sur une structure conventionnelle de DPPLL à laquelle est rajouté un bloc externe qui vise à prédire et pré-compenser la sortie du discriminateur de phase. Selon l'architecture considérée, l'étape de prédiction peut être réalisée grâce à une analyse polynomiale des sorties du discriminateur ou grâce à l'analyse polynomiale des sorties du filtre de boucle. En réduisant la dynamique de phase estimée, les sauts de cycle se produisant au niveau du discriminateur sont réduits et la boucle devient plus robuste aux dynamiques bruitées.

Dans le quatrième chapitre, le système de développement de phase analysant les sorties de filtre est adapté à la poursuite de signaux multifréquence et conduit à deux nouvelles structures de poursuite [2]. Plus précisément, les nouvelles structures développées utilisent la relation de proportionnalité existant entre les différentes fréquences Doppler d'un signal multifréquence émis par un même satellite. Grâce à cette propriété, le bloc de développement de phase est modifié afin d'utiliser l'information commune contenue dans les diverses phases d'un signal multifréquence. En utilisant cette redondance d'information, l'erreur de prédiction liée au bruit du système de développement de phase est réduite, améliorant ainsi la robustesse des structures de poursuite aux dynamiques bruitées.

Dans le dernier chapitre, une nouvelle méthode de poursuite de phase multifréquence est développée. Contrairement aux troisième et quatrième chapitres, nous allons opter pour une approche de poursuite et de développement de phase non-déterministe. Nous allons alors développer une toute nouvelle structure de poursuite basée sur une approche Bayésienne variationnelle. Tout comme les méthodes données au chapitre précédent, on exploite, après avoir supposé en première approximation que les effets ionosphériques sont parfaitement corrigés, la diversité fréquentielle d'un signal multifréquence émis par un satellite de navigation. La méthode suppose également une dynamique de phase de type Markovien permettant le développement de la phase et l'amélioration de la robustesse de la poursuite.

Enfin une conclusion générale vient dresser le bilan des travaux réalisés dans ce mémoire, et indiquer les ouvertures et perspectives qu'ils engendrent.



# Chapitre 1

## Introduction à la navigation par satellites

Depuis le développement du premier système de positionnement TRANSIT dans les années 1960 par l'US Navy, le secteur du positionnement par satellites a connu une évolution constante jusqu'à nos jours. Actuellement, la navigation par satellites est devenue un outil essentiel utilisé quotidiennement dans de nombreux secteurs comme le transport, la navigation aérienne et maritime, l'agriculture, la défense, l'ingénierie et les loisirs.

Ce chapitre donne une description globale des systèmes de positionnement et du fonctionnement de la navigation par satellites. Dans un premier temps, après avoir décrit les systèmes de positionnement américain et européen, une attention particulière est donnée à la structure des signaux de navigation. Une brève introduction au principe de localisation par satellites est également donnée. Puis, l'ensemble des phénomènes physiques intervenant lors de la propagation du signal de navigation sont décrits, de même que l'opération de corrélation effectuée par le récepteur à la réception du signal. Pour finir, les étapes d'acquisition, de poursuite et de calcul du point réalisées au sein du récepteur sont abordées et décrites succinctement.

### Sommaire

<b>1.1 Présentation des systèmes GNSS . . . . .</b>	<b>6</b>
1.1.1 Le système GPS . . . . .	6
1.1.2 Le système Galileo . . . . .	7
1.1.3 Structure des signaux GPS et Galileo . . . . .	9
1.1.4 La localisation par satellites . . . . .	14
<b>1.2 Réception du signal GNSS . . . . .</b>	<b>16</b>
1.2.1 Description des signaux à la réception . . . . .	16
1.2.2 Principe de corrélation . . . . .	21
1.2.3 Opérations réalisées par le récepteur GNSS . . . . .	22
<b>1.3 Acquisition du signal GNSS . . . . .</b>	<b>22</b>
1.3.1 Principe de l'acquisition . . . . .	23
1.3.2 Exemples d'acquisition . . . . .	24
<b>1.4 Poursuite du signal GNSS . . . . .</b>	<b>25</b>
1.4.1 Poursuite et observation du retard sur le code . . . . .	25
1.4.2 Poursuite et observation de la phase porteuse . . . . .	28
1.4.3 Poursuite de la fréquence Doppler . . . . .	29
<b>1.5 Calcul de la position utilisateur . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>1.6 Bilan . . . . .</b>	<b>31</b>

## 1.1 Présentation des systèmes GNSS

On définit par "GNSS" (*Global Navigation Satellite System*) l'ensemble des systèmes de positionnement par satellites offrant la possibilité à un récepteur de déterminer à n'importe quel moment sa position en trois dimensions sur l'ensemble de la Terre. Le système le plus connu est le système américain GPS (*Global Positioning System*) qui est actuellement le système le plus utilisé. Depuis les années 2000, l'ESA (*European Space Agency*) développe son propre système de positionnement, appelé Galileo, dont la mise en service est prévue pour 2015. Ces deux systèmes, qui à l'avenir représenteront pour l'Europe l'essentiel du GNSS, sont décrits dans cette section.

### 1.1.1 Le système GPS

Le système NAVSTAR (*NAVigation System by Timing And Ranging*), plus couramment appelé GPS, est le plus connu des systèmes de localisation par satellites. Développé à partir des années 70 et déclaré opérationnel en 1995 par l'US DoD (*Department Of Defense*), ce système de navigation permet à son utilisateur de connaître ses coordonnées et sa vitesse où qu'il soit sur la Terre ou dans ses environs.

Traditionnellement, le système GPS est défini par trois segments illustrés à la figure 1.1 : le segment utilisateur, le segment sol et le segment spatial [4]. Ce dernier se compose d'une constellation de satellites répartis sur 6 plans orbitaux inclinés de 55 ° par rapport l'équateur. Les satellites suivent une orbite quasi circulaire d'environ 20200km qu'ils parcourront en 11h58m02s (soit un demi-jour sidéral) [5]. Initialement constituée de 24 satellites, la constellation est répartie de telle manière que tout utilisateur peut recevoir au minimum 4 signaux exploitables à tout instant. Grâce au renouvellement de la constellation ainsi qu'au lancement de nouvelles générations de satellites, la constellation GPS est actuellement constituée de 27 satellites qui ont pour fonction d'émettre de manière continue un message de navigation contenant la position du satellite émetteur, l'heure exacte d'émission ainsi qu'un almanach contenant la position de tous les autres satellites de la constellation [6].

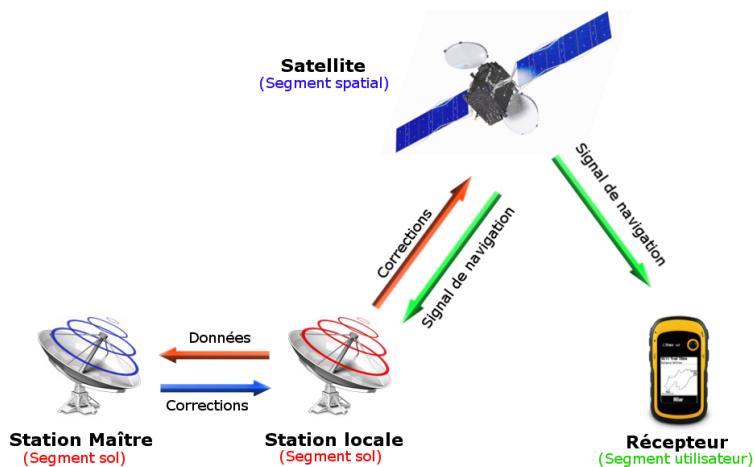


FIGURE 1.1 – Principe de fonctionnement du GPS

Le segment sol, ou segment de contrôle, est constitué de 5 stations sol (situées à Colo-

rado Springs, Hawaï, Ascencion, Diego Garcia et Kwajalein) permettant la surveillance et la mise à jour quotidienne de la constellation. Une station maître (*Master Control Station*), située à Colorado Springs, gère l'ensemble du segment sol en envoyant aux quatre autres stations les diverses corrections d'horloge et d'éphémérides à transmettre aux satellites de la constellation. La répartition des stations sol à travers le monde est donnée à la figure 1.2.

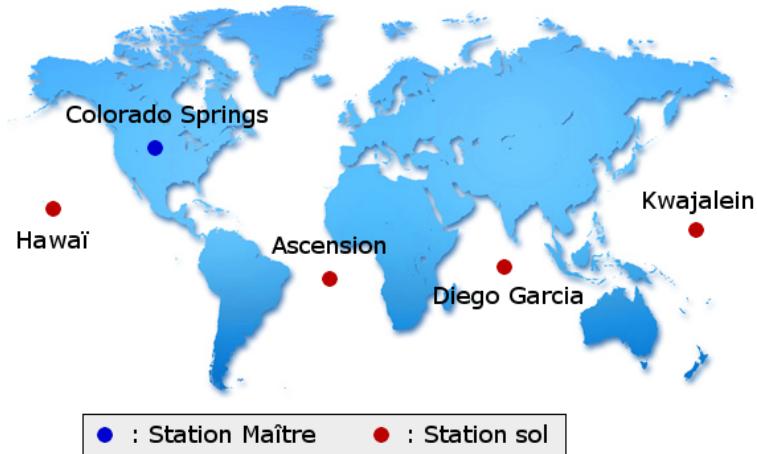


FIGURE 1.2 – Répartition des stations sol GPS

Le segment utilisateur est composé de tout utilisateur muni d'un récepteur GPS. Deux services distincts de positionnement sont fournis aux utilisateurs :

- Le SPS (*Standard Positioning Service*) est le service de positionnement standard accessible aux utilisateurs civils.
- Le PPS (*Precise Positioning Service*) est un service de positionnement précis uniquement accessible au personnel militaire américain.

Afin d'élargir l'éventail de ses services et de concurrencer le futur système européen Galileo, le système GPS disposera des 3 nouveaux signaux à usage civil suivants : le signal L2C, le signal L1C et le signal L5 (les noms de ces signaux font référence aux bandes d'émission GPS détaillées dans la section 1.1.3) [7, 8].

### 1.1.2 Le système Galileo

Étudié depuis 1990 et en test depuis 2011 avec le lancement des quatre premiers satellites, Galileo est le projet européen de système de positionnement par satellites. Développé conjointement par l'agence spatiale européenne et la Communauté Européenne (CE), Galileo a pour but de répondre à plusieurs enjeux stratégiques, scientifiques, commerciaux et de donner à l'Europe son indépendance vis-à-vis du système GPS contrôlé par l'armée américaine. Contrairement à ce dernier, le système Galileo sera un système civil.

En plus de permettre à l'Europe de disposer de son propre système de navigation, Galileo a également pour but de palier certaines carences du système américain notamment en offrant [9, 10] :

- une meilleure précision,
- une information d'intégrité,

- une meilleure disponibilité et continuité du service,
- une meilleure couverture globale.

Le système Galileo sera basé sur la même architecture que le système GPS. Le système comportera donc un segment sol qui contrôlera la constellation de satellites. Le segment spatial sera composé de 30 satellites répartis sur 3 orbites situées à 23222km d'altitude dont la période de révolution est de 14h21min. Chaque orbite possèdera donc 9 satellites opérationnels (et 1 satellite de secours) espacés les uns des autres de 40 °. Les plans orbitaux sont inclinés de 56 ° par rapport à l'axe équatorial. Cette inclinaison a été choisie afin que la couverture puisse atteindre des latitudes polaires de 75 °, zones qui sont très peu couvertes par le système GPS. Avec son grand nombre de satellites positionnés à haute altitude, Galileo fournira également une meilleure disponibilité en garantissant une probabilité d'être vu par au moins 4 satellites (minimum pour pouvoir être localisé) de l'ordre de 90% partout dans le monde [11].

Le segment sol Galileo sera composé des stations de contrôle suivantes :

- 2 centres de contrôle GCC (*Galileo Control Center*),
- 5 stations TTC (*Telemetry, Tracking and Command*),
- 10 stations de transmission de données vers les satellites,
- 40 stations de réception et de transmission des signaux Galileo vers les centres de contrôle.

Les utilisateurs Galileo auront la possibilité d'utiliser plusieurs services de positionnement partout dans le monde et indépendamment des autres systèmes de navigation. Ces différents services, au nombre de 5, sont :

- le service OS (*Open Service*) : C'est le service classique équivalent au service civil du GPS. Ce service sera gratuit partout dans le monde et pour n'importe quel utilisateur muni d'un récepteur grand public ;
- le service CS (*Commercial Service*) : C'est un service commercial fournissant un service de positionnement précis dont l'utilisation sera payante ;
- le service SoL (*Safety of Life*) : C'est un service de très haute qualité destiné aux applications mettant en jeu la sécurité humaine comme la navigation aérienne par exemple. Ce service complétera le service OS en fournissant à l'utilisateur des données d'intégrité ;
- le service PRS (*Public Regulated Service*) : Ce service crypté sera essentiellement destiné aux applications gouvernementales (notamment militaires) nécessitant des performances de localisation accrues et résistantes aux interférences ;
- le service SAR (*Search And Rescue*) : Ce service est complémentaire au système COSPAS-SARSAT et permettra d'identifier et de localiser les signaux de détresse.

Le système Galileo sera interopérable avec le système GPS et le système russe GLO-NASS (*GLObal NAvigation Satellite System*) [12]. Ainsi, les utilisateurs munis d'un récepteur GNSS pourront utiliser en même temps les signaux des trois constellations, augmentant ainsi considérablement le nombre de satellites en vue et améliorant la précision et la disponibilité du service de positionnement.

### 1.1.3 Structure des signaux GPS et Galileo

De manière générale, les signaux GPS et Galileo sont construits sur le même modèle de signal : une fréquence porteuse sinusoïdale sur laquelle sont véhiculés différents signaux binaires modulés en BPSK (*Binary Phase Shift Keying*) contenant les informations nécessaires à la navigation [5, 13].

Plusieurs bandes fréquentielles sont allouées pour l'émission des signaux GPS et Galileo. Avec la modernisation du système, les signaux GPS seront émis sur trois porteuses situées dans la bande L supérieure. Ces trois fréquences porteuses, construites à partir d'une fréquence de base  $F_0 = 10.23$  MHz, sont données par :

- $L_1 = 154F_0 = 1575.42$  MHz. Cette fréquence porte actuellement le service PPS et SPS et accueillera le prochain signal civil L1C ainsi que le signal militaire M.
- $L_2 = 120F_0 = 1227.60$  MHz. Cette fréquence porte actuellement le service PPS et accueillera le prochain signal civil L2C.
- $L_5 = 115F_0 = 1176.45$  MHz. Cette fréquence accueillera le prochain signal civil L5 ainsi que le signal militaire M.

Les signaux Galileo seront également répartis sur 3 bandes spectrales dont les porteuses associées sont données par :

- $E_1 = 1575.42$  MHz. La porteuse correspond à la porteuse  $L_1$  du signal GPS. La bande  $E_1$  accueillera les services OS, PRS, CS et SoL.
- $E_5 = 1191.79$  MHz. Comporte deux sous-bandes  $E_{5a}$  (1176.45 MHz) et  $E_{5b}$  (1207.14 MHz).  $E_{5a}$  correspondant à la porteuse  $L_5$  du GPS. La bande  $E_5$  accueillera les services OS, CS et SoL.
- $E_6 = 1278.75$  MHz. La bande  $E_6$  accueillera les services CS et PRS.

La répartition fréquentielle des différentes bandes d'émission GPS et Galileo est donnée à la figure 1.3.

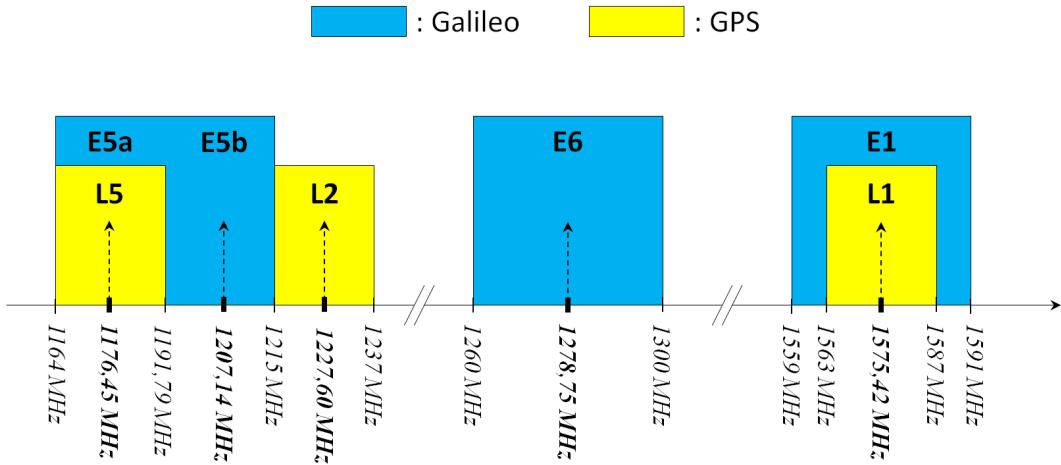


FIGURE 1.3 – Répartition des fréquences GPS et Galileo

Il peut y avoir plusieurs types de signaux binaires véhiculés par les porteuses des signaux GPS et Galileo :

- Un message de navigation contenant plusieurs paramètres nécessaires au récepteur pour calculer sa position (heure d'envoi du message, éphémérides du satellite, état de

la constellation, etc.).

- Un code pseudo-aléatoire permettant l'identification du satellite émetteur.
- Une sous-porteuse rectangulaire pour les signaux modulés en BOC (*Binary Offset Carrier*). Les détails de cette modulation sont donnés plus loin.

Certains services GPS et Galileo disposeront de signaux ne comportant pas de message de navigation. Ces signaux, appelés "signaux pilotes", permettront au récepteur de passer outre les problèmes de synchronisation avec le message de navigation et offriront donc une meilleure robustesse au niveau du traitement du signal de navigation [14]. La structure des signaux GPS et Galileo est donnée à la figure 1.4.

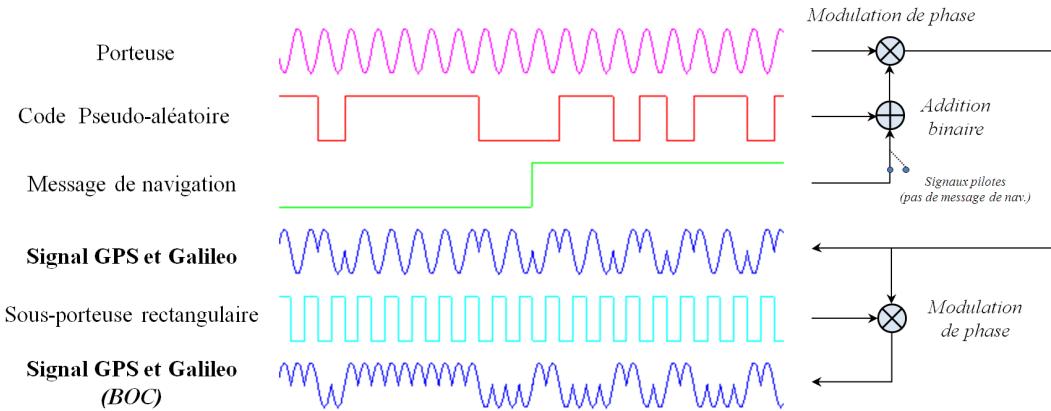


FIGURE 1.4 – Structure des signaux GPS et Galileo

En accord avec le mode de génération donné à la figure 1.4, il est possible de définir un modèle simplifié d'un signal GNSS. Le signal émis par le satellite  $i$  peut s'écrire :

$$s_e^i(t) = \sqrt{P_e^i} D_i(t) C_i(t) e^{i2\pi f_p^i t} \quad (1.1)$$

avec  $P_e^i$  la puissance d'émission,  $D_i(t)$  le bit du message de navigation (avec  $D_i(t) = 1$  pour un signal de type "pilote"),  $C_i(t)$  le code d'étalement (modulé par la sous-porteuse rectangulaire dans le cas d'une modulation BOC) et  $f_p^i$  la fréquence porteuse associé au satellite  $i$ . En pratique, les signaux de navigation ont un modèle de génération plus complexe. En effet, il est possible, pour un satellite fixé, de véhiculer plusieurs informations grâce à une technique de modulation en quadrature [15]. Les signaux de navigation sont ainsi générés sur deux voies en quadrature : la voie-I (*In-phase*) et la voie-Q (*Quadrature*). Par conséquent, si le satellite  $i$  émet sur la même porteuse le service 1 sur la voie-I et le service 2 sur la voie-Q, on pourra alors écrire [16]

$$s_e^i(t) = \sqrt{2P_{e,1}^i} D_{i,1}(t) C_{i,1}(t) \cos(2\pi f_p^i t) + \sqrt{2P_{e,2}^i} D_{i,2}(t) C_{i,2}(t) \sin(2\pi f_p^i t), \quad (1.2)$$

avec respectivement  $P_{e,k}^i$ ,  $D_{i,k}$  et  $C_{i,k}$  les puissances d'émission, les bits des messages de navigation et les codes pseudo-aléatoires associés au satellite  $i$  et au service  $k$ . Ce modèle de signal s'applique actuellement sur les signaux GPS émis sur la bande  $L_1$  où le service PPS est porté par la voie-I et le service SPS par la voie-Q.

## Les codes pseudo-aléatoires

Les codes pseudo-aléatoires utilisés par le GPS et Galileo sont des codes PRN (*Pseudo Random Noise*) composés d'éléments binaires appelés "chip". A chaque satellite est associé un code PRN qui lui est propre.

Actuellement, deux types de code sont utilisés par le GPS :

- **le code C/A** (*Coarse Acquisition*) : Ce code, aussi appelé code de Gold, est cadencé à la fréquence  $R_{C/A} = 1.023$  MHz. Le code C/A ayant une longueur de 1023 chips, sa période est donc de  $T_{C/A} = 1$  ms. Il est utilisé par le service SPS.
- **le code P** (*Precise*) : Ce code à une cadence dix fois supérieure à celle du code C/A ( $R_P = 10.23$  MHz) et une période  $T_P = 1$  semaine. Il est utilisé par le service PPS.

Les futurs signaux GPS et Galileo disposeront également de codes pseudo-aléatoires dont les caractéristiques et les méthodes de génération varieront selon le service considéré [17,18].

De manière générale, les codes pseudo-aléatoires sont des codes binaires quasi orthogonaux entre eux qui permettent aux satellites d'émettre simultanément dans la même bande de fréquence (caractéristique du CDMA : *Code Division Multiple Access*). Pour comprendre comment les codes PRN permettent l'identification du satellite, il faut s'attarder sur la fonction de corrélation  $\Gamma_{i,j}(\tau)$  donnée par

$$\Gamma_{i,j}(\tau) = \frac{1}{N \times T_c} \int_0^{N \times T_c} C_i(t) C_j^*(t - \tau) dt, \quad (1.3)$$

où  $C_i$  et  $C_j$  sont respectivement les codes pseudo-aléatoires numéro  $i$  et  $j$ ,  $N$  est le nombre de chips contenu dans les codes et  $T_c$  est le temps d'un chip. La fonction d'autocorrélation d'un code PRN donnera un pic de largeur  $T_c$  et de valeur maximale égale à 1 [13], i.e.,

$$\Gamma_{i,i}(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{T_c} \quad \text{pour } |\tau| < T_c, \quad (1.4)$$

$$\simeq 0 \quad \text{sinon,} \quad (1.5)$$

alors que la fonction d'intercorrélation entre deux codes PRN différents est donnée par

$$\Gamma_{i,j}(\tau) \simeq 0 \quad \text{pour } i \neq j \quad \text{et} \quad \forall \tau. \quad (1.6)$$

Les fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation des codes de Gold (code PRN C/A) sont données aux figures 1.5 et 1.6.

Les codes pseudo-aléatoires sont modulés en BPSK. Selon le système et le service considérés, les codes d'étalement auront un rythme binaire  $R_{c,y} = yR_c = y \times 1.023$  MHz, on parlera alors de modulation BPSK( $y$ ). Les spectres des codes PRN modulés de la sorte sont de la forme [19] :

$$S(f)_{BPSK(y)} = \frac{1}{R_{c,y}} \left( \frac{\sin(\pi f / R_{c,y})}{\pi f / R_{c,y}} \right)^2 \quad (1.7)$$

Les spectres du code C/A (GPS), du code P (GPS) et du code  $E_6$  (Galileo) sont donnés à la figure 1.7 pour des valeurs de  $y = 1, 5, 10$  respectivement.

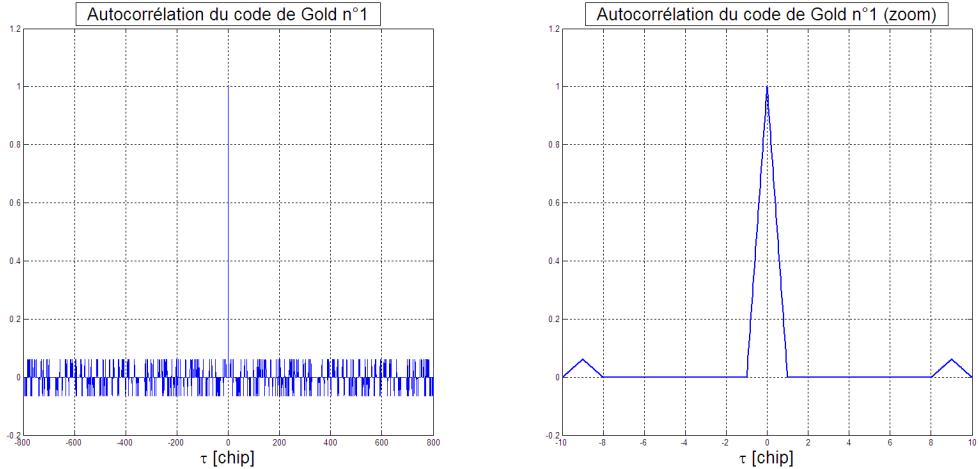


FIGURE 1.5 – Fonction d'autocorrélation du code de Gold n° 1

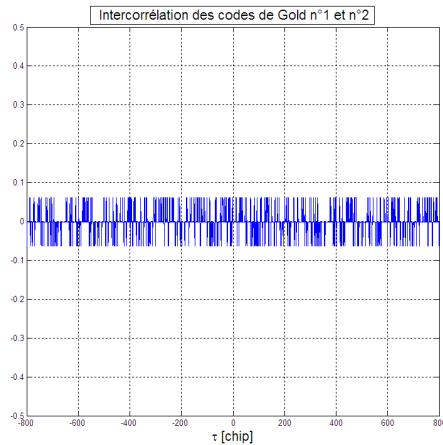


FIGURE 1.6 – Fonction d'intercorrélation des codes de Gold n° 1 et n° 2

## La modulation BOC

Comme le montre la figure 1.3, un élément essentiel du développement de Galileo et de la modernisation du GPS est le partage des bandes d'émission. Afin de minimiser au mieux les interférences entre les différents services, il a été impératif de trouver une nouvelle modulation dont le spectre serait le plus possible éloigné de ceux des autres signaux présents dans la bande. De cette idée directrice est née la modulation BOC.

La modulation BOC( $x, y$ ) consiste à multiplier un signal binaire de type GPS (message de navigation modulé par un PRN en BPSK au rythme chip  $R_{c,y}$ ) par une sous-porteuse rectangulaire de fréquence  $f_{sp}$ . Le paramètre  $x$  (respectivement  $y$ ) correspond au ratio entre la fréquence de la sous-porteuse (respectivement le rythme du code d'étalement) et la fréquence/rythme de référence  $R_c = 1,023$  MHz. On a donc

$$R_{c,y} = y \times R_c,$$

$$f_{sp} = x \times R_c.$$

La multiplication par la sous-porteuse rectangulaire va avoir pour effet de dédoubler le lobe

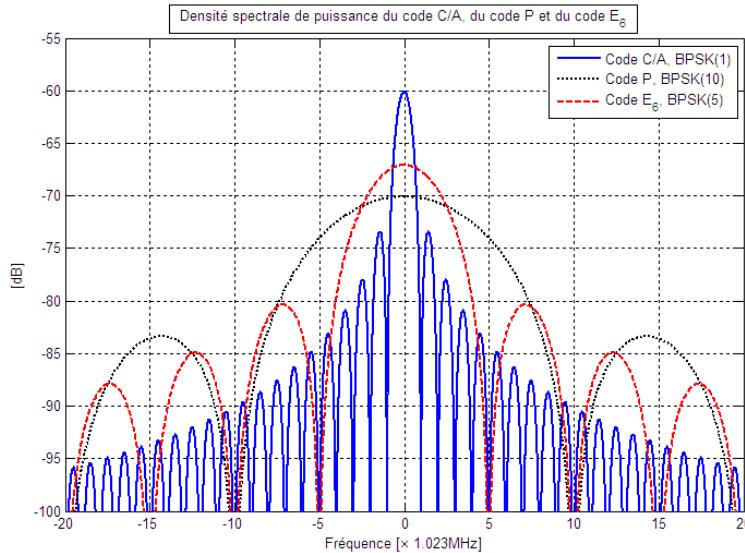


FIGURE 1.7 – Densités spectrales de puissance du code C/A, du code P et du code  $E_6$

principal du spectre tout en éloignant les 2 lobes résultants du centre de la bande (résultat similaire à une modulation par sous-porteuse sinusoïdale). Le schéma de génération d'un signal Galileo modulé en BOC est donné à la figure 1.4.

Il existe deux types de synchronisation entre la sous-porteuse et le code d'étalement : la synchronisation sinus et la synchronisation cosinus qui vont respectivement donner les modulations  $\text{BOCsin}(x, y)$  et  $\text{BOCcos}(x, y)$ . Soit  $C_{\text{BOC}}(t)$  un d'étalement modulé en BOC. Selon la synchronisation choisie, on a :

–  $\text{BOCsin}$  :

$$C_{\text{BOC}}(t) = C(t)\text{sign}[\sin(2\pi f_{sp}t)],$$

–  $\text{BOCcos}$  :

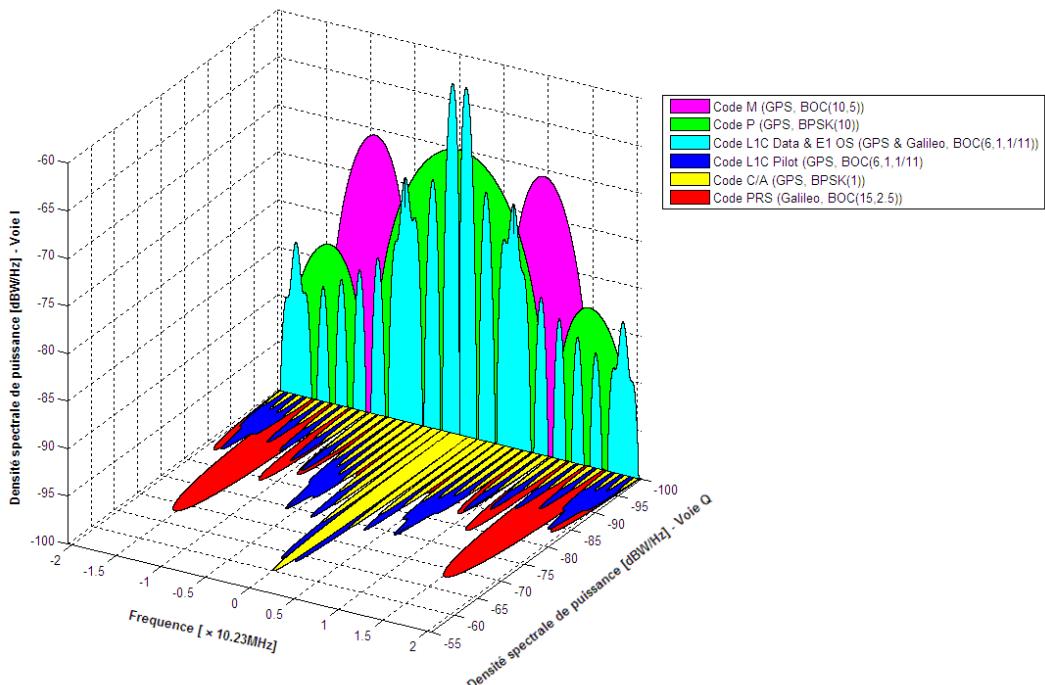
$$C_{\text{BOC}}(t) = C(t)\text{sign}[\cos(2\pi f_{sp}t)],$$

avec  $C(t)$  le code d'étalement en BPSK à l'instant  $t$ . La densité spectrale de puissance d'une modulation BOC peut changer selon 2 critères : la parité du nombre  $n$  de chips de la sous-porteuse pendant un chip du PRN (i.e.,  $n = 2f_{sp}/R_{c,y}$ ) et le type de synchronisation code PRN/sous-porteuse. Les différentes formes de spectre possibles, explicitées et démontrées dans [20] et [21], sont données au tableau 1.1.

Afin de bien montrer l'utilité de la modulation BOC, l'occupation conjointe de la bande  $L_1 - E_1$  par les signaux GPS et Galileo est illustrée à la figure 1.8. On voit que, grâce à la migration des lobes principaux due à la modulation BOC, les maxima des spectres Galileo correspondent aux minima des spectres GPS et vice-versa. L'interaction entre les deux services est par conséquent minimisée. On constate cependant une exception pour le code P dont le maximum du spectre est très proche des maxima du spectre du code L1C. Cette proximité des maxima est possible car le code P est un code militaire crypté inaccessible aux utilisateurs civils. Il en est de même pour le code M dont les maxima du spectre correspondent bien aux minima du spectre du code P afin d'éviter toute interaction entre ces deux services cryptés.

$n$ pair	$n$ impair
$S(f)_{BOC \sin(x,y)} = R_{c,y} \times \left( \frac{\sin(\frac{\pi f}{2f_{sp}}) \sin(\frac{\pi f}{R_{c,y}})}{\pi f \cos(\frac{\pi f}{2f_{sp}})} \right)^2$	$S(f)_{BOC \sin(x,y)} = R_{c,y} \times \left( \frac{\sin(\frac{\pi f}{2f_{sp}}) \cos(\frac{\pi f}{R_{c,y}})}{\pi f \cos(\frac{\pi f}{2f_{sp}})} \right)^2$
$S(f)_{BOC \cos(x,y)} = R_{c,y} \times \left( \frac{\{\cos(\frac{\pi f}{2f_{sp}})-1\} \sin(\frac{\pi f}{R_{c,y}})}{\pi f \cos(\frac{\pi f}{2f_{sp}})} \right)^2$	$S(f)_{BOC \cos(x,y)} = R_{c,y} \times \left( \frac{\{\cos(\frac{\pi f}{2f_{sp}})-1\} \cos(\frac{\pi f}{R_{c,y}})}{\pi f \cos(\frac{\pi f}{2f_{sp}})} \right)^2$

TABLE 1.1 – Expressions des densités spectrales des modulations BOC


 FIGURE 1.8 – Occupation de la bande spectrale  $L_1 - E_1$  par les signaux GPS et Galileo

### 1.1.4 La localisation par satellites

#### 1.1.4.1 Principe de la trilateration

Le principe de positionnement par satellites repose sur l'hypothèse de la propagation à vitesse constante (proche de la vitesse de la lumière) des ondes émises par les satellites dans l'espace. Si un récepteur arrive à estimer le temps de propagation d'un signal de navigation, il lui est alors possible, grâce à cette hypothèse, de déterminer la distance qui le sépare du satellite émetteur [22]. Les positions des satellites étant connues et transmises dans le message de navigation, le récepteur sait ainsi qu'il se trouve sur la sphère de rayon la distance estimée et centrée au niveau du satellite émetteur. Il peut alors calculer ses coordonnées à partir du moment où il dispose d'au moins 3 mesures de distance satellite/utilisateur. En effet, en trois dimensions, l'intersection de 3 sphères donnera 2 points de position dont un se trouve à la surface de la Terre et correspondra à la position de l'utilisateur, et un autre se trouvant dans l'espace et à exclure. Ce principe de positionnement est appelé trilateration

et est illustré à la figure 1.9.

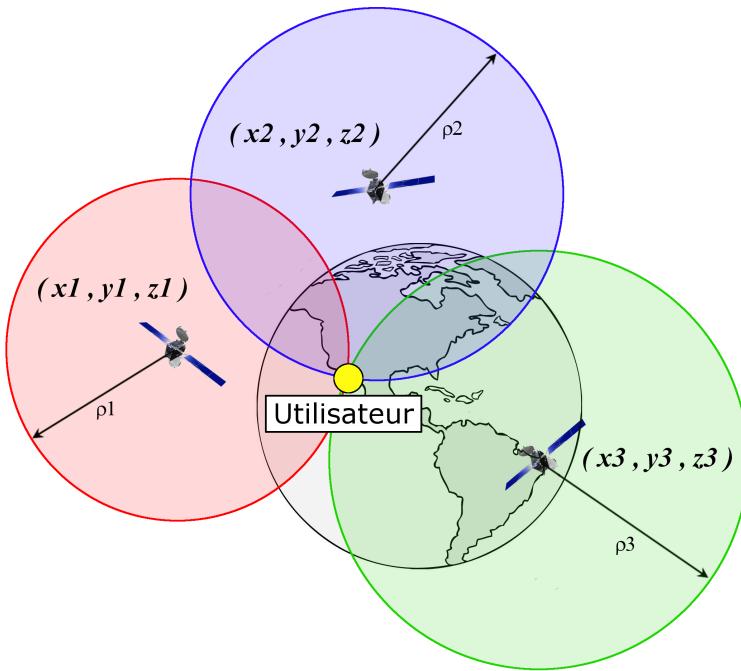


FIGURE 1.9 – Positionnement par trilateration

Comme la distance utilisateur/satellite est mesurée via des temps de propagation, il est important de compenser les décalages d’horloge du récepteur et des satellites pour avoir une bonne synchronisation temporelle. En pratique, le biais d’horloge sera considéré comme une inconnue à estimer au même titre que les trois composantes de la position. Par conséquent, un récepteur aura besoin de la réception du signal d’un quatrième satellite pour pouvoir calculer sa position.

#### 1.1.4.2 Erreurs et précision intrinsèques du système

Les erreurs intrinsèques au système de positionnement par satellites sont principalement liées aux limites technologiques des équipements. Parmi ces limites, on a la précision des horloges embarquées dans les satellites. Bien que ces dernières soient des horloges atomiques, elles présentent une infime dérive qui entraînera une erreur de distance de l’ordre du décimètre lorsque la dérive horloge est de l’ordre de la nanoseconde [23]. Pour réduire l’impact de cette dérive, des corrections sont calculées par les stations sol puis envoyées au satellite qui les inclura dans le message de navigation afin que l’utilisateur puisse apporter les corrections nécessaires. L’horloge embarquée dans le récepteur fait également partie des sources d’erreurs. Les horloges utilisées pour les récepteurs grand public sont des horloges bas de gamme qui présentent une précision et une dérive d’horloge bien plus grandes que celles des horloges atomiques [5]. Cette imprécision représente la grande majorité de la dérive horloge à estimer pour le calcul de la position.

En plus des dérives précédemment décrites, des erreurs de synchronisation d’horloge liées à des phénomènes relativistes doivent être également être prises en compte. En effet, d’après les théories d’Einstein sur la relativité restreinte et la relativité générale, des erreurs

d'horloge entre les satellites et le récepteur apparaissent du fait de l'altitude et de la vitesse de déplacement des satellites par rapport au récepteur [24]. Des erreurs sont également présentes au niveau de la précision de localisation des satellites. Ces derniers étant suivis par les stations sol, des corrections sur les éphémérides sont envoyées aux satellites pour qu'ils puissent mettre à jour leurs messages de navigation.

Pour connaître l'impact final sur la précision du positionnement des erreurs précédemment décrites et des erreurs données à la section 1.2.1.3 , il faut tenir compte du GDOP (*Geometry Dilution Of Precision*). De manière générale, on a :

$$\sigma_p = GDOP \times \sigma_m, \quad (1.8)$$

avec  $\sigma_m$  l'erreur de mesure sur les distances utilisateur/satellite et  $\sigma_p$  l'erreur de positionnement. Comme l'illustre la figure 1.10, la valeur du GDOP est liée à la configuration géométrique des satellites ainsi qu'au nombre de satellites en vue. En général on considère que  $GDOP=2$  [5], mais ce dernier peut être supérieur à 20 dans certains cas critiques.

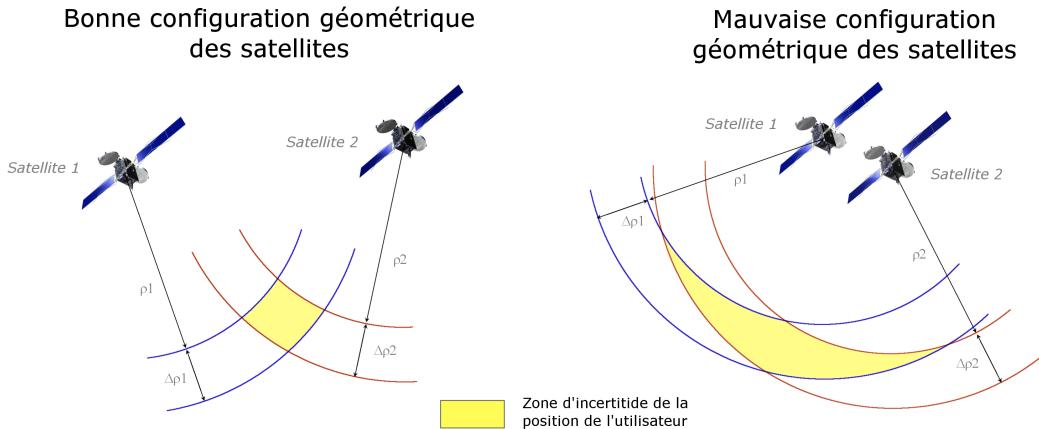


FIGURE 1.10 – Effet de la configuration géométrique des satellites sur la précision de la mesure de position

## 1.2 Réception du signal GNSS

A la réception, au niveau de l'antenne du récepteur, les caractéristiques des signaux GNSS à l'émission vont être modifiées du fait de leur propagation jusqu'à l'utilisateur. Les détails des divers phénomènes physiques liés à la propagation du signal sont donnés dans cette section. Une rapide description de l'étape de réception au niveau du récepteur est également fournie.

### 1.2.1 Description des signaux à la réception

#### 1.2.1.1 Puissance des signaux à la réception

A la réception, les puissances des signaux de navigation vont être atténueées à cause de leur propagation en espace libre et de la traversée de l'atmosphère. Au niveau du récepteur,

on peut écrire :

$$P = P_e - p_{prop} - p_{atm} \quad (\text{dB}), \quad (1.9)$$

avec  $P$  la puissance du signal à la réception,  $P_e$  la puissance du signal à l'émission,  $p_{prop}$  les pertes liées à la propagation du signal dans l'espace libre et  $p_{atm}$  les pertes atmosphériques.

Les pertes associées à la propagation du signal en espace libre s'expriment par [25] :

$$p_{prop} = \left( \frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2, \quad (1.10)$$

avec  $\lambda$  la longueur d'onde du signal et  $R$  la distance satellite/récepteur. Dans le cas d'un signal GPS C/A, on a  $R = 20200$  km et  $f = 1575.42$  MHz ce qui donne  $p_{prop} = 182.5$  dB. La puissance à l'émission des signaux C/A étant de  $P_e = 24.6$  dBW et les pertes atmosphériques de  $p_{atmo} = 2$  dB [26], on a finalement  $P = 24.6$  dBW - 182.5 dB - 2 dB = -157.7 dBW.

De manière générale, les satellites de navigation sont dimensionnés pour fournir des puissances de réception supérieures à des seuils prédéfinis. Les différentes spécifications en termes de puissance minimale à la réception pour les signaux GPS et Galileo sont données au tableau 1.2 [5, 27].

Signal	Puissance à la réception
C/A	-160 dBW
P	-163 dBW
$E_1$	-157 dBW
$E_5$	-155 dBW
$E_6$	-155 dBW

TABLE 1.2 – Puissances minimales de réception des signaux GPS et Galileo

### 1.2.1.2 L'effet Doppler

Lors de l'émission d'un signal, tout mouvement relatif entre l'émetteur et le récepteur provoque une modification de la fréquence du signal reçu : c'est le phénomène Doppler. La figure 1.11 illustre ce phénomène. Dans le cadre du GNSS, les signaux de navigation sont affectés par l'effet Doppler résultant des mouvements relatifs entre le satellite et l'utilisateur. En effet, considérons le modèle simplifié du signal émis au niveau du satellite suivant :

$$s_e(t) = C(t)e^{i2\pi f_p t}, \quad (1.11)$$

avec  $C(t)$  le code pseudo-aléatoire du signal et  $f_p$  la fréquence porteuse. Si on suppose que le signal émis ne subit aucune perturbation lors de sa propagation, le récepteur reçoit alors le signal suivant :

$$\begin{aligned} s_r(t) &= s_e(t - \tau(t)), \\ &= C(t - \tau(t))e^{i2\pi f_p(t - \tau(t))}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

avec  $\tau(t)$  le retard exprimé en seconde associé au temps de propagation du signal. D'après les notations de la figure 1.12, le temps de propagation  $\tau$  s'exprime par :

$$\tau(t) = \tau_0 + \frac{\int_0^t v_{rad}(t)dt}{c}, \quad (1.13)$$

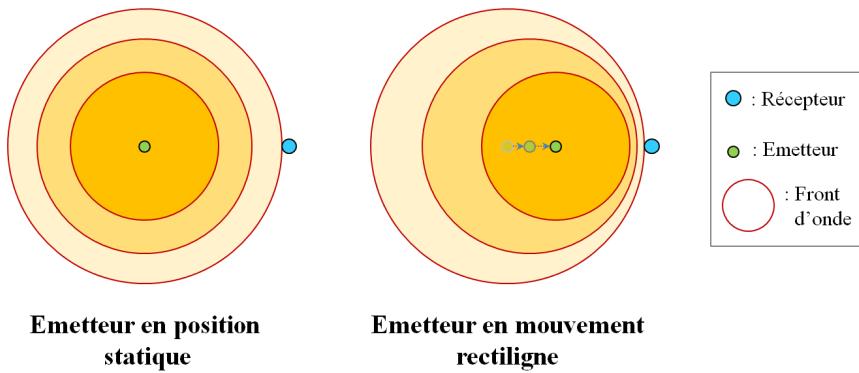


FIGURE 1.11 – Principe de l'effet Doppler

avec  $c$  la vitesse de la lumière dans le milieu et  $v_{rad}$  la vitesse radiale satellite/récepteur. En

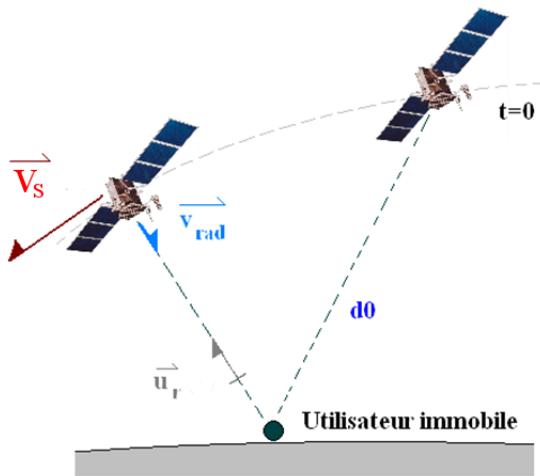


FIGURE 1.12 – Géométrie de la dynamique satellite/utilisateur

supposant que la vitesse radiale est constante, on obtient l'expression du retard suivant :

$$\tau(t) = \tau_0 + \frac{v_{rad}}{c}t. \quad (1.14)$$

En combinant l'équation (1.12) et l'équation (1.14), on obtient l'expression du signal reçu suivant

$$s_r(t) = C \left( \left( 1 - \frac{v_{rad}}{c} \right) t - \tau_0 \right) e^{i2\pi f_p(1-\frac{v_{rad}}{c})t+i\phi_0}, \quad (1.15)$$

avec  $\phi_0 = -2\pi f_p \tau_0$ . On voit ainsi que la fréquence porteuse du signal reçu est modifiée de la fréquence Doppler  $f_d$  définie par [13] :

$$f_d = -f_p \frac{v_{rad}}{c}. \quad (1.16)$$

L'expression (1.16) n'est que l'approximation au premier ordre de l'effet Doppler sur la porteuse du signal de navigation. De manière générale, la fréquence Doppler sur la fréquence porteuse s'exprime par [13]

$$f_d = -f_p \frac{(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_u)^T \mathbf{u}_r}{c}, \quad (1.17)$$

avec  $\mathbf{v}_s$  la vitesse satellite,  $\mathbf{v}_u$  la vitesse utilisateur et  $\mathbf{u}_r$  le vecteur unitaire radial de l'utilisateur vers le satellite. L'effet Doppler va également affecter le rythme binaire des codes pseudo-aléatoires (et plus généralement l'ensemble des signaux binaires véhiculé par la porteuse) qui va subir la dérive Doppler  $f_d^{code}$  suivante

$$f_d^{code} = f_d^{porteuse} \frac{R_c}{f_p}, \quad (1.18)$$

avec  $R_c$  le rythme chip du code pseudo-aléatoire. Le phénomène de compression/dilatation des codes pseudo-aléatoires et de la porteuse est illustré à la figure 1.13 (la fréquence porteuse et le rythme chip ne sont pas à l'échelle sur la figure).

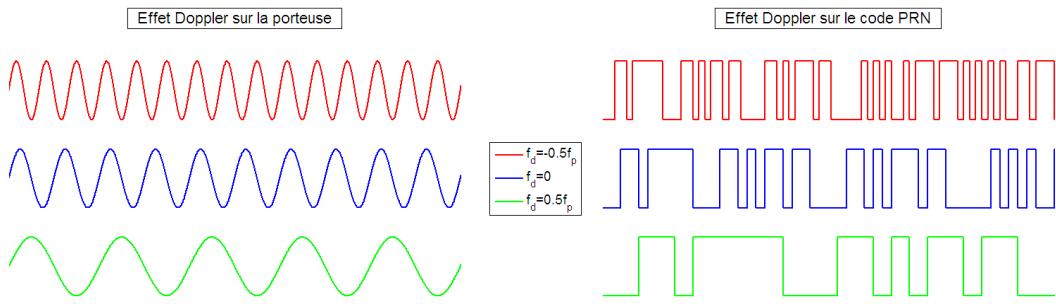


FIGURE 1.13 – Effet Doppler sur la fréquence porteuse et les codes PRN

### 1.2.1.3 Perturbations lors de la propagation et de la réception

Durant sa transmission, le signal de navigation va subir plusieurs dégradations causées en grande partie par l'atmosphère et l'environnement dans lequel évolue l'utilisateur. Lors de la réception, le signal est également entaché d'un bruit thermique propre au récepteur.

#### Effets atmosphériques

Lors de la traversée de l'atmosphère, le signal va subir de fortes dégradations qui se traduisent par des erreurs de positionnement pouvant aller, après corrections, jusqu'à 5 m [5]. Ces dégradations sont causées par deux couches atmosphériques distinctes qui sont :

- **L'ionosphère.** C'est une couche haute de l'atmosphère qui a la particularité de contenir des particules chargées dont la densité et la répartition fluctuent au cours de la journée et dépendent de la région terrestre considérée ainsi que de l'activité solaire. Cette caractéristique électronique de l'ionosphère va modifier la vitesse de propagation du signal et allonger le chemin parcouru par réfraction.
- **La troposphère.** C'est une couche basse de l'atmosphère contenant de la vapeur d'eau qui va ralentir la propagation du signal.

Bien qu'il existe plusieurs modèles atmosphériques (Klobuchar [28], NeQuick [29], Hopfield [30]), les corrections apportées par ces derniers ne peuvent pas compenser totalement les dégradations liées à l'ionosphère et la troposphère.

#### Multitrajets

Les multitrajets constituent également une source de dégradation du signal non négligeable.

Le trajets multiples sont provoqués par la réfection du signal sur le sol, l'eau ou l'environnement entourant l'utilisateur [31]. Outre le fait que les multitrajets ne respectent pas l'hypothèse de propagation en ligne du signal faite par le récepteur (phénomène illustré à la figure 1.14), les divers échos du signal LOS (*Line of Sight*) peuvent engendrer des interférences destructives ou induire des erreurs d'estimation des distances satellite/utilisateur [32]. Pour corriger les multitrajets, il est possible d'utiliser des méthodes de traitement du signal au sein des algorithmes de réception [33], ainsi que des méthodes de réception multi-antennes [34] afin d'estimer la direction du signal d'intérêt.

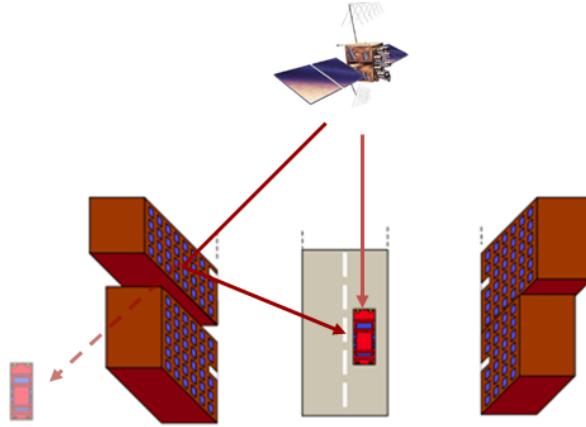


FIGURE 1.14 – Illustration du phénomène de multitrajet

### Bruit thermique du récepteur

A ces dégradations s'ajoute également le bruit thermique propre au récepteur. La densité spectrale du bruit thermique  $N_0$  s'éprime par :

$$N_0 = k_B T_{syst}, \quad (1.19)$$

avec  $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$  J/K la constante de Boltzmann et  $T_{syst}$  la température du récepteur. La puissance totale du bruit  $N$  à travers une bande passante  $B$  (qui pour un récepteur GPS vaut  $B = F_e$  la fréquence d'échantillonnage du signal à la réception) vaut alors :

$$N = N_0 + B + N_r \quad (\text{dB}), \quad (1.20)$$

avec  $N_r$  les pertes propres au récepteur. A partir de cette puissance de bruit on peut définir le rapport signal à bruit SNR (*Signal to Noise Ratio*) de la sorte :

$$SNR = P - N \quad (\text{dB}), \quad (1.21)$$

où  $P$  est la puissance du signal à la réception. Dans le domaine du GNSS, on préfère souvent quantifier la qualité du signal par la grandeur  $C/N_0$  qui exprime le rapport entre la puissance du signal et la puissance du bruit par unité de largeur de bande. On a alors

$$C/N_0 = P - (N - B) = SNR + B \quad (\text{dBHz}). \quad (1.22)$$

Le  $C/N_0$ , contrairement au SNR, permet de quantifier la qualité du signal indépendamment de la largeur de bande du récepteur et des traitements d'acquisition ou de poursuite.

### 1.2.2 Principe de corrélation

L'étape de corrélation est une étape indispensable à la réception du signal de navigation. En effet, pour pouvoir estimer la distance qui le sépare d'un satellite, le récepteur devra isoler le signal associé à ce satellite du signal reçu. Afin de réaliser cette extraction et se synchroniser sur le signal, le récepteur effectue le produit du signal reçu avec une réplique locale qu'il génère et qui contient le code PRN associé au satellite à étudier. Ce produit est alors intégré sur une certaine durée : c'est la corrélation. La réplique que l'on souhaite synchroniser en temps et en fréquence au satellite  $i$  est de la forme :

$$r_{(\tau,f)}^i(t) = C_i(t - \tau)e^{i2\pi ft}, \quad (1.23)$$

avec  $C_i$  le code pseudo-aléatoire associé au satellite  $i$ . Mathématiquement, l'expression de l'intercorrélation entre le signal reçu  $s_r$  et une réplique locale  $r_{(\tau,f)}^i$  sur un temps de corrélation  $T_{corr}$  est donnée par :

$$\Gamma_{s_r}^{r^i}(\tau, f) = \frac{1}{T_{corr}} \int_0^{T_{corr}} s_r(t) \overline{r_{(\tau,f)}^i(t)} dt. \quad (1.24)$$

avec  $(\cdot)$  l'opération de conjugaison. Le signal reçu étant la somme des signaux associés aux satellites en vue, on peut écrire

$$s_r(t) = \sum_{k=1}^{N_{sat}} s_r^k(t) + n(t), \quad (1.25)$$

avec  $N_{sat}$  le nombre de satellites en vue,  $s_r^k(t)$  le signal à la réception à l'instant  $t$  associés au satellite  $k$  et  $n(t)$  le bruit thermique. D'après les propriétés de corrélation des codes pseudo-aléatoires présentées dans la section 1.1.3, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \Gamma_{s_r}^{r^i}(\tau, f) &= \frac{1}{T_{corr}} \int_0^{T_{corr}} s_r^i(t) \overline{r_{(\tau,f)}^i(t)} dt + \varrho, \\ &= \Gamma_{s_r^i}^{r^i}(\tau, f) + \varrho, \end{aligned} \quad (1.26)$$

avec  $\varrho$  le bruit d'intercorrélation dû au bruit et à la présence des autres satellites. On voit ainsi que, d'après l'équation (1.26), l'étape de corrélation permet au récepteur d'isoler le signal d'un satellite de l'ensemble des signaux reçus. En effet, on sait d'après les propriétés d'intercorrélation des codes de Gold que si le signal associé au satellite  $i$  ne fait pas partie des signaux reçus, alors  $\Gamma_{s_r^k}^{r^i}(\tau, f) \simeq 0$  pour  $k \neq i$ . Inversement, si le signal du satellite  $i$  est capté par l'antenne du récepteur, l'étape de corrélation sera maximale lorsque la réplique est synchronisée en temps et en fréquence avec le signal reçu.

Outre la possibilité de pouvoir séparer les composantes du signal associées aux différents satellites, l'étape de corrélation va permettre de rehausser le rapport signal à bruit en faisant ressortir le signal d'intérêt du bruit. En effet, considérons un signal reçu avec une certaine valeur de  $C/N_0$ . Si le récepteur à une bande passante  $B$ , le rapport signal à bruit à la réception est, d'après l'expression (1.22) :

$$SNR = C/N_0 - B \quad (\text{dB}). \quad (1.27)$$

Du fait de l'opération produit-intégration, la corrélation va comprimer la bande passante, la faisant passer de  $B$  à  $1/T_{corr}$ . Ainsi, le rapport signal à bruit post-corrélation, noté  $SNR_{post}$ ,

est donné par :

$$\begin{aligned} SNR_{post} &= C/N_0 + T_{corr} \quad (\text{dB}), \\ &= SNR + B + T_{corr} \quad (\text{dB}), \\ &= SNR + r_{bande} \quad (\text{dB}), \end{aligned} \quad (1.28)$$

avec  $r_{bande}$  le ratio des largeurs de bande avant et après corrélation. Sachant que généralement  $B \gg 1/T_{corr}$ , l'étape de corrélation va, d'après l'équation (1.28), rehausser le rapport signal à bruit du signal d'intérêt. Par exemple, en prenant le cas d'un code C/A avec une bande passante de  $B = F_e = 2 \text{ MHz}$ , une température  $T_{syst} = 290 \text{ K}$ , des pertes récepteur de l'ordre de 4 dB [26] et une puissance de réception de  $-160 \text{ dBW}$ , on a d'après les expressions (1.20) et (1.21) :

$$SNR = -160 - (-203.9 + 63 + 4) = -23.2 \text{ dB}. \quad (1.29)$$

En réalisant une corrélation sur une durée de  $T_{corr} = 20 \text{ ms}$ , on a

$$SNR_{post} = -23.2 + 10 \log_{10}(2.10^6) - 10 \log_{10}(2.10^{-2}) = 22.8 \text{ dB}. \quad (1.30)$$

On voit bien que dans ce cas, l'étape de corrélation fait ressortir le signal d'intérêt du bruit en améliorant le rapport signal à bruit de 46 dB.

Pour finir, l'étape corrélation permet également de réduire la fréquence de traitement du signal, la faisant passer de  $F_e$  à  $1/T_{corr}$  et allégeant ainsi la charge calculatoire au niveau du récepteur.

### 1.2.3 Opérations réalisées par le récepteur GNSS

Entre la réception du signal et le calcul de la position de l'utilisateur, le récepteur doit effectuer plusieurs étapes pour extraire les informations nécessaires au "calcul du point". Le schéma bloc classique d'un récepteur est donné à la figure 1.15. Le bloc "Réception" se réfère au bloc de traitement classique du signal à la réception (i.e., numérisation du signal, séparation des voies I et Q, etc.). S'en suit alors deux étapes qui ont pour but de synchroniser le récepteur avec les signaux de navigation : l'acquisition (qui est réalisée en parallèle sur chacun des canaux de réception) et la poursuite (qui peut être ou non réalisée en parallèle selon le choix de l'architecture de poursuite). Ces deux étapes du processus de navigation sont détaillées dans les sections 1.3 et 1.4.

## 1.3 Acquisition du signal GNSS

Afin de lancer le processus de poursuite du signal de navigation, le récepteur effectue une étape d'acquisition. Cette opération primordiale a pour but de détecter la présence du signal d'un satellite dans l'ensemble des signaux reçus par l'antenne du récepteur. L'acquisition permet également de déterminer le décalage du code et l'écart de fréquence provoqués par la propagation du signal et l'effet Doppler. Ces informations serviront par la suite d'initialisation pour les boucles de poursuite.

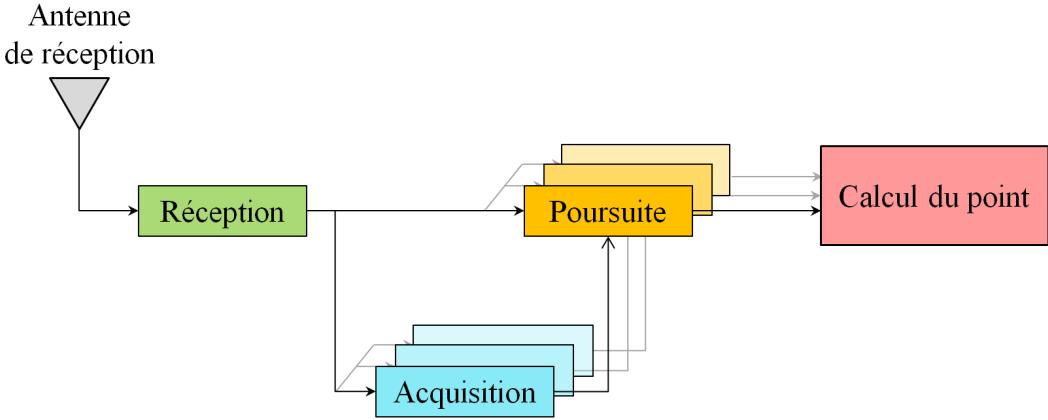


FIGURE 1.15 – Schéma bloc des opérations réalisées par le récepteur

### 1.3.1 Principe de l'acquisition

De manière générale, l'acquisition est une recherche temps-fréquence qui consiste à calculer, sur un ensemble de délais temps/fréquence, les différentes corrélations entre le signal reçu et une réplique locale affectée par un délai et un Doppler fixé [35]. Le but de cette opération est double :

- détecter la présence d'un satellite dans l'ensemble des signaux captés par l'antenne du récepteur ;
- déterminer, pour un satellite dont la présence a été détectée, le retard sur le code et la fréquence Doppler à la réception du signal associé afin d'initialiser les boucles de poursuite.

Plus précisément, le signal à la réception est donné par :

$$s_r(t) = \sum_{k=1}^{N_{sat}} s_r^k(t) + n(t), \quad (1.31)$$

avec  $n(t)$  le bruit thermique et  $s_r^k(t)$  le signal associé au satellite  $k$  qui peut s'écrire simplement de la forme :

$$s_r^k(t) = \sqrt{P_e^k} C_k(t - \tau^k) e^{i2\pi f_d^k t}, \quad (1.32)$$

avec respectivement  $\tau^k$  et  $f_d^k$  le décalage sur le code et la fréquence Doppler du signal à la réception associé au satellite  $k$  qui sont considérés constants sur le temps de corrélation. Pour réaliser l'étape d'acquisition pour le satellite  $i$ , le récepteur va créer une réplique

$$r_{(\tilde{\tau}, \tilde{f})}^i(t) = C_i(t - \tilde{\tau}) e^{i2\pi \tilde{f} t}, \quad (1.33)$$

avec  $(\tilde{\tau}, \tilde{f}) \in E = [\tau_{min}, \tau_{max}] \times [f_{min}, f_{max}]$  l'espace de recherche temps/fréquence. Le récepteur va alors calculer l'ensemble des points de corrélation suivants

$$AQ_i(\tilde{\tau}, \tilde{f}) = \frac{1}{T_{acq}} \int_0^{T_{acq}} s_r(t) \overline{r_{(\tilde{\tau}, \tilde{f})}^i(t)} dt = \Gamma_{s_r}^{r^i}(\tilde{\tau}, \tilde{f}) \quad (1.34)$$

avec  $T_{acq}$  le temps d'acquisition. Or, on sait d'après les propriétés de l'étape de corrélation décrites à la section 1.2.2, que les valeurs  $AQ_i(\tilde{\tau}, \tilde{f})$  sont quasi nulles si le signal associé au

satellite  $i$  ne fait pas partie des signaux reçus. Dans le cas contraire, la recherche temps-fréquence est maximale lorsque la réplique est synchronisée en temps et en fréquence avec le signal reçu, i.e., lorsque  $\tilde{\tau} = \tau^i$  et  $\tilde{f} = f_d^i$ . Pour pouvoir alors détecter la présence d'un satellite dans l'ensemble des signaux reçus, des techniques de détection sont mises en place après les recherche temps/fréquence pour déterminer si le maximum obtenu sur une recherche est suffisamment important pour confirmer la présence du satellite en question [36]. Si la présence du satellite  $i$  est confirmée, l'estimation de  $\tau^i$  et de  $f_d^i$  peut se faire par la recherche du maximum suivante :

$$(\hat{\tau}^i, \hat{f}_d^i) = \max_{(\tilde{\tau}, \tilde{f}) \in E} |AQ_i(\tilde{\tau}, \tilde{f})|. \quad (1.35)$$

La précision de ces estimations est logiquement liée à la finesse de la grille de recherche.

### 1.3.2 Exemples d'acquisition

Pour illustrer le fonctionnement de l'étape d'acquisition, nous allons considérer ici que le récepteur reçoit un signal de type C/A (associé au code de Gold numéro 1) avec un décalage temporel de  $\tau = 10$  chips et une fréquence Doppler de  $f_d = 20$  Hz. On supposera également que les conditions de réception du signal sont telles que  $C/N_0 = 27$  dBHz. Le temps d'acquisition sera de  $T_{acq} = 100$  ms (le temps d'acquisition est ici choisi grand pour l'exemple, en pratique on choisit  $T_{acq} \leq 20$  ms pour éviter tout problème de changement de signe du bit de navigation).

La recherche temps/fréquence se fera sur l'espace  $E = [-25\text{chips}, 25\text{chips}] \times [-100\text{Hz}, 100\text{Hz}]$  avec un pas de 0.25 chip pour la recherche temporelle et un pas de 2 Hz pour la recherche fréquentielle. Les résultats d'acquisition du signal reçu par des répliques locales associées aux codes de Gold numéro 1 et 2 sont donnés à la figure 1.16.

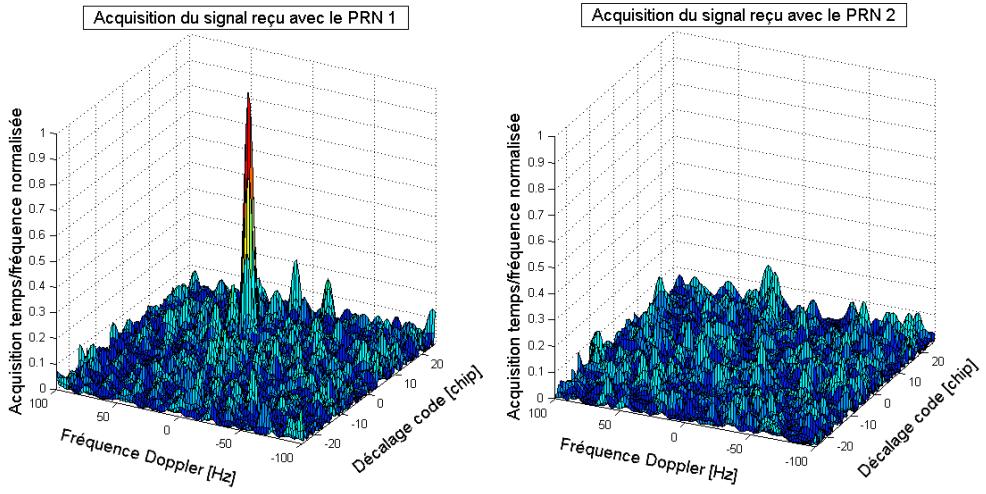


FIGURE 1.16 – Exemples de résultats d'acquisition

On voit sur la figure 1.16 que l'acquisition avec le code de Gold numéro 1 donne un pic de corrélation dont le maximum correspond bien aux valeurs de  $\tau$  et de  $f_d$  du signal reçu (car la grille de recherche est choisie de telle façon que le maximum corresponde bien

aux paramètres  $\tau$  et  $f_d$ ). Concernant l'acquisition avec la réplique associée au code de Gold numéro 2, on voit qu'il n'y a aucun maximum de corrélation significatif qui se dégage ; ce qui confirme l'absence du satellite associé au code de Gold numéro 2.

## 1.4 Poursuite du signal GNSS

Après l'étape d'acquisition détaillée dans la section 1.3 qui a pour but de détecter la présence d'un satellite et d'estimer le retard et la fréquence Doppler initiaux du signal à la réception, le récepteur bascule en mode poursuite. L'étape de poursuite permet de suivre l'évolution du retard sur le code, de la fréquence et de la phase porteuse engendrée par les mouvements relatifs entre le satellite et l'utilisateur et ainsi de mettre à jour le calcul du point. Cette étape est réalisée grâce à des structures qui vont suivre les variations des paramètres nécessaires au calcul de la position grâce à la corrélation du signal reçu par des répliques locales générées par le récepteur [37]. Le schéma bloc de l'étape de poursuite est donné à la figure 1.17.

Différentes mesures peuvent être réalisées par le récepteur lors de la poursuite pour estimer les différentes distances utilisateur/satellite. Les mesures du retard sur le code, de la phasage porteuse ainsi que le suivi de la fréquence Doppler du signal de navigation seront brièvement détaillés dans cette section.

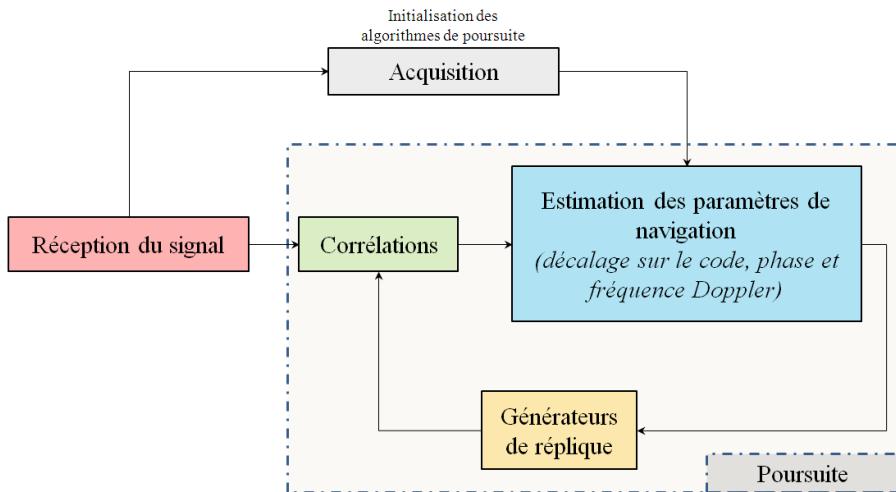


FIGURE 1.17 – Schéma bloc de l'étape de poursuite

### 1.4.1 Poursuite et observation du retard sur le code

Pour pouvoir calculer sa position, le récepteur doit estimer la distance qui le sépare des satellites de navigation comme expliqué à la section 1.1.4.1. L'estimation de distance associée à un satellite peut être réalisée à partir du retard induit par le temps de propagation sur le code du signal de navigation. En effet, si  $\tau^i$  est l'estimation du retard sur le code associé au satellite  $i$ , l'estimation de distance  $\rho^i$ , aussi appelée "pseudo-distance", associée au même satellite est alors déduite par :

$$\rho^i = c\tau^i. \quad (1.36)$$

Le retard sur le code est généralement en perpétuelle évolution du fait des mouvements relatifs entre le satellite et l'utilisateur au cours du temps. Pour pouvoir estimer la distance qui le sépare du satellite, le récepteur doit donc continuellement mettre à jour l'estimation du retard sur le code que l'étape d'acquisition lui a fourni initialement. Cette mesure de temps est effectuée au sein d'une architecture de poursuite qui met à jour le décalage temporel qu'il existe entre le code pseudo-aléatoire du signal reçu, et le même code généré en local au niveau du récepteur afin de les synchroniser (la génération du code local étant synchronisée avec la génération du code au niveau du satellite). La figure 1.18 illustre schématiquement la détermination du temps de propagation par estimation du décalage sur le code.

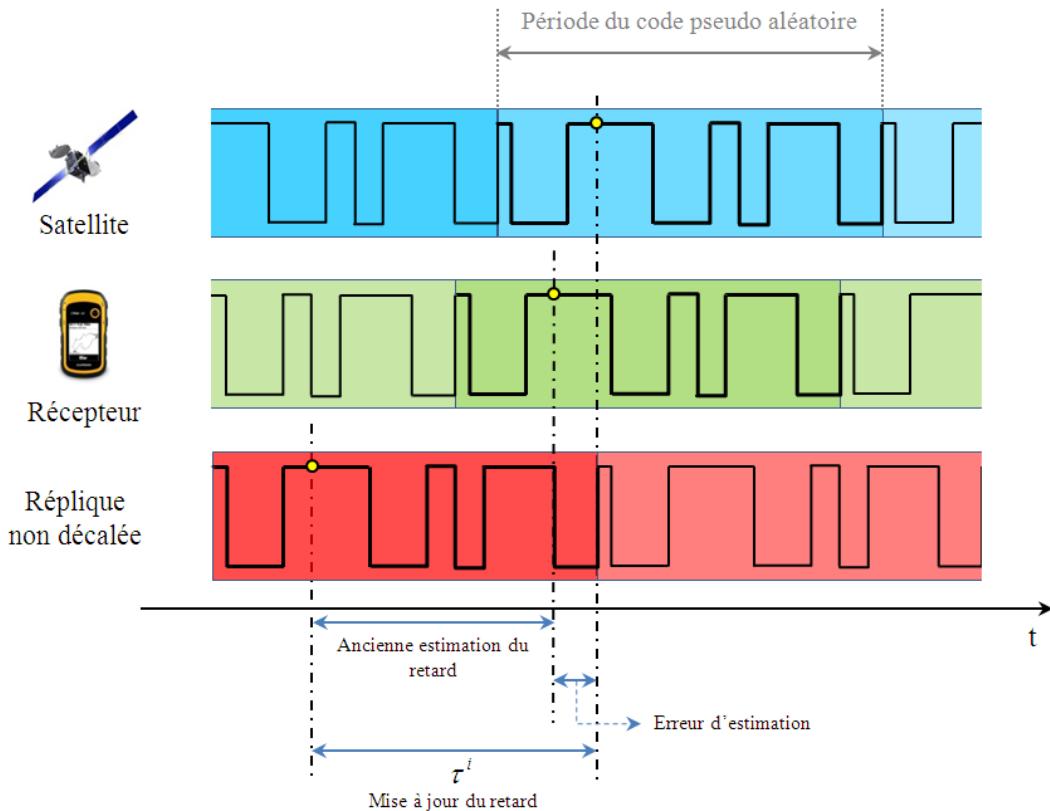


FIGURE 1.18 – Principe de l'estimation du décalage sur le code pseudo-aléatoire

Un exemple de structure de poursuite du retard sur le code est donné à la figure 1.19. Cette architecture correspond à celle des boucles à verrouillage aussi appelées DLL (*Delay Locked Loop*) lorsqu'elles poursuivent le retard sur le code. La boucle fonctionne en cinq étapes qui visent : à comparer le signal reçu avec la réplique locale grâce à une étape de corrélation, à estimer l'erreur d'estimation du retard grâce à un discriminateur qui va extraire cette erreur du produit de corrélation, à filtrer cette erreur et mettre à jour l'estimation du retard, et à générer une nouvelle réplique pour la prochaine étape de corrélation. Une étude détaillée des filtres de boucle (couplés à l'intégrateur) et de leurs dimensionnements est donnée dans le chapitre 2.

Pour pouvoir mesurer l'erreur d'estimation du retard, le récepteur calcule trois points de corrélation réalisés avec trois répliques locales différentes : c'est le principe du calcul

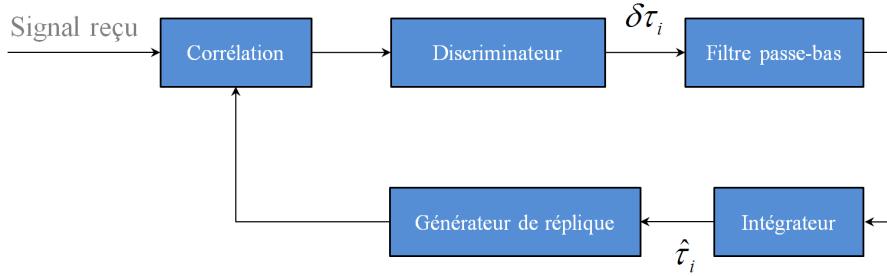


FIGURE 1.19 – Exemple de structure de poursuite du retard sur le code

*Early-Late.* Plus précisément, si le signal associé au satellite  $i$  est reçu avec un retard  $\tau^i$  et que le récepteur à une connaissance a priori de ce retard  $\hat{\tau}^i$  (i.e., le retard précédemment estimé par la boucle), trois répliques locales sont alors créées :

- une réplique décalée du retard  $\hat{\tau}^i$  (point de corrélation *Prompt*),
- une réplique décalée du retard  $\hat{\tau}^i + \delta_d/2$  (point de corrélation *Late*),
- une réplique décalée du retard  $\hat{\tau}^i - \delta_d/2$  (point de corrélation *Early*),

avec  $\delta_d$  la distance du discriminateur choisie telle que  $0 < \delta_d < T_c$ . La figure 1.20 illustre les différents points de corrélation associés aux trois répliques ainsi créées. Il existe différents discriminateurs permettant de mesurer l'erreur d'estimation du décalage sur le code via les différents points de corrélation calculés [5], [13]. Par exemple, il est possible d'estimer l'erreur par la combinaison suivante :

$$\frac{|E|^2 - |L|^2}{|E|^2 + |L|^2} = \frac{4}{2T_c - \delta_d} \delta\tau^i \quad (1.37)$$

avec  $\delta\tau^i = \tau^i - \hat{\tau}^i$  l'erreur d'estimation du décalage temporel.

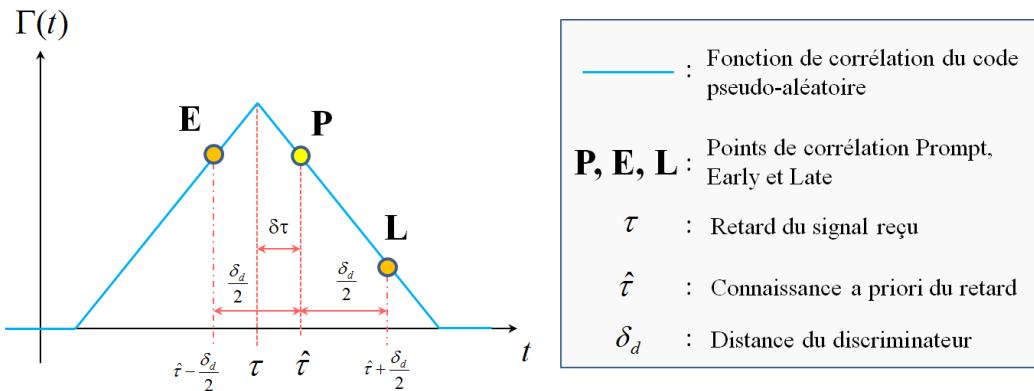


FIGURE 1.20 – Points de corrélation Early, Late et Prompt

L'estimation de la pseudo-distance donnée par la boucle de poursuite, aussi appelée observation de pseudo-distance, peut être décomposée en plusieurs composantes liées à la distance satellite/récepteur et aux diverses perturbations rencontrées lors de la propagation du signal. D'après les paragraphes 1.1.4.2 et 1.2.1.3, l'observation de pseudo-distance peut se modéliser de la sorte [38] :

$$\rho^i = d^i + c(\delta h_r - \delta h_s^i) + \Delta I_c^i + \Delta T_c^i + m_c^i + \epsilon_c^i \quad (1.38)$$

avec

- $d^i$  la distance géométrique satellite/récepteur,
- $\delta h_r$  le biais d'horloge du récepteur,
- $\delta h_s^i$  le biais d'horloge du satellite  $i$ ,
- $\Delta I_c^i$  l'erreur induite par les perturbations ionosphériques sur le code,
- $\Delta T_c^i$  l'erreur induite par les perturbations troposphériques sur le code,
- $m_c^i$  l'erreur due à la présence de multitrajets sur le code,
- $\epsilon_c^i$  le bruit de mesure sur le code.

L'équation (1.38) montre que l'observation de pseudo-distance contient, en plus de l'information de distance  $d^i$ , des termes de perturbations qui, s'ils ne sont pas estimés par les algorithmes de calcul du point ou divers modèles mathématiques, entraînent des erreurs de positionnement non négligeables [5].

#### 1.4.2 Poursuite et observation de la phase porteuse

En plus de pouvoir utiliser les mesures de pseudo-distance, il est possible pour le récepteur de calculer sa position en utilisant également la phase de l'onde porteuse (à noter que l'estimation de phase n'est pas exclusivement utilisée pour calculer la position de l'utilisateur). En effet, le temps de propagation du signal va entraîner un déphasage au niveau de la porteuse entre le signal reçu et les répliques générées par le récepteur (comme pour le code, la génération de la réplique locale est synchronisée en temps avec la génération au niveau du satellite). Tout comme le retard induit sur le code, ce déphasage est lié à la distance satellite/utilisateur. En effet, le déphasage théorique lié au temps de propagation utilisateur/satellite  $i$  est donné par

$$\Delta\phi^i = 2\pi \frac{d^i}{\lambda}, \quad (1.39)$$

avec  $\lambda$  la longueur d'onde de la porteuse. L'utilisation de l'information de phase permet théoriquement d'obtenir un positionnement plus précis que l'utilisation des pseudo-distances. Cependant, l'estimation du déphasage pose un problème d'ambiguïté. Comme pour le retard sur le code, l'estimation de la phase s'effectue avec des structures de poursuite qui comparent le signal reçu avec une réplique locale (une étude détaillée de ces structures de poursuite est donnée dans le chapitre 2). Lors de la poursuite, l'estimation de phase  $\hat{\phi}^i$  (aussi appelée observation de phase) ne correspondra pas au déphasage théorique sera donnée par :

$$\hat{\phi}^i = \Delta\phi^i - N^i, \quad (1.40)$$

avec  $N^i$  la phase inconnue du récepteur aussi appelé terme "d'ambiguïté entière". Ce terme d'ambiguïté résulte du fait qu'il n'est possible d'estimer ponctuellement une phase qu'à  $\pi$  ou  $2\pi$  près selon l'estimateur de phase utilisé. Ainsi, au moment où la poursuite de phase est lancée, le récepteur va synchroniser la phase de la réplique locale avec la phase du signal reçu en estimant un retard qui n'excède pas un cycle de phase comme l'illustre la figure 1.21. Lorsque la poursuite est enclenchée, l'estimation de phase au cours du temps peut également subir des pertes de cycles dues à cette incapacité à estimer la phase au-delà d'un cycle ; ce problème est appelé "phénomène de sauts de cycle" est détaillé dans la section 2.2.5.1.

A ces problèmes d'ambiguïté et de sauts de cycle s'ajoutent également toutes les perturbations liées à la propagation du signal vues dans les sections 1.1.4.2 et 1.2.1.3. L'observation

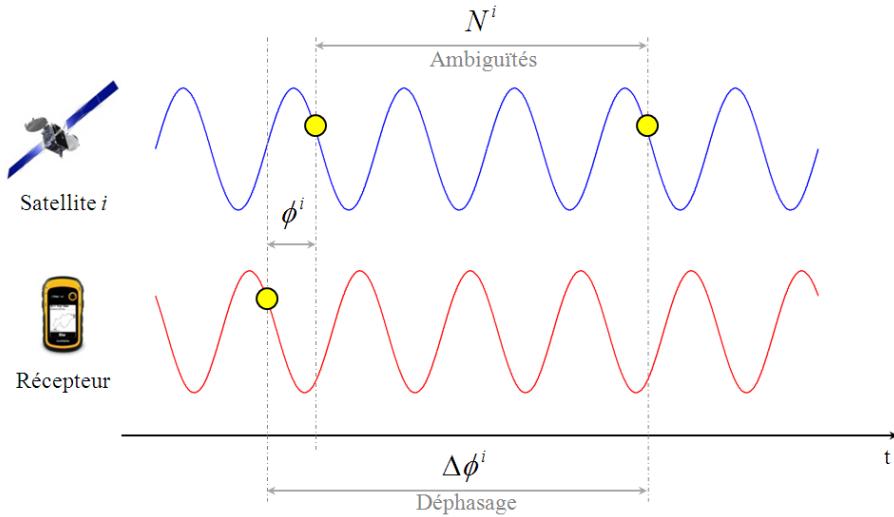


FIGURE 1.21 – Illustration du problème d’ambiguïté entière lors de l’estimation de phase

de phase pour un satellite  $i$  peut se décomposer de la sorte [39] :

$$\hat{\phi}^i = \Delta\phi^i + 2\pi f_p^i(\delta h_r - \delta h_s^i) + \Delta I_\phi^i + \Delta T_\phi^i + m_\phi^i + \epsilon_\phi^i + \Delta N^i \quad (1.41)$$

avec

- $f_p^i$  la fréquence porteuse,
- $\delta h_r$  le biais d’horloge du récepteur,
- $\delta h_s^i$  le biais d’horloge du satellite  $i$ ,
- $\Delta I_\phi^i$  l’erreur de phase induite par les perturbations ionosphériques sur la phase,
- $\Delta T_\phi^i$  l’erreur de phase induite par les perturbations troposphériques sur la phase,
- $m_\phi^i$  l’erreur de phase due à la présence de multitrajets sur la phase,
- $\epsilon_\phi^i$  le bruit de mesure sur la phase,
- $\Delta N^i$  l’erreur de phase due aux ambiguïtés de phase et aux sauts de cycle.

Comme pour l’observation de pseudo-distance, l’observation de phase est entachée de perturbations qui vont induire des erreurs lors du calcul de la position de l’utilisateur.

### 1.4.3 Poursuite de la fréquence Doppler

La connaissance de la fréquence Doppler du signal reçu ne permet pas d’estimer la position de l’utilisateur. Cependant, il est possible d’estimer la fréquence Doppler au cours du temps afin de synchroniser en fréquence les répliques locales du récepteur au niveau des boucles d’estimation du délai sur le code.

Outre la nécessité de synchroniser en fréquence les répliques du récepteur, la connaissance de la fréquence Doppler permet également d’assister l’estimation du décalage sur le code. En effet, connaissant la fréquence Doppler  $f_d$  du signal à la réception, il est possible de compenser la dynamique satellite/utilisateur au niveau de l’estimation du décalage sur le code  $\hat{\tau}$  par :

$$\hat{\tau} = \hat{\tau} - \frac{f_d}{f_p} T_{corr}, \quad (1.42)$$

avec  $f_p$  la fréquence porteuse du signal reçu et  $T_{corr}$  le temps de corrélation du signal au niveau du récepteur. Le principe de pré-compensation Doppler sur le code est donné à la figure 1.22.

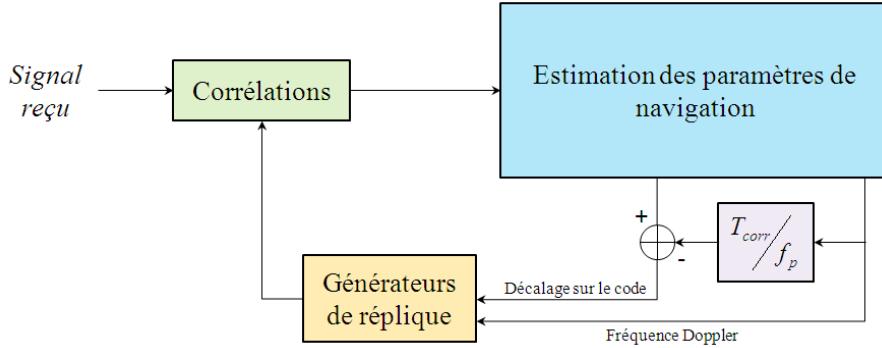


FIGURE 1.22 – Pré-compensation Doppler sur le code

Pour estimer la fréquence Doppler du signal reçu au cours du temps, un système bouclé (basé sur la corrélation du signal reçu avec une réplique locale) est mis en place comme pour le cas de l'estimation du décalage sur le code ou la phase [13], [5]. Une interaction entre le système de poursuite de la fréquence Doppler et le système de poursuite de phase peut également être instaurée de par la relation de dérivation/intégration qui lie ces deux grandeurs [40].

## 1.5 Calcul de la position utilisateur

Pour pouvoir calculer sa position, le récepteur va chercher à mesurer la distance qui le sépare des satellites dont il connaît les positions (grâce aux éphémérides contenues dans le message de navigation) via les différentes observations fournies par les algorithmes de poursuite. Pour ce faire, le récepteur dispose de plusieurs techniques regroupées en deux grandes familles : les techniques de positionnement standard et les techniques de positionnement précis.

Les techniques de positionnement standard utilisent directement les observations de pseudo-distance. Par exemple, si on ne cherche qu'à corriger le biais d'horloge du récepteur et si on pose :

- $(x_i, y_i, z_i)$  les coordonnées du satellite  $i$ ,
  - $(X, Y, Z)$  les coordonnées du récepteur,
  - $\delta h_r$  le biais horloge du récepteur avec les satellites,
  - $\epsilon^i$  l'erreur de mesure de pseudo-distance contenant les perturbations atmosphériques, les perturbations liées aux multritrajets et le bruit de mesure,
- alors la pseudo-distance  $\rho^i$  entre le récepteur et le satellite  $i$  peut s'écrire [5] :

$$\rho^i = \sqrt{(x_i - X)^2 + (y_i - Y)^2 + (z_i - Z)^2} + \delta h_r + \epsilon^i. \quad (1.43)$$

Si le récepteur reçoit les signaux de  $N_{sat}$  satellites en vue, alors on obtient le système d'équations suivant :

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{lcl} \rho^1 & = & \sqrt{(x_1 - X)^2 + (y_1 - Y)^2 + (z_1 - Z)^2} + \delta h_r + \epsilon^1 \\ \rho^2 & = & \sqrt{(x_2 - X)^2 + (y_2 - Y)^2 + (z_2 - Z)^2} + \delta h_r + \epsilon^2 \\ \vdots & & \\ \rho^{N_{sat}} & = & \sqrt{(x_{N_{sat}} - X)^2 + (y_{N_{sat}} - Y)^2 + (z_{N_{sat}} - Z)^2} + \delta h_r + \epsilon^{N_{sat}} \end{array} \right.$$

A partir du système  $(S_1)$  il est possible de déterminer les coordonnées  $(X, Y, Z)$  et le biais d'horloge  $\delta h_r$  du récepteur à condition d'avoir estimé suffisamment de pseudo-distances. Pour calculer la position du récepteur, d'autres techniques peuvent être mises en place comme les techniques d'estimation par les moindres carrés [13], les moindres carrés récursifs [41], le filtrage de Kalman étendu [5] ou la méthode de Bancroft [42].

Les techniques de positionnement précis utilisent, contrairement aux techniques de positionnement standards, les observations de pseudo-distance ainsi que les observations de phase. De plus, les diverses erreurs liées à la ionosphère ou aux ambiguïtés de phase sont désormais prises en compte et sont compensées par des combinaisons linéaires entre différentes observations obtenues sur une ou plusieurs portées. Une description détaillée de ces combinaisons est donnée dans [43]. Le récepteur a deux possibilités pour effectuer ces combinaisons :

- Soit il utilise les observations sur la pseudo-distance et sur la phase qu'il a lui-même estimé. Ce mode de positionnement correspond au mode PPP (*Precise Point Positioning*).
- Soit il utilise, en plus de ces observations, des observations provenant d'un récepteur de référence. Ce mode de positionnement correspond au mode RTK (*Real Time Kinematic*).

Quel que soit le mode de positionnement utilisé, les combinaisons d'observations sont traitées par des filtres de Kalman étendus qui estimate la position et la dynamique de l'utilisateur [43, 44].

## 1.6 Bilan

Ce chapitre donne une vision d'ensemble du fonctionnement de la navigation par satellites. Les systèmes GNSS sont composés entre autres de satellites, en orbite autour de la Terre et fournissant une couverture quasi globale, qui émettent des signaux contenant diverses informations de navigation. Pour calculer sa position, le récepteur doit analyser les signaux qu'il reçoit et tenter d'en estimer les temps de propagation afin de pouvoir se positionner relativement aux différents satellites. Bien que théoriquement abordable, l'estimation des temps de propagation se révèle être une tâche complexe à cause des perturbations subies par le signal de navigation lors de sa propagation. En effet, en plus de subir un phénomène de compression/dilatation lié au mouvement relatif du satellite par rapport à l'utilisateur, le signal subit de fortes perturbations lors de la traversée de l'atmosphère et notamment lors de la traversée de l'ionosphère. A cela s'ajoute le phénomène de multi-trajets au sol ainsi que la présence du bruit thermique dans le récepteur qui, aux vues des faibles puissances des signaux à la réception, noient le signal reçu dans du bruit. Pour pouvoir exploiter le signal de navigation et en séparer les composantes associées aux différents satellites, le récepteur procède à une étape de corrélation afin de faire ressortir le signal du bruit. Cette étape

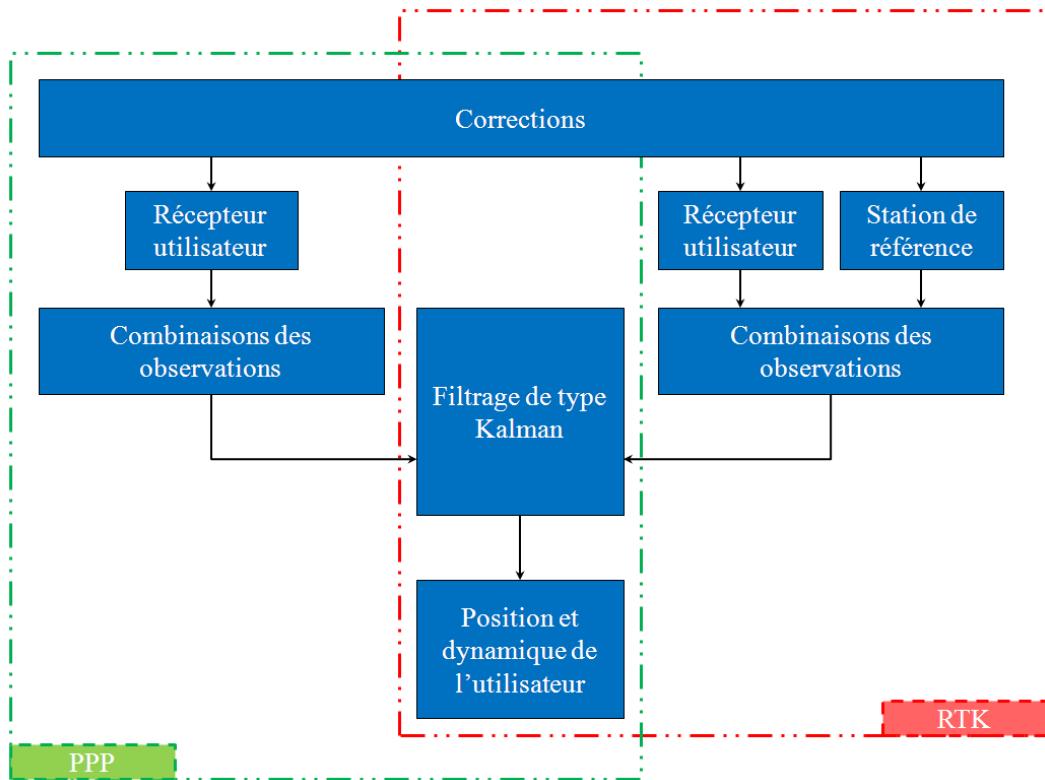


FIGURE 1.23 – Fonctionnement du positionnement précis par PPP ou RTK

est un élément essentiel des processus de poursuite des signaux qui, grâce à des répliques locales créées par le récepteur, vont mesurer divers paramètres au cours du temps grâce à des systèmes bouclés préalablement initialisés par l'étape d'acquisition.

Dans la suite, on s'intéressera particulièrement à l'étude de la poursuite de la phase porteuse. En effet, l'information de phase est un élément essentiel pour les méthodes de positionnement précis. Malheureusement, les algorithmes de poursuite de phase souffrent d'un manque de robustesse au bruit qui restreint les cas d'utilisation des techniques de positionnement précis. De part ce fait, la poursuite de phase est un mécanisme complexe qui est décrit dans le chapitre suivant.

# Chapitre 2

## Poursuite de la phase porteuse

Lors de l'étape de calcul du point, l'information de phase permet, en comparaison avec l'information du retard sur le code, d'obtenir une meilleure précision de positionnement. Malheureusement, la poursuite de phase est un processus complexe qui souffre d'un manque de robustesse en conditions de poursuite dégradées. Les algorithmes de poursuite de phase sont donc une étape du processus de navigation qui requiert une attention particulière.

Dans ce chapitre, nous allons particulièrement nous intéresser à la poursuite de phase réalisée par une boucle à verrouillage de phase. Après une description complète du dimensionnement de ce système asservi, nous allons nous intéresser au phénomène de sauts de cycle qui est un des principaux problèmes de robustesse de la poursuite de phase. S'en suit alors un état de l'art de la poursuite de phase des signaux multifréquence où nous allons rappeler les différents aspects physiques à prendre en compte lors de la poursuite de phase de tels signaux GNSS. Un rapide descriptif des structures de poursuite multifréquence existantes sera également donné.

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Comment suivre la phase porteuse ?</b>	<b>34</b>
<b>2.2</b>	<b>Poursuite de phase par boucle à verrouillage</b>	<b>35</b>
2.2.1	Structure générale d'une PLL	35
2.2.2	Modèle linéaire et analogique de la PLL	37
2.2.3	Boucles à verrouillage de phase numériques	45
2.2.4	Comportement en présence de bruit	50
2.2.5	Limite du modèle linéaire	53
<b>2.3</b>	<b>Poursuite de phase d'un signal multifréquence</b>	<b>62</b>
2.3.1	Proportionnalités des phases Doppler	62
2.3.2	Déphasage dus aux effets atmosphériques	63
2.3.3	Les structures de poursuite de phase multifréquence	65
<b>2.4</b>	<b>Bilan</b>	<b>68</b>

---

## 2.1 Comment suivre la phase porteuse ?

Il existe plusieurs méthodes pour suivre la phase porteuse du signal de navigation au cours du temps. Les techniques utilisées se basent généralement toutes sur des systèmes bouclés qui vont estimer la phase grâce à la comparaison du signal reçu avec une réplique du signal que le récepteur va créer. La différence entre ces méthodes réside dans les techniques d'estimation et les architectures des algorithmes de poursuite de phase.

Dans le cadre du GNSS, il existe globalement quatre types de méthodes d'estimation de phase regroupés en deux grandes familles d'architecture de poursuite qui sont : les poursuites de phase scalaires et les poursuites de phase vectorielles [45]. Les architectures de poursuite scalaire sont schématiquement illustrées à la figure 2.1. Pour ce type de structure, les boucles de poursuite estiment les phases des signaux de navigation de manière indépendante sur des canaux de réception propres à chacun des satellites. Les phases estimées sont alors envoyées à un filtre de navigation qui détermine les coordonnées et la vitesse de l'utilisateur. Pour estimer les différentes phases au cours du temps, il existe deux grandes méthodes de poursuite : les structures de type boucle à verrouillage et les structures basées sur des filtres de type Kalman. La différence entre les deux types de méthode réside dans la présence ou non d'une étape d'extraction de phase au sein de la boucle. Plus précisément, dans le cas d'une boucle à verrouillage de phase, un discriminateur est placé en sortie de corrélation afin d'extraire et de travailler directement sur l'information de phase [46]. Dans le cas contraire, lorsqu'on travaille directement après l'étape de corrélation, des techniques de filtrage de Kalman étendu sont mises en place afin d'estimer un ensemble de paramètres (dont la phase fait partie) résultant du modèle de linéarisation de la sortie de corrélation [47]. Il est également possible de réaliser des structures, à mi-chemin entre les deux méthodes, comportant une étape d'extraction de phase suivie d'une étape de filtrage de Kalman classique [48].

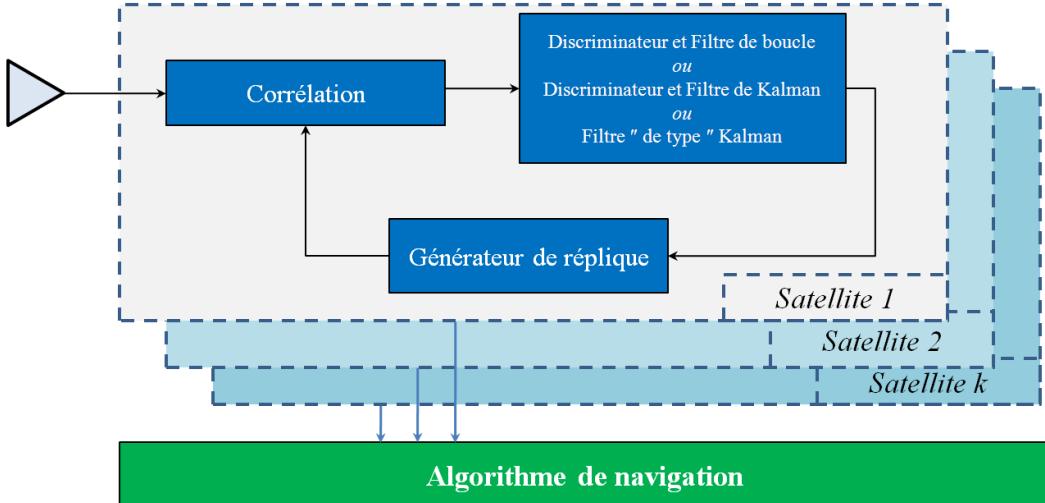


FIGURE 2.1 – Structure des systèmes de poursuite scalaire [45]

Les architectures de poursuite vectorielle sont schématiquement illustrées à la figure 2.2. Contrairement aux structures de poursuite scalaire, les structures de poursuite vectorielle combinent les étapes de poursuite du signal et de calcul du point au sein d'une même structure [49]. Cette configuration a, entre autres, l'avantage de pouvoir réaliser des poursuites de

phase en utilisant des signaux de différents satellites et issus de différentes constellations [50]. Bien que théoriquement plus précises, les structures de poursuite vectorielle peuvent, dans certaines conditions de poursuite, souffrir d'un manque de robustesse en environnement bruité [51]. En effet, une telle structure de poursuite implique l'interdépendance des canaux de réception. Par conséquent, si une des entrées est fortement dégradée, la précision d'estimation de tout le système peut être affectée et la structure risque de décrocher [49]. Pour pallier à ce problème, certaines structures vectorielles incluent des données inertielles IMU (*Inertial Measurement Unit*) au niveau de l'algorithme de navigation afin d'augmenter la robustesse de la structure [52, 53].

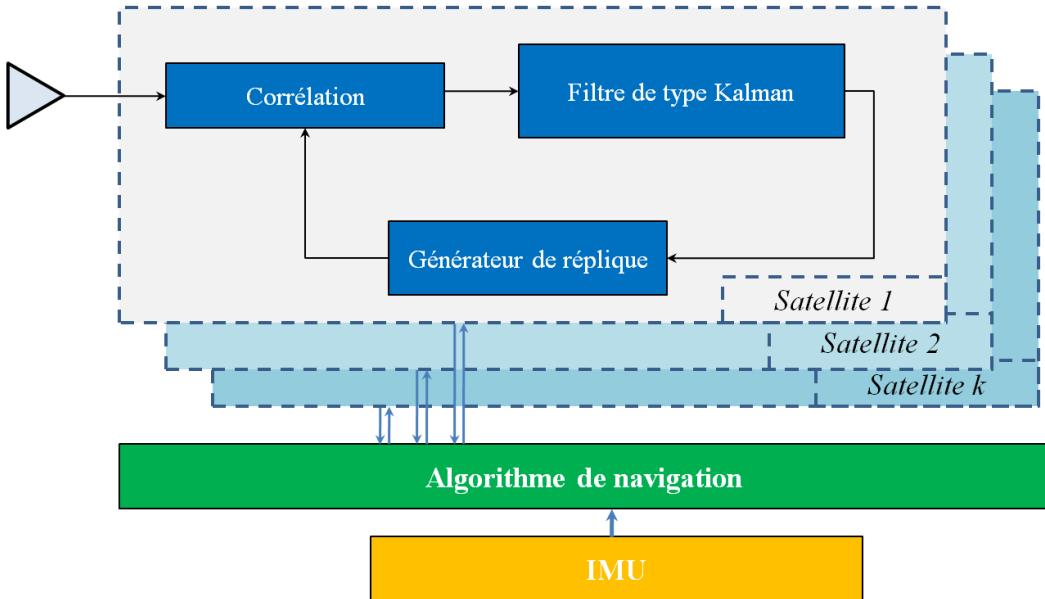


FIGURE 2.2 – Structure des systèmes de poursuite vectorielle [45]

Dans la suite de ce chapitre, et également dans les chapitres 3 et 4, on s'intéressera au cas de poursuite scalaire de la phase et plus particulièrement aux boucles à verrouillage de phase. Bien que ces structures soient les structures de poursuite de phase les plus basiques, elles vont nous permettre dans un premier temps de nous focaliser sur les divers mécanismes et les divers aspects de la poursuite de phase, indépendamment de l'estimation des autres paramètres de navigation. Plus tard, dans le chapitre 5, nous aborderons une approche de poursuite différente en nous intéressant à des techniques de filtrage Bayésien.

## 2.2 Poursuite de phase par boucle à verrouillage

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la poursuite de la phase porteuse du signal de navigation par une PLL (*Phase Locked Loop*). Plus précisément, nous allons effectuer une étude détaillée du comportement de cet outil de poursuite ainsi que les limites de ce système asservi.

### 2.2.1 Structure générale d'une PLL

Dans le cadre de poursuite d'un signal GNSS, la PLL est un système asservi qui va synchroniser la phase d'un signal généré localement au niveau du récepteur (appelé "réplique

locale") à la phase du signal de navigation reçu [5, 54].

Plus précisément, la PLL se compose de plusieurs étapes distinctes qui, une fois bouclées, permettent d'estimer au cours du temps la phase du signal reçu. Ces étapes, au nombre de cinq, sont les suivantes :

- Une étape de **corrélation** entre le signal reçu et la réplique locale (aussi appelée étape de pré-détection). Cette opération va permettre de comparer le signal reçu avec la réplique locale.
- Une étape d'**extraction de phase** réalisée par un discriminateur de phase qui va permettre de mesurer l'erreur d'estimation de phase en sortie de corrélation.
- Une étape de **filtrage** qui va filtrer le bruit sur l'erreur d'estimation.
- Une étape d'**intégration** qui va mettre à jour l'estimation de phase.
- Une étape de **génération** qui a pour but de créer une réplique locale mise à jour qui va pouvoir être utilisée lors de l'étape de corrélation de la prochaine itération.

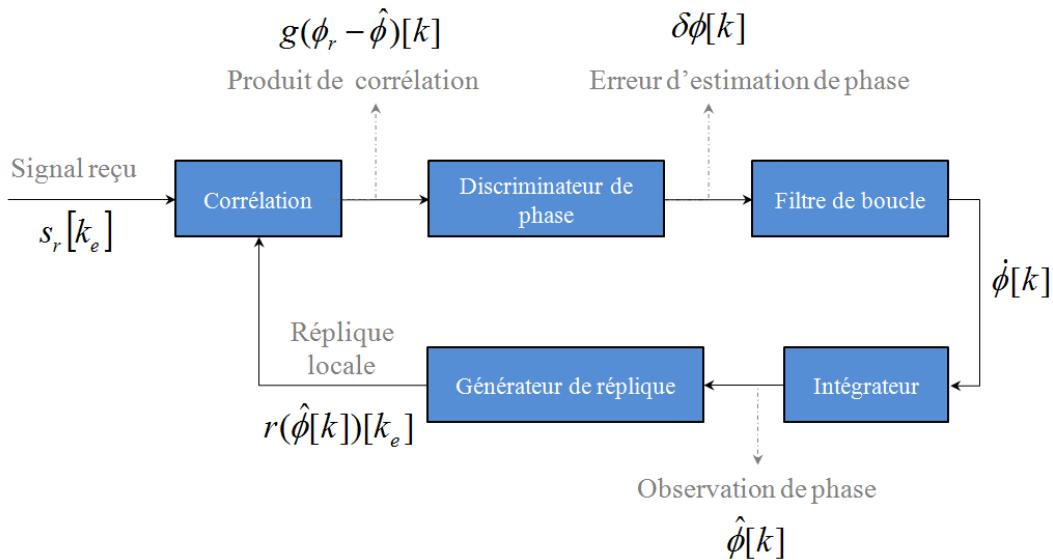


FIGURE 2.3 – Structure conventionnelle d'une PLL

La structure générale d'une PLL est donnée à la figure 2.3. Par la suite, et en accord avec les notations de la figure 2.3, on notera :

- $s_r$  le signal reçu bruité en entrée de la boucle ;
- $\phi_r$  la phase du signal reçu ;
- $g(\phi_r - \hat{\phi})$  le produit de corrélation entre le signal reçu et la réplique locale ;
- $\delta\phi$  la sortie du discriminateur de phase ;
- $\dot{\phi}$  la sortie du filtre de boucle ;
- $\hat{\phi}$  l'estimation de la phase d'intérêt ;
- $r(\hat{\phi})$  la réplique locale générée par la PLL en fonction de l'estimation de phase  $\hat{\phi}$ .

On prendra également pour les notations numériques au sein de la boucle  $x[k] = x(kT_{corr})$  avec  $T_{corr}$  le temps de corrélation. Pour les notations numériques des signaux en entrée de la boucle, on prendra pour notation  $x[k_e] = x(kT_e)$  avec  $T_e = 1/F_e$  le temps d'échantillonnage du signal à la réception.

Il existe différents types de discriminateurs de phase. Les discriminateurs les plus cou-

ramment utilisés sont : le discriminateur *Four-Quadrant Arctangent*, le discriminateur *Cross-product*, le discriminateur *Decision Directed Cross-Product* et le discriminateur *Arctangent* [5, 13]. En posant

$$I_p = \Re(g(\phi_r - \hat{\phi})), \quad (2.1)$$

$$Q_p = \Im(g(\phi_r - \hat{\phi})), \quad (2.2)$$

les expressions des différents discriminateurs sont données au tableau 2.1. Certains de ces discriminateurs ne tolèrent pas les modulations de phase ; c'est le cas du discriminateur *Four-Quadrant Arctangent* [55]. Ce type de discriminateur ne peut donc pas estimer la phase d'un signal de navigation modulé par le message de navigation. Ces discriminateurs peuvent cependant être employés pour des PLL suivant la phase d'un signal pilote ou pour des poursuites de phase d'un signal de navigation démodulé grâce à des techniques de *data wipe-off* [13, 56]. Les discriminateurs tolérant les modulations de phase sont appelés discriminateurs de Costas en référence aux boucles de Costas utilisées pour démoduler un signal [57]. Bien que ces discriminateurs puissent être employés pour la poursuite de phase d'un signal GNSS modulé par le message de navigation, ils restent néanmoins sensibles au changement du signe du bit de navigation. C'est pourquoi, lors de l'utilisation de ces discriminateurs, on supposera que la PLL est synchronisée avec le message de navigation et que le temps de corrélation n'excèdera pas la durée d'un bit de navigation, soit  $T_{corr} \leq 20$  ms, afin d'éviter les transitions entre ces derniers.

Nom du discriminateur	Expression
Four-Quadrant Arctangent	$\arctan 2(Q_P, I_P)$
Cross-product ( <i>Costas</i> )	$Q_P \times I_P$
Decision Directed Cross-Product ( <i>Costas</i> )	$Q_P \times \text{sign}(I_P)$
Arctangent ( <i>Costas</i> )	$\arctan(Q_P/I_P)$

TABLE 2.1 – Expressions des discriminateurs de phase pour PLL

La figure 2.4 illustre les différentes caractéristiques des discriminateurs de phase. De manière générale, on observe que les discriminateurs ont une caractéristique périodique qui offre une plage de linéarité plus ou moins grande comprise dans l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ .

### 2.2.2 Modèle linéaire et analogique de la PLL

La PLL représentée à la figure 2.3 est un système bouclé non-linaire dont l'analyse nécessite des études théoriques poussées [58–60]. Pour pouvoir étudier facilement le comportement des PLL, on utilise généralement un modèle linéaire de ces boucles afin de se ramener à des cas d'analyse classiques. Pour établir le modèle linéaire équivalent, on suppose que la PLL fonctionne autour de son point d'équilibre afin de pouvoir linéariser le discriminateur de phase. Plus précisément, on suppose que l'erreur d'estimation de phase  $\phi_r - \hat{\phi}$  est suffisamment faible pour qu'on puisse écrire

$$\mathcal{D}(g(\phi_r - \hat{\phi})) = \delta\phi = \phi_r - \hat{\phi} \quad (2.3)$$

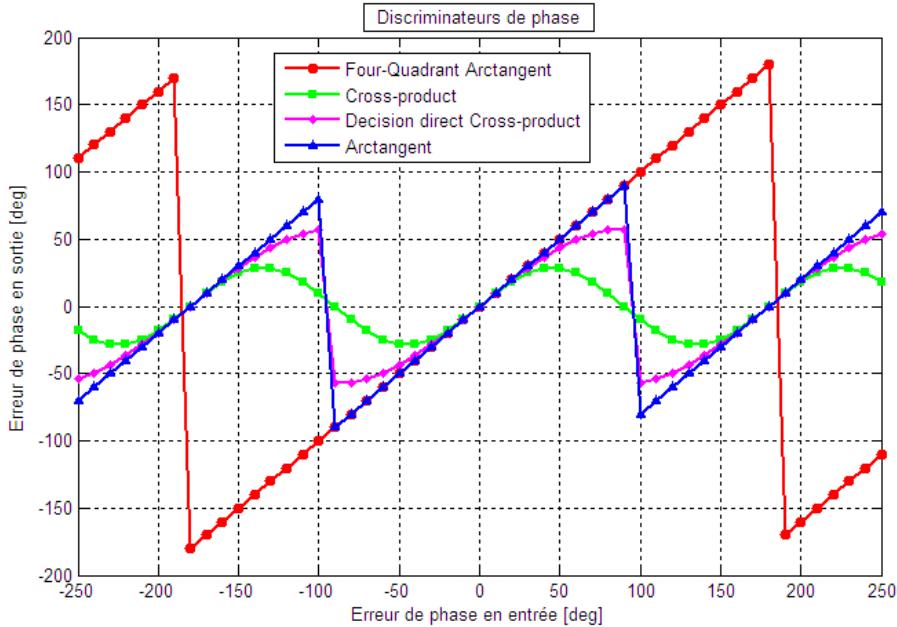


FIGURE 2.4 – Caractéristiques de discriminateurs de phase (cf. tableau 2.1 pour les notations des discriminateurs)

avec  $\mathcal{D}(.)$  l'étape d'extraction de phase réalisée par le discriminateur. Grâce à cette hypothèse, le modèle linéaire d'une PLL conventionnelle est donné par la structure illustrée à la figure 2.5. Dans le cadre d'une approximation linéaire, il est également possible de décomposer la phase reçue  $\phi_r$  en une phase d'intérêt  $\phi$  et du bruit de phase additif  $n_{\phi_r}$  :

$$\phi_r = \phi + n_{\phi_r} \quad (2.4)$$

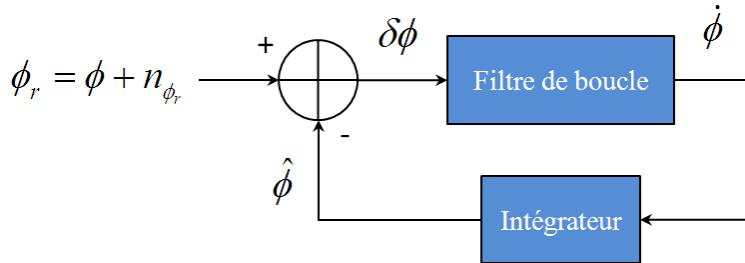


FIGURE 2.5 – Modèle linéaire d'une PLL

Bien que dans les récepteurs GNSS les PLL implémentées soient des boucles numériques, on supposera travailler dans un premier temps sur un modèle analogique de la boucle. En effet, modéliser la PLL numérique par son homologue analogique offre une analyse théorique du système plus simple et permet d'avoir une première approximation du comportement de la PLL lors de la poursuite. On supposera également travailler sur une phase non bruitée afin de pouvoir étudier dans un premier temps le comportement de la PLL résultant de la dynamique de la phase  $\phi$  (la prise en compte du bruit est traitée dans la section 2.2.4).

### 2.2.2.1 Définition de la bande de boucle

Dans le cadre d'une étude analogique, la fonction de transfert en boucle fermée  $H(p)$  de la PLL illustrée à la figure 2.5 est donnée par :

$$H(p) = \frac{\hat{\Phi}(p)}{\Phi(p)} = \frac{F(p)N(p)}{1 + F(p)N(p)} \quad (2.5)$$

avec  $F(p)$  et  $N(p)$  les fonctions de transfert analogiques du filtre de boucle et de l'intégrateur analogique,  $\hat{\Phi}(p)$  la fonction de transfert de l'estimation de phase et  $\Phi(p)$  la fonction de transfert de la phase d'intérêt. Grâce à cette fonction de transfert, on va pouvoir calculer la bande de boucle de la PLL qui s'exprime par [5, 57]

$$B_L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} |H(i\omega)|^2 d\omega. \quad (2.6)$$

La bande de boucle définie dans l'équation (2.6) représente la bande passante de la PLL. De cette grandeur va dépendre les réglages du filtre de boucle ainsi que les caractéristiques des poursuites de phase comme expliqué aux sections 2.2.2.2, 2.2.2.3 et 2.2.4.

### 2.2.2.2 Dimensionnement du filtre de boucle

Les performances globales de la PLL dépendent en grande partie du choix et du dimensionnement du filtre de boucle. Les filtres de boucle utilisés dans les PLL analogiques ont pour équation (en accord avec les notations de la figure 2.5) [61] :

$$\dot{\phi}(t) = K_1 \delta\phi(t) + K_2 \int_{t'=0}^{t'=t} \delta\phi(t') dt' + K_3 \int_{t'=0}^{t'=t} \int_{t''=0}^{t''=t'} \delta\phi(t'') dt'' dt' + \dots \quad (2.7)$$

avec  $K_1, K_2, K_3$ , etc. les coefficients du filtre. La fonction de transfert du filtre de boucle est donc donnée par :

$$F(p) = \frac{\dot{\Phi}(p)}{\delta\Phi(p)} = K_1 + \frac{K_2}{p} + \frac{K_3}{p^2} + \dots + \frac{K_N}{p^{N-1}} \quad (2.8)$$

avec  $N$  l'ordre du filtre aussi appelé ordre de la boucle. D'après les équations (2.5) et (2.6), l'ordre ainsi que les valeurs des coefficients du filtre vont influer sur la valeur de la bande de boucle de la PLL. En pratique, l'ordre et la bande de boucle d'une PLL sont préalablement choisis en fonction des conditions de poursuite de phase. De ces choix dépendent alors les valeurs des différents coefficients du filtre. Les calculs de ces coefficients pour des boucles d'ordre 1, 2 et 3 (dont les expressions sont données dans le tableau 2.2), sont détaillés dans les paragraphes qui suivent.

#### Boucle d'ordre 1

La structure d'une PLL analogique d'ordre 1 est donnée à la figure 2.6. La fonction de transfert en boucle fermée  $H_1(p)$  associée est donnée par :

$$H_1(p) = \frac{K_1}{K_1 + p}, \quad (2.9)$$

dont l'unique pôle est placé en  $-K_1$ . L'expression de la bande de boucle est donc donnée par :

$$B_L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} |H_1(i\omega)|^2 d\omega, \quad (2.10)$$

$$= \frac{K_1}{4}. \quad (2.11)$$

Ordre	$K_1$	$K_2$	$K_3$
1	$K_1 = B_L/4$	×	×
2	$K_1 = (8/3)B_L$	$K_2 = (1/2)K_1^2$	×
3	$K_1 = (60/23)B_L$	$K_2 = (4/9)K_1^2$	$K_3 = (2/27)K_1^3$

TABLE 2.2 – Expressions classiques des coefficients du filtre de boucle en fonction de la bande de boucle pour des PLL d'ordre 1, 2 et 3

L'équation (2.11) montre que la valeur du coefficient  $K_1$  du filtre de boucle dépend directement de la valeur de la bande de boucle que l'on souhaite imposer à la PLL. De manière évidente,  $B_L > 0$  et donc  $K_1 > 0$  ce qui assure la stabilité de la boucle car le pôle sera à partie réelle négative. La boucle opérera alors en régime amorti comme le montre le positionnement du pôle illustré à la figure 2.7.

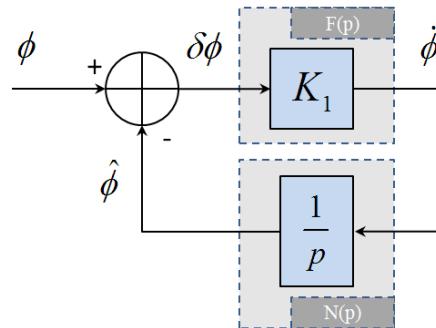


FIGURE 2.6 – Structure du modèle linéaire d'une PLL analogique d'ordre 1

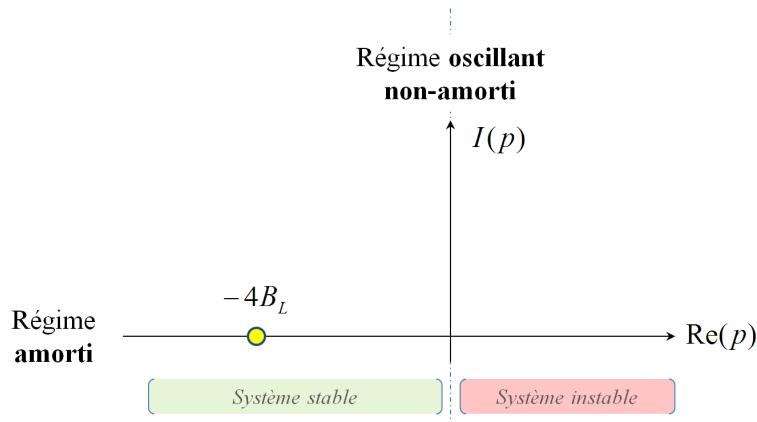


FIGURE 2.7 – Positionnement du pôle dans le plan complexe pour une PLL analogique d'ordre 1

### Boucle d'ordre 2

La structure d'une PLL analogique d'ordre 2 est donnée à la figure 2.8. La fonction de transfert en boucle fermée  $H_2(p)$  associée est donnée par :

$$H_2(p) = \frac{K_1 p + K_2}{p^2 + K_1 p + K_2} = \frac{2\xi\omega_n p + \omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}, \quad (2.12)$$

avec  $\omega_n$  et  $\xi$  la pulsation et le coefficient d'amortissement réduits définis par :

$$\omega_n = \sqrt{K_2}, \quad (2.13)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{K_1}{\sqrt{K_2}}. \quad (2.14)$$

Pour la suite, on choisira  $\xi = \sqrt{2}/2$  qui correspond au mode de fonctionnement de la boucle présentant un faible dépassement et un temps de réponse le plus rapide [62]. Avec cette valeur d'amortissement, les deux pôles  $p_1$  et  $p_2$  de la fonction de transfert (2.12) sont donnés par :

$$p_1 = -\omega_n e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad (2.15)$$

$$p_2 = -\omega_n e^{i\frac{\pi}{4}}. \quad (2.16)$$

Le positionnement des pôles dans le plan complexe est donné à la figure 2.9. Pour calculer les valeurs des coefficients de filtre de boucle, il faut calculer la valeur de  $\omega_n$ . Pour ce faire, on utilise l'expression de la bande de boucle donnée dans [61] :

$$B_L = \frac{\omega_n}{2} \left[ \xi + \frac{1}{4\xi} \right]. \quad (2.17)$$

En combinant les équations (2.13), (2.14) et (2.17), on obtient les expressions des coefficients suivantes :

$$K_1 = \frac{8}{3} B_L, \quad (2.18)$$

$$K_2 = \frac{1}{2} K_1^2. \quad (2.19)$$

On voit ainsi que  $K_1 > 0$  et  $K_2 > 0$ , ce qui assure la stabilité de la PLL.

### Boucle d'ordre 3

La structure d'une PLL analogique d'ordre 3 est donnée à la figure 2.10. La fonction de transfert en boucle fermée  $H_3(p)$  associée est donnée par :

$$H_3(p) = \frac{K_1 p^2 + K_2 p + K_3}{p^3 + K_1 p^2 + K_2 p + K_3} = \frac{p^2(2\xi\omega_n + \beta) + p(\omega_n^2 + 2\xi\omega_n\beta) + \omega_n^2\beta}{(p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2)(p + \beta)}, \quad (2.20)$$

avec

$$K_1 = 2\xi\omega_n + \beta, \quad (2.21)$$

$$K_2 = \omega_n^2 + 2\xi\omega_n\beta, \quad (2.22)$$

$$K_3 = \omega_n^2\beta. \quad (2.23)$$

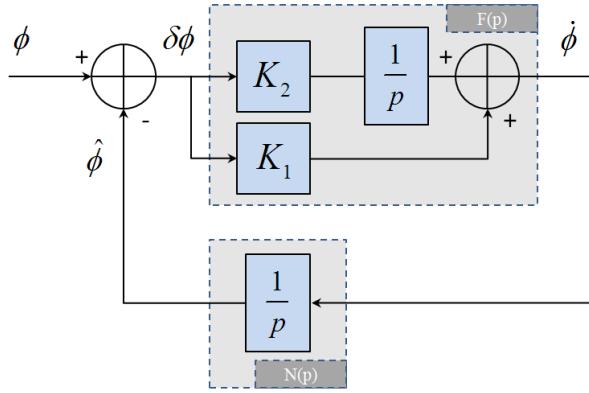


FIGURE 2.8 – Structure du modèle linéaire d'une PLL analogique d'ordre 2

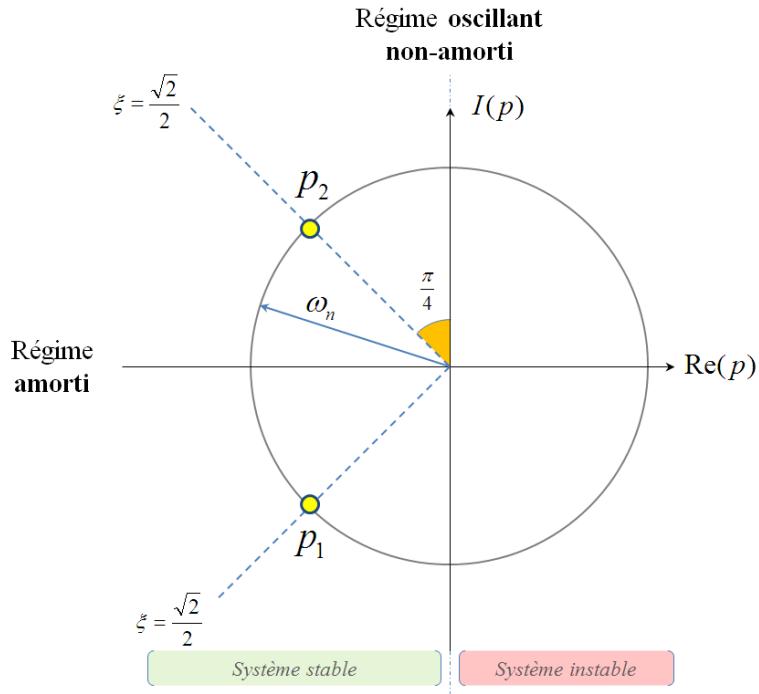


FIGURE 2.9 – Positionnement des pôles dans le plan complexe pour une PLL analogique d'ordre 2

On voit d'après l'équation (2.20) que la fonction de transfert présente 3 pôles : deux pôles complexes conjugués et un pôle réel. Pour le réglage des pôles complexes, on se placera dans le même cas que la boucle d'ordre 2 en choisissant  $\xi = \sqrt{2}/2$ . Pour le pôle réel, on choisit de lui associer une vitesse de convergence égale aux deux pôles complexes. On a donc, d'après la figure 2.11,  $\beta = \omega_n/\sqrt{2}$ .

Pour une boucle analogique d'ordre 3 et pour les choix de  $\xi$  et  $\beta$  effectués, on a l'expression de la bande de boucle suivante [61] :

$$B_L = \frac{23}{20\sqrt{2}}\omega_n. \quad (2.24)$$

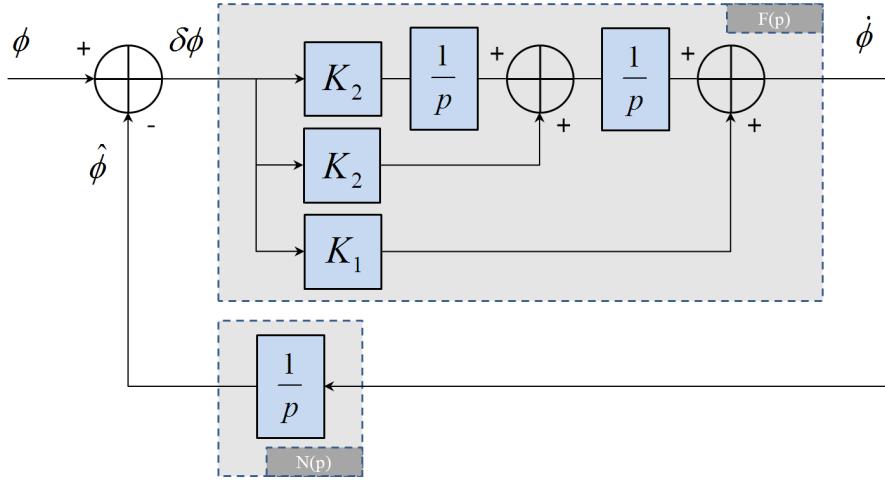


FIGURE 2.10 – Structure du modèle linéaire d'une PLL analogique d'ordre 3

En combinant les équations (2.21), (2.22), (2.23) et (2.24), on obtient les expressions des coefficients suivantes :

$$K_1 = \frac{60}{23}B_L, \quad (2.25)$$

$$K_2 = \frac{4}{9}K_1^2, \quad (2.26)$$

$$K_3 = \frac{2}{27}K_1^3. \quad (2.27)$$

### 2.2.2.3 Réponses des boucles

Lors de la poursuite de phase, la PLL est amenée à estimer une dynamique de phase d'entrée  $\Phi(p)$  qui peut se décomposer de la sorte :

$$\Phi(p) = \sum_{k=1}^{N_{dyn}} \Phi_k(p), \quad (2.28)$$

avec  $\Phi_k(p)$  la dynamique élémentaire d'ordre  $k$  et  $N_{dyn}$  l'ordre maximal de la dynamique d'entrée. Dans le cadre de la thèse où on s'intéressera à des dynamiques de type piéton, on supposera suivre des dynamiques au plus d'ordre 3, i.e., on pourra écrire :

$$\Phi(p) = \Phi_1(p) + \Phi_2(p) + \Phi_3(p), \quad (2.29)$$

avec  $\Phi_1(p)$  une dynamique de type échelon,  $\Phi_2(p)$  une dynamique de type rampe et  $\Phi_3(p)$  une dynamique de type accélération dont les expressions sont :

$$\Phi_n(p) = \frac{\alpha_n}{p^n} \quad \text{pour } n = 1, \dots, 3 \quad (2.30)$$

avec  $\alpha_n$  l'amplitude de la dynamique d'ordre  $n$ . Selon l'ordre et la valeur de la bande de boucle choisis, les poursuites de phases réalisées par la PLL auront des caractéristiques différentes notamment au niveau du comportement asymptotique et de la vitesse de convergence

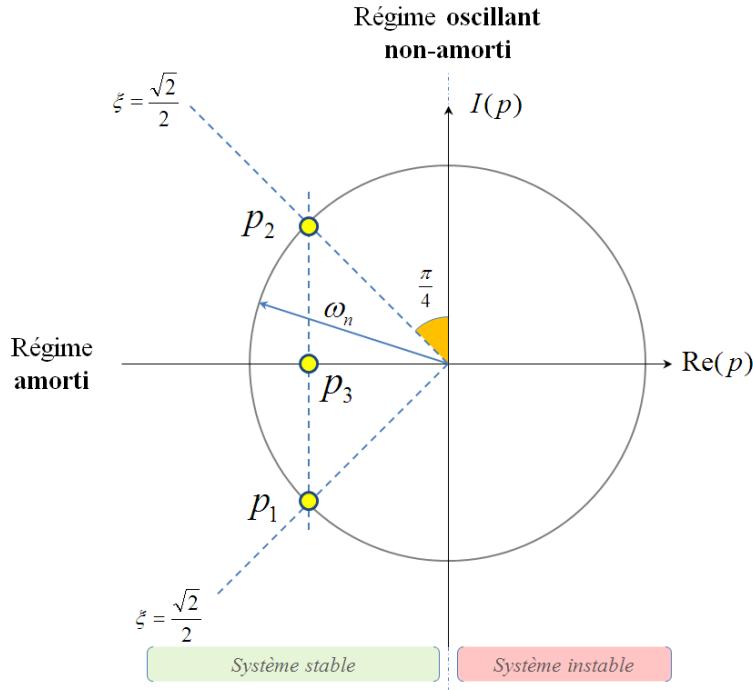


FIGURE 2.11 – Positionnement des pôles dans le plan complexe pour une PLL analogique d’ordre 3

de la poursuite.

Pour étudier le comportement asymptotique de la PLL, on s’intéressera à l’erreur d’estimation  $e(t) = \phi(t) - \hat{\phi}(t)$  dont on calculera la limite  $e_\infty^{analog}$  grâce au théorème de la valeur finale [62] :

$$e_\infty^{analog} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) - \hat{\phi}(t), \quad (2.31)$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} p(\Phi(p) - \hat{\Phi}(p)), \quad (2.32)$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} p(1 - H_{BF})\Phi(p). \quad (2.33)$$

En combinant les équations (2.9), (2.12), (2.20), (2.30) et (2.33), on obtient les erreurs en régime permanent données dans le tableau 2.3.

Les erreurs en régime permanent données dans le tableau 2.3 sont illustrées à la figure 2.12 où sont représentées les différentes réponses des PLL en fonction des différentes dynamiques d’entrée ( $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1$  et  $\alpha_3 = 1$ ) pour une bande de boucle  $B_L = 5$  Hz. La figure 2.13 illustre quant à elle l’influence de la valeur de la bande de boucle sur la valeur de l’erreur en régime permanent. Pour une boucle d’ordre 1 suivant une dynamique de type rampe, le biais de poursuite est inversement proportionnel à la bande de boucle. La figure 2.13 montre bien cette relation en affichant des biais de poursuite diminuant lorsque la bande de boucle de la PLL augmente. Le choix de la valeur de la bande de boucle va également jouer sur la vitesse de convergence des poursuites. Comme l’illustre la figure 2.13, plus la bande de boucle est grande, plus le temps de convergence est rapide. On comprend alors, d’après les deux dernières observations, que la valeur de la bande de boucle influe sur la capacité de la

Ordre	Echelon	Rampe	Accélération
1	0	$\frac{\alpha_2}{K_1}$	$+\infty$
2	0	0	$\frac{\alpha_3}{K_2}$
3	0	0	0

TABLE 2.3 – Expressions des erreurs en régime permanent pour des PLL analogiques d’ordre 1, 2 et 3

PLL à poursuivre une dynamique de phase : plus la bande de boucle est grande, meilleures seront les performances de la poursuite. Notons tout de même que ce résultat est à pondérer en présence de bruit comme illustré dans la section 2.2.4.

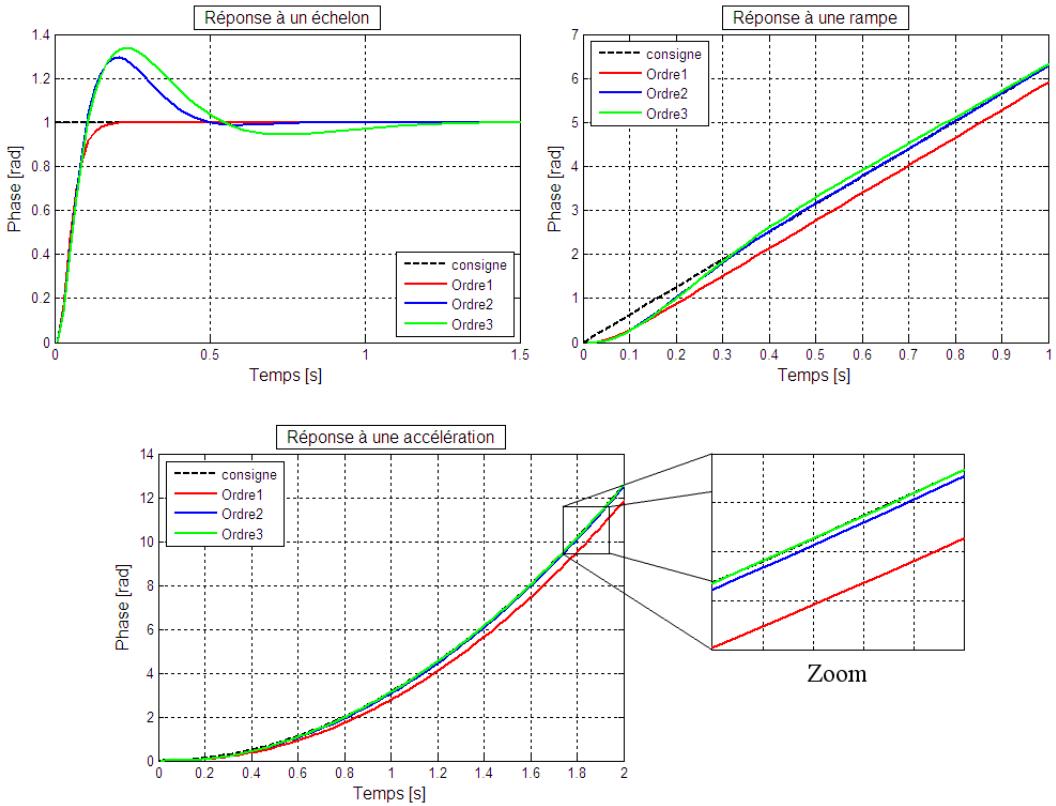


FIGURE 2.12 – Réponses des PLL d’ordre 1, 2 et 3 à des dynamiques de type échelon, rampe et accélération

### 2.2.3 Boucles à verrouillage de phase numériques

Dans le cadre du GNSS, les PLL implémentées sont des boucles numériques aussi appelées DPLL (*Digital Phase Locked Loop*). Le temps d’échantillonnage des DPLL est donnée par le temps de corrélation  $T_{corr}$  du signal reçu avec la réplique locale. Selon les applications, les valeurs de bande de boucle et de temps de corrélation vont donner une valeur  $B_L T_{corr}$

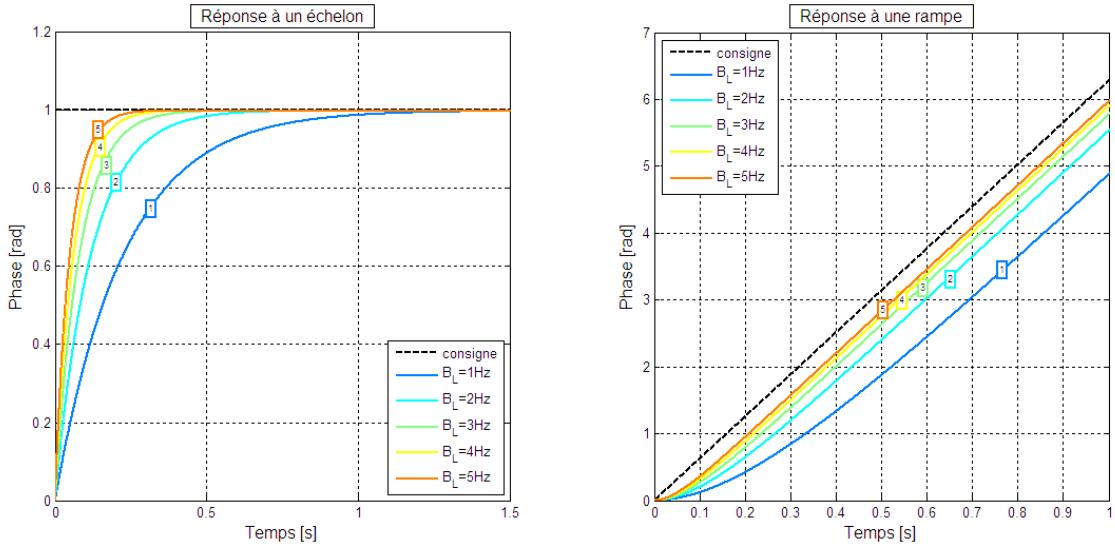


FIGURE 2.13 – Influence de la bande de boucle sur le temps de convergence et l’erreur en régime permanent des réponses à un échelon et à une rampe pour une boucle d’ordre 1

qui ne permet plus d’approximer le comportement des boucles numériques par celui de leurs homologues analogiques. En effet, l’approximation d’une DPLL par son homologue analogique n’est possible que pour des valeurs de bande de boucle et de temps de corrélation tels que  $B_L T_{corr} \ll 1$ . Lorsque la DPLL ne respecte plus cette hypothèse, son dimensionnement doit se faire en numérique si l’on souhaite obtenir les performances de poursuite souhaitées.

### 2.2.3.1 Transformation analogique/numérique

Le passage d’une boucle analogique à une boucle numérique se fait grâce à une transformée qui établit une correspondance entre la variable analogique  $p$  et la variable numérique  $z$ . Sachant que l’analyse d’un filtre analogique se réalise en faisant décrire à la variable  $p$  l’axe imaginaire pur et que dans le cas d’un filtre analogique on fait varier  $z$  sur le cercle unité, la transformée doit donc faire correspondre l’axe imaginaire pur au cercle unité.

La première idée pour réaliser une telle transformée consiste à chercher une relation entre  $p$  et  $z$  qui fait correspondre la réponse impulsionale du filtre numérique avec la réponse impulsionale échantillonnée du filtre analogique correspondant. C’est la technique de la conservation impulsionale [63]. Plus précisément, si  $h(t)$  représente la réponse impulsionale d’un filtre analogique, la version échantillonnée  $h_e(t) = h(kT_{corr})$  de cette fonction est donnée par :

$$h_e(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} h(t)\delta(t - kT_{corr}) = \sum_{k=1}^{+\infty} h(kT_{corr})\delta(t - kT_{corr}). \quad (2.34)$$

En appliquant la transformée de Laplace à l’équation (2.34), on obtient

$$H_e(p) = \mathcal{L}\{h_e\}(p) = \sum_{k=1}^{+\infty} h(kT_{corr})e^{-pkT_{corr}}. \quad (2.35)$$

Par analogie avec la transformée en  $z$  de  $h(t)$  qui est donnée par

$$H(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} h(kT_{corr})z^{-k}, \quad (2.36)$$

on peut établir la relation suivante :

$$z = e^{pT_{corr}}. \quad (2.37)$$

L'expression (2.37) pose cependant des problèmes de repliement de spectre lorsque la bande passante du filtre analogique excède la bande  $[-\frac{1}{2T_{corr}}, \frac{1}{2T_{corr}}]$ . Une seconde possibilité consiste à prendre le développement limité au premier ordre de

$$z^{-1} = e^{-pT_{corr}}. \quad (2.38)$$

On obtient alors la relation suivante :

$$z = \frac{1}{1 - pT_{corr}}. \quad (2.39)$$

La relation (2.39) ne permet cependant pas d'établir une bijection entre l'axe des imaginaires purs avec le cercle unité. C'est pourquoi, par la suite, on préférera utiliser la transformée bilinéaire donnée par [63, 64]

$$p = \frac{2}{T_{corr}} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (2.40)$$

Comme l'illustre la figure 2.14, la transformée bilinéaire fait correspondre la partie négative et stable du plan  $p$  à l'intérieur du cercle unité. Ainsi, grâce à la relation (2.40), on obtient à partir de systèmes continus stables des systèmes discrets stables [65]. La transformée bilinéaire implique également un phénomène de gauchissement du domaine fréquentiel. En effet, si on note  $f_a$  la fréquence analogique et  $f_n$  la fréquence numérique associée, on a

$$f_a = \frac{1}{\pi T_{corr}} \tan(\pi f_n T_{corr}). \quad (2.41)$$

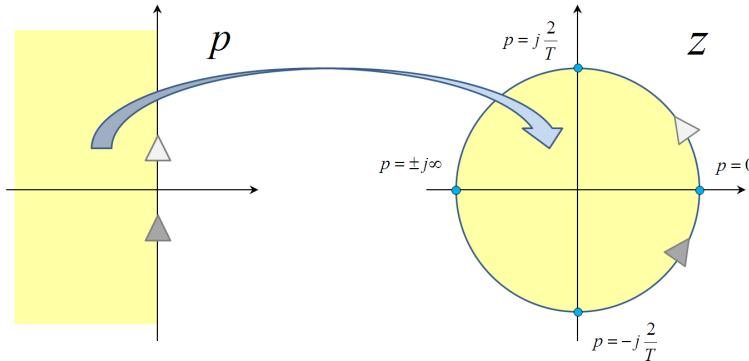


FIGURE 2.14 – Correspondance du plan stable des  $p$  et du cercle unité des  $z$  pour la transformée bilinéaire

Le passage en analogique/numérique va s'effectuer au niveau de l'implémentation numériques des intégrateurs présents dans la boucle. En analogique, en utilisant la transformée bilinéaire, la fonction de transfert d'un intégrateur est donnée par :

$$N(z) = \frac{T_{corr}}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}, \quad (2.42)$$

On remarquera que l'expression (2.42) correspond à la méthode d'intégration numérique dite "méthode des trapèzes" qui est plus précise que la méthode d'intégration dite "méthode des rectangles" obtenue via l'expression (2.39) [62].

### 2.2.3.2 Calcul des coefficients numériques du filtre de boucle

Dans le cas de boucles numériques, la bande de boucle s'exprime par [61, 66, 67] :

$$2B_L = \frac{1}{i2\pi T_{corr}} \oint H(z)H(z^{-1})z^{-1}dz, \quad (2.43)$$

$$= \int_{-1/2T_{corr}}^{1/2T_{corr}} |H(e^{i2\pi fT_{corr}})|^2 df, \quad (2.44)$$

avec  $H(z)$  la fonction de transfert en boucle fermée de la DPLL qui s'exprime par

$$H(z) = \frac{z^{-1}F(z)N(z)}{1 + z^{-1}F(z)N(z)}, \quad (2.45)$$

avec  $F(z)$  la fonction de transfert discrète du filtre de boucle et  $N(z)$  la fonction de transfert de l'intégrateur numérique. Comme dans le cas d'une PLL analogique, les valeurs des coefficients numériques du filtre de boucle vont influer sur la valeur de la bande de boucle. Dans la section 2.2.2.2, des expressions des coefficients analogiques ont été établies en fonction de la bande de boucle. Pour dimensionner le filtre numérique en fonction de la bande de boucle imposée à la DPLL, il est possible, dans une première approximation, de choisir les expressions analogiques des coefficients. Ce choix entraîne cependant des erreurs de dimensionnement de la boucle. En effet, en utilisant les expressions analogiques des coefficients du filtre et en calculant la bande de boucle numérique résultante, il est possible d'observer une différence entre la valeur obtenue et la valeur souhaitée. Cette erreur sera plus ou moins importante selon le temps d'intégration de la DPLL. La figure 2.15 illustre ce phénomène pour une boucle numérique d'ordre 1 en traçant l'erreur commise entre la valeur de bande de boucle souhaitée et la valeur de bande de boucle numérique calculée à partir des valeurs des coefficients analogiques. On voit sur la figure 2.15 que l'erreur commise sur

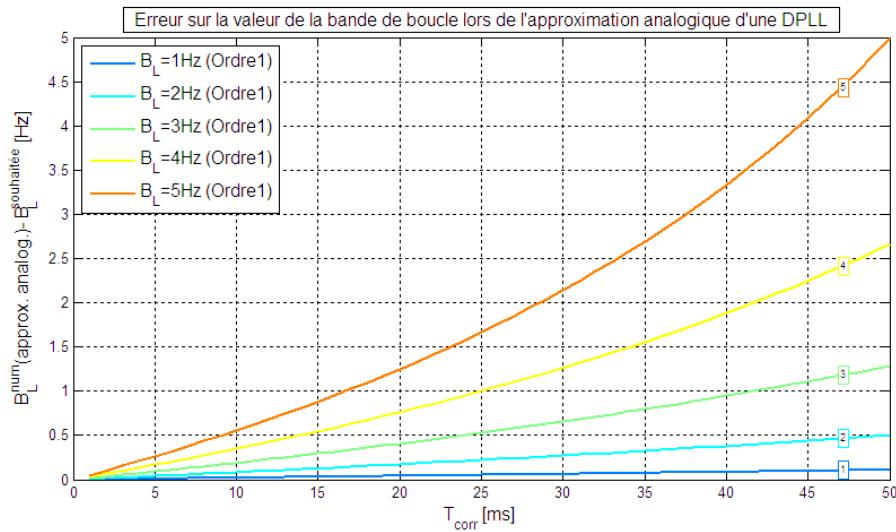


FIGURE 2.15 – Erreur commise sur la valeur de la bande de boucle pour une DPLL d'ordre 1 lors de l'approximation analogique

la bande de boucle est quasi nulle lorsque  $B_L T \rightarrow 0$ , ce qui confirme que l'approximation d'une DPLL par une PLL analogique est une bonne approximation pour des faibles valeurs de  $B_L T$ . On remarque cependant qu'il n'est plus possible d'utiliser cette approximation à

partir de certaines valeurs de bande de boucle ou de temps d'intégration car les erreurs de dimensionnement commises croient avec le produit  $B_L T$ . En effet, en continuant d'utiliser les expressions analogiques des coefficients pour des valeurs de  $B_L T$  ne permettant plus l'approximation analogique, les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée de la DPLL ne seront plus exactement à la place souhaitée et vont donc modifier le comportement final de la DPLL [61].

Pour remédier à ce problème, il faut calculer les valeurs des coefficients grâce au modèle numérique de la DPLL. Contrairement au cas analogique, il est difficile d'obtenir une expression analytique des coefficients numériques en fonction de la valeur de la bande de boucle imposée. C'est pourquoi en pratique, les valeurs des coefficients sont calculées numériquement en cherchant à placer les pôles de la fonction de transfert (2.45) de telle sorte que la bande de boucle numérique calculée via (2.44) corresponde bien avec la valeur souhaitée. Une fois que les pôles sont correctement placés, il est possible de calculer les valeurs numériques des coefficients grâce aux relations qu'ils existent entre ces derniers et les différents pôles [61]. Par la suite, lorsqu'on dimensionnera une DPLL, on utilisera les valeurs numériques contenues dans les abaques de [61] pour les coefficients du filtre de boucle. La figure 2.16 illustre la différence entre les valeurs des coefficients analogiques et celles des coefficients numériques pour différentes valeurs de  $B_L T$ . On voit bien sur cette figure que pour des valeurs de  $B_L T$  suffisamment grandes, les valeurs numériques des coefficients ne peuvent plus être approchées par les valeurs analogiques.

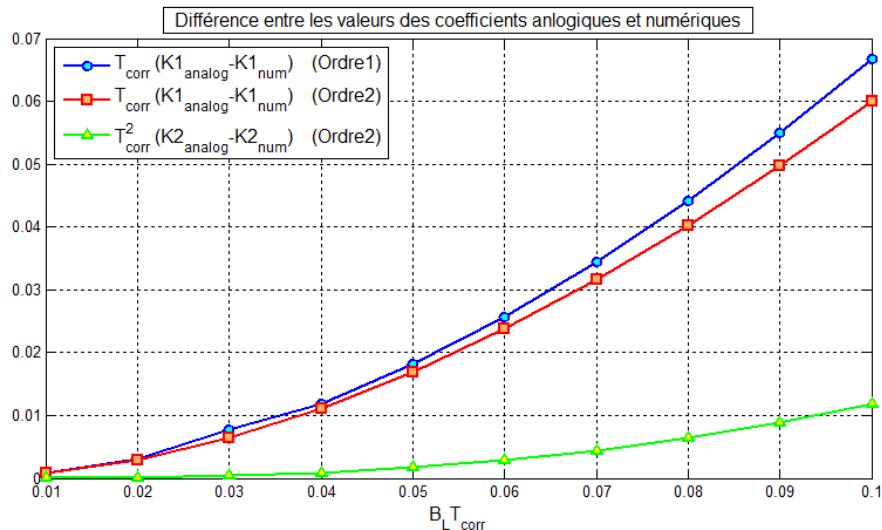


FIGURE 2.16 – Ecarts entre les valeurs des coefficients analogiques et numériques pour une DPLL d'ordre 1 et d'ordre 2

L'erreur en régime permanent  $e_\infty^{num}$  d'une DPLL est donnée par [62, 66]

$$e_\infty^{num} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) H_{\delta\phi}(z) \Phi(z), \quad (2.46)$$

avec  $H_{\delta\phi}(z) = \delta\Phi(z)/\Phi(z)$  la fonction de transfert numérique de la sortie du discriminateur et  $\Phi(z)$  la dynamique de phase suivie par la DPLL. Comme dans le cas de la PLL analogique,

on étudie les erreurs en régime permanent pour différents types de dynamique d'entrée :

$$\Phi_1(z) = \frac{\alpha_1}{1 - z^{-1}}, \quad (2.47)$$

$$\Phi_2(z) = \frac{\alpha_2 T_{corr} z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}, \quad (2.48)$$

$$\Phi_3(z) = \frac{\alpha_3 T_{corr}^2 z^{-1} (1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1})^3}, \quad (2.49)$$

avec  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  les amplitudes des différentes dynamiques. Les différentes expressions des erreurs en régime permanent pour des DPLL d'ordre 1, 2 et 3 sont données au tableau 2.4 [62]. On constate que les expressions numériques obtenues sont similaires à celles des expressions analogiques données au tableau 2.3. La figure 2.17 illustre l'erreur relative entre les valeurs d'erreurs en numérique et les valeurs en analogique. On constate qu'en numérique, les poursuites ont des erreurs en régime permanent plus grandes qu'en analogique. Ce résultat est la conséquence directe des différences qu'il existe entre les valeurs des coefficients analogiques et numériques comme l'illustre la figure 2.16.

Ordre	Echelon	Rampe	Accélération
1	0	$\frac{\alpha_2}{K_1^{num}}$	$+\infty$
2	0	0	$\frac{\alpha_3}{K_2^{num}}$
3	0	0	0

TABLE 2.4 – Expressions des erreurs en régime permanent pour des PLL numériques d'ordre 1, 2 et 3

## 2.2.4 Comportement en présence de bruit

En pratique, le signal reçu au niveau de la DPLL est entaché d'un bruit additif. Ainsi, dans le cadre de l'étude de la DPLL en régime linéaire, le comportement global de la boucle peut être obtenu en superposant la sortie de boucle associée au signal d'intérêt avec celle associée au bruit (à conditions que la boucle fonctionne en régime linéaire).

Supposons maintenant que la phase en entrée de la DPLL soit affectée par un bruit que l'on modélisera comme blanc, gaussien et additif. La phase reçue s'écrit alors :

$$\phi_r = \phi + n_{\phi_r}, \quad (2.50)$$

avec  $n_{\phi_r}$  le bruit de phase tel que

$$n_{\phi_r} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\phi_r}^2), \quad (2.51)$$

et dont la densité spectrale est donnée par

$$S_{\phi_r}(f) = N_0. \quad (2.52)$$

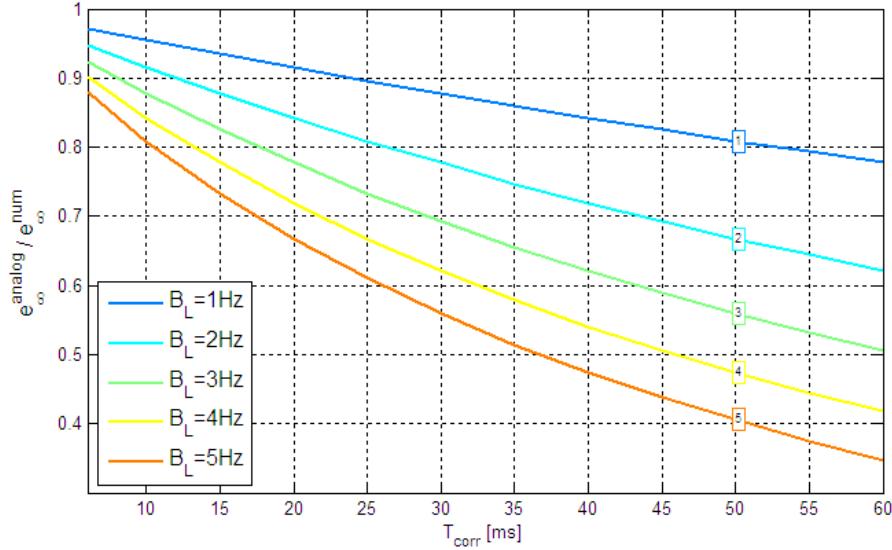


FIGURE 2.17 – Ratio entre l’erreur en régime permanent analogique et l’erreur en régime permanent numérique pour une boucle d’ordre 2

En sortie de boucle, l’estimation de phase sera également entachée d’un bruit d’estimation  $n_{\hat{\phi}}$ . En supposant dans un premier temps que la DPLL en régime linéaire a une structure assimilable à la structure illustrée à la figure 2.5, la gaussiennité du bruit d’entrée est conservée en sortie de boucle. La puissance du bruit en sortie de DPLL  $\sigma_{\hat{\phi}}^2$  est donnée, d’après les relations de Wiener-Lee, par [13] :

$$\sigma_{\hat{\phi}}^2 = \int_{-1/2T_{corr}}^{1/2T_{corr}} |H(e^{i2\pi fT_{corr}})|^2 S_{\phi_r}(f) df = 2B_L N_0. \quad (2.53)$$

Sur la figure 2.18 est représentée la distribution théorique donnée par la variance calculée en (2.53), ainsi que la distribution de la sortie de la boucle représentée à la figure 2.5 pour laquelle on a mis en entrée un bruit blanc gaussien de densité spectrale  $N_0$ . On constate qu’il y a bien concordance entre la distribution théorique et la distribution observée. Il est intéressant de noter que l’expression (2.53) de la puissance du bruit en sortie du modèle linéaire de la DPLL est la même que celle obtenue dans le cas d’une PLL analogique [67].

L’expression (2.53) ne représente cependant qu’une première approximation de la puissance du bruit en sortie de boucle. En effet, même si la DPLL fonctionne en régime linéaire, les présences de l’étape de corrélation et du discriminateur vont changer l’expression de la puissance du bruit en sortie de boucle. Pour une DPLL conventionnelle, la puissance du bruit en sortie de boucle est donnée par [5, 68]

$$\sigma_{\hat{\phi}}^2 = \frac{B_L}{C/N_0} \left( 1 + \frac{1}{2C/N_0 T_{corr}} \right). \quad (2.54)$$

L’expression (2.54) est obtenue en étudiant le bruit passant à travers une DPLL munie d’un discriminateur de type *Cross-product*, mais reste cependant une très bonne approximation pour des DPLL munies d’un autre type de discriminateur [5]. Pour s’en convaincre, la figure 2.19 représente la distribution de la sortie d’une DPLL (dont la structure est donnée à la figure 2.3) munie d’un discriminateur de type *Arctangent* lorsqu’on lui injecte en entrée un

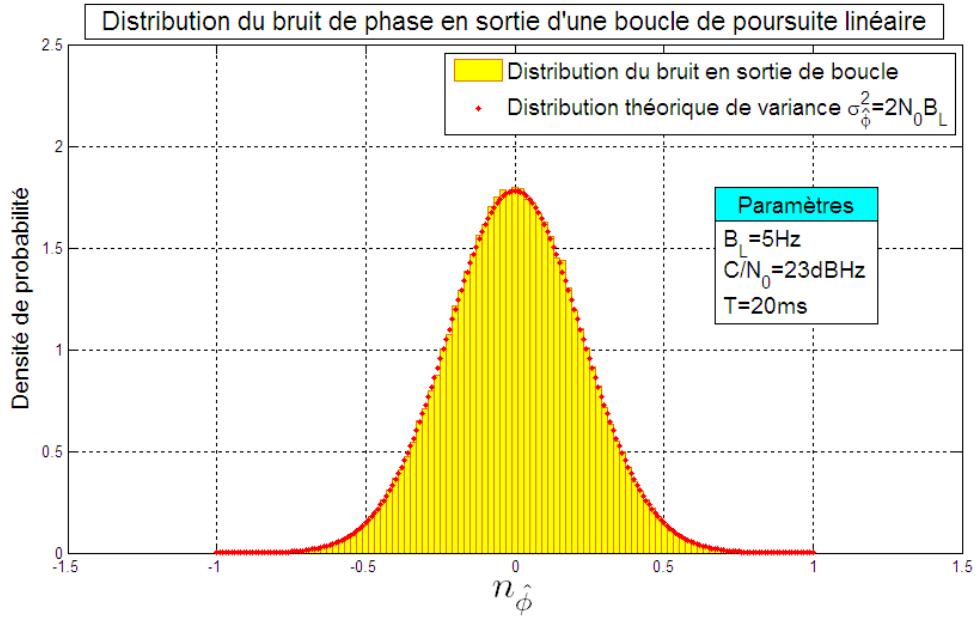
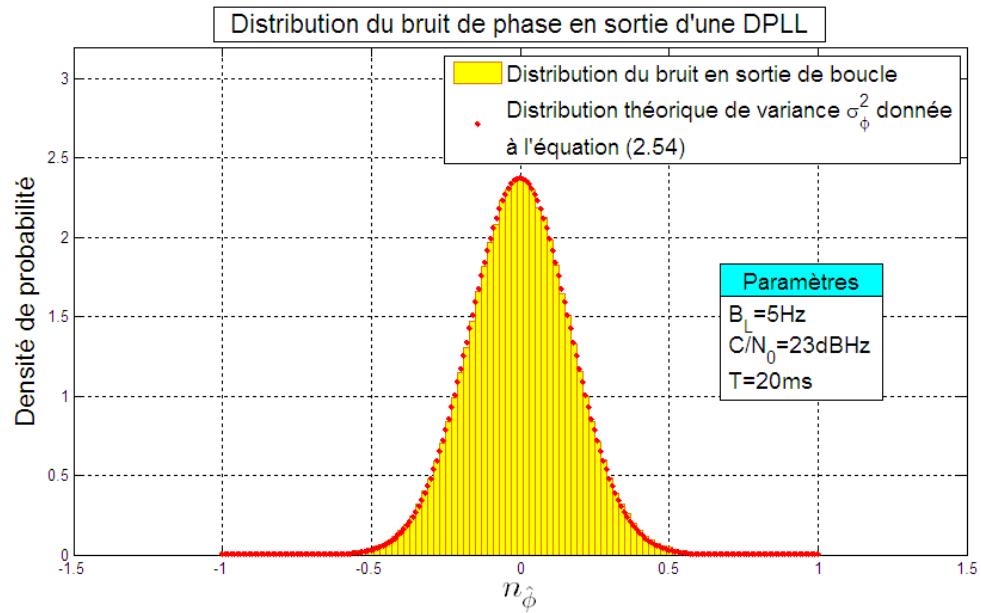


FIGURE 2.18 – Répartition du bruit en sortie de boucle représentée à la figure 2.5

bruit blanc gaussien de densité spectrale  $N_0$ . Sur cette figure est également représentée la distribution théorique donnée par la variance calculée en (2.54). On constate qu'il y a bien concordance entre la distribution observée et la distribution théorique.

FIGURE 2.19 – Répartition du bruit en sortie d'une DPLL opérant en régime linéaire avec un discriminateur *Arctangent*

Que l'on utilise l'expression (2.53) ou l'expression (2.54) pour quantifier le bruit en sortie de boucle, on remarque que la valeur de la puissance du bruit est proportionnelle à la bande de boucle. Par conséquent, plus la bande de boucle sera faible, plus l'impact du

bruit sur l'estimation de phase sera minimisé. La figure 2.20 donne la densité de probabilité du bruit en sortie de DPLL pour différentes valeurs de bande de boucle. On constate bien que la variance du bruit en sortie de boucle diminue avec l'augmentation de  $B_L$ . Cette observation contraste avec l'influence qu'a la bande de boucle sur le comportement et la précision asymptotique de la PLL en absence de bruit. En effet, il a été vu dans les sections 2.2.2.3 et 2.2.3 que le temps de convergence ainsi que les valeurs des erreurs en régime permanent sont inversement proportionnels à la bande de boucle. On comprend alors que le choix de la valeur de la bande de boucle résulte d'un compromis entre la capacité de la PLL à poursuivre des dynamiques de phase élevées et la capacité de la boucle à réduire la puissance du bruit en sortie de boucle.

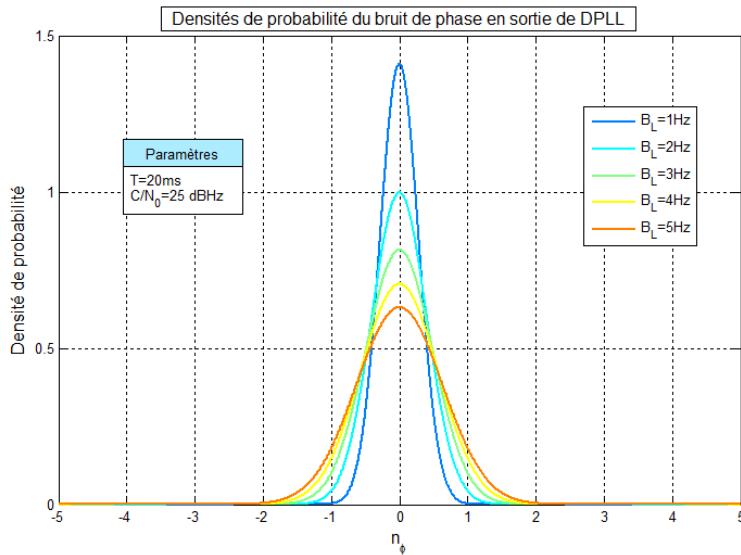


FIGURE 2.20 – Densités de probabilité du bruit de phase en sortie de DPLL pour diverses valeurs de bande de boucle

## 2.2.5 Limite du modèle linéaire

Pour pouvoir étudier la DPLL dans son régime linéaire, nous avons supposé que l'erreur d'estimation  $\phi_r - \hat{\phi}$  était suffisamment faible pour que l'on puisse supposer que l'on se trouve au niveau de la zone de linéarité du discriminateur. Selon les conditions de poursuite, il n'est plus possible de supposer que la DPLL fonctionne en régime linéaire. En effet, à cause des erreurs liées à la dynamique (dépassemens, erreurs en régime permanent) et de la présence du bruit de phase et surtout à cause de la périodicité des discriminateurs illustrée à la figure 2.4, on a à certains moments de la poursuite :

$$\mathcal{D}(g(\phi_r - \hat{\phi})) = \delta\phi[k] \neq \phi_r - \hat{\phi}. \quad (2.55)$$

Dans ces cas-là, le modèle linéaire de la boucle n'est plus applicable et il est alors possible de voir apparaître un phénomène de saut de cycle au niveau de la poursuite de phase.

### 2.2.5.1 Le phénomène de saut de cycle

Le phénomène de saut de cycle est l'une des principales causes du manque de robustesse au bruit des boucles à verrouillage de phase. L'origine de ce phénomène réside dans l'ambiguité existante lors de l'étape d'extraction de phase au niveau du discriminateur comme

l'illustre la figure 2.4 où sont représentées les caractéristiques des discriminateurs de phase donnés au tableau 2.1. Lors d'une poursuite de phase, la DPLL va chercher à atteindre un état d'équilibre qui, à cause de la périodicité des discriminateurs, peut être atteint pour différents points de fonctionnement. En effet, si on considère dans un premier temps travailler avec une DPLL d'ordre 1 munie d'un discriminateur *Cross-Product* (discriminateur de type sinus) estimant la phase non bruitée d'une rampe d'amplitude  $\alpha_2$ , il est possible d'écrire [69] :

$$e[k+1] - e[k] = -K_1^{\text{num}} \sin(e[k]) + \alpha_2, \quad (2.56)$$

avec  $e[k] = \phi_r[k] - \hat{\phi}[k]$  l'erreur d'estimation de phase et  $K_1^{\text{num}}$  le coefficient numérique du filtre de boucle. Lorsque le régime permanent est atteint, on a

$$\sin(e[k]) = \delta\phi[k] = \frac{\alpha_2}{K_1^{\text{num}}} = e_\infty^{\text{num}}, \quad (2.57)$$

qui se traduit par l'apparition de plusieurs points d'équilibre comme l'illustre la figure 2.21. Si durant la poursuite la boucle quitte son équilibre à cause de perturbations sur la phase à estimer, il faut alors considérer deux cas :

- si  $\sin(e[k]) < e_\infty^{\text{num}}$ , alors la boucle va estimer la phase de telle sorte à augmenter l'erreur d'estimation car, dans ce cas et d'après (2.56), on a  $e[k+1] - e[k] > 0$  ;
- si  $\sin(e[k]) > e_\infty^{\text{num}}$ , alors la boucle va estimer la phase de telle sorte à diminuer l'erreur d'estimation car, dans ce cas et d'après (2.56), on a  $e[k+1] - e[k] < 0$ .

Ces deux conditions définissent donc, parmi les points d'équilibre de la boucle, des points d'équilibre stables (avec des zones d'attraction associées à ces points) et des points d'équilibre instables comme l'illustre la figure 2.21. Lors de la poursuite, la DPLL va estimer la phase de telle sorte à atteindre un point d'équilibre stable. Si durant cette poursuite, les perturbations de phase sont suffisamment importantes, l'erreur d'estimation de phase peut alors se retrouver dans la zone d'attraction d'un point d'équilibre stable situé à une ou plusieurs périodes du point d'équilibre initial. Dans ce cas, la DPLL retrouve son équilibre mais l'estimation de la phase en sortie de boucle est alors entachée d'un biais de phase égal à la distance qui sépare le point d'équilibre initial du point d'équilibre atteint. C'est ce phénomène que l'on appelle saut de cycle.

Pour les DPLL d'ordre supérieur, un raisonnement similaire au cas d'étude d'une boucle d'ordre 1 peut également être effectué pour expliquer l'apparition des sauts de cycle [70].

La figure 2.22 illustre en détail l'apparition du phénomène de saut de cycle sur une simulation de poursuite de phase. Dans ce scénario de poursuite, on utilise une DPLL d'ordre 2 avec un discriminateur de type *Arctangent* qui a la plage de linéarité  $[-\pi/2, \pi/2]$ , et on cherche à estimer une rampe de phase non-bruitée. Le dimensionnement de la DPLL est telle que, lors de la poursuite, l'erreur d'estimation dépasse la plage de linéarité du discriminateur *Arctangent*. A ce moment-là, l'erreur estimée en sortie de discriminateur  $\delta\phi$  subit un saut qui va se traduire, au niveau de la poursuite, par un biais d'estimation sur le reste de la poursuite. Le discriminateur étant de type *Arctangent*, le saut de cycle observé est d'amplitude  $\pi$ .

La simulation effectuée à la figure 2.22 donne l'exemple d'un saut de cycle provoqué par une forte dynamique de phase. En pratique, lorsque le signal est bruité, des perturbations liées au bruit de phase peuvent également créer des sauts de cycle. Contrairement aux sauts liés à la dynamique, les temps d'apparition des sauts de cycle liés au bruit ne peuvent pas être parfaitement déterminés. C'est pour cette raison que les études se focalisant sur les

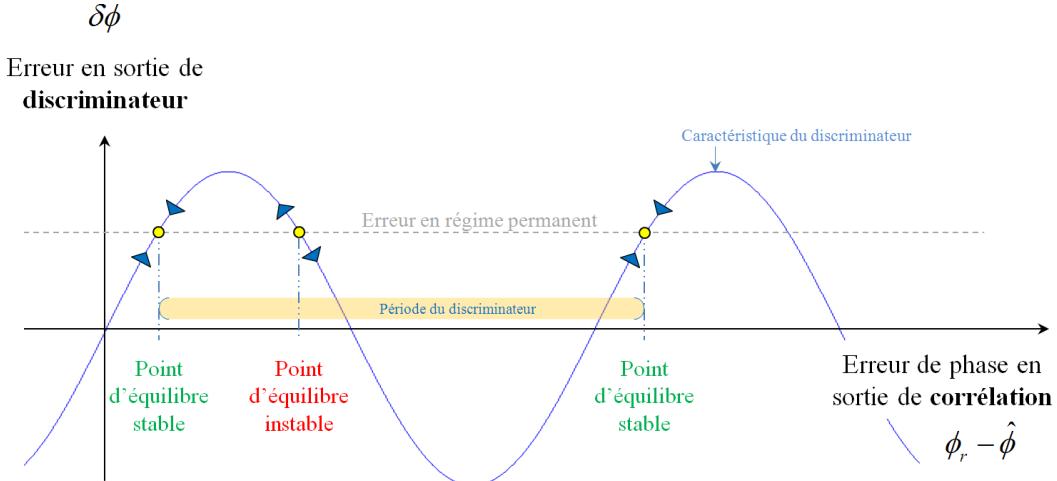


FIGURE 2.21 – Points d'équilibres stables et instables d'une DPLL d'ordre 1

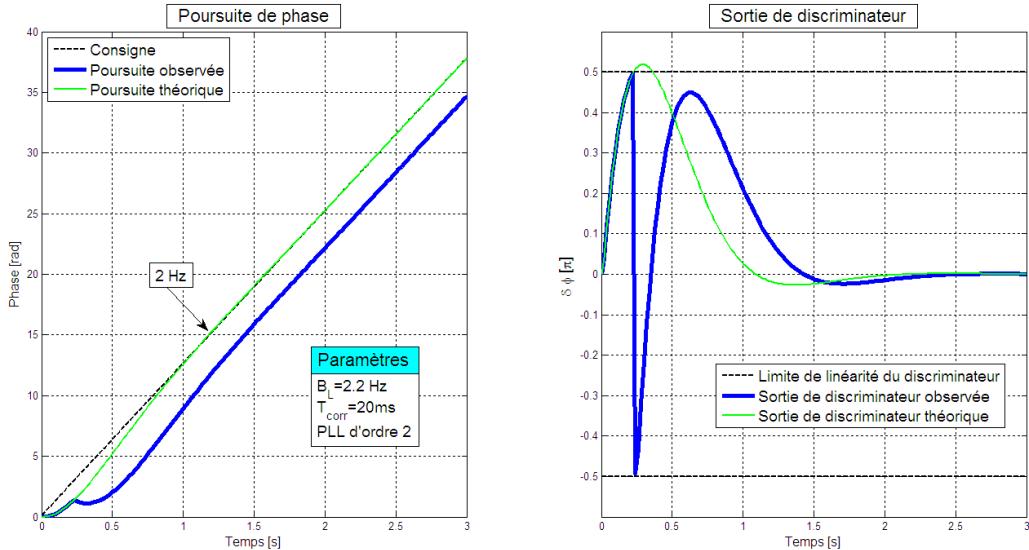


FIGURE 2.22 – Illustration d'un saut de cycle lors d'une poursuite de phase

sauts de cycle lors d'une poursuite de phase bruitée sont essentiellement réalisées avec des modèles statistiques du phénomène [71, 72]. La figure 2.23 illustre par exemple la distribution de l'erreur d'estimation de phase en sortie de boucle pour la poursuite d'une dynamique de  $2 \text{ Hz} + 0.5 \text{ Hz/s}$  par une DPLL d'ordre 2 à l'instant  $t = 7 \text{ s}$  de poursuite. On peut constater en observant cette distribution, que les modèles de performance établis pour des boucles en régime linéaire ne peuvent plus s'appliquer en présence du phénomène de sauts de cycle. En effet, la distribution observée ne s'apparente plus à une gaussienne comme pour le cas linéaire, mais à une somme de gaussiennes associées aux différents modes de poursuite répartis tous les  $k\pi$  (la boucle étudiée est munie d'un discriminateur *Arctangent*).

Il est possible de constater sur la figure 2.23 que seuls les points d'équilibre de la poursuite situés tous les  $k\pi$ , avec  $k \geq 0$ , sont représentés. Cette observation montre que le phénomène de sauts de cycle, pour le scénario de poursuite considéré, produit majoritairement des

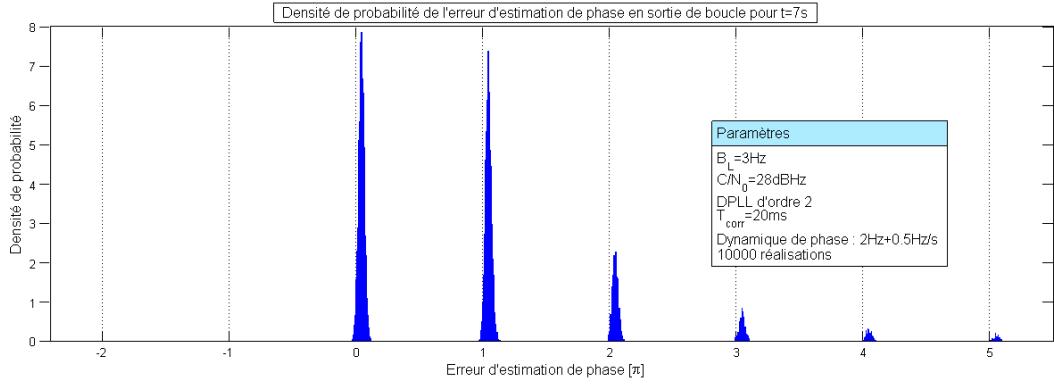


FIGURE 2.23 – Distribution de l'erreur d'estimation de phase en sortie de DPLL en présence de sauts de cycle

sauts de phase positifs. Cette tendance s'explique par l'ordre de la dynamique de phase qui, pour une DPLL d'ordre 2, induit une erreur statique en régime permanent qui va favoriser l'apparition des sauts de cycle positifs. En comparaison, il est montré dans [73] que, pour une PLL d'ordre 1 suivant la phase bruitée d'une rampe d'amplitude  $\alpha_2$ , le ratio entre le nombre de sauts de cycle positifs  $N_{\text{saut}}^+$  (la phase saute de  $-k\pi$ ) et le nombre de sauts de cycle négatifs  $N_{\text{saut}}^-$  (la phase saute de  $k\pi$ ) est donné par

$$\frac{N_{\text{saut}}^+}{N_{\text{saut}}^-} = \exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{SNR \times \alpha_2}{B_L}\right). \quad (2.58)$$

Aux vues de la distribution donnée à la figure 2.23, il semble légitime de pouvoir considérer qu'un comportement similaire puisse être observé pour une DPLL d'ordre 2 (ou d'ordre supérieur) suivant une dynamique de type accélération (ou un ordre de dynamique plus élevé). La simple observation de la distribution de l'erreur en sortie de boucle fournit donc une information sur la robustesse d'une boucle pour un scénario de poursuite donné.

Certains travaux portant sur le phénomène de sauts de cycle se sont focalisés sur le temps d'apparition du premier saut de cycle afin de quantifier les performances d'une boucle [74–76]. Cette métrique de performance pourra donc, au même titre que l'observation de la distribution de l'erreur en sortie de boucle, être utilisée pour quantifier la robustesse d'une boucle par rapport à une autre lors des simulations numériques. Dans tous les cas, les métriques de performances basées sur un modèle linéaire de la DPLL ne sont plus suffisantes pour quantifier les performances de la boucle en présence de sauts de cycle.

### 2.2.5.2 Développement de phase au sein de la DPLL

Il a été vu dans la section 2.2.5.1 que la périodicité des discriminateurs de phase implantés au sein des PLL induit des sauts de cycle au niveau de la poursuite. Pour détecter et corriger ces biais de phase, il est possible de trouver dans la littérature des structures de DPLL dans lesquelles il a été ajouté en sortie de discriminateur un bloc de développement de phase comme illustré à la figure 2.24. On supposera par la suite que le discriminateur utilisé est de type *Arctangent* avec la plage de linéarité  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

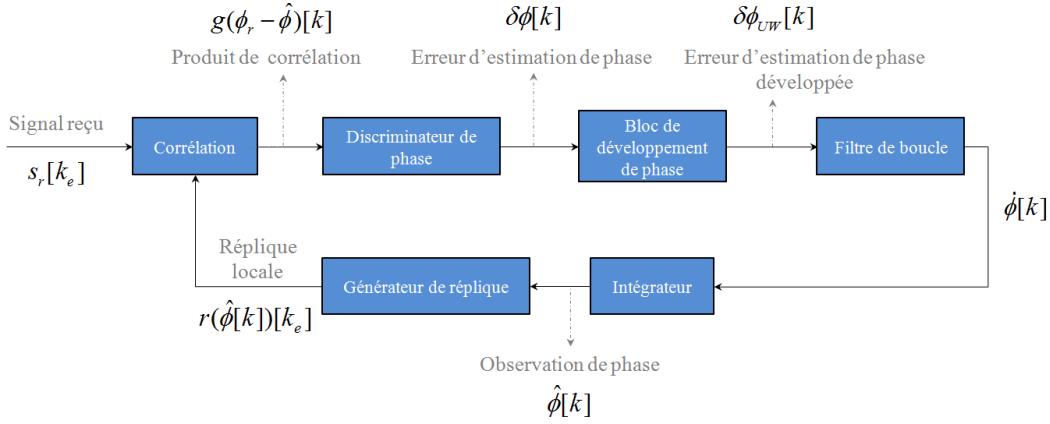


FIGURE 2.24 – Structure de DPLL munie d'un bloc de développement de phase en sortie de discriminateur

La méthode implémentée dans le bloc de développement de phase est basée sur des techniques de détection par seuillage [77]. Plus précisément, au niveau du bloc de développement, l'erreur de phase en sortie du discriminateur à l'instant  $k$  est comparée avec celle de l'instant  $k - 1$ . Si l'écart entre les deux sorties de discriminateur est supérieur à  $\pi/2$ , on ajoute ou on retranche  $\pi$  à la dernière valeur du discriminateur pour compenser les sauts de cycle qui se sont potentiellement produits entre l'instant  $k - 1$  et l'instant  $k$ .

En notant  $\delta\phi_{UW}$  l'erreur d'estimation de phase développée, l'équation régissant le bloc de développement de phase est donnée par :

$$\delta\phi_{UW}[k] = \delta\phi_{UW}[k - 1] + J_\pi(\delta\phi[k] - \delta\phi_{UW}[k - 1]), \quad (2.59)$$

avec

$$J_\pi(x) = \left[ x - \frac{\pi}{2} \right]_\pi - \frac{\pi}{2}. \quad (2.60)$$

Afin de comprendre le fonctionnement du bloc, la figure 2.25 illustre deux simulations de poursuite de phase sans bruit : la première réalisée avec une DPLL conventionnelle et la seconde réalisée avec une DPLL munie du bloc de développement de phase. Pour cette simulation, la bande de boucle est intentionnellement choisie petite face à la dynamique de phase à suivre afin de provoquer facilement des sauts de phase. Dans cet exemple, la dynamique à suivre est une rampe de fréquence ; la boucle étant d'ordre 1, l'écart en régime permanent ne cesse de croître avec le temps. Au bout d'un certain temps de poursuite, l'erreur d'estimation dépasse la valeur  $\pi/2$  et il se produit alors une série de sauts de cycle. Avec la DPLL munie du bloc à développement de phase, on voit que les divers sauts de cycle sont totalement compensés et que la poursuite se déroule normalement.

La technique de développement de phase définie à l'équation (2.59) présente cependant un défaut majeur en présence de bruit. En effet, la fonction  $J_\pi(x)$  définie à l'équation (2.60) est une fonction de seuillage non-linéaire. Couplée au bruit de phase, cette nature non-linéaire va, lors de la poursuite, créer des fausses détections qui vont alors se traduire par l'apparition de sauts de cycle provoqués par une compensation à tort des écarts dus au bruit. Ce manque de robustesse au bruit est illustré à la figure 2.26 où cent poursuites de phase bruitées sont réalisées avec une DPLL conventionnelle et une DPLL munie du bloc

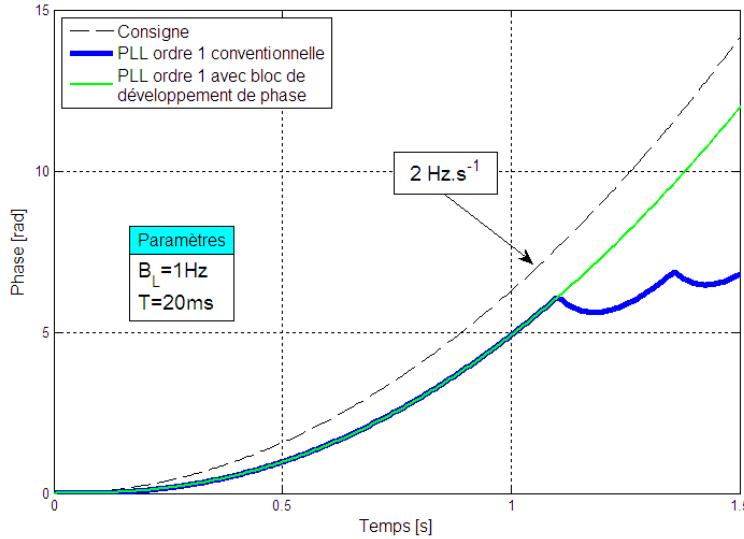


FIGURE 2.25 – Illustration du fonctionnement du système de développement de phase en sortie du discriminateur lors d'une poursuite non bruitée

à développement de phase. Dans cette simulation, la bande de boucle est choisie suffisamment grande pour que la dynamique à suivre ne provoque pas de sauts de cycle. Malgré ce dimensionnement, on voit sur la figure 2.26 que, contrairement au cas de la DPLL conventionnelle où aucun saut n'est présent, les poursuites réalisées avec la DPLL munie du bloc de développement de phase présentent de nombreux sauts de cycle provoqués à tort par le bruit.

Pour pallier à ce problème, il est possible de réduire l'impact des erreurs de détection dues au bruit en ajoutant un gain correctif  $K$  en sortie de la fonction en dent de scie  $J_\pi(\cdot)$  comme illustré à la figure 3.1 [78].

L'ajout du gain  $K$  va modifier le comportement du bloc de développement et modifier le comportement asymptotique de la DPLL. Pour comprendre quel sera l'impact de la valeur du gain  $K$  sur la sortie du bloc de développement, il nous faut étudier la réponse impulsionale et la réponse fréquentielle de ce dernier. Pour ce faire, on suppose que le régime permanent est établi et que la PLL fonctionne en régime linéaire. Comme on travaille avec un discriminateur de type *Arctangent*, on suppose que :

$$-\frac{\pi}{2} < \delta\phi[k] - \delta\phi_{UW}[k-1] < \frac{\pi}{2}. \quad (2.61)$$

Par conséquent, on a :

$$J_\pi(\delta\phi[k] - \delta\phi_{UW}[k-1]) = \delta\phi[k] - \delta\phi_{UW}[k-1], \quad (2.62)$$

et on peut écrire :

$$\delta\phi_{UW}[k] = \delta\phi_{UW}[k-1] + K \times (\delta\phi[k] - \delta\phi_{UW}[k-1]), \quad (2.63)$$

$$= (1 - K)\delta\phi_{UW}[k-1] + K\delta\phi[k]. \quad (2.64)$$

La fonction de transfert  $B(z)$  du bloc de développement de phase en régime linéaire associée

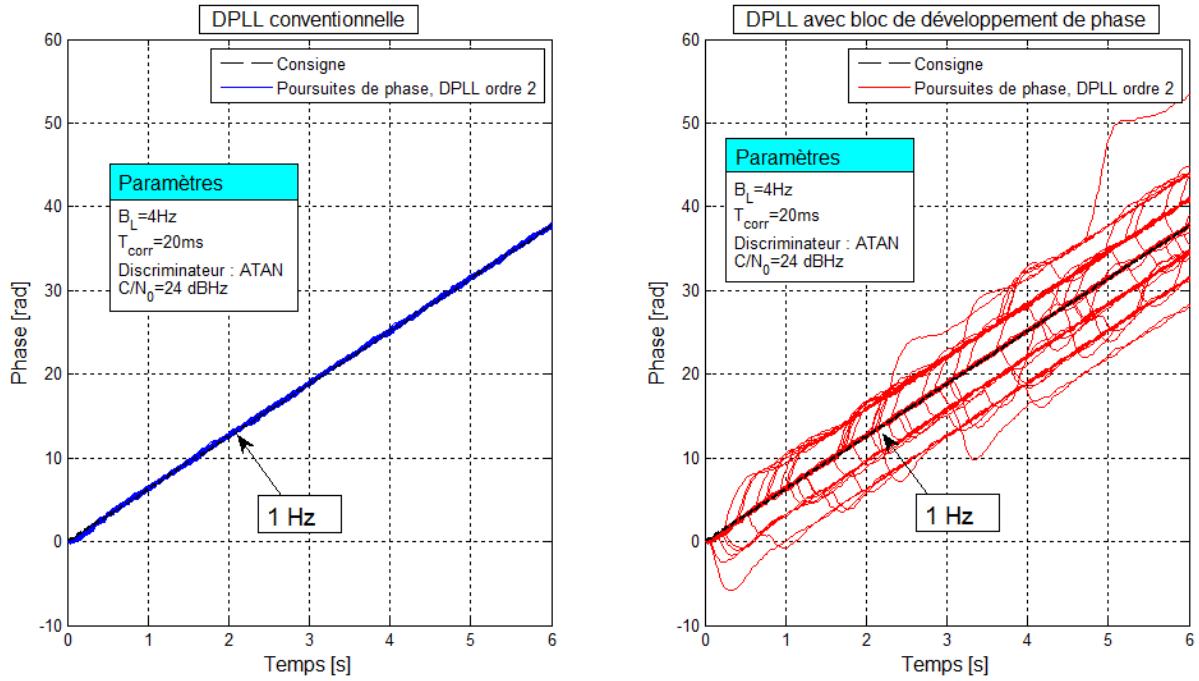


FIGURE 2.26 – Illustration du manque de robustesse au bruit de la DPLL munie d'un système à développement de phase basé sur des techniques de détection de saut de cycle par seuillage

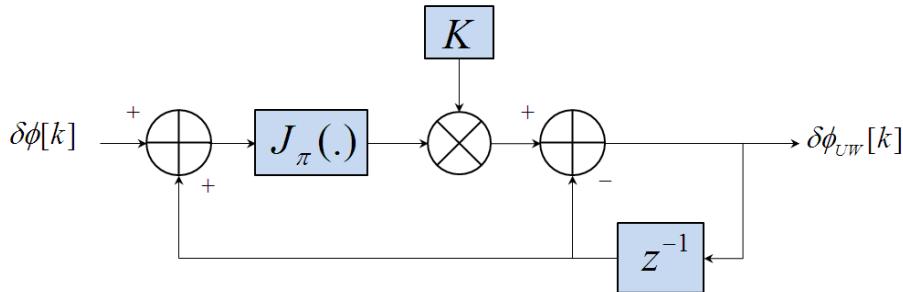


FIGURE 2.27 – Structure du bloc de développement de phase muni d'un gain correctif  $K$

à l'équation (2.64) est donnée par :

$$B(z) = \frac{K}{1 - z^{-1}(1 - K)}. \quad (2.65)$$

Pour assurer la stabilité du bloc de développement de phase, le gain correctif est choisi tel que  $K < 1$ . En développant l'équation (2.64), on peut écrire :

$$\delta\phi_{UW}[k] = (1 - K)^{k+1}\delta\phi_{UW}[-1] + K \sum_{p=0}^k (1 - K)^{k-p}\delta\phi[p]. \quad (2.66)$$

avec  $\delta\phi_{UW}[-1]$  la valeur initiale du bloc de développement de phase qui est considérée nulle. D'après l'équation (2.66), la réponse impulsionnelle du système est :

$$b(k) = K(1 - K)^k u(k) \quad (2.67)$$

Les réponses impulsionales et fréquentielles du système sont données à la figure 2.28 pour différentes valeurs de  $K$ . On constate qu'en présence du gain  $K$ , le bloc de développement de phase va se comporter comme un filtre passe-bas dont la bande passante diminue avec la valeur de  $K$ . L'ajout du gain  $K$  en sortie de la fonction  $J_\pi(\cdot)$  va modifier la réponse

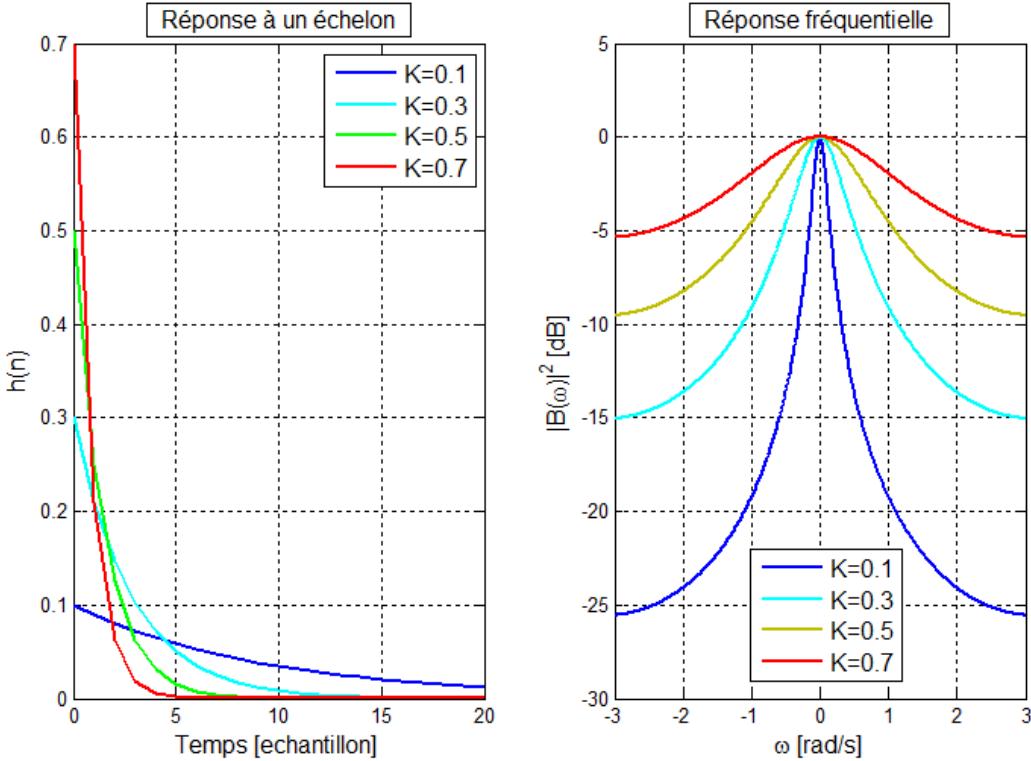


FIGURE 2.28 – Réponse impulsionnelle et fréquentielle de bloc de développement de phase en fonction du gain  $K$

impulsionnelle de la DPLL et va donc modifier sa précision asymptotique. Pour conserver les caractéristiques de la boucle de poursuite initialement dimensionnée, il est possible de placer en cascade du bloc de développement de phase un nouveau filtre linéaire dont la fonction de transfert est  $B^{-1}(z)$  [79]. La structure de développement résultante est présentée à la figure 2.29. Pour apprécier l'influence de la valeur du gain correctif sur la robustesse

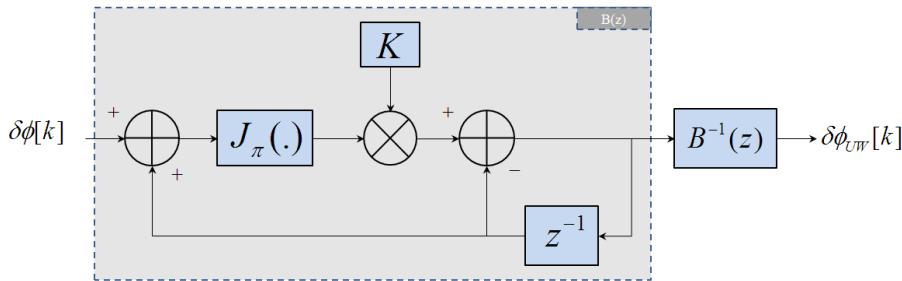


FIGURE 2.29 – Structure finale du bloc de développement de phase

au bruit du bloc de développement de phase, on réalise cent poursuites de phases bruitées avec une DPLL munie du bloc de développement de phase avec diverses valeurs de  $K$ . Les

résultats sont donnés à la figure 2.30. Tout comme la simulation précédente, les DPLL sont dimensionnées de telle sorte qu'il n'y ait pas de sauts de cycle dus à la dynamique. On voit sur la figure que plus le gain est petit, plus le nombre de sauts de cycle provoqués à tort par le bruit de phase diminue et que le bloc devient de plus en plus robuste au bruit.

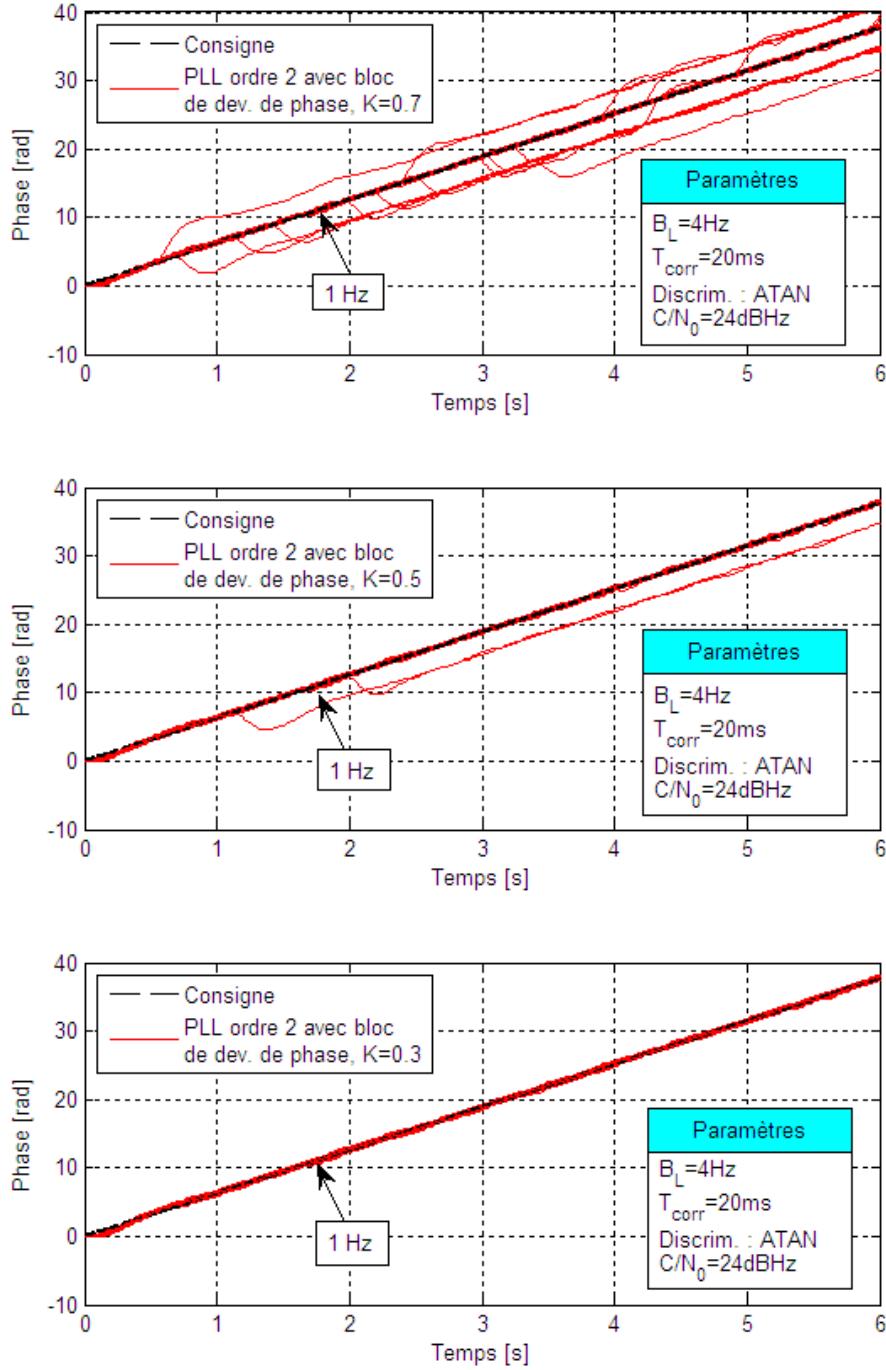


FIGURE 2.30 – Influence du paramètre  $K$  sur le comportement en régime bruité du bloc de développement de phase en sortie du discriminateur

Bien que la figure 2.30 semble montrer que grâce à l'ajout du gain  $K$  la méthode de développement de phase par technique de seuillage semble être une bonne solution pour corriger les sauts de cycle, cette approche de développement de phase est cependant instable

pour des forts niveaux de bruit. La figure 2.31 illustre de nouveau cent poursuites de phase dans les mêmes conditions que la figure 2.30 mis à part le fait que cette fois-ci, le niveau de bruit est tel que  $C/N_0 = 20$  dBHz. On voit clairement sur cette figure que les poursuites affichent des décrochages prononcés. Ce comportement montre donc que, malgré la présence du gain  $K$ , la technique de développement de phase est une technique instable et peu robuste au bruit.

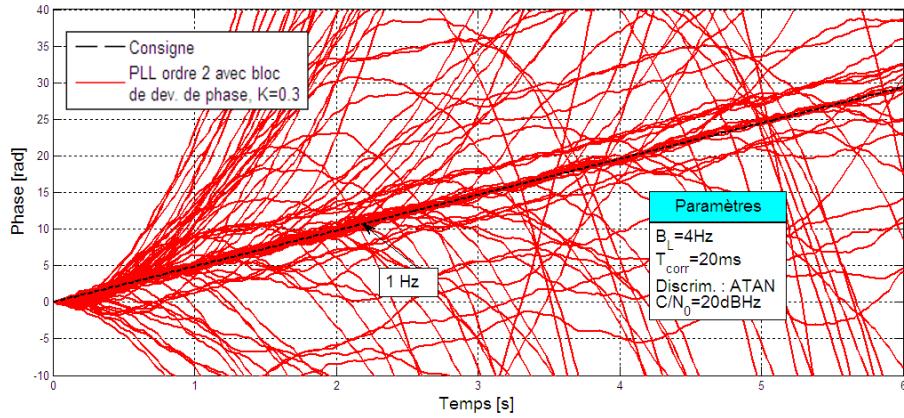


FIGURE 2.31 – Illustration de l’instabilité en régime bruité du bloc de développement de phase en sortie du discriminateur

## 2.3 Poursuite de phase d’un signal multifréquence

La diversité en fréquence des signaux de navigation est un atout pour les algorithmes de poursuite et de positionnement. Bien qu’actuellement les utilisateurs disposent essentiellement du signal bi-fréquence  $L_1/L_2$ , l’arrivée du système Galileo et la modernisation du GPS offriront un large panel de signaux multifréquence.

La poursuite des signaux multifréquence est un processus plus complexe que la poursuite mono-fréquence car, en plus de devoir combiner l’information de phase commune portée par les différentes porteuses, les algorithmes de poursuite doivent tenir compte des biais provoqués par les perturbations atmosphériques qu’il existe entre les différentes phases. Cette section donne un aperçu des différents aspects d’une poursuite de phase multifréquence.

### 2.3.1 Proportionnalités des phases Doppler

La fréquence Doppler d’un signal de navigation est fonction de la fréquence porteuse du signal en question et du mouvement relatif entre le satellite émetteur et l’utilisateur. En effet, pour un signal porté sur la fréquence  $f_p$ , la fréquence Doppler  $f_d$  résultante est donnée par :

$$f_d = -f_p \frac{v_{rad}}{c}. \quad (2.68)$$

Dans le cas d’un signal multifréquence, plusieurs porteuses sont émises par le même satellite. Par conséquent, les fréquences Doppler résultantes sont liées par la relation suivante :

$$f_{d,i} = \frac{f_{p,i}}{f_{p,j}} f_{d,j}, \quad (2.69)$$

avec  $f_{p,i}$  et  $f_{p,j}$  deux fréquences porteuses du signal multifréquence. On constate donc que les différentes fréquences Doppler d'un signal multifréquence sont proportionnelles entre elles. Les phases Doppler associées à ces fréquences  $\phi_{d,i} = 2\pi f_{d,i}t$  sont elles aussi liées par la relation de proportionnalité suivante [80] :

$$\phi_{d,i} = \frac{f_{p,i}}{f_{p,j}} \phi_{d,j}. \quad (2.70)$$

### 2.3.2 Déphasage dus aux effets atmosphériques

Lors de la propagation d'un signal de navigation, l'atmosphère (plus particulièrement l'ionosphère et la troposphère) induit un retard de propagation qui dépend de la fréquence du signal. Dans le cas d'un signal multifréquence, la traversée de l'atmosphère va induire des biais entre les différentes phases porteuses du signal.

#### 2.3.2.1 Les effets ionosphériques

L'ionosphère est une couche de l'atmosphère qui a la propriété d'être un milieu dispersif. Plus précisément, tout signal sinusoïdal traversant l'ionosphère a une vitesse de propagation qui dépend de sa fréquence. Dans le cas de l'ionosphère, l'équation de propagation est donnée par [81] :

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_{iono}^2, \quad (2.71)$$

avec  $\omega = 2\pi f$  la pulsation du signal,  $k$  le nombre d'onde et  $\omega_{iono} = 2\pi f_{iono}$  la pulsation plasma de l'ionosphère. Plus précisément, la fréquence critique ionosphérique est donnée par [82]

$$f_{iono} = 8.98 \sqrt{N_e} \quad [\text{Hz}] \quad (2.72)$$

avec  $N_e$  la densité électronique de l'ionosphère exprimée en  $(e^-/m^3)$ . La vitesse de phase  $v_{ph}$  du signal est donnée par :

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}, \quad (2.73)$$

qui peut s'écrire grâce à l'équation (2.71) :

$$v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{iono}}{f}\right)^2}}. \quad (2.74)$$

L'indice de réfraction  $n_{ph}$  de l'ionosphère s'écrit alors [13] :

$$n_{ph}(f) = \frac{c}{v_{ph}} = \sqrt{1 - \left(\frac{f_{iono}}{f}\right)^2} \simeq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{f_{iono}}{f}\right)^2 = 1 - \frac{40.3}{f^2} N_e. \quad (2.75)$$

On voit, grâce à l'équation (2.75), que l'indice de réfraction ionosphérique dépend de la fréquence du signal qui se propage. Par conséquent, la distance parcourue par ce signal au sein de l'ionosphère est également fonction de la fréquence de ce dernier. Le délai ionosphérique induit sur le signal lors de sa propagation s'obtient alors en différenciant la distance parcourue par le signal dans l'ionosphère et la distance Euclidienne théorique. Si on note  $\Delta I(f)$  le retard ionosphérique en seconde, on a alors :

$$\Delta I(f) = \frac{1}{c} \int (n_{ph}(f) - 1) dl, \quad (2.76)$$

$$= \frac{-40.3}{cf^2} \int N_e dl. \quad (2.77)$$

On définit alors le TEC (*Total Electron Content*), exprimé en  $e^-/m^3$ , par [5, 28] :

$$TEC = \int N_e dl. \quad (2.78)$$

On obtient ainsi l'expression du retard ionosphérique suivante [83, 84] :

$$\Delta I(f) = \frac{-40.3}{cf^2} TEC. \quad (2.79)$$

Le déphasage ionosphérique  $\Delta I_\phi$  s'exprime finalement par [85] :

$$\Delta I_\phi(f) = 2\pi f \Delta I(f) = 2\pi \frac{-40.3}{cf} TEC. \quad (2.80)$$

D'après l'équation (2.80), le retard de phase induit sur le signal par la traversée de l'ionosphère dépend donc de la fréquence du signal mais aussi de l'état électronique de l'ionosphère.

Dans le cas d'un signal multifréquence et d'après l'équation (2.80), la traversée de la ionosphère va induire des déphasages au niveau des différentes porteuses du signal. Si on note par  $f_{p,i}$  et  $f_{p,j}$  deux porteuses du signal multifréquence, on a alors la relation suivante [80] :

$$\Delta I_\phi(f_{p,i}) = \Delta I_{\phi,i} = \frac{f_{p,j}}{f_{p,i}} \Delta I_{\phi,j}. \quad (2.81)$$

On constate que les déphasages sur chacune des porteuses ne sont pas égaux. Les algorithmes de navigation doivent donc prendre en compte le déphasage induit par l'ionosphère lors de la poursuite du signal multifréquence si on souhaite exploiter pleinement la diversité en fréquence.

### 2.3.2.2 Les effets troposphériques

La troposphère est également une couche atmosphérique contribuant à retarder le signal de navigation lors de sa propagation. Cependant, contrairement à l'ionosphère, cette couche atmosphérique n'est pas un milieu dispersif. En effet, le retard en seconde induit par la troposphère  $\Delta T$  est donné par [5] :

$$\Delta T = \frac{1}{c} \int (n_{trop} - 1) dl = \frac{1}{c} 10^{-6} \int N_{trop} dl, \quad (2.82)$$

avec  $n_{trop}$  l'indice de réfraction de l'atmosphère et  $N_{trop}$  la réfractivité donnée par :

$$N_{trop} = 10^6 (n_{trop} - 1). \quad (2.83)$$

La réfractivité peut s'écrire en fonction de la pression partielle de l'air, de la pression partielle de la vapeur d'eau, de la température atmosphérique et est indépendante de la fréquence du signal traversant la troposphère [86, 87]. Le retard troposphérique n'est donc pas critique pour la poursuite de phase des signaux de navigation multifréquence. Pour la porteuse  $f_{p,i}$ , le déphasage troposphérique  $\Delta T_{\phi,i}$  est donné par

$$\Delta T_{\phi,i} = 2\pi f_{p,i} \Delta T. \quad (2.84)$$

Il est alors possible d'écrire la relation de proportionnalité suivante :

$$\Delta T_{\phi,i} = \frac{f_{p,i}}{f_{p,j}} \Delta T_{\phi,j}. \quad (2.85)$$

### 2.3.3 Les structures de poursuite de phase multifréquence

L'utilisation des signaux multifréquence offre une diversité en fréquence bénéfique aux algorithmes de poursuite de phase. Pour un signal multifréquence émis par un même satellite, une information de phase commune peut être observée sur les différentes observations de phase associée aux différentes porteuses du signal.

L'observation de phase (i.e., la phase estimée par la poursuite de phase) associée à la porteuse  $f_{p,i}$  est donnée par [88] :

$$\hat{\phi}_i = \Delta\phi_i + \Delta H_i + \Delta I_{\phi,i} + \Delta T_{\phi,i} + \Delta N_i + \epsilon_{\phi,i}, \quad (2.86)$$

avec  $\Delta\phi_i$  le déphasage lié à la distance géométrique satellite/utilisateur défini à l'équation (1.39),  $\Delta H_i = 2\pi f_{p,i}(\delta h_r - \delta h_s)$  l'erreur de phase liée au biais d'horloge,  $\Delta I_{\phi,i}$  les perturbations ionosphériques,  $\Delta T_{\phi,i}$  la perturbation troposphérique,  $\Delta N_i$  l'ambiguïté de phase et les sauts de cycle et  $\epsilon_{\phi,i}$  le bruit d'estimation de phase. Il a été vu dans la section 2.3.2 que les retards atmosphériques d'un signal multifréquence sont liés par des relations de proportionnalité faisant intervenir les ratios des différentes porteuses. Ainsi, si on travaille sur un signal bifréquence, on a le système d'équation suivant :

$$\hat{\phi}_1 = \Delta\phi_1 + \Delta H_1 + \Delta I_{\phi,1} + \Delta T_{\phi,1} + \Delta N_1 + \epsilon_{\phi,1} \quad (2.87)$$

$$\hat{\phi}_2 = \frac{f_{p,2}}{f_{p,1}} (\Delta\phi_1 + \Delta H_1 + \Delta T_{\phi,1}) + \frac{f_{p,1}}{f_{p,2}} \Delta I_{\phi,1} + \Delta N_2 + \epsilon_{\phi,2}. \quad (2.88)$$

On constate alors sur le système d'observation de phase que, pour un signal multifréquence, il n'est pas possible d'exploiter directement la relation de proportionnalité théorique des observations de phase à cause de la présence des retards ionosphériques qui ne respectent pas cette relation (les retards ionosphériques sont inversement proportionnels à la fréquence porteuse). Pour pouvoir profiter de la redondance de l'information de distance présente dans les observations de phase, les perturbations ionosphériques doivent être estimées pour pouvoir être corrigées. Comme il a été vu à la section 2.3.2.1, les retards ionosphériques sont exprimables en fonction du taux d'électron de l'ionosphère par :

$$\Delta I_{\phi,1} = \frac{f_{p,2}}{f_{p,1}} \Delta I_{\phi,2} = 2\pi \frac{-40.3}{c f_{p,1}} TEC. \quad (2.89)$$

On voit alors, d'après l'équation (2.89), que la seule connaissance du TEC permet de compenser la contribution des effets ionosphériques pour un signal multifréquence issu d'un même satellite. Malheureusement, il est difficile d'avoir une parfaite connaissance du TEC. En effet, les modèles mathématiques existants permettent de compenser uniquement 50% du retard ionosphérique [89]. Le TEC doit par conséquent être estimé si l'on souhaite pouvoir exploiter la diversité en fréquence d'un signal de navigation. Une des méthodes d'estimation du TEC consiste à utiliser les observations de phase obtenues sur les deux porteuses. D'après les diverses relations de proportionnalité (2.89), l'estimation du TEC peut être effectuée par la combinaison des observations de phase [90]. L'estimation ainsi obtenue est cependant biaisée à cause des sauts de cycle et des ambiguïtés de phase présents dans les observations. Néanmoins, l'estimation du TEC via la combinaison linéaire des observations reste possible à condition d'utiliser également les observations de pseudo-distance afin d'éliminer ces problèmes d'ambiguïté [91]. Il est également possible d'estimer le TEC lors de la poursuite de phase grâce à des méthodes de poursuite vectorielle ou des méthodes de filtrage de Kalman.

La valeur du TEC est alors considérée comme une inconnue à estimer au cours du temps qui sera incluse dans l'équation d'état du système [50].

Malgré la nature scalaire des boucles à verrouillage de phase, il est possible d'effectuer des poursuites de phase multiréquence grâce des DPLL. Les structures globales de poursuite sont alors composées de plusieurs boucles poursuivant les différentes phases porteuses avec des systèmes d'assistance entre les différentes boucles. Tout comme les diverses méthodes de poursuite de phase multiréquence, les structures de poursuite utilisant des DPLL utilisent les différentes relations de proportionnalité liant les observations de phase.

La première idée pour combiner les DPLL est d'utiliser la relation théorique de proportionnalité (2.70) qui lie les phases Doppler d'un signal multiréquence. En exploitant cette relation, il est possible d'implémenter la structure illustrée à la figure 2.32. La structure est composée d'une DPLL suivant la phase porteuse numéro 1 et d'une structure en boucle ouverte qui estime la phase de la porteuse numéro 2 grâce à l'estimation de phase de la première porteuse [92, 93]. L'utilisation d'une structure ouverte pour l'estimation de la phase de la porteuse numéro 2 permet de réduire la complexité de l'architecture de poursuite mais implique que la porteuse numéro 1 soit la porteuse la plus fiable [93]. La structure présentée

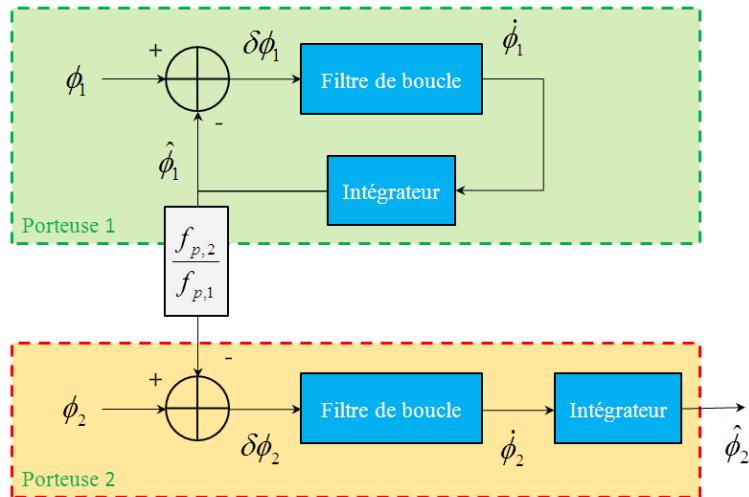


FIGURE 2.32 – Poursuite de phase bifréquence par PLL par assistance de phase [92]

à la figure 2.32 ne permet cependant pas d'estimer correctement la phase  $\phi_2$  en présence de retard ionosphérique. En effet, en plus des problèmes liés à la présence des sauts de cycle, les retards ionosphériques présents sur chacune des porteuses ne permettent pas de lier les observations de phase par une simple relation de proportionnalité comme on peut le constater sur les équations (2.87) et (2.88). Pour s'en convaincre, la figure 2.33 illustre les sorties de discriminateur ainsi que les voies I et Q du produit de corrélation, pour une poursuite de rampe de phase bifréquence avec un retard ionosphérique relatif constant entre les deux porteuses de 0.5 rad (les DPLL sont d'ordre 2). A cause de ce retard, on constate que la sortie du discriminateur de la seconde porteuse ne converge pas vers 0 comme espéré (il en est de même avec la voie Q du produit de corrélation qui n'est pas nulle).

Pour remédier à ce problème et implémenter une structure toujours basée sur un système d'assistance, il faut lier les DPLL entre elles au niveau de la sortie du filtre de boucle [92, 93]. La structure résultante, construite à partir de deux DPLL, est donnée à la figure 2.34.

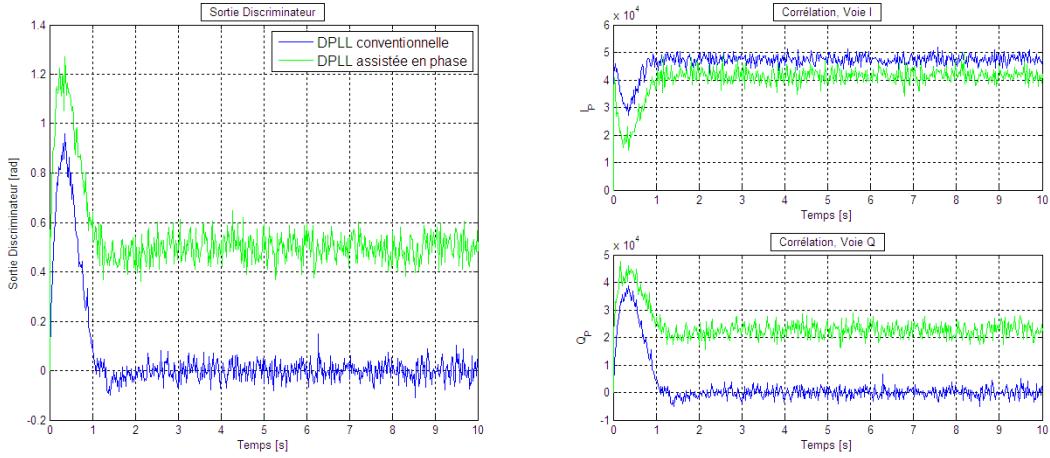


FIGURE 2.33 – Observations de la sortie du discriminateur et des voies I et Q du produit de corrélation pour une DPLL bifréquence assistée en phase en présence de retard ionosphérique

Contrairement à la structure donnée à la figure 2.32, cette nouvelle structure de poursuite

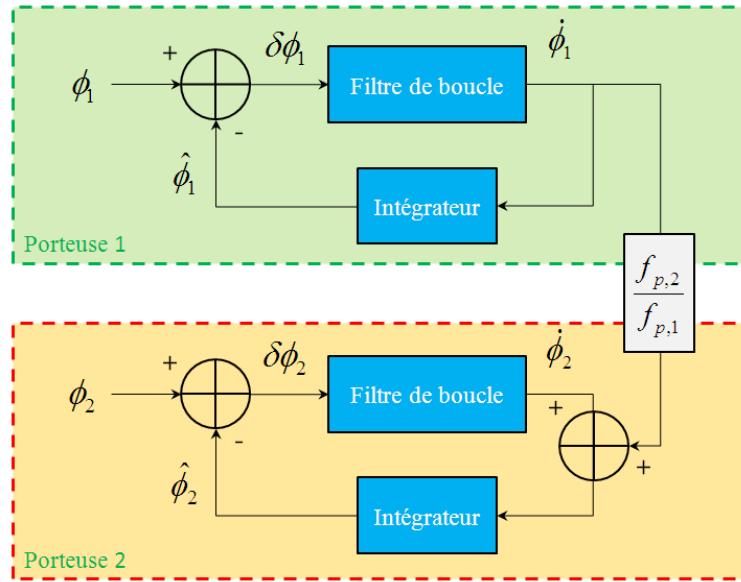


FIGURE 2.34 – Poursuite de phase bifréquence par PLL assistée en fréquence [92]

multifréquence permet de passer outre les problèmes de déphasage liés à la ionosphère comme l'illustre la figure 2.35, où sont illustrés les sorties de discriminateur ainsi que les voies I et Q du produit de corrélation pour la poursuite bifréquence d'une rampe de phase avec un retard ionosphérique relatif constant entre les deux porteuses de 0.5 rad. On voit, contrairement au cas de la figure 2.33, que la sortie du discriminateur associée à la seconde porteuse tend bien vers 0 et que le produit de corrélation entre le signal émit et la réplique locale est bien réel. La structure illustrée à la figure 2.34 permet donc de passer outre les problèmes de retards ionosphériques car, contrairement à la structure illustrée à la figure 2.32 qui lie les sorties de discriminateur, l'assistance entre les DPLL s'effectue en sortie du filtre. En effet, comme les observations de sortie de filtre sont des observations de fréquence, ces

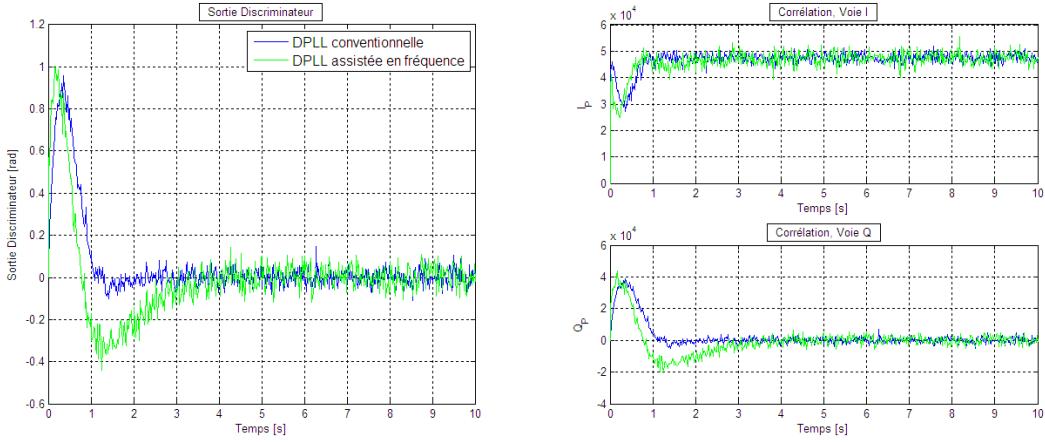


FIGURE 2.35 – Observations de la sortie du discriminateur et des voies I et Q du produit de corrélation pour une DPLL bifréquence assistée en fréquence en présence de retard ionosphérique

dernières sont uniquement affectées par les fluctuations du taux d'électron de l'ionosphère qui, en conditions non critiques, sont généralement suffisamment faibles pour pouvoir être négligées. Sous cette hypothèse, il est alors possible d'écrire :

$$\dot{\phi}_2 = \frac{f_{p,2}}{f_{p,1}} \dot{\phi}_1, \quad (2.90)$$

ce qui valide la structure illustrée à la figure 2.34. On notera que, comme le système de DPLL assistée en phase, le système d'assistance en fréquence s'opère de la porteuse 1 vers la porteuse 2. Cela qui implique de nouveau que la porteuse 1 soit la porteuse la plus fiable.

## 2.4 Bilan

La poursuite de phase est un processus complexe qui peut être réalisé par diverses méthodes de poursuite. De toutes ces structures, nous nous sommes intéressés à la boucle à verrouillage de phase numérique. Cet outil de poursuite, réalisant un asservissement sur la phase porteuse du signal de navigation à la réception, est facilement dimensionnable et peut être étudié par des modèles linéaires, permettant ainsi de comprendre facilement les divers mécanismes et problèmes rencontrés lors d'une poursuite de phase.

Parmi ces problèmes, le phénomène de sauts de cycle est un des aspects de la poursuite de phase qui limite son utilisation en environnement dégradé. Ce comportement non-linéaire de la boucle, dû à une forte dynamique de phase ou à un fort niveau de bruit, va ponctuellement biaiser l'estimation de phase et peut même faire décrocher la poursuite si les sauts de cycles sont trop fréquents ou trop importants. Des méthodes de développement de phase basées sur des techniques de détection par seuillage peuvent être mises en place au niveau de la DPLL afin de corriger les sauts de cycle. Malheureusement, ces méthodes sont peu robustes en environnements dégradés du fait de leur nature non-linéaire.

Un autre aspect primordial de la poursuite de phase est la poursuite des signaux de navigation multifréquence. En effet, pour un signal multifréquence émis par un même satellite, une information de phase commune peut être extraite des différentes estimations de phase réalisées sur chacune des porteuses du signal. L'utilisation de signaux multifréquence nécessite

cependant de tenir compte des déphasages qu'il existe entre les différentes phases porteuses provoqués par la traversée du signal au travers de l'ionosphère et la troposphère. Malgré les modèles mathématiques existant, il est difficile de corriger ces déphasages et les poursuites de phase multifréquence doivent tenir compte de ces perturbations en les estimant au même titre que la phase soit par des combinaisons d'observation de phase soit par des structures de poursuite vectorielle. On a cependant vu qu'il était possible, malgré leurs natures scalaires, de réaliser une poursuite de phase multifréquence grâce à un système d'assistance entre les boucles au niveau des filtres de boucle.

Dans la suite on s'intéressera donc à la poursuite de phase multifréquence réalisée par des DPLL en environnements dégradés. Dans un premier temps, on raisonnera en mode de poursuite monofréquence afin de modifier la structure conventionnelle de la DPLL pour la rendre plus robuste au phénomène de sauts de cycle. Puis, on adaptera la structure développée aux signaux multifréquence afin d'en améliorer sa robustesse. Pour finir, on proposera une nouvelle structure de poursuite de phase multifréquence basée sur une approche d'estimation de phase bayésienne. Dans les deux cas d'étude de poursuite multifréquence, nous supposons que l'ensemble des effets ionosphériques affectant les diverses fréquences porteuses sont parfaitement corrigés. Bien qu'en pratique cette hypothèse n'est pas réalisable, elle va nous permettre dans un premier temps de nous focaliser sur la diversité en fréquence d'un signal de navigation afin d'élaborer de nouvelles structures de poursuite.



# Chapitre 3

## Systèmes de développement de phase monofréquence pour DPLL

Les sauts de cycle se produisant au sein d'une boucle de phase sont un phénomène nuisible dans le sens où, si ces derniers sont trop fréquents, l'estimation de phase fournie par la DPLL n'est plus viable pour les algorithmes de positionnement opérant en aval de la poursuite. Il existe des méthodes de développement de phase placées en sortie du discriminateur qui permettent de corriger les sauts de cycle grâce à des techniques de seuillage. Ces méthodes sont cependant peu efficaces en présence de bruit de par la nature non-linéaire des fonctions qu'elles utilisent. Pour pouvoir réduire les sauts de cycle au sein de la PLL en environnement dégradé, il est nécessaire de développer des méthodes de développement de phase basées sur des techniques autres que celles utilisées par les algorithmes existants.

Dans ce chapitre, nous allons proposer des méthodes de développement de phase basées sur une technique de prédiction de phase par régression linéaire. Ces méthodes, ayant pour but de réduire la dynamique de phase estimée par le discriminateur, analysent les sorties du discriminateur ou les sorties du filtre de boucle afin de prédire et de pré-compenser la prochaine erreur d'estimation de phase en sortie du discriminateur. Après avoir détaillé les algorithmes développés, une étude de performance est réalisée afin de quantifier la robustesse au bruit et aux sauts de cycle des DPLL dotées de ces algorithmes de développement de phase. L'ensemble des travaux relatifs au développement de ces nouvelles méthodes de poursuite ont fait l'objet d'une participation à la conférence ION GNSS 2012 [1].

### Sommaire

<b>3.1 Développement de phase par prédiction de la sortie du discriminateur . . . . .</b>	<b>72</b>
3.1.1 Développement de phase par prédiction polynomiale . . . . .	72
3.1.2 Prédiction de la sortie du discriminateur par analyse des observations de ce dernier via les moindres carrés récursifs pondérés . . . . .	75
3.1.3 Prédiction de la sortie du discriminateur par analyse de la sortie du filtre de boucle via les moindres carrés récursifs pondérés . . . . .	79
<b>3.2 Simulations numériques . . . . .</b>	<b>83</b>
3.2.1 Modèle de génération du signal . . . . .	84
3.2.2 Métriques de performance . . . . .	85
3.2.3 Performances en présence de bruit . . . . .	87
<b>3.3 Conclusion . . . . .</b>	<b>91</b>

### 3.1 Développement de phase par prédition de la sortie du discriminateur

Dans cette section, nous allons présenter deux nouvelles structures de DPLL munies de systèmes de développement de phase visant à réduire la dynamique de phase au niveau du discriminateur afin d'éviter l'apparition du phénomène de saut de cycle.

#### 3.1.1 Développement de phase par prédition polynomiale

La méthode de développement de phase décrite dans la section 2.2.5.2 est, en plus d'être une méthode basée sur des techniques de seuillage non-linéaires, une méthode ponctuelle dans le sens où, à l'instant  $k$ , seule l'information de phase à l'instant  $k - 1$  est nécessaire pour la détection et la compensation des sauts de cycle. En présence de bruit, ce mode de fonctionnement est peu robuste car travailler avec seulement deux observations en régime bruité n'est pas représentatif de l'aspect général que peut avoir la poursuite de phase. Une approche plus globale visant à travailler sur le comportement moyen de la poursuite est donc préférable.

Une technique de développement de phase (élaborée dans un contexte générale de développement de phase) n'utilisant pas de fonction de seuillage mais basée sur l'utilisation de plusieurs observations est donnée dans [94]. Cette méthode repose sur un système de prédition et de pré-compensation de phase qui a pour but d'éviter les sauts de cycle plutôt que de les corriger. Plus précisément, supposons que l'on dispose des observations  $x[k]$  suivantes :

$$x[k] = A[k]e^{i(\psi[k]+v[k])}, \quad (3.1)$$

avec  $A[k] \approx A$  l'amplitude de  $x[k]$  qui sera supposée constante,  $\psi[k]$  la phase d'intérêt que l'on souhaite estimer et  $v[k]$  le bruit de phase. Pour extraire la phase des observations  $x[k]$  et avoir une estimation  $\hat{\psi}[k]$  de la phase d'intérêt, on suppose également disposer d'un discriminateur de phase de type *Arctangent* tel que :

$$\mathcal{D}(x[k]) \underset{not.}{=} \arctan\left(\frac{\Im(x[k])}{\Re(x[k])}\right) = \hat{\psi}[k]. \quad (3.2)$$

L'estimation de phase donnée par l'équation (3.2) est de manière évidente non-développée de par la nature périodique du discriminateur.

Pour pouvoir obtenir une estimation développée  $\hat{\psi}_{UW}[k]$  de la phase d'intérêt à l'instant  $k$ , une prédition de cette dernière est réalisée grâce à l'analyse de la phase d'intérêt (que l'on supposera développée) par le modèle polynomiale d'ordre  $M$  suivant :

$$\psi_{UW}[k] = \sum_{m=0}^M p_m(kT)^m + v[k], \quad (3.3)$$

avec  $\psi_{UW}$  la phase d'intérêt développée,  $T$  le temps d'échantillonnage des observations,  $p_m$  les coefficients polynomiaux du modèle d'analyse et  $v[k]$  la composante de bruit. Grâce à ce modèle et en ayant à disposition le vecteur d'observations

$$\hat{\psi}_{UW}[k] = [\hat{\psi}_{UW}[0], \hat{\psi}_{UW}[1], \dots, \hat{\psi}_{UW}[k]]^T, \quad (3.4)$$

il est possible d'écrire le système suivant :

$$\hat{\psi}_{UW}[k] = \mathbf{G}_k \mathbf{p} + \mathbf{v}, \quad (3.5)$$

avec  $\mathbf{v}^T = [v[0] \dots v[k]]$  le vecteur bruit,  $\mathbf{p}^T = [p_0, p_1, \dots, p_M]$  les coefficients polynomiaux du modèle d'analyse et  $\mathbf{G}_k$  la matrice de dimension  $(k+1) \times (M+1)$  telle que :

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & T & T^2 & \cdots & T^M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & kT & (kT)^2 & \cdots & (kT)^M \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

L'estimation par les moindres carrés des coefficients polynomiaux à l'instant  $k$  est donnée par le problème de minimisation suivant

$$\hat{\mathbf{p}}[k] = \arg \min_{\mathbf{p}} \|\mathbf{G}_k \mathbf{p} - \hat{\psi}_{UW}[k]\|_2^2, \quad (3.7)$$

qui nous donne l'expression

$$\hat{\mathbf{p}}[k] = (\mathbf{G}_k^T \mathbf{G}_k)^{-1} \mathbf{G}_k^T \hat{\psi}_{UW}[k]. \quad (3.8)$$

Grâce à l'estimation des coefficients polynomiaux, il est possible, via le modèle d'analyse (3.3), d'obtenir la prédiction de phase suivante

$$\hat{\psi}_{UW}[k+1|k, k-1, \dots] = \underset{\text{not.}}{\hat{\psi}_{UW}[k+1|k]} = \mathbf{g}_{k+1} \hat{\mathbf{p}}[k], \quad (3.9)$$

avec

$$\mathbf{g}_{k+1} = [1 \quad (k+1)T \quad ((k+1)T)^2 \quad \cdots \quad ((k+1)T)^M]. \quad (3.10)$$

L'estimation de la phase développée à l'instant  $k+1$  est obtenue en utilisant la prédiction de phase de la sorte

$$\hat{\psi}_{UW}[k+1] = \mathcal{D} \left( x[k+1] e^{-i\hat{\psi}_{UW}[k+1|k]} \right) + \hat{\psi}_{UW}[k+1|k]. \quad (3.11)$$

L'équation (3.11) résume le procédé de développement de phase représenté schématiquement à la figure 3.1 : si on dispose d'une connaissance a priori de la phase à l'instant  $k$ , il est possible de la pré-compenser au niveau du discriminateur afin de réduire la phase à estimer par ce dernier et éviter l'apparition de sauts de cycle. Il faut noter que le fonctionnement de cette méthode de développement de phase repose sur l'hypothèse que

$$|\hat{\psi}_{UW}[k|k-1] - \psi[k]| < \pi/2. \quad (3.12)$$

La prédiction de phase doit donc être suffisamment précise pour que l'erreur de prédiction commise soit totalement estimable par le discriminateur *Arctangent* sous peine de voir se produire des sauts de cycle.

En pratique, pour éviter d'effectuer des calculs matriciels trop importants dus au fait que le vecteur d'observation  $\hat{\psi}_{UW}$  grandit au cours du temps, l'estimation (3.8) des coefficients polynomiaux se réalise grâce à l'algorithme des moindres carrés récursifs. Ainsi, l'estimation des coefficients est donnée par l'algorithme récursif suivant [94, 95] :

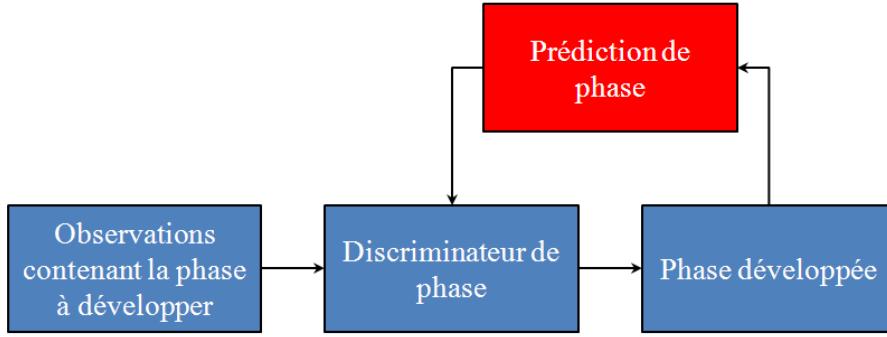


FIGURE 3.1 – Schéma bloc de la méthode de développement de phase par prédition et pré-compensation de phase

#### INITIALISATION ( $k = N_{init} - 1$ )

Soit  $N_{init} \in \mathbb{N}^*$ , avec  $N_{init} \geq M + 1$ , le nombre de données que l'on se fixe pour établir la première estimation des coefficients polynomiaux. La première estimation des coefficients est donnée par

$$\hat{\mathbf{p}}[k = N_{init} - 1] = (\mathbf{G}_{N_{init}-1}^T \mathbf{G}_{N_{init}-1})^{-1} \mathbf{G}_{N_{init}-1}^T \hat{\psi}[N_{init} - 1]. \quad (3.13)$$

avec  $\hat{\psi}[N_{init} - 1] = [\hat{\psi}[0], \hat{\psi}[1], \dots, \hat{\psi}[N_{init} - 1]]^T$  le vecteur des observations de phase non-développées. Pour l'initialisation, on est obligé d'utiliser les données non-développées pour estimer les coefficients polynomiaux. Par conséquent, si des sauts de cycle se produisent sur les  $N_{init}$  premières observations, des erreurs de prédition seront observées au niveau des estimations des coefficients et se traduiront par une erreur de prédition de la sortie du discriminateur. L'étape d'initialisation est donc une étape critique de l'algorithme.

#### ITERATIONS( $k \geq N_{init}$ )

##### *1-Prédiction de la phase*

$$\hat{\psi}_{UW}[k + 1|k] = \mathbf{g}_{k+1} \hat{\mathbf{p}}[k], \quad (3.14)$$

##### *2-Développement de phase*

$$\hat{\psi}_{UW}[k + 1] = \mathcal{D}(x[k + 1] e^{-j\hat{\psi}_{UW}[k + 1|k]}) + \hat{\psi}_{UW}[k + 1|k] \quad (3.15)$$

##### *3-Mise à jour de l'estimation des coefficients polynomiaux*

$$\hat{\mathbf{p}}[k + 1] = \hat{\mathbf{p}}[k] + \mathbf{C}_{k+1} (\hat{\psi}_{UW}[k + 1] - \hat{\psi}_{UW}[k + 1|k]) \quad (3.16)$$

avec le vecteur gain

$$\mathbf{C}_{k+1} = \frac{\mathbf{P}_k \mathbf{g}_{k+1}^T}{1 + \mathbf{g}_{k+1} \mathbf{P}_k \mathbf{g}_{k+1}^T} \quad (3.17)$$

où  $\mathbf{P}_k$  est la matrice de covariance de l'erreur de taille  $(M + 1) \times (M + 1)$  donnée par

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{g}_{k+1}) \mathbf{P}_k \quad (3.18)$$

### 3.1.2 Prédiction de la sortie du discriminateur par analyse des observations de ce dernier via les moindres carrés récursifs pondérés

Dans cette section, nous allons adapter l'algorithme de développement de phase présenté dans la section 3.1.1 à la structure d'une DPLL afin d'élaborer une nouvelle structure de poursuite. Les sauts de cycle se produisant au niveau du discriminateur, l'algorithme sera logiquement implémenté au niveau de ce dernier. Plus précisément, une prédiction de la future sortie du discriminateur sera effectuée afin de la pré-compenser au niveau de la génération de la réplique locale. Le but étant que l'erreur d'estimation de phase reste dans la plage de linéarité du discriminateur afin d'éviter les sauts de cycle. Tout comme pour la structure de développement de phase présentée à la section 2.2.5.2, un gain correctif  $K$  est placé en sortie de prédiction afin de réduire l'impact du bruit. La nouvelle structure de DPLL est donnée à la figure 3.2.

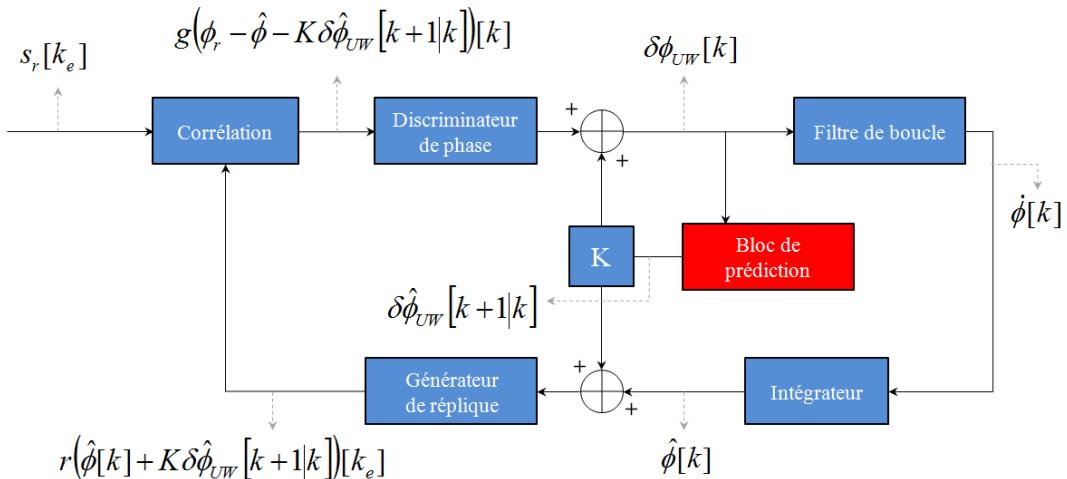


FIGURE 3.2 – Structure de DPLL munie d'un système de développement de phase analysant les sorties de discriminateur

Comparée à la structure de développement de phase présentée à la section 2.2.5.2, cette structure évite d'utiliser des fonctions de seuillage non-linéaires pour corriger les sauts de cycle lors de la poursuite. Cette configuration permet également une possible correction naturelle de l'erreur de prédiction par le discriminateur, à condition que cette dernière ne soit pas trop importante. Elle permet également de rendre la boucle plus robuste au bruit en permettant, grâce à la pré-compensation de la dynamique au niveau du discriminateur, de réduire la bande de boucle de la DPLL sans avoir de problèmes liés à la dynamique de phase à poursuivre.

#### 3.1.2.1 Modèle d'analyse de la sortie de discriminateur

Pour pouvoir adapter l'algorithme de développement de phase donné dans [94] au niveau du discriminateur, un modèle d'analyse de l'erreur d'estimation de phase estimée par ce dernier doit être établi si l'on souhaite pouvoir en prédire la prochaine observation. Comme

précédemment, on choisit le modèle d'analyse polynomial d'ordre  $M$  suivant :

$$\delta\phi_{UW}[k] = \sum_{m=0}^M a_m (kT_{corr})^m + n_{\delta\phi}[k] \quad (3.19)$$

avec  $\delta\phi_{UW}$  la sortie développée du discriminateur,  $\{a_0, a_1, \dots, a_M\}$  les coefficients polynomiaux que l'on cherchera à estimer et  $n_{\delta\phi}$  le bruit en sortie du discriminateur. L'algorithme d'estimation des coefficients est décrit dans le paragraphe suivant.

### 3.1.2.2 Prédiction et pré-compensation de la sortie discriminateur

Grâce au modèle d'analyse donné à l'équation (3.19), il est possible d'appliquer l'algorithme récursif présenté à la section 3.1.1 dans le but de prédire et pré-compenser la sortie du discriminateur afin de réduire l'apparition des sauts de cycle.

Dans le cas d'une poursuite de phase d'un signal GNSS, la dynamique de phase en entrée de la DPLL évolue au cours du temps. Pour pouvoir tenir compte des différentes variations de la dynamique de phase lors de la mise à jour de l'estimation des coefficients polynomiaux  $a_m$ , l'algorithme des moindres carrés récursifs utilisé dans la section 3.1.1 est remplacé par l'algorithme des moindres carrés récursifs pondérés, aussi appelé WRLS (*Weighted Recursive Least Squares*). La pondération des observations s'effectuera grâce à un coefficient d'oubli  $\gamma$  choisi tel que  $\gamma < 1$ . Dans le cadre d'une estimation classique par les moindres carrés pondérés, ce coefficient d'oubli est utilisé de la sorte :

$$\hat{\mathbf{a}}[k] = (\mathbf{G}_k^T \mathbf{R}[k] \mathbf{G}_k)^{-1} \mathbf{G}_k^T \mathbf{R}[k] \delta\phi_{UW}[k] \quad (3.20)$$

avec  $\hat{\mathbf{a}}[k] = [\hat{a}_0[k], \dots, \hat{a}_M[k]]^T$  le vecteur d'estimation des coefficients polynomiaux à l'instant  $k$ ,  $\delta\phi_{UW}[k] = [\delta\phi_{UW}[0], \dots, \delta\phi_{UW}[k]]^T$  le vecteur des observations de la sortie développée du discriminateur et  $\mathbf{R}[k]$  la matrice de pondération définie par

$$\mathbf{R}[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma^k \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Le facteur d'oubli  $\gamma$  permet donc de donner plus d'importance aux dernières observations et de rendre négligeable l'apport des anciennes observations dans l'estimation des coefficients du modèle d'analyse. Grâce à cette pondération, les variations de dynamique pourront bien être prises en compte et les diverses observations fortement bruitées ou comportant des sauts de cycle pourront être négligées au bout d'un certain temps, évitant ainsi d'accumuler ces perturbations.

En tenant compte du facteur d'oubli  $\gamma$ , l'algorithme récursif de prédiction et de pré-compensation de la sortie du discriminateur est le suivant [95] :

#### INITIALISATION ( $k = N_{init} - 1$ )

Soit  $N_{init} \in \mathbb{N}^*$ , avec  $N_{init} \geq M + 1$ , le nombre d'observations de la sortie du discriminateur que l'on se fixe pour établir la première estimation des coefficients polynomiaux. La première estimation des coefficients est donnée par

$$\hat{\mathbf{a}}[N_{init} - 1] = (\mathbf{G}_{N_{init}-1}^T \mathbf{R}[N_{init} - 1] \mathbf{G}_{N_{init}-1})^{-1} \mathbf{G}_{N_{init}-1}^T \mathbf{R}[N_{init} - 1] \delta\phi[N_{init} - 1]. \quad (3.22)$$

avec  $\hat{\mathbf{a}}[N_{init} - 1] = [\hat{a}_0[N_{init} - 1], \dots, \hat{a}_M[N_{init} - 1]]^T$  le premier vecteur d'estimation des coefficients polynomiaux et  $\delta\phi[N_{init} - 1] = [\delta\phi[0], \dots, \delta\phi[N_{init} - 1]]^T$  le vecteur des observations non-développées de la sortie du discriminateur. Tout comme l'algorithme présenté à la section 3.1.1, on travaille, durant l'étape d'initialisation, sur des observations brutes qui peuvent contenir des sauts de cycle.

ITERATIONS( $k \geq N_{init}$ )

*1-Prédiction de la sortie du discriminateur*

$$\hat{\delta\phi}_{UW}[k + 1|k] = \mathbf{g}_{k+1}\hat{\mathbf{a}}[k], \quad (3.23)$$

*2-Pré-compensation de la prédiction*

$$\delta\phi_{UW}[k + 1] = \mathcal{D}\left(g\left(\phi_r - \hat{\phi}\right)[k + 1]e^{-jK\hat{\delta\phi}_{UW}[k + 1|k]}\right) + K\hat{\delta\phi}_{UW}[k + 1|k] \quad (3.24)$$

*3-Mise à jour de l'estimation des coefficients polynomiaux*

$$\hat{\mathbf{a}}[k + 1] = \hat{\mathbf{a}}[k] + \mathbf{C}_{k+1}\left(\delta\phi_{UW}[k + 1] - \hat{\delta\phi}_{UW}[k + 1|k]\right) \quad (3.25)$$

avec

$$\mathbf{C}_{k+1} = \frac{\mathbf{P}_k \mathbf{g}_{k+1}^T}{\gamma^{k+1} + \mathbf{g}_{k+1} \mathbf{P}_k \mathbf{g}_{k+1}^T}, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{g}_{k+1}) \mathbf{P}_k. \quad (3.27)$$

### 3.1.2.3 Exemples de poursuite

Afin d'illustrer le bon fonctionnement de la structure de DPLL illustrée à la figure 3.2, nous allons étudier la poursuite de phase sans bruit suivante :

- DPLL d'ordre 2,
- $B_L = 2$  Hz,
- $T_{corr} = 20$  ms,
- discriminateur *Arctangent*,
- dynamique de phase : 2 Hz+2 Hz/s,

En ce qui concerne le système de prédiction et pré-compensation de la sortie du discriminateur, nous choisissons le dimensionnement suivant :

- $N_{init} = 3$ ,
- $\gamma = 0.9$ ,
- $K = 1$ .

L'analyse de la sortie du discriminateur est réalisée avec un modèle polynomial d'ordre  $M = 1$ . On supposera donc que localement, la valeur de la sortie du discriminateur peut être approchée par la valeur de sa tangente, i.e.,

$$\delta\phi_{UW}[k] = a_0 + a_1(kT_{corr}) + n_{\delta\phi}[k]. \quad (3.28)$$

Malgré le fait qu'au cours du temps les diverses variations de la dynamique de phase ne permettent pas à la sortie du discriminateur d'avoir une allure de droite affine, cette hypothèse d'analyse reste cependant réalisable grâce à l'algorithme WRRLS. En effet, le facteur d'oubli  $\gamma$ , va pondérer les observations de sortie du discriminateur de telle sorte que seules les

dernières observations soient prises en compte. Par conséquent, il est possible d'approcher localement les observations pondérées de la sortie du discriminateur par une droite. L'estimation des coefficients polynomiaux  $a_0$  et  $a_1$  correspondent donc à l'ordonnée à l'origine et à la pente de la tangente de la sortie du discriminateur au cours du temps.

Les diverses observations associées à ce scénario de poursuite sont données à la figure 3.3 où sont illustrées les diverses sorties de discriminateur (sortie prédictive, sortie pré-compensée et sortie développée), l'estimation des coefficients polynomiaux  $a_0$  et  $a_1$  ainsi que l'estimation de phase. Grâce à ces observations, il est possible de constater que :

- Malgré le fait qu'à environ 250 ms de poursuite l'erreur d'estimation de phase excède la plage de linéarité du discriminateur, aucun saut de cycle ne se produit au niveau de la poursuite de phase. Grâce à la prédiction de la sortie du discriminateur et la pré-compensation de cette dernière, la dynamique de phase à estimer par le discriminateur est réduite et n'excède plus la plage de linéarité du discriminateur évitant ainsi l'apparition du saut de cycle normalement attendu.
- Il est possible d'observer une erreur de prédiction pendant l'étape transitoire de la boucle. Cette erreur est liée au fait que l'algorithme WRLS induit une inertie dans l'estimation des coefficients polynomiaux lors des variations de la sortie du discriminateur.
- Lorsque le régime permanent est établi, le système de pré-compensation permet aux discriminateurs de ne plus à avoir à estimer l'erreur en régime permanent.
- L'estimation des coefficients polynomiaux concorde bien avec les variations de la pente et de l'ordonnée à l'origine de la tangente de la sortie du discriminateur au cours du temps. Il est possible de noter que, pour ce scénario de poursuite, l'estimation du coefficient  $a_0$  tend vers la valeur de l'erreur en régime permanent liée à l'accélération de phase. Dans notre cas, l'erreur en régime permanent vaut  $e_{r.p.} = 1.03$  rad soit  $e_{r.p.} = 0.16$  cycle. Cette valeur d'erreur en régime permanent correspond bien avec la valeur du coefficient  $a_0$  en régime établi comme le montre la figure 3.3. Quant à l'estimation du coefficient  $a_1$ , on voit bien qu'elle tend vers 0 du fait de l'absence de variation de la sortie du discriminateur en régime permanent.

Les observations données à la figure 3.3 ont été obtenues grâce à une poursuite de phase dont la dynamique est constante au cours du temps. La figure 3.4 illustre quant à elle la poursuite de phase lorsque la dynamique d'entrée est sinusoïdale. On voit bien sur cette figure que l'estimation des coefficients polynomiaux suit bien les variations de dynamique au niveau du discriminateur. Plus précisément, on voit que le coefficient  $a_1$  a bien une allure sinusoïdale comme les variations de dynamique. Concernant le coefficient  $a_0$ , ses variations sont également sinusoïdales mais son amplitude augmente au cours du temps. En effet, on rappelle que ce coefficient correspond à l'ordonnée à l'origine de la tangente de la sortie du discriminateur à un instant donné. Il est donc logique que ces variations soient amplifiées au fil du temps. La bonne estimation des coefficients polynomiaux permet ainsi au système de prédiction et pré-compensation de réduire correctement la dynamique au niveau du discriminateur et d'éviter l'apparition de sauts de cycle.

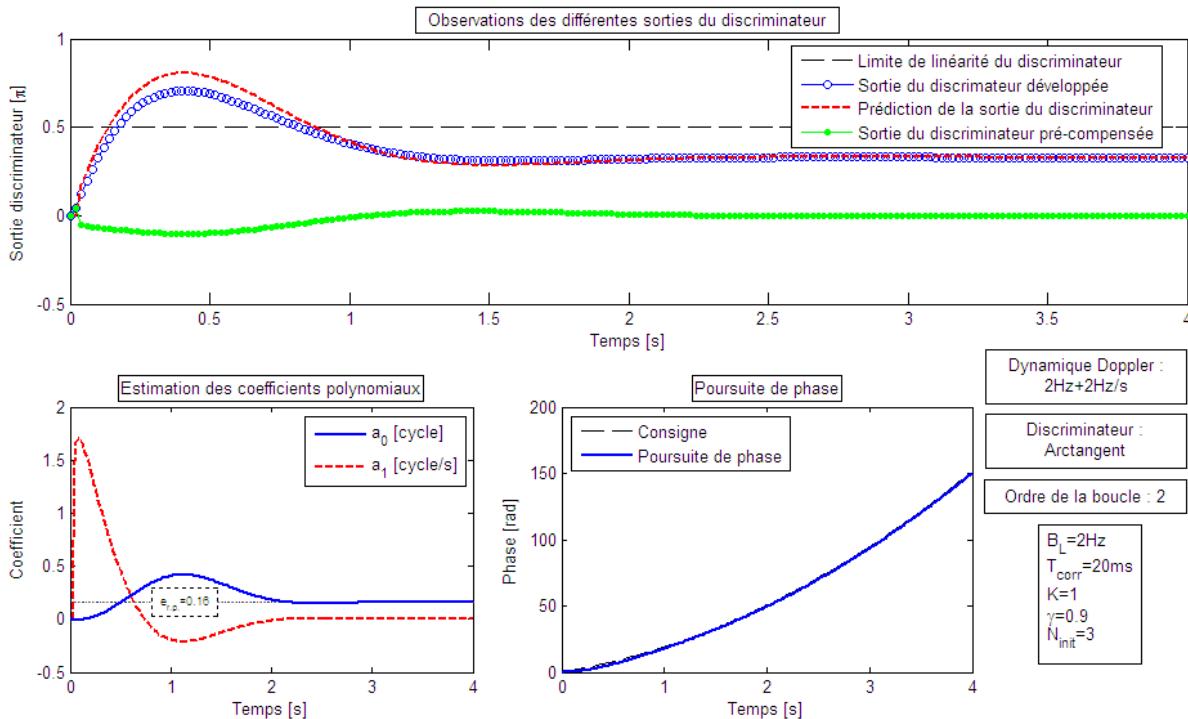


FIGURE 3.3 – Illustration du fonctionnement du système de prédition et pré-compensation de la sortie du discriminateur par analyse des observations du discriminateur pour une dynamique de phase constante

### 3.1.3 Prédiction de la sortie du discriminateur par analyse de la sortie du filtre de boucle via les moindres carrés récursifs pondérés

La structure de développement de phase implémentée au sein de la DPLL illustrée à la figure 3.2 vise à prédire la future sortie du discriminateur de phase afin de la pré-compenser. Il a donc été naturel, dans un premier temps, d'utiliser les observations en sortie du discriminateur pour réaliser la prédition de la prochaine observation. Il est également possible d'effectuer cette prédition par observation des sorties de filtre de boucle. Une étape supplémentaire de conversion fréquence/phase doit être cependant rajoutée afin de convertir l'information obtenue par les observations de sortie de filtre en prédition de sortie du discriminateur. La nouvelle structure de DPLL ainsi obtenue est donnée à la figure 3.5.

Il y a deux avantages à travailler en sortie du filtre plutôt qu'en sortie du discriminateur :

- Se placer en sortie du filtre nous permet de travailler sur des données moins bruitées qu'en sortie directe du discriminateur car le filtre de boucle est un filtre passe-bas qui va filtrer le bruit de phase.
- La sortie du filtre nous renseigne sur la fréquence instantanée du signal d'entrée. Ainsi, lors de l'étape d'estimation de la future sortie de filtre, les coefficients polynomiaux estimés correspondront aux différentes dynamiques de fréquence à suivre. Par conséquent, il peut être envisagé d'insérer des données d'assistance en fréquence directement lors de la prédition de la sortie du filtre de boucle.

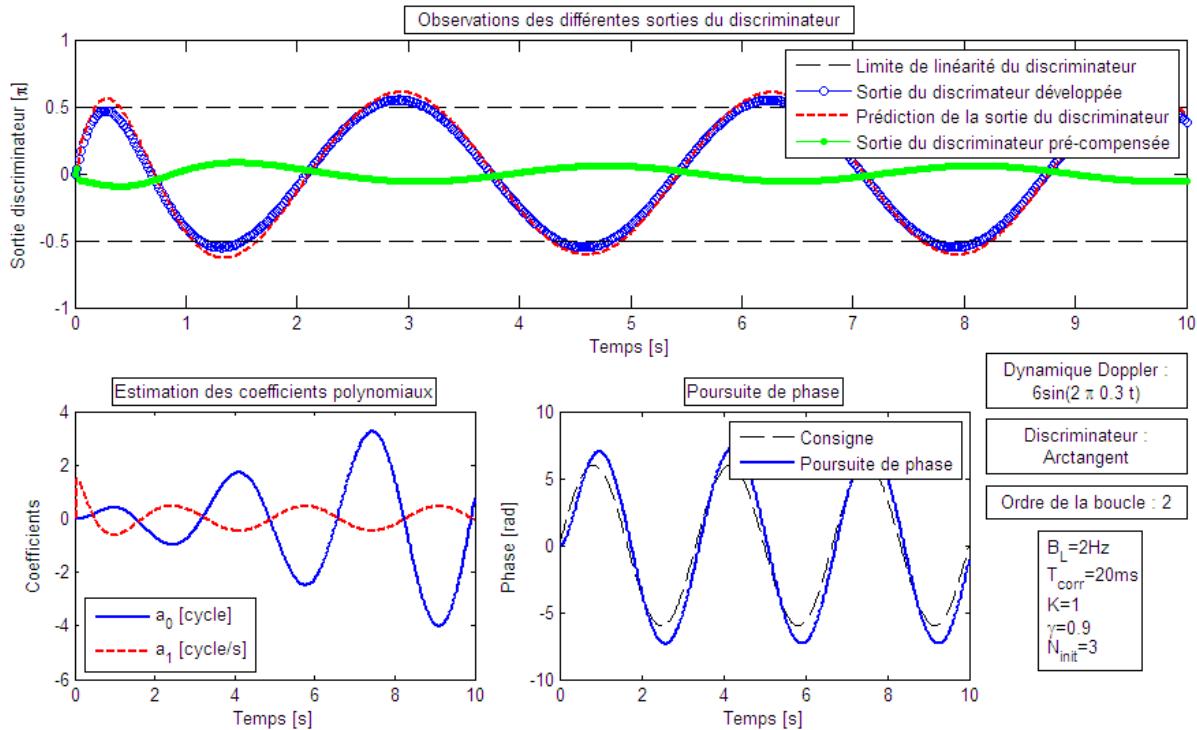


FIGURE 3.4 – Illustration du fonctionnement du système de prédition et pré-compensation de la sortie du discriminateur par analyse des observations du discriminateur pour une dynamique de phase sinusoïdale

Le fonctionnement de cette nouvelle structure de DPLL est détaillé dans les paragraphes qui suivent.

### 3.1.3.1 Modèle d'analyse de la sortie du filtre de boucle

Pour pouvoir analyser les sorties de filtre de boucle, comme pour l'analyse des observations de sortie de discriminateur, on choisit le modèle d'analyse polynomial d'ordre  $M$  suivant

$$\dot{\phi}[k] = \sum_{m=0}^M b_m (kT_{corr})^m + n_{\dot{\phi}}[k] \quad (3.29)$$

avec  $\{b_0, b_1, \dots, b_M\}$  les coefficients polynomiaux que l'on cherchera à estimer et  $n_{\dot{\phi}}$  le bruit en sortie du filtre de boucle.

### 3.1.3.2 Algorithme itératif de prédition et pré-compensation

L'algorithme itératif de prédition et pré-compensation utilisé dans la structure illustrée à la figure 3.5 est similaire à celui détaillé dans la section 3.1.2.2 à la différence de l'étape de conversion fréquence/phase, détaillée à la section 3.1.3.3, lors de la prédition de la future sortie du discriminateur.

#### INITIALISATION ( $k = N_{init} - 1$ )

Soit  $N_{init} \in \mathbb{N}^*$ , avec  $N_{init} \geq M + 1$  le nombre d'observations de la sortie du filtre que l'on se fixe pour établir la première estimation des coefficients polynomiaux. La première

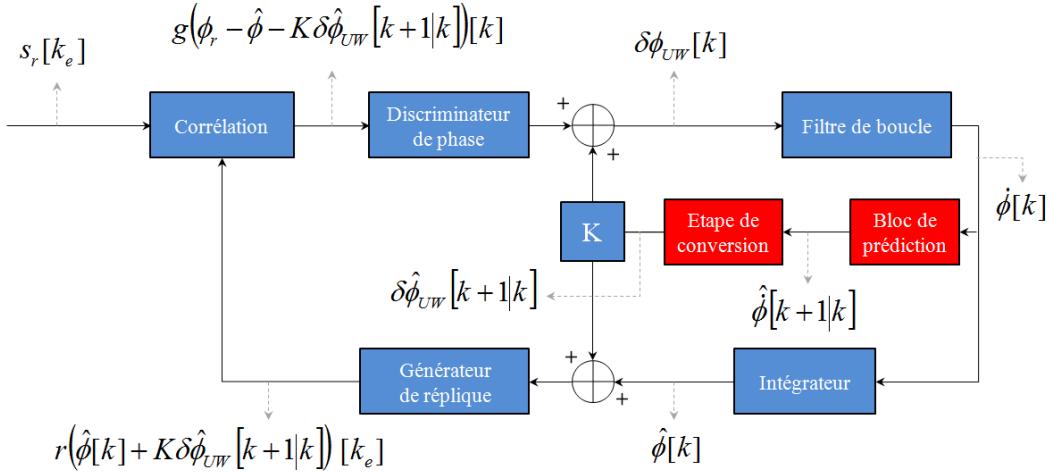


FIGURE 3.5 – Structure de DPLL munie d'un système de développement de phase analysant les sorties de filtre de boucle

estimation des coefficients est donnée par

$$\hat{\mathbf{b}}[N_{init}-1] = \left(\mathbf{G}_{N_{init}-1}^T \mathbf{R}[N_{init}-1] \mathbf{G}_{N_{init}-1}\right)^{-1} \mathbf{G}_{N_{init}-1}^T \mathbf{R}[N_{init}-1] \dot{\phi}[N_{init}-1], \quad (3.30)$$

avec  $\hat{\mathbf{b}}[N_{init}-1] = [\hat{b}_0[N_{init}-1], \dots, \hat{b}_M[N_{init}-1]]^T$  le premier vecteur d'estimation des coefficients polynomiaux,  $\dot{\phi}[N_{init}-1] = [\dot{\phi}[0], \dots, \dot{\phi}[N_{init}-1]]^T$  le vecteur des observations de la sortie du filtre.

#### ITERATIONS( $k \geq N_{init}$ )

##### 1-Prédiction de la sortie du discriminateur

La prediction de la sortie du filtre est donnée par :

$$\hat{\phi}[k+1|k] = \mathbf{g}_{k+1} \hat{\mathbf{b}}[k]. \quad (3.31)$$

Concernant la prédiction de la sortie du discriminateur, elle est obtenue grâce au vecteur  $\hat{\mathbf{b}}[k]$  comme expliqué dans la section 3.1.3.3 :

$$\hat{\delta\phi}_{UW}[k+1|k] = f_{conv}(\hat{\mathbf{b}}[k]) \quad (3.32)$$

avec  $f_{conv}(.)$  l'étape de conversion fréquence/phase.

##### 2-Pré-compensation de la prédiction

$$\delta\phi_{UW}[k+1] = \mathcal{D} \left( g(\phi_r - \hat{\phi}) [k+1] e^{-jK\hat{\delta\phi}_{UW}[k+1|k]} \right) + K\hat{\delta\phi}_{UW}[k+1|k] \quad (3.33)$$

##### 3-Mise à jour de l'estimation des coefficients polynomiaux

$$\hat{\mathbf{b}}[k+1] = \hat{\mathbf{b}}[k] + \mathbf{C}_{k+1} \left( \dot{\phi}[k+1] - \hat{\phi}[k+1|k] \right) \quad (3.34)$$

avec

$$\mathbf{C}_{k+1} = \frac{\mathbf{P}_k \mathbf{g}_{k+1}^T}{\gamma^{k+1} + \mathbf{g}_{k+1} \mathbf{P}_k \mathbf{g}_{k+1}^T} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{g}_{k+1}) \mathbf{P}_k, \quad (3.36)$$

### 3.1.3.3 Étape de conversion fréquence/phase

Prédire la sortie du discriminateur par analyse des sorties du filtre de boucle nécessite, comparé au cas de la figure 3.2, une étape supplémentaire de conversion. Ce paragraphe donne les grandes lignes de l’élaboration de cette étape de conversion. L’ensemble des calculs sont détaillés en annexe A.

Pour réaliser la conversion, on utilise la concordance entre les sorties du filtre de boucle et la dynamique de fréquence du signal d’entrée. Lors de l’étape de prédiction de la sortie du filtre, les coefficients polynomiaux estimés  $\hat{b}_m[k]$  nous fournissent une estimation des composantes de la dynamique de fréquence à l’instant  $k$ . Ces coefficients sont alors utilisés pour reconstruire la dynamique de phase en entrée de la DPLL. En effet, en estimant localement la sortie du filtre par une droite en prenant un modèle d’analyse d’ordre  $M = 1$ , il est possible d’avoir, en fonction de l’estimation des coefficients  $b_0$  et  $b_1$ , une estimation de la dynamique de phase  $\hat{\phi}_r[k]$  suivante :

$$\hat{\phi}_r[k] = \hat{b}_0[k]kT_{corr} + \frac{\hat{b}_1[k]}{2}(kT_{corr})^2, \quad (3.37)$$

qui décompose l’estimation de la phase reçue en la somme d’une rampe et d’une accélération de phase. Pour pouvoir prédire la sortie du discriminateur il faut exprimer la sortie de ce dernier en fonction, non pas de la dynamique reconstruite donnée à l’équation (3.37), mais en fonction de la dynamique de phase associée à cette dynamique après l’étape de corrélation. Si on note  $\hat{\phi}_r^{p.c.}$  la dynamique de phase post-corrélation associée à la dynamique (3.37), on a alors en première approximation d’après les calculs menés en annexe A :

$$\hat{\phi}_r^{p.c.}[k] = \hat{b}_0[k] \left( k - \frac{T_{corr}}{2} \right) + \frac{\hat{b}_1[k]}{2} \left( k^2 - kT_{corr} + \frac{T_{corr}^3}{3} \right). \quad (3.38)$$

Cette étape de modélisation est importante car si elle n’est pas effectuée, des erreurs de prédiction seront observées en sortie de conversion (cf. annexe A). L’étape de corrélation ayant été quantifiée, il est maintenant possible d’exprimer la dynamique  $\delta\hat{\Phi}_{UW}(z)$  en sortie du discriminateur (que l’on suppose fonctionner en régime linéaire) via l’équation

$$\delta\hat{\Phi}_{UW}(z) = \left( 1 - \frac{z^{-1}F(z)N(z)}{1 + z^{-1}F(z)N(z)} \right) \hat{\Phi}_r^{p.c.}(z), \quad (3.39)$$

avec  $\hat{\Phi}_r^{p.c.}(z)$  la transformée en  $z$  de l’expression (3.38). Connaissant les expressions des fonctions de transfert du filtre et de l’intégrateur, il est alors possible d’obtenir une expression numérique de la sortie du discriminateur, correspondant à la prédiction  $\delta\hat{\phi}_{UW}[k+1|k]$ , en fonction de l’estimation des coefficients polynomiaux  $b_0[k]$  et  $b_1[k]$  grâce à des calculs de transformées inverses.

Tout le procédé précédemment décrit mène à une expression numérique de  $\delta\hat{\phi}_{UW}[k+1|k]$  en fonction de  $b_0[k]$  et  $b_1[k]$  qui est notée :

$$\delta\hat{\phi}_{UW}[k+1|k] = f_{conv}(\hat{\mathbf{b}}[k]). \quad (3.40)$$

On rappelle que l’ensemble des calculs et l’expression de la prédiction de la sortie du discriminateur en fonction de l’estimation des coefficients polynomiaux sont donnés à l’annexe A.

### 3.1.3.4 Exemples de poursuite

Comme pour le cas de la DPLL illustrée à la figure 3.2, nous allons illustrer le bon fonctionnement de la structure de DPLL illustrée à la figure 3.5 grâce à la poursuite de phase sans bruit suivante :

- DPLL d'ordre 2,
- $B_L = 2 \text{ Hz}$ ,
- $T_{corr} = 20 \text{ ms}$ ,
- discriminateur *Arctangent*,
- dynamique de phase :  $2 \text{ Hz} + 2 \text{ Hz/s}$ ,

En ce qui concerne le système de prédiction et pré-compensation de la sortie du discriminateur, nous choisissons le dimensionnement suivant :

- $N_{init} = 3$ ,
- $\gamma = 0.9$ ,
- $K = 1$ ,

et le modèle d'analyse polynomial est choisi d'ordre  $M = 1$ , i.e., on analysera la sortie du filtre de boucle par

$$\dot{\phi}[k] = b_0 + b_1 k T_{corr} + n_{\dot{\phi}}[k]. \quad (3.41)$$

Les différentes observations de poursuite sont données à la figure 3.6. Comme pour le cas de poursuite illustré à la section 3.1.2.3, on constate sur la figure 3.6 que l'apparition d'un saut de cycle est évitée grâce au système de prédiction et pré-compensation de la sortie du discriminateur. On constate également que l'estimation des coefficients polynomiaux  $b_0$  et  $b_1$  concorde bien avec la dynamique de fréquence de la phase d'entrée (on rappelle que la sortie du filtre de boucle correspond à l'estimation de la dynamique de fréquence), i.e., :  $\hat{b}_0 = 2 \text{ Hz}$  et  $\hat{b}_1 = 2 \text{ Hz/s}$  en régime permanent.

Il est intéressant de noter que dans le cas de la prédiction de la sortie du discriminateur par analyse des sorties du filtre de boucle, l'erreur de prédiction est plus importante en régime transitoire que dans le cas de la prédiction directe par analyse des sorties du discriminateur. Cette différence d'erreur de prédiction entre les deux méthodes est liée à la présence du bloc de conversion fréquence/phase dans le cas du système de développement de phase analysant les sorties du filtre de boucle. En effet, ce bloc de prédiction qui utilise les estimations des coefficients polynomiaux  $b_0$  et  $b_1$ , suppose que le régime permanent est établi. Par conséquent, lors du régime transitoire de la DPLL, des erreurs de prédiction induites par le bloc de conversion sont à ajouter aux erreurs liées au temps de convergence de l'algorithme WRLS, augmentant ainsi l'erreur de prédiction.

Comme pour le cas de la DPLL illustrée à la figure 3.2, la structure de boucle développée a été testée lors d'une poursuite non bruitée d'une dynamique de phase sinusoïdale. Les différentes observations associées à cette poursuite sont données à la figure 3.7 et illustrent le bon fonctionnement de la structure lorsque la dynamique de phase n'est pas constante.

## 3.2 Simulations numériques

Dans cette section, nous allons étudier les performances des deux nouvelles structures de DPLL grâce à des simulations numériques de Monte-Carlo. Les performances de ces deux

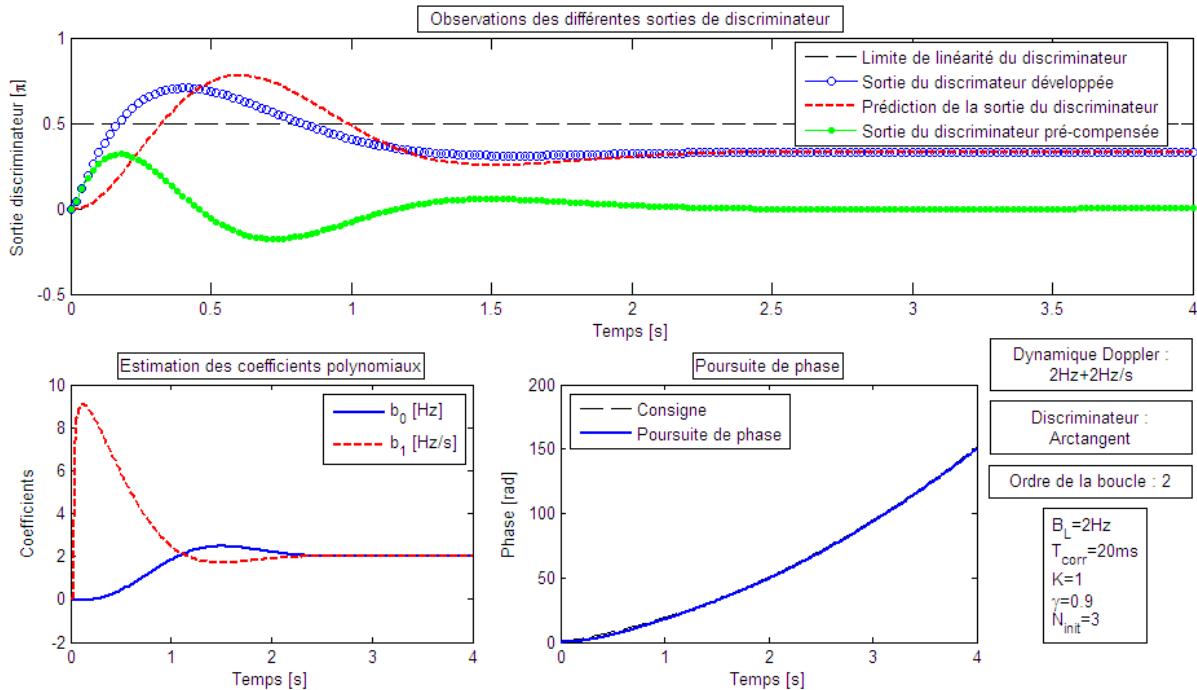


FIGURE 3.6 – Illustration du fonctionnement du système de prédition et pré-compensation de la sortie du discriminateur par analyse des sorties du filtre de boucle pour une dynamique de phase constante

structures seront également comparées à celles d'une DPLL conventionnelle et d'une DPLL munie d'un bloc de développement de phase par technique de seuillage.

### 3.2.1 Modèle de génération du signal

Pour les simulations numériques, nous allons générer le signal de navigation en entrée de la DPLL sous les hypothèses suivantes :

- La synchronisation temporelle avec le code est parfaitement effectuée. Le signal ne comportera donc pas de code d'étalement.
- Le signal étudié n'est pas modulé en phase par le message de navigation. On se place donc dans le cas d'un signal pilote ou d'un signal parfaitement démodulé grâce aux techniques de *data wipe-off*.
- La fréquence porteuse du signal est parfaitement démodulée. La fréquence et la phase du signal reçu correspondent donc aux variations de la fréquence et de la phase Doppler.
- Le signal reçu est équitablement porté par la voie I et la voie Q et peut s'écrire sous la forme d'une simple exponentielle complexe.

Sous ces hypothèses, le signal en entrée de boucle peut s'écrire sous la forme :

$$s_r[k] = \sqrt{P} e^{2j\pi\phi[k]} + n[k] \quad (3.42)$$

avec :

- $P$  la puissance du signal à la réception ;
- $\phi[k]$  la phase d'intérêt à estimer représentant le déphasage Doppler au cours du temps ;

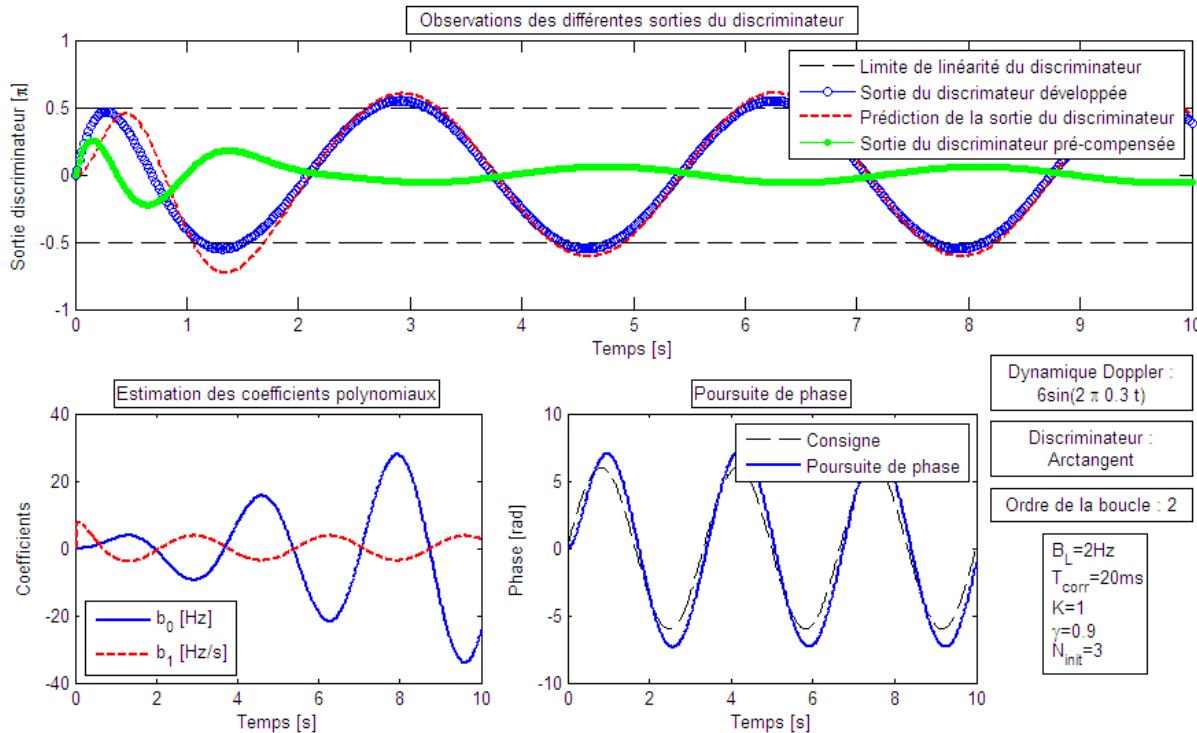


FIGURE 3.7 – Illustration du fonctionnement du système de prédition et pré-compensation de la sortie du discriminateur par analyse des observations des sorties du filtre de boucle pour une dynamique de phase sinusoïdale

- $n[k]$  le bruit à la réception que l'on supposera blanc et gaussien tel que

$$n[k] \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2), \quad (3.43)$$

avec  $\sigma_n^2$  la puissance du bruit thermique donnée par

$$\sigma_n^2 = \frac{P}{C/N_0} \times F_e. \quad (3.44)$$

La phase  $\phi$  est générée suivant le modèle polynomial suivant :

$$\phi[k] = \dot{\phi}[0]kT_e + \ddot{\phi}[0] \frac{(kT_e)^2}{2} \quad (3.45)$$

avec  $T_e = 1/F_e$  la période d'échantillonnage du signal en entrée de la DPLL. Dans notre cas on supposera travailler avec un signal de type C/A avec  $F_e = 2R_c = 2.046$  MHz.

### 3.2.2 Métriques de performance

Pour déterminer la robustesse au bruit des boucles de poursuite de phase, nous allons étudier, via des simulations de Monte-Carlo, les quatre métriques de performance suivantes

- **La probabilité de décrochage** qui correspond au ratio du nombre de poursuites ayant décroché durant la poursuite sur le nombre total de poursuites effectuées. Pour déterminer si une poursuite a décroché ou pas durant la poursuite, nous supposerons que toute perte d'équilibre d'une durée supérieure à un temps critique  $T_{critique}$  sera

considérée comme un décrochage. Cette convention est mise en place afin de considérer comme "décrochée" toutes les poursuites présentant des sauts de cycle d'une durée excessive. La figure 3.8 illustre schématiquement l'utilisation de ce temps critique.

- **Le temps de poursuite avant décrochage** qui correspond au temps d'apparition du décrochage. Sur un temps de poursuite fixé, cette métrique vaut au maximum le temps de simulation.
- **Le taux de sauts de cycle** qui est calculé à partir du temps de poursuite avant décrochage et du nombre de sauts de cycle s'étant produit sur cette période. Lors des poursuites de phase, on considérera comme "sauts de cycle" tout passage de la poursuite d'un équilibre à un autre dont le temps de réalisation est inférieur à  $T_{critique}$ .
- **Le temps d'apparition du premier saut de cycle** qui comme son nom l'indique, correspond au temps moyen d'apparition du premier saut de cycle. Sur un temps de poursuite fixé, cette métrique vaut au maximum le temps de simulation.

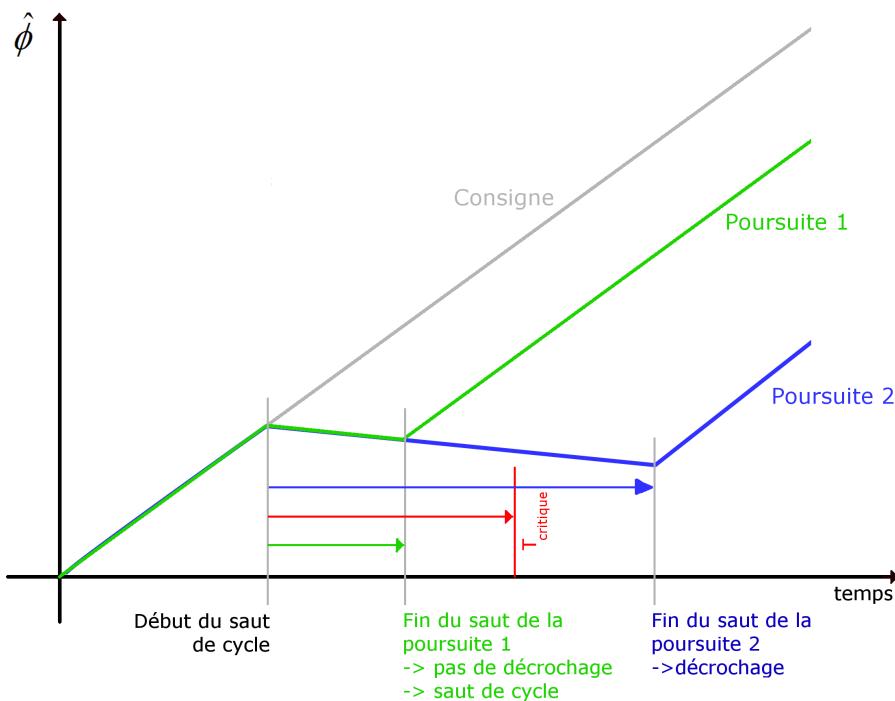


FIGURE 3.8 – Exemple schématique de deux poursuites dont les temps de sauts de cycle sont inférieur ou supérieur à  $T_{critique}$

En plus des métriques définies précédemment, nous observerons également la densité de probabilité de l'erreur d'estimation de phase sur l'ensemble du temps de poursuite. Bien que cette observation ne nous permette pas d'étudier explicitement le phénomène de sauts de cycle, elle nous permet néanmoins de voir le comportement global des boucles en affichant les différents modes de poursuite atteints lors de la poursuite (les modes correspondent aux points d'équilibre de la boucle distants de la plage de linéarité du discriminateur).

### 3.2.3 Performances en présence de bruit

#### 3.2.3.1 Scénario 1

Pour étudier la robustesse au bruit des deux nouvelles structures de DPLL proposées dans ce chapitre, nous allons comparer leurs performances lors d'une poursuite de phase bruitée avec celles d'une DPLL conventionnelle et d'une DPLL munie d'un bloc de développement de phase par système de seuillage comme décrit à la section 2.2.5.2.

Pour ce faire, nous allons étudier pour différentes valeurs de  $C/N_0$  la poursuite de la dynamique de phase suivante :

- $\dot{\phi}[0]/2\pi = 2 \text{ Hz}$ ,
- $\ddot{\phi}[0]/2\pi = 0.5 \text{ Hz/s}$ .

Les différentes DPLL étudiées lors de la simulation sont dimensionnées de la sorte :

- les DPLL sont choisies d'ordre 2 et sont munies d'un discriminateur *Arctangent*,
- $B_L = 3 \text{ Hz}$  (suffisamment grande pour pouvoir estimer la dynamique de phase en entrée de la DPLL),
- $T_{corr} = 20 \text{ ms}$ ,
- $K = 0.6$ ,  $\gamma = 0.8$  et  $M = 1$  pour les deux nouvelles structures de DPLL (les valeurs du gain et du facteur d'oubli ont été déterminées de manière empirique),
- $K = 0.3$  pour la DPLL munie du bloc de développement de phase en sortie du discriminateur (grandeur déterminée empiriquement).

Les performances des différentes DPLL pour ce scénario de poursuite sont données aux figures 3.9, 3.10 et 3.11 et sont réalisées grâce à l'étude de 500 poursuites de 20 s chacune.

#### Probabilité et temps d'apparition du décrochage

La figure 3.9 illustre les performances des différentes boucles en termes de décrochage en donnant les probabilités et les temps d'apparition du décrochage en fonction du  $C/N_0$ . Les résultats sont donnés pour les cas  $T_{critique} = 1 \text{ s}$  et  $T_{critique} = 3 \text{ s}$  (qui sont de l'ordre de grandeur du temps de convergence de la boucle environ égale à  $B_L^{-1}$ ). En analysant les résultats, on constate sans surprise que la DPLL conventionnelle affiche les moins bonnes performances avec des limites de décrochage se situant à haut  $C/N_0$ . Les deux structures de DPLL proposées dans ce chapitre offrent quant à elles les meilleures performances avec des limites de décrochage plus basses de 5 à 7 dB par rapport à la DPLL conventionnelle. Les performances de la DPLL munie du bloc de développement de phase en sortie du discriminateur sont à mi-chemin entre les performances des DPLL proposées et de la DPLL conventionnelle, confirmant la faiblesse de l'approche par seuillage de cette méthode de développement de phase.

On remarque également que, entre les deux nouvelles structures de boucle proposées dans ce chapitre, la DPLL dont le système de développement de phase analysant les sorties du filtre de boucle affiche de meilleures performances. Ce constat confirme donc le gain de robustesse apporté par l'analyse des sorties de filtre par rapport à l'analyse des sorties du discriminateur qui sont naturellement plus bruitées.

Bien que les performances relatives des différentes DPLL restent inchangées que l'on choisisse  $T_{critique} = 1 \text{ s}$  ou  $T_{critique} = 3 \text{ s}$ , on remarque cependant que le passage d'un cas d'analyse à l'autre entraîne quelques différences selon la boucle considérée. On constate notamment que, contrairement aux autres boucles, les performances de la DPLL munie du bloc de développement de phase en sortie de discriminateur présentent peu de différence lorsqu'on change la valeur de  $T_{critique}$ . On en déduit alors que la majorité des décrochages observés lors

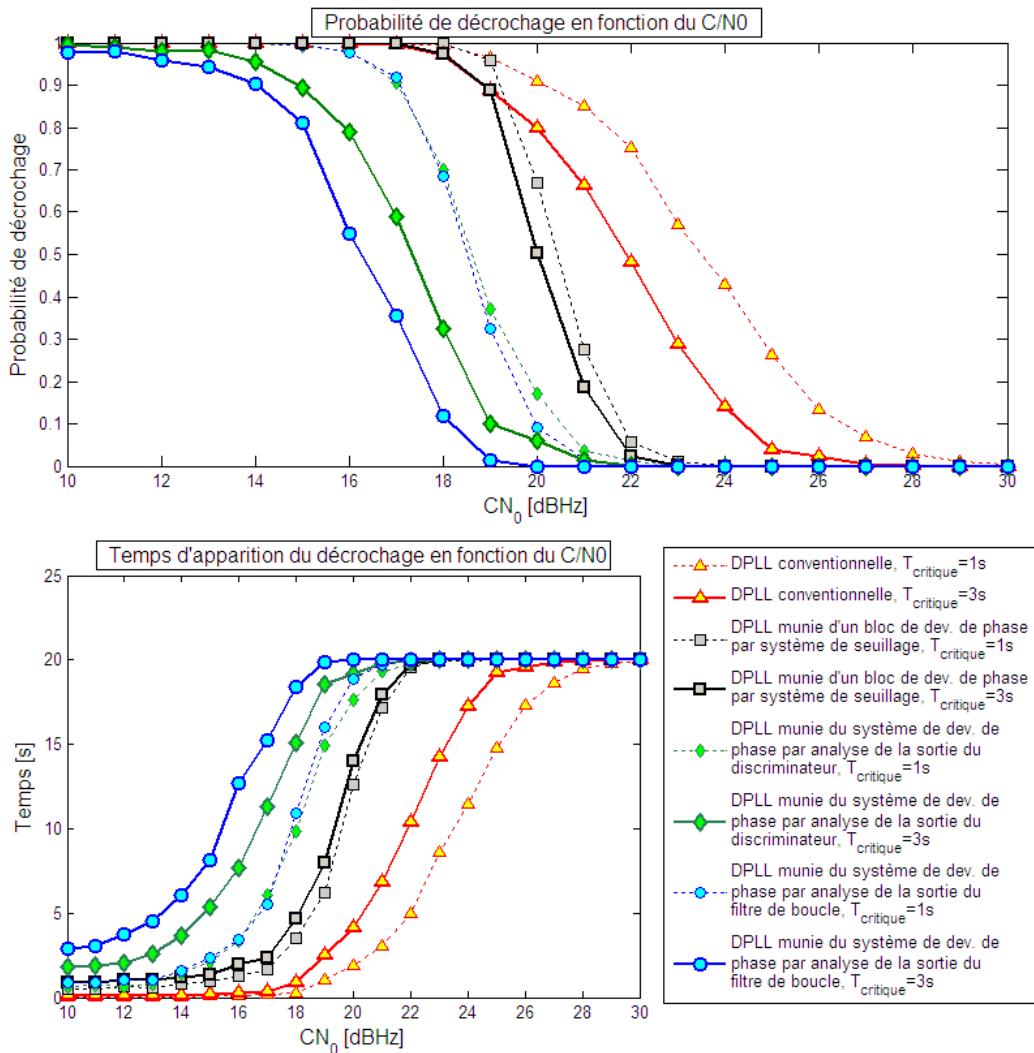


FIGURE 3.9 – Performances en termes de décrochage des DPLL en fonction du  $C/N_0$  pour une dynamique de phase de  $2 \text{ Hz} + 0.5 \text{ Hz/s}$

des poursuites ne sont pas la conséquence d'une perte locale d'équilibre relative à un saut de cycle mais bien la conséquence d'une perte totale d'équilibre ; ce qui démontre une nouvelle fois l'instabilité de cette boucle en régime bruité. Concernant les deux structures de DPLL proposées, on observe que le gain de performance obtenu avec la boucle dont la prédiction de la sortie du discriminateur s'effectue via l'analyse des sorties de filtre diminue avec la valeur de  $T_{critique}$ . Comme le montrent les figures 3.3 et 3.6, une erreur de prédiction plus importante est observée durant l'état transitoire de la poursuite pour ce type de boucle. Par conséquent, il a été observé que les premières secondes de poursuite sont, en comparaison avec la DPLL analysant les sorties du discriminateur, une période plus propice à l'apparition des sauts de cycle. Il est donc logique d'observer une diminution de gain relatif de performance entre les deux structures de boucle lorsqu'on diminue la tolérance aux sauts de cycle. Pour ce qui est des performances de la DPLL conventionnelle, on observe logiquement une dégradation des performances lorsqu'on diminue la valeur de  $T_{critique}$ .

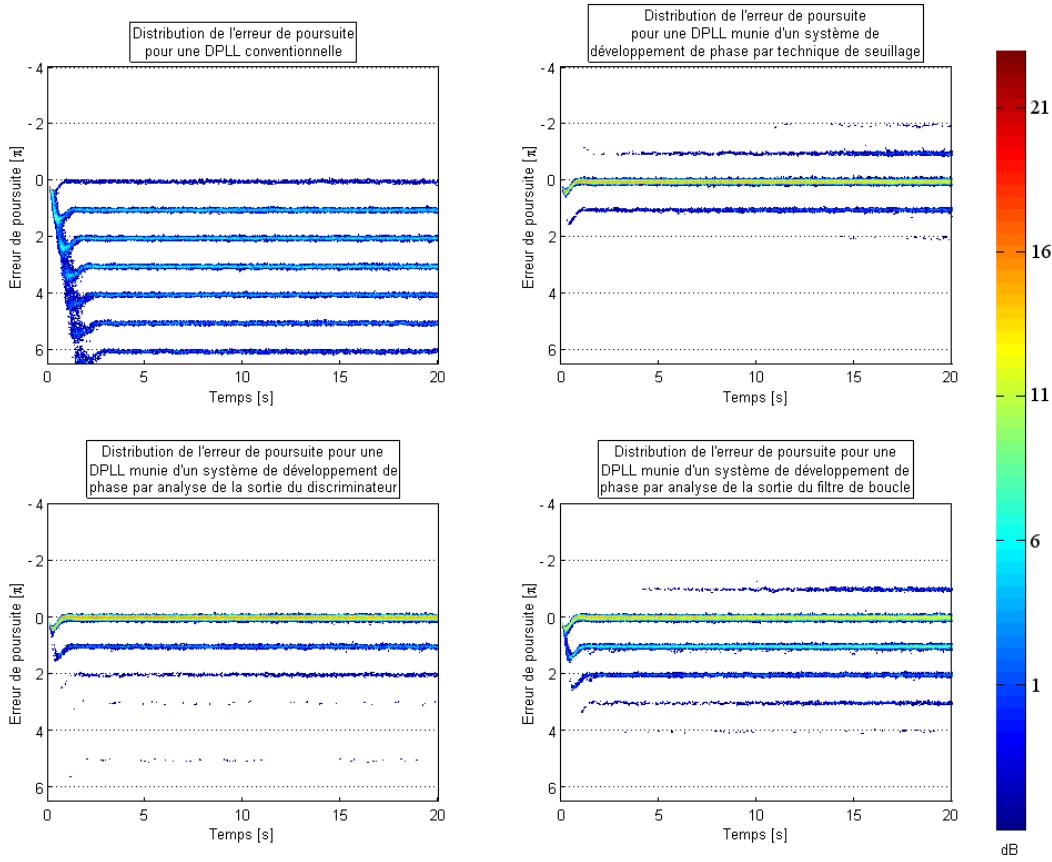


FIGURE 3.10 – Distributions des erreurs d'estimation sur l'ensemble de la poursuite pour le niveau de bruit  $C/N_0 = 23$  dBHz pour une dynamique de phase de  $2 \text{ Hz} + 0.5 \text{ Hz/s}$

### Densité de probabilité de l'erreur d'estimation

La figure 3.10 donne les distributions des erreurs d'estimation de phase sur toute la durée de la poursuite pour les quatre boucles étudiées pour le cas  $C/N_0 = 23$  dBHz. Bien que cette figure ne nous renseigne ni sur le taux de sauts de cycle ni sur la probabilité de décrochage des poursuites, elle nous permet néanmoins de voir le comportement global des boucles en affichant les différents modes de poursuite atteints lors de la poursuite.

La distribution associée à la DPLL conventionnelle montre une grande diversité des modes de poursuite, logiquement tous positifs (c'est-à-dire correspondant à une erreur d'estimation  $\phi - \hat{\phi}$  positive) de par l'évolution croissante de la phase à estimer. On remarque également que le mode principal (le mode nul correspondant à une estimation de phase sans saut de cycle) n'est pas le plus représenté par les diverses poursuites. Ce manque de robustesse au bruit de la boucle est à lier à la forte probabilité de décrochage donnée à la figure 3.9 pour le niveau de bruit  $C/N_0 = 23$  dBHz.

La DPLL munie du bloc de développement de phase par seuillage en sortie du discriminateur affiche une distribution où les modes de poursuite positifs sont autant représentés que les modes négatifs. Cette observation, contrastant avec la tendance naturelle de l'apparition des sauts de cycle positifs pour une poursuite de phase croissante, résulte de la nature non-linéaire des techniques de seuillage employées dans le bloc de développement de phase.

Les distributions des deux structures de boucle développées dans ce chapitre ont des distributions plus naturelles avec des modes de poursuite majoritairement ou exclusivement

positifs. La présence du premier mode de poursuite pour la structure de DPLL analysant les sorties du filtre de boucle s'explique par l'erreur de prédiction induite par l'étape de conversion fréquence/phase qui, lors de la période transitoire de la boucle, va favoriser l'apparition de sauts de cycle négatifs. Cette erreur de prédiction est également responsable du plus grand nombre de modes de poursuite positifs. Cependant, que l'on étudie la structure de boucle analysant les sorties du discriminateur ou la structure analysant la sortie du filtre de boucle, on observe que les distributions sont moins diffuses que celle de la DPLL conventionnelle, traduisant ainsi une meilleure robustesse au bruit.

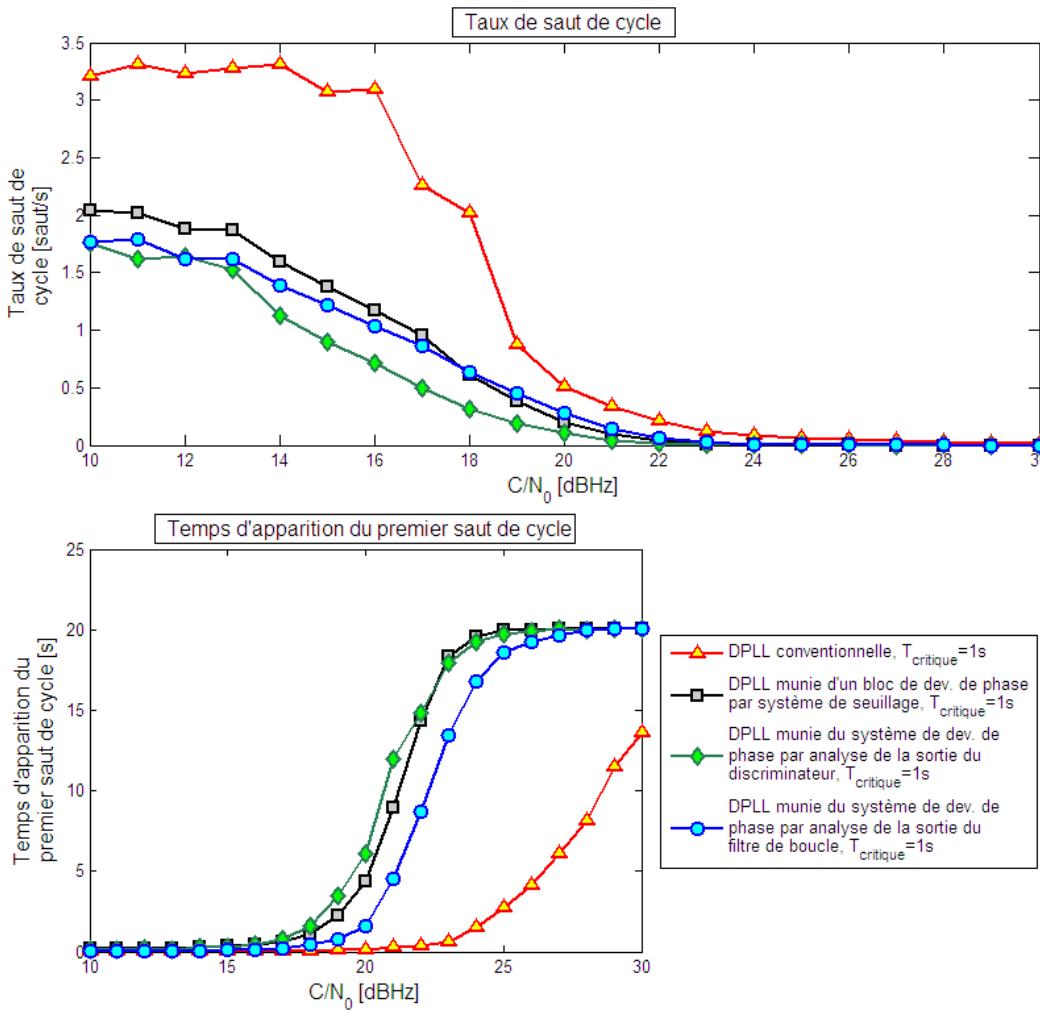


FIGURE 3.11 – Performances en termes de sauts de cycle des DPLL en fonction du  $C/N_0$  pour une dynamique de phase de 2 Hz+0.5 Hz/s

### Taux de sauts de cycle et temps d'apparition du premier saut de cycle

Les performances des boucles en termes de sauts de cycle sont données à la figure 3.11 qui illustre le temps moyen d'apparition du premier saut de cycle et le taux de sauts de cycle observé lors de la poursuite. Lors du calcul de ce dernier critère, nous avons imposé un taux maximal de trois sauts de cycle par seconde et par poursuite afin d'éviter l'obtention de taux exorbitants et irréalistes résultant d'un décrochage en début de poursuite. Que l'on examine le taux de sauts de cycle ou le temps d'apparition du premier saut de cycle, on

constate, comme sur les figures 3.9 et 3.10, que la DPLL conventionnelle affiche les plus mauvais résultats avec un taux de sauts de cycle supérieur et un temps de premier saut inférieur à ceux des autres boucles.

Concernant les trois DPLL munies d'un système de développement de phase, on remarque qu'elles offrent chacune des performances comparables avec cependant quelques différences. En effet, on voit que la DPLL analysant les sorties du discriminateur offre le plus long temps d'apparition du premier saut de cycle et le plus faible taux de sauts de cycle, alors que la DPLL analysant les sorties du filtre de boucle a un temps d'apparition du premier saut plus court et un plus fort taux de sauts de cycle. Cette observation qui contraste avec les résultats obtenus par l'étude des décrochages donnée à la figure 3.9, est la conséquence logique de la différence d'erreur de prédiction qu'il existe entre les deux DPLL lors des premières secondes de poursuite. Cette erreur étant plus importante pour la DPLL analysant les sorties du filtre de boucle lors de l'état transitoire de la boucle, il est normal que cette dernière affiche de tels résultats car un plus grand nombre de sauts de cycle se produiront en début de poursuite, diminuant par conséquent le temps d'apparition du premier saut de cycle et augmentant également le taux de sauts de cycle durant la poursuite. La DPLL munie d'un bloc de développement de phase en sortie du discriminateur offre quant à elle un temps d'apparition du premier saut similaire à la DPLL analysant les sorties du discriminateur ainsi qu'un taux de sauts de cycle légèrement supérieur aux deux DPLL développées à bas  $C/N_0$

### 3.2.3.2 Scénario 2

Afin de tester les performances des boucles pour une poursuite de phase plus "difficile" que le scénario de poursuite précédent, nous allons étudier la poursuite de la dynamique de phase suivante :

- $\dot{\phi}[0]/2\pi = 3 \text{ Hz}$ ,
- $\ddot{\phi}[0]/2\pi = 1 \text{ Hz/s}$ ,

avec des boucles dont le dimensionnement reste inchangé par rapport au cas de simulation précédent, mis à part la valeur de la bande de boucle qui est maintenant choisie égale à  $B_L = 5 \text{ Hz}$  afin de bien pouvoir suivre la dynamique de phase. Les performances en termes de décrochage associées à ce scénario de poursuite sont données à la figure 3.12. On constate sur cette figure que, en comparaison avec les résultats donnés à la figure 3.9, les tendances entre les différentes DPLL sont inchangées. De manière générale, on peut voir que l'ensemble des performances sont décalées vers des niveaux de bruit plus bas à cause de la plus grande valeur de bande de boucle qui rend les boucles moins robustes au bruit.

## 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé deux nouvelles structures de DPLL munies d'un système de développement de phase visant à développer la phase en sortie du discriminateur. Ces deux structures sont basées sur un système de prédiction de la sortie du discriminateur qui est réalisée soit par l'analyse des observations de la sortie du discriminateur, soit par l'analyse des observations de la sortie du filtre de boucle selon la DPLL considérée. Dans les deux cas de boucle, l'analyse s'effectue grâce à un modèle d'analyse polynomial et l'algorithme des moindres carrés récursifs pondérés. Les différentes simulations numériques effectuées dans ce chapitre ont montré que les deux boucles développées affichent une robustesse aux dynamiques bruitées supérieure à celle d'une DPLL conventionnelle ou à celle d'une DPLL issue de la littérature avec un bloc de développement de phase en sortie du

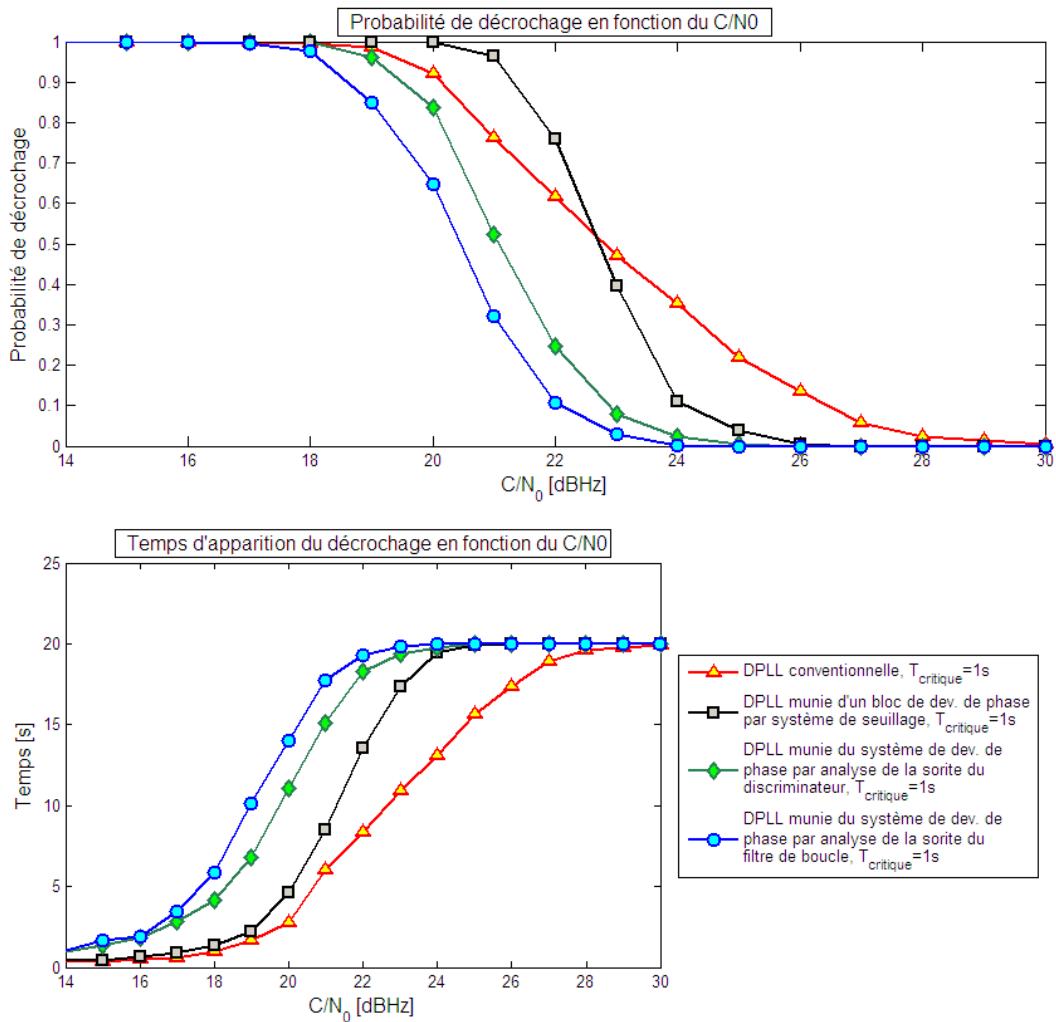


FIGURE 3.12 – Performances en termes de décrochage des DPLL en fonction du  $C/N_0$  pour une dynamique de phase de 3 Hz+1 Hz/s

discriminateur, que ce soit en termes de décrochage ou en termes de sauts de cycle. On a également constaté que, dans certains cas, la DPLL analysant les sorties du filtre de boucle affiche des probabilités de décrochage plus basses que son homologue analysant les sorties du discriminateur, et ce malgré la présence de l'étape de conversion qui, en régime transitoire, induit une erreur de prédition supplémentaire qui dégrade les performances en termes de sauts de cycle de la boucle. Cette même étape de conversion va cependant, en contrepartie de meilleures performances, augmenter le coût calculatoire de la structure de poursuite. Dans le chapitre suivant, nous allons nous focaliser sur la DPLL analysant les sorties du filtre de boucle afin de l'adapter à la poursuite de phase multifréquence, dans le but d'améliorer sa robustesse grâce à la diversité en fréquence offerte par les signaux de navigation.

# Chapitre 4

## Structure de DPLL avec système de développement de phase multifréquence

Dans le chapitre précédent, un nouveau système de déroulage de phase pour DPLL a été étudié et a conduit au développement de deux nouvelles structures de boucle : une basée sur l'analyse des sorties de discriminateur, l'autre sur l'analyse des sorties du filtre de boucle. Lors de poursuites de phase mono-fréquence, ces nouvelles structures de DPLL ont montré une meilleure robustesse aux dynamiques bruitée en comparaison avec une structure de DPLL conventionnelle ou une structure de DPLL munie d'un bloc de développement de phase basé sur des techniques de seuillage.

Dans ce chapitre, nous allons nous focaliser sur la structure de DPLL analysant les sorties du filtre afin de l'adapter à la poursuite de phase multifréquence. Le but étant d'utiliser la diversité en fréquence des futurs signaux de navigation et d'améliorer la robustesse au bruit de cette structure. Le travail d'adaptation s'effectuera au niveau du bloc de prédiction de la sortie du filtre de boucle où sont calculés les coefficients polynomiaux du modèle d'analyse. Pour combiner les informations portées par les diverses fréquences d'un signal multifréquence, deux approches de fusion de données vont s'offrir à nous et vont conduire au développement de deux nouvelles structures de DPLL munies d'un système de développement de phase multifréquence. Après avoir détaillé le fonctionnement de ces deux structures, une étude de performance est réalisée afin de quantifier la robustesse au bruit des nouvelles structures de DPLL. L'ensemble des travaux relatifs au développement de ces nouvelles méthodes de poursuite ont fait l'objet d'une participation à la conférence ENC 2013 [2].

### Sommaire

<b>4.1 Nouvelles structures de boucle de phase multifréquence . . . . .</b>	<b>94</b>
4.1.1 Comment utiliser la diversité en fréquence ? . . . . .	94
4.1.2 Structure de boucle multifréquence fusionnant les sorties de filtre (Méthode d'estimation centralisée) . . . . .	95
4.1.3 Structure de boucle multifréquence fusionnant les coefficients po- lynomiaux (Méthode d'estimation décentralisée) . . . . .	99
<b>4.2 Simulations numériques . . . . .</b>	<b>102</b>
4.2.1 Modèle de génération du signal . . . . .	102
4.2.2 Performances en présence de bruit . . . . .	104
<b>4.3 Conclusion . . . . .</b>	<b>109</b>

## 4.1 Nouvelles structures de boucle de phase multifréquence

Dans le chapitre précédent, un nouveau système de développement de phase pour DPLL basé sur la prédiction et la pré-compensation de la dynamique de phase du discriminateur a été développé dans le cadre d'une poursuite de phase mono-fréquence. Pour réaliser la prédiction de la sortie du discriminateur, deux solutions se sont offertes à nous : analyser les observations de phase en sortie du discriminateur ou analyser les observations de fréquence en sortie du filtre de boucle. Ces deux choix ont chacun conduit à une structure de DPLL différente que l'on aimerait adapter à la poursuite de phase d'un signal multifréquence émis par un même satellite.

Les divers tests de performance réalisés ayant montré que l'on obtient une meilleure robustesse dans le cas d'une dynamique bruitée avec la structure de DPLL analysant les sorties du filtre de boucle, nous allons nous focaliser sur cette structure afin de l'adapter à la poursuite de phase multifréquence. Ce choix de boucle est également motivé par le fait que, pour une poursuite de phase multifréquence, il est préférable de travailler en sortie de filtre plutôt qu'en sortie de discriminateur à cause des perturbations ionosphériques comme il a été expliqué à la section 2.3.3.

Cette section va donc détailler l'adaptation aux signaux multifréquence de la DPLL présentée à la section 3.1.3. Dans un premier temps nous allons expliquer comment procéder pour inclure la diversité en fréquence au niveau du système de développement de phase présenté au chapitre 3. Puis nous allons présenter les deux structures de DPLL multifréquence développées à partir de deux choix possibles de fusion de données.

### 4.1.1 Comment utiliser la diversité en fréquence ?

Dans le cas d'une poursuite mono-fréquence réalisée avec la structure de boucle présentée à la section 3.1.3, l'analyse des sorties du filtre de boucle est réalisée grâce au modèle d'analyse polynomial d'ordre  $M$  suivant

$$\dot{\phi}[k] = \sum_{m=0}^M b_m (kT_{corr})^m + n_{\dot{\phi}}[k]. \quad (4.1)$$

avec  $\{b_0, b_1, \dots, b_m\}$  les coefficients polynomiaux que l'on cherche à estimer grâce à l'algorithme WRLS et  $n_{\dot{\phi}}$  le bruit en sortie de filtre de boucle. Si maintenant on se place dans le cas d'une poursuite d'un signal multifréquence, on disposera d'autant de DPLL que de fréquences contenues dans ce signal. Par conséquent, si le signal contient  $N_P$  fréquences, on disposera des  $N_P$  modèles d'analyse suivants

$$\dot{\phi}_i[k] = \sum_{m=0}^M b_{m,i} (kT_{corr})^m + n_{\dot{\phi},i}[k] \quad \text{pour } i = 1, \dots, N_P. \quad (4.2)$$

Les différents bruits en sortie de filtre sont supposés indépendants car la poursuite des différentes porteuses s'effectue via des chaînes de réception différentes qui ont leurs propres bruits thermiques. On sait également que pour un signal multifréquence émis par un satellite, on a (sous réserve d'effectuer la poursuite avec des conditions ionosphériques non-critiques) la relation de proportionnalité suivante

$$\dot{\phi}_i = \frac{f_{p,i}}{f_{p,j}} \dot{\phi}_j, \quad (4.3)$$

En supposant que les différentes DPLL sont synchronisées et fonctionnent à la même cadence, cette relation de proportionnalité va alors se traduire au niveau des coefficients polynomiaux du modèle d'analyse par

$$b_{m,i} = \frac{f_{p,i}}{f_{p,j}} b_{m,j}. \quad (4.4)$$

On constate alors d'après l'équation (4.4) que, tout comme les sorties de filtre, les coefficients polynomiaux  $b_{m,i}$  estimés par l'algorithme des moindres carrés récursifs pondérés contiennent une information commune qui peut être exploitée pour adapter le système de développement de phase présenté à la section 3.1.3 à la poursuite de phase multifréquence.

Pour exploiter la diversité en fréquence au niveau de l'étape d'analyse des sorties des filtres de boucle, nous avons choisi les deux solutions suivantes :

- soit on utilise la relation de proportionnalité qui lie les sorties des filtres afin de fusionner les observations pour estimer les différents coefficients polynomiaux,
- soit on estime séparément les coefficients polynomiaux de chaque porteuse pour pouvoir, par la suite, les fusionner pour en obtenir une meilleure estimation.

Ces deux options vont donner lieu, pour une poursuite de phase multifréquence, à deux méthodes d'estimation des coefficients polynomiaux respectivement appelées "Méthode d'estimation centralisée" et "Méthode d'estimation décentralisée", dont les fonctionnements sont schématisés à la figure 4.1. Les deux structures de DPLL multifréquence associées à ces deux méthodes sont décrites dans les sections suivantes.

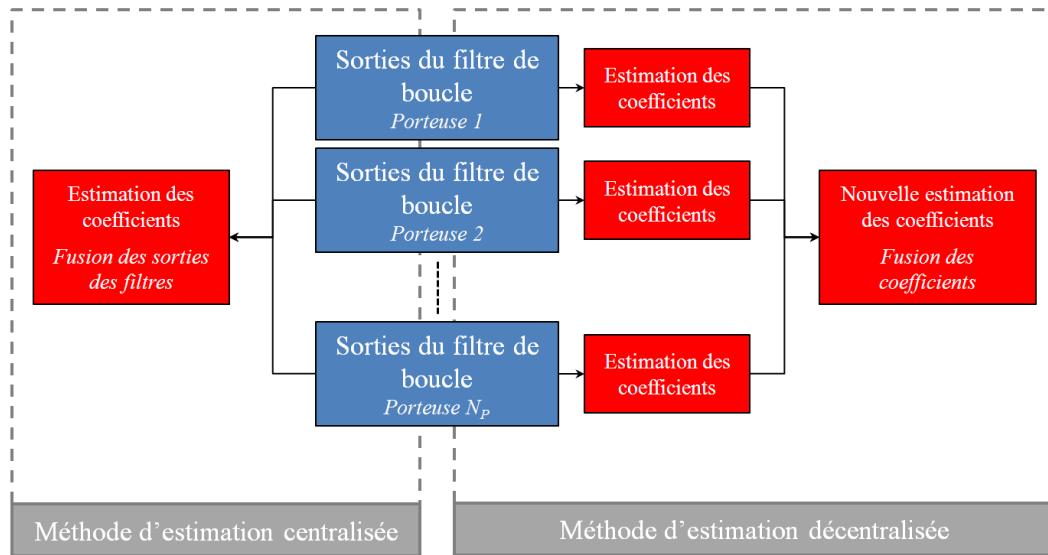


FIGURE 4.1 – Fonctionnement schématique des méthodes d'estimation centralisée et décentralisée des coefficients polynomiaux lors d'une poursuite de phase multifréquence

#### 4.1.2 Structure de boucle multifréquence fusionnant les sorties de filtre (Méthode d'estimation centralisée)

Nous allons détailler dans cette section le développement de la structure de poursuite multifréquence associée à la méthode dite "centralisée" de l'estimation des coefficients polynomiaux.

#### 4.1.2.1 Structure globale de la boucle

La structure de poursuite associée à la méthode d'estimation centralisée est donnée à la figure 4.2. Globalement, la structure est composée de plusieurs DPLL (autant de boucles que de fréquence présentes dans le signal) fonctionnant en parallèle les unes des autres. Ces boucles partagent un système de développement de phase commun qui va utiliser les différentes relations de proportionnalité qu'il existe entre les coefficients des modèles d'analyse associés aux différentes porteuses, grâce à la méthode d'estimation centralisée décrite dans la section 4.1.2.2.

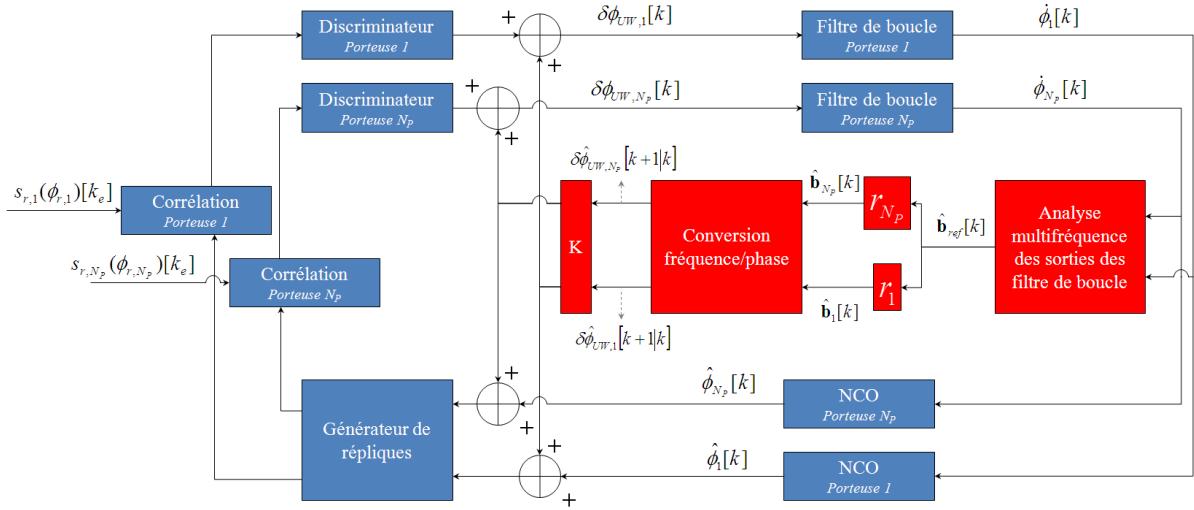


FIGURE 4.2 – Structure de la boucle multifréquence dont le système de développement de phase analyse les sorties de filtre par la méthode d'estimation centralisée

#### 4.1.2.2 Algorithme de fusion des données : modification de l'algorithme WRLS

Cette section va détailler les calculs réalisés au niveau de l'étape d'analyse des sorties des filtres de boucle pour la méthode d'estimation centralisée des coefficients du modèle d'analyse. Supposons que l'on dispose de  $N_P$  DPLL fonctionnant en parallèle nous donnant les vecteurs d'observation en sortie de filtre suivants :

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1[k] &= [\dot{\phi}_1[0], \dots, \dot{\phi}_1[k]]^T \\ &\vdots \\ \dot{\phi}_{N_P}[k] &= [\dot{\phi}_{N_P}[0], \dots, \dot{\phi}_{N_P}[k]]^T. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pour analyser ces différentes observations, nous allons exploiter la relation de proportionnalité (4.3). Afin de fusionner les observations des différentes porteuses, nous allons définir une fréquence de référence  $f_{p,ref}$  à partir de laquelle nous allons estimer les coefficients polynomiaux. Avec cette convention, les différentes sorties de filtres peuvent donc s'écrire :

$$\dot{\phi}_i = \frac{f_{p,i}}{f_{p,ref}} \dot{\phi}_{ref} = r_i \dot{\phi}_{ref} \quad (4.6)$$

En appliquant le modèle d'analyse (4.1) sur chacune des porteuses et en appliquant la relation de proportionnalité (4.6), on obtient le modèle d'analyse suivant

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_i[k] &= \sum_{m=0}^M b_{m,i}(kT_{corr})^m + n_{\dot{\phi},i}[k] \\ &= r_i \sum_{m=0}^M b_{m,ref}(kT_{corr})^m + n_{\dot{\phi},i}[k] \quad \text{pour } i = 1, \dots, N_P.\end{aligned}\quad (4.7)$$

Grâce aux différents vecteurs d'observation et aux relations de proportionnalité qui lient les porteuses, il est possible d'écrire le système matriciel suivant

$$\mathbf{G}_k^r \mathbf{b}_{ref} + \mathbf{n}_{\dot{\phi}} = \dot{\phi}_k \quad (4.8)$$

avec  $\mathbf{n}_{\dot{\phi}}$  le vecteur bruit de taille  $((k+1)N_p) \times 1$ ,  $\dot{\phi}_k$  le vecteur d'observation de taille  $((k+1)N_p) \times 1$  donné par

$$\dot{\phi}_k = \left[ \dot{\phi}_1^T[k], \dots, \dot{\phi}_{N_P}^T[k] \right]^T, \quad (4.9)$$

où  $\mathbf{b}_{ref}$  est le vecteur de taille  $(M+1) \times 1$  contenant les coefficients polynomiaux du modèle d'analyse associé à la porteuse de référence, et  $\mathbf{G}_k^r$  la matrice de taille  $(N_P(k+1)) \times (M+1)$  donnée par

$$\mathbf{G}_k^r = \mathbf{r} \otimes \mathbf{G}_k, \quad (4.10)$$

avec  $\otimes$  le produit de Kronecker et

$$\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_{N_P}]^T, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & T_{corr} & T_{corr}^2 & \cdots & T_{corr}^M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & kT_{corr} & (kT_{corr})^2 & \cdots & (kT_{corr})^M \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Le problème d'estimation par les moindres carrés pondérés du vecteur  $\mathbf{b}_{ref}$  est donné par

$$\hat{\mathbf{b}}_{ref}[k] = \arg \min_{\mathbf{b}} \left[ (\mathbf{G}_k^r \mathbf{b} - \dot{\phi}_k)^T \mathbf{R}_k (\mathbf{G}_k^r \mathbf{b} - \dot{\phi}_k) \right], \quad (4.13)$$

avec  $\mathbf{R}_k$  la matrice de pondération de taille  $(N_P(k+1)) \times (N_P(k+1))$  définie par

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1[k] & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{R}_{N_P}[k] \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

avec  $\mathbf{R}_i[k]$  la matrice de pondération des observations associées à la fréquence  $f_{p,i}$  définie par

$$\mathbf{R}_i[k] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_i^k \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

où  $\gamma_i$  est le facteur d'oubli associé à la  $i$ -ème porteuse défini comme dans le cas des boucles monofréquence. L'estimation du vecteur des coefficients polynomiaux de la fréquence de référence est donnée par

$$\hat{\mathbf{b}}_{ref}[k] = (\mathbf{G}_k^{rT} \mathbf{R}_k \mathbf{G}_k^r)^{-1} \mathbf{G}_k^{rT} \mathbf{R}_k \dot{\phi}_k. \quad (4.16)$$

Une fois que le vecteur de référence est estimé, les vecteurs associés à chacune des porteuses sont obtenus via

$$\hat{\mathbf{b}}_i = r_i \hat{\mathbf{b}}_{ref}, \quad (4.17)$$

et pourront être utilisés pour prédire la sortie des discriminateurs avec lesquels ils sont associés. Tout comme pour le cas monofréquence, on aimerait estimer les coefficients polynomiaux de référence de manière récursive durant la poursuite. Pour ce faire, nous allons de nouveau utiliser l'algorithme WRLS que l'on va adapter afin qu'il prenne en compte et tire avantage de la diversité en fréquence des observations. Après plusieurs étapes de calcul qui sont détaillées en annexe B, on obtient une nouvelle forme de l'algorithme WRLS qui est donnée par les étapes d'itérations ci-après.

#### INITIALISATION ( $k = N_{init} - 1$ )

Soit  $N_{init} \in \mathbb{N}^*$ , avec  $N_{init} \geq M + 1$ , le nombre d'observations sur chacune des porteuses que l'on se fixe pour établir la première estimation des coefficients polynomiaux. La première estimation des coefficients est donnée par

$$\hat{\mathbf{b}}_{ref}[N_{init} - 1] = (\mathbf{G}_{N_{init}-1}^r)^T \mathbf{R}_{N_{init}-1} \mathbf{G}_{N_{init}-1}^r)^{-1} \mathbf{G}_{N_{init}-1}^r \mathbf{R}_{N_{init}-1} \dot{\phi}_{N_{init}-1} \quad (4.18)$$

avec  $\hat{\mathbf{b}}_{ref}[N_{init} - 1] = [\hat{b}_{0,ref}[N_{init} - 1], \dots, \hat{b}_{M,ref}[N_{init} - 1]]^T$  le premier vecteur d'estimation des coefficients polynomiaux. Tout comme les algorithmes présentés au chapitre précédent, on travaille durant l'étape d'initialisation sur des observations brutes qui risquent de contenir des sauts de cycle.

#### ITERATIONS( $k \geq N_{init}$ )

##### *1-Prédiction des sorties de discriminateur*

Sur chacune des porteuses, la prédiction de la sortie du filtre est donnée par

$$\hat{\phi}_i[k+1|k] = \mathbf{g}_{k+1} \hat{\mathbf{b}}_i[k] = r_i \mathbf{g}_{k+1} \hat{\mathbf{b}}_{ref}[k]. \quad (4.19)$$

Les prédictions de sortie des discriminateurs  $\delta\hat{\phi}_{UW,i}[k+1|k]$  sont obtenues grâce aux vecteurs  $\hat{\mathbf{b}}_i[k]$  et à l'étape de conversion comme dans le cas monofréquence

$$\delta\hat{\phi}_{UW,i}[k+1|k] = f_{conv}(\hat{\mathbf{b}}_i[k]) \quad (4.20)$$

##### *2-Pré-compensation de la prédiction*

Sur chacune des porteuses, on a

$$\delta\phi_{UW,i}[k+1] = \mathcal{D}\left(g\left(\phi_{r,i} - \hat{\phi}_i\right)[k+1] e^{-jK\delta\hat{\phi}_{UW,i}[k+1|k]}\right) + K\delta\hat{\phi}_{UW,i}[k+1|k] \quad (4.21)$$

avec  $\phi_{r,i}$  la phase d'intérêt de la i-ème porteuse.

##### *3-Mise à jour de l'estimation des coefficients polynomiaux*

$$\hat{\mathbf{b}}_{ref}[k+1] = \hat{\mathbf{b}}_{ref}[k] + \mathbf{K}_{k+1} \left( \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1[k+1] \\ \vdots \\ \dot{\phi}_{N_P}[k+1] \end{bmatrix} - \mathbf{r} \mathbf{g}_{k+1} \hat{\mathbf{b}}_{ref}[k] \right) \quad (4.22)$$

avec

$$\mathbf{C}_{k+1} = \mathbf{P}_k \mathbf{g}_{k+1}^T (m_{k+1} + \mathbf{g}_{k+1} \mathbf{P}_k \mathbf{g}_{k+1}^T)^{-1} \quad (4.23)$$

$$m_{k+1}^{-1} = \mathbf{r}^T \begin{bmatrix} \gamma_1^{k+1} & 0 \\ \ddots & \ddots \\ 0 & \gamma_{N_P}^{k+1} \end{bmatrix} \mathbf{r} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{K}_{k+1} = m_{k+1} \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{r}^T \begin{bmatrix} \gamma_1^{k+1} & 0 \\ \ddots & \ddots \\ 0 & \gamma_{N_P}^{k+1} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{g}_{k+1}) \mathbf{P}_k \quad (4.26)$$

#### 4.1.2.3 Exemples de poursuite

Afin d'illustrer le bon fonctionnement de la boucle donnée à la figure 4.2, nous allons lancer la poursuite de phase bifréquence suivante :

- les deux porteuses utilisées sont  $L_1$  et  $L_2$ ,
- la dynamique de phase sur  $L_1$  est de 1 Hz + 2 Hz/s,
- les boucles sont d'ordre 2,
- le niveau de bruit est tel que  $C/N_0 = 23$  dBHz pour les deux porteuses,
- $B_L = 5$  Hz,
- $T_{corr} = 20$  ms,
- discriminateur *Arctangent*,
- $N_{init} = 3$ ,
- $\gamma = 0.8$  sur chacune des porteuses,
- $K = 0.6$ .

La figure 4.3 donne les poursuites de phase associées aux porteuses  $L_1$  et  $L_2$  réalisées dans le cadre d'une poursuite mono et multifréquence, ainsi que les estimations des coefficients  $b_0$  et  $b_1$  réalisées en monofréquence et en bifréquence via la méthode d'estimation centralisée. On voit sur cette figure que dans le cas monofréquence, un saut de cycle prononcé est observé sur la porteuse  $L_1$  à environ 1.5 s de poursuite, ainsi que sur la porteuse  $L_2$  à environ 2 s de poursuite. Dans le cas de la poursuite bifréquence, ces deux sauts n'apparaissent plus aux niveaux des poursuites. Ce gain de robustesse au bruit est le résultat de l'estimation bifréquence des coefficients polynomiaux. En effet, on voit sur la figure 4.3 que, grâce à l'exploitation de la diversité en fréquence, les estimées de  $b_0$  et  $b_1$  obtenues par la méthode d'estimation centralisée sont beaucoup moins bruitées que les estimées monofréquence. On peut voir par exemple qu'à 2 s de poursuite, l'estimation monofréquence du coefficient  $b_1$  est fortement perturbée par la présence du saut de cycle alors que, en mode bifréquence, l'estimation de ce dernier reste proche de sa valeur théorique (qui est de 2 Hz/s dans ce cas de simulation). L'amélioration des estimations des coefficients va alors permettre de mieux prédire la sortie du discriminateur et va donc fournir à la boucle une meilleure robustesse.

#### 4.1.3 Structure de boucle multifréquence fusionnant les coefficients polynomiaux (Méthode d'estimation décentralisée)

Nous allons détailler dans cette section le développement de la structure de poursuite multifréquence associée à la méthode dite "décentralisée" de l'estimation des coefficients polynomiaux.

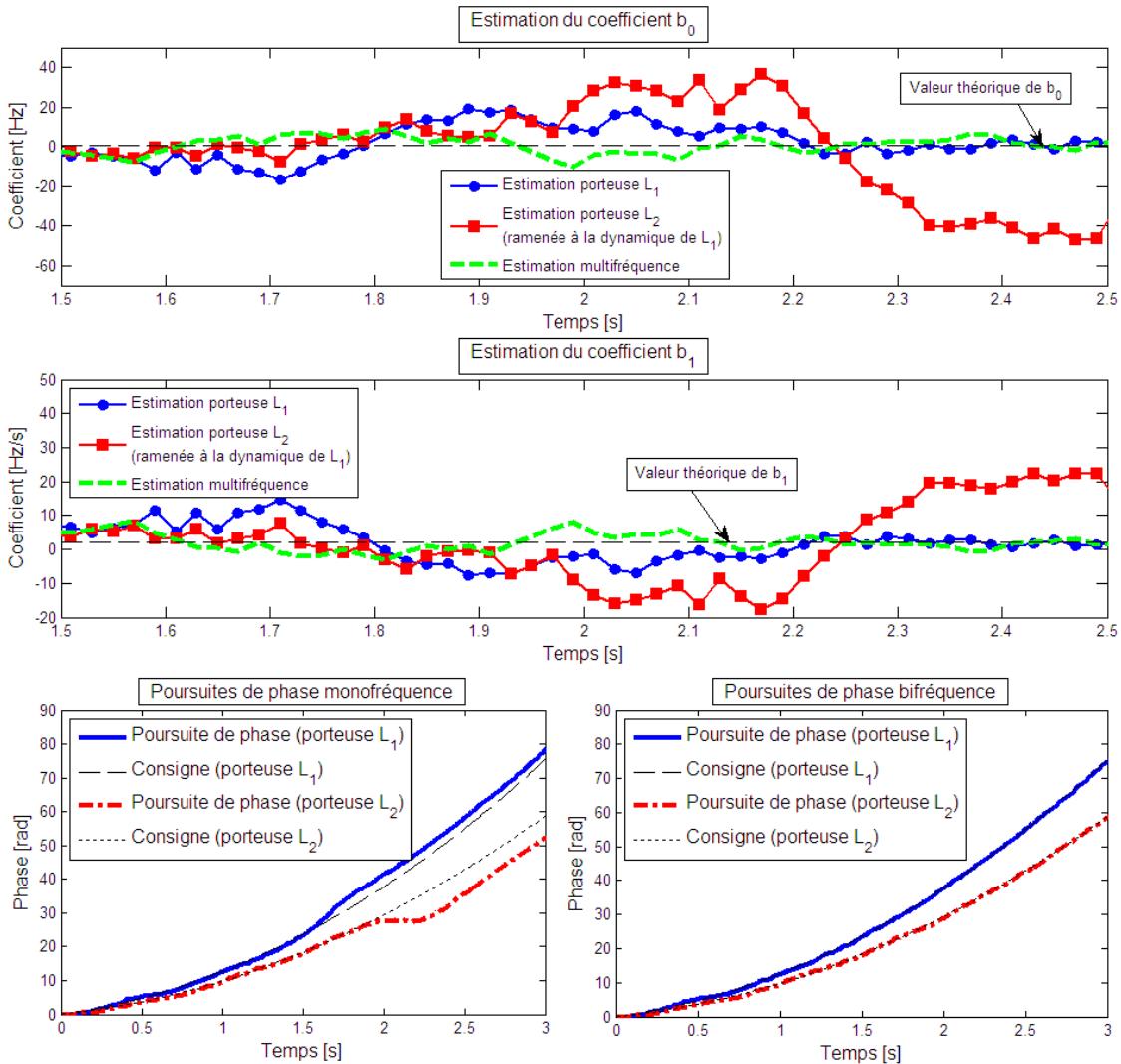


FIGURE 4.3 – Exemple de poursuite de phase multifréquence dans le cas de la méthode d'estimation centralisée des coefficients polynomiaux du modèle d'analyse

#### 4.1.3.1 Structure globale de la boucle

La structure de poursuite associée à la méthode d'estimation décentralisée est donnée à la figure 4.4. La structure est similaire à celle illustrée à la figure 4.2 mis à part l'étape d'estimation des coefficients qui est détaillée dans la section 4.1.3.2.

#### 4.1.3.2 Algorithme de fusion des données

Cette section va détailler les calculs réalisés au niveau de l'étape d'analyse des sorties des filtres de boucle pour la méthode d'estimation décentralisée des coefficients du modèle d'analyse. Contrairement au cas d'estimation précédent, nous allons supposer que l'étape d'analyse des sorties de filtre est réalisée de manière indépendante suivant une approche monofréquence pour chacune des porteuses. En procédant de la sorte, on dispose des esti-

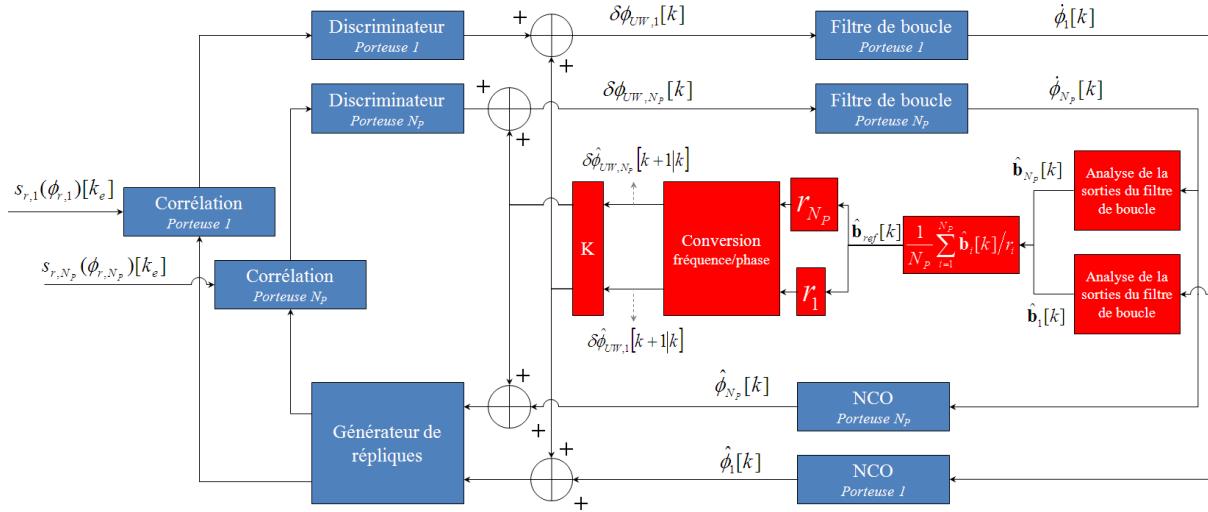


FIGURE 4.4 – Structure de la boucle multifréquence dont le système de développement de phase analyse les sorties de filtre par la méthode d'estimation décentralisée

mations de coefficients suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{b}}_1 &= [\hat{b}_{0,1}, \dots, \hat{b}_{M,1}]^T, \\ &\vdots \\ \hat{\mathbf{b}}_{N_p} &= [\hat{b}_{0,N_p}, \dots, \hat{b}_{M,N_p}]^T.\end{aligned}\tag{4.27}$$

Comme pour le cas de l'estimation centralisée, nous allons choisir un de ces vecteurs comme vecteur de référence. D'après la relation de proportionnalité (4.4), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{b}}_1 &= r_1 \hat{\mathbf{b}}_{ref}, \\ &\vdots \\ \hat{\mathbf{b}}_{N_p} &= r_{N_p} \hat{\mathbf{b}}_{ref}.\end{aligned}\tag{4.28}$$

avec

$$\hat{\mathbf{b}}_{ref} = [\hat{b}_{0,ref}, \dots, \hat{b}_{M,ref}]^T\tag{4.29}$$

et  $r_i = f_{p,i}/f_{p,ref}$ . Afin d'estimer le vecteur  $\hat{\mathbf{b}}_{ref}$ , on propose de combiner simplement les différents vecteurs estimés grâce à la moyenne suivante

$$\hat{\mathbf{b}}_{ref} = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\hat{\mathbf{b}}_i}{r_i}.\tag{4.30}$$

Une fois que le vecteur de référence est estimé, les vecteurs associés à chacune des porteuses sont re-estimés via

$$\hat{\mathbf{b}}_i = r_i \hat{\mathbf{b}}_{ref},\tag{4.31}$$

et pourront être utilisés pour prédire la sortie des discriminateurs avec lesquels ils sont associés.

#### 4.1.3.3 Exemples de poursuite

Afin d'illustrer le bon fonctionnement de la boucle donnée à la figure 4.4, nous allons lancer la poursuite de phase bifréquence suivante :

- les deux porteuses utilisées sont  $L_1$  et  $L_2$ ,
- la dynamique de phase sur  $L_1$  est de  $1 \text{ Hz} + 2 \text{ Hz/s}$ ,
- les boucles sont d'ordre 2,
- le niveau de bruit est tel que  $C/N_0 = 23 \text{ dBHz}$  pour les deux porteuses,
- $B_L = 5 \text{ Hz}$ ,
- $T_{corr} = 20 \text{ ms}$ ,
- discriminateur *Arctangent*,
- $N_{init} = 3$ ,
- $\gamma = 0.8$  sur chacune des porteuses,
- $K = 0.6$ .

La figure 4.5 donne les poursuites de phase associées aux porteuses  $L_1$  et  $L_2$  réalisées dans le cadre d'une poursuite mono et multifréquence, ainsi que les estimations des coefficients  $b_0$  et  $b_1$  réalisée en monofréquence et en bifréquence via la méthode d'estimation décentralisée. Comme pour l'exemple donné à la section 4.1.2, l'estimation bifréquence des coefficients polynomiaux avec la méthode décentralisée robustifie l'estimation des coefficients ainsi que les poursuites de phase. En effet, en approche monofréquence, la poursuite de phase sur  $L_1$  subit un saut de cycle à environ 1.5 s de poursuite alors que, en bifréquence, ce saut n'apparaît pas du fait que l'estimation bifréquentielle des coefficients  $b_0$  et  $b_1$  est suffisamment précise pour éviter ce saut.

## 4.2 Simulations numériques

Dans cette section, nous allons étudier les performances des deux structures de DPLL multifréquence grâce à des simulations numériques de Monte-Carlo. Les performances de ces deux structures seront également comparées à celles d'une DPLL monofréquence présentée dans le chapitre 3 afin d'évaluer l'apport de la diversité en fréquence sur la robustesse au bruit des boucles.

### 4.2.1 Modèle de génération du signal

Pour les simulations numériques, nous allons générer un signal de navigation multifréquence en entrée de la DPLL sous les hypothèses suivantes :

- La synchronisation temporelle avec le code est parfaitement effectuée. Le signal ne comportera donc pas de code d'étalement.
- Le signal étudié n'est pas modulé en phase par le message de navigation. On se place donc dans le cas d'un signal pilote ou d'un signal parfaitement démodulé grâce aux techniques de *data wipe-off*.
- La fréquence porteuse du signal est parfaitement démodulée. La fréquence et la phase du signal reçu correspondent donc aux variations de la fréquence et de la phase Doppler.
- Le signal reçu est équitablement porté par la voie I et la voie Q et peut s'écrire sous la forme d'une simple exponentielle complexe.

Sous ces hypothèses, les composantes du signal multifréquence en entrée de chaque boucle

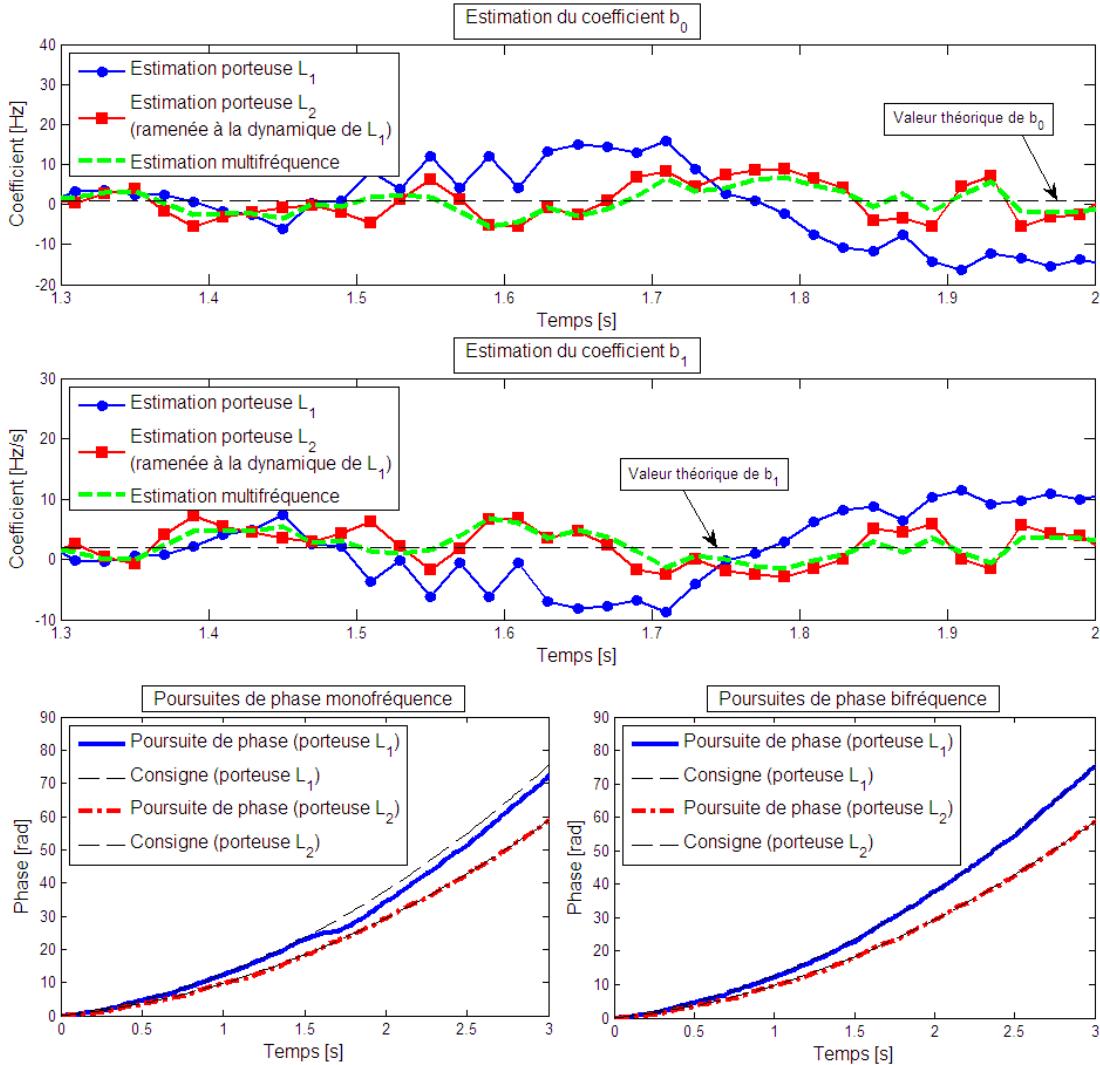


FIGURE 4.5 – Exemple de poursuite de phase multifréquence dans le cas de la méthode d'estimation décentralisée des coefficients polynomiaux du modèle d'analyse

peuvent s'écrire sous la forme :

$$s_{r,i}[k] = \sqrt{P_i} e^{2j\pi r_i \phi[k]} + n_i[k] \quad (4.32)$$

avec :

- $P_i$  la puissance du signal à la réception associée à la fréquence  $i$  ;
- $\phi[k]$  la phase d'intérêt de la porteuse de référence ;
- $r_i$  le rapport de fréquence entre la fréquence  $i$  et la fréquence de référence ;
- $n_i[k]$  le bruit thermique associé à la chaîne de réception de la porteuse  $i$  que l'on supposera complexe, blanc, et gaussien.

Les composantes du bruit thermique sont de même puissance et indépendantes (car on suppose que les réceptions des différentes fréquences s'effectuent sur des voies RF indépendantes). On modélise alors le bruit comme ci-après

$$\mathbf{n}[k] = [n_1[k], \dots, n_{N_P}[k]]^T \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma_n^2 \mathbf{I}_{N_P}) \quad (4.33)$$

avec  $\sigma_n^2$  la puissance du bruit thermique et  $\mathbf{I}_{N_P}$  la matrice identité de taille  $N_P \times N_P$ . La phase  $\phi$  est quant à elle générée suivant le modèle polynomial suivant :

$$\phi[k] = \dot{\phi}[0]kT_e + \ddot{\phi}[0]\frac{(kT_e)^2}{2} \quad (4.34)$$

avec  $T_e = 1/F_e$  la période d'échantillonnage du signal en entrée de la DPLL. Dans notre cas on supposera travailler avec des signaux de type C/A avec  $F_e = 2R_c = 2.046$  MHz.

### 4.2.2 Performances en présence de bruit

Pour étudier la robustesse au bruit des deux nouvelles structures de DPLL proposées dans ce chapitre, nous allons comparer leurs performances lors d'une poursuite de phase bruitée avec celles de la DPLL monofréquence présentée à la section 3.1.3.

Afin d'évaluer l'apport des nouvelles structures développées dans ce chapitre, nous allons réaliser la poursuite bifréquence suivante

- Porteuse 1 :  $L_1$  (1575.42 MHz) qui sera choisie comme fréquence de référence ;
- Porteuse 2 :  $L_2$  (1227.6 MHz) ;
- Temps de poursuite : 20 s.

Deux scénarios de poursuite seront envisagés : un cas où les deux porteuses ont à la réception le même niveau de bruit ; et un cas où une des deux porteuses a un niveau de bruit supérieur à l'autre.

Dans les deux cas de simulation, nous allons étudier la poursuite de la dynamique de phase suivante :

- $\dot{\phi}[0]/2\pi = 3$  Hz,
- $\ddot{\phi}[0]/2\pi = 1$  Hz/s.

Les différentes DPLL étudiées lors de la simulation sont dimensionnées de la sorte :

- les DPLL sont choisies d'ordre 2 et sont munies d'un discriminateur *Arctangent*,
- $B_L = 5$  Hz,
- $T_{corr} = 20$  ms,
- $K = 0.6$ ,  $\gamma = 0.8$  et  $M = 1$  pour chacune des porteuses.

Les différentes métriques de performances utilisées dans les simulations qui vont suivre sont les mêmes que celles définies à la section 3.2.2.

#### Cas de poursuite où les deux porteuses ont le même niveau de puissance à la réception

Pour ce scénario de simulation, on supposera que les deux porteuses ont le même niveau de bruit à la réception. Les figures 4.6, 4.7 et 4.8 illustrent les performances pour ce scénario de poursuite en termes de décrochage et de sauts de cycle ainsi que les distributions des erreurs de poursuite au cours du temps des différentes boucles pour un niveau de bruit fixé.

On voit sur la figure 4.6 que les deux structures de poursuite multifréquence offrent, en termes de décrochage, une meilleure robustesse au bruit en affichant des probabilités de décrochage plus faibles que celles obtenues avec une structure monofréquence ainsi que des

temps d'apparition du décrochage légèrement plus longs. En analysant la figure 4.6, on remarque que le gain de performance apporté par la nature multifréquence de la poursuite est plus important au niveau de la porteuse  $L_1$ . Cette différence s'explique par le fait que la porteuse  $L_2$  a une fréquence plus faible que la fréquence  $L_1$ . En terme de dynamique Doppler, la porteuse  $L_1$  a donc une dynamique de phase à poursuivre plus forte que la dynamique poursuivie par  $L_2$ . Par conséquent, il est normal qu'une amélioration de l'estimation de la dynamique (via les coefficients polynomiaux) soit plus bénéfique pour la porteuse  $L_1$ . La différence de gain de performance s'explique aussi par le fait qu'initialement, les performances de poursuite monofréquence sur  $L_2$  sont meilleures que sur  $L_1$  du fait de la différence de dynamique entre les deux porteuses.

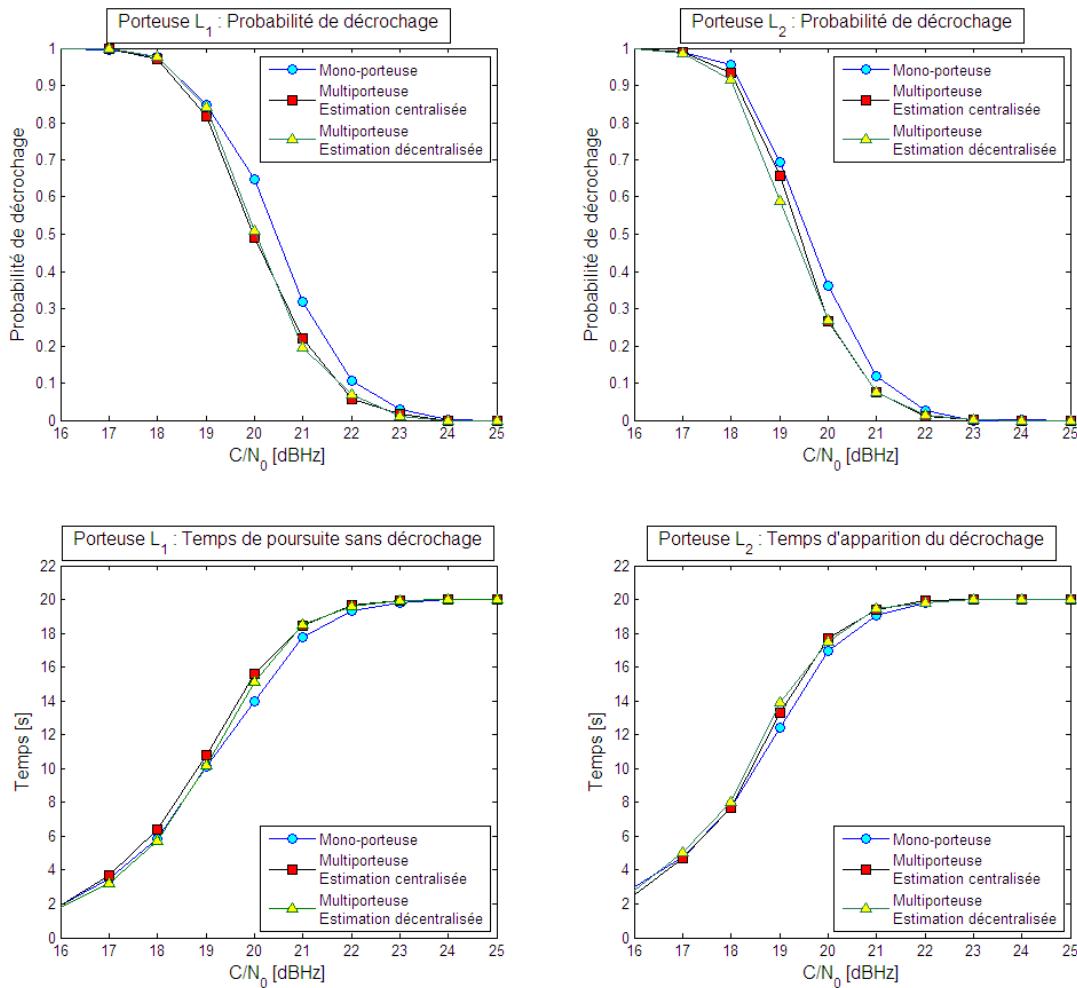


FIGURE 4.6 – Performances en termes de décrochage pour une poursuite bifréquence lorsque les deux porteuses ont un même niveau de puissance à la réception

La figure 4.7 illustre quant à elle les performances en termes de sauts de cycle. Comme pour les performances en termes de décrochage, on constate que les structures multifréquence offrent des taux de sauts de cycle plus faibles et des temps d'apparition du premier saut de cycle plus longs que la structure de poursuite monofréquence. Cependant, on remarque cette fois que le gain de performance apporté par l'aspect multifréquentiel de la poursuite est plus important sur  $L_2$  que sur  $L_1$ . Ce résultat, contrastant avec les observations réalisées sur la

figure 4.6, peut s'expliquer en considérant le niveau de bruit d'estimation des coefficients polynomiaux. En effet, quel que soit la méthode de fusion de données choisie, l'estimation des coefficients polynomiaux est réalisée par l'estimation du vecteur de référence  $\hat{\mathbf{b}}_{ref}$ . Une fois que ce vecteur est estimé, les vecteurs associés aux différentes porteuses sont obtenus en multipliant ce vecteur référence par les différents ratios  $r_i$ . Comme  $r_{L_1} > r_{L_2}$ , l'erreur de prédiction injectée au niveau de la poursuite (via le système de développement de phase) est donc plus importante sur  $L_1$  que sur  $L_2$ . Par conséquent, il est possible que cette différence d'erreur de prédiction rende la correction des sauts de cycle plus efficace sur la porteuse  $L_2$ .

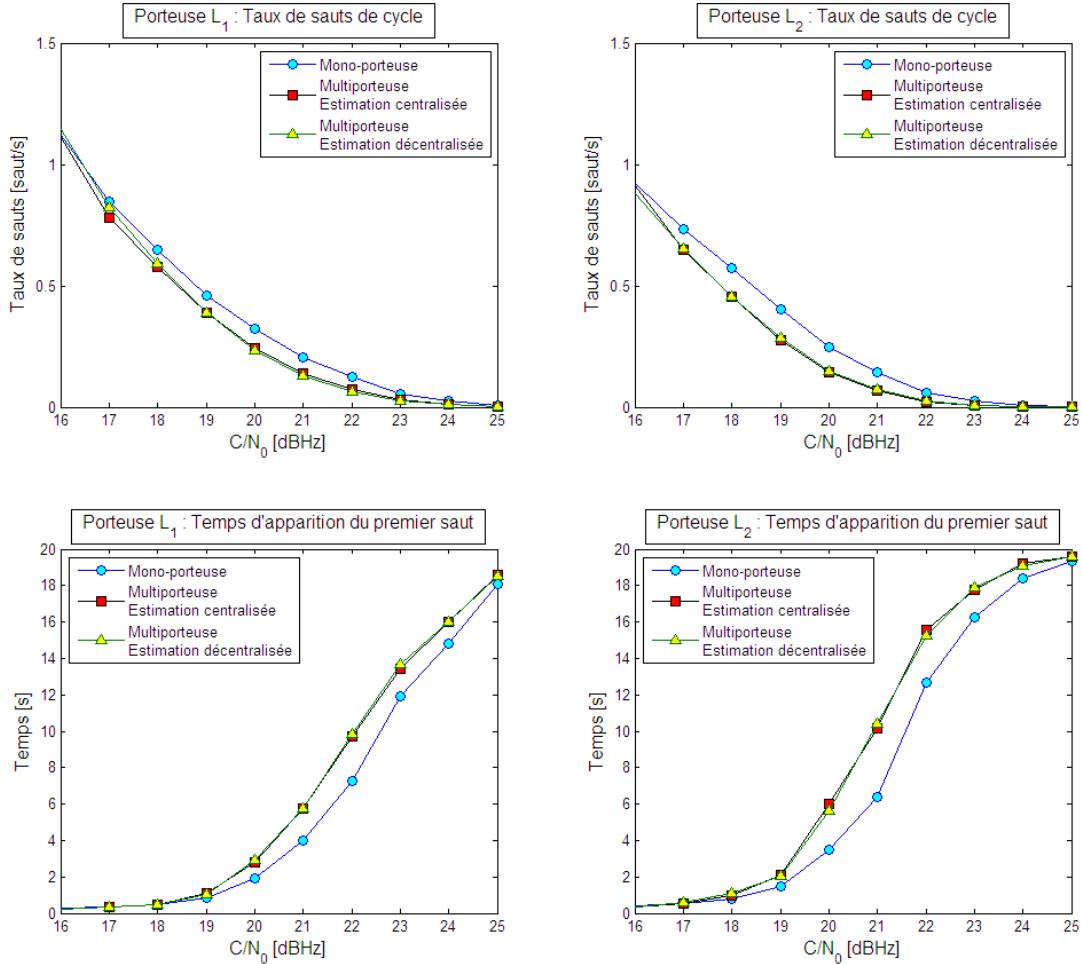


FIGURE 4.7 – Performances en termes de sauts de cycle pour une poursuite bifréquence lorsque les deux porteuses ont un même niveau de puissance à la réception

Pour bien conforter les résultats obtenus aux figures 4.6 et 4.7, la figure 4.8 illustre les distributions des erreurs de poursuite au cours du temps pour chacune des porteuses lorsque  $C/N_0 = 23$  dBHz. Pour chaque porteuse, les distributions illustrées sont celles obtenues lors d'une poursuite de phase multifréquence (dans le cas d'une estimation centralisée et décentralisée des coefficients polynomiaux), et celles obtenues lors d'une poursuite monofréquence. On constate bien en observant ces différentes distributions, que les poursuites multifréquence offrent une meilleure robustesse aux dynamiques bruitées en affichant des distributions avec des écarts type moins importants que dans le cas monofréquence.

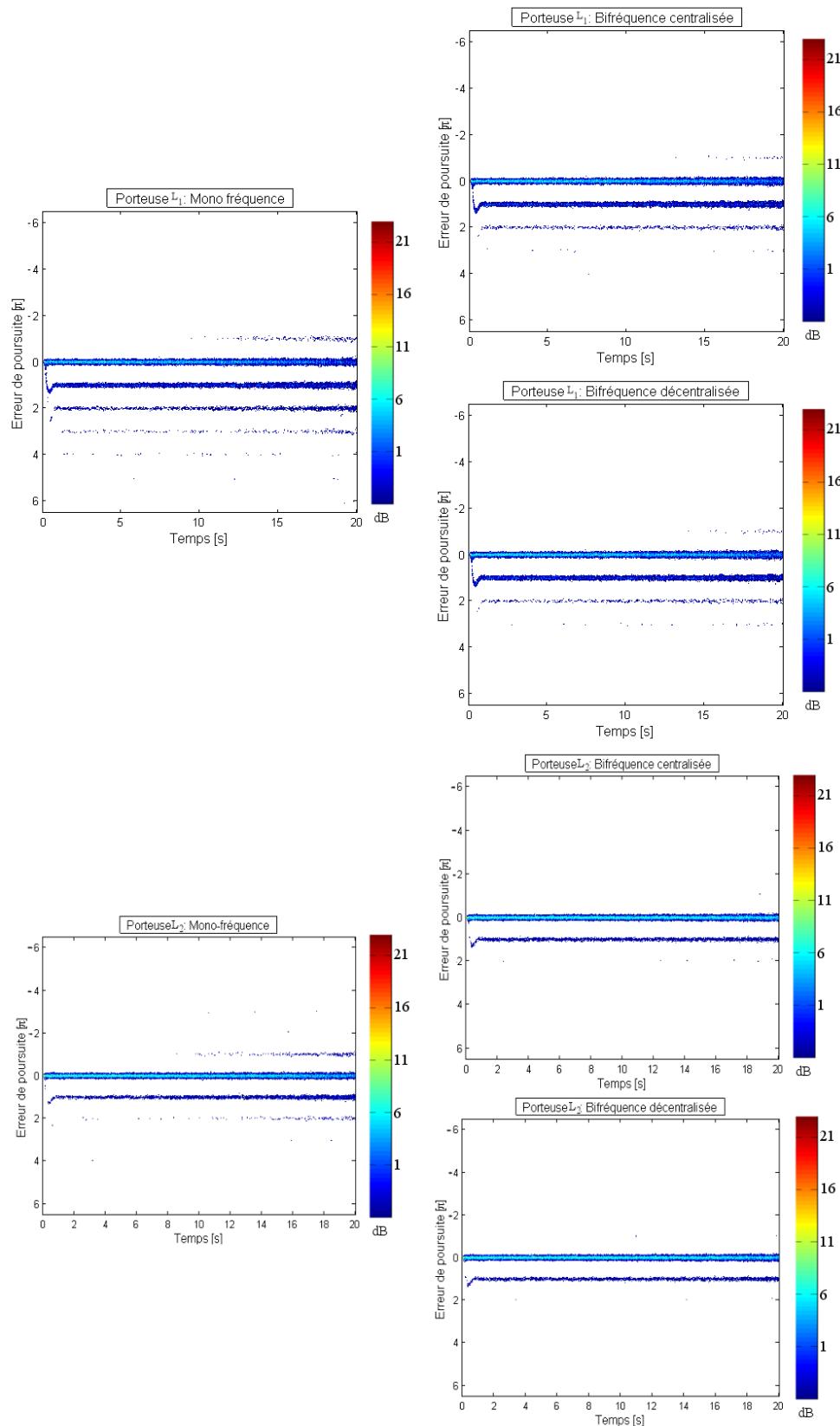


FIGURE 4.8 – Distribution des erreurs de poursuite au cours du temps pour des poursuites mono et multifréquence pour  $C/N_0 = 23$  dBHz

De manière générale, on voit d'après les figures 4.6, 4.7 et 4.8, qu'il y a très peu de différences entre la méthode d'estimation centralisée et la méthode d'estimation décentralisée.

### Cas de poursuite où les deux porteuses ont des niveaux de puissance différents à la réception

Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié un scénario de poursuite pour lequel les niveaux de puissance des deux porteuses à la réception étaient les mêmes. En pratique, à cause des diverses perturbations rencontrées lors de la propagation des signaux et des différences qu'il existe entre les puissances d'émission, les différentes porteuses du signal multifréquence n'ont généralement pas les mêmes niveaux de puissance à la réception. Lors d'une poursuite de phase multifréquence, ces différences de niveau de puissance peuvent être bénéfiques pour les porteuses avec le plus faible niveau. En effet, grâce aux systèmes multifréquence de prédiction de dynamique développés dans ce chapitre, il est légitime de penser que lors de la poursuite, la porteuse la plus puissante va aider la porteuse la moins puissante. Pour vérifier cette hypothèse et comprendre comment une différence de niveau de puissance entre les porteuses va impacter les performances établies aux figures 4.6 et 4.7, nous allons lancer la poursuite bifréquence suivante

- Porteuse 1 :  $L_1$  (1575.42 MHz) qui sera choisie comme fréquence de référence ;
- Porteuse 2 :  $L_2$  (1227.6 MHz) ;
- Temps de poursuite : 20 s.
- $C/N_{0,L_1} = C/N_{0,L_2} + 5dBHz$

Les figures 4.9 et 4.10 illustrent les performances pour ce scénario de poursuite en termes de décrochage et de sauts de cycle. De par la différence de puissance des porteuses, les performances des deux porteuses sont observées sur des plages de  $C/N_0$  légèrement différentes.

En observant les figures 4.9 et 4.10, on constate que la porteuse avec le plus faible niveau de puissance (ici  $L_2$ ) voit ses performances nettement améliorées par rapport au scénario où les deux porteuses ont le même niveau de puissance, que ce soit en termes de décrochage ou de sauts de cycle. Ce résultat confirme donc l'idée que les systèmes de développement de phase multifréquence développés dans ce chapitre sont bénéfiques pour la porteuse la moins puissante.

On remarque cependant que la porteuse avec le plus fort niveau de puissance (ici  $L_1$ ) est polluée par la porteuse avec le plus faible niveau de puissance. Lors du scénario de poursuite multifréquence, les performances obtenues sur  $L_1$  sont pires que celles obtenues lors d'une poursuite monofréquence. Ce phénomène de pollution entre porteuses laisse donc penser que, dans ce cas, il est préférable d'envisager une approche de poursuite multifréquence uniquement sur la porteuse la plus dégradée.

Pour finir, on remarque que contrairement au cas de poursuite où les deux porteuses ont la même puissance, la méthode d'estimation centralisée se démarque de la méthode d'estimation décentralisée en affichant de meilleures performances en termes de décrochage et de sauts de cycle sur les deux porteuses. L'approche d'estimation centralisée semble donc être la meilleure option d'estimation aux vues de l'ensemble des résultats obtenus.

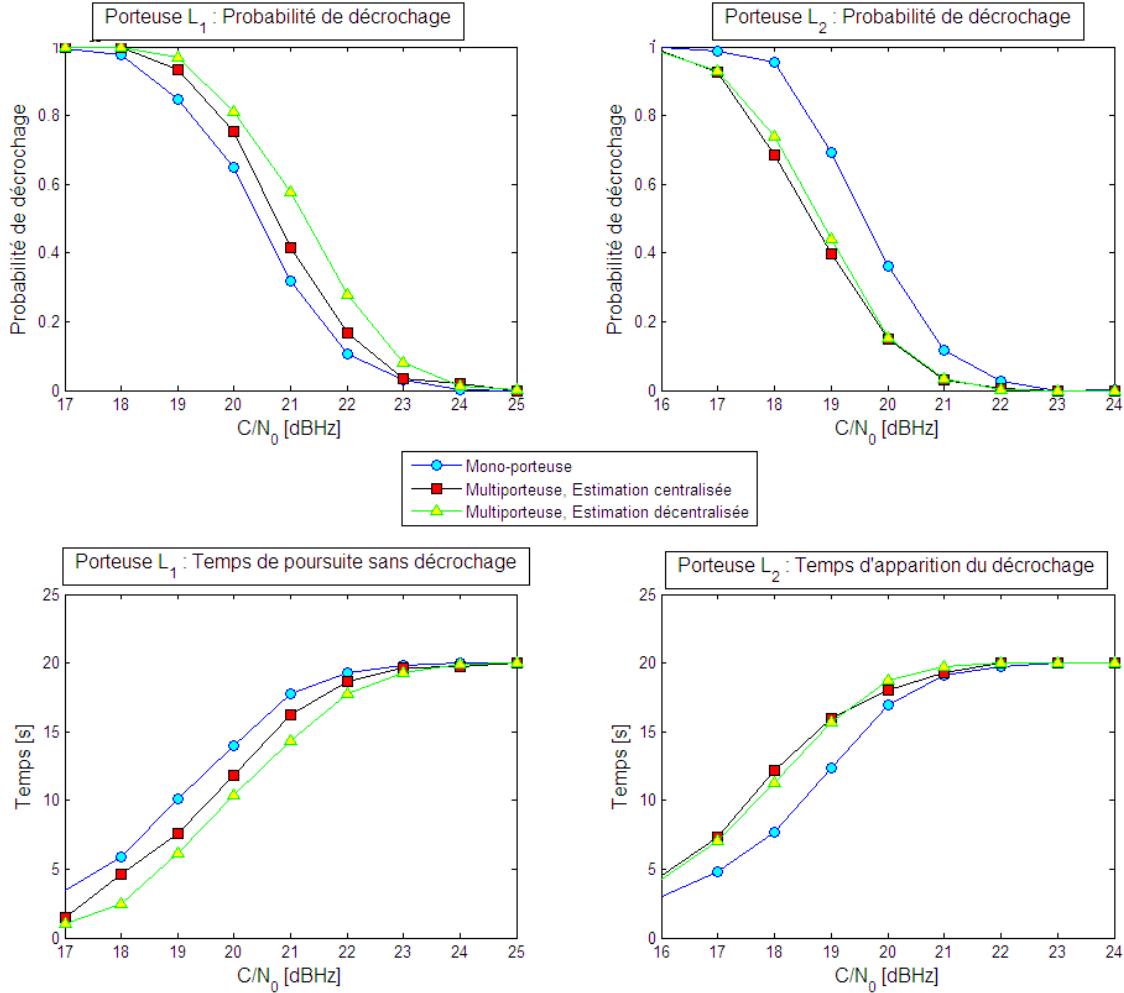


FIGURE 4.9 – Performances en termes de décrochage pour une poursuite bifréquence lorsque les deux porteuses ont un niveau de puissance différent à la réception (la porteuse la plus puissante est la porteuse  $L_1$ )

### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé deux nouvelles structures de poursuite de phase multifréquence basées sur le système de développement de phase présenté dans le chapitre précédent. En exploitant la diversité en fréquence offerte par un signal de navigation, il a été possible d'adapter ce dernier à la poursuite de phase multifréquence grâce à une étape de fusion de données réalisée au niveau de l'estimation des coefficients polynomiaux du modèle d'analyse en sorties des filtres de boucle. Comme il a été vu dans ce chapitre, il est possible de réaliser cette étape de fusion de données de deux manières différentes qui ont donné chacune une méthode d'estimation multifréquence des coefficients polynomiaux. Quelle que soit la solution d'estimation considérée, les tests de performance réalisés sur les structures de poursuite multifréquence ont montré que, lorsque les porteuses ont le même niveau de puissance, la robustesse au bruit de la poursuite est, comparée au cas de poursuite monofréquence, amélioré autant au niveau de la probabilité de décrochage qu'au niveau du taux de sauts de cycle. Cependant, lorsque les porteuses n'ont pas le même niveau de puissance à la réception, un phénomène de pollution des porteuses de forte puissance par les

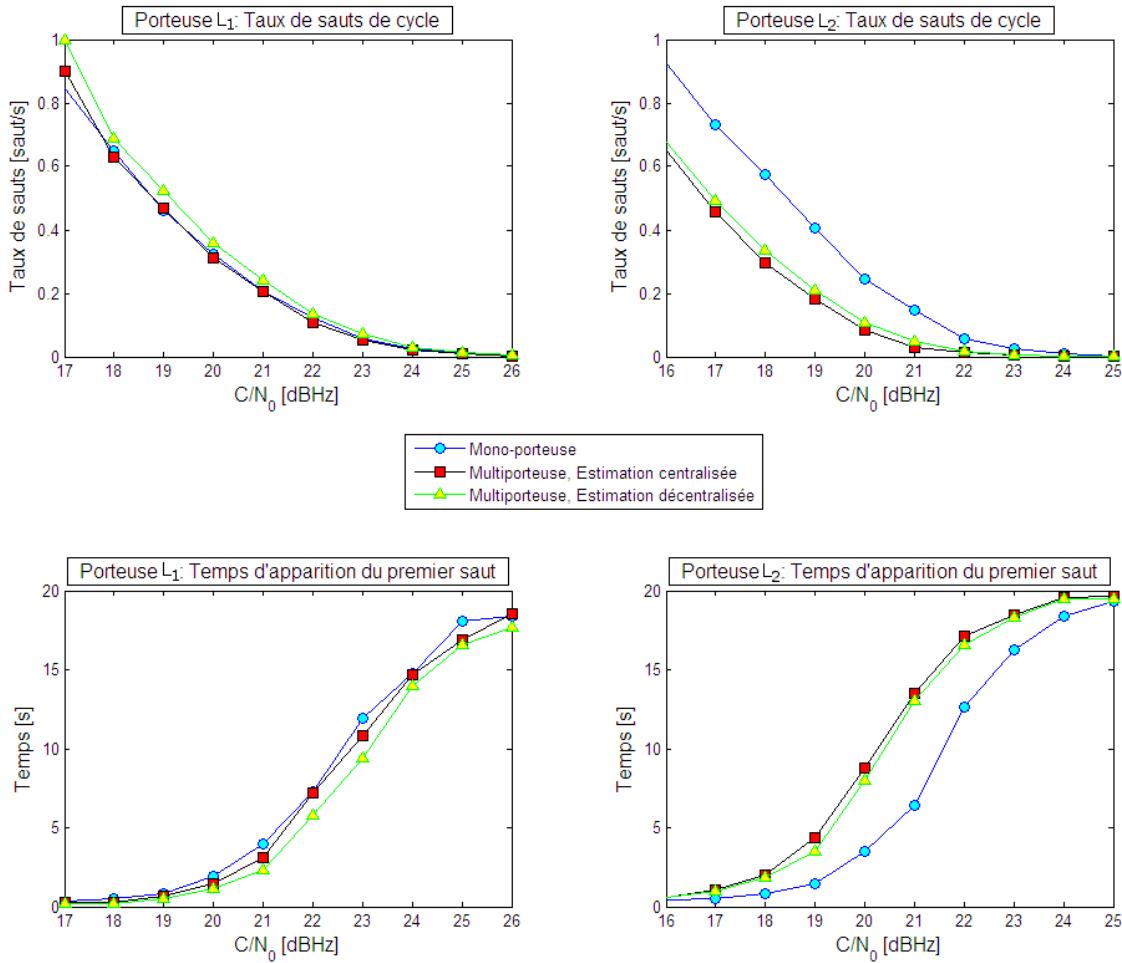


FIGURE 4.10 – Performances en termes de sauts de cycle pour une poursuite bifréquence lorsque les deux porteuses ont un niveau de puissance différent à la réception (la porteuse la plus puissante est la porteuse  $L_1$ ). De par la différence de puissance des porteuses, les performances des deux porteuses sont observées sur différentes plages de  $C/N_0$

porteuses de faible puissance est constaté au niveau des poursuites. Ce phénomène ne permet donc pas de rendre bénéfique l'aspect multifréquentiel de la poursuite pour l'ensemble des porteuses. Il pourrait donc être utile de travailler sur la mise en place d'un système de pondération entre porteuses qui permettrait d'appliquer le traitement multifréquence uniquement sur les porteuses les plus dégradées.

Dans le chapitre suivant, nous allons développer une toute nouvelle méthode de poursuite de phase multifréquence basée sur une approche non déterministe de la poursuite de phase et du phénomène de sauts de cycle. Pour réaliser cette nouvelle structure, nous allons définir un nouveau modèle de signal et développer une technique d'estimation de phase Bayésienne basée sur une approche variationnelle.

# Chapitre 5

## Poursuite de phase bifréquence par filtrage Bayésien variationnel

Dans les chapitres 3 et 4, nous avons travaillé sur la poursuite de phase réalisée par DPLL. Pour rendre ces structures de poursuite plus robustes, nous nous sommes focalisés sur le phénomène de sauts de cycle. Dans un premier temps, nous avons développé un système de développement de phase pour DPLL monofréquence basé sur une approche déterministe du phénomène. Par la suite, cette méthode a été adaptée à la poursuite de phase multifréquence en exploitant la diversité en fréquence d'un signal de navigation. Malgré l'approche multifréquentielle, cette technique de développement de phase a montré certaines limites lors des différents tests de performance.

Dans ce chapitre, nous allons continuer à nous intéresser à la poursuite de phase multifréquence mais, contrairement aux techniques développées dans les deux chapitres précédents, nous allons utiliser ici des méthodes non déterministes d'estimation de phase basées sur du filtrage Bayésien. Après avoir établi un modèle de signal et détaillé un nouvel estimateur de phase bifréquentiel, nous allons développer une nouvelle méthode de poursuite de phase bifréquence basée sur une technique de filtrage Bayésien variationnel. Les travaux présentés dans ce chapitre font l'objet d'un article journal en cours de finalisation [3].

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Modèle d'analyse du signal . . . . .</b>	<b>112</b>
<b>5.2</b>	<b>Discriminateur de phase bifréquence : estimateur MML . . . . .</b>	<b>113</b>
<b>5.3</b>	<b>Poursuite de phase par filtrage RVB . . . . .</b>	<b>114</b>
5.3.1	Poursuite de phase par approche Bayésienne . . . . .	115
5.3.2	Filtrage et estimateur RVB . . . . .	116
5.3.3	Structure globale de la poursuite de phase . . . . .	120
5.3.4	Exemples de poursuite . . . . .	120
<b>5.4</b>	<b>Performances du filtrage RVB . . . . .</b>	<b>121</b>
5.4.1	Performances intrinsèques de la poursuite de phase RVB . . . . .	121
5.4.2	Comparaisons avec les DPLL multifréquence . . . . .	123
<b>5.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>128</b>

---

## 5.1 Modèle d'analyse du signal

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la poursuite de phase d'un signal de navigation bifréquence émis par un même satellite. Afin de se focaliser sur l'estimation de phase, nous allons travailler en sortie de corrélation entre le signal reçu et une réplique locale corrigée en délai (estimé au cours du temps grâce à une DLL) et en fréquence (la fréquence considérée est la fréquence Doppler estimée lors de l'étape d'acquisition). En supposant travailler dans la configuration illustrée à la figure 5.1, les signaux d'intérêt peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} s_1[k] &= \alpha_1[k]e^{j\phi_1[k]} + n_1[k], \\ s_2[k] &= \alpha_2[k]e^{j\phi_2[k]} + n_2[k], \end{aligned} \quad (5.1)$$

avec, pour chacune des porteuses

- $\alpha_i$  l'amplitude du signal en sortie de corrélation,
- $\phi_i$  la phase Doppler,
- $n_i$  la composante liée au bruit.

Tout comme dans le chapitre 4, nous allons supposer que les différentes composantes du bruit sont indépendantes, gaussiennes et de même puissance. On prend donc

$$\mathbf{n}_k | \sigma_n^2 \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma_n^2 \mathbf{I}_2), \quad (5.2)$$

avec  $\mathbf{n}_k = [n_1[k], n_2[k]]^T$ ,  $\sigma_n^2$  la puissance du bruit sur chacune des voies de réception et  $\mathbf{I}_2$  la matrice identité de taille  $2 \times 2$ .

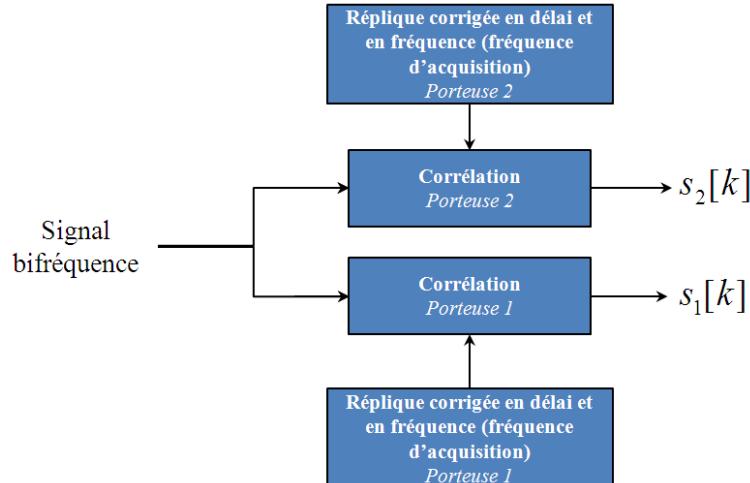


FIGURE 5.1 – Cadre d'étude du signal bifréquence en vue de réaliser une poursuite de phase par filtrage Bayésien

Dans ce chapitre, nous allons faire plusieurs hypothèses simplificatrices sur le modèle 5.1 qui, par la suite, pourront donner lieu à des raffinements. Nous allons dans un premier temps supposer que les différents déphasages dus aux perturbations ionosphériques sont parfaitement corrigés sur chacune des porteuses. Grâce à cette hypothèse, il est possible d'exploiter la proportionnalité entre les différentes phases Doppler et d'écrire

$$\begin{aligned} s_1[k] &= \alpha_1[k]e^{j\phi_1[k]} + n_1[k], \\ s_2[k] &= \alpha_2[k]e^{jr\phi_1[k]} + n_2[k], \end{aligned} \quad (5.3)$$

avec

$$r = \frac{f_{p,2}}{f_{p,1}} > 1. \quad (5.4)$$

Concernant les amplitudes des signaux en sortie de corrélation, on optera dans un premier temps pour un modèle générique (qui pourra par la suite être affiné) supposant que

- les deux amplitudes sont distribuées suivant des lois gaussiennes centrées en zéro avec la même puissance  $\sigma_\alpha^2$ ,
- il existe un certain niveau de corrélation entre les deux amplitudes, donné par le coefficient  $\rho \in [0, 1]$ .

Avec ces hypothèses, il est possible d'écrire

$$\boldsymbol{\alpha}_k | \sigma_\alpha^2, \rho \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_\alpha), \quad (5.5)$$

avec

$$\mathbf{R}_\alpha = \sigma_\alpha^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho^* & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

La distribution a priori de  $\boldsymbol{\alpha}_k | \sigma_\alpha^2, \rho$  est alors donnée par

$$f(\boldsymbol{\alpha}_k | \sigma_\alpha^2, \rho) = \frac{1}{\pi^2 |\mathbf{R}_\alpha|} \exp \left\{ -\boldsymbol{\alpha}_k^H \mathbf{R}_\alpha^{-1} \boldsymbol{\alpha}_k \right\}, \quad (5.7)$$

avec  $|\mathbf{R}_\alpha| = \sigma_\alpha^4 (1 - |\rho|^2)$ .

Pour la suite, on utilisera les notations vectorielles suivantes

$$\mathbf{s}_k = \boldsymbol{\alpha}_k \odot \begin{bmatrix} e^{j\phi_k} \\ e^{jr\phi_k} \end{bmatrix} + \mathbf{n}_k, \quad (5.8)$$

avec  $\phi_k \stackrel{not}{=} \phi_1[k]$ ,  $\mathbf{n}_k = [n_1[k], n_2[k]]^T$  et  $\odot$  le produit d'Hadamard.

## 5.2 Discriminateur de phase bifréquence : estimateur MML

La fonction de vraisemblance associée au système (5.8) est donnée par

$$f(\mathbf{s}_k | \boldsymbol{\alpha}_k, \phi_k, \sigma_n^2) = \frac{1}{\pi^2 \sigma_n^4} \exp \left\{ -\sigma_n^{-2} \left\| \mathbf{s}_k - \boldsymbol{\alpha}_k \odot \begin{bmatrix} e^{j\phi_k} \\ e^{jr\phi_k} \end{bmatrix} \right\|_2^2 \right\}, \quad (5.9)$$

avec  $\|\cdot\|_2$  la norme de Frobenius. Pour la suite des calculs et afin d'alléger les notations, on ne notera plus les termes constants dans les termes conditionnels des distributions. Grâce au modèle a priori (5.5) sur les amplitudes des signaux, il est possible de calculer la fonction de vraisemblance marginalisée suivante

$$f(\mathbf{s}_k | \phi_k) = \int f(\mathbf{s}_k | \boldsymbol{\alpha}_k, \phi_k) f(\boldsymbol{\alpha}_k) d\boldsymbol{\alpha}_k, \quad (5.10)$$

$$= \pi^{-2} |\mathbf{R}_{s_k}|^{-1} \exp \left\{ -\mathbf{s}_k^H \mathbf{R}_{s_k}^{-1} \mathbf{s}_k \right\}, \quad (5.11)$$

avec

$$\mathbf{R}_{s_k} = \begin{pmatrix} \sigma_n^2 + \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 \rho e^{j\bar{r}\phi_k} \\ \sigma_\alpha^2 \rho^* e^{-j\bar{r}\phi_k} & \sigma_n^2 + \sigma_\alpha^2 \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

et  $\bar{r} = r - 1$ . Cette fonction de vraisemblance marginale, assimilable à une distribution gaussienne, peut se développer sous la forme

$$f(\mathbf{s}_k|\phi_k) \propto \exp \left\{ -\frac{(\sigma_n^2 + \sigma_\alpha^2)}{(\sigma_n^2 + \sigma_\alpha^2)^2 - |\rho|^2 \sigma_\alpha^4} \mathbf{s}_k^H \mathbf{s}_k \right\} \exp \{2\xi |z_k| \cos(\varphi_k - \bar{r}\phi_k)\}, \quad (5.13)$$

avec

$$\begin{cases} \xi &= \sigma_\alpha^2 / ([\sigma_n^2 + \sigma_\alpha^2]^2 - |\rho|^2 \sigma_\alpha^4), \\ z_k &= \rho s_1^*[k] s_2[k], \\ \varphi_k &= \angle(z_k), \end{cases}$$

où l'opérateur  $\angle(.)$  définit l'angle dans l'intervalle  $[-\pi, +\pi]$ . L'estimateur MML (*Marignal Maximum Likelihood*) est donné par définition comme l'argument qui maximise la fonction de vraisemblance marginalisée (5.13) [95], i.e.,

$$\hat{\phi}_k^{mml} = \arg \max_{\phi_k} f(\mathbf{s}_k|\phi_k) \quad (5.14)$$

$$= \arg \max_{\phi_k} \cos(\varphi_k - \bar{r}\phi_k) \quad (5.15)$$

A cause de la périodicité de la distribution (5.13), il existe une infinité de valeurs possibles pour  $\hat{\phi}_k^{mml}$ . Pour obtenir une unique solution, nous fixerons la définition suivante

$$\boxed{\hat{\phi}_k^{mml} = \frac{\varphi_k}{\bar{r}}} \quad (5.16)$$

qui restreint les valeurs de l'estimateur MML dans l'intervalle  $\mathcal{I} = [-\frac{\pi}{\bar{r}}, +\frac{\pi}{\bar{r}}]$ .

Notons que l'estimateur (5.16) définit un nouveau discriminateur de phase bifréquence sous réserve des hypothèses de travail (5.8) et (5.5). Les caractéristiques de l'estimateur MML (5.16) peuvent être étudiées grâce à la densité de probabilité de  $\hat{\phi}_k^{mml}|\phi_k$  donnée par [96]

$$\bar{f}(\hat{\phi}_k^{mml}|\phi_k) = \bar{r} \frac{1 - \lambda^2}{2\pi(1 - c^2)} \left[ 1 - \frac{c \arccos(c)}{\sqrt{1 - c^2}} \right] \times \mathbb{I}_{\mathcal{I}}(\hat{\phi}_k^{mml}) \quad (5.17)$$

avec  $c = -\lambda \cos(\bar{r}[\hat{\phi}_k^{mml} - \phi_k])$  et  $\lambda = \sigma_\alpha^2 |\rho| / [\sigma_n^2 + \sigma_\alpha^2]$ . Pour quantifier les performances de l'estimateur MML, la figure 5.2 illustre la distribution (5.17) pour différentes valeur de  $\rho$ ,  $\phi_k$ ,  $r$  et  $SNR = \sigma_\alpha^2 / \sigma_n^2$ . On peut alors remarquer en analysant les figures 5.2(a)-5.2(d) que :

- (a) plus le signal est bruité, plus la densité de probabilité de  $\hat{\phi}_k^{mml}|\phi_k$  est large, réduisant ainsi la précision de l'estimateur ;
- (b) il est préférable d'avoir une forte corrélation entre les différentes porteuses afin de pouvoir obtenir une bonne information sur  $\phi_k$  ;
- (c) à moins que  $\phi_k = 0$ , l'estimateur est biaisé du fait de sa  $2\pi/\bar{r}$  périodicité ;
- (d) plus le ratio entre les porteuses est grand, plus l'estimateur est précis et plus l'intervalle d'ambiguïté sera petit.

### 5.3 Poursuite de phase par filtrage RVB

Dans cette section, nous allons développer une nouvelle méthode de poursuite bifréquence de  $\phi_k$  dans un cadre Bayésien. Les sections qui suivent vont détailler les différentes étapes de cette nouvelle méthode de poursuite basée sur une approche variationnelle.

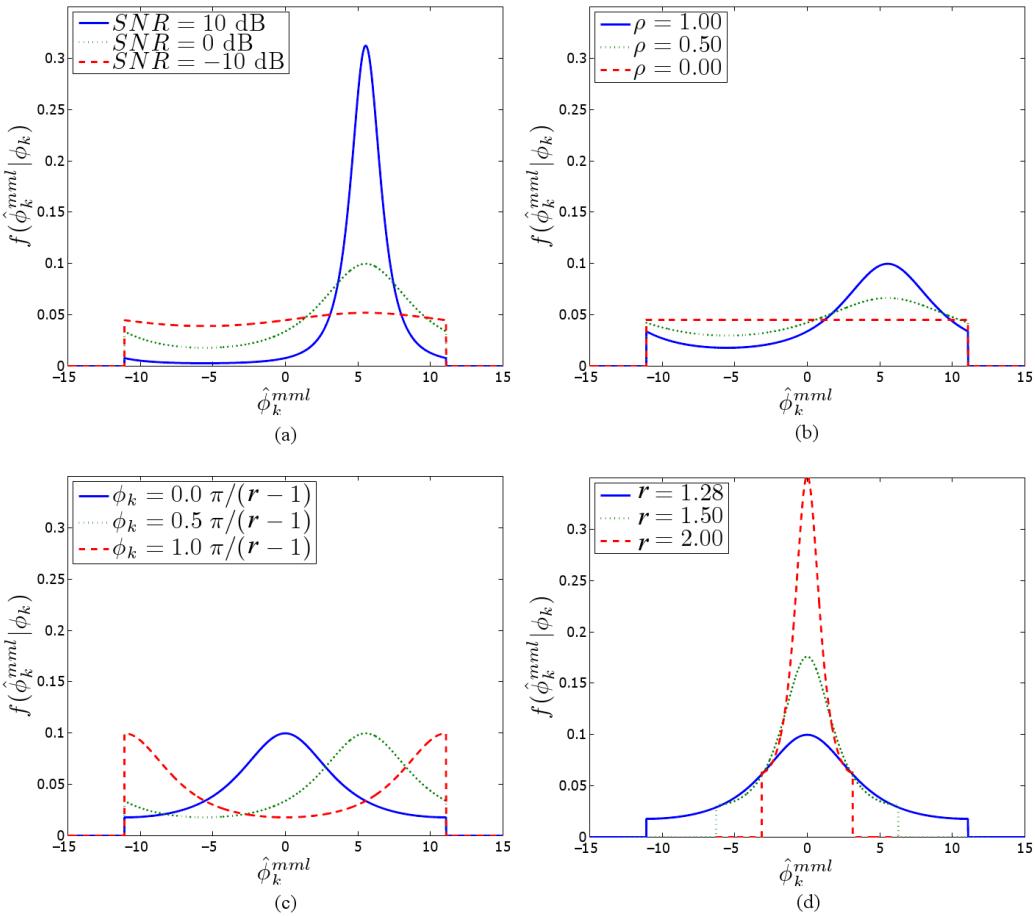


FIGURE 5.2 – Densité de probabilité de l'estimateur MML pour différents cas (les paramètres de référence sont  $r = 1.28$ ,  $\phi_k = 0.5\pi/\bar{r}$  (rad),  $\rho = 1$ ,  $SNR = 0dB$ ) : (a) le  $SNR$  varie, (b)  $\rho$  varie, (c)  $\phi_k$  varie, (d)  $r$  varie avec  $\phi_k = 0$ .

### 5.3.1 Poursuite de phase par approche Bayésienne

L'estimateur MML (5.16) donne une estimation ambiguë de la phase  $\phi_k$  sur l'intervalle  $\mathcal{I}$ . Pour pouvoir poursuivre la phase absolue  $\phi_k$  en utilisant ce discriminateur et pallier au problème d'ambiguïté afin d'éviter l'apparition de sauts de cycle durant la poursuite, nous nous proposons de définir un modèle de dynamique de phase. Pour ce faire, nous allons modéliser l'évolution de la phase par un champ aléatoire de Markov. Ce genre de structures est utilisé dans de nombreuses techniques Bayésiennes de développement de phase car elles fournissent un moyen simple de retranscrire la continuité de la phase à estimer [97, 98]. Dans notre étude, nous choisirons un champ Markovien Gaussien d'ordre 1 afin d'imposer une certaine continuité de la phase entre l'instant  $k - 1$  et l'instant  $k$ . On supposera également une distribution causale car, dans le cadre du GNSS, l'estimation de phase est une estimation réalisée en ligne.

De manière plus précise, pour définir le champ Markovien, on suppose que la première estimation de phase  $\phi_1$  est uniformément répartie sur l'intervalle  $\mathcal{I}$ . Pour les estimations suivantes (i.e.,  $k > 1$ ), on suppose que  $\phi_k$  est distribuée suivant une loi gaussienne de

moyenne  $\phi_{k-1}$  et de variance  $\sigma_\phi^2$ . Nous avons donc

$$\begin{aligned}\phi_1 &\sim \mathcal{U}_{\mathcal{I}}, \\ \phi_k | \phi_{k-1}, \sigma_\phi^2 &\sim \mathcal{N}(\phi_{k-1}, \sigma_\phi^2),\end{aligned}\quad (5.18)$$

qui se traduit en termes de distribution par

$$\begin{aligned}f(\phi_1) &\propto \mathbb{I}_{\mathcal{I}}(\phi_1), \\ f(\phi_k | \phi_{k-1}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\phi^2}} \exp\left\{-\frac{[\phi_k - \phi_{k-1}]^2}{2\sigma_\phi^2}\right\}.\end{aligned}\quad (5.19)$$

Couplée à la fonction de vraisemblance (5.13), cette information a priori sur la dynamique de phase permet de définir une méthode d'estimation récursive optimale de  $f(\phi_k | \mathbf{S}_k)$ , où  $\mathbf{S}_k = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_k]$ , grâce aux deux étapes suivantes [99]

– Prédiction

$$\begin{aligned}f(\phi_1 | \mathbf{S}_0) &= f(\phi_1) && (k = 1) \\ f(\phi_k | \mathbf{S}_{k-1}) &= \int f(\phi_k | \phi_{k-1}) f(\phi_{k-1} | \mathbf{S}_{k-1}) d\phi_{k-1} && (k > 1)\end{aligned}\quad (5.20)$$

où l'indice  $_0$  correspond au vecteur d'observation vide

– Mise à jour de la distribution de filtrage

$$f(\phi_k | \mathbf{S}_k) \propto f(\mathbf{s}_k | \phi_k) f(\phi_k | \mathbf{S}_{k-1}) \quad (k \geq 1). \quad (5.21)$$

Cependant, étant donné l'expression de la vraisemblance (5.13) et de l'a priori (5.19), il semble impossible de calculer en pratique de manière récursive la distribution de filtrage (5.21). C'est pourquoi, nous allons préférer estimer  $f(\phi_k | \mathbf{S}_k)$  grâce une technique de filtrage sous-optimale basée sur une approche Bayésienne variationnelle (VB pour *Variational Bayes*) [100, 101].

### 5.3.2 Filtrage et estimateur RVB

Nous allons développer ici une méthode de filtrage Bayésien basée sur une approche variationnelle afin de réaliser une poursuite de phase bifréquence.

#### 5.3.2.1 Principe de l'approximation variationnelle

Supposons que de manière générale, nous souhaitons calculer la distribution  $f(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{D})$  avec  $\boldsymbol{\theta}$  le vecteur des paramètres à estimer et  $\mathbf{D}$  celui des observations. Dans certains cas, il est difficile d'obtenir une expression mathématiquement manipulable de  $f(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{D})$ . Pour résoudre ce problème, il est possible de chercher à approximer la distribution par une distribution  $\check{f}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{D})$  vérifiant certaines conditions simplificatrices [100]. Dans le cadre d'une approche variationnelle, il est possible de chercher à approximer  $f(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{D})$  par une distribution vérifiant, conditionnellement aux observations, l'indépendance suivante :

$$\check{f}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{D}) = \check{f}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2 | \mathbf{D}) = \check{f}(\boldsymbol{\theta}_1 | \mathbf{D}) \check{f}(\boldsymbol{\theta}_2 | \mathbf{D}), \quad (5.22)$$

avec  $\boldsymbol{\theta}_1$  et  $\boldsymbol{\theta}_2$  une subdivision du vecteur des paramètres tel que  $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_1^T, \boldsymbol{\theta}_2^T]^T$ . Parmi cette famille de distributions, nous allons choisir celle qui minimise la divergence de Kullback-Leibler, dont l'expression est donnée par

$$KL(\check{f}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{D}) || f(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{D})) = \int \check{f}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{D}) \ln \frac{\check{f}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{D})}{f(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{D})} d\boldsymbol{\theta}. \quad (5.23)$$

Celle-ci est minimale lorsque  $\check{f}(\cdot) = \tilde{f}(\cdot)$  avec

$$\tilde{f}(\boldsymbol{\theta}_i | \mathbf{D}) \propto \exp \left\{ \langle \ln(f(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{D})) \rangle_{\tilde{f}(\boldsymbol{\theta}_{/i} | \mathbf{D})} \right\} \quad \text{pour } i = 1, 2, \quad (5.24)$$

avec  $\boldsymbol{\theta}_{/i}$  le vecteur complémentaire de  $\boldsymbol{\theta}_i$  (e.g.,  $\boldsymbol{\theta}_{/1} = \boldsymbol{\theta}_2$ ) et

$$\langle g(\boldsymbol{\theta}) \rangle_{f(\boldsymbol{\theta})} = \int g(\boldsymbol{\theta}) f(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}. \quad (5.25)$$

### 5.3.2.2 Filtrage Bayésien variationnel restreint

Revenons dans le cas de la poursuite de phase par estimation Bayésienne donnée par les équations (5.20) et (5.21). Les calculs de mise à jour de la distribution a posteriori  $f(\phi_k | \mathbf{S}_k)$  s'avérant complexes à réaliser, nous allons opter pour une approche variationnelle afin de trouver une expression approchée  $\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_k)$ . Comme expliqué dans la section précédente, nous allons supposer une certaine indépendance des paramètres conditionnellement aux observations. Dans notre cas, nous allons nous inspirer des études réalisées dans [101] que nous allons appliquer à notre modèle de signal. Ainsi, nous allons localement supposer l'indépendance entre  $\phi_k$  et  $\phi_{k-1}$  conditionnellement aux observations  $\mathbf{S}_k$ , i.e.,

$$\tilde{f}(\phi_k, \phi_{k-1} | \mathbf{S}_k) = \tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_k) \tilde{f}(\phi_{k-1} | \mathbf{S}_k), \quad (5.26)$$

avec  $\tilde{f}(\cdot)$  l'approximation de la distribution a posteriori réalisant l'indépendance des paramètres. En choisissant  $\tilde{f}(\cdot)$  qui minimise la divergence de Kullback-Leibler, on a

$$\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_k) \propto \exp \left\{ \langle \ln(f(\phi_k, \phi_{k-1}, \mathbf{S}_k)) \rangle_{\tilde{f}(\phi_{k-1} | \mathbf{S}_k)} \right\}, \quad (5.27)$$

$$\tilde{f}(\phi_{k-1} | \mathbf{S}_k) \propto \exp \left\{ \langle \ln(f(\phi_k, \phi_{k-1}, \mathbf{S}_k)) \rangle_{\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_k)} \right\}. \quad (5.28)$$

Aux vues des expressions (5.27) et (5.28), il nous faut exprimer la distribution conjointe  $f(\phi_k, \phi_{k-1}, \mathbf{S}_k)$ . En appliquant trois fois les lois de Bayes, il est possible d'écrire

$$f(\phi_k, \phi_{k-1}, \mathbf{S}_k) = f(\mathbf{s}_k | \phi_k, \phi_{k-1}, \mathbf{S}_{k-1}) f(\phi_k | \phi_{k-1}, \mathbf{S}_{k-1}) f(\phi_{k-1} | \mathbf{S}_{k-1}) f(\mathbf{S}_{k-1}). \quad (5.29)$$

Grâce aux différents modèles du signal mis en place précédemment, la seule connaissance de la phase à l'instant  $k$  permet de caractériser pleinement  $\mathbf{s}_k$  et la seule connaissance de  $\phi_{k-1}$  permet de caractériser complètement  $\phi_k$ . En remplaçant également la distribution inconnue  $f(\phi_{k-1} | \mathbf{S}_{k-1})$  par son approximation  $\tilde{f}(\phi_{k-1} | \mathbf{S}_{k-1})$ , l'expression (5.29) peut se réécrire

$$f(\phi_k, \phi_{k-1}, \mathbf{S}_k) = f(\mathbf{s}_k | \phi_k) f(\phi_k | \phi_{k-1}) \tilde{f}(\phi_{k-1} | \mathbf{S}_{k-1}) f(\mathbf{S}_{k-1}). \quad (5.30)$$

En insérant l'expression (5.30) dans l'expression (5.27), et en tenant compte des composantes indépendantes de  $\phi_k$  et celles constantes par rapport à  $\phi_{k-1}$ , il est possible d'écrire

$$\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_k) \propto f(\mathbf{s}_k | \phi_k) \exp \left\{ \langle \ln(f(\phi_k | \phi_{k-1})) \rangle_{\tilde{f}(\phi_{k-1} | \mathbf{S}_k)} \right\}. \quad (5.31)$$

De même, en partant de l'équation (5.28), il est possible d'écrire

$$\tilde{f}(\phi_{k-1} | \mathbf{S}_k) \propto \tilde{f}(\phi_{k-1} | \mathbf{S}_{k-1}) \exp \left\{ \langle \ln(f(\phi_k | \phi_{k-1})) \rangle_{\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_k)} \right\}. \quad (5.32)$$

L'approximation variationnelle nous conduit ainsi à l'estimation de  $\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_k)$  via le système de filtrage récursif suivant [101]

– Prédiction

$$\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_{k-1}) \propto \exp \left\{ \langle \ln(f(\phi_k | \phi_{k-1})) \rangle_{\tilde{f}(\phi_{k-1} | \mathbf{S}_k)} \right\}, \quad (5.33)$$

avec

$$\tilde{f}(\phi_{k-1} | \mathbf{S}_k) \propto \tilde{f}(\phi_{k-1} | \mathbf{S}_{k-1}) \exp \left\{ \langle \ln(f(\phi_k | \phi_{k-1})) \rangle_{\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_k)} \right\}.$$

– Mise à jour de la distribution de filtrage

$$\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_k) \propto f(\mathbf{s}_k | \phi_k) \tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_{k-1}). \quad (5.34)$$

Comme le montre la figure 5.3, où est schématiquement illustré le système de filtrage défini par les équations (5.33) et (5.34), l'estimation de  $\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_k)$  nécessite la connaissance de  $\tilde{f}(\phi_{k-1} | \mathbf{S}_k)$  qui est également fonction de cette dernière. Pour contourner ce problème, il est

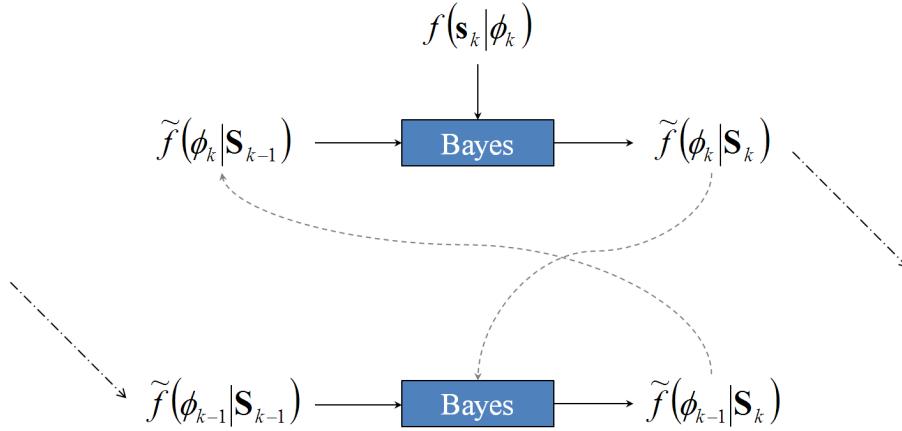


FIGURE 5.3 – Processus de filtrage Bayésien lors d'une approche variationnelle locale possible de faire la seconde approximation suivante [101]

$$\tilde{f}(\phi_{k-1} | \mathbf{S}_k) = \tilde{f}(\phi_{k-1} | \mathbf{S}_{k-1}). \quad (5.35)$$

Grâce à l'hypothèse (5.35), l'estimation de  $\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_k)$  est réalisée par les deux étapes suivantes

$$\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_{k-1}) \propto \exp \left\{ \langle \ln(f(\phi_k | \phi_{k-1})) \rangle_{\tilde{f}(\phi_{k-1} | \mathbf{S}_{k-1})} \right\}, \quad (5.36)$$

$$\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_k) \propto f(\mathbf{s}_k | \phi_k) \tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_{k-1}). \quad (5.37)$$

Ce nouveau processus de filtrage, appelé filtrage RVB (*Restricted Variational Bayesian*), est illustré à la figure 5.4. En utilisant les expressions (5.13) et (5.18), le filtrage RVB s'écrit finalement

– Prédiction et mise à jour pour  $k = 1$

$$\tilde{f}(\phi_1 | \mathbf{S}_0) = f(\phi_1), \quad (5.38)$$

$$\tilde{f}(\phi_1 | \mathbf{S}_1) \propto f(\phi_1) \exp \left\{ 2\xi |z_1| \cos \left( \bar{r}[\hat{\phi}_1^{mml} - \phi_1] \right) \right\}. \quad (5.39)$$

– Prédiction et mise à jour pour  $k > 1$

$$\phi_k | \mathbf{S}_{k-1} \underset{\tilde{f}}{\sim} \mathcal{N} \left( \langle \phi_{k-1} \rangle_{\tilde{f}(\phi_{k-1} | \mathbf{S}_{k-1})}, \sigma_\phi^2 \right), \quad (5.40)$$

$$\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_k) \propto \exp \left\{ 2\xi |z_k| \cos \left( \bar{r}[\hat{\phi}_k^{mml} - \phi_k] \right) - \frac{[\phi_k - \langle \phi_{k-1} \rangle_{\tilde{f}(\phi_{k-1} | \mathbf{S}_{k-1})}]^2}{2\sigma_\phi^2} \right\} \quad (5.41)$$

Pour  $k > 1$ , la distribution (5.41) a une forme qu'il est possible de retrouver dans certains algorithmes de développement de phase [102, 103]. Plus précisément, la distribution se décompose en un produit d'une fonction périodique (dont les maxima sont situés tous les  $\hat{\phi}_k^{mml}$  modulo  $2\pi/\bar{r}$ ) avec une fonction Gaussienne centrée en  $\langle \phi_{k-1} \rangle_{\tilde{f}(\phi_{k-1} | \mathbf{s}_{k-1})}$ . La composante périodique de la distribution peut induire un comportement multimodal lorsque  $2\xi|z_k|\bar{r}^2\sigma_\phi^2 > 1$  qui, durant la poursuite, risque d'être à l'origine de l'apparition de sauts de cycle. L'étude du comportement multimodal de la distribution (5.41) est détaillée dans l'Annexe C.

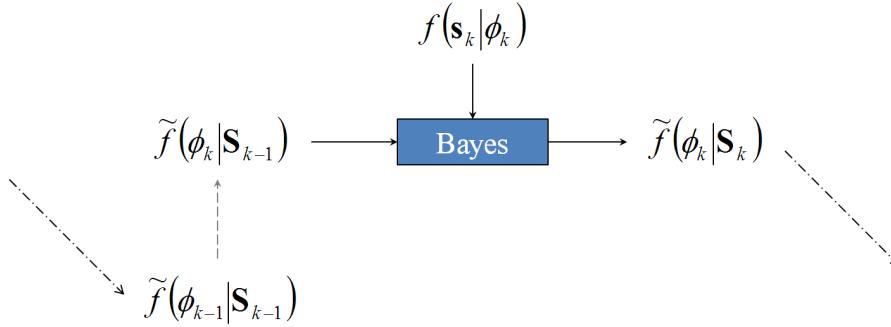


FIGURE 5.4 – Processus de filtrage RVB

### 5.3.2.3 Estimateur RVB

Pour estimer la phase  $\phi_k$  grâce au processus itératif de filtrage RVB, il est suffisant et nécessaire, d'après l'équation (5.41), de calculer sa moyenne suivant la distribution  $\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_k)$ . En plus de permettre la mise à jour de la distribution de filtrage, nous allons considérer cette moyenne comme l'estimateur de la phase  $\phi_k$  associé au filtrage RVB. Ainsi, l'estimateur RVB de la phase est donné par

$$\hat{\phi}_k^{rvb} \underset{\text{def}}{=} \langle \phi_k \rangle_{\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_k)} = \int \phi_k \tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_k) d\phi_k. \quad (5.42)$$

Comme il est détaillé en Annexe D, l'estimateur RVB peut s'exprimer comme une somme discrète infinie. Plus précisément, on a

–  $k = 1$

$$\hat{\phi}_1^{rvb} = \frac{2}{\bar{r}} \sum_{q=1}^{+\infty} (-1)^{q+1} \frac{I_q(\beta_1)}{I_0(\beta_1)} \frac{\sin(q\bar{r}\hat{\phi}_1^{mml})}{q} \quad (5.43)$$

–  $k > 1$

$$\hat{\phi}_k^{rvb} = \hat{\phi}_{k-1}^{rvb} + \sigma_\phi^2 \frac{2\bar{r} \sum_{q=1}^{\infty} q I_q(\beta_k) \sin(q\bar{r}[\hat{\phi}_k^{mml} - \hat{\phi}_{k-1}^{rvb}]) e^{-\frac{\sigma_\phi^2 \bar{r}^2 q^2}{2}}}{I_0(\beta_k) + 2 \sum_{q=1}^{\infty} I_q(\beta_k) \cos(q\bar{r}[\hat{\phi}_k^{mml} - \hat{\phi}_{k-1}^{rvb}]) e^{-\frac{\sigma_\phi^2 \bar{r}^2 q^2}{2}}} \quad (5.44)$$

avec  $I_q(.)$  la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre  $q$  et  $\beta_k = 2\xi|z_k|$ . On voit, d'après l'équation (5.44), que le calcul de  $\hat{\phi}_k^{rvb}$  est réalisé grâce à une formulation analytique mathématiquement réalisable, faisant apparaître  $\hat{\phi}_{k-1}^{rvb}$  et  $\hat{\phi}_k^{mml}$ . On constate également la nature non-linéaire du filtrage RVB qui ne permet pas d'obtenir une relation linéaire entre

$\hat{\phi}_k^{rvb}$  et  $\hat{\phi}_{k-1}^{rvb}$ . En pratique, les fonctions  $I_q(x)$  décroissent suffisamment rapidement lorsque  $q$  augmente pour que l'on puisse troncature les sommes des expressions (5.43) et (5.44) sur un intervalle  $\{1, \dots, q_{max}\}$ .

### 5.3.3 Structure globale de la poursuite de phase

En combinant l'estimateur MML (5.16) et le processus de filtrage Bayésien élaboré dans la section 5.3.2, nous obtenons la structure de poursuite de phase bifréquence illustrée à la figure 5.5.

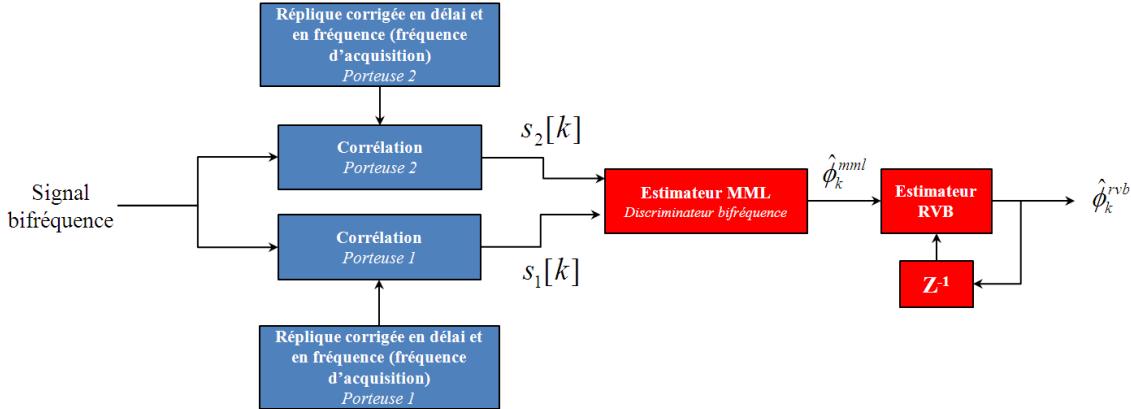


FIGURE 5.5 – Structure schématique de la méthode de poursuite de phase par filtrage RVB

### 5.3.4 Exemples de poursuite

Afin d'illustrer le bon fonctionnement de la structure de poursuite donnée à la figure 5.5, nous allons étudier la poursuite de phase bifréquence suivante :

- les deux porteuses du signal sont  $L_1$  et  $L_2$  (soit  $r \simeq 1.28$ ),
- la dynamique de phase à suivre est une rampe de 2 Hz,
- le niveau de bruit est tel que  $C/N_0 = 25$  dBHz,
- les amplitudes  $\alpha_i$  sont générées en prenant  $\sigma_\alpha^2 = 1$  et  $\rho = 0.99$ ,
- on supposera lors des calculs que  $\sigma_\phi^2 = 0.7$  (malgré le fait que la phase générée soit une rampe),
- pour le calcul de  $\hat{\phi}_k^{rvb}$ , on troncature les sommes en prenant  $q_{max} = 50$ .

La figure 5.6 illustre, pour ce scénario de poursuite, l'estimation de phase obtenue avec l'estimateur MML et l'estimateur RVB. On voit, comme attendu, que l'estimateur MML fourni une estimation de phase non filtrée et ambiguë, c'est-à-dire non développée dans l'intervalle  $\mathcal{I} = [-\pi/\bar{r}, \pi/\bar{r}]$ . La figure 5.6 illustre également l'estimation de phase obtenue en développant l'estimateur MML grâce une simple routine Matlab. On voit clairement que même malgré ce développement de phase, l'estimation obtenue reste localement ambiguë du fait de l'apparition de sauts de cycle. Pour finir, l'estimateur RVB nous donne quant à lui une estimation de phase sans sauts de cycle et moins bruitée que l'estimation de phase donnée par l'estimateur MML. L'utilisation d'une loi liant les phases entre deux instants permet donc, via le processus de filtrage RVB, d'affiner et de développer l'estimation de phase.

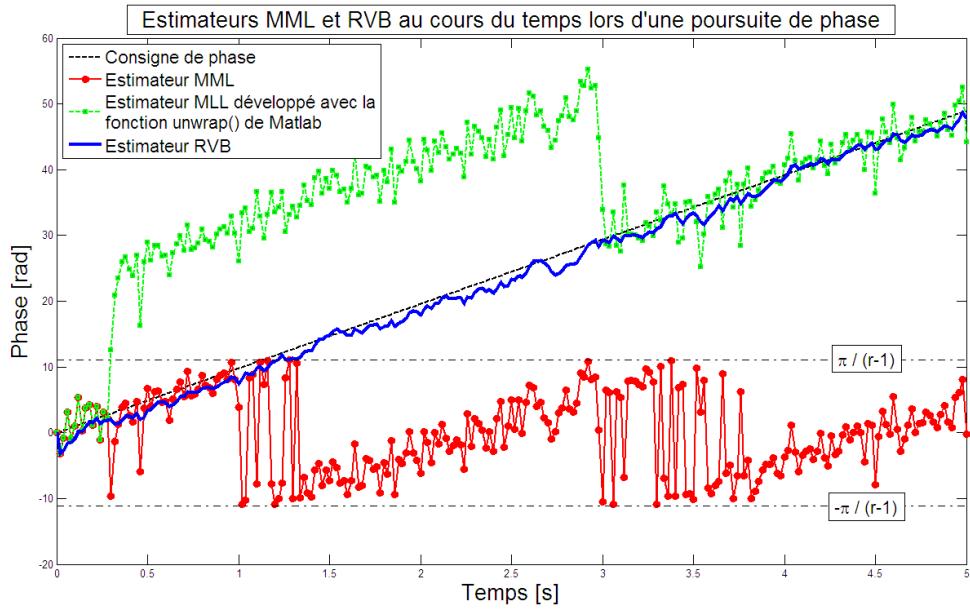


FIGURE 5.6 – Comparaison des estimateurs MML et RVB lors d’une poursuite de phase bifréquence de type rampe

## 5.4 Performances du filtrage RVB

Dans cette section nous allons étudier les performances de la nouvelle méthode de poursuite de phase bifréquence RVB développée dans ce chapitre. L’étude de performance est réalisée en deux temps :

- Dans un premier temps, nous allons étudier les performances intrinsèques de la méthode en nous focalisant sur le comportement des poursuites en fonction du paramètre  $\sigma_\phi^2$ .
- Puis, nous allons nous focaliser sur la comparaison des performances de la poursuite RVB avec les performances obtenues avec les structures multifréquence développées dans le chapitre 4.

Les deux axes d’étude précédemment décrits sont détaillés dans les sections qui suivent.

### 5.4.1 Performances intrinsèques de la poursuite de phase RVB

Nous allons étudier ici les performances intrinsèques de la structure de poursuite RVB illustrée à la figure 5.5. Pour ce faire, nous allons générer et poursuivre les signaux d’intérêt suivant les modèles (5.8), (5.2) et (5.5) pour diverses valeurs de  $SNR$ ,  $\rho$ . Quel que soit le choix des paramètres, on supposera que l’algorithme de poursuite RVB connaît parfaitement les valeurs de ces derniers.

Pour étudier les performances en fonction de  $\sigma_\phi^2$ , on choisit les trois métriques suivantes :

- La RMSE (Root Mean Square Error) modulo la plage d’ambiguïté de l’estimateur MML (qu’on notera pour la suite RMSE-mod) afin de quantifier en première approximation la précision des poursuites hors sauts de cycle. La RMSE-mod est également calculée au bout d’un temps significatif de poursuite afin que les calculs soient effectués en régime établi.

- Le temps de convergence de l'estimation de phase qui est déterminée comme étant le temps nécessaire pour que la RMSE-mod soit constante au cours du temps.
- Le taux de sauts de cycle sur l'ensemble de la poursuite. Comme dans les chapitres précédents, un saut de cycle est détecté lorsque la poursuite quitte un équilibre pour en atteindre un autre.

Ces trois critères de performance sont illustrés à la figure 5.7 pour diverses valeurs de  $SNR$ ,  $\rho$  et  $\sigma_\phi^2$  dans le cadre d'une poursuite bifréquence des porteuses  $L_2$  et  $L_1$  (i.e.,  $r \simeq 1.28$ ) d'un échelon de phase de  $\pi/(2\bar{r})$  rad.

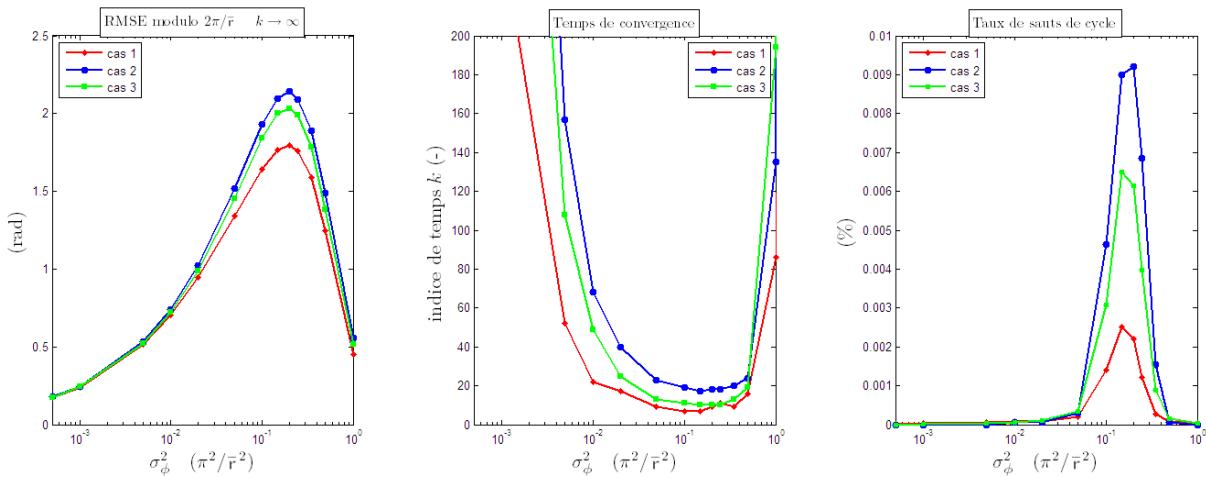


FIGURE 5.7 – Influence du paramètre  $\sigma_\phi^2$  lors de la poursuite d'un échelon de phase  $(\pi/(2\bar{r})$  rad) pour les trois cas suivants : Cas 1 :  $SNR = 5$  dB,  $\rho = 1$ ,  $r \simeq 1.28$ . Cas 2 :  $SNR = 0$  dB,  $\rho = 1$ ,  $r \simeq 1.28$ . Cas 3 :  $SNR = 5$  dB,  $\rho = 0.8$ ,  $r \simeq 1.28$ .

La figure 5.7 nous montre que, quel que soient les niveaux de bruit et de corrélation, la méthode de poursuite RVB a un comportement non-linéaire<sup>1</sup> en fonction de  $\sigma_\phi^2$ . Plus précisément, on remarque que pour des faibles valeurs de  $\sigma_\phi^2$ , la RMSE-mod tend à diminuer. On remarque également le même comportement de la RMSE-mod pour des fortes valeurs de  $\sigma_\phi^2$ . Ce comportement contraste avec les comportements qu'il est possible d'observer avec des boucles de poursuite classiques. En effet, pour une boucle de type DPLL par exemple, les performances se dégradent avec l'augmentation de la bande de boucle. Dans le cas d'une poursuite RVB, la notion de bande de boucle est directement liée à  $\sigma_\phi^2$  (car c'est ce paramètre qui autorise un certain niveau de variations, dues au bruit ou à la dynamique, entre deux estimations successives de phase ;  $\sigma_\phi^2$  joue ainsi le rôle de bande passante). On s'attend donc, par similitude avec les DPLL, à ce que la RMSE-mod augmente avec  $\sigma_\phi^2$ . Or les résultats obtenus montrent un comportement non-linéaire en fonction de  $\sigma_\phi^2$ . Ce résultat peut s'expliquer par l'étude de l'expression (5.44) de l'estimateur RVB dans laquelle le paramètre  $\sigma_\phi^2$  apparaît sous deux formes :

- une constante multiplicative qui va réduire le terme d'innovation (associé au terme  $\hat{\phi}_k^{mml} - \hat{\phi}_{k-1}^{rvb}$  dans l'équation (5.44)) lorsque  $\sigma_\phi^2$  diminue,
- une composante exponentielle qui va également réduire le terme d'innovation lorsque  $\sigma_\phi^2$  augmente.

1. on entend par "comportement non-linéaire" un comportement relatif à un filtrage non-linaire

Malgré ce comportement non-linéaire, on remarque cependant que  $\sigma_\phi^2$  garde quand même une certaine similitude avec la notion de bande de boucle. En effet, on constate sur la figure 5.7 que le temps de convergence et la RMSE-mod ont des comportements inverses en fonction de  $\sigma_\phi^2$ . Quel que soit le cas de simulation, lorsque la RMSE-mod augmente, le temps de convergence diminue et lorsque la RMSE-mod diminue, le temps de convergence augmente. On retrouve également le même comportement relatif entre le taux de sauts de cycle (dont les courbes de performance ont même allure que celles de la RMSE-mod) et le temps de convergence, bien que les taux observés soient très faibles. Dans ce cas, on voit bien que  $\sigma_\phi^2$  réalise un compromis entre robustesse au bruit et vitesse de convergence.

Pour terminer, l'analyse de la figure 5.7 nous montre que logiquement, lorsque le *SNR* ou le taux de corrélation  $\rho$  diminuent, il y a une dégradation des performances qui se traduit par une augmentation de la RMSE-mod, du temps de convergence et du taux de sauts de cycle.

#### 5.4.2 Comparaisons avec les DPLL multifréquence

Après avoir étudié les performances intrinsèques de la poursuite de phase RVB, nous allons comparer ses performances avec une des boucles multifréquence développées dans le chapitre 3. Les tests de comparaison seront réalisés pour trois cas de poursuite différents : la poursuite d'un échelon de phase, la poursuite d'une rampe de phase et la poursuite d'une rampe plus une accélération de phase. On distinguera les trois cas d'étude afin de voir jusqu'à quel niveau de dynamique il est possible d'appliquer le modèle (5.18). Ce modèle étant dimensionné pour suivre une dynamique de type échelon, il est légitime de penser que ce dernier ne soit pas suffisant pour suivre une dynamique de type rampe et surtout de type accélération.

Dans tous les cas, on travaillera sur les scénarios de poursuite suivants :

- les deux porteuses du signal sont  $L_1$  et  $L_2$  (soit  $r \simeq 1.28$ ),
- les amplitudes  $\alpha_i$  sont réelles et égales,
- la phase d'intérêt est générée suivant le modèle polynomial (4.34).

Les boucles de poursuite seront quant à elles dimensionnées de la sorte :

- les amplitudes  $\alpha_i$  étant réelles et égales, on prend  $\rho = 1$ ,
- pour le calcul de  $\hat{\phi}_k^{rvb}$ , on troncature les sommes en prenant  $q_{max} = 50$ ,
- la structure multifréquence du chapitre 4 qui est comparée avec la structure RVB est celle relative à la méthode d'estimation centralisée, dont les réglages sont :  $K = 0.6$ ,  $\gamma = 0.8$ ,  $M = 1$  et  $N_{init} = 3$ . Les boucles seront d'ordre 2 et seront munies d'un discriminateur de type *Arctangent*,

Les diverses performances de poursuites sont obtenues par l'analyse de 500 poursuites de phase de 20 s chacune. Pour les courbes de décrochage, on se fixera  $T_{critique} = 1$  s pour déterminer à partir de quel moment un saut de cycle est considéré comme un décrochage local.

##### Performances lors d'une poursuite d'un échelon de phase

D'après le modèle (5.18), le développement de la structure de poursuite RVB présentée dans

ce chapitre a principalement été axé sur la poursuite d'une dynamique de type échelon. Pour le premier test de performance, nous allons donc nous intéresser à la poursuite de phase suivante :

- la dynamique à suivre est un échelon de  $\pi/4$  rad,
- pour la poursuite RVB,  $\sigma_\phi^2 = 1.23$ . Cette valeur a été déterminée empiriquement grâce à la figure 5.7 en choisissant le meilleur compromis entre rapidité de convergence, RMSE-mod et taux de sauts de cycle.
- la bande de boucle de la DPLL multifréquence est de  $B_L = 3$  Hz,

Les méthodes de poursuite mono et multifréquence développées dans les chapitres 3 et 4 n'étant pas optimisées dans les cas de poursuite de type échelon (car il n'y a aucune dynamique à estimer et pré-compenser), nous allons également étudier les performances d'une DPLL monofréquence conventionnelle avec une faible bande de boucle  $B_L = 1$  Hz. Les figures 5.8 et 5.9 illustrent les performances des boucles étudiées en termes de RMSE-mod, de décrochage et de taux de sauts de cycle.

La figure 5.8 illustre les RMSE-mod de la méthode RVB, de la méthode de poursuite bifréquence centralisée et de la DPLL conventionnelle pour différentes valeurs de  $C/N_0$  au cours du temps. En observant cette figure, on constate dans un premier temps que la structure RVB affiche des RMSE-mod plus grandes que la DPLL multifréquence et monofréquence conventionnelle. Cette différence de précision s'explique par le fait que, dans le cas de simulation où les amplitudes des signaux sont réelles et égales, la méthode RVB est pénalisée du fait du modèle (5.5) qui suppose un modèle générique plus complexe de ces dernières.

On remarque également sur la figure 5.8 les comportements linéaires et non-linéaires des différentes boucles en fonction du niveau de bruit. Plus précisément, si on se focalise sur les méthodes de poursuite monofréquence et multifréquence centralisée, on voit bien que plus le niveau de bruit augmente, plus la RMSE-mod augmente. Dans le cas de la méthode RVB, la RMSE-mod n'augmente pas forcément avec le niveau de bruit. En effet, on voit qu'elle présente un maximum pour  $C/N_0 = 26$  dBHz et qu'elle est minimale pour  $C/N_0 = 15$  dBHz. Ce comportement est à lier avec le comportement non-linéaire de la RMSE-mod en fonction de  $\sigma_\phi^2$  observé à la figure 5.7.

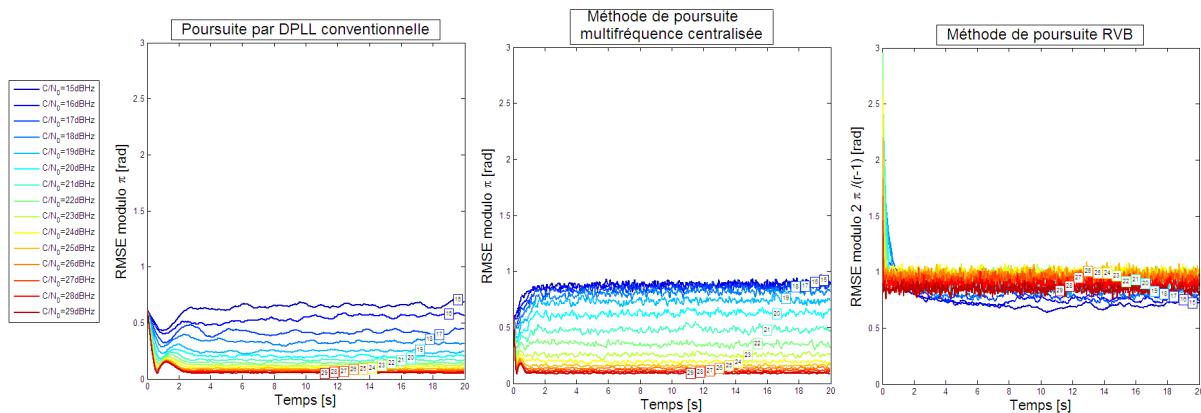


FIGURE 5.8 – RMSE-mod des poursuites RVB et des poursuites multifréquence centralisées pour la poursuite d'un échelon de  $\pi/4$  rad

La figure 5.9 illustre les performances de poursuite en termes de décrochage et de sauts de cycle. On voit clairement sur cette figure que, comparée à la DPLL multifréquence, la méthode de poursuite RVB affiche de meilleures performances avec des probabilités de décrochage et des taux de sauts de cycle nuls quel que soit le niveau de bruit considéré. On remarque également que les performances de la méthode RVB sont également meilleures que celles de la DPLL monofréquence conventionnelle avec une faible bande de boucle. Ces résultats ne sont pas incompatibles avec le fait que la RMSE-mod de la méthode RVB est plus importante que celle de la DPLL multifréquence. En effet, le discriminateur MML utilisé dans le méthode RVB a une plage d'ambiguïté de  $2\pi/(r - 1)$  rad qui est beaucoup plus grande que la plage d'ambiguïté du discriminateur *Arctangent*. La méthode de poursuite RVB peut donc supporter des niveaux de RMSE-mod plus importants sans subir de sauts de cycle.

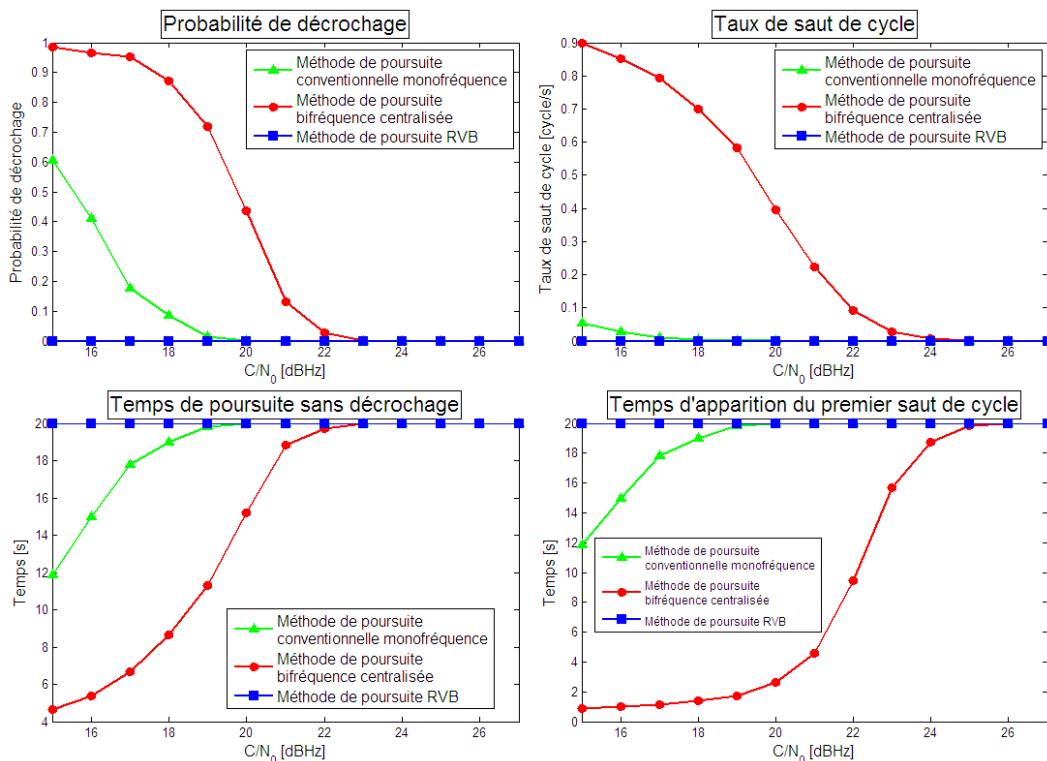


FIGURE 5.9 – Performances de la poursuite RVB et de la poursuite multifréquence centralisée en termes de décrochage et de sauts de cycle pour la poursuite d'un échelon de  $\pi/4$  rad

Les résultats obtenus pour ce scénario de poursuite montrent donc que la méthode de poursuite RVB est une méthode de poursuite robuste au bruit dans le cas d'une poursuite d'un échelon de phase.

### Performances lors d'une poursuite d'une rampe de phase

Dans la simulation précédente, nous avons pu constater que la méthode RVB affiche une bonne robustesse lors d'une poursuite de type échelon. Afin d'établir maintenant sa robustesse aux dynamiques de type rampe, nous allons nous intéresser à la poursuite de phase suivante :

- la dynamique à suivre est de type rampe (2 Hz ou 3 Hz selon le cas d'étude),

- pour la poursuite RVB,  $\sigma_\phi^2 = 6.15$  (valeur déterminée empiriquement, de manière analogue au cas de l'échelon) quel que soit la valeur de la rampe,
- la bande de boucle de la DPLL multifréquence est de  $B_L = 3$  Hz pour le cas d'une rampe de 2Hz, et de  $B_L = 5$  Hz pour le cas d'une rampe de 3Hz.

Les figures 5.10, 5.11 et 5.12 nous donnent les performances de poursuite des deux boucles en termes de RMSE-mod modulo la plage d'ambiguïté, de décrochage et de sauts de cycle pour différentes valeurs de  $C/N_0$ .

La figure 5.10 illustre la RMSE-mod au cours du temps pour diverses valeurs de  $C/N_0$ . On constate sur cette figure que comme pour le cas de poursuite d'un échelon de phase, la RMSE-mod de la méthode RVB est plus importante que celle obtenue avec la DPLL multifréquence centralisée. On remarque de plus que les valeurs de RMSE-mod de cette dernière sont plus importantes que dans le cas de simulation précédent pour des forts niveaux de bruit. Ce constat s'explique par les nombreux décrochage des poursuites qui vont considérablement augmenter les valeurs de RMSE-mod aux vues de la grande plage de linéarité du discriminateur MML.

Contrairement aux résultats observés à la figure 5.8, on remarque que cette fois, la méthode RVB affiche un comportement assimilable à celui d'un filtrage linéaire avec des valeurs de RMSE-mod qui augmentent avec le niveau de bruit. On voit cependant que les niveaux de RMSE-mod semblent croître de manière importante à partir d'un certain niveau de bruit.

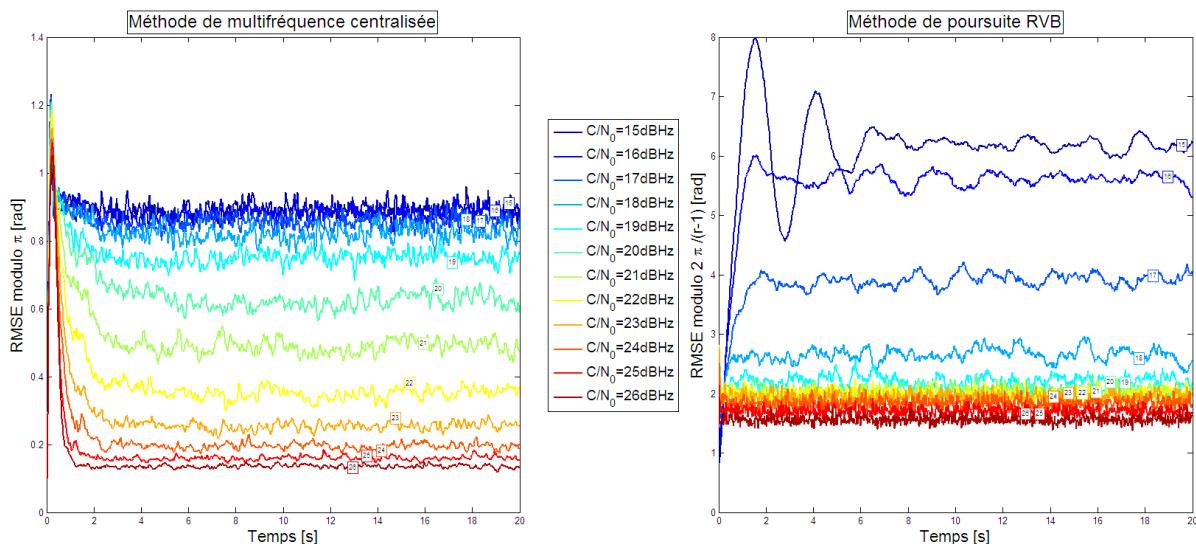


FIGURE 5.10 – RMSE-mod des poursuites RVB et des poursuites multifréquence centralisées pour une poursuite de rampe de 3 Hz

Les performances en termes de décrochage et de sauts de cycle pour le cas d'une poursuite de rampe de 2 Hz sont illustrées à la figure 5.11. On voit clairement sur cette figure, comme pour le cas de la poursuite d'un échelon, que la méthode de poursuite RVB affiche des meilleures performances en repoussant les limites de décrochage de 5 à 6 dBHz et en abaissant considérablement le taux de sauts de cycle (pour des valeurs de  $C/N_0$  non critiques). Il est également intéressant de remarquer le "comportement binaire" de la méthode de poursuite RVB qui affiche des performances se dégradant très rapidement sur une plage de  $C/N_0$  très courte. Ce comportement est à lier avec les niveaux de RMSE-mod donnés à la figure 5.10.

Les performances en termes de sauts de cycle font ressortir le caractère non-linéaire de la poursuite RVB en affichant une dégradation locale autour des 23 dBHz.

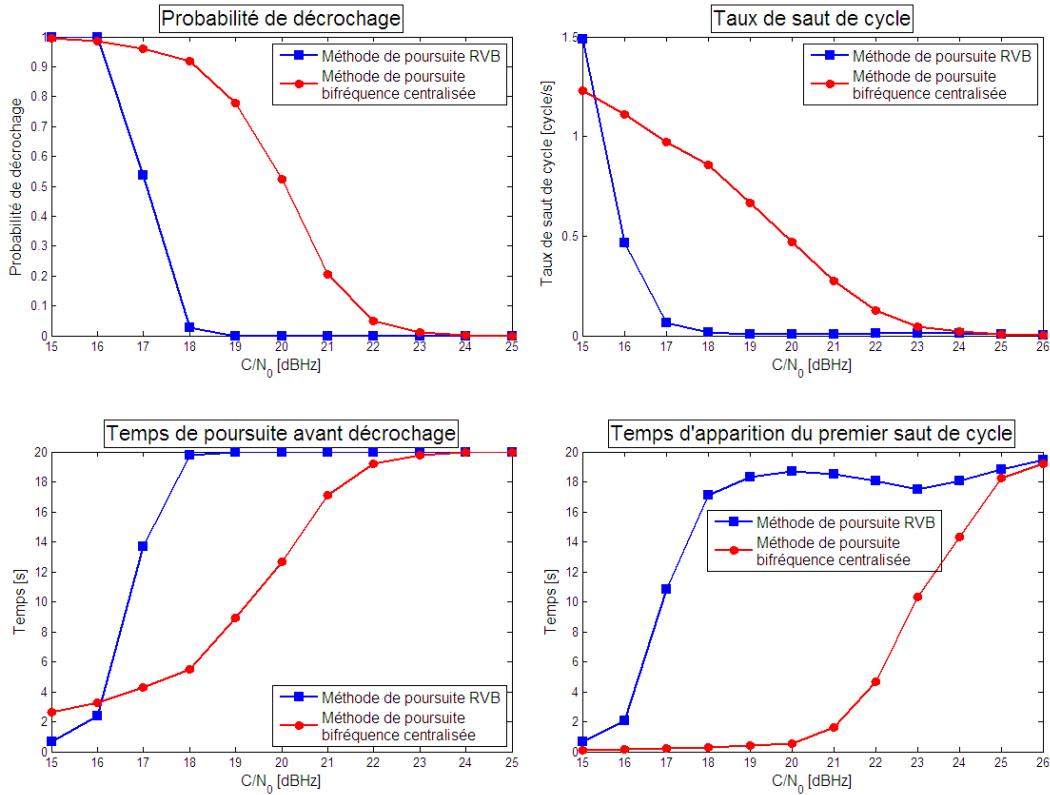


FIGURE 5.11 – Performances de la poursuite RVB et de la poursuite multifréquence centralisée en termes de décrochage et de sauts de cycle pour une poursuite de rampe de 2 Hz

Un autre cas de simulation a été réalisé avec cette fois une rampe de phase de 3 Hz (on garde toujours  $\sigma_\phi^2 = 6.15$ ). Les performances en termes de décrochage et de sauts de cycle sont illustrées à la figure 5.12. Comparées aux performances obtenues lors de la poursuite de rampe de 2 Hz, on observe globalement les mêmes tendances avec pour seule différence le taux de sauts de cycle de la méthode RVB qui, pour des  $C/N_0$  critiques, est cette fois plus faible que celui de la DPPLL multifréquence.

L'ensemble des résultats obtenus montrent donc que la méthode de poursuite RVB est capable d'estimer une dynamique de type rampe avec une bonne robustesse au bruit et aux sauts de cycle (à condition de bien régler la variable  $\sigma_\phi^2$ ).

### Performances lors d'une poursuite d'une dynamique de type rampe plus accélération

Les résultats obtenus lors des précédents tests de performance ont montré que la méthode de poursuite RVB arrive à tenir des dynamiques de type rampe. Nous allons étudier maintenant le cas où la dynamique à poursuivre contient une composante d'accélération. Pour ce cas de simulation, nous allons étudier la poursuite suivante :

- la dynamique à suivre est de 2 Hz+0.5 Hz/s,
- pour la poursuite RVB,  $\sigma_\phi^2 = 6.15$  (valeur déterminée empiriquement).

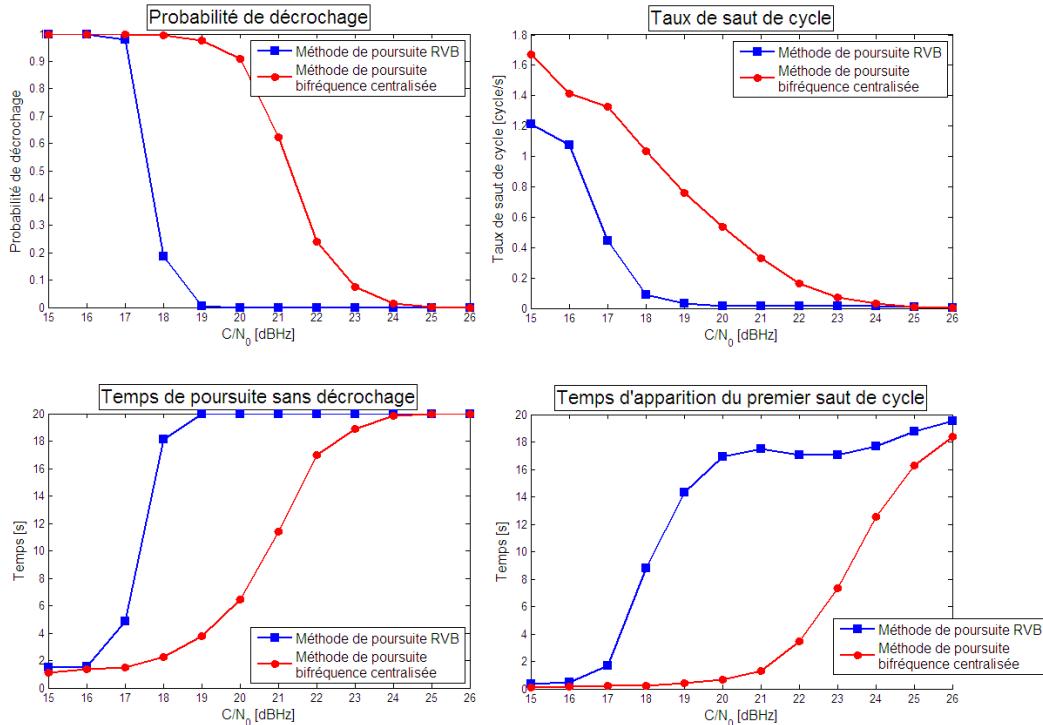


FIGURE 5.12 – Performances de la poursuite RVB et de la poursuite multifréquence centralisée en termes de décrochage et de sauts de cycle pour une poursuite de rampe de 3 Hz

- la bande de boucle de la DPLL multifréquence est de  $B_L = 3$  Hz.

La figure 5.13 illustre les performances des boucles en termes de décrochage en fonction du  $C/N_0$ . Les résultats obtenus nous montrent clairement que la méthode de poursuite RVB n'arrive pas, contrairement à la DPLL multifréquence, à poursuivre la dynamique de phase. En effet, comparé aux deux précédents cas de simulation, les probabilités de décrochage obtenues avec la méthode RVB sont fortement dégradées. Pour s'en convaincre, la figure 5.14 illustre 50 poursuites obtenues via la méthode RVB pour  $C/N_0 = 24$  dBHz. On voit clairement qu'au bout d'un certain temps de poursuite, les estimations de phase n'arrivent plus à suivre la dynamique malgré le fait qu'il n'y ait aucun décrochage prononcé. Ce comportement des trajectoires montre donc la limite de la méthode RVB et plus précisément la limite du modèle (5.18) pour une poursuite de type accélération.

Les résultats obtenus nous confirment que la méthode RVB développée dans ce chapitre n'est pas capable de suivre des dynamiques de phase de type accélération. Pour pouvoir suivre une telle dynamique, il faudrait choisir un champs Markovien d'ordre supérieur au niveau du modèle (5.18) ou rendre  $\sigma_\phi^2$  adaptatif au cours du temps en fonction de la dynamique.

## 5.5 Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre une nouvelle approche de poursuite de phase bifréquence. Pour réaliser cette nouvelle structure, nous avons défini dans un premier temps

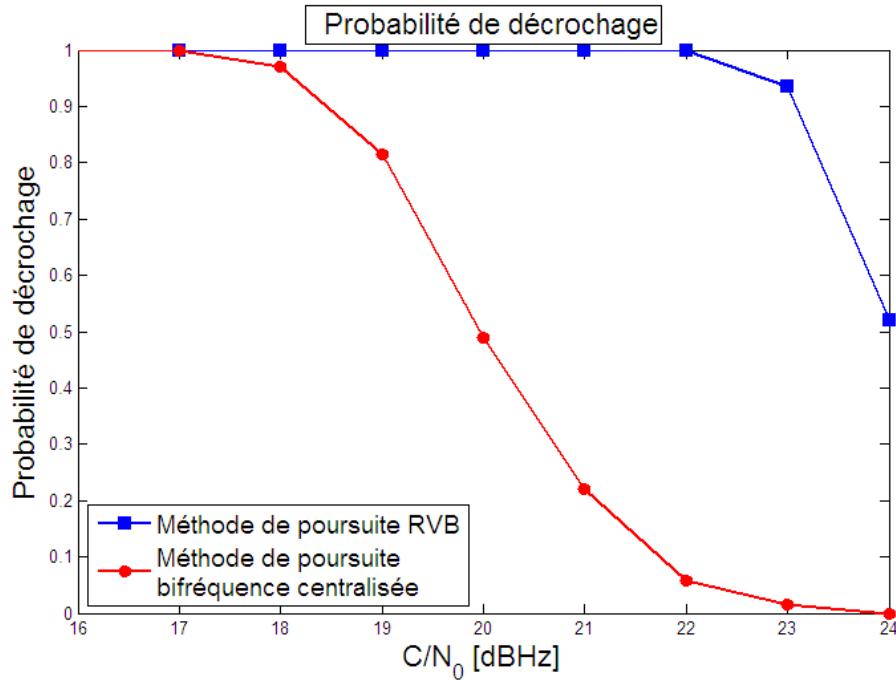


FIGURE 5.13 – Performances de la poursuite RVB et de la poursuite multifréquence centralisée en termes de décrochage pour une dynamique de 3 Hz+1 Hz/s

un nouveau discriminateur de phase bifréquence basé sur un estimateur MML. Ce discriminateur a la particularité d'offrir une plage de linéarité fonction du ratio des porteuses du signal bifréquence qui, dans le cadre des fréquences d'émission GNSS, est plus importante que celle d'un discriminateur *Arctangent*. Par la suite, nous nous sommes intéressés à la poursuite de phase obtenue par une méthode de filtrage Bayésienne basée sur une approche variationnelle. Pour réaliser cette méthode, nous avons supposé un modèle de dynamique de phase que l'on a choisi de type Markovien et d'ordre 1. Ce choix de modèle a la particularité d'imposer une certaine continuité entre deux estimations de phase consécutives afin de réaliser une poursuite de phase développée. Cependant, l'ordre du modèle va imposer une limite en termes de dynamique au-delà de laquelle la méthode ne pourra plus suivre la dynamique de phase.

Les différents tests de performance réalisés sur cette nouvelle méthode de poursuite ont montré que la poursuite de phase RVB offre de bonnes performances sur des dynamiques de type échelon et de type rampe. En effet, sur ce type de dynamique et en comparaison avec la DPLL multifréquence centralisée développée au chapitre 4, la structure RVB a des limites de décrochage beaucoup plus basses en termes de  $C/N_0$  et des taux de sauts de cycle plus faible. Comme attendu, la méthode a montré ces limites sur des dynamiques de type accélération pour lesquelles l'ordre du modèle de la dynamique de phase Markovien n'est plus suffisant. De plus, pour des dynamiques de type échelon et rampe, la méthode d'estimation de phase RVB affiche des précisions d'estimation plus faibles que celles obtenues avec une DPLL multifréquence. Ces points montrent ainsi la nécessité d'affiner les modèles de signal utilisés, notamment au niveau de la modélisation dynamique de phase dont l'ordre pourrait être choisi plus grand afin de pouvoir suivre de fortes dynamiques et affiner les estimations de phase. Il pourrait également être intéressant d'effectuer des travaux supplémentaires au niveau du choix du paramètre  $\sigma_\phi^2$ . Au lieu d'être fixe, ce dernier pourrait être adaptatif en

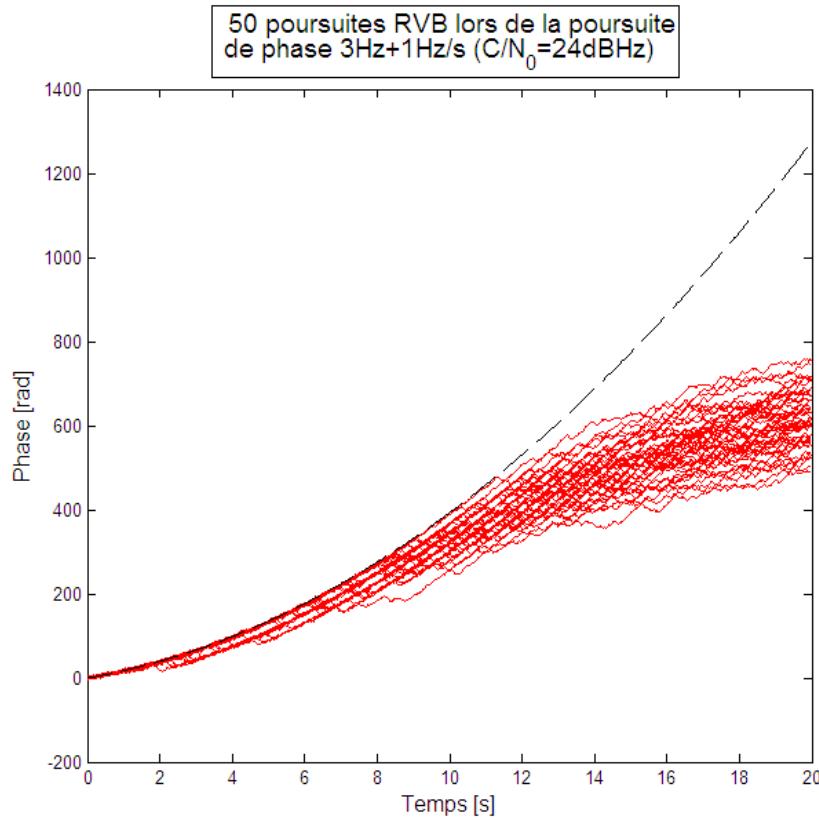


FIGURE 5.14 – Exemples de poursuites réalisées par la méthode RVB pour une dynamique de phase de 3 Hz+1 Hz/s et pour  $C/N_0 = 24$  dBHz

fonction du niveau de bruit et de la dynamique afin d'optimiser la précision de la poursuite. Pour finir, un modèle d'amplitudes plus fin pourrait être mise en place afin d'imposer, par exemple, une corrélation temporelle de ces dernières dans le but de réduire la RMSE-mod des poursuites.

# Conclusion

Les applications GNSS étant de plus en plus exigeantes en termes de précision, l'implémentation des algorithmes de positionnement précis au sein d'un récepteur grand public est devenue une des problématiques fondamentales de la navigation par satellites. En effet, les techniques de positionnement précis nécessitent une information de phase dont l'estimation souffre d'un manque de robustesse en environnement dégradé. Ce problème de robustesse est en grande partie dû au phénomène de sauts de cycle se produisant lors d'une poursuite de phase. En plus de créer des biais dans l'estimation de phase, les sauts de cycle peuvent induire un décrochage de la poursuite si le phénomène est trop important.

## CONCLUSION DES CONTRIBUTIONS

Les travaux de thèse se sont focalisés sur le développement de nouvelles structures de poursuite multifréquence robustes en environnement dégradé. Plus précisément, nous nous sommes particulièrement intéressés au développement de méthodes de déroulage de phase, au sein d'une structure de poursuite, afin de réduire l'apparition du phénomène de sauts de cycle. Pour ce faire, nous avons développé de nouvelles structures de poursuite de phase tirant avantage de la diversité en fréquence offerte par les signaux GNSS. L'ensemble des travaux réalisés dans ce manuscrit ont été présentés dans les cinq chapitres dont le bilan est donné ci-après.

Dans le premier chapitre, une introduction générale de la navigation par satellites a été donnée. Ces travaux bibliographiques ont rappelé le modèle d'un signal de navigation ainsi que les diverses perturbations affectant ce dernier lors de sa propagation. Les diverses opérations de poursuite et de calcul du point réalisées par le récepteur ont également été rappelées.

Dans le second chapitre, nous nous sommes particulièrement intéressés à la poursuite de phase réalisée par des structures de poursuite de type boucle à verrouillage. Plus précisément, nous avons rappelé le dimensionnement, le comportement et l'implémentation numérique de ces systèmes asservis. Le phénomène de saut de cycle a également été détaillé via un rappel de l'origine du phénomène et une étude des structures de DPLL munies d'un système de développement de phase par technique de seuillage.

Dans le troisième chapitre, nous avons opté pour une approche déterministe de la correction du phénomène de sauts de cycle. Nous avons ainsi développé deux nouvelles structures de DPLL (*Digital Phase Locked Loop*) mono-fréquence basées sur un algorithme de développement de phase par prédition et pré-compensation. Plus précisément, ces nouvelles structures se basent sur une structure conventionnelle de DPLL à laquelle est rajouté un

bloc de prédiction de la sortie du discriminateur. Selon la structure considérée, l'étape de prédiction de phase est réalisée soit via l'analyse polynomiale des sorties du discriminateur, soit via l'analyse polynomiale des sorties du filtre. Dans les deux cas, l'étape de prédiction est basée sur l'algorithme des moindres carrés récursifs pondérés. Pour la structure analysant les sorties du filtre de boucle, une étape supplémentaire de conversion fréquence/phase est nécessaire. Lorsque la prédiction de la sortie du discriminateur est réalisée, une étape de pré-compensation est réalisée au niveau de ce dernier afin de réduire la dynamique de phase à estimer. Les diverses simulations numériques réalisées ont montré que les nouvelles structures proposées dans ce chapitre offrent une meilleure robustesse aux dynamiques bruitées qu'une structure conventionnelle ou une structure munie d'un système de développement de phase par seuillage. Les simulations ont également montré une meilleure robustesse de la structure analysant les sorties du filtre de boucle.

Dans le quatrième chapitre, le système de développement de phase basé sur l'analyse des sorties de filtre et introduit dans le chapitre précédent, a été adapté à la poursuite de signaux multifréquence et a conduit à deux nouvelles structures de poursuite. Pour ce faire, nous avons utilisé la diversité en fréquence (i.e., la proportionnalité des fréquences Doppler) offerte par les signaux GNSS multifréquence. Cette approche multifréquentielle a mené à une étape de fusion de données, réalisée de manière centralisée ou décentralisée, au niveau de l'analyse polynomiale des sorties de filtre de boucle. Les simulations numériques ont montré que, en comparaison avec le cas de poursuite monofréquence, les nouvelles structures de poursuite affichent une meilleure robustesse aux dynamiques bruitées. En effet, dans un cas de simulation où les porteuses ont le même niveau de puissance, les poursuites des deux porteuses présentent des probabilités de décrochage et des taux de sauts de cycle amoindris. Cependant, dans le cas où une des porteuses à un niveau de puissance supérieur, il a été vu que les performances de poursuite associées à cette dernière sont polluées par les performances des porteuses de plus faible puissance. Inversement, toujours dans ce cas de simulation, les porteuses avec le plus faible niveau de puissance voient leurs performances nettement améliorées.

Dans le cinquième chapitre, une toute nouvelle méthode de poursuite de phase multifréquence a été développée en optant cette fois, pour une approche non-déterministe de la poursuite de phase. En travaillant en sortie de corrélation et en définissant un modèle de signal supposant une correction parfaite des effets ionosphériques, un nouveau discriminateur de phase bifréquence a été développé dans un premier temps. Puis une structure de poursuite à été mise en place grâce à une technique d'estimation de phase basée sur une approche de filtrage Bayésien variationnel. Pour réaliser ce filtrage, nous avons modélisé la dynamique de phase par un champ aléatoire de Markov du premier ordre. Cette hypothèse nous a permis d'imposer une certaine continuité de l'estimation de phase afin de développer cette dernière. Les simulations numériques réalisées avec cette nouvelle structure de poursuite ont montré, en comparaison avec la structure développée au quatrième chapitre, une meilleure robustesse au bruit (taux de sauts de cycle et probabilité de décrochage plus bas) pour des dynamiques de type échelon et rampe. Les tests réalisés sur une dynamique de type accélération ont cependant conforté les limites de la structure liées au choix de l'ordre du modèle Markovien.

## PERSPECTIVES

Au vu des différents résultats obtenus au cours de la thèse, plusieurs perspectives peuvent être envisagées.

***Mise en place d'un système de dimensionnement adaptatif***

Que ce soit en mode de poursuite monofréquence ou multifréquence, le système de développement de phase pour DPLL a été dimensionné de manière expérimentale relativement au facteur d'oubli  $\gamma$  et au gain correctif  $K$ . Ces diverses grandeurs pourraient être définies de manière adaptative en fonction des conditions de poursuite comme par exemple le niveau de bruit ou le niveau de dynamique.

***Etablir un système de pondération entre porteuses***

Les simulations numériques effectuées avec la DPLL munie d'un système de développement de phase multifréquence ont montré un phénomène de pollution entre porteuses lorsque celles-ci n'ont pas le même niveau de puissance. Un système de pondération pourrait donc être mis en place afin que, lorsque la différence de puissance entre les porteuses est significative, la poursuite s'effectue en mode multifréquence pour les porteuses les plus dégradées et en mode monofréquence pour les porteuses les plus fortes.

***Affiner les modèles du signal de la poursuite RVB***

Afin de réaliser une poursuite de phase RVB, un modèle de phase Markovien a été supposé et choisi d'ordre un. Comme attendu, les simulations numériques ont montré que ce choix ne permet pas à la structure de suivre une dynamique de phase de type accélération. Afin d'être capable de suivre une telle dynamique (ou une dynamique plus importante), l'ordre du modèle de phase Markovien doit être pris d'ordre supérieur. Les futures études devront donc mettre à jour les calculs d'estimation RVB afin de prendre en compte un modèle de dynamique d'ordre supérieur. Concernant les amplitudes en sortie de corrélation, il serait également possible d'ajouter un modèle de corrélation temporelle des amplitudes afin d'affiner la description du signal et éventuellement de réduire la RMSE des poursuites.

***Prise en compte des effets ionosphériques***

L'un des aspects primordiaux de la poursuite de phase multifréquence est la prise en compte des effets ionosphériques impactant les diverses phases porteuses. Toutes les structures de poursuite présentées dans ce manuscrit ont été développées en supposant, en première approximation, une parfaite correction des déphasages ionosphériques. Les futurs travaux devront donc se focaliser sur la modélisation de ces effets afin que les structures (et particulièrement la structure de poursuite RVB) puissent réaliser une poursuite de phase multifréquence en conditions réelles.



# Bibliographie

- [1] S. Roche, S. Bidon, O. Besson, M. Monnerat, L. Ries, and P. Thevenon, "PLL Unwrapping Structures using Polynomial Prediction Algorithm for Noisy Carrier Phase Tracking," in *Proceedings of the 25th International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation*, (Nashville), September 2012.
- [2] S. Roche, S. Bidon, M. Monnerat, L. Ries, and P. Thevenon, "Phase Locked Loop with Multifrequency Phase Unwrapping Structure," in *European Navigation Conference*, (Vienna), April 2013.
- [3] S. Bidon and S. Roche, "Variational Bayes Phase Tracking with dual-frequency measurements," in *IEEE Transactions on Signal Processing (draft en prévision de soumission)*.
- [4] I. Getting, "Perspective/Navigation-The Global Positioning System," *IEEE Spectrum*, vol. 30, no. 12, pp. 36–38, 1993.
- [5] B. Parkinson and J. Spilker, *Global Positioning System : Theory and Applications. Volume 1*. Progress in Astronautics and Aeronautics, 1996.
- [6] "U.S. government GPS website." <http://www.gps.gov/>.
- [7] P. Kovàr, P. Kacmarik, and F. Vejrazka, "Interoperable GPS, GLONASS and Galileo Software Receiver," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 26, no. 4, pp. 24–30, 2011.
- [8] T. Kos, M. Grgic, and L. Mandic, "GPS Modernisation and GNSS Development," in *47th International Symposium ELMAR*, 2005.
- [9] M. Merino, A. Alarcon, I. Villares, and E. Monseco, "An integrated GNSS concept, Galileo & GPS, benefits in terms of Accuracy, Integrity, Availability and Continuity," in *Proceedings of the 14th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation*, (Salt Lake City), September 2001.
- [10] J. Peng, "A Survey of Location Based Service for Galileo System," in *International Symposium on Computer Science and Computational Technology, 2008*, 2008.
- [11] "ESA website." <http://www.esa.int/>.
- [12] G. Hein, "GNSS Interoperability : Achieving a Global System of Systems or "Does everything Have to be the Same"," *Inside GNSS*, 2006.
- [13] E. Kaplan and J. Hegarty, *Understanding GPS : Principles and Applications*. Artech house, 2005.
- [14] K. Muthuraman, S. Shanmugam, and G. Lachapelle, "Evaluation of Data/Pilot Tracking Algorithms for GPS L2C Signals Using Software Receiver," in *Proc. of the 20th*

- International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation*, (Fort Worth), September 2007.
- [15] J. Proakis and M. Salehi, *Digital Communications*. McGraw-Hill, 2008.
  - [16] P. Dafesh and A. Parker, "Impact of Transmitter and Receiver Filtering on the Code-tracking Performance of GPS Modernization Signals," in *Proc. of the 2000 National Technical Meeting of The Institute of Navigation*, (Anaheim), January 2000.
  - [17] G. Gao, J. Spilker, T. Walter, P. Enge, and T. Pratt, "Code Generation Scheme and Property Analysis of Broadcast Galileo L1 and E6 Signals," in *Proc. of the 19th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation*, (Fort Worth), September 2006.
  - [18] S. Wallner, J. Avila-Rodriguez, J. Won, G. Hein, and J. Issler, "Revised PRN Code Structures for Galileo E1 OS," in *Proceedings of the 21st International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation*, (Savannah), September 2008.
  - [19] U. Engel, "A Theoretical Performance Analysis of the Modernized GPS Signals," in *Position, Location and Navigation Symposium, IEEE/ION*, pp. 1067–1078, 2008.
  - [20] J. Betz, "Binary Offset Carrier Modulations for Radionavigation," *Navigation*, vol. 48, no. 4, pp. 227–246, 2001.
  - [21] A. Pratt and J. Owen, "BOC Modulation Waveforms," in *Proceedings of the 16th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation*, (Portland), September 2003.
  - [22] R. Langley, "The Mathematics of GPS," *GPS World*, 1991.
  - [23] D. Allan and T. Peppler, "Ensemble Time and Frequency Stability of GPS Satellite Clocks," in *Proceedings of the 42nd Annual Frequency Control Symposium*, pp. 465–471, 1988.
  - [24] N. Ashby, "Relativity in the Global Positioning System," *Living Reviews in Relativity*, vol. 6, no. 1, 2003.
  - [25] M. Braasch and A. V. Dierendonck, "GPS Receiver Architectures and Measurements," *Proceedings of the IEEE*, vol. 87, no. 1, pp. 48–64, 1999.
  - [26] S. Fisher and K. Ghassemi, "GPS IIF—the Next Generation," *Proceedings of the IEEE*, vol. 87, no. 1, pp. 24–47, 1999.
  - [27] ESA, *Galileo Open Service, Signal In Space Interface Control Document*, 2010.
  - [28] J. Klobuchar, "Ionospheric Time-Delay Algorithm for Single-Frequency GPS Users," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-23, no. 3, pp. 325–331, 1987.
  - [29] S. Radicella and B. Nava, "NeQuick model : Origin and Evolution," in *9th International Symposium on Antennas Propagation and EM Theory*, 2010.
  - [30] A. Pósfay, "Tropospheric Zenith Wet and Hydrostatic Delay Models for the ESA Galileo Testbed : Models Based on Meteorological Measurements and a Blind Model," in *Proc. of the 16th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation*, (Portland), September 2003.
  - [31] B. Hannah, *Modelling and Simulations of GPS Multipath Propagation*. PhD thesis, Queensland University of Technology, 2001.

- [32] R. Harris and E. Lightsey, "Precise Observation of BOC Modulated Signals in the Presence of Noise and Specular Multipath," in *IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium*, 2008.
- [33] F. Nunes, F. Sousa, and J. Leitao, "BOC/MBOC Multicorrelator Receiver with Least-Squares Multipath Mitigation Technique," in *Proc. of the 21st International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation*, (Savannah), September 2008.
- [34] J. Ray, *Mitigation of GPS Code and Carrier Phase Multipath Effects Using a Multi-Antenna System*. PhD thesis, University of Calgary, 2000.
- [35] M. Chuang and K. Feng, "Adaptive GPS Acquisition Technique in Weak Signal Environment," in *IEEE 63rd Vehicular Technology Conference*, 2006.
- [36] D. Borio, L. Camoriano, and L. L. Presti, "Impact of GPS Acquisition Strategy on Decision Probabilities," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 44, no. 3, pp. 996–1011, 2008.
- [37] G. Seco-Granados, J. Lopez-Salcedo, D. Jimenez-Banos, and G. Lopez-Risueno, "Challenges in Indoor Global Navigation Satellite Systems : Unveiling its core features in signal processing," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 29, no. 2, pp. 108–131, 2012.
- [38] N. Viandier, *Modélisation et utilisation des erreurs de pseudodistances GNSS en environnement transport pour l'amélioration des performances de localisation*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lille, 2012.
- [39] V. Heiries, *Optimisation d'une chaîne de réception pour signaux de radionavigation par satellite à Porteuse à Double Décalage (BOC)*. PhD thesis, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, 2007.
- [40] A. Kamel, "Design and Testing of an Intelligent GPS Tracking Loop for Noise Reduction and High Dynamics Applications," in *Proceedings of the 23rd International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation*, (Portland), September 2010.
- [41] S. Bancroft, "An Algebraic Solution of the GPS Equations," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-21, no. 1, pp. 56–59, 1985.
- [42] H. Yuheng, R. Martin, and A. Bilgic, "Approximate Iterative Least Squares Algorithms for GPS Positioning," in *IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology (ISSPIT)*, 2010.
- [43] S. Carcanague, *Low-cost GPS/GLONASS Precise Positioning in Constrained Environment*. PhD thesis, Laboratoire de Traitement du Signal pour les Télécommunications Aéronautiques, 2013.
- [44] B. Witchayangkoon, *Elements of GPS Precise Point Positioning*. PhD thesis, The University of Maine, 1997.
- [45] M. Petovello, C. O'Driscoll, and G. Lachapelle, "Carrier Phase Tracking of Weak Signals Using Different Receiver Architectures," in *Proceedings of the 2008 National Technical Meeting of The Institute of Navigation*, (San Diego), January 2008.
- [46] S. Gupta, "Phase-locked loops," *Proceedings of the IEEE*, vol. 63, no. 2, pp. 291–306, 1975.
- [47] M. L. Psiaki and H. Jung, "Extended Kalman Filter Methods for Tracking Weak GPS Signals," in *Proceedings of the 15th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation*, (Portland), September 2002.

- [48] G. Yaoa, W. Wenqi, and H. Xiaofeng, "High Dynamic Carrier Phase Tracking Based on Adaptive Kalman Filtering," in *Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, 2011.
- [49] M. Lashley and D. Bevly, "What are the vector tracking loops, and what are their benefits and drawbacks?," *INSIDE GNSS*, May/June 2009.
- [50] P. Henkel, K. Giger, and C. Gunther, "Multifrequency, Multisatellite Vector Phase-Locked Loop for Robust Carrier Tracking," *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, vol. 3, no. 4, pp. 674–681, 2009.
- [51] M. Petovello and G. Lachapelle, "Comparison of Vector-Based Software Receiver Implementations with Application to Ultra-Tight GPS/INS Integration," in *Proceedings of the 19th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation*, (Fort Worth), September 2006.
- [52] A. Soloviev, S. Gunawardena, and F. van Graas, "Deeply Integrated GPS/Low-Cost IMU for Low CNR Signal Processing : Flight Test Results and Real Time Implementation," in *Proceedings of the 17th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation*, (Long Beach), September 2004.
- [53] E. Ohlmeyer, "Analysis of an Ultra-Tightly Coupled GPS/INS System in Jamming," in *ION Annual Meeting/IEEE PLANS*, (San Diego), 2006.
- [54] J. Thomas, "An Analysis of Digital Phase-Locked Loops," tech. rep., NASA, 1989.
- [55] J. Curran, *Weak Signal Digital GNSS Tracking Algorithms*. PhD thesis, University of Ireland, 2010.
- [56] P. Misra and P. Enge, *Global Positioning System : Signals, Measurements, and Performance*. Ganga-Jamuna Press, 2006.
- [57] B. Sklar, *Digital Communications, Fundamentals and Applications*. Prentice Hall, 1988.
- [58] H. Osborne, "Stability Analysis of an Nth Power Digital Phase-Locked Loop—Part I : First-Order DPLL," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 28, no. 8, pp. 1343–1354, 1980.
- [59] H. Osborne, "Stability Analysis of an Nth Power Digital Phase-Locked Loop—Part II : Second- and Third-Order DPLL's," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 28, no. 8, pp. 1355–1364, 1980.
- [60] G. Bernstein, M. Liberman, and A. Lichtenberg, "Nonlinear Dynamics of a Digital Phase Locked Loop," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 37, no. 10, pp. 1062–1070, 1989.
- [61] S. Stephens and J. Thomas, "Controlled-Root Formulation for Digital Phase-Locked Loops," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 19, no. 6, 1995.
- [62] W. Levine, *The Control Handbook*. IEEE Press, 1996.
- [63] M. Bellanger, *Traitement numérique du signal : Théorie et Pratique*. Dunod, 2006.
- [64] B. Porat, *A course in Digital signal Processsing*. John Wiley, 1997.
- [65] V. Madisetti and D. Williams, *The Digital Signal Processing Handbook*. IEEE Press, 1998.
- [66] M. Simon and A. Mileant, "Digital Filters for Digital Phase-Locked Loops," tech. rep., TDA Progress Report, 1985.

- [67] W. Lindsey and C. Chie, "A Survey of Digital Phase-Locked Loops," *Proceedings of the IEEE*, vol. 69, no. 4, pp. 410–431, 1981.
- [68] O. Julien, "Carrier-Phase Tracking of Future Data/Pilot Signals," in *Proceedings of the 18th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation*, (Long Beach), September 2005.
- [69] W. Lindsey and C. Chie, "Acquisition Behavior of a First-Order Digital Phase-Locked Loop," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 26, no. 9, pp. 1364–1370, 1978.
- [70] F. C. W. Lindsey, "Some Analytical and Experimental Phase-Locked Loop Results for Low Signal-to-Noise Ratios," *Proceedings of the IEEE*, vol. 54, no. 9, pp. 1152–1166, 1966.
- [71] S. Brunt, M. Darnell, and M. Grayson, "Cycle-slipping probability of first-order phase-locked loop using transient analysis," *Communications, IEE Proceedings*, vol. 144, no. 5, pp. 357–360, 1997.
- [72] D. Ryter and H. Meyr, "Theory of phase tracking systems of arbitrary order : Statistics of cycle slips and probability distribution of the state vector," *IEEE Transactions on Information Theory*, 1978.
- [73] G. Ascheid and H. Meyr, "Cycle Slips in Phase-Locked Loops : A Tutorial Survey," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 30, no. 10, pp. 2228–2241, 1982.
- [74] R. Tausworthe, "Cycle Slipping in Phase-Locked Loops," *IEEE Transactions on Communication Technology*, vol. 15, no. 3, pp. 417–421, 1967.
- [75] R. Tausworthe, "Simplified Formula for Mean Cycle-Slip Time of Phased-Locked Loops With Steady-State Phase Error," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 20, no. 3, pp. 331–337, 1972.
- [76] A. Viterbi, "Phase-Locked Loop Dynamics in the Presence of Noise by Fokker-Planck Techniques," *Proceedings of the IEEE*, vol. 51, no. 12, pp. 1737–1753, 1963.
- [77] J. Estrada, M. Servin, and J. Quiroga, "Noise robust linear dynamic system for phase unwrapping and smoothing," *Optique Express*, 2011.
- [78] P. Roncagliolo and J. Garcia, "High Dynamics and False Lock Resistant GNSS Carrier Tracking Loops," in *Proceedings of the 20th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation*, (Fort Worth), September 2007.
- [79] G. Eynard, *Techniques de synchronisation pour les communications acoustiques sous-marines*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieurs des Télécommunications de Bretagne, 2008.
- [80] N. Ziedan, "Multi-Frequency Combined Processing for Direct and Multipath Signals Tracking Based on Particle Filtering," in *Proceedings of the 24th International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation*, (Portland), September 2011.
- [81] T. Anderson, *Plasma Antennas*. Artech House, 2011.
- [82] "IEEE Standard Definitions of Terms for Radio Wave Propagation," *IEEE Std 211-1990*, 1991.
- [83] R. Moreno and N. Suard, "Ionospheric Delay Using only L1 : Validation and Application to GPS Receiver Calibration and to Inter-Frequency Biases Estimation," in *Proceedings of the 1999 National Technical Meeting of The Institute of Navigation*, (San Diego), January 1999.

- [84] R. Filjar, T. Kos, and I. Markezic, "GPS Ionospheric Delay During Extreme Space Weather Conditions in Croatia : A 2003 Halloween Event Case Study," in *19th International Conference on Applied Electromagnetics and Communications, 2007. ICECom 2007.*, 2007.
- [85] J. Christie, B. Parkinson, and P. Enge, "The Effects of the Ionosphere and C/A Frequency on GPS Signal Shape : Considerations for GNSS-2," in *Proceedings of the 9th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation*, (Kansas City), September 1996.
- [86] Y. Ahn, *Analysis of NGS CORS Network for GPS RTK Performance Using External NOAA Tropospheric Corrections Integrated with a Multiple Reference Station Approach*. PhD thesis, University of Calgary, 2005.
- [87] K. Cove, *Improvements in GPS Tropospheric Delay Estimation with Numerical Weather Prediction*. PhD thesis, University of New Brunswick, 2005.
- [88] M. Sahmoudi, R. Landry, and F. Gagnon, "Robust Mitigation of Multipath and Ionospheric Delays in Multi-GNSS Real-Time Kinematic (RTK) Receivers," in *IEEE/SP 15th Workshop on Statistical Signal Processing, 2009.*, 2009.
- [89] J. Vukovic and T. Kos, "Ionospheric Time-Delay Models for GNSS," in *ELMAR, 2011 Proceedings*, pp. 191–194, 2011.
- [90] G. Liu, *Ionosphere Weighted Global Positioning System Carrier Phase Ambiguity Resolution*. PhD thesis, University of Calgary, 2001.
- [91] M. Feng, *Detection of High-Latitude Ionospheric Irregularities from GPS Radio Occultation*. PhD thesis, University of Calgary, 2010.
- [92] C. Gernot, *Development of Combined GPS L1/L2C Acquisition and Tracking Methods for Weak Signals Environments*. PhD thesis, University of Calgary, 2009.
- [93] S. Qaisar, "Performance Analysis of Doppler Aided Tracking Loops in Modernized GPS Receivers," in *Proceedings of the 22nd International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation*, (Savannah), September 2009.
- [94] B. Slocumb and J. Kitchen, "A Polynomial Phase Parameter Estimation-Phase Unwrapping Algorithm," in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1994.
- [95] S. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing. Estimation Theory*. Prentice Hall, 1993.
- [96] A. Vo, S. Oraintara, and T. Nguyen, "Statistical image modeling using distribution of relative phase in the complex wavelet domain," in *Proc. European Signal Processing Conf.*, (Lausanne, Switzerland), Aug. 2008.
- [97] J. M. N. Leitão and M. A. T. Figueiredo, "Absolute phase image reconstruction : a stochastic nonlinear filtering approach," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 7, pp. 868–882, June 1998.
- [98] J.-F. Giovannelli, J. Idier, R. Boubertakh, and A. Herment, "Unsupervised frequency tracking beyond the Nyquist frequency using Markov chains," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, pp. 2905–2914, Dec. 2012.
- [99] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Filtering*. Prentice-Hall, 1979.
- [100] V. Smídl and A. Quinn, *The Variational Bayes Method in Signal Processing*. Springer, 2005.

- [101] V. Smídl and A. Quinn, “Variational Bayes filtering,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, pp. 5020–5030, Oct. 2008.
- [102] J. M. N. Leitão and J. M. F. Moura, “Acquisition in phase demodulation : application to ranging in radar/sonar systems,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 31, pp. 581–599, Apr. 1995.
- [103] F. D. Nunes and J. M. N. Leitão, “A nonlinear filtering approach to estimation and detection in mobile communications,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 16, pp. 1649–1659, Dec. 1998.
- [104] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Pub., 1965.



# Acronymes

<b>BOC</b>	Binary Offset Carrier
<b>BPSK</b>	Binary Phase Shift Keying
<b>CE</b>	Communauté Européenne
<b>CDMA</b>	Code Division Multiple Access
<b>C/A</b>	Coarse Acquisition
<b>CS</b>	Commercial Service
<b>DoD</b>	Department of Defense
<b>DPLL</b>	Digital Phase Locked Loop
<b>ESA</b>	European Space Agency
<b>GCC</b>	Galileo Control Center
<b>GDOP</b>	Geometry Dilution Of Precision
<b>GLONASS</b>	GLObal NAVigation Satellite System
<b>GNSS</b>	Global Navigation Satellite System
<b>GPS</b>	Global Positioning System
<b>IMU</b>	Inertial Measurement Unit
<b>LOS</b>	Line Of Sight
<b>MML</b>	Marginal Maximum Likelihood
<b>NAVSTAR</b>	NAVigation System by Timing and Ranging
<b>OS</b>	Open Service
<b>P</b>	Precise
<b>PLL</b>	Phase Locked Loop
<b>PRN</b>	Pseudo Random Noise
<b>PPS</b>	Precise Positioning Service
<b>PRS</b>	Public Regulated Service
<b>RVB</b>	Restricted Variational Bayes
<b>SAR</b>	Search And Rescue
<b>SOL</b>	Safety Of Life
<b>SPS</b>	Standard Positioning Service
<b>TCC</b>	Telemetry, Tracking and Command
<b>TEC</b>	Total Electron Content
<b>VB</b>	Variational Bayes
<b>WRLS</b>	Weighted Recursive Least Squares



# Notations

## Grandeurs physiques

$c$	vitesse de la lumière dans le vide
$\lambda$	longueur d'onde
$\omega$	pulsation
$k$	nombre d'onde
$k_B$	constante de Boltzmann

## Notations générales

$x_i, y_i, z_i$	coordonnées du satellite $i$
$X, Y, Z$	coordonnées du récepteur
$d$	distance géométrique entre le récepteur et le satellite ( $d^i$ pour la distance associée au satellite $i$ )
$v_{rad}$	vitesse radiale du satellite par rapport à l'utilisateur
$s_e(t)$	signal à l'émission ( $s_e^i(t)$ pour le signal à l'émission du satellite $i$ )
$s_r(t)$	signal à la réception ( $s_r^i(t)$ signal à la réception du satellite $i$ )
$P_e$	puissance du signal à l'émission ( $P_e^i$ pour la puissance à l'émission du satellite $i$ )
$P$	puissance du signal à la réception ( $P^i$ pour la puissance à la réception associée au satellite $i$ )
$f_p$	fréquence porteuse ( $f_p^i$ pour la fréquence porteuse associée au satellite $i$ )
$f_d$	fréquence Doppler ( $f_d^i$ pour la fréquence Doppler associée au satellite $i$ )
$D(t)$	valeur du bit de navigation
$C(t)$	valeur du chip du code pseudo-aléatoire à l'instant $t$
$R_c$	rythme chip du code pseudo-aléatoire
$T_c$	durée d'un temps chip du code pseudo-aléatoire
$F_e$	fréquence d'échantillonnage du signal à la réception
$T_e$	temps d'échantillonnage du signal à la réception
$\Gamma_{i,j}$	fonction de corrélation du code pseudo-aléatoire $i$ avec le code $j$
$\Gamma_{s_i}^{s_j}$	fonction de corrélation du signal $s_i$ avec le signal $s_j$
$T_{acq}$	durée du temps d'acquisition
$T_{corr}$	durée du temps de corrélation
$\rho$	pseudo-distance ( $\rho^i$ pour la pseudo-distance associée au satellite $i$ )
$\tau$	décalage temporel du signal à la réception ( $\tau^i$ pour le décalage temporel du signal associé au satellite $i$ )
$\hat{\phi}$	observation de phase

$\delta hr$	( $\hat{\phi}^i$ pour l'observation de phase associée au satellite $i$ ) biais d'horloge du récepteur
$\delta h_s^i$	biais d'horloge du satellite $i$
$\Delta I_\phi, \Delta I_c$	retard ionosphérique sur la phase et le code ( $\Delta I_\phi^i$ et $\Delta I_c^i$ pour les retards associés au satellite $i$ )
$\Delta T_\phi, \Delta T_c$	retard troposphérique sur la phase et le code ( $\Delta T_\phi^i$ et $\Delta T_c^i$ pour les retards associés au satellite $i$ )

### Notations pour l'étude des boucles à verrouillage de phase

$\phi_r$	la phase reçue en entrée de la PLL
$\phi$	la phase d'intérêt
$\hat{\phi}$	l'estimation de phase en sortie de PLL
$g(\phi_r - \hat{\phi})$	le produit de corrélation entre le signal reçu et la réplique locale
$\delta\phi$	sortie du discriminateur
$\delta\phi_{UW}$	sortie développée du discriminateur
$\hat{\delta\phi}_{UW}[k k-1]$	prédition de la sortie développée du discriminateur à l'instant $k$
$\dot{\phi}$	sortie du filtre de boucle
$\dot{\phi}[k k-1]$	prédition de la sortie du filtre de boucle à l'instant $k$
$r(\hat{\phi})$	réplique locale créée à partir de l'estimation de phase
$I_p$	partie réelle du produit de corrélation
$Q_p$	partie imaginaire du produit de corrélation
$\mathcal{D}(.)$	fonction du discriminateur de phase
$H(p), H(z)$	fonctions de transfert en boucle fermée analogique et numérique de la PLL
$N(p), N(z)$	fonctions de transfert analogique et numérique de l'intégrateur
$F(p), F(z)$	fonctions de transfert analogique et numérique du filtre de boucle
$K_p$	$p$ -ième coefficient du filtre de boucle
$B_L$	bande de boucle de la PLL
$e_\infty^{analog}$	erreur en régime permanent pour une PLL analogique
$e_\infty^{num}$	erreur en régime permanent pour une PLL numérique
$\gamma$	facteur d'oubli de l'algorithme WRLS
$M$	ordre du modèle d'analyse polynomial
$N_{init}$	nombre d'observations initial de l'algorithme WRLS
$a_1, \dots, a_M$	coefficients polynomiaux du modèle d'analyse de la sortie du discriminateur
$b_1, \dots, b_M$	coefficients polynomiaux du modèle d'analyse de la sortie du filtre de boucle

### Notations pour un signal multifréquence

$N_P$	nombre de fréquences porteuses
$\lambda_i$	longueur d'onde de la $i$ -ème fréquence porteuse
$f_{p,i}$	$i$ -ème fréquence porteuse du signal multifréquence
$f_{d,i}$	fréquence Doppler associée à la $i$ -ème fréquence porteuse
$f_{ref}$	fréquence porteuse de référence
$r_i$	ratio de la $i$ -ème fréquence porteuse sur la fréquence de référence
$\hat{\phi}_i$	observation de phase associée à la $i$ -ème fréquence porteuse

---

$\dot{\phi}_i$	estimation de fréquence associée à la $i$ -ème fréquence porteuse
$\epsilon_{\phi,i}$	bruit d'estimation de phase associé à la $i$ -ème fréquence porteuse
$\Delta N_i$	erreur d'estimation de phase de la $i$ -ème fréquence porteuse due aux sauts de cycle
$\Delta \phi_i$	observation de phase théorique de la $i$ -ème fréquence porteuse liée à la géométrie utilisateur/satellite
$\Delta f_i^{iono}$	dérive de fréquence de la $i$ -ème fréquence porteuse associée aux fluctuations de la ionosphère
$\Delta I_{\phi,i}$	erreur de phase ionosphérique associée à la $i$ -ème fréquence porteuse
$\Delta T_{\phi,i}$	erreur de phase troposphérique associée à la $i$ -ème fréquence porteuse
$b_{1,i}, \dots, b_{M,i}$	coefficients polynomiaux du modèle d'analyse de la sortie du filtre de boucle associée à la $i$ -ème fréquence porteuse
$\mathbf{b}_{ref}$	vecteur des coefficients polynomiaux associé à la fréquence porteuse de référence
$\alpha_i$	amplitude de la sortie de corrélation associée à la $i$ -ème fréquence porteuse
$\rho$	facteur de corrélation entre les amplitudes
$\hat{\phi}_k^{mml}$	estimateur de phase MML à l'instant $k$
$\hat{\phi}_k^{rvb}$	estimateur de phase RVB à l'instant $k$
$\sigma_\phi^2$	variance du modèle Markovien gaussien de la dynamique de phase



# Détail des calculs de l'étape de conversion de la prédiction de sortie du filtre de boucle en prédiction de sortie du discriminateur

Le développement de phase par analyse de la sortie du filtre de boucle nécessite une étape de conversion de la prédiction de fréquence en prédiction de phase. Cette conversion est réalisée via la fonction de transfert numérique de la DPLL ainsi que l'estimation des coefficients polynomiaux du modèle d'analyse de la sortie du filtre de boucle. Cette annexe donne les différentes étapes de calcul menant à l'expression de la sortie du discriminateur en fonction de coefficients polynomiaux estimés pour une DPLL d'ordre 2 munie d'un discriminateur de type *Arctangent*.

## **A.1 Estimation de la dynamique de phase grâce à la connaissance des coefficients polynomiaux du modèle d'analyse de la sortie du filtre de boucle**

On rappelle que pour prédire la sortie du filtre de boucle, on étudie les observations de fréquence grâce au modèle d'analyse polynomial (3.29). Le modèle d'analyse étant choisi d'ordre  $M = 1$ , on modélise la sortie du filtre par :

$$\dot{\phi}[k] = b_0 + b_1 k. \quad (\text{A.1})$$

Les coefficients  $b_0$  et  $b_1$  se référant respectivement à des dynamiques de fréquence de type échelon et rampe (i.e., à des dynamique de phase de type rampe et accélération), il est possible d'estimer la dynamique de phase en entrée de la DPLL grâce à ces coefficients via :

$$\hat{\phi}_r[k] = b_0 k + \frac{b_1}{2} k^2 + b_{-1}, \quad (\text{A.2})$$

avec  $b_{-1}$  la constante d'intégration inconnue qui ne permet pas d'estimer complètement la dynamique de phase via l'analyse de la sortie du filtre de boucle. Cependant, la constante  $b_{-1}$  se référant à une dynamique de type échelon, l'incapacité à pouvoir l'estimer ne représente pas un problème critique car quel que soit l'ordre de la DPLL, une dynamique de type échelon en entrée de boucle ne crée pas d'erreur en régime permanent. Ainsi, au niveau du discriminateur, la composante  $b_{-1}$  n'aura pas de contribution lorsque le régime permanent

est établi. Il est donc possible de supposer cette composante nulle lors de la reconstruction de la dynamique de phase sans entraîner une erreur de prédiction lorsque le régime permanent est établi.

## A.2 Modélisation mathématique de l'étape de corrélation

La dynamique de phase en entrée de la DPLL ayant été estimée grâce à l'estimation des coefficients polynomiaux  $b_0$  et  $b_1$ , il est possible d'exprimer la dynamique de phase en sortie du discriminateur grâce à un modèle linéaire de la boucle. Pour pouvoir se placer dans ce cadre d'étude et exprimer précisément la dynamique en sortie du discriminateur, l'étape de corrélation entre le signal reçu et la réplique locale doit être modélisée comme l'illustre la figure A.1.

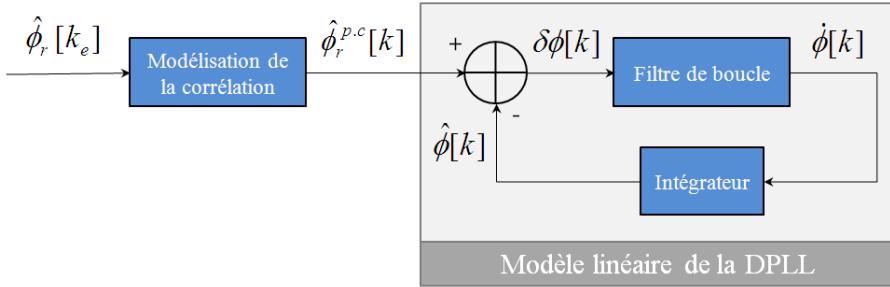


FIGURE A.1 – Modélisation de l'étape de corrélation pour une étude linéaire de la DPLL

Soit  $G[k] = g(\hat{\phi}_r - \hat{\phi})[k]$  la sortie de corrélation entre le signal d'entrée (dont la phase correspond à la phase estimée via les coefficients polynomiaux  $b_0$  et  $b_1$ ) et la réplique locale générée de telle sorte que sa phase  $\hat{\phi}$  soit constante sur le temps de corrélation  $T_{corr}$ . En supposant que la synchronisation temporelle est parfaitement établie (i.e., on ne tiendra pas compte de la présence des codes pseudo-aléatoires lors de l'étape de corrélation), on peut écrire (en prenant la notation abusive  $k = kT_{corr}$ )

$$G[k] = \sum_{l=1}^{N_{corr}} e^{i\hat{\phi}_r[k - \frac{l}{F_e}]} \cdot e^{-i\hat{\phi}[k]} \quad (\text{A.3})$$

avec  $F_e$  la fréquence d'échantillonnage du signal à la réception,  $N_{corr} = T_{corr}F_e$ . Grâce à l'expression de la dynamique de phase (A.2) et en prenant  $b_{-1} = 0$ , on a

$$\hat{\phi}_r \left[ k - \frac{l}{F_e} \right] = b_0 \left( k - \frac{l}{F_e} \right) + \frac{b_1}{2} \left( k - \frac{l}{F_e} \right)^2, \quad (\text{A.4})$$

$$= \hat{\phi}_r[k] + \left( \frac{b_1}{2} \frac{l^2}{F_e^2} - (b_0 + b_1 k) \frac{l}{F_e} \right), \quad (\text{A.5})$$

et donc par conséquent

$$G[k] = e^{i(\hat{\phi}_r[k] - \hat{\phi}[k])} \sum_{l=1}^{N_{corr}} e^{i \left( \frac{b_1}{2} \frac{l^2}{F_e^2} - (b_0 + b_1 k) \frac{l}{F_e} \right)}. \quad (\text{A.6})$$

La boucle étudiée étant implémentée avec un discriminateur *Arctangent*, la sortie du discriminateur  $\delta\phi$  est donnée par

$$\delta\phi[k] = \arctan\left(\frac{\Im(G[k])}{\Re(G[k])}\right)_{\text{notation}} = \mathcal{D}(G[k]). \quad (\text{A.7})$$

Par conséquent,

$$\delta\phi[k] = \mathcal{D}(G[k]), \quad (\text{A.8})$$

$$= \hat{\phi}_r[k] - \hat{\phi}[k] + \mathcal{D}(S[k]) \mod(\pi), \quad (\text{A.9})$$

avec

$$S[k] = \sum_{l=1}^{N_{corr}} e^{i\left(\frac{b_1}{2} \frac{l^2}{Fe^2} - (b_0 + b_1 k) \frac{l}{Fe}\right)}. \quad (\text{A.10})$$

Focalisons nous sur les différents termes présents dans l'exponentielle complexe de l'équation (A.10). Le temps de corrélation  $T_{corr}$  étant choisi au maximum égal à 20ms, on a

$$\frac{l^2}{2Fe^2} \leq \frac{N_{corr}^2}{2Fe^2} = \frac{T_{corr}^2}{2} \ll 1, \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{l}{Fe} \leq \frac{N_{corr}}{Fe} = T_{corr} \ll 1. \quad (\text{A.12})$$

Le terme  $k \frac{l}{Fe}$  fait référence à une dynamique de phase de type rampe. Pour une DPLL d'ordre 2, ce type de dynamique n'entraîne pas d'erreur en régime permanent. Les expressions de sortie du discriminateur calculées dans la section suivante rendront donc nulle la contribution d'une telle dynamique lorsque le régime permanent est établie, c'est-à-dire au bout d'une ou deux secondes de poursuite selon le choix de bande de boucle. Sur ce court laps de temps, le terme  $k \frac{l}{Fe}$  peut donc être, en première approximation, considéré petit devant 1. En supposant également que la dynamique à suivre est de type piéton (e.g., que les valeurs de  $b_0$  et  $b_1$  n'excèdent pas 5 Hz et 1 Hz/s), on peut effectuer le développement limité et les approximations suivants :

$$S[k] \simeq \sum_{l=1}^{N_{corr}} 1 + i\left(\frac{b_1}{2} \frac{l^2}{Fe^2} - (b_0 + b_1 k) \frac{l}{Fe}\right), \quad (\text{A.13})$$

$$= N_{corr} - i\frac{(b_0 + b_1 k)}{2Fe}(N_{corr}^2 + N_{corr}) + i\frac{b_1}{2} \frac{2N_{corr}^3 + 3N_{corr}^2 + N_{corr}}{6Fe^2}, \quad (\text{A.14})$$

$$\simeq N_{corr} + iN_{corr} \left( \frac{b_1}{6} T_{corr}^2 - \frac{(b_0 + b_1 k)}{2} T_{corr} \right). \quad (\text{A.15})$$

Ainsi, on obtient

$$\mathcal{D}(S[k]) = \arctan\left(\frac{\Im(S[k])}{\Re(S[k])}\right) \simeq \frac{b_1}{6} T_{corr}^2 - \frac{(b_0 + b_1 k)}{2} T_{corr}. \quad (\text{A.16})$$

Par conséquent, la phase en sortie de corrélation est donnée par :

$$\delta\phi[k] = \hat{\phi}_r[k] - \hat{\phi}[k] + \frac{b_1}{6} T_{corr}^2 - \frac{(b_0 + b_1 k)}{2} T_{corr}, \quad (\text{A.17})$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \hat{\phi}_r^{p.c.}[k] - \hat{\phi}[k]. \quad (\text{A.18})$$

On voit alors que l'étape de corrélation peut se modéliser par (avec toujours la notation  $k = kT_{corr}$ ) :

$$\hat{\phi}_r^{p.c.}[k] = \hat{\phi}_r[k] + \frac{b_1}{6}T_{corr}^2 - \frac{(b_0 + b_1 k)}{2}T_{corr}, \quad (\text{A.19})$$

$$= \left( \frac{b_1}{6}T_{corr}^2 - \frac{b_0}{2}T_{corr} \right) + \left( b_0 - \frac{b_1}{2}T_{corr} \right) k + \frac{b_1}{2}k^2. \quad (\text{A.20})$$

### A.3 Calcul des transformées inverses

L'étape de corrélation ayant été modélisée, il est possible d'exprimer la dynamique en sortie du discriminateur par

$$\begin{aligned} \delta\Phi(z) &= (1 - H_{BF}(z)) \hat{\Phi}_r^{p.c.}(z) \\ &= \left( 1 - \frac{z^{-1}F(z)N(z)}{1 + z^{-1}F(z)N(z)} \right) \hat{\Phi}_r^{p.c.}(z) \\ &= \frac{1}{1 + z^{-1}F(z)N(z)} \hat{\Phi}_r^{p.c.}(z) \\ &= \frac{1}{1 + z^{-1} \left[ \frac{K_1 T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{K_2 T^2}{4} \left( \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right)^2 \right]} \hat{\Phi}_r^{p.c.}(z) \\ &= \frac{(1 - z^{-1})^2}{1 - \left( 2 - \frac{K_1 T}{2} - \frac{K_2 T^2}{4} \right) z^{-1} + \left( 1 + \frac{K_2 T^2}{2} \right) z^{-2} + \left( \frac{K_2 T^2}{4} - \frac{K_1 T}{2} \right) z^{-3}} \hat{\Phi}_r^{p.c.}(z). \end{aligned}$$

En posant :

$$\left| \begin{array}{l} a = \frac{K_2 T^2}{4} - \frac{K_1 T}{2}, \\ b = 1 + \frac{K_2 T^2}{2}, \\ c = -2 + \frac{K_1 T}{2} + \frac{K_2 T^2}{4}, \\ d = 1, \end{array} \right.$$

et

$$\left| \begin{array}{l} p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}, \\ q = \frac{2b^3}{27a^3} + \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2}, \\ X = z^{-1} + \frac{b}{3a}, \end{array} \right.$$

on obtient au final

$$\delta\Phi(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{a(X^3 + pX + q)} \hat{\Phi}_r^{p.c.}(z).$$

On utilise la formule de Cardan pour décomposer le dénominateur d'ordre 3. Avec les valeurs de bande de boucle  $B_L$  et de temps d'intégration  $T_{corr}$  choisies, on a :

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0.$$

On se retrouve ainsi avec une racine réelle et deux racines complexes conjuguées. On peut alors écrire

$$\delta\Phi(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{a(X - \eta)(X - \mu)(X - \mu^*)} \hat{\Phi}_r^{p.c.}(z),$$

avec

$$\left| \begin{array}{l} \eta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \\ \mu = \frac{-\eta + i\sqrt{-\eta^2 - 4q/\eta}}{2}. \end{array} \right.$$

car  $\eta^2 + 4q/\eta < 0$  dans notre cas. On obtient finalement :

$$\delta\Phi(z) = \frac{(1-z^{-1})^2}{a(z^{-1}-R_1)(z^{-1}-R_2)(z^{-1}-R_3)} \hat{\Phi}_r^{p.c.}(z)$$

avec

$$\left| \begin{array}{l} R_1 = \eta - \frac{b}{3a} \\ R_2 = \mu - \frac{b}{3a} \\ R_3 = \mu^* - \frac{b}{3a} \end{array} \right.$$

Pour la suite des calculs on posera :

$$R_2 = R_3^* = r e^{i\omega_0}$$

avec

$$\left| \begin{array}{l} r = \frac{1}{2} \sqrt{-\eta^2 - \frac{4q}{\eta} + \left(\eta + \frac{2b}{3a}\right)^2} \\ \omega_0 = \arctan \left( -\frac{\sqrt{-\eta^2 - \frac{4q}{\eta}}}{\eta + \frac{2b}{3a}} \right) \end{array} \right.$$

### A.3.1 Réponse à un échelon

Soit  $\Phi_1(z)$  une entrée de type échelon.

$$\Phi_1(z) = \frac{C_0}{1-z^{-1}}$$

La sortie de discriminateur associée à cette dynamique d'entrée s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta\Phi(z) &= \frac{C_0}{a} \frac{1-z^{-1}}{(z^{-1}-R_1)(z^{-1}-R_2)(z^{-1}-R_3)} \\ &= -\frac{C_0}{a(R_1-R_2)(R_1-R_3)} \left[ \frac{1-R_1}{R_1} \frac{1}{1-\frac{z^{-1}}{R_1}} \right. \\ &\quad + \frac{(1-R_2)(R_1-R_3)}{R_2(R_3-R_2)} \frac{1}{1-\frac{z^{-1}}{R_2}} \\ &\quad \left. + \frac{(1-R_3)(R_1-R_2)}{R_3(R_2-R_3)} \frac{1}{1-\frac{z^{-1}}{R_3}} \right] \end{aligned}$$

En inversant cette expression en  $z$  on obtient :

$$\begin{aligned} \delta\phi[k] &= -\frac{C_0 u[k]}{a(R_1-R_2)(R_1-R_3)} \left[ (1-R_1)R_1^{-(k+1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left( (1-R_3)(R_1-R_2)R_3^{-(k+1)} - (1-R_2)(R_1-R_3)R_2^{-(k+1)} \right)}{2ir \sin \omega_0} \right] \end{aligned}$$

avec  $u[k]$  la fonction indicatrice telle que  $u[k] = 0 \quad \forall k < 0$ .

En posant

$$(1 - R_2)(R_1 - R_3) = \overline{(1 - R_3)(R_1 - R_2)} = r'e^{i\omega'_0}$$

on obtient

$$\delta\phi[k] = -\frac{C_0 u[k]}{a(R_1 - R_2)(R_1 - R_3)} \left[ (1 - R_1)R_1^{-(k+1)} + \frac{r' (r^{-(k+1)} e^{-i(w'_0 - w_0(k+1))} - r^{-(k+1)} e^{i(w'_0 - w_0(k+1))})}{2ir \sin \omega_0} \right].$$

Ce qui donne au final :

$$\boxed{\delta\phi[k] = -\frac{C_0}{a(R_1^2 + r^2 - 2rR_1 \cos \omega_0)} \left[ (1 - R_1)R_1^{-(k+1)} + \frac{r'}{\sin(\omega_0)} r^{-(k+2)} \sin(w_0(k+1) - w'_0) \right] u[k].}$$

### A.3.2 Réponse à une rampe

Soit  $\Phi_2(z)$  une entrée de type rampe.

$$\Phi_2(z) = C_1 T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

La sortie de discriminateur associée à cette dynamique d'entrée s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta\Phi(z) &= \frac{C_1 T}{a} \frac{z^{-1}}{(z^{-1} - R_1)(z^{-1} - R_2)(z^{-1} - R_3)} \\ &= -\frac{C_1 T}{a} \left[ \frac{1}{(R_1 - R_2)(R_1 - R_3)} \frac{1}{1 - \frac{z^{-1}}{R_1}} \right. \\ &\quad + \frac{1}{(R_2 - R_1)(R_2 - R_3)} \frac{1}{1 - \frac{z^{-1}}{R_2}} \\ &\quad \left. + \frac{1}{(R_3 - R_1)(R_3 - R_2)} \frac{1}{1 - \frac{z^{-1}}{R_3}} \right] \end{aligned}$$

En inversant cette expression en  $z$  on obtient :

$$\begin{aligned} \delta\phi[k] &= -\frac{C_1 T u[k]}{a(R_1 - R_2)(R_1 - R_3)} \left[ R_1^{-k} + \frac{(R_3 - R_1)R_2^{-k} - (R_2 - R_1)R_3^{-k}}{(R_2 - R_3)} \right] \\ &= -\frac{C_1 T u[k]}{a(R_1 - R_2)(R_1 - R_3)} \left[ R_1^{-k} + \frac{R_3 R_2 [R_2^{-(k+1)} - R_3^{-(k+1)}] - R_1 [R_2^{-k} - R_3^{-k}]}{(R_2 - R_3)} \right] \end{aligned}$$

Ce qui donne au final :

$$\boxed{\delta\phi[k] = \frac{C_1 T}{a(R_1^2 + r^2 - 2rR_1 \cos \omega_0)} \left[ \frac{r^{-k} \sin(w_0(k+1)) - R_1 r^{-(k+1)} \sin(w_0 k)}{\sin(\omega_0)} - R_1^{-k} \right] u[k].}$$

### A.3.3 Réponse à une accélération

Soit  $\Phi_3(z)$  une entrée de type rampe.

$$\Phi_3(z) = C_2 T^2 \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$$

La sortie de discriminateur associée à cette dynamique d'entrée s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta\Phi(z) &= \frac{C_2 T^2}{a} \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(z^{-1}-R_1)(z^{-1}-R_2)(z^{-1}-R_3)(1-z^{-1})} \\ &= -\frac{C_2 T^2}{a} \left[ \frac{\frac{R_1(1+R_1)}{(R_2-R_1)(R_3-R_1)(1-R_1)}}{R_1-z^{-1}} + \frac{\frac{2}{(R_1-1)(R_2-1)(R_3-1)}}{1-z^{-1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{R_2(1+R_2)}{(R_1-R_2)(R_3-R_2)(1-R_2)}}{R_2-z^{-1}} + \frac{\frac{R_3(1+R_3)}{(R_1-R_3)(R_2-R_3)(1-R_3)}}{R_3-z^{-1}} \right] \end{aligned}$$

En inversant cette expression en  $z$  on obtient :

$$\begin{aligned} \delta\phi[k] &= -\frac{C_2 T^2}{a(R_2-R_1)(R_3-R_1)} \left[ \frac{(1+R_1)}{(1-R_1)} R_1^{-k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(R_1-R_2)(1+R_3)}{(R_2-R_3)(1-R_3)} R_3^{-k} - \frac{(R_1-R_3)(1+R_2)}{(R_3-R_2)(1-R_2)} R_2^{-k} \right] u[k] \\ &\quad - \frac{2C_2 T^2}{a(R_1-1)(R_2-1)(R_3-1)} u[k] \end{aligned}$$

En posant :

$$\frac{(1+R_2)(R_1-R_3)}{(1-R_2)} = r'' e^{i\omega_0''}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \delta\phi[k] &= -\frac{C_2 T^2 u[k]}{a(R_2-R_1)(R_3-R_1)} \left[ \frac{(1+R_1)}{(1-R_1)} R_1^{-k} + \frac{r''(r^{-k-1} e^{-j\omega_0''-\omega_0(k)} - r^{-k-1} e^{j\omega_0''-\omega_0(k)})}{2ir \sin \omega_0} \right] \\ &\quad - \frac{2C_2 T^2}{a(R_1-1)(R_2-1)(R_3-1)} u[k] \end{aligned}$$

Ce qui donne au final

$$\delta\phi[k] = -\frac{C_2 T^2 u[k]}{a(R_1^2 + r^2 - 2rR_1 \cos \omega_0)} \left[ \frac{(1+R_1)}{(1-R_1)} R_1^{-k} + \frac{r'' r^{-k-1} \sin(\omega_0 k - \omega_0'')}{\sin \omega_0} \right] + E_{r.p.} u[k]$$

avec l'erreur en régime permanent

$$E_{r.p.} = -\frac{2C_2 T^2}{a(R_1-1)(R_2-1)(R_3-1)}.$$

## A.4 Validation des expressions de sortie du discriminateur

Afin de vérifier que les expressions précédemment établies sont exactes, lançons une poursuite de phase dynamique 3 Hz + 2 Hz/s et comparons la sortie du discriminateur observée avec celle obtenue par les calculs précédents en supposant connaître parfaitement les valeurs des coefficients polynomiaux obtenues lors de l'analyse des sorties de filtre de boucle. On voit bien sur la figure A.2 qu'il y a concordance entre l'observation de la sortie du discriminateur et les valeurs calculées grâce aux expressions théoriques établies. Sur cette figure est également illustrée la sortie du discriminateur obtenue avec l'étape de conversion définie précédemment, dans le cas où on ne tient pas compte de l'étape de corrélation. On voit bien que, si on ne modélise pas cette étape, une erreur de prédiction est observée et risque, lors de la poursuite, de dégrader les performances de la boucle.

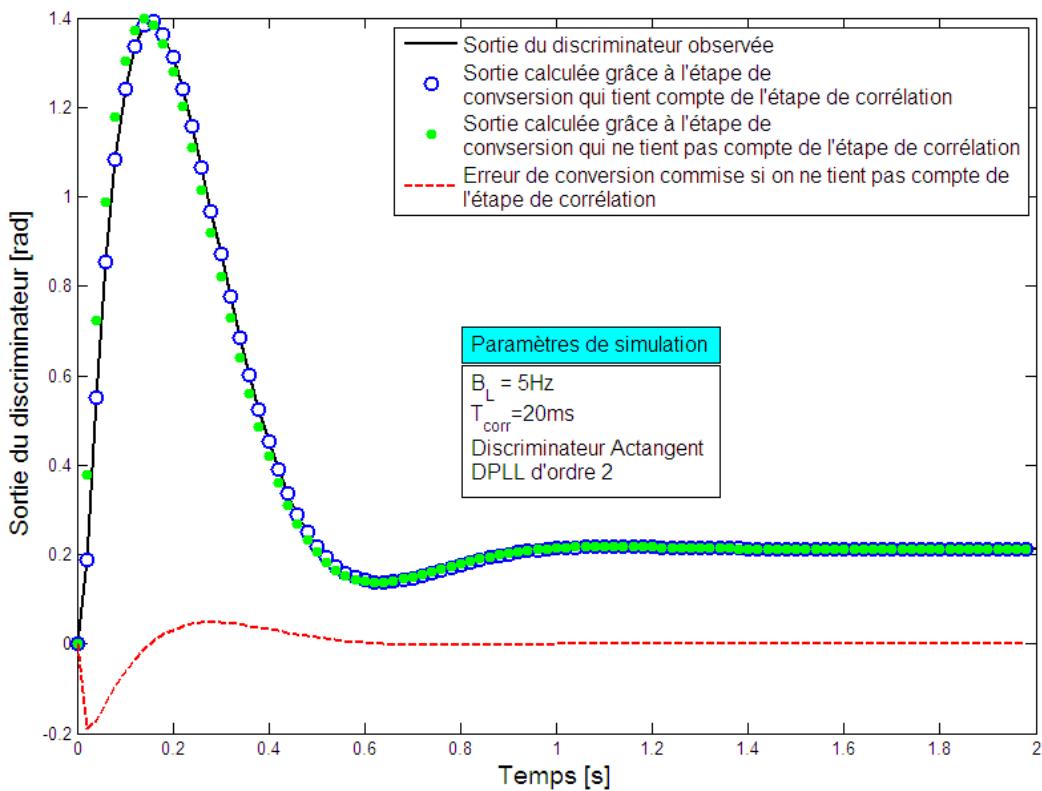


FIGURE A.2 – Validation des calculs théoriques de sortie du discriminateur pour une DPLL d'ordre 2

Annexe **B**

# Détails de l'estimation des coefficients polynomiaux par l'algorithme des moindres carrés récursifs pondérés dans le cas d'une estimation multifréquence centralisée

Cette annexe a pour but de détailler l'ensemble des étapes menant à la forme récursive de l'algorithme des moindres carrés pondérés qui est utilisé pour la structure de boucle multifréquence décrite à la section 4.1.2. Après avoir rappelé deux lemmes d'inversion matricielle nécessaires au bon déroulement des calculs qui vont suivre, une première étape rappelle l'expression classique du problème des moindres carrés pondérés. S'en suivra alors une seconde étape de calcul qui permettra d'obtenir une expression récursive du problème des moindres carrés pondérés applicable au cas de la DPLL multifréquence associée à la méthode d'estimation centralisée des coefficients polynomiaux.

## B.1 Lemmes d'inversion matricielle

L'élaboration de l'algorithme WRLS nécessite l'utilisation de deux lemmes d'inversion matricielle dont les détails de calcul sont donnés dans [95]. Si on a  $\mathbf{A}$  inversible de dimension  $n \times n$ ,  $\mathbf{C}$  inversible de dimension  $m \times m$  et  $\mathbf{B}$  quelconque de dimension  $n \times m$ , on peut alors écrire les lemmes suivants :

*Lemme 1*

$$\mathbf{AB}(\mathbf{C} + \mathbf{B}^T \mathbf{AB})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{BC}^{-1}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{BC}^{-1} \quad (\text{B.1})$$

*Lemme 2*

$$(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{BC}^{-1}\mathbf{B}^T)^{-1} = \mathbf{A} - \mathbf{AB}(\mathbf{C} + \mathbf{B}^T \mathbf{AB})^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{A} \quad (\text{B.2})$$

## B.2 Forme récursive de l'algorithme WRLS dans le cas d'une estimation par la méthode centralisée

Dans la section 4.1.2, les différentes relations de proportionnalité qu'il existe entre les sorties de filtre et les coefficients polynomiaux associés aux fréquences porteuses du signal multifréquence, ont permis d'établir le système d'équation suivant

$$\mathbf{G}_k^r \mathbf{b}_{ref} + \mathbf{n}_{\dot{\phi}} = \dot{\phi}_k \quad (\text{B.3})$$

avec  $\mathbf{n}_{\dot{\phi}}$  le vecteur bruit de taille  $((k+1) \times N_p) \times 1$ ,  $\dot{\phi}_k$  le vecteur d'observation de taille  $((k+1) \times N_p) \times 1$  donné par

$$\dot{\phi}_k = \left[ \dot{\phi}_1^T[k], \dots, \dot{\phi}_{N_P}^T[k] \right]^T, \quad (\text{B.4})$$

avec  $\mathbf{b}_{ref}$  le vecteur de taille  $(M+1) \times 1$  contenant les coefficients polynomiaux du modèle d'analyse associé à la porteuse de référence, et  $\mathbf{G}_k^r$  la matrice de taille  $(N_P(k+1)) \times (M+1)$  donnée par

$$\mathbf{G}_k^r = \mathbf{r} \otimes \mathbf{G}_k, \quad (\text{B.5})$$

avec

$$\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_{N_P}]^T, \quad (\text{B.6})$$

et

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & T_{corr} & T_{corr}^2 & \cdots & T_{corr}^M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & kT_{corr} & (kT_{corr})^2 & \cdots & (kT_{corr})^M \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

L'estimation du vecteur  $\hat{\mathbf{b}}_{ref}$  est réalisée grâce à la technique des moindres carrés pondérés et est donnée par

$$\hat{\mathbf{b}}_{ref}[k] = (\mathbf{G}_k^{rT} \mathbf{R}_k \mathbf{G}_k^r)^{-1} \mathbf{G}_k^{rT} \mathbf{R}_k \dot{\phi}_k. \quad (\text{B.8})$$

avec  $\mathbf{R}_k$  la matrice de pondération de taille  $(N_P \times (k+1)) \times (N_P \times (k+1))$  définie par

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1[k] & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{R}_{N_P}[k] \end{bmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

avec  $\mathbf{R}_i[k]$  la matrice de pondération des observations associées à la fréquence  $f_{p,i}$  définie par

$$\mathbf{R}_i[k] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_i^k \end{bmatrix}, \quad (\text{B.10})$$

où  $\gamma_i$  est le facteur de pondération associé à la i-ème porteuse. Pour la suite des calculs on notera

$$\hat{\mathbf{b}}_{ref}[k] = \mathbf{P}_k \mathbf{B}_k, \quad (\text{B.11})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^{-1} &= \mathbf{G}_k^{rT} \mathbf{R}_k \mathbf{G}_k^r, \\ \mathbf{B}_k &= \mathbf{G}_k^{rT} \mathbf{R}_k \dot{\phi}_k. \end{aligned}$$

respectivement de taille  $(M + 1) \times (M + 1)$  et  $(M + 1) \times 1$ . Supposons qu'on souhaite maintenant résoudre le problème d'estimation avec les  $k + 1$  observations de chaque sous-système. On a :

$$\hat{\mathbf{b}}_{ref}[k + 1] = \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{B}_{k+1} \quad (B.12)$$

$$= (\mathbf{G}_{k+1}^r)^T \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1}^{r^T})^{-1} \mathbf{G}_{k+1}^{r^T} \mathbf{R}_{k+1} \dot{\mathbf{\phi}}_{k+1} \quad (B.13)$$

avec

$$\mathbf{G}_{k+1}^r = (\mathbf{r} \otimes \mathbf{G}_{k+1}), \quad \mathbf{G}_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_k \\ \mathbf{g}_{k+1} \end{pmatrix},$$

respectivement de taille  $N_P(k + 2) \times (M + 1)$ ,  $(k + 2) \times (M + 1)$ , et

$$\dot{\mathbf{\phi}}_{k+1} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{\phi}}_1[k] \\ \dot{\mathbf{\phi}}_1[k + 1] \\ \dot{\mathbf{\phi}}_2[k] \\ \dot{\mathbf{\phi}}_2[k + 1] \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{\phi}}_{N_P}[k] \\ \dot{\mathbf{\phi}}_{N_P}[k + 1] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1[k] & & & & & & \\ & \gamma_1^{k+1} & & & & & \\ & & \mathbf{R}_2[k] & & & & \\ & & & \gamma_2^{k+1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \mathbf{R}_{N_P}[k] & \\ & & & & & & \gamma_{N_P}^{k+1} \end{pmatrix}.$$

respectivement de taille  $N_P(k + 2) \times 1$  et  $N_P(k + 2) \times N_P(k + 2)$ . Si on arrive à exprimer le vecteur  $\hat{\mathbf{b}}_{ref}[k + 1]$  en fonction du vecteur  $\hat{\mathbf{b}}_{ref}[k]$ , il sera alors possible d'établir une expression récursive de l'algorithme des moindres carrés qui estimera pas à pas les coefficients grâce à une simple mise à jour du vecteur  $\hat{\mathbf{b}}_{ref}[k]$  en fonction des observations à l'instant  $k + 1$ .

Commençons par exprimer  $\mathbf{P}_{k+1}^{-1}$  en fonction de  $\mathbf{P}_k^{-1}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1}^{-1} &= \mathbf{G}_{k+1}^{r^T} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1}^r \\ &= (\mathbf{r} \otimes \mathbf{G}_{k+1})^T \mathbf{R}_{k+1} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{G}_{k+1}) \\ &= r_1^2 \mathbf{G}_k^T \mathbf{R}_1[k] \mathbf{G}_k + \cdots + r_{N_P}^2 \mathbf{G}_k^T \mathbf{R}_{N_P}[k] \mathbf{G}_k + (r_1^2 \gamma_1^{k+1} + \cdots + r_{N_P}^2 \gamma_{N_P}^{k+1}) \mathbf{g}_{k+1}^T \mathbf{g}_{k+1} \\ &= \mathbf{G}_k^{r^T} \mathbf{R}_k \mathbf{G}_k^r + (r_1^2 \gamma_1^{k+1} + \cdots + r_{N_P}^2 \gamma_{N_P}^{k+1}) \mathbf{g}_{k+1}^T \mathbf{g}_{k+1} \end{aligned}$$

Ce qui donne au final

$$\boxed{\mathbf{P}_{k+1}^{-1} = \mathbf{P}_k^{-1} + m_{k+1}^{-1} \mathbf{g}_{k+1}^T \mathbf{g}_{k+1}}, \quad (B.14)$$

avec

$$m_{k+1}^{-1} = (r_1^2 \gamma_1^{k+1} + \cdots + r_{N_P}^2 \gamma_{N_P}^{k+1}) = \mathbf{r}^T \begin{bmatrix} \gamma_1^{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_{N_P}^{k+1} \end{bmatrix} \mathbf{r}. \quad (B.15)$$

En utilisant le lemme d'inversion matricielle (B.2) sur l'équation (B.14), on obtient :

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_k - \mathbf{P}_k \mathbf{g}_{k+1}^T (m_{k+1} + \mathbf{g}_{k+1} \mathbf{P}_k \mathbf{g}_{k+1}^T)^{-1} \mathbf{g}_{k+1} \mathbf{P}_k,$$

soit

$$\boxed{\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_k - \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{g}_{k+1} \mathbf{P}_k}, \quad (B.16)$$

avec

$$\mathbf{C}_{k+1} = \mathbf{P}_k \mathbf{g}_{k+1}^T (m_{k+1} + \mathbf{g}_{k+1} \mathbf{P}_k \mathbf{g}_{k+1}^T)^{-1} \quad (\text{B.17})$$

de taille  $(M + 1) \times 1$  qui peut s'écrire grâce au lemme d'inversion matriciel (B.1) et à l'équation (B.14) :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{k+1} &= m_{k+1}^{-1} (\mathbf{P}_k^{-1} + \mathbf{g}_{k+1}^T m_{k+1}^{-1} \mathbf{g}_{k+1})^{-1} \mathbf{g}_{k+1}^T \\ &= m_{k+1}^{-1} \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{g}_{k+1}^T \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Exprimons maintenant  $\mathbf{B}_{k+1}$  en fonction de  $\mathbf{B}_{k+1}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{k+1} &= \mathbf{G}_{k+1}^{r^T} \mathbf{R}_{k+1} \dot{\phi}_{k+1} \\ &= (\mathbf{r} \otimes \mathbf{G}_{k+1})^T \mathbf{R}_{k+1} \dot{\phi}_{k+1} \\ &= (\mathbf{r} \otimes \mathbf{G}_k)^T \mathbf{R}_k \dot{\phi}_k + (r_1 \gamma_1^{k+1} \dot{\phi}_1[k+1] + \dots + r_{N_P} \gamma_{N_P}^{k+1} \dot{\phi}_{N_P}[k+1]) \mathbf{g}_{k+1}^T \end{aligned}$$

soit

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k + \mathbf{g}_{k+1}^T \mathbf{r}^T \begin{bmatrix} \gamma_1^{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_{N_P}^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1[k+1] \\ \vdots \\ \dot{\phi}_{N_P}[k+1] \end{bmatrix}. \quad (\text{B.19})$$

Nous allons utiliser les relations de récurrence (B.16) et (B.19) afin d'exprimer le vecteur estimé  $\hat{\mathbf{b}}_{ref}[k+1]$  en fonction de  $\hat{\mathbf{b}}_{ref}[k]$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}_{ref}[k+1] &= \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{B}_{k+1} \\ &= \mathbf{P}_{k+1} \left( \mathbf{B}_k + \mathbf{g}_{k+1}^T \mathbf{r}^T \begin{bmatrix} \gamma_1^{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_{N_P}^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1[k+1] \\ \vdots \\ \dot{\phi}_{N_P}[k+1] \end{bmatrix} \right) \\ &= \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{B}_k + m_{k+1} \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{r}^T \begin{bmatrix} \gamma_1^{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_{N_P}^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1[k+1] \\ \vdots \\ \dot{\phi}_{N_P}[k+1] \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{P}_k - \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{g}_{k+1} \mathbf{P}_k) \mathbf{B}_k + m_{k+1} \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{r}^T \begin{bmatrix} \gamma_1^{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_{N_P}^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1[k+1] \\ \vdots \\ \dot{\phi}_{N_P}[k+1] \end{bmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{b}}_{ref}[k] - \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{g}_{k+1} \hat{\mathbf{b}}_{ref}[k] + m_{k+1} \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{r}^T \begin{bmatrix} \gamma_1^{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_{N_P}^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1[k+1] \\ \vdots \\ \dot{\phi}_{N_P}[k+1] \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ce qui donne au final

$$\hat{\mathbf{b}}_{ref}[k+1] = \hat{\mathbf{b}}_{ref}[k] + \mathbf{K}_{k+1} \left( \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1[k+1] \\ \vdots \\ \dot{\phi}_{N_P}[k+1] \end{bmatrix} - \mathbf{r} \mathbf{g}_{k+1} \hat{\mathbf{b}}_{ref}[k] \right), \quad (\text{B.20})$$

avec

$$\mathbf{K}_{k+1} = m_{k+1} \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{r}^T \begin{bmatrix} \gamma_1^{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_{N_P}^{k+1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

Pour résumer, la forme récursive des moindres carrés se compose d'une étape d'initialisation et d'une itération à deux étapes :

<u><i>Initialisation (<math>k = N_{init} - 1 \geq M + 1</math>)</i></u>
$\hat{\mathbf{b}}_{ref}[N_{init} - 1] = \mathbf{P}_{N_{init}-1} \mathbf{G}_{N_{init}-1}^r {}^T \mathbf{R}_{N_{init}-1} \dot{\phi}_{N_{init}-1}$ <p style="text-align: center;">avec</p> $\mathbf{P}_{N_{init}-1} = (\mathbf{G}_{N_{init}-1}^r {}^T \mathbf{R}_{N_{init}-1} \mathbf{G}_{N_{init}-1}^r)^{-1}$
<u><i>1-Mise à jour de l'estimateur (<math>k \geq N_{init}</math>)</i></u>
$\hat{\mathbf{b}}_{ref}[k+1] = \hat{\mathbf{b}}_{ref}[k] + \mathbf{K}_{k+1} \left( \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1[k+1] \\ \vdots \\ \dot{\phi}_{N_P}[k+1] \end{bmatrix} - \mathbf{r} \mathbf{g}_{k+1} \hat{\mathbf{b}}_{ref}[k] \right)$ <p style="text-align: center;">avec</p> $\mathbf{C}_{k+1} = \mathbf{P}_k \mathbf{g}_{k+1}^T (m_{k+1} + \mathbf{g}_{k+1} \mathbf{P}_k \mathbf{g}_{k+1}^T)^{-1}$ $\mathbf{K}_{k+1} = m_{k+1} \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{r}^T \begin{bmatrix} \gamma_1^{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_{N_P}^{k+1} \end{bmatrix}$
<u><i>2-Calcul de la nouvelle matrice de covariance (<math>k \geq N_{init}</math>)</i></u>
$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{g}_{k+1}) \mathbf{P}_k$



## Etude de la distribution a posteriori $\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{s}_k)$

Dans cette annexe, nous allons nous intéresser à l'étude de la distribution (5.41) qui peut se réécrire

$$\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_k) \propto \exp \left\{ \frac{a_k}{\bar{r}^2 \sigma_\phi^2} \cos \left( \bar{r}[\hat{\phi}_k^{mml} - \phi_k] \right) - \frac{[\phi_k - \hat{\phi}_{k-1}^{rvb}]^2}{2\sigma_\phi^2} \right\} \quad (\text{C.1})$$

avec  $a_k = 2\xi|z_k|\bar{r}^2\sigma_\phi^2$ . Cette distribution peut être soit unimodale, soit multimodale selon les cas suivants :

- 1) si  $a_k \leq 1$ , la distribution est unimodale. On distingue alors les sous-cas suivants :
  - a) si  $\hat{\phi}_{k-1}^{rvb} \neq \hat{\phi}_k^{mml} \bmod(\pi/\bar{r})$ , l'unique mode se situe soit dans l'intervalle  $\hat{\phi}_{k-1}^{rvb}, \hat{\phi}_k^{mml} + 2p_0\pi/\bar{r}$  [ si  $\hat{\phi}_{k-1}^{rvb} < \hat{\phi}_k^{mml} + 2p_0\pi/\bar{r}$ , soit dans l'intervalle  $\hat{\phi}_k^{mml} + 2p_0\pi/\bar{r}, \hat{\phi}_{k-1}^{rvb}$  [ si  $\hat{\phi}_{k-1}^{rvb} > \hat{\phi}_k^{mml} + 2p_0\pi/\bar{r}$ , avec

$$p_0 = \arg \min_{p \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}_k^{mml} + 2p\pi/\bar{r} - \hat{\phi}_{k-1}^{rvb}| \quad (\text{C.2})$$

- b) si  $\hat{\phi}_{k-1}^{rvb} = \hat{\phi}_k^{mml} \bmod(\pi/\bar{r})$ , l'unique mode se situe en  $\hat{\phi}_{k-1}^{rvb}$

- 2) si  $a_k > 1$ , la distribution peut être uni ou multimodale suivants les cas suivants :
  - a) si  $\hat{\phi}_{k-1}^{rvb} \neq \hat{\phi}_k^{mml} \pm \bar{r}^{-1} [\sqrt{a_k^2 - 1} + \arccos(-a_k^{-1})] \bmod(2\pi/\bar{r})$ , il y a  $\lfloor \bar{r}/(2\pi)s(\theta_0) \rfloor - \lfloor \bar{r}/(2\pi)s(\Theta_0) \rfloor$  modes avec  $s(\cdot), \theta_0$  et  $\Theta_0$  définis aux équations (C.3), (C.7) et (C.7)
  - b)c)d) dans le cas contraire, il peut se produire trois cas particuliers du cas 2)a) pour lesquels un ou deux modes ne sont pas des maxima mais des points d'inflexion.

Dans tous les cas, les modes de la fonction de distribution  $\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{s}_k)$  sont situés dans l'intervalle  $\hat{\phi}_{k-1}^{rvb} + a_k/\bar{r} \times [-1, 1]$ . La démonstration de la localisation des modes est donnée dans la suite de cette annexe. La figure C.1 nous donne l'allure de la fonction de distribution dans les cas 1)a) et 2)a).

*Démonstration :* De manière évidente, la dérivée de  $\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_k)$  est de même signe que la fonction

$$s(\phi_k) = \frac{a_k}{\bar{r}} \sin \left( \bar{r}[\hat{\phi}_k^{mml} - \phi_k] \right) - \phi_k + \hat{\phi}_{k-1}^{rvb}. \quad (\text{C.3})$$

Cette fonction a pour limites

$$\lim_{\phi_k \rightarrow -\infty} s(\phi_k) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\phi_k \rightarrow +\infty} s(\phi_k) = -\infty \quad (\text{C.4})$$

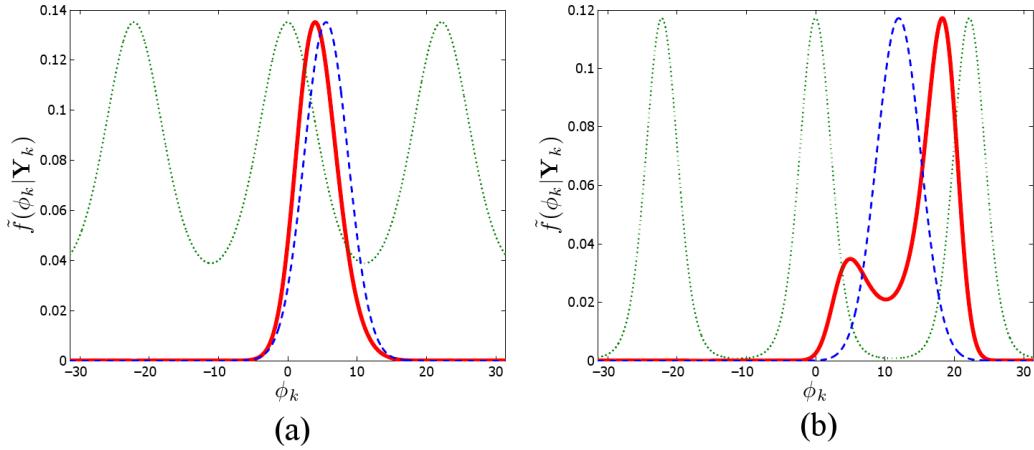


FIGURE C.1 – Allure de la fonction de distribution  $\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{s}_k)$  (en rouge), de sa composante périodique (en vert) et de sa composante Gaussienne (en bleu). (a) Exemple relatif au cas 1)a) où la fonction est unimodale ( $a_k \leq 1$  et  $\hat{\phi}_{k-1}^{rvb} \neq \hat{\phi}_k^{mml} \bmod(\pi/\bar{r})$ ). (b) Exemple relatif au cas 2)a) où la fonction est unimodale ( $a_k > 1$  et  $\hat{\phi}_{k-1}^{rvb} \neq \hat{\phi}_k^{mml} \pm \bar{r}^{-1} [\sqrt{a_k^2 - 1} + \arccos(-a_k^{-1})] \bmod(2\pi/\bar{r})$ )

et a pour dérivée

$$\dot{s}(\phi_k) = - [a_k \cos(\bar{r}[\hat{\phi}_k^{mml} - \phi_k]) + 1]. \quad (\text{C.5})$$

Comme  $a_k \geq 0$ , il est facile de montrer que, au vue de l'expression de la dérivée  $s(\phi_k)$ , les modes de la fonction de distribution se trouvent nécessairement dans l'intervalle  $\hat{\phi}_{k-1}^{rvb} + a_k/\bar{r} \times [-1, 1]$ . A partir de là, deux cas de figure se présentent :

- **1**) Si  $a_k < 1$ , alors  $\dot{s}(\phi_k) < 0$  quel que soit  $\phi_k$ . La fonction  $s(\phi_k)$  est donc strictement décroissante. Grâce aux limites (C.4) de cette fonction, on sait qu'il existe un unique  $\phi_k \in \mathbb{R}$  tel que  $s(\phi_k) = 0$  et que la distribution  $\tilde{f}(\phi_k | \mathbf{S}_k)$  est unimodale.
- Si  $a_k = 1$ , le raisonnement précédent reste valide car la dérivée  $\dot{s}(\phi_k)$  reste strictement négative mis à part les points isolés appartenant à

$$\bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \left\{ \hat{\phi}_k^{mml} + (2p + 1)\pi/\bar{r} \right\}. \quad (\text{C.6})$$

L'unimodalité de la fonction de distribution ayant été prouvée pour  $a_k \leq 1$ , discutons du lieu de cet unique mode.

- **a)** Si  $\hat{\phi}_{k-1}^{rvb} \neq \hat{\phi}_k^{mml} \bmod(\pi/\bar{r})$ , supposons que  $\hat{\phi}_{k-1}^{rvb} < \hat{\phi}_k^{mml} + 2p_0\pi/\bar{r}$ , avec  $p_0$  défini à l'équation (C.2). Comme sous cette hypothèse  $s(\hat{\phi}_{k-1}^{rvb}) > 0$  et  $s(\hat{\phi}_k^{mml} + 2p_0\pi/\bar{r}) < 0$ , l'unique mode se situe dans l'intervalle  $\hat{\phi}_{k-1}^{rvb}, \hat{\phi}_k^{mml} + 2p_0\pi/\bar{r}$ . Un raisonnement similaire dans le cas contraire montre que l'unique mode se situe dans l'intervalle  $\hat{\phi}_k^{mml} + 2p_0\pi/\bar{r}, \hat{\phi}_{k-1}^{rvb}$  si  $\hat{\phi}_{k-1}^{rvb} > \hat{\phi}_k^{mml} + 2p_0\pi/\bar{r}$ .
- **b)** Dans le cas contraire, il existe  $p \in \mathbb{Z}$  tel que  $\hat{\phi}_{k-1}^{rvb} = \hat{\phi}_k^{mml} + p\pi/\bar{r}$ . Comme la fonction de distribution est unimodale et que  $s(\hat{\phi}_{k-1}^{rvb}) = 0$ , l'unique mode se situe en  $\hat{\phi}_{k-1}^{rvb}$ .

- 2) Si  $a_k > 1$ , la fonction  $\dot{s}(\phi_k)$  s'annule uniquement sur l'ensemble des points

$$\theta_p = \hat{\phi}_k^{mml} - \frac{1}{\bar{r}} \arccos(-a_k^{-1}) + \frac{2\pi}{\bar{r}} p, \quad (\text{C.7})$$

$$\Theta_p = \hat{\phi}_k^{mml} + \frac{1}{\bar{r}} \arccos(-a_k^{-1}) + \frac{2\pi}{\bar{r}} p, \quad (\text{C.8})$$

avec  $p \in \mathbb{Z}$ . Il est possible de montrer que

$$\theta_{p+1} - \Theta_p = \frac{2}{\bar{r}} [\pi - \arccos(-a_k^{-1})] \in ]0, \frac{\pi}{\bar{r}}[ \quad (\text{C.9})$$

$$\Theta_p - \theta_p = \frac{2}{\bar{r}} \arccos(-a_k^{-1}) \in ]\frac{\pi}{\bar{r}}, \frac{2\pi}{\bar{r}}[ \quad (\text{C.10})$$

et que

$$s(\theta_{p+1}) = s(\theta_0) - \frac{2\pi}{\bar{r}} p, \quad (\text{C.11})$$

$$s(\Theta_{p+1}) = s(\Theta_0) - \frac{2\pi}{\bar{r}} p, \quad (\text{C.12})$$

$$s(\theta_p) - s(\Theta_p) = \frac{2}{\bar{r}} \left[ \sqrt{a_k^2 - 1} + \arccos(-a_k^{-1}) \right] > \frac{2\pi}{\bar{r}}. \quad (\text{C.13})$$

D'après ces résultats, il est possible d'établir le tableau de variation de  $\dot{s}(\phi_k)$  donné à la figure C.2. Quatre cas de figure sont à envisager.

- a) Si  $s(\theta_0) \neq 0 \bmod(2\pi/\bar{r})$  et  $s(\Theta_0) \neq 0 \bmod(2\pi/\bar{r})$ , alors, d'après les équations (C.11) et (C.12), on a  $s(\theta_p) \neq 0$  et  $s(\Theta_p) \neq 0$  pour tout  $p \in \mathbb{Z}$ . Comme la suite  $s(\Theta_p)$  est strictement décroissante, il existe un unique entier  $p_0 = \lfloor \frac{\bar{r}}{2\pi} s(\Theta_0) \rfloor$  tel que  $s(\Theta_{p_0}) > 0$  et  $s(\Theta_{p_0+1}) < 0$ . Grâce aux relations (C.11), (C.12), (C.13), on peut écrire que  $s(\theta_{p_0+1}) > 0$ . De même, comme la suite  $s(\theta_p)$  est strictement décroissante, il existe un unique entier  $q_0 = \lfloor \frac{\bar{r}}{2\pi} s(\theta_0) \rfloor - (p_0 + 1) \geq 0$  tel que  $s(\theta_{p_0+q_0+1}) > 0$  et  $s(\theta_{p_0+q_0+2}) < 0$ . Aux vues du tableau de variation C.2, la dérivée de la fonction de distribution s'annule en  $2q_0 + 1$  points. Plus précisément, parmi ces points se trouvent  $q_0 + 1$  maxima (qui représentent les modes de la fonction de distribution) et  $q_0$  minima qui se trouvent respectivement dans les intervalles

$$\bigcup_{q=0, \dots, q_0} \left\{ ]\theta_0, \Theta_0[ + \frac{2\pi}{\bar{r}} (p_0 + 1 + q) \right\} \quad (\text{C.14})$$

et, pour  $q_0 \geq 1$ ,

$$\bigcup_{q=0, \dots, q_0-1} \left\{ ]\Theta_0, \theta_1[ + \frac{2\pi}{\bar{r}} (p_0 + 1 + q) \right\} \quad (\text{C.15})$$

- b) S'il existe un entier  $p_0 \in \mathbb{Z}$  tel que  $s(\Theta_{p_0}) = 0$  (i.e.,  $p_0 = \frac{\bar{r}}{2\pi} s(\Theta_0)$ ) avec  $s(\theta_0) \neq 0 \bmod(2\pi/\bar{r})$ , alors il y a un mode situé à  $\Theta_{p_0}$  et les autres maxima et minima sont respectivement situés dans les intervalles (C.14) et (C.15) avec  $q_0 = \lfloor \frac{\bar{r}}{2\pi} s(\theta_0) \rfloor - (p_0 + 1)$ .
- c) S'il existe un entier  $q_0 = \frac{\bar{r}}{2\pi} s(\theta_0) - (p_0 + 2)$  tel que  $s(\theta_{p_0+q_0+2}) = 0$  avec  $p_0 = \lfloor \frac{\bar{r}}{2\pi} s(\Theta_0) \rfloor$  et  $s(\Theta_0) \neq 0 \bmod(2\pi/\bar{r})$ , alors il y a un mode situé à  $\theta_{p_0+q_0+2}$  et les autres maxima et minima sont respectivement situés dans les intervalles (C.14) et (C.15).
- d) S'il existe  $p_0 \in \mathbb{Z}$  et  $q_0 \geq 0$  tel que  $s(\Theta_{p_0}) = 0$  et  $s(\theta_{p_0+q_0+2}) = 0$ , alors il y a deux modes situés à  $\Theta_{p_0}$  et  $\theta_{p_0+q_0+2}$  et les autres maxima et minima sont respectivement

situés dans les intervalles (C.14) et (C.15). Ce cas de figure est réalisé seulement dans le cas où

$$a_k \in \left\{ a_n \mid n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \sqrt{a_n^2 - 1} + \arccos(-a_n^{-1}) = n\pi \right\}, \quad (\text{C.16})$$

et s'il existe  $p \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\hat{\phi}_{k-1}^{rvb} = \hat{\phi}_k^{mml} + \left[ \sqrt{a_k^2 - 1} + \arccos(-a_k^{-1}) \right] / \pi + 2p\pi/\bar{r}. \quad (\text{C.17})$$

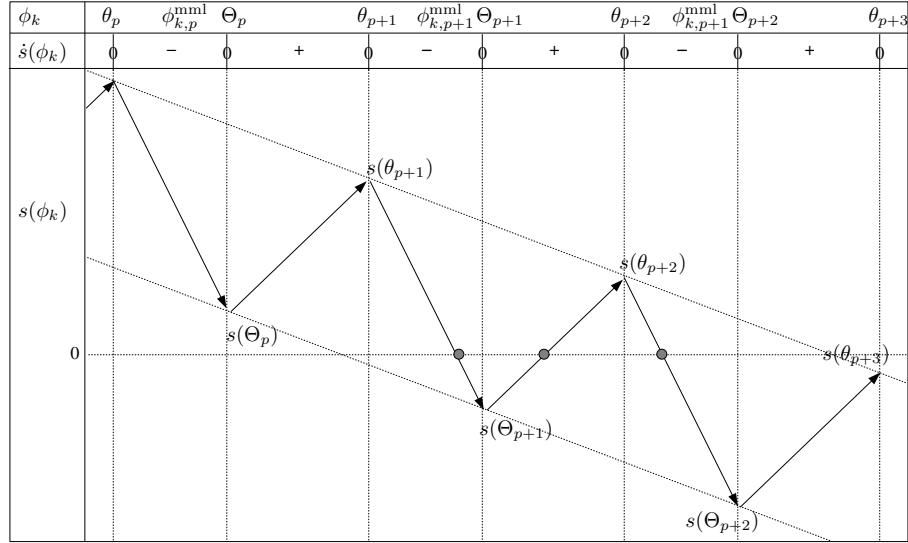


FIGURE C.2 – Tableau de variation de la fonction  $s(\phi_k)$  dans le cas où  $a_k > 1$  et avec pour notation  $\hat{\phi}_{k,p}^{\text{mml}} = \hat{\phi}_k^{\text{mml}} + 2\pi/\bar{r}p$ . La ligne horizontale  $s(\phi_k) = 0$  est représentée pour le cas particulier  $s(\theta_0) \neq 0 \bmod(2\pi/\bar{r})$  et  $s(\Theta_0) \neq 0 \bmod(2\pi/\bar{r})$ .

# Annexe D

## Expression de l'estimateur RVB $\hat{\phi}_k^{rvb}$

Cette annexe donne les détails des calculs aboutissant aux expressions (5.43) et (5.44) de l'estimateur RVB  $\hat{\phi}_k^{rvb}$  pour  $k = 1$  et  $k > 1$ .

### D.1 Expression de $\hat{\phi}_k^{rvb}$ pour $k = 1$

Nous nous intéressons ici aux calculs donnant l'expression de l'estimateur RVB pour  $k = 1$ . Ces calculs utilisent l'étude de la fonction  $x \rightarrow \exp(\beta \cos(x))$  et de sa transformée en série de Fourier [104]

$$\exp(\beta \cos(x)) = I_0(\beta) + 2 \sum_{q=1}^{+\infty} I_q(\beta) \cos(qx) \quad (\text{D.1})$$

avec

$$I_q(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos(\theta)} \cos(q\theta) d\theta \quad (\text{D.2})$$

la fonction de Bessel modifiée du premier genre d'ordre  $q$ . En utilisant la définition (5.42) et l'expression (5.39) de la distribution  $\tilde{f}(\phi_1 | \mathbf{S}_1)$ , l'estimateur RVB à l'instant  $k = 1$  s'exprime par

$$\hat{\phi}_1^{rvb} = \frac{\int_{\phi_1} \phi_1 f(\phi_1) \exp(\beta_1 \cos(\bar{r}[\hat{\phi}_1^{mml} - \phi_1])) d\phi_1}{\int_{\phi_1} f(\phi_1) \exp(\beta_1 \cos(\bar{r}[\hat{\phi}_1^{mml} - \phi_1])) d\phi_1} \quad (\text{D.3})$$

avec  $\beta_1 = 2\xi|z_1|$ . Grâce à la distribution a priori (5.19) de  $\phi_1$  et la série de Fourier (D.1), on peut écrire

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1^{rvb} &= \frac{\int_{-\frac{\pi}{\bar{r}}}^{\frac{\pi}{\bar{r}}} \phi_1 \left[ I_0(\beta_1) + 2 \sum_{q=1}^{+\infty} I_q(\beta_1) \cos(q\bar{r}[\hat{\phi}_1^{mml} - \phi_1]) \right] d\phi_1}{\int_{-\frac{\pi}{\bar{r}}}^{\frac{\pi}{\bar{r}}} \left[ I_0(\beta_1) + 2 \sum_{q=1}^{+\infty} I_q(\beta_1) \cos(q\bar{r}[\hat{\phi}_1^{mml} - \phi_1]) \right] d\phi_1}, \\ &\stackrel{\text{not}}{=} \frac{n_1}{d_1}. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

De manière évidente, pour tout  $q \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\int_{-\frac{\pi}{\bar{r}}}^{\frac{\pi}{\bar{r}}} \cos(q\bar{r}[\hat{\phi}_1^{mml} - \phi_1]) d\phi_1 = 0. \quad (\text{D.5})$$

Par conséquent, le dénominateur  $d_1$  s'écrit

$$d_1 = \frac{2\pi}{\bar{r}} I_0(\beta_1). \quad (\text{D.6})$$

Concernant le numérateur  $n_1$ , il est facile de voir que l'intégrale du premier terme est nulle. Grâce à une intégration par partie sur le second terme du numérateur, on obtient

$$n_1 = -\frac{4\pi}{\bar{r}^2} \sum_{q=1}^{+\infty} (-1)^q \frac{I_q(\beta_1) \sin(q\bar{r}\hat{\phi}_1^{mml})}{q}. \quad (\text{D.7})$$

En combinant les expressions de  $n_1$  et  $d_1$ , on obtient l'expression de l'estimateur RVB suivante

$$\hat{\phi}_1^{rvb} = -\frac{2}{\bar{r}} \sum_{q=1}^{+\infty} (-1)^q \frac{I_q(\beta_1)}{I_0(\beta_1)} \frac{\sin(q\bar{r}\hat{\phi}_1^{mml})}{q}. \quad (\text{D.8})$$

## D.2 Expression de $\hat{\phi}_k^{rvb}$ pour $k > 1$

Nous nous intéressons ici aux calculs donnant l'expression de l'estimateur RVB pour  $k > 1$ . En utilisant les expressions (5.42) et (5.41), l'estimateur RVB s'exprime par

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_k^{rvb} &= \frac{\int_{\phi_k} \phi_k \exp \left\{ \beta_k \cos(\bar{r}[\hat{\phi}_k^{mml} - \phi_k]) - \frac{(\phi_k - \hat{\phi}_{k-1}^{rvb})^2}{2\sigma_\phi^2} \right\} d\phi_k}{\int_{\phi_k} \exp \left\{ \beta_k \cos(\bar{r}[\hat{\phi}_k^{mml} - \phi_k]) - \frac{(\phi_k - \hat{\phi}_{k-1}^{rvb})^2}{2\sigma_\phi^2} \right\} d\phi_k} \\ &\stackrel{\text{not}}{=} \frac{n_k}{d_k} \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Grâce aux résultats de [103], le dénominateur  $d_k$  peut s'écrire

$$d_k = \sqrt{2\pi} \sigma_\phi \left[ I_0(\beta_k) + 2 \sum_{q=1}^{+\infty} I_q(\beta_k) e^{-\frac{\sigma_\phi^2 \bar{r}^2 q^2}{2}} \cos(q\bar{r}[\hat{\phi}_k^{mml} - \hat{\phi}_{k-1}^{rvb}]) \right] \quad (\text{D.11})$$

En appliquant le théorème de Parseval au numérateur  $n_k$ , il est possible d'écrire

$$n_k = \int_\nu \mathcal{F} \left\{ e^{\beta_k \cos(\bar{r}[\hat{\phi}_k^{mml} - \phi_k])} \right\}(\nu) \mathcal{F}^* \left\{ \phi_k e^{-\frac{(\phi_k - \hat{\phi}_{k-1}^{rvb})^2}{2\sigma_\phi^2}} \right\}(\nu) d\nu \quad (\text{D.12})$$

où  $\mathcal{F}\{g\}(\nu)$  est la transformée de Fourier de la fonction  $g$  au point de fréquence  $\nu$ . Grâce aux propriétés de la transformée de Fourier et au développement en série de Fourier (D.1), le premier terme du numérateur peut s'écrire

$$\mathcal{F} \left\{ e^{\beta_k \cos(\bar{r}[\hat{\phi}_k^{mml} - \phi_k])} \right\}(\nu) = I_0(\beta_k) \delta(\nu) + e^{-i2\pi\nu\hat{\phi}_k^{mml}} \sum_{q=1}^{+\infty} I_q(\beta_k) \left[ \delta(\nu - q\frac{\bar{r}}{2\pi}) + \delta(\nu + q\frac{\bar{r}}{2\pi}) \right] \quad (\text{D.13})$$

avec  $\delta(\nu)$  la fonction delta de Dirac. Le second terme du numérateur peut quant à lui être développé via une intégration par partie :

$$\mathcal{F} \left\{ \phi_k e^{-\frac{(\phi_k - \hat{\phi}_{k-1}^{rvb})^2}{2\sigma_\phi^2}} \right\}(\nu) = \sqrt{2\pi} \sigma_\phi \left[ \hat{\phi}_{k-1}^{rvb} - i2\pi\sigma_\phi^2 \nu \right] e^{-i2\pi\nu\hat{\phi}_{k-1}^{rvb}} e^{-2\pi^2\sigma_\phi^2\nu^2}. \quad (\text{D.14})$$

Ainsi, en combinant les expressions (D.13) et (D.14), il est possible d'obtenir l'expression du numérateur suivante

$$n_k = \sqrt{2\pi}\sigma_\phi \left[ I_0(\beta_k)\hat{\phi}_{k-1}^{rvb} + 2 \sum_{q=1}^{+\infty} I_q(\beta_k)e^{-\frac{\sigma_\phi^2 \bar{r}^2 q^2}{2}} \right. \\ \left. \left\{ \hat{\phi}_{k-1}^{rvb} \cos(q\bar{r}[\hat{\phi}_k^{mml} - \hat{\phi}_{k-1}^{rvb}]) + \sigma_\phi^2 \bar{r} q \sin(q\bar{r}[\hat{\phi}_k^{mml} - \hat{\phi}_{k-1}^{rvb}]) \right\} \right] \quad (\text{D.15})$$

En combinant (D.11) et (D.15), on retrouve l'expression de l'estimateur RVB (5.44).



## RESUME

La thèse a pour but de développer des algorithmes robustes de poursuite de phase multifréquence en environnement dégradé. L'objectif est d'élaborer de nouvelles structures pouvant opérer à des niveaux de rapport signal à bruit inférieurs aux limites des algorithmes actuellement implantés dans des récepteurs grand public. Les problèmes de robustesse des algorithmes d'estimation de phase étant en grande partie causés par le phénomène de sauts de cycle, les différents axes de recherche se sont focalisés sur des nouvelles approches de développement de phase au sein des structures de poursuite. Pour ce faire, deux approches ont été étudiées et testées. Dans un premier temps, deux structures de poursuite monofréquence basées sur une DPLL conventionnelle ont été développées. Ces structures disposent d'un système externe de développement de phase visant à prédire et pré-compenser la sortie du discriminateur grâce à l'analyse des sorties du discriminateur ou des sorties du filtre de boucle. La réduction de la dynamique à estimer va alors permettre de réduire l'apparition des sauts de cycle se produisant au niveau du discriminateur. Par la suite, ce système de développement de phase a été adapté à la poursuite de phase multifréquence. Grâce à l'exploitation de la diversité en fréquence offerte par les signaux de navigation (i.e., de la proportionnalité des fréquences Doppler), il a été possible de mettre en place une étape de fusion de données qui a permis d'améliorer la précision de la prédiction de la sortie du discriminateur et donc d'améliorer la robustesse de la structure. Dans un second temps, les travaux de recherche se sont axés sur une nouvelle approche de poursuite de phase et de correction du phénomène de sauts de cycle basée sur une technique de filtrage Bayésien variationnel. Toujours en exploitant la diversité en fréquence des signaux de navigation, cette méthode suppose un modèle de dynamique de phase Markovien qui va imposer une certaine continuité de l'estimation et va permettre de fournir une estimation de phase développée.

**Mots-clés :** Boucle à verrouillage de phase, poursuite de phase, sauts de cycle, signaux multifréquence, diversité en fréquence, filtrage bayésien, approche variationnelle.

## ABSTRACT

This thesis aims at introducing multifrequency phase tracking algorithms operating in low  $C/N_0$  environment. The objective is to develop new structures whose tracking limits are lower than that of current algorithms used in mass market receivers. Phase tracking suffers from a lack of robustness due to the cycle slip phenomenon. Works have thus been focused on elaborating new phase unwrapping systems. To do so, two different tracking approaches were studied. First, we have developed new monofrequency tracking loops based on a conventional DPLL. These structures aim at predicting the discriminator output by analyzing, thanks to a polynomial model, the last output samples of either the discriminator or the loop filter. Once the discriminator output is predicted, the estimated value is pre-compensated so that the phase dynamics to be tracked is reduced as well as the cycle slip rate. Then, the unwrapping structure analyzing the loop filter outputs has been extended to multifrequency signals. Using a data fusion step, the new multifrequency structure takes advantage of the frequency diversity of a GNSS signal (i.e., proportionality of Doppler frequencies) to improve the tracking performances. Secondly, studies have been focused on developing a new multifrequency tracking algorithm using variational Bayesian filtering technique. This tracking method, which also uses the GNSS frequency diversity, assumes a Markovian phase dynamics that enforces the smoothness of the phase estimation and unwraps it.

**Keywords :** phase locked loops, phase tracking, cycle slips, multifrequency signal, frequency diversity, Bayesian filtering, variational approximation.