测码伪距观测方程推导及实现说明

一、 概述

绝对定位一般以地球质心作为参考点，确定接收机天线在指定坐标系下的绝对位置。

绝对定位的基本原理是以卫星和用户接收机天线之间的距离观测量为基准，根据已知的卫星瞬时坐标，来确定用户接收机天线的位置。

GPS 的绝对定位实质是空间距离后方交会（三球相交），即在一个测站中，只需要 3 个独立的距离观测量，即可计算用户接收机天线的坐标(X,Y,Z)这三个未知参数。但又因为卫星与接收机的时钟不是严格同步的，存在钟差，卫星的钟差可通过星历给出的参数进行修正，而接收机的钟差一般难以预先准确测定，所以将**接收机的钟差**作为第四个未知参数，因此在一次定位中，应至少同步观测 4 个或以上卫星。

在钟差的影响下，卫星和用户接收机天线之间的距离又称为**伪距离测量**。接收机接收信号有**码**和**载波**两种，因此伪距又分**测码**和**测相**两种，而在这里只针对**测码伪距观测方程**推导。

二、 测码伪距观测方程推导

接收机内部通过生成伪随机码与接收到的真实的信号进行匹配，从而计算出卫星发射信号时的时间，再利用这个时间乘以光速获取码伪距值，那么我们就从这个入手进行推导测码伪距观测方程，需要注意的是，我们推导出来的方程本质是利用数学模型去表达码伪距，它与接收机输出的伪距不完全一致。

我们都知道卫星和接收机都有内置的时钟系统，那么设：

t^j：表示卫星的钟面时刻，即真实发射信号时刻；
$t^j(GPS)$：表示第 j 颗卫星发出信号时的 GPS 标准时间；
δt^j：表示卫星的钟差；

t_i：表示接收机的钟面时刻，即接收机真实接收信号时刻；
$t_i(GPS)$：表示对应卫星的接收机接收信号时刻的 GPS 标准时间；
δt_i：表示接收机的钟差。

因此卫星时间和接收机时间可表达为：

$$t^j = t^j(GPS) + \delta t^j$$
$$t_i = t_i(GPS) + \delta t_i$$

根据距离等于光速乘以传播时间的原则，在不考虑大气误差的情况下，伪距$\tilde{\rho}_i^j$ 等于光速C乘以信号传播时间，即接收机接收时间t_i减卫星发射信号时间t^j：

$$\tilde{\rho}_i^j(\mathrm{t}) = C * \left(t_i - t^j\right)$$

将以上公式合并后，得到伪距表达公式：

$$\tilde{\rho}_i^j(\mathrm{t}) = C * [t_i(GPS) - t^j(GPS)] + C * \left(\delta t_i - \delta t^j\right)$$

设$\boldsymbol{\rho_i^j}$表示为卫星 j 到接收机天线的几何距离，在不考虑卫星和接收机的钟差下，则有：

$$\boldsymbol{\rho_i^j(t) = C * [t_i(GPS) - t^j(GPS)]}$$

代入伪距公式后，得到新的伪距表达公式：

$$\tilde{\rho}_i^j(\mathrm{t}) = \rho_i^j(\mathrm{t}) + C * \left(\delta t_i - \delta t^j\right)$$

实际上，我们还需要考虑大气误差存在，比如电离层误差δI_i^j、对流层误差δT_i^j、以及其它误差。因为电离层、对流层都有相应的误差模型，可以计算具体的误差值，而其它误差就不做考虑，因此得到完整的伪距表达公式：

$$\tilde{\rho}_i^j(\mathrm{t}) = \rho_i^j(\mathrm{t}) + C * \left(\delta t_i - \delta t^j\right) + \delta I_i^j + \delta T_i^j$$

前面说到定位是以地球质心作为参考点，假设以地球质心作为空间直角坐标系的原点(0,0,0)，那么卫星、接收机天线都处于这个巨大的空间直角坐标系中，此时，在不考虑任何误差的情况下，根据空间几何的原理，通过卫星的坐标$\boldsymbol{P^j(t)}\left(\boldsymbol{X^j(t), Y^j(t), Z^j(t)}\right)$与接收机天线的坐标$\boldsymbol{P_i(X_i, Y_i, Z_i)}$就可以计算出$P^j$到$P_i$的空间**几何距离**。因此$\rho_i^j$也可以表达为：

$$\rho_i^j(\mathrm{t}) = C * \left[t_i(GPS) - t^j(GPS)\right] = \sqrt{(X^j(t) - X_i)^2 + (Y^j(t) - Y_i)^2 + (Z^j(t) - Z_i)^2}$$

代入伪距表达公式后，得到以下**测码伪距观测方程**：

$$\tilde{\rho}_i^j(\mathrm{t}) = \sqrt{(X^j(t) - \boldsymbol{X_i})^2 + (Y^j(t) - \boldsymbol{Y_i})^2 + (Z^j(t) - \boldsymbol{Z_i})^2} + C * \left(\boldsymbol{\delta t_i} - \delta t^j\right) + \delta I_i^j + \delta T_i^j$$

其中的$\boldsymbol{X_i}$、$\boldsymbol{Y_i}$、$\boldsymbol{Z_i}$、$\boldsymbol{\delta t_i}$就是我们需要求解的 4 个未知数，但通过这个方程，很难解算出结果，因此我们需要引入一个概念：非线性方程的线性化。

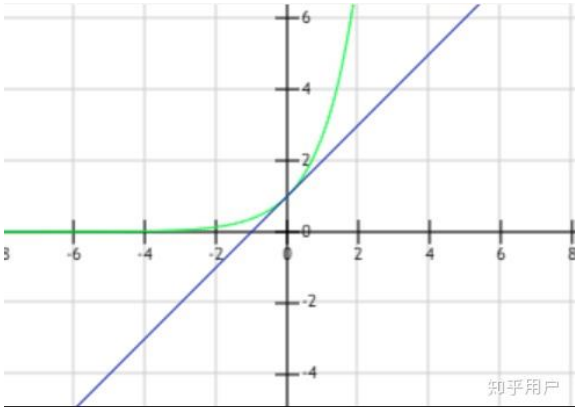
三、 测码伪距观测方程线性化

1. 线性化
   1） 概念

   实际优化问题的目标函数往往比较复杂，为了使问题简化，通常将目标函数在某点或某个取值区间附近，用另外一个简单的函数去逼近原函数，将复杂

的函数简单化。

如下图，绿色是原函数，蓝色是简化后的函数，可以看出在（-1, 1）区间，原函数与简化后的函数近似。



目前常用的线性化方程式使用**泰勒级数**展开。

2） 泰勒级数展开

设$f\left(x^1, x^2 \ldots x^n\right)$，（$x^1, x^2 \ldots x^n$表示有 n 个参数），点$\left(x_k^1, x_k^2 \ldots x_k^n\right)$展开：

$$
\begin{aligned}
& f\left(x^1, x^2 \ldots x^n\right) \\
& \quad= f\left(x_k^1, x_k^2 \ldots x_k^n\right)+\sum_{i=1}^n \frac{1}{1!}\left[\left(x^i-x_k^i\right) f_{x^i}^{\prime}\left(x_k^1, x_k^2 \ldots x_k^n\right)\right] \\
& \quad+\sum_{i, j=1}^n \frac{1}{2!}\left[\left(x^i-x_k^i\right)\left(x^j-x_k^j\right) f_{x^{ij}}^{\prime\prime}\left(x_k^1, x_k^2 \ldots x_k^n\right)\right]+\cdots \\
& \quad+\sum_{i, j \ldots m=1}^n \frac{1}{m!}\left[\left(x^i-x_k^i\right)\left(x^j-x_k^j\right) \ldots\left(x^m-x_k^m\right) f_{x^{ij \ldots m}}^{\prime\prime \ldots \prime}\left(x_k^1, x_k^2 \ldots x_k^n\right)\right] \\
& \quad+O^n
\end{aligned}
$$

只取一次项时：

$$
f\left(x^1, x^2 \ldots x^n\right)= f\left(x_k^1, x_k^2 \ldots x_k^n\right)+\sum_{i=1}^n \frac{1}{1!}\left[\left(x^i-x_k^i\right) f_{x^i}^{\prime}\left(x_k^1, x_k^2 \ldots x_k^n\right)\right]
$$

2. 进行线性化

首先，我们假设如下：

$$
\begin{cases}
X_i=X_i^0+\delta X_i \\
Y_i=Y_i^0+\delta Y_i \\
Z_i=Z_i^0+\delta Z_i
\end{cases}
$$

其中，点$P_i\left(X_i, Y_i, Z_i\right)$是用户接收机天线的**真实位置**，点$\left(X_i^0, Y_i^0, Z_i^0\right)$表示用户接收机天线位置的**近似位置**，（$\delta X_i, \delta Y_i, \delta Z_i$） 则是其**误差值**。

此时我们对$\rho_i^j(t)$以点$\left(X_i^0, Y_i^0, Z_i^0\right)$ 使用**泰勒级数**进行展开，并**取一次项**，则可以得到线性化后的$\rho_i^j(t)$的公式：

$$\begin{aligned}\rho_i^j(\mathrm{t}) = f(X_i, Y_i, Z_i) \\ &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X_i^0}, \boldsymbol{Y_i^0}, \boldsymbol{Z_i^0}) + \boldsymbol{f'_{X_i}}(\boldsymbol{X_i^0}, \boldsymbol{Y_i^0}, \boldsymbol{Z_i^0})(\boldsymbol{X_i} - \boldsymbol{X_i^0}) + \boldsymbol{f'_{Y_i}}(\boldsymbol{X_i^0}, \boldsymbol{Y_i^0}, \boldsymbol{Z_i^0})(\boldsymbol{Y_i} - \boldsymbol{Y_i^0}) \\ &+ \boldsymbol{f'_{Z_i}}(\boldsymbol{X_i^0}, \boldsymbol{Y_i^0}, \boldsymbol{Z_i^0})(\boldsymbol{Z_i} - \boldsymbol{Z_i^0})\end{aligned}$$

用导数的符号表示，可将上述方程简化：

$$\rho_i^j(\mathrm{t}) = \left(\rho_i^j(\mathrm{t})\right)_0 + \left(\frac{\partial \rho_i^j(\mathrm{t})}{\partial X_i}\right)_0 (\boldsymbol{X_i} - \boldsymbol{X_i^0}) + \left(\frac{\partial \rho_i^j(\mathrm{t})}{\partial Y_i}\right)_0 (\boldsymbol{Y_i} - \boldsymbol{Y_i^0}) + \left(\frac{\partial \rho_i^j(\mathrm{t})}{\partial Z_i}\right)_0 (\boldsymbol{Z_i} - \boldsymbol{Z_i^0})$$

$$= \left(\rho_i^j(\mathrm{t})\right)_0 + \left(\frac{\partial \rho_i^j(\mathrm{t})}{\partial X_i}\right)_0 \delta X_i + \left(\frac{\partial \rho_i^j(\mathrm{t})}{\partial Y_i}\right)_0 \delta Y_i + \left(\frac{\partial \rho_i^j(\mathrm{t})}{\partial Z_i}\right)_0 \delta Z_i$$

其中：

$\left(\rho_i^j(\mathrm{t})\right)_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X_i^0}, \boldsymbol{Y_i^0}, \boldsymbol{Z_i^0}) = \sqrt{\left(X^j(t) - X_i^0\right)^2 + \left(Y^j(t) - Y_i^0\right)^2 + \left(Z^j(t) - Z_i^0\right)^2}$，即将点 $(\boldsymbol{X_i^0}, \boldsymbol{Y_i^0}, \boldsymbol{Z_i^0})$的代入到公式$\rho_i^j(\mathrm{t})$后的值；

$\left(\frac{\partial \rho_i^j(\mathrm{t})}{\partial X_i}\right)_0 = \boldsymbol{f'_{X_i}}(\boldsymbol{X_i^0}, \boldsymbol{Y_i^0}, \boldsymbol{Z_i^0})$、$\left(\frac{\partial \rho_i^j(\mathrm{t})}{\partial Y_i}\right)_0 = \boldsymbol{f'_{Y_i}}(\boldsymbol{X_i^0}, \boldsymbol{Y_i^0}, \boldsymbol{Z_i^0})$、$\left(\frac{\partial \rho_i^j(\mathrm{t})}{\partial Z_i}\right)_0 = \boldsymbol{f'_{Z_i}}(\boldsymbol{X_i^0}, \boldsymbol{Y_i^0}, \boldsymbol{Z_i^0})$是对$\rho_i^j(\mathrm{t})$分别求$\boldsymbol{X_i}$、$\boldsymbol{Y_i}$、$\boldsymbol{Z_i}$在$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X_i}, \boldsymbol{Y_i}, \boldsymbol{Z_i})$的偏导数。

要求解$\left(\frac{\partial \rho_i^j(\mathrm{t})}{\partial X_i}\right)_0$、$\left(\frac{\partial \rho_i^j(\mathrm{t})}{\partial Y_i}\right)_0$、$\left(\frac{\partial \rho_i^j(\mathrm{t})}{\partial Z_i}\right)_0$这三个偏导数，我们通过将$f(X_i, Y_i, Z_i)$以复合函数的形态展示，令：

$$\rho_i^j(\mathrm{t}) = f(X_i, Y_i, Z_i) = f(u) = \sqrt{u}$$

$$u = G(X_i, Y_i, Z_i) = \left(X^j(t) - X_i\right)^2 + \left(Y^j(t) - Y_i\right)^2 + \left(Z^j(t) - Z_i\right)^2$$

以求X_i的偏导数为例，根据复合函数求导公式以及导数求导公式（可参考第六章附录，导数公式）：

$$\frac{\partial \rho_i^j(\mathrm{t})}{\partial X_i} = \frac{\partial f(u)}{\partial u} * \frac{\partial u}{\partial X_i}$$

分别求$\frac{\partial f(u)}{\partial u}$、$\frac{\partial u}{\partial X_i}$的导数，如下：

$$\frac{\partial f(u)}{\partial u} = (\sqrt{u})' = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{(X^j(t) - X_i)^2 + (Y^j(t) - Y_i)^2 + (Z^j(t) - Z_i)^2}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial X_i} &= \left[\left(X^j(t) - X_i\right)^2 + \left(Y^j(t) - Y_i\right)^2 + \left(Z^j(t) - Z_i\right)^2\right]' \\ &= \left[\left(\boldsymbol{X^j(t)}\right)^2 - \boldsymbol{2X^j(t) * X_i + X_i}^2 + \left(Y^j(t) - Y_i\right)^2 + \left(Z^j(t) - Z_i\right)^2\right]' \\ &= \left(-2X^j(t) + 2X_i\right)\end{aligned}$$

那么：

$$\frac{\partial \rho_i^j(\mathrm{t})}{\partial X_i} = \frac{\partial f(u)}{\partial u} * \frac{\partial u}{\partial X_i} = \frac{\left(-2X^j(t) + 2X_i\right)}{2\sqrt{(X^j(t) - X_i)^2 + (Y^j(t) - Y_i)^2 + (Z^j(t) - Z_i)^2}}$$

$$= -\frac{\left(X^j(t) - X_i\right)}{\sqrt{(X^j(t) - X_i)^2 + (Y^j(t) - Y_i)^2 + (Z^j(t) - Z_i)^2}} = -\frac{\left(X^j(t) - X_i\right)}{\rho_i^j(\mathrm{t})}$$

又因为是在$(\boldsymbol{X_i^0}, \boldsymbol{Y_i^0}, \boldsymbol{Z_i^0})$处，因此将$(\boldsymbol{X_i^0}, \boldsymbol{Y_i^0}, \boldsymbol{Z_i^0})$代入到上述方程后：

$$\left(\frac{\partial \rho_i^j(\mathrm{t})}{\partial X_i}\right)_0 = -\frac{X^j(t) - \boldsymbol{X_i^0}}{\sqrt{\left(X^j(t) - \boldsymbol{X_i^0}\right)^2 + \left(Y^j(t) - \boldsymbol{Y_i^0}\right)^2 + \left(Z^j(t) - \boldsymbol{Z_i^0}\right)^2}} = -\frac{\left(X^j(t) - \boldsymbol{X_i^0}\right)}{\left(\boldsymbol{\rho_i^j(\mathrm{t})}\right)_0}$$

同理可解出Y_i、Z_i的偏导数，用$l(t)^j$、$m(t)^j$、$n(t)^j$分别表示 X_i^0、Y_i^0、Z_i^0的偏导数：

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \rho_i^j(\mathrm{t})}{\partial X_i}\right)_0 = -\dfrac{1}{\left(\rho_i^j(\mathrm{t})\right)_0}\left(X^j(t) - X_i^0\right) = -l(t)^j \\ \left(\dfrac{\partial \rho_i^j(\mathrm{t})}{\partial Y_i}\right)_0 = -\dfrac{1}{\left(\rho_i^j(\mathrm{t})\right)_0}\left(Y^j(t) - Y_i^0\right) = -m(t)^j \\ \left(\dfrac{\partial \rho_i^j(\mathrm{t})}{\partial Z_i}\right)_0 = -\dfrac{1}{\left(\rho_i^j(\mathrm{t})\right)_0}\left(Z^j(t) - Z_i^0\right) = -n(t)^j \end{cases}$$

将上述偏导数方程代入后, 可用简化方程表示：

$$\rho_i^j(\mathrm{t}) = \left(\rho_i^j(\mathrm{t})\right)_0 + \left(\frac{\partial \rho_i^j(\mathrm{t})}{\partial X_i}\right)_0 \delta X_i + \left(\frac{\partial \rho_i^j(\mathrm{t})}{\partial Y_i}\right)_0 \delta Y_i + \left(\frac{\partial \rho_i^j(\mathrm{t})}{\partial Z_i}\right)_0 \delta Z_i$$

$$= \left(\rho_i^j(\mathrm{t})\right)_0 - l(t)^j \delta X_i - m(t)^j \delta Y_i - n(t)^j \delta Z_i$$

将上述线性化后的$\rho_i^j(\mathrm{t})$代入到码伪距观测方程后，就得到完整的线性化后的码伪距观测方程：

$$\boldsymbol{\tilde{\rho}_i^j(t) = \left(\rho_i^j(t)\right)_0 - l(t)^j \delta X_i - m(t)^j \delta Y_i - n(t)^j \delta Z_i + C(\delta t_i - \delta t^j) + \delta I_i^j(t) + \delta T_i^j(t)}$$

其中：

$$
\begin{cases}
\left(\rho_i^j(t)\right)_0 = \sqrt{\left(X^j(t)-X_i^0\right)^2+\left(Y^j(t)-Y_i^0\right)^2+\left(Z^j(t)-Z_i^0\right)^2} \\
l(t)^j = \dfrac{X^j(t)-X_i^0}{\left(\rho_i^j(t)\right)_0} \\
m(t)^j = \dfrac{Y^j(t)-Y_i^0}{\left(\rho_i^j(t)\right)_0} \\
n(t)^j = \dfrac{Z^j(t)-Z_i^0}{\left(\rho_i^j(t)\right)_0}
\end{cases}
$$

$\left(\boldsymbol{X^j(t), Y^j(t), Z^j(t)}\right)$，$(\boldsymbol{j=1,2\ldots n})$：表示第 j 个卫星的坐标，通过卫星星历计算；

$\left(\boldsymbol{X_i^0, Y_i^0, Z_i^0}\right)$：表示为用户接收机天线位置的近似值，通常初始化为（0,0,0）；

$\boldsymbol{\tilde{\rho}_i^j(t)}$：是接收机可以直接获取的卫星到用户接收机天线的伪距值，通过接收机获取；

$\left(\boldsymbol{\rho_i^j(t)}\right)_{\boldsymbol{0}}$：是卫星 j 到点$\left(\boldsymbol{X_i^0, Y_i^0, Z_i^0}\right)$的几何距离，可计算；

$\boldsymbol{l(t)^j}$、$\boldsymbol{m(t)^j}$、$\boldsymbol{n(t)^j}$：表示表示X_i^0、Y_i^0、Z_i^0的偏导数，可计算；

$\boldsymbol{\delta t^j}$：表示第 j 颗卫星的钟差，可通过星历数据中的卫星钟差参数进行计算；

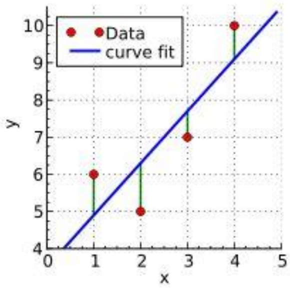
$\boldsymbol{\delta I_i^j(t)}$、 $\boldsymbol{\delta T_i^j(t)}$：是电离层和对流层的误差，通过误差模型可以计算；

至此，对于这个码伪距观测方程，$\boldsymbol{\delta X_i}$、$\boldsymbol{\delta Y_i}$、$\boldsymbol{\delta Z_i}$、$\boldsymbol{\delta t_i}$就是我们需要求解的 4 个未知参数。

四、 利用最小二乘法原理计算位置

最小二乘法（least sqaure）的核心原理是通过计算**最小的误差平方和**去评估最优解。

如下图，我们希望找一根直线，使其能穿过 4 个红点，但实际上是找不到的，那找一根近似的直线使这 4 个红点到这个直线的误差平方和最小即可。



要获得最小的误差平方和，就要利用导数的原理，其意义是找到函数的变化率，也就是当导数为 0 时，函数的值最小，即误差的平方和的导数为 0 时，其值最小。

$$
\boldsymbol{\tilde{\rho}_i^j(t) = \left(\rho_i^j(t)\right)_0 - l(t)^j\delta X_i - m(t)^j\delta Y_i - n(t)^j\delta Z_i + C(\delta t_i - \delta t^j) + \delta I_i^j(t) + \delta T_i^j(t)}
$$

通过观察伪距观测方程可以看出，等号的左边是接收机真实获取的伪距值，而等号的右

边则是通过数学模型模拟的伪距值，因此，理论上这两者是不相等的，故我们认为二者之差为其真实的误差值，因此我们根据最小二乘法，我们就可以引入误差方程$V_i^j(t)$：

$$V_i^j(t) = \left(\rho_i^j(t)\right)_0 - l(t)^j \boldsymbol{\delta X_i} - m(t)^j \boldsymbol{\delta Y_i} - n(t)^j \boldsymbol{\delta Z_i} + C\boldsymbol{\delta t_i} - C\delta t^j + \delta I_i^j(t) + \delta T_i^j(t) - \boldsymbol{\tilde{\rho}_i^j(t)}$$

其中：

$\left(\rho_i^j(t)\right)_0 - l(t)^j \boldsymbol{\delta X_i} - m(t)^j \boldsymbol{\delta Y_i} - n(t)^j \boldsymbol{\delta Z_i} + C\boldsymbol{\delta t_i} - C\delta t^j + \delta I_i^j(t) + \delta T_i^j(t)$是我们通过现有的参数计算出来的伪距值，$\boldsymbol{\tilde{\rho}_i^j(t)}$是接收机真实获取的伪距值。

我们令已知参数为$\tilde{\lambda}_i^j(t)$:

$$\tilde{\lambda}_i^j(t) = \left(\rho_i^j(\mathrm{t})\right)_0 - C\delta t^j + \delta I_i^j(t) + \delta T_i^j(t) - \tilde{\rho}_i^j(\mathrm{t})$$

$$-\tilde{\lambda}_i^j(t) = \tilde{\rho}_i^j(\mathrm{t}) - \left[\left(\rho_i^j(\mathrm{t})\right)_0 - C\delta t^j + \delta I_i^j(t) + \delta T_i^j(t)\right]$$

代入到误差方程后，进一步简化误差方程：

$$V_i^j(t) = -l(t)^j \boldsymbol{\delta X_i} - m(t)^j \boldsymbol{\delta Y_i} - n(t)^j \boldsymbol{\delta Z_i} + C\boldsymbol{\delta t_i} - \tilde{\lambda}_i^j(t)$$

当我们有 $n(n \geq 4)$个误差方程后，则可列以下误差方程组，

$$\begin{cases} V_i^1(t) = -l(t)^1 \boldsymbol{\delta X_i} - m(t)^1 \boldsymbol{\delta Y_i} - n(t)^1 \boldsymbol{\delta Z_i} + C\boldsymbol{\delta t_i} - \tilde{\lambda}_i^1(t) \\ V_i^2(t) = -l(t)^2 \boldsymbol{\delta X_i} - m(t)^2 \boldsymbol{\delta Y_i} - n(t)^2 \boldsymbol{\delta Z_i} + C\boldsymbol{\delta t_i} - \tilde{\lambda}_i^2(t) \\ \cdots \\ V_i^n(t) = -l(t)^n \boldsymbol{\delta X_i} - m(t)^n \boldsymbol{\delta Y_i} - n(t)^n \boldsymbol{\delta Z_i} + C\boldsymbol{\delta t_i} - \tilde{\lambda}_i^n(t) \end{cases}$$

用矩阵表达如下：

$$\begin{bmatrix} V_i^1 \\ V_i^2 \\ \vdots \\ V_i^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l(t)^1 & -m(t)^1 & -n(t)^1 & C \\ -l(t)^2 & -m(t)^2 & -n(t)^2 & C \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ -l(t)^n & -m(t)^n & -n(t)^n & C \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \delta X_i \\ \delta Y_i \\ \delta Z_i \\ \delta t_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_i^1(t) \\ \tilde{\lambda}_i^2(t) \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}_i^n(t) \end{bmatrix}$$

用矩阵符号表示误差方程如下：

$$\boldsymbol{V = Q * \delta X - A}$$

其中：

$$V = \begin{bmatrix} V_i^1 \\ V_i^2 \\ \vdots \\ V_i^n \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -l(t)^1 & -m(t)^1 & -n(t)^1 & C \\ -l(t)^2 & -m(t)^2 & -n(t)^2 & C \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ -l(t)^n & -m(t)^n & -n(t)^n & C \end{bmatrix}, \delta X = \begin{bmatrix} \delta X_i \\ \delta Y_i \\ \delta Z_i \\ \delta t_i \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_i^1(t) \\ \tilde{\lambda}_i^2(t) \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}_i^n(t) \end{bmatrix}$$

根据最小二乘法的原理，即误差的平方和最小，设 J 函数是误差的平方和函数，得到：

$$J = V_i^1 * V_i^1 + V_i^2 * V_i^2 + \cdots V_i^n * V_i^n = [V_i^1\ V_i^2 \ldots V_i^n] * \begin{bmatrix} V_i^1 \\ V_i^2 \\ \vdots \\ V_i^n \end{bmatrix} = V^T * V$$

$$= (Q * \delta X - A)^T * (Q * \delta X - A) = [(Q * \delta X)^T - A^T] * (Q * \delta X - A)$$
$$= (\delta X^T * Q^T - A^T) * (Q * \delta X - A)$$
$$= \delta X^T * Q^T * Q * \delta X - Q^T * \delta X^T * A - A^T * Q * \delta X + A^T * A$$

根据求导的意义，当J函数对δX求导等于 0 时，即可得到其最优解（参考第六章关于矩阵的计算公式）：

$$\frac{\partial J}{\partial \delta X} = [Q^T * Q + (Q^T * Q)^T] * \delta X - Q^T * A - (A^T * Q)^T$$
$$= (Q^T Q)\delta X + (Q^T Q)^T \delta X - Q^T A - (A^T Q)^T = 2(Q^T Q)\delta X - 2Q^T A = 0$$

即可得出：

$$\delta X = \frac{(Q^T A)}{(Q^T Q)} = (Q^T Q)^{-1}(Q^T A)$$

其中，Q、A两个矩阵都是根据第三章内容可以计算出来的结果，因此，我们只需要代入到上述公式中，即可计算出δX的值。

因为(X_i^0, Y_i^0, Z_i^0)在一开始的时候，设置为(0,0,0)，且有以下关系：

$$\delta X = \begin{bmatrix} \delta X_i \\ \delta Y_i \\ \delta Z_i \\ \delta t_i \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} X_i = X_i^0 + \delta X_i \\ Y_i = Y_i^0 + \delta Y_i \\ Z_i = Z_i^0 + \delta Z_i \end{cases}$$

因此，我们将计算出来的(X_i, Y_i, Z_i)作为下一次的(X_i^0, Y_i^0, Z_i^0)，通过多次迭代计算后，就可以获取误差值最小的(X_i, Y_i, Z_i)，也就是我们需要计算的接收机天线位置坐标。

五、 程序实现流程

1. 读取卫星星历数据、原始观测量数据（即卫星的伪距、载波等）；
2. 通过卫星星历以及伪距信息计算出卫星基于 ECEF 的坐标、每个卫星的钟差；
3. 将接收机天线位置初始化为 0，0，0；
4. 根据推导的方程中各公式，结合卫星坐标、时间、伪距信息计算出对应的数值；
5. 根据最小二乘法，将上述的数据整理为对应的矩阵；
6. 根据矩阵计算法则计算出δX的值；
7. 重复 4-6 步，并设定δX值满足一个很小的值的时候，结束迭代；
8. 输出对应的坐标。

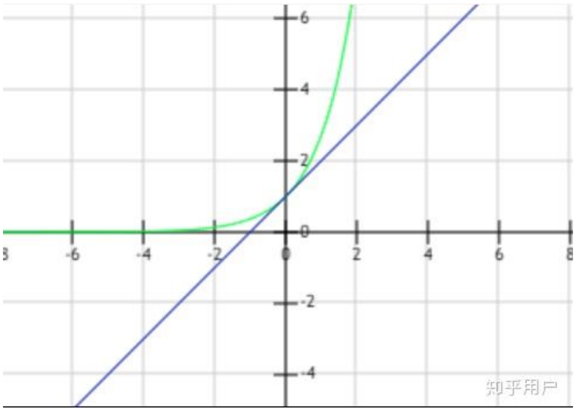
六、 附录

1. 线性化

   1. 概念

      实际优化问题的目标函数往往比较复杂，为了使问题简化，通常将目标函数在某点或某个取值区间附近，用另外一个简单的函数去逼近原函数，将复杂的函数简单化。

      如下图，绿色是原函数，蓝色是简化后的函数，可以看出在(-1,1)区间，原函数与简化后的函数近似。



      目前常用的线性化方程式使用泰勒级数展开。

   2) 泰勒级数展开

      设$f(x^1,x^2\dots x^n)$，（$x^1,x^2\dots x^n$表示有 n 个参数），点$(x_k^1,x_k^2\dots x_k^n)$展开：

$$
\begin{aligned}
f(x^1,x^2\dots x^n) \\
&= f(x_k^1,x_k^2\dots x_k^n)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1!}\left[\left(x^i-x_k^i\right)f'_{x^i}(x_k^1,x_k^2\dots x_k^n)\right] \\
&+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{2!}\left[\left(x^i-x_k^i\right)\left(x^j-x_k^j\right)f''_{x^{ij}}(x_k^1,x_k^2\dots x_k^n)\right]+\cdots \\
&+\sum_{i,j\dots m=1}^{n}\frac{1}{m!}\left[\left(x^i-x_k^i\right)\left(x^j-x_k^j\right)\dots\left(x^m-x_k^m\right)f''^{\cdots\prime}_{x^{ij\dots m}}(x_k^1,x_k^2\dots x_k^n)\right] \\
&+O^n
\end{aligned}
$$

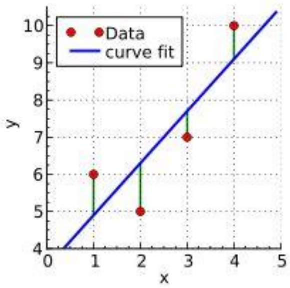
只取一次项时：

$$f(x^1,x^2\dots x^n)= f(x_k^1,x_k^2\dots x_k^n)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1!}\left[\left(x^i-x_k^i\right)f'_{x^i}(x_k^1,x_k^2\dots x_k^n)\right]$$

2. 最小二乘法

   最小二乘法（least sqaure）的核心原理是通过计算最小的误差平方和去评估最优解。

   如下图，我们希望找一根直线，使其能穿过 4 个红点，但实际上是找不到的，那找一根近似的直线使这 4 个红点到这个直线的误差平方和最小即可。



根据导数的原理，其意义是找到函数的变化率，也是到当导数为 0 时，函数的值最小。

3. 导数公式

1) 常用求导公式

$y = C$，$(C\text{为常数})$　$y' = 0$

$y = x^n$　　$y' = nx^{n-1}$

$y = \sin x$　　$y' = \cos x$

$y = \cos x$　　$y' = -\sin x$

$y = f(x) = a^x$　　$y' = a^x \cdot \ln a \ (a > 0)$

$y = f(x) = e^x$　　$y' = e^x$

$y = f(x) = e^x$　　$y' = e^x$

2) 复合函数求导原则

$y = f(u), u = g(x)$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{u}} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

3) 求偏导

对 x 求偏导，则把函数其它变量当做常数求导，如：

$u = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$u'_x = f'_x(x, y, z) = 2x$

$u'_y = f'_y(x, y, z) = 2y$

$u'_z = f'_z(x, y, z) = 2z$

4. 矩阵求导公式

1) 常用矩阵求导公式：

$$\frac{\partial X^T}{\partial X} = I \qquad \frac{\partial X^T A}{\partial X} = A \qquad \frac{\partial AX}{\partial X} = A^T$$

$$\frac{\partial X}{\partial X^T} = I \qquad \frac{\partial AX}{\partial X^T} = A \qquad \frac{\partial XA}{\partial X} = A^T$$

$$\frac{\partial X^T X}{\partial X} = 2X \qquad \frac{\partial X^T AX}{\partial X} = (A + A^T)X$$

2) 矩阵倒置运算法则：

$(A^T)^T = A$　　$(A + B)^T = A^T + B^T$　　$(kA)^T = kA^T$　$(AB)^T = B^T A^T$