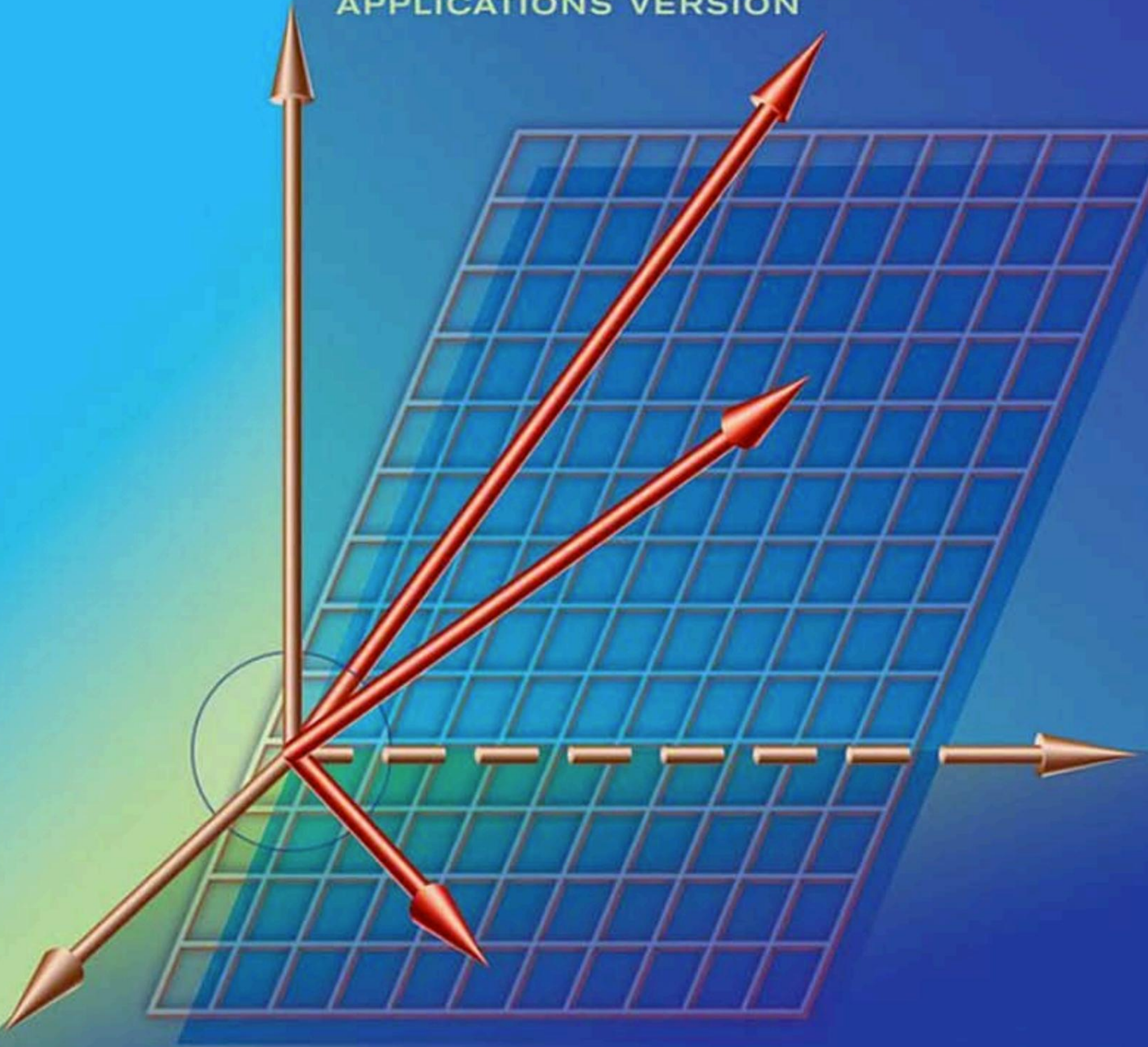
TENTH EDITION

Elementary Linear Algebra

APPLICATIONS VERSION



HOWARD ANTON / CHRIS RORRES

Sobre o autor

Howard Anton obteve seu bacharelado na Universidade de Lehigh, seu mestrado na Universidade de Illinois e seu doutorado. da Universidade Politécnica do Brooklyn, tudo em matemática. No início dos anos 1960, ele trabalhou para Burroughs Corporation e Avco Corporation em Cabo Canaveral, Flórida, onde esteve envolvido com o programa espacial tripulado. Em 1968 ingressou no Departamento de Matemática da Drexel University, onde lecionou em tempo integral até 1983. Desde então, dedicou a maior parte de seu tempo à redação de livros didáticos e atividades para associações matemáticas. O Dr. Anton foi presidente da Seção EPADEL da Mathematical Association of America (MAA), atuou no Conselho de Governadores dessa organização e orientou a criação dos Capítulos Estudantis da MAA. Além de vários artigos pedagógicos, ele publicou vários trabalhos de pesquisa em análise funcional, teoria de aproximação e topologia. Ele é mais conhecido por seus livros didáticos de matemática, que estão entre os mais utilizados no mundo. Existem atualmente mais de 150 versões de seus livros, incluindo traduções para espanhol, árabe, português, italiano, indonésio, francês, japonês, chinês, hebraico e alemão. Para relaxar, o Dr. Anton gosta de viajar e fotografar.

Prefácio

Esta edição de *álgebra linear elementar* oferece um tratamento introdutório de álgebra linear que é adequado para um primeiro curso de graduação. Seu objetivo é apresentar os fundamentos da álgebra linear da maneira mais clara possível - a pedagogia sólida é a consideração principal. Embora o cálculo não seja um pré-requisito, há algum material opcional que é claramente indicado para alunos com experiência em cálculo. Se desejado, esse material pode ser omitido sem perda de continuidade.

Tecnologia não é necessária para usar este livro, mas para instrutores que gostariam de usar MATLAB, *Mathematica,* Maple, ou calculadoras com recursos de álgebra linear, publicamos algum material de apoio que pode ser acessado em qualquer um dos seguintes sites:

www.howardanton.com

www.wiley.com/college/anton

Resumo das alterações nesta edição

Esta edição é uma grande revisão de seu antecessor. Além de incluir algum material novo, parte do material antigo foi simplificado para garantir que os principais tópicos possam ser abordados em um curso padrão. Estas são as mudanças mais significativas:

- **Vetores em espaço 2, espaço 3 e espaço n** Os capítulos 3 e 4 da edição anterior foram combinados em um único capítulo. Isso nos permitiu eliminar algumas exposições duplicadas e justapor conceitos no espaço n com aqueles no espaço 2 e no espaço 3, transmitindo assim mais claramente como as ideias do espaço n generalizam aquelas já familiares ao aluno.
- **Novos Elementos Pedagógicos** Cada seção agora termina com uma *Revisão de Conceitos* e um Domínio *de Habilidades* que fornecem ao aluno uma referência conveniente para as ideias principais naquela seção.
- **Novos Exercícios** Muitos novos exercícios foram adicionados, incluindo um conjunto de exercícios Verdadeiro/Falso no final do maioria das seções.
- **Cobertura anterior de autovalores e autovetores** O capítulo sobre autovalores e autovetores, que era o Capítulo 7 na edição anterior, é o Capítulo 5 nesta edição.
- **Espaços Vetores Complexos** O capítulo intitulado *Espaços Vetores Complexos* na edição anterior foi completamente revisado. As ideias mais importantes agora são abordadas na Seção 5.3 e na Seção 7.5 no contexto da diagonalização de matrizes. Uma breve revisão dos números complexos está incluída no Apêndice.
- **Formas Quadráticas** Este material foi extensivamente reescrito para focar mais precisamente nas ideias importantes.
- **Novo capítulo sobre métodos numéricos** Na edição anterior, uma variedade de tópicos apareceu no último capítulo. Esse capítulo foi substituído por um novo capítulo que se concentra *exclusivamente* em métodos numéricos de álgebra linear. Conseguimos isso movendo os tópicos não relacionados com métodos numéricos para outras partes do texto.
- **Decomposição de valor singular** Em reconhecimento à sua crescente importância, uma nova seção sobre *valor singular A decomposição* foi adicionada ao capítulo sobre métodos numéricos.

- **Pesquisa na Internet e o Método Power** Uma nova seção sobre o *Método Power* e sua aplicação para Os mecanismos de pesquisa da Internet foram adicionados ao capítulo sobre métodos numéricos.
- **Aplicações** Há uma versão expandida deste texto de Howard Anton e Chris Rorres intitulada *Elementary Linear Algebra: Applications Version,* 10 (ISBN 9780470432051), cuja finalidade é complementar esta versão com um extenso corpo de aplicações. No entanto, para acomodar os instrutores que nos pediram para incluir alguns aplicativos nesta versão do texto, nós o fizemos. Estes são geralmente menos detalhados do que aqueles que aparecem no texto de Anton/Rorres e podem ser omitidos sem perda de continuidade.

Características marcantes

- **Relações entre conceitos** Um de nossos principais objetivos pedagógicos é transmitir ao aluno que a álgebra linear é um assunto coeso e não simplesmente uma coleção de definições e técnicas isoladas. Uma maneira de fazer isso é usando teoremas de *Declarações Equivalentes* que revisitam continuamente as relações entre sistemas de equações, matrizes, determinantes, vetores, transformações lineares e autovalores. Para ter uma noção geral de como usamos essa técnica, veja os Teoremas 1.5.3, 1.6.4, 2.3.8, 4.8.10, 4.10.4 e depois o Teorema 5.1.6, por exemplo.
- **Transição suave para abstração** Como a transição de *Rn* para espaços vetoriais gerais é difícil para muitos alunos, um esforço considerável é dedicado a explicar o propósito da abstração e ajudar o aluno a “visualizar” ideias abstratas desenhando analogias com ideias geométricas familiares.
- **Precisão matemática** Quando razoável, tentamos ser matematicamente precisos. De acordo com o nível do público estudantil, as provas são apresentadas em um estilo paciente que é adaptado para iniciantes. Há uma breve seção no Apêndice sobre como ler declarações de prova, e há vários exercícios nos quais os alunos são guiados pelas etapas de uma prova e solicitados a justificar.
- **Adequação para um público diversificado** Este livro foi elaborado para atender às necessidades de estudantes de engenharia, ciência da computação, biologia, física, administração e economia, bem como daqueles que se especializam em matemática.
- **Notas Históricas** Para dar aos alunos uma noção da história da matemática e transmitir que pessoas reais criaram os teoremas e equações matemáticas que estão estudando, incluímos várias *Notas Históricas* que colocam o tópico estudado em perspectiva histórica.

Sobre os Exercícios

- **Conjuntos de exercícios graduados** Cada conjunto de exercícios começa com problemas de exercícios de rotina e progride para problemas com mais substância.
- **Exercícios de Verdadeiro/Falso** A maioria dos conjuntos de exercícios termina com um conjunto de exercícios de Verdadeiro/Falso que são projetados para verificar a compreensão conceitual e o raciocínio lógico. Para evitar pura adivinhação, os alunos são obrigados a justificar suas respostas de alguma forma.
- **Conjuntos de exercícios complementares** A maioria dos capítulos termina com um conjunto de exercícios complementares que tendem a ser mais desafiadores e forçam o aluno a usar as ideias do capítulo *inteiro* em vez de uma seção específica.

Materiais Suplementares para Alunos

- **Manual de Soluções do Aluno** Este suplemento fornece soluções detalhadas para a maioria dos exercícios teóricos e a pelo menos um exercício não rotineiro de cada tipo (ISBN 9780470458228).
- **Exercícios de tecnologia e arquivos de dados** Os exercícios de tecnologia que apareceram na edição anterior foram movidos para o site que acompanha este texto. Esses exercícios são projetados para serem resolvidos usando MATLAB, *Mathematica* ou Maple e são acompanhados por arquivos de dados em todos os três formatos. Os exercícios e dados podem ser baixados de qualquer um dos sites a seguir.

  www.howardanton.com

  www.wiley.com/college/anton

Materiais Suplementares para Instrutores

- **Manual de Soluções do Instrutor** Este suplemento fornece soluções elaboradas para a maioria dos exercícios do texto (ISBN 9780470458235).
- **WileyPLUS™** Este é o ambiente de ensino e aprendizagem on-line proprietário da Wiley que integra um versão digital deste livro com recursos de instrutor e aluno para atender a uma variedade de estilos de ensino e aprendizagem. O WileyPLUS ajudará seus alunos a dominar conceitos em um ambiente rico e estruturado que está disponível para eles 24 horas por dia, 7 dias por semana. Ele também ajudará você a personalizar e gerenciar seu curso de forma mais eficaz com avaliações de alunos, tarefas, acompanhamento de notas e outras ferramentas úteis.
  - Seus alunos receberão acesso oportuno a recursos que atendem às suas necessidades individuais e receba feedback imediato e recursos de correção quando necessário.
  - Existem também ferramentas de autoavaliação vinculadas às partes relevantes do texto que permitirão seus alunos para assumir o controle de sua própria aprendizagem e prática.
  - O WileyPLUS ajudará você a identificar os alunos que estão ficando para trás e a intervir em um maneira oportuna, sem esperar pelo horário comercial agendado.

  Mais informações sobre WileyPLUS podem ser obtidas com seu representante Wiley.

Um guia para o instrutor

Embora os cursos de álgebra linear variem amplamente em conteúdo e filosofia, a maioria dos cursos se enquadra em duas categorias — aqueles com cerca de 35 a 40 aulas e aqueles com cerca de 25 a 30 aulas. Assim, criamos modelos longos e curtos como possíveis pontos de partida para a construção de um esboço de curso. Claro, estes são apenas guias e você certamente desejará personalizá-los para atender aos seus interesses e requisitos locais. Nenhum desses modelos de exemplo inclui aplicativos. Esses podem ser adicionados, se desejado, conforme o tempo permitir.

	Modelo Longo	**Modelo Curto**
Capítulo 1: Sistemas de Equações Lineares e Matrizes	7 palestras	6 palestras
Capítulo 2: Determinantes	3 palestras	2 palestras

	Modelo Longo	Modelo Curto
Capítulo 3: Espaços Vetores Euclidianos	4 palestras	3 palestras
Capítulo 4: Espaços Vetoriais Gerais	10 palestras	10 palestras
Capítulo 5: Autovalores e Autovetores	3 palestras	3 palestras
Capítulo 6: Espaços de Produto Interno	3 palestras	1 palestra
Capítulo 7: Diagonalização e Formas Quadráticas	4 palestras	3 palestras
Capítulo 8: Transformações lineares	3 palestras	2 palestras
Total:	**37 palestras**	**30 palestras**

Reconhecimentos

Gostaria de expressar minha gratidão às seguintes pessoas, cuja orientação útil melhorou muito o texto.

Revisores e Colaboradores

Don Allen, *Texas A&M University* John

Alongi, *Northwestern University* John Beachy,

Northern Illinois University Przemslaw Bogacki,

Old Dominion University Robert Buchanan, *Millersville*

University of Pennsylvania Ralph Byers, *University of Kansas*

Evangelos A. Coutsias, *University of New*

Mexico Joshua Du, *Kennesaw State University* Fatemeh

Emdad, *Michigan Technological University*

Vincent Ervin, *Clemson University* Anda Gadidov, *Kennesaw*

State University

Guillermo Goldsztein, *Instituto de Tecnologia da Geórgia*

Tracy Hamilton, *Universidade Estadual da Califórnia, Sacramento*

Amanda Hattway, *Instituto de Tecnologia Wentworth*

Heather Hulett, *Universidade de Wisconsin-La Crosse*

David Hyeon, *Universidade do Norte de Illinois*

Matt Insall, *Universidade de Ciência e Tecnologia do Missouri*

Mic Jackson, *Earlham College*

Anton Kaul, *Instituto Politécnico da Califórnia, San Luis Obispo*

Harihar Khanal, *Universidade Embry-Riddle*

Hendrik Kuiper, *Universidade Estadual do Arizona*

Kouok Law, *Georgia Perimeter College*

James McKinney, *Universidade Estadual da Califórnia, Pomona*

Eric Dirt, *Universidade Drexel*

Qin Sheng, *Universidade de Baylor*

Adam Sikora, *Universidade Estadual de Nova York em Buffalo*

Allan Silberger, *Universidade Estadual de Cleveland*

Dana Williams, *Faculdade de Dartmouth*

Consultores Matemáticos

Agradecimentos especiais são devidos a vários professores e matemáticos talentosos que forneceram orientação pedagógica, forneceram ajuda com respostas e exercícios ou forneceram verificações ou revisões detalhadas:

John Alongi, *Northwestern University*

Scott Ann, *Universidade Estadual da Califórnia, Fullerton*

Anton Kaul, *Universidade Estadual Politécnica da Califórnia*

Sarah Street

Cindy Trimble, *C Trimble and Associates*

Brad Davis, *C Trimble and Associates*

A equipe de suporte Wiley

David Dietz, Editor Sênior de Aquisições

Jeff Benson, editor assistente

Pamela Lashbrook, Assistente Editorial Sênior

Janet Foxman, editora de produção

Maddy Lesure, designer sênior

Laurie Rosatone, vice-presidente e editora

Sarah Davis, gerente sênior de marketing

Diana Smith, assistente de marketing

Melissa Edwards, editora de mídia

Lisa Sabatini, gerente de projetos de mídia

Sheena Goldstein, editora de fotos

Carol Sawyer, gerente de produção

Lilian Brady, editora de texto

Contribuições Especiais

O talento e a dedicação de muitas pessoas são necessários para produzir um livro como este, e tenho a sorte de ter me beneficiado da experiência das seguintes pessoas: **David Dietz** —

meu editor, por sua atenção aos detalhes, seu bom senso e sua fé inabalável em mim.

Jeff Benson — meu editor assistente, que fez um trabalho inacreditável ao organizar e coordenar os muitos tópicos necessários para tornar esta edição uma realidade.

Carol Sawyer — de *The Perfect Proof,* que coordenou a miríade de detalhes no processo de produção. Será um prazer finalmente apagar do meu computador as centenas de e-mails que trocamos enquanto trabalhamos juntos neste livro.

Scott Annin — *California State University em Fullerton,* que criticou a edição anterior e forneceu ideias valiosas sobre como melhorar o texto. Sinto-me afortunado por ter tido o benefício da experiência e das percepções de ensino do Prof. Annin.

Dan Kirschenbaum — de *The Art of Arlene e Dan Kirschenbaum,* cujo conhecimento artístico e técnico resolveu alguns problemas difíceis e críticos de ilustração.

Bill Tuohy — que leu partes do manuscrito e cujo olhar crítico para os detalhes teve uma influência importante na evolução do texto.

Pat Anton — que revisou o manuscrito, quando necessário, e assumiu o fardo das tarefas domésticas para liberar tempo para eu trabalhar nesta edição.

Maddy Lesure — nossa designer de texto e capa cujo senso infalível de design elegante é aparente nas páginas deste livro.

Rena Lam — da *Techsetters, Inc.,* que fez um trabalho absolutamente incrível ao passar por um pesadelo de edições do autor, rabiscos e alterações de última hora para produzir um livro lindo.

John Rogosich — da *Techsetters, Inc.,* que habilmente programou os elementos de design do livro e resolveu vários problemas espinhosos de composição tipográfica.

Lilian Brady — minha editora de texto por muitos anos, cujo olho para a tipografia e cujo conhecimento da linguagem nunca para de me surpreender.

A Equipe Wiley — Há muitas outras pessoas na Wiley que trabalharam nos bastidores e a quem devo gratidão: Laurie Rosatone, Ann Berlin, Dorothy Sinclair, Janet Foxman, Sarah Davis, Harry Nolan, Sheena Goldstein, Melissa Edwards, e Norm Christiansen. Obrigado a todos vocês.

CAPÍTULO

1 Sistemas de Linear Equações e Matrizes

CONTEÚDO DO CAPÍTULO

INTRODUÇÃO

As informações em ciência, negócios e matemática geralmente são organizadas em linhas e colunas para formar matrizes retangulares chamadas “matrizes” (plural de “matriz”). As matrizes geralmente aparecem como tabelas de dados numéricos que surgem de observações físicas, mas também ocorrem em vários contextos matemáticos. Por exemplo, veremos neste capítulo que todas as informações necessárias para resolver um sistema de equações como

$$
\begin{aligned}
5x + y &= 3 \\
2x - y &= 4
\end{aligned}
$$

está incorporado na matriz

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

e que a solução do sistema pode ser obtida realizando operações apropriadas nesta matriz. Isso é particularmente importante no desenvolvimento de programas de computador para resolver sistemas de equações porque os computadores são adequados para manipular matrizes de informações numéricas. No entanto, as matrizes não são simplesmente uma ferramenta de notação para resolver sistemas de equações; eles podem ser vistos como objetos matemáticos por direito próprio, e há uma teoria rica e importante associada a eles que tem uma infinidade de aplicações práticas. É o estudo de matrizes e tópicos relacionados que forma o campo matemático que chamamos de "álgebra linear". Neste capítulo começaremos nosso estudo de matrizes.

1.1 Introdução aos Sistemas de Equações Lineares

Os sistemas de equações lineares e suas soluções constituem um dos principais tópicos que estudaremos neste curso. Nesta primeira seção, introduziremos alguma terminologia básica e discutiremos um método para resolver tais sistemas.

Equações lineares

Lembre-se de que, em duas dimensões, uma linha em um sistema retangular de coordenadas xy pode ser representada por uma equação da forma

$$ax + by = c \quad (a,\ b \text{ not both } 0)$$

e em três dimensões um plano em um sistema retangular de coordenadas xyz pode ser representado por uma equação da forma

$$ax + by + cz = d \quad (a,\ b,\ c \text{ not all } 0)$$

Estes são exemplos de "equações lineares", sendo a primeira uma equação linear nas variáveis *xey* e a segunda uma equação linear nas variáveis x , y e z. De forma mais geral, definimos uma ***equação linear*** nas *n* variáveis como aquela que pode $x_1, x_2, \ldots,\ x_n$ ser expressa na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{1}$$

onde $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ e *b* são constantes, e os a's não são todos zero. Nos casos especiais em que $n = 2$ ou $n = 3$, frequentemente usaremos variáveis sem subscritos e escreveremos equações lineares como

$$a_1x + a_2y = b \quad (a_1, a_2 \text{ not both } 0) \tag{2}$$

$$a_1x + a_2y + a_3z = b \quad (a_1,\ a_2,\ a_3 \text{ not all } 0) \tag{3}$$

No caso especial em que $b = 0$, a equação 1 tem a forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0 \tag{4}$$

que é chamada de ***equação linear homogênea*** nas variáveis $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$.

EXEMPLO 1 Equações Lineares

Observe que uma equação linear não envolve quaisquer produtos ou raízes de variáveis. Todas as variáveis ocorrem apenas na primeira potência e não aparecem, por exemplo, como argumentos de funções trigonométricas, logarítmicas ou exponenciais. As seguintes são equações lineares:

$$x + 3y = 7 \qquad x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$$

$$\frac{1}{2}x - y + 3z = -1 \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$$

As seguintes equações não são lineares:

$$x + 3y^2 = 4 \quad 3x + 2y - xy = 5$$
$$\sin x + y = 0 \quad \sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1$$

Um conjunto finito de equações lineares é chamado de ***sistema de equações lineares*** ou, mais resumidamente, ***sistema linear.*** As variáveis são chamadas ***de incógnitas.*** Por exemplo, o sistema 5 a seguir possui incógnitas *x* e y, e o sistema 6 possui incógnitas x_1, x_2, e . x_3

$$5x + y = 3 \quad 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \tag{5}$$

$$2x - y = 4 \quad 3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4 \tag{6}$$

O duplo subscrito nos coeficientes das a_{ij} incógnitas fornece sua localização no sistema - o primeiro subscrito indica a equação na qual o coeficiente ocorre e o segundo indica qual incógnita ele se multiplica. Assim, está na a_{12} primeira equação e multiplica . x_2

Um sistema linear geral de *m* equações nas *n* incógnitas $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{7}$$

Uma ***solução*** de um sistema linear em *n* $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ é uma sequência de *n* números $s_1,\ s_2, \ldots, x_n$ para qual incógnitas a substituição

$$x_1 = s_1,\ x_2 = s_2, \ldots,\ x_n = s_n$$

torna cada equação uma afirmação verdadeira. Por exemplo, o sistema em 5 tem a solução

$$x = 1,\ y = -2$$

e o sistema em 6 tem a solução

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1$$

Essas soluções podem ser escritas de forma mais sucinta como

$$(1,\ -2) \text{ and } (1, 2,\ -1)$$

em que os nomes das variáveis são omitidos. Essa notação nos permite interpretar essas soluções geometricamente como pontos no espaço bidimensional e tridimensional. Mais geralmente, uma solução

$$x_1 = s_1,\ x_2 = s_2, \ldots,\ x_n = s_n$$

de um sistema linear em *n* incógnitas pode ser escrito como

$$(s_1,\ s_2, \ldots, s_n)$$

que é chamada de ***n-upla ordenada.*** Com esta notação entende-se que todas as variáveis aparecem na mesma ordem em cada equação. Se $n = 2$, então a n-upla é chamada de ***par ordenado,*** e se $n = 3$, então é chamado de ***ordenado triplo.***

Sistemas lineares com duas e três incógnitas

Sistemas lineares em duas incógnitas surgem em conexão com interseções de linhas. Por exemplo, considere o sistema linear

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

em que os gráficos das equações são linhas no plano xy. Cada solução *(x,* y) desse sistema corresponde a um ponto de interseção das retas, portanto existem três possibilidades (Figura 1.1.1):

1. As retas podem ser paralelas e distintas, caso em que não há interseção e, consequentemente, solução.
2. As retas podem se interceptar em apenas um ponto, caso em que o sistema tem exatamente uma solução.
3. As linhas podem coincidir, caso em que existem infinitos pontos de interseção (os pontos no linha comum) e, consequentemente, infinitas soluções.

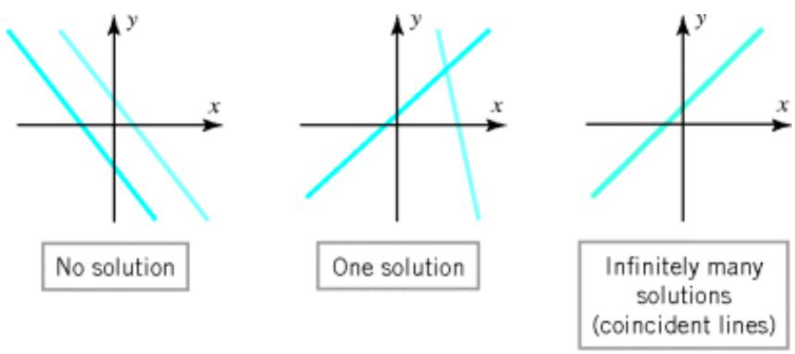


Figura 1.1.1

Em geral, dizemos que um sistema linear é ***consistente*** se tiver pelo menos uma solução e ***inconsistente*** se não tiver soluções. Assim, um sistema linear *consistente* de duas equações em duas incógnitas tem uma solução ou infinitas soluções - não há outras possibilidades. O mesmo é verdadeiro para um sistema linear de três equações em três incógnitas

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

em que os gráficos das equações são planos. As soluções do sistema, se houver, correspondem a pontos onde todos os três planos se cruzam, então, novamente, vemos que existem apenas três possibilidades - nenhuma solução, uma solução ou infinitas soluções (Figura 1.1.2).

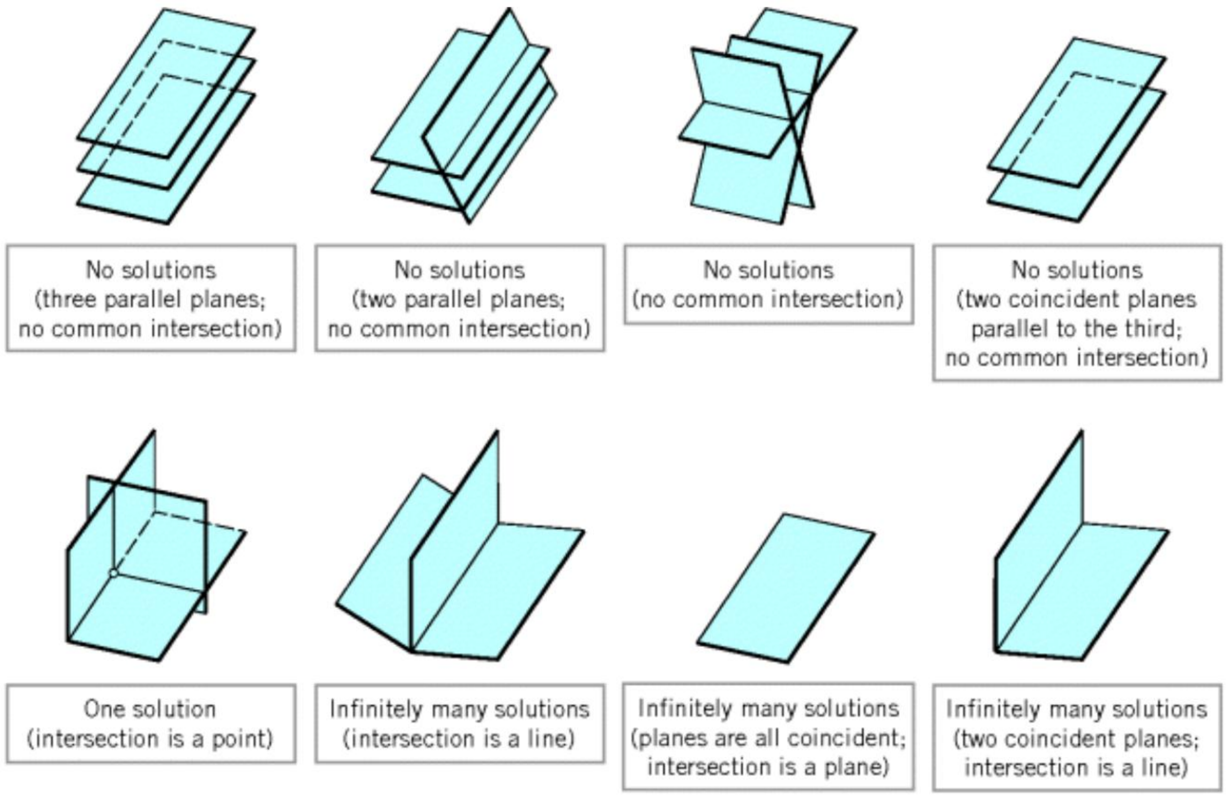


Figura 1.1.2

Provaremos mais tarde que nossas observações sobre o número de soluções de sistemas lineares de duas equações em duas incógnitas e sistemas lineares de três equações em três incógnitas realmente valem para *todos* os sistemas lineares. Aquilo é:

Todo sistema de equações lineares tem zero, uma ou infinitas soluções. Não há outras possibilidades.

EXEMPLO 2 Um Sistema Linear com Uma Solução

Resolva o sistema linear

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + y &= 6 \end{aligned}$$

Solução Podemos eliminar *x* da segunda equação adicionando ÿ2 vezes a primeira equação à segunda. Isso produz o sistema simplificado

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 3y &= 4 \end{aligned}$$

Da segunda equação obtemos $y = \frac{4}{3}$, e ao substituir esse valor na primeira equação temos obtivermos $x = 1 + y = \frac{7}{3}$. Assim, o sistema tem a única solução

$$x = \frac{7}{3},\ y = \frac{4}{3}$$

Geometricamente, isso significa que as linhas representadas pelas equações no sistema se cruzam no único ponto $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Deixamos para você verificar isso traçando as linhas graficamente.

EXEMPLO 3 Um sistema linear sem soluções

Resolva o sistema linear

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 3x + 3y &= 6 \end{aligned}$$

Solução Podemos eliminar *x* da segunda equação adicionando ÿ3 vezes a primeira equação à segunda equação. Isso produz o sistema simplificado

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 0 &= -6 \end{aligned}$$

A segunda equação é contraditória, então o sistema dado não tem solução. Geometricamente, isso significa que as retas correspondentes às equações do sistema original são paralelas e distintas.
Deixamos para você verificar isso fazendo um gráfico das retas ou mostrando que elas têm a mesma inclinação, mas diferentes interceptações em y.

EXEMPLO 4 Um Sistema Linear com Infinitas Soluções

Resolva o sistema linear

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 16x - 8y &= 4 \end{aligned}$$

No Exemplo 4 também poderíamos ter obtido equações paramétricas para as soluções resolvendo 8 para *y* em termos de *x*, e deixando $x = t$ ser o parâmetro. As equações paramétricas resultantes pareceriam diferentes, mas definiriam o mesmo conjunto de soluções.

Solução Podemos eliminar *x* da segunda equação adicionando ÿ4 vezes a primeira equação à segunda. Isso produz o sistema simplificado

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

A segunda equação não impõe nenhuma restrição em *x* e *y* e, portanto, pode ser omitida. Assim, as soluções do sistema são os valores de *x* e *y* que satisfazem a única equação

$$4x - 2y = 1 \quad (8)$$

Geometricamente, isso significa que as linhas correspondentes às duas equações no sistema original coincidem. Uma maneira de descrever o conjunto de soluções é resolver essa equação para *x* em termos de *y* $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}y$ para obter e, em seguida, atribuir um valor arbitrário *t* (chamado de ***parâmetro)*** a y. Isso nos permite expressar a solução pelo par de equações (chamadas ***equações paramétricas)***

$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t, \quad y = t$$

Podemos obter soluções numéricas específicas dessas equações substituindo valores numéricos pelo parâmetro. Por exemplo, $t = 0$ rende a solução $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $t = 1$ rende a solução $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$, e $t = -1$ rende a solução $\left(-\frac{1}{4}, -1\right)$. Você pode confirmar que estas são soluções por substituindo as coordenadas nas equações dadas.

EXEMPLO 5 Um Sistema Linear com Infinitas Soluções

Resolva o sistema linear

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ 2x - 2y + 4z &= 10 \\ 3x - 3y + 6z &= 15 \end{aligned}$$

Solução Este sistema pode ser resolvido por inspeção, pois a segunda e terceira equações são múltiplos da primeira. Geometricamente, isso significa que os três planos coincidem e que os valores de x, y e *z* que satisfazem a equação

$$x - y + 2z = 5 \quad (9)$$

satisfaz automaticamente todas as três equações. Assim, basta encontrar as soluções de 9. Podemos fazer isso primeiro resolvendo 9 para *x* em termos de *y* e z, depois atribuindo valores arbitrários *r* e *s* (parâmetros) a essas duas variáveis e, em seguida, expressando a solução pela três equações paramétricas

$$x = 5 + r - 2s, \quad y = r, \quad z = s$$

Soluções específicas podem ser obtidas escolhendo valores numéricos para os parâmetros *r* e s. Por exemplo, tomando $r = 1$ e $s = 0$ produz a solução (6, 1,0).

Matrizes Aumentadas e Operações Elementares com Linhas

À medida que aumenta o número de equações e incógnitas em um sistema linear, aumenta também a complexidade da álgebra envolvida na busca de soluções. Os cálculos necessários podem se tornar mais gerenciáveis simplificando a notação e padronizando os procedimentos. Por exemplo, acompanhando mentalmente a localização dos +'s, dos x's e dos ='s no sistema linear

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

podemos abreviar o sistema escrevendo apenas a matriz retangular de números

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Conforme observado na introdução deste capítulo, o termo "matriz" é usado em matemática para denotar uma matriz retangular de números. Em uma seção posterior estudaremos as matrizes em detalhes, mas por enquanto estaremos preocupados apenas com matrizes aumentadas para sistemas lineares.

Isso é chamado de ***matriz aumentada*** para o sistema. Por exemplo, a matriz aumentada para o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{is} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

O método básico para resolver um sistema linear é realizar operações algébricas apropriadas sobre o sistema que não alterem o conjunto de soluções e que produzam uma sucessão de sistemas cada vez mais simples, até chegar a um ponto em que se possa verificar se o sistema é consistente, e em caso afirmativo, quais são suas soluções. Normalmente, as operações algébricas são as seguintes: **1.** Multiplique uma equação por uma constante diferente de zero.

2. Troque duas equações.

3. Some uma constante vezes uma equação a outra.

Como as linhas (linhas horizontais) de uma matriz aumentada correspondem às equações no sistema associado, essas três operações correspondem às seguintes operações nas linhas da matriz aumentada: 1. Multiplique uma **linha** por uma constante diferente de zero.

2. Troque duas carreiras.

3. Adicione uma constante vezes uma linha a outra.

Estas são chamadas de ***operações elementares de linha*** em uma matriz.

No exemplo a seguir, ilustraremos como usar operações elementares de linhas e uma matriz aumentada para resolver um sistema linear com três incógnitas. Como um procedimento sistemático para resolver sistemas lineares será desenvolvido na próxima seção, não se preocupe com a escolha das etapas do exemplo. Seu objetivo aqui deve ser simplesmente entender os cálculos.

EXEMPLO 6 Usando Operações Elementares de Linha

Na coluna da esquerda resolvemos um sistema de equações lineares operando nas equações do sistema, e na coluna da direita resolvemos o mesmo sistema operando nas linhas da matriz aumentada.

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 9 \\ 2x+4y-3z &= 1 \\ 3x+6y-5z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Adicione -2 vezes a primeira equação à segunda para obter

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 9 \\ 2y-7z &= -17 \\ 3x+6y-5z &= 0 \end{aligned}$$

Adicione -2 vezes a primeira linha à segunda para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Adicione -3 vezes a primeira equação à terceira para obter

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 9 \\ 2y-7z &= -17 \\ 3y-11z &= -27 \end{aligned}$$

Adicione -3 vezes a primeira linha à terceira para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Multiplique a segunda equação por para obter $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 9 \\ y-\tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y-11z &= -27 \end{aligned}$$

Multiplique a segunda linha por para obter $\frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Adicione -3 vezes a segunda equação à terceira para obter

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 9 \\ y-\tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Adicione -3 vezes a segunda linha à terceira obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Multiplique a terceira equação por -2 para obter

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 9 \\ y-\tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Multiplique a terceira linha por -2 para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Adicione ÿ1 vezes a segunda equação à primeira para obter

Adicione -1 vezes a segunda linha à primeira para obter

$$\begin{aligned} x \quad + \frac{11}{2}z &= \frac{35}{2} \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Adicionar $-\frac{11}{2}$ vezes a terceira equação à primeira e vezes $\frac{7}{2}$ a terceira equação à segunda para obtivermos

Adicionar $-\frac{11}{2}$ vezes a terceira linha para o primeiro e vezes $\frac{7}{2}$ a terceira linha para o segundo obter

$$\begin{aligned} x \quad &= 1 \\ y \quad &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A solução $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$ agora é evidente.

Maxime Bocher (1867-1918)

Nota Histórica O primeiro uso conhecido de matrizes aumentadas apareceu entre 200 AC e 100 AC em um manuscrito chinês intitulado *Nine Chapters of Mathematical Art.* Os coeficientes eram dispostos em colunas em vez de em linhas, como hoje, mas notavelmente o sistema foi resolvido realizando uma sucessão de operações nas colunas. O uso atual do termo *matriz aumentada* parece ter sido introduzido pelo matemático americano Maxime Bôcher em seu livro *Introduction to Higher Algebra,* publicado em 1907. Além de ser um destacado matemático pesquisador e especialista em latim, química, filosofia, zoologia , geografia, meteorologia, arte e música, Bôcher foi um excelente expositor de matemática cujos livros didáticos elementares foram muito apreciados pelos alunos e ainda hoje são procurados.

[Imagem: cortesia da American Mathematical Society]

Revisão do Conceito

- Equação linear
- Equação linear homogênea
- Sistema de equações lineares
- Solução de um sistema linear
- N-tupla ordenada
- Sistema linear consistente
- Sistema linear inconsistente
- Parâmetro
- Equações paramétricas
- Matriz aumentada
- Operações elementares de linhas

Habilidades

- Determinar se uma determinada equação é linear.
- Determinar se uma dada n-upla é uma solução de um sistema linear.
- Encontre a matriz aumentada de um sistema linear.
- Encontre o sistema linear correspondente a uma dada matriz aumentada.
- Realizar operações elementares de linha em um sistema linear e em sua matriz aumentada correspondente.
- Determinar se um sistema linear é consistente ou inconsistente.
- Encontre o conjunto de soluções para um sistema linear consistente.

Conjunto de exercícios 1.1

1. Em cada parte, determine se a equação é linear em x_1, x_2, e x_3.

(a) $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2x_3} = 1$

(b) $x_1 + 3x_2 + x_1x_3 = 2$

(c) $x_1 = -7x_2 + 3x_3$

(d) $x_1^{-2} + x_2 + 8x_3 = 5$

(e) $x_1^{3/5} - 2x_2 + x_3 = 4$

(f) $\pi x_1 - \sqrt{2x_2} + \frac{1}{3}x_3 = 7^{1/3}$

Responder:

(a), (c) e (f) são equações lineares; (b), (d) e (e) não são equações lineares

2. Em cada parte, determine se as equações formam um sistema linear.

(a) $$\begin{aligned} -2x + 4y + z &= 2 \\ 3x - \frac{2}{y} &= 0 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x &= 4 \\ 2x &= 8 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} 4x - y + 2z &= -1 \\ -x + (\ln 2)y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} 3z + x &= -4 \\ y + 5z &= 1 \\ 6x + 2z &= 3 \\ -x - y - z &= 4 \end{aligned}$$

3. Em cada parte, determine se as equações formam um sistema linear.

(a) $$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\qquad\qquad - x_4 &= 5 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} \sin(2x_1 + x_3) &= \sqrt{5} \\ e^{2x_2 - 2x_4} &= \frac{1}{x_2} \\ 4x_4 &= 4 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} 7x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3x_4 &= 3 \\ -x_1 + 5x_2 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

(d) $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$

Responder:

(a) e (d) são sistemas lineares; (b) e (c) não são sistemas lineares

4. Para cada sistema do Exercício 2 que é linear, determine se ele é consistente.

5. Para cada sistema do Exercício 3 que é linear, determine se ele é consistente.

Responder:

(a) e (d) são consistentes

6. Escreva um sistema de equações lineares consistindo de três equações em três incógnitas com

(a) sem soluções.

(b) exatamente uma

solução. (c) infinitas soluções.

7. Em cada parte, determine se o vetor dado é uma solução do sistema linear

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(a) (3, 1, 1)

(b) (3, ÿ1, 1)

(c) (13, 5, 2) (d)

$\left(\frac{13}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$

(e) (17, 7, 5)

Responder:

(a), (d) e (e) são soluções; (b) e (c) não são soluções

8. Em cada parte, determine se o vetor dado é uma solução do sistema linear

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(a) $\left(\frac{5}{7}, \frac{8}{7}, 1\right)$

(b) $\left(\frac{5}{7}, \frac{8}{7}, 0\right)$

(c) (5, 8, 1) (d)

$\left(\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{2}{7}\right)$

(e) $\left(\frac{5}{7}, \frac{22}{7}, 2\right)$

9. Em cada parte, encontre o conjunto solução da equação linear usando parâmetros conforme necessário.

(a) $7x - 5y = 3$

(b) $-8x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1$

Responder:

(a) $$\begin{aligned} x &= \frac{5}{7}t + \frac{3}{7} \\ y &= t \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4}r - \frac{5}{8}s + \frac{3}{4}t - \frac{1}{8} \\ x_2 &= r \\ x_3 &= s \\ x_4 &= t \end{aligned}$$

10. Em cada parte, encontre o conjunto solução da equação linear usando parâmetros conforme necessário.

(a) $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$

(b) $3v - 8w + 2x - y + 4z = 0$

11. Em cada parte, encontre um sistema de equações lineares correspondente à dada matriz aumentada

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Responder:

(a) $$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\qquad &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 &= 0 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 3x_1 \qquad\qquad - 2x_3 &= 5 \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 &= -3 \\ -2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \qquad &= 1 \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} x_1 &= 7 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= 3 \\ x_4 &= 4 \end{aligned}$$

12. Em cada parte, encontre um sistema de equações lineares correspondente à matriz aumentada dada.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -6 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & -6 & 1 & 1 \\ -8 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -4 & 3 \\ -4 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

13. Em cada parte, encontre a matriz aumentada para o sistema de equações lineares dado.

(a) $$\begin{aligned} -2x_1 &= 6 \\ 3x_1 &= 8 \\ 9x_1 &= -3 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 6x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 5x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} 2x_2 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 6 \end{aligned}$$

(d) $x_1 - x_5 = 7$

Responder:

(a) $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 8 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

(d) $[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 7]$

14. Em cada parte, encontre a matriz aumentada para o sistema de equações lineares dado.

(a) $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 - x_5 &= 2 \\ x_3 + 7x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

15. A curva $y = ax^2 + bx + c$ mostrado na figura a seguir passa pelos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), and (x_3, y_3). Mostre que os coeficientes a, b e *c* são uma solução do sistema de equações lineares cuja matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{bmatrix}$$

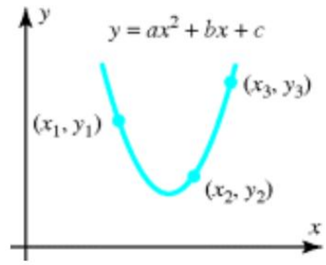


Figura Ex-15

16. Explique por que cada uma das três operações elementares com linhas não afeta o conjunto solução de um sistema linear.

17. Mostre que se as equações lineares

$$x_1 + kx_2 = c \text{ and } x_1 + lx_2 = d$$

têm o mesmo conjunto de soluções, então as duas equações são idênticas (ou seja, $k = 1$ e $c = d$).

Exercícios de Verdadeiro-Falso

Nas partes (a)–(h), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

(a) Um sistema linear cujas equações são todas homogêneas deve ser consistente.

Responder:

Verdadeiro

(b) Multiplicar uma equação linear por zero é uma operação de linha elementar aceitável.

Responder:

Falso

(c) O sistema linear

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 2x - 2y &= k \end{aligned}$$

não pode ter uma solução única, independentemente do valor de k.

Responder:

Verdadeiro

(d) Uma única equação linear com duas ou mais incógnitas deve sempre ter infinitas soluções.

Responder:

Verdadeiro

(e) Se o número de equações em um sistema linear exceder o número de incógnitas, então o sistema deve ser inconsistente.

Responder:

Falso

(f) Se cada equação em um sistema linear consistente for multiplicada por uma constante c, então todas as soluções para o novo sistema pode ser obtido multiplicando as soluções do sistema original por c.

Responder:

Falso

(g) Operações elementares com linhas permitem que uma equação em um sistema linear seja subtraída de outra.

Responder:

Verdadeiro

(h) O sistema linear com matriz aumentada correspondente

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

é consistente.

Responder:

Falso

1.2 Eliminação Gaussiana

Nesta seção, desenvolveremos um procedimento sistemático para resolver sistemas de equações lineares. O procedimento baseia-se na ideia de realizar certas operações nas linhas da matriz aumentada para o sistema que o simplifica a uma forma a partir da qual a solução do sistema pode ser verificada por inspeção.

Considerações na resolução de sistemas lineares

Ao considerar métodos para resolver sistemas de equações lineares, é importante distinguir entre grandes sistemas que devem ser resolvidos por computador e pequenos sistemas que podem ser resolvidos manualmente. Por exemplo, existem muitas aplicações que levam a sistemas lineares em milhares ou até milhões de incógnitas. Grandes sistemas requerem técnicas especiais para lidar com questões de tamanho de memória, erros de arredondamento, tempo de solução e assim por diante. Tais técnicas são estudadas no campo da *análise numérica* e serão apenas abordadas neste texto. No entanto, quase todos os métodos usados para grandes sistemas são baseados nas ideias que desenvolveremos nesta seção.

Formulários Echelon

No Exemplo 6 da última seção, resolvemos um sistema linear nas incógnitas x, y e *z* reduzindo a matriz aumentada à forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

de onde a solução $x = 1, y = 2, z = 3$ ficou evidente. Este é um exemplo de uma matriz que está em ***linha reduzida forma escalonada.*** Para ter esta forma, uma matriz deve ter as seguintes propriedades:

1. Se uma linha não consiste inteiramente de zeros, então o primeiro número diferente de zero na linha é um 1. Chamamos isso de 1 ***inicial .***
2. Se houver linhas que consistem inteiramente em zeros, elas serão agrupadas na parte inferior da matriz.
3. Em quaisquer duas linhas sucessivas que não consistem inteiramente em zeros, o 1 inicial na linha inferior ocorre mais longe do direita do que o 1 principal na linha superior.
4. Cada coluna que contém um 1 à esquerda tem zeros em todos os outros lugares dessa coluna.

Uma matriz que possui as três primeiras propriedades é chamada de ***forma escalonada por linhas.*** (Assim, uma matriz na forma escalonada reduzida por linhas necessariamente está na forma escalonada por linhas, mas não inversamente.)

EXEMPLO 1 Forma escalonada e escalonada reduzida

As seguintes matrizes estão na forma escalonada reduzida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As matrizes a seguir estão na forma escalonada por linhas, mas não na forma escalonada reduzida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 2 Mais informações sobre formulário Escalão de Linhas e Escalão de Linhas Reduzido

Como o Exemplo 1 ilustra, uma matriz na forma escalonada de linhas tem zeros abaixo de cada 1 inicial, enquanto uma matriz na forma escalonada reduzida de linhas tem zeros abaixo *e acima* de cada 1 inicial. Assim, com quaisquer números reais substituídos pelos *, todas as matrizes dos seguintes tipos estão em forma escalonada de linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Todas as matrizes dos seguintes tipos estão na forma escalonada reduzida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Se, por uma sequência de operações elementares de linhas, a matriz aumentada para um sistema de equações lineares é colocada na forma escalonada *reduzida* de linhas, então o conjunto de soluções pode ser obtido por inspeção ou pela conversão de certas equações lineares para a forma paramétrica. Aqui estão alguns exemplos.

No Exemplo 3 poderíamos, se desejado, expressar a solução de forma mais sucinta como a 4-tupla (3, ÿ1, 0, 5).

EXEMPLO 3 Solução Única

Suponha que a matriz aumentada para um sistema linear nas incógnitas x1, x2, x3 e x4 tenha sido reduzida por operações elementares de linha para

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Esta matriz está na forma escalonada reduzida por linhas e corresponde às equações

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= 3 \\ x_2 \qquad\qquad &= -1 \\ x_3 \qquad &= 0 \\ x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Assim, o sistema tem uma única solução, ou seja, $x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 5$.

EXEMPLO 4 Sistemas Lineares em Três Incógnitas

Em cada parte, suponha que a matriz aumentada para um sistema linear nas incógnitas x, y e *z* foi reduzida por operações elementares de linha para a forma escalonada de linha reduzida dada. Resolva o sistema.

$$\text{(a)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(b)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(c)}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução

(a) A equação que corresponde à última linha da matriz aumentada é

$$0x + 0y + 0z = 1$$

Como essa equação não é satisfeita por nenhum valor de x, *y* e z, o sistema é inconsistente.

(b) A equação que corresponde à última linha da matriz aumentada é

$$0x + 0y + 0z = 0$$

Essa equação pode ser omitida, pois não impõe restrições sobre x, y e z; portanto, o sistema linear correspondente à matriz aumentada é

$$\begin{aligned} x \quad +3z &= -1 \\ y - 4z &= 2 \end{aligned}$$

Como *x* e *y* correspondem aos 1s iniciais na matriz aumentada, chamamos essas ***variáveis de líderes.*** As variáveis restantes (neste caso z) são chamadas ***de variáveis livres.*** Resolver as variáveis líderes em termos das variáveis livres dá

$$\begin{aligned} x &= -1 - 3z \\ y &= 2 + 4z \end{aligned}$$

A partir dessas equações, vemos que a variável livre z pode ser tratada como um parâmetro e receber um valor arbitrário, t, que então determina valores para *x* e y. Assim, o conjunto solução pode ser representado pelas equações paramétricas

$$x = -1 - 3t, \quad y = 2 + 4t, \quad z = t$$

Substituindo vários valores para *t* nessas equações, podemos obter várias soluções do sistema. Por exemplo, definir $t = 0$ rende a solução

$$x = -1, \quad y = 2, \quad z = 0$$

e configuração $t = 1$ rende a solução

$$x = -4, \quad y = 6, \quad z = 1$$

(c) Conforme explicado na parte (b), podemos omitir as equações correspondentes às linhas zero, caso em que o sistema linear associado com a matriz aumentada consiste na única equação

$$x - 5y + z = 4 \tag{1}$$

de onde vemos que o conjunto solução é um plano no espaço tridimensional. Embora 1 seja uma forma válida do conjunto solução, existem muitas aplicações nas quais é preferível expressar o conjunto solução na forma paramétrica. Podemos converter 1 para a forma paramétrica resolvendo a variável principal *x* em termos das variáveis livres *y* e *z* para obter

$$x = 4 + 5y - z$$

A partir desta equação, vemos que as variáveis livres podem receber valores arbitrários, $y = s$ e $z = t$, digamos que determinem o valor de x. Assim, o conjunto solução pode ser expresso parametricamente como

$$x = 4 + 5s - t, \quad y = s, \quad z = t \tag{2}$$

Normalmente, denotaremos os parâmetros em uma solução geral pelas letras r, s, t,…, mas quaisquer letras que não entrem em conflito com os nomes das incógnitas podem ser usadas. Para sistemas com mais de três incógnitas, letras subscritas como t1, t2, t3,... são convenientes.

Fórmulas, como 2, que expressam o conjunto solução de um sistema linear parametricamente possuem alguma terminologia associada.

DEFINIÇÃO 1

Se um sistema linear tem infinitas soluções, então um conjunto de equações paramétricas das quais todas as soluções podem ser obtidas pela atribuição de valores numéricos aos parâmetros é chamado de ***solução geral*** do sistema.

Métodos de Eliminação

Acabamos de ver como é fácil resolver um sistema de equações lineares uma vez que sua matriz aumentada esteja na forma escalonada reduzida por linhas. Agora daremos um ***procedimento de eliminação*** passo a passo que pode ser usado para reduzir qualquer matriz à forma escalonada reduzida por linhas. À medida que declaramos cada etapa do procedimento, ilustramos a ideia reduzindo a seguinte matriz à forma escalonada reduzida por linhas.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Etapa 1. Localize a coluna mais à esquerda que não consiste inteiramente em zeros.

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \\ \uparrow \textbf{ Leftmost nonzero column} \end{array}$$

Etapa 2. Troque a linha superior por outra linha, se necessário, para trazer uma entrada diferente de zero para o topo da coluna encontrada na Etapa 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{The first and second rows in the preceding matrix were interchanged.}$$

Etapa 3. Se a entrada que está agora no topo da coluna encontrada na Etapa 1 for a, multiplique a primeira linha por 1/a para introduzir um 1 inicial.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{The first row of the preceding matrix was multiplied by } \frac{1}{2}.$$

Etapa 4. Adicione múltiplos adequados da linha superior às linhas abaixo, de modo que todas as entradas abaixo do 1 inicial se tornem zeros.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \quad \leftarrow -2 \text{ times the first row of the preceding matrix was added to the third row.}$$

Etapa 5. Agora cubra a linha superior da matriz e comece novamente com a Etapa 1 aplicada à submatriz restante. Continue dessa maneira até que *toda* a matriz esteja na forma escalonada de linhas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Leftmost nonzero column in the submatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{The first row in the submatrix was multiplied by } -\tfrac{1}{2} \text{ to introduce a leading 1.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \leftarrow -5 \text{ times the first row of the submatrix was added to the second row of the submatrix to introduce a zero below the leading 1.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{The top row in the submatrix was covered, and we returned again to Step 1.}$$

Leftmost nonzero column in the new submatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{The first (and only) row in the new submatrix was multiplied by 2 to introduce a leading 1.}$$

A matriz *inteira* agora está na forma escalonada de linhas. Para encontrar a forma escalonada reduzida de linhas, precisamos da seguinte etapa adicional.

Etapa 6. Começando com a última linha diferente de zero e trabalhando para cima, adicione múltiplos adequados de cada linha às linhas acima para introduzir zeros acima dos 1s iniciais.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \leftarrow \frac{7}{2} \text{ times the third row of the preceding matrix was added to the second row.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \leftarrow -6 \text{ times the third row was added to the first row.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \leftarrow 5 \text{ times the second row was added to the first row.}$$

A última matriz está na forma escalonada reduzida.

O procedimento (ou algoritmo) que acabamos de descrever para reduzir uma matriz à forma escalonada reduzida por linhas é chamado de ***eliminação de Gauss Jordan.*** Este algoritmo consiste em duas partes, uma ***fase progressiva*** na qual os zeros são introduzidos abaixo dos 1s iniciais e, em seguida, uma ***fase regressiva,*** na qual os zeros são introduzidos acima dos 1s iniciais. Se apenas a fase direta for usada, o procedimento produzirá apenas uma forma escalonada de linhas e será chamado de ***eliminação gaussiana.*** Por exemplo, nos cálculos anteriores, uma forma escalonada de linhas foi obtida no final da Etapa 5.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Guilherme Jordan (1842–1899)

Nota histórica Embora as versões da eliminação gaussiana fossem conhecidas muito antes, o poder do método não foi reconhecido até que o grande matemático alemão Carl Friedrich Gauss o usou para calcular a órbita do asteróide Ceres a partir de dados limitados. O que aconteceu foi o seguinte: em 1º de janeiro de 1801, o astrônomo siciliano Giuseppe Piazzi (1746–1826) notou um obscuro objeto celeste que ele acreditava ser um “planeta desaparecido”. Ele nomeou o objeto Ceres e fez um número limitado de observações posicionais, mas depois perdeu o objeto ao se aproximar do Sol. Gauss resolveu o problema de calcular a órbita a partir dos dados limitados usando mínimos quadrados e o procedimento que agora chamamos de eliminação gaussiana. A obra de Gauss causou sensação quando Ceres reapareceu um ano depois, na constelação de Virgem, quase na posição exata que Gauss previu! O método foi popularizado pelo engenheiro alemão Wilhelm Jordan em seu manual de geodésia (a ciência de medir formas da Terra) intitulado *Handbuch der Vermessungskunde* e publicado em 1888.

[Imagens: Coleção Granger (Gauss); wikipedia (Jordânia)]

EXEMPLO 5 Eliminação de Gauss-Jordan

Resolva por eliminação de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad + 2x_5 \qquad &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 \qquad + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 \qquad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned}$$

Solução A matriz aumentada para o sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Adicionando -2 vezes a primeira linha à segunda e quarta linhas dá

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Multiplicar a segunda linha por -1 e então adicionar -5 vezes a nova segunda linha à terceira linha e -4 vezes a nova segunda linha à quarta linha dá

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Trocando a terceira e quarta linhas e então multiplicando a terceira linha da matriz resultante por $\frac{1}{6}$

dá a forma escalonada de linha

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ This completes the forward phase since there are zeros below the leading 1's .

Adicionar ÿ3 vezes a terceira linha à segunda linha e, em seguida, adicionar 2 vezes a segunda linha da matriz resultante à primeira linha produz a forma escalonada de linhas reduzidas

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ This completes the backward phase since there are zeros above the leading 1's .

O sistema de equações correspondente é

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \quad + 4x_4 + 2x_5 \quad &= 0 \\ x_3 + \ 2x_4 \qquad\quad &= 0 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{3}$$

Observe que, ao construir o sistema linear em 3, ignoramos a linha de zeros na matriz aumentada correspondente. Por que isso é justificado?

Resolvendo para as variáveis principais obtemos

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Finalmente, expressamos a solução geral do sistema parametricamente atribuindo às variáveis livres x2, x4 e x5 valores arbitrários r, s e t, respectivamente. Isso rende

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}$$

Sistemas Lineares Homogêneos

Diz-se que um sistema de equações lineares é ***homogêneo*** se os termos constantes são todos nulos; ou seja, o sistema tem a forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ &= 0 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Todo sistema homogêneo de equações lineares é consistente porque todos esses sistemas têm uma $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ como solução. Essa solução é chamada de ***solução trivial;*** se houver outras soluções, elas são chamadas de ***soluções não triviais.***

Como um sistema linear homogêneo sempre tem a solução trivial, existem apenas duas possibilidades para suas soluções:

- O sistema possui apenas a solução trivial.
- O sistema tem infinitas soluções além da solução trivial.

No caso especial de um sistema linear homogêneo de duas equações com duas incógnitas, digamos

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y = 0 \quad & (\mathbf{a_1, b_1} \ \textbf{not both zero}) \\ a_2x + b_2y = 0 \quad & (\mathbf{a_2, b_2} \ \textbf{not both zero}) \end{aligned}$$

os gráficos das equações são retas passando pela origem, e a solução trivial corresponde ao ponto de interseção na origem (Figura 1.2.1).

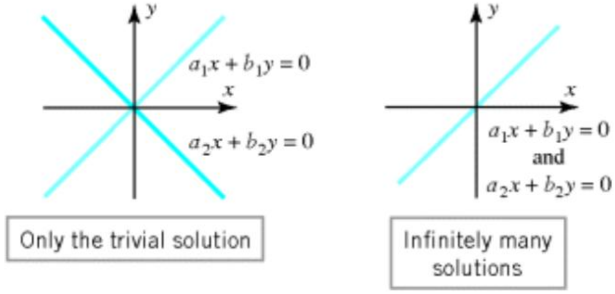


Figura 1.2.1

Há um caso em que um sistema homogêneo tem a certeza de ter soluções não triviais - ou seja, sempre que o sistema envolve mais incógnitas do que equações. Para ver por que, considere o seguinte exemplo de quatro equações em seis incógnitas.

EXEMPLO 6 Um Sistema Homogêneo

Use a eliminação de Gauss-Jordan para resolver o sistema linear homogêneo

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\quad + 2x_5 \qquad\quad &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= 0 \\ 5x_3 + 10x_4 \qquad\quad + 15x_6 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 \qquad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Solução Observe primeiro que os coeficientes das incógnitas neste sistema são os mesmos do Exemplo 5; ou seja, os dois sistemas diferem apenas nas constantes do lado direito. A matriz aumentada para o sistema homogêneo dado é

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

que é igual à matriz aumentada para o sistema do Exemplo 5, exceto pelos zeros na última coluna. Assim, a forma escalonada reduzida por linhas dessa matriz será a mesma da matriz aumentada do Exemplo 5, exceto pela última coluna. No entanto, um momento de reflexão tornará evidente que uma coluna de zeros não é alterada por uma operação de linha elementar, de modo que a forma escalonada de linha reduzida de 5 é

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

O sistema de equações correspondente é

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \quad + 4x_4 + 2x_5 \quad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \qquad\quad &= 0 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo para as variáveis principais obtemos

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Se agora atribuirmos às variáveis livres x2, x4 e x5 valores arbitrários r, s e t, respectivamente, então podemos expressar a solução definida parametricamente como

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = 0$$

Note que a solução trivial resulta quando $r = s = t = 0$.

Variável Livre em Sistemas Lineares Homogêneos

O Exemplo 6 ilustra dois pontos importantes sobre a solução de sistemas lineares homogêneos: **1.** As operações elementares de linhas não alteram as colunas de zeros em uma matriz, de modo que a forma escalonada reduzida de linhas da matriz aumentada para um sistema linear homogêneo tem uma coluna final de zeros. Isso implica que o sistema linear correspondente à forma escalonada reduzida é homogêneo, assim como o sistema original.

2. Quando construímos o sistema linear homogêneo correspondente à matriz aumentada 6, ignoramos a linha de zeros porque a equação correspondente

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 0$$

não impõe nenhuma condição às incógnitas. Assim, dependendo se a forma escalonada reduzida da matriz aumentada para um sistema linear homogêneo tem ou não quaisquer linhas de zero, o sistema linear correspondente a essa forma escalonada reduzida terá o mesmo número de equações que o sistema original ou terá menos.

Agora considere um sistema linear homogêneo geral com *n* incógnitas e suponha que a forma escalonada de linhas reduzida da matriz aumentada tenha *r* linhas diferentes de zero. Como cada linha diferente de zero tem um 1 inicial e como cada 1 inicial corresponde a uma variável principal, o sistema homogêneo correspondente à forma escalonada reduzida de linhas da matriz aumentada deve ter r *variáveis* principais e $n - r$ variáveis livres. Assim, este sistema é da forma

$$\begin{array}{cccccc} x_{k_1} & & & + & \sum() = 0 \\ & x_{k_2} & & + & \sum() = 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & x_{k_r} + & \sum() = 0 \end{array} \tag{8}$$

onde em cada equação a expressão resumo, $\sum()$ denota uma soma que envolve as variáveis livres, se houver [ver 7, por exemplo]. Em temos o seguinte resultado.

TEOREMA 1.2.1 Teorema da Variável Livre para Sistemas Homogêneos

Se um sistema linear homogêneo tem n incógnitas, e se a forma escalonada reduzida de sua matriz aumentada tem r linhas diferentes de zero, então o sistema tem n - r variáveis livres.

Observe que o Teorema 1.2.2 se aplica apenas a sistemas homogêneos - um sistema *não homogêneo* com mais incógnitas do que equações não precisa ser consistente. No entanto, provaremos mais tarde que, se um sistema não homogêneo com mais incógnitas do que equações é consistente, ele possui infinitas soluções.

O teorema 1.2.1 tem uma implicação importante para sistemas lineares homogêneos com mais incógnitas do que equações. Especificamente, se um sistema linear homogêneo possui *m* equações em *n* incógnitas, e se (por $m < n$, então também deve ser verdade que $r < n$ quê?). Sendo este o caso, o teorema implica que existe pelo menos uma variável livre, e isso implica, por sua vez, que o sistema tem infinitas soluções. Assim, temos o seguinte resultado.

TEOREMA 1.2.2

Um sistema linear homogêneo com mais incógnitas do que equações tem infinitas soluções.

Em retrospecto, poderíamos ter antecipado que o sistema homogêneo do Exemplo 6 teria infinitas soluções, pois tem quatro equações em seis incógnitas.

Eliminação gaussiana e substituição reversa

Para pequenos sistemas lineares que são resolvidos à mão (como a maioria dos que estão neste texto), a eliminação de Gauss-Jordan (redução à forma escalonada reduzida de linhas) é um bom procedimento a ser usado. No entanto, para grandes sistemas lineares que requerem uma solução computacional, geralmente é mais eficiente usar a eliminação gaussiana (redução à forma escalonada por linhas) seguida por uma técnica conhecida como ***substituição inversa*** para concluir o processo de resolução do sistema. O próximo exemplo ilustra essa técnica.

EXEMPLO 7 Exemplo 5 Resolvido por Substituição Reversa

A partir dos cálculos do Exemplo 5, uma forma escalonada de linhas da matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver o sistema de equações correspondente

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad + 2x_5 \qquad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \qquad + 3x_6 &= 1 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

procedemos da seguinte forma:

Etapa 1. Resolva as equações para as variáveis principais.

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= 1 - 2x_4 - 3x_6 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Etapa 2. Começando com a equação de baixo e trabalhando para cima, substitua sucessivamente cada equação em todas as equações acima dela.

Substituindo $x_6 = \frac{1}{3}$ na segunda equação resulta

$$x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_5$$
$$x_3 = -2x_4$$
$$x_6 = \frac{1}{3}$$

Substituindo $x_3 = -2x_4$ na primeira equação resulta

$$x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$$
$$x_3 = -2x_4$$
$$x_6 = \frac{1}{3}$$

Etapa 3. Atribua valores arbitrários às variáveis livres, se houver.

Se agora atribuirmos a x2, x4 e x5 os valores arbitrários r, s e t, respectivamente, a solução geral é dada pelas fórmulas

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}$$

Isso está de acordo com a solução obtida no Exemplo 5.

EXEMPLO 8

Suponha que as matrizes abaixo sejam matrizes aumentadas para sistemas lineares nas incógnitas x1, x2, x3 e x4. Essas matrizes estão todas na forma escalonada por linhas, mas não na forma escalonada reduzida. Discuta a existência e unicidade de soluções para os sistemas lineares correspondentes

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução

(a) A última linha corresponde à equação

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$$

do qual é evidente que o sistema é inconsistente.

(b) A última linha corresponde à equação

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$$

que não tem efeito sobre o conjunto solução. Nas três equações restantes, as variáveis x1, x2 e x3 correspondem aos 1s iniciais e, portanto, são variáveis líderes. A variável x4 é uma variável livre. Com um pouco de álgebra, as variáveis principais podem ser expressas em termos da variável livre, e a variável livre pode receber um valor arbitrário. Assim, o sistema deve ter infinitas soluções.

(c) A última linha corresponde à equação

$$x_4 = 0$$

o que nos dá um valor numérico para x4. Se substituirmos esse valor na terceira equação, ou seja,

$$x_3 + 6x_4 = 9$$

obtemos $x_3 = 9$. Agora você deve ser capaz de ver que, se continuarmos esse processo e substituirmos o valores conhecidos de x3 e x4 na equação correspondente à segunda linha, obteremos um valor numérico único para x2; e se, finalmente, substituirmos os valores conhecidos de x4, x3 e x2 no equação correspondente à primeira linha, produziremos um valor numérico único para x1. Assim, o sistema tem uma única solução.

Alguns fatos sobre os formulários Echelon

Existem três fatos sobre formas escalonadas e formas escalonadas reduzidas que são importantes saber, mas não iremos provar:

1. Cada matriz tem uma única forma escalonada reduzida; isto é, independentemente de você usar a eliminação de Gauss-Jordan ou alguma outra sequência de operações elementares de linhas, a mesma forma escalonada reduzida resultará no fim.* 2. As formas escalonadas de linhas não são únicas; ou seja, diferentes sequências de operações elementares de linha podem resultar em diferentes formas escalonadas.

3. Embora as formas escalonadas não sejam únicas, todas as formas escalonadas de uma matriz *A* têm o mesmo número de linhas zero, e os 1s iniciais sempre ocorrem nas mesmas posições nas formas escalonadas de A. Essas são chamadas de ***posições de pivô*** de A. Uma coluna que contém uma posição de pivô é chamada de ***coluna de pivô*** de A.

EXEMPLO 9 Posições de Pivô e Colunas

Anteriormente nesta seção (imediatamente após a Definição 1), encontramos uma forma escalonada de linhas de

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

ser

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Os 1s iniciais ocorrem nas posições (linha 1, coluna 1), (linha 2, coluna 3) e (linha 3, coluna 5). Estas são as posições de pivô. As colunas pivô são as colunas 1,3 e 5.

Erro de Arredondamento e Instabilidade

Muitas vezes há uma lacuna entre a teoria matemática e sua implementação prática - a eliminação de Gauss-Jordan e a eliminação de Gauss são bons exemplos. O problema é que os computadores geralmente aproximam números, introduzindo assim erros ***de arredondamento ;*** portanto, a menos que sejam tomadas precauções, cálculos sucessivos podem degradar uma resposta a um grau que a torna inútil. Algoritmos (procedimentos) nos quais isso acontece são chamados de ***instáveis.*** Existem várias técnicas para minimizar o erro de arredondamento e a instabilidade. Por exemplo, pode-se mostrar que para grandes sistemas lineares a eliminação de Gauss-Jordan envolve cerca de 50% mais operações do que a eliminação de Gauss, então a maioria dos algoritmos de computador são baseados no último método. Algumas dessas questões serão consideradas no Capítulo 9.

Revisão do conceito

- Forma escalonada reduzida
- Formulário escalonado de linhas
- Principal 1 •

Variáveis principais
- Variáveis livres
- Solução geral para um sistema linear
- Eliminação gaussiana
- Eliminação de Gauss-Jordan
- Fase para frente •

Fase para trás
- Sistema linear homogêneo
- Solução trivial
- Solução não trivial
- Teorema da Dimensão para Sistemas Homogêneos
- Substituição reversa

Habilidades

- Reconhecer se uma determinada matriz está na forma escalonada por linhas, escalonada reduzida ou nenhuma das

duas. • Construir soluções para sistemas lineares cujas correspondentes matrizes aumentadas estão na forma escalonada ou escalonada reduzida.

- Use a eliminação gaussiana para encontrar a solução geral de um sistema linear. • Use

a eliminação de Gauss-Jordan para encontrar a solução geral de um sistema linear.
- Analisar sistemas lineares homogêneos usando o Teorema das Variáveis Livres para Sistemas Homogêneos.

Conjunto de exercícios 1.2

1. Em cada parte, determine se a matriz está na forma escalonada por linhas, escalonada reduzida, ambas ou nenhuma.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Responder:

(a) Ambos

(b) Ambos

(c) Ambos

(d) Ambos

(e) Ambos

(f) Ambos

(g) escalão de linha

2. Em cada parte, determine se a matriz está na forma escalonada por linhas, escalonada reduzida, ambas ou nenhuma.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

3. Em cada parte, suponha que a matriz aumentada para um sistema de equações lineares tenha sido reduzida por operações de linha para a forma escalonada de linha reduzida dada. Resolva o sistema.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Responder:

(a) $x_1 = -37,\ x_2 = -8,\ x_3 = 5$

(b) $x_1 = 13t - 10,\ x_2 = 13t - 5,\ x_3 = -t + 2,\ x_4 = t$

(c) $x_1 = -7s + 2t - 11,\ x_2 = s,\ x_3 = -3t - 4,\ x_4 = -3t + 9,\ x_5 = t$

(d) Inconsistente

4. Em cada parte, suponha que a matriz aumentada para um sistema de equações lineares tenha sido reduzida por operações de linha para a forma escalonada de linha reduzida dada. Resolva o sistema. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 5–8, resolva o sistema linear por eliminação de Gauss-Jordan.

5.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Responder:

$x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$

6. $$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x - 3w &= -3 \end{aligned}$$

Responder:

$x = t - 1,\ y = 2s,\ z = s,\ w = t$

8. $$\begin{aligned} -2b + 3c &= 1 \\ 3a + 6b - 3c &= -2 \\ 6a + 6b + 3c &= 5 \end{aligned}$$

Nos Exercícios 9–12, resolva o sistema linear por eliminação gaussiana.

9. Exercício 5

Responder:

$x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$

10. Exercício 6

11. Exercício 7

Responder:

$x = t - 1,\ y = 2s,\ z = s,\ w = t$

12. Exercício 8

Nos Exercícios 13–16, determine se o sistema homogêneo possui soluções não triviais por inspeção (sem lápis e papel).

13. $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 - 8x_3 + 9x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Responder:

Tem soluções não triviais

14. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 - 8x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{aligned}$$

Responder:

Tem soluções não triviais

16. $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 = 0 \end{aligned}$$

Nos Exercícios 17–24, resolva o sistema linear homogêneo dado por qualquer método.

17. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Responder:

$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$

18. $$\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 0 \\ -x + 2y - 3z &= 0 \\ x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{aligned}$$

Responder:

$x_1 = -s,\ x_2 = -t - s,\ x_3 = 4s,\ x_4 = t$

20. $$\begin{aligned} v + 3w - 2x &= 0 \\ 2u + v - 4w + 3x &= 0 \\ 2u + 3v + 2w - x &= 0 \\ -4u - 3v + 5w - 4x &= 0 \end{aligned}$$

21. $$\begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 0 \\ w - y - 3z &= 0 \\ 2w + 3x + y + z &= 0 \\ -2w + x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Responder:

$w = t,\ x = -t,\ y = t,\ z = 0$

22. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

23. $$\begin{aligned} 2I_1 - I_2 + 3I_3 + 4I_4 &= 9 \\ I_1 - 2I_3 + 7I_4 &= 11 \\ 3I_1 - 3I_2 + I_3 + 5I_4 &= 8 \\ 2I_1 + I_2 + 4I_3 + 4I_4 &= 10 \end{aligned}$$

Responder:

$I_1 = -1,\ I_2 = 0,\ I_3 = 1,\ I_4 = 2$

24. $$\begin{aligned} Z_3 + Z_4 + Z_5 &= 0 \\ -Z_1 - Z_2 + 2Z_3 - 3Z_4 + Z_5 &= 0 \\ Z_1 + Z_2 - 2Z_3 - Z_5 &= 0 \\ 2Z_1 + 2Z_2 - Z_3 + Z_5 &= 0 \end{aligned}$$

Nos Exercícios 25–28, determine os valores de *a* para os quais o sistema não tem soluções, exatamente uma solução ou infinitamente muitas soluções.

25.
$$\begin{aligned} x + 2y - \quad 3z &= 4 \\ 3x - y + \quad 5z &= 2 \\ 4x + y + \left(a^2 - 14\right)z &= a + 2 \end{aligned}$$

Responder:

Se $a = 4$, existem infinitas soluções; se $a = -4$, não há soluções; se $a \neq \pm 4$, existe exatamente um solução.

26.
$$\begin{aligned} x + 2y + \quad z &= 2 \\ 2x - 2y + \quad 3z &= 1 \\ x + 2y - \left(a^2 - 3\right)z &= a \end{aligned}$$

27.
$$\begin{aligned} x + \quad 2y &= 1 \\ 2x + \left(a^2 - 5\right)y &= a - 1 \end{aligned}$$

Responder:

Se $a = 3$, existem infinitas soluções; se $a = -3$, não há soluções; se $a \neq \pm 3$, existe exatamente um solução.

28.
$$\begin{aligned} x + y + \quad 7z &= -7 \\ 2x + 3y + \quad 17z &= -16 \\ x + 2y + \left(a^2 + 1\right)z &= 3a \end{aligned}$$

Nos Exercícios 29–30, resolva os seguintes sistemas, onde a, b e *c* são constantes.

29.
$$\begin{aligned} 2x + y &= a \\ 3x + 6y &= b \end{aligned}$$

Responder:

$$x = \frac{2a}{3} - \frac{b}{9},\ y = -\frac{a}{3} + \frac{2b}{9}$$

30.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 \quad + 2x_3 &= b \\ 3x_2 + 3x_3 &= c \end{aligned}$$

31. Encontre duas formas escalonadas diferentes de

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Este exercício mostra que uma matriz pode ter múltiplas formas escalonadas.

Responder:

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são respostas possíveis.

32. Reduzir

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -29 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

à forma escalonada reduzida sem introdução de frações em nenhum estágio intermediário.

33. Mostre que o seguinte sistema não linear tem 18 soluções se $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$, e $0 \leq \gamma < 2\pi$.

$$\begin{aligned} \sin\alpha + 2\cos\beta + 3\tan\gamma &= 0 \\ 2\sin\alpha + 5\cos\beta + 3\tan\gamma &= 0 \\ -\sin\alpha - 5\cos\beta + 5\tan\gamma &= 0 \end{aligned}$$

[Dica: Comece fazendo as substituições $x = \sin\alpha$, $y = \cos\beta$, e $z = \tan\gamma$.]

34. Resolva o seguinte sistema de equações não lineares para os ângulos desconhecidos ÿ, ÿ e ÿ, onde $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$, e $0 \leq \gamma < \pi$.

$$\begin{aligned} 2\sin\alpha - \cos\beta + 3\tan\gamma &= 3 \\ 4\sin\alpha + 2\cos\beta - 2\tan\gamma &= 2 \\ 6\sin\alpha - 3\cos\beta + \tan\gamma &= 9 \end{aligned}$$

35. Resolva o seguinte sistema de equações não lineares para x, y e z.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 6 \\ x^2 - y^2 + 2z^2 &= 2 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 &= 3 \end{aligned}$$

[Dica: Comece fazendo as substituições $X = x^2, Y = y^2, Z = z^2$.]

Responder:

$x = \pm 1,\ y = \pm\sqrt{3},\ z = \pm\sqrt{2}$

36. Resolva o seguinte sistema para x, y e z.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} &= 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{8}{z} &= 0 \\ -\frac{1}{x} + \frac{9}{y} + \frac{10}{z} &= 5 \end{aligned}$$

37. Encontre os coeficientes a, b, c e *d* de modo que a curva mostrada na figura a seguir seja o gráfico da equação $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

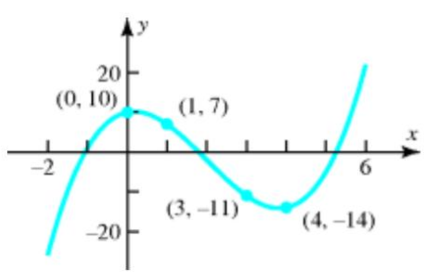


Figura Ex-37

Responder:

$a=1,\ b=-6,\ c-2,\ d=10$

38. Encontre os coeficientes a, b, c e *d* de modo que a curva mostrada na figura a seguir seja dada pela equação $ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$.

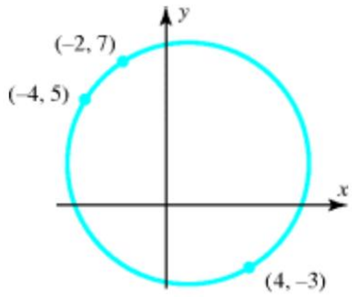


Figura Ex-38

39. Se o sistema linear

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z &= 0 \\ a_2x-b_2y+c_2z &= 0 \\ a_3x+b_3y-c_3z &= 0 \end{aligned}$$

tem apenas a solução trivial, o que pode ser dito sobre as soluções do seguinte sistema?

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z &= 3 \\ a_2x-b_2y+c_2z &= 7 \\ a_3x+b_3y-c_3z &= 11 \end{aligned}$$

Responder:

O sistema não homogêneo terá exatamente uma solução.

40. (a) Se *A* é a 3×5 matriz, então qual é o número máximo possível de 1s iniciais em sua forma escalonada de linha reduzida?

(b) Se *B* é a 3×6 matriz cuja última coluna tem todos os zeros, então qual é o número máximo possível de parâmetros na solução geral do sistema linear com matriz aumentada B?

(c) Se *C* é um 5×3 matriz, então qual é o número mínimo possível de linhas de zeros em qualquer forma escalonada de linhas de C?

41. (a) Prove que se $ad-bc\neq 0$, então a forma escalonada reduzida por linhas de

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ is } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Use o resultado da parte (a) para provar que se $ad-bc\neq 0$, então o sistema linear

$$\begin{aligned} ax+by&=k \\ cx+dy&=l \end{aligned}$$

tem exatamente uma solução.

42. Considere o sistema de equações

$$\begin{aligned} ax+by &= 0 \\ cx+dy &= 0 \\ ex+fy &= 0 \end{aligned}$$

Discuta as posições relativas das linhas $ax+by=0$, $cx+dy=0$, e $ex+fy=0$ quando (a) o sistema tiver apenas a solução trivial e (b) o sistema possui soluções não triviais.

43. Descreva todas as possíveis formas escalonadas reduzidas de

(a) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{bmatrix}$

Exercícios de Verdadeiro-Falso

Nas partes (a)–(i), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

(a) Se uma matriz estiver na forma escalonada reduzida por linhas, ela também estará na forma escalonada por linhas.

Responder:

Verdadeiro

(b) Se uma operação elementar de linhas for aplicada a uma matriz que está na forma escalonada por linhas, a matriz resultante ainda estará em forma escalonada de linha.

Responder:

Falso

(c) Toda matriz tem uma forma escalonada única.

Responder:

Falso

(d) Um sistema linear homogêneo em n incógnitas cuja matriz aumentada correspondente tem um escalão de linhas reduzido formulário com r 1s à esquerda tem n ÿ r variáveis livres.

Responder:

Verdadeiro

(e) Todos os 1s iniciais em uma matriz em forma escalonada de linhas devem ocorrer em colunas diferentes.

Responder:

Verdadeiro

(f) Se cada coluna de uma matriz na forma escalonada tiver um 1 à esquerda, todas as entradas que não forem 1 à esquerda serão zero.

Responder:

Falso

(g) Se um sistema linear homogêneo de n equações em n incógnitas tem uma matriz aumentada correspondente com uma matriz reduzida linha escalonada contendo n 1s principais, então o sistema linear tem apenas a solução trivial.

Responder:

Verdadeiro

(h) Se a forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada para um sistema linear tiver uma linha de zeros, então o sistema deve têm infinitas soluções.

Responder:

Falso

(i) Se um sistema linear tem mais incógnitas do que equações, então ele deve ter infinitas soluções.

Responder:

Falso

1.3 Matrizes e Operações com Matrizes

Matrizes retangulares de números reais surgem em contextos diferentes de matrizes aumentadas para sistemas lineares. Nesta seção, começaremos a estudar matrizes como objetos em si mesmas, definindo operações de adição, subtração e multiplicação nelas.

Notação e terminologia matricial

Na Seção 1.2 usamos matrizes retangulares de números, chamadas *matrizes aumentadas,* para abreviar sistemas de equações lineares. No entanto, matrizes retangulares de números também ocorrem em outros contextos. Por exemplo, a seguinte matriz retangular com três linhas e sete colunas pode descrever o número de horas que um aluno passou estudando três disciplinas durante uma determinada semana:

	Seg.	**Ter.**	**Qua.**	**quinta-feira**	**Sex.**	**Sentado.**	**Sol.**
Matemática	2	3	2	4	1	4	2
História	0	3	1	4	3	2	2
Idioma 4		1	3	1	0	0	2

Se suprimirmos os títulos, ficamos com a seguinte matriz retangular de números com três linhas e sete colunas, chamada de “matriz”:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

De forma mais geral, fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1

Uma ***matriz*** é um arranjo retangular de números. Os números na matriz são chamados de ***entradas*** na matriz.

Uma matriz com apenas uma coluna é chamada de ***vetor coluna*** ou ***matriz coluna,*** e uma matriz com apenas uma linha é chamada de ***vetor linha*** ou ***matriz linha.*** No Exemplo 1, o 2×1 a matriz é um vetor coluna, a 1×4 matriz é um vetor linha e a matriz é 1×1 um vetor linha e um vetor coluna.

EXEMPLO 1 Exemplos de Matrizes

Alguns exemplos de matrizes são

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad [2 \ \ 1 \ \ 0 \ \ -3], \quad \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [4]$$

O ***tamanho*** de uma matriz é descrito em termos do número de linhas (linhas horizontais) e colunas (linhas verticais) que ela contém. Por exemplo, a primeira matriz no Exemplo 1 tem três linhas e duas colunas, então seu tamanho é 3 por 2 (escrito 3×2). Em uma descrição de tamanho, o primeiro número sempre denota o número de linhas e o segundo denota o número de colunas. As matrizes restantes no Exemplo 1 têm tamanhos 1×4, 3×3, 2×1, e 1×1, respectivamente.

Usaremos letras maiúsculas para denotar matrizes e letras minúsculas para denotar quantidades numéricas; assim podemos escrever

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ or } C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Ao discutir matrizes, é comum referir-se a quantidades numéricas como ***escalares.*** Salvo indicação em contrário, *os escalares serão números reais;* escalares complexos serão considerados posteriormente no texto.

Os colchetes de matriz são frequentemente 1×1 omitidos nas matrizes, tornando impossível dizer, por exemplo, se o símbolo 4 denota o número "quatro" ou a matriz [4]. Isso raramente causa problemas porque geralmente é possível dizer qual é o significado do contexto.

A entrada que ocorre na linha *ie* na coluna *j* de uma matriz *A* será denotada por *aij.* Assim, um general 3×4 matriz pode ser escrito como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

e um general $m \times n$ matriz como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Quando uma notação compacta é desejada, a matriz anterior pode ser escrita como

$$[a_{ij}]_{m \times n} \text{ or } [a_{ij}]$$

a primeira notação sendo usada quando é importante na discussão saber o tamanho, e a segunda sendo usada quando o tamanho não precisa ser enfatizado. Normalmente, combinaremos a letra que denota uma matriz com a letra que denota suas entradas; assim, para uma matriz *B* , geralmente usaríamos *bij* para a entrada na linha *ie* coluna j, e para uma matriz *C* usaríamos a notação *cij.*

A entrada na linha *ie* coluna *j* de uma matriz *A* também é comumente denotada pelo símbolo *(A)ij.* Assim, para a matriz 1 acima, temos

$$(A)_{ij} = a_{ij}$$

e para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Nós temos $(A)_{11} = 2,\ (A)_{12} = -3,\ (A)_{21} = 7$, e $(A)_{22} = 0$.

Os vetores linha e coluna são de importância especial, e é prática comum denotá-los por letras minúsculas em negrito em vez de letras maiúsculas. Para tais matrizes, a subscrição dupla das entradas é desnecessária. Assim, um vetor coluna $1 \times n$ vetor linha a e um geral $m \times 1$ geral **b** seria escrito como

$$\mathbf{a} = [a_1\ a_2\ \cdots\ a_n] \quad \text{and} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Uma matriz *A* com *n* linhas e *n* colunas é chamada de ***matriz quadrada de ordem*** n, e diz-se que as entradas $a_{11},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{nn}$ sombreadas em 2 estão na ***diagonal principal*** de A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Operações em Matrizes

Até agora, usamos matrizes para abreviar o trabalho na resolução de sistemas de equações lineares. Para outras aplicações, no entanto, é desejável desenvolver uma “aritmética de matrizes” na qual as matrizes possam ser adicionadas, subtraídas e multiplicadas de maneira útil. O restante desta seção será dedicado ao desenvolvimento dessa aritmética.

DEFINIÇÃO 2

Duas matrizes são definidas como ***iguais*** se tiverem o mesmo tamanho e suas entradas correspondentes forem iguais.

A igualdade de duas matrizes

$$A = [a_{ij}] \ \text{ and } \ B = [b_{ij}]$$

de mesmo tamanho pode ser expressa tanto escrevendo

$$(A)_{ij} = (B)_{ij}$$

ou por escrito

$$a_{ij} = b_{ij}$$

onde se entende que as igualdades valem para todos os valores de *i* e j.

EXEMPLO 2 Igualdade de Matrizes

Considere as matrizes

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & x\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

Se $x=5$, então $A=B$, mas para todos os outros valores de *x* as matrizes *A* e *B* não são iguais, pois nem todas suas entradas correspondentes são iguais. Não há valor de *x* para o qual $A=C$ uma vez que *A* e *C* têm tamanhos diferentes.

DEFINIÇÃO 3

Se *A* e *B* são matrizes do mesmo tamanho, então a ***soma*** $A+B$ é a matriz obtida adicionando as entradas de *B* às entradas correspondentes de A, e a ***diferença*** é a matriz $A-B$ obtida subtraindo as entradas de *B* das entradas correspondentes de A .Matrizes de tamanhos diferentes não podem ser adicionadas ou subtraídas.

Em notação matricial, se $A=[a_{ij}]$ e $B=[b_{ij}]$ têm o mesmo tamanho, então

$$(A+B)_{ij}=(A)_{ij}+(B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \text{ and } (A-B)_{ij}=(A)_{ij}-(B)_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$$

EXEMPLO 3 Adição e Subtração

Considere as matrizes

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 2 & 4\\ 4 & -2 & 7 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-4 & 3 & 5 & 1\\ 2 & 2 & 0 & -1\\ 3 & 2 & -4 & 5\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

Então

$$A+B=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 5 & 4\\ 1 & 2 & 2 & 3\\ 7 & 0 & 3 & 5\end{bmatrix} \text{ and } A-B=\begin{bmatrix}6 & -2 & -5 & 2\\ -3 & -2 & 2 & 5\\ 1 & -4 & 11 & -5\end{bmatrix}$$

As expressões $A+C,\ B+C,\ A-C$, e $B-C$ são indefinidos.

DEFINIÇÃO 4

Se *A* é qualquer matriz ec *é* qualquer escalar, então o ***produto*** *cA* é a matriz obtida pela multiplicação de cada entrada da matriz *A* por c. Diz-se que a matriz *cA* é um ***múltiplo escalar*** de A.

Em notação matricial, se $A=[a_{ij}]$, então

$$(cA)_{ij}=c(A)_{ij}=ca_{ij}$$

EXEMPLO 4 Múltiplos Escalares

Para as matrizes

$$A=\begin{bmatrix}2&3&4\\1&3&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&2&7\\-1&3&-5\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}9&-6&3\\3&0&12\end{bmatrix}$$

Nós temos

$$2A=\begin{bmatrix}4&6&8\\2&6&2\end{bmatrix},\quad (-1)B=\begin{bmatrix}0&-2&-7\\1&-3&5\end{bmatrix},\quad \tfrac{1}{3}C=\begin{bmatrix}3&-2&1\\1&0&4\end{bmatrix}$$

É prática comum denotar (ÿ 1)B por *ÿB.*

Até agora definimos a multiplicação de uma matriz por um escalar, mas não a multiplicação de duas matrizes. Uma vez que as matrizes são adicionadas pela adição de entradas correspondentes e subtraídas pela subtração das entradas correspondentes, parece natural definir a multiplicação de matrizes pela multiplicação das entradas correspondentes. No entanto, verifica-se que tal definição não seria muito útil para a maioria dos problemas. A experiência levou os matemáticos à seguinte definição mais útil de multiplicação de matrizes.

DEFINIÇÃO 5

Se *A* for $m \times r$ matriz e *B* é uma $r \times n$ matriz, então o ***produto*** *AB* é o $m \times n$ matriz cujas entradas são determinado da seguinte forma: Para encontrar a entrada na linha *i* e na coluna *j* de *AB,* destaque a linha *i* da matriz *A* e a coluna *j* da matriz B. Multiplique as entradas correspondentes da linha e da coluna juntas e, em seguida, some os produtos resultantes.

EXEMPLO 5 Multiplicando Matrizes

Considere as matrizes

$$A=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&6&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4&1&4&3\\0&-1&3&1\\2&7&5&2\end{bmatrix}$$

Como *A* é um 2×3 matriz e *B* é uma 3×4 matriz, o produto *AB* é uma matriz. 2×4 Para determinar, por exemplo, a entrada na linha 2 e na coluna 3 de *AB,* destacamos a linha 2 de *A* e a coluna 3 de B.
Então, conforme ilustrado abaixo, multiplicamos as entradas correspondentes e somamos esses produtos.

$$\begin{bmatrix}1&2&4\\2&6&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1&4&3\\0&-1&3&1\\2&7&5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\square&\square&\square&\square\\\square&\square&\boxed{26}&\square\end{bmatrix}$$

$$(2\cdot 4)+(6\cdot 3)+(0\cdot 5)=26$$

A entrada na linha 1 e na coluna 4 de *AB* é calculada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \boxed{13} \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(1 \cdot 3) + (2 \cdot 1) + (4 \cdot 2) = 13$$

Os cálculos para as entradas restantes são

$$\begin{aligned} (1.4) + (2.0) + (4.2) &= 12 \\ (1.1) - (2.1) + (4.7) &= 27 \\ (1.4) + (2.3) + (4.5) &= 30 \\ (2.4) + (6.0) + (0.2) &= 8 \\ (2.1) - (6.1) + (0.7) &= -4 \\ (2.3) + (6.1) + (0.2) &= 12 \end{aligned} \qquad AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

A definição de multiplicação de matrizes exige que o número de colunas do primeiro fator *A* seja igual ao número de linhas do segundo fator *B* para formar o produto *AB.* Se esta condição não for satisfeita, o produto é indefinido. Uma maneira conveniente de determinar se um produto de duas matrizes está definido é anotar o tamanho do primeiro fator e, à direita dele, anotar o tamanho do segundo fator. Se, como em 3, os números internos forem iguais, então o produto está definido. Os números externos fornecem o tamanho do produto.

$$\underset{m \times r}{A} \qquad \underset{r \times n}{B} = \underset{m \times n}{AB} \qquad \text{Inside: } r, r \qquad \text{Outside: } m, n \tag{3}$$

Gothold Eisenstein (1823-1852)

Nota Histórica O conceito de multiplicação de matrizes deve-se ao matemático alemão Gotthold Eisenstein, que introduziu a ideia por volta de 1844 para simplificar o processo de fazer substituições em sistemas lineares. A ideia foi então expandida e formalizada por Cayley em seu *Memoir on the Theory of Matrices* , publicado em 1858. Eisenstein foi aluno de Gauss, que o classificou como igual a Isaac Newton e Arquimedes. No entanto, Eisenstein, sofrendo de problemas de saúde durante toda a vida, morreu aos 30 anos, então seu potencial nunca foi realizado.

[Imagem: wikipedia]

EXEMPLO 6 Determinando se um produto é definido

Suponha que *A,* B e *C* sejam matrizes com os seguintes tamanhos:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 3\times 4 & 4\times 7 & 7\times 3 \end{array}$$

Então por 3, *AB* é definido e é a e é 3×7 matriz; *BC* é definido e é uma 4×3 matriz; e *CA* é definido a 7×4 matriz. Os produtos *AC, CB* e *BA* são todos indefinidos.

Em geral, se $A=[a_{ij}]$ é um $m\times r$ matriz e $B=[b_{ij}]$ é um $r\times n$ matriz, então, conforme ilustrado pelo sombreamento em 4,

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix} \tag{4}$$

a entrada $(AB)_{ij}$ na linha *i* e na coluna *j* de *AB* é dada por

$$(AB)_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\cdots+a_{ir}b_{rj} \tag{5}$$

Matrizes Particionadas

Uma matriz pode ser subdividida ou ***particionada*** em matrizes menores inserindo regras horizontais e verticais entre linhas e colunas selecionadas. Por exemplo, a seguir estão três possíveis partições de uma matriz geral A - a primeira 3×4 é uma partição de *A* em quatro ***submatrizes*** A11, A12, A21 e A22; a segunda é uma partição de *A* em seus vetores linha r1, r2 e r3; e a terceira é uma partição de *A* em seus vetores coluna c1, c2, c3 e c4:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}=[\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3 \quad \mathbf{c}_4]$$

Multiplicação de Matrizes por Colunas e por Linhas

O particionamento tem muitos usos, um dos quais é encontrar linhas ou colunas específicas de um produto de matriz *AB* sem calcular o produto inteiro. Especificamente, as fórmulas a seguir, cujas provas são deixadas como exercícios, mostram como vetores de coluna individuais de *AB* podem ser obtidos particionando *B* em vetores de coluna e como vetores de linha individuais de *AB* podem ser obtidos particionando *A* em vetores de linha.

$$AB = A[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_n] = [A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{b}_n] \tag{6}$$
$$(AB \textbf{ computed column by column})$$

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 B \\ \mathbf{a}_2 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m B \end{bmatrix} \tag{7}$$
$$(AB \textbf{ computed row by row})$$

Em palavras, essas fórmulas afirmam que

$$j \text{ th column vector of } AB = A[j \text{ th column vector of } B] \tag{8}$$

$$i \text{ th row vector of } AB = [i \text{ th row vector of } A]B \tag{9}$$

EXEMPLO 7 Exemplo 5 Revisitado

Se *A* e *B* são as matrizes no Exemplo 5, então a partir de 8 o segundo vetor coluna de *AB* pode ser obtido pelo cálculo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \underset{\text{Second column of } B}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}} = \underset{\text{Second column of } AB}{\begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}}$$

e de 9 o vetor da primeira linha de *AB* pode ser obtido pelo cálculo

$$\underset{\text{First row of } A}{[1 \quad 2 \quad 4]} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \underset{\text{First row of } AB}{[12 \quad 27 \quad 30 \quad 13]}$$

Produtos de matriz como combinações lineares

Discutimos três métodos para calcular um produto de matriz AB - entrada por entrada, coluna por coluna e linha por linha. A definição a seguir fornece ainda outra maneira de pensar sobre a multiplicação de matrizes.

DEFINIÇÃO 6

Se $A_1, A_2, \ldots, A_r$ são matrizes de mesmo tamanho, e se $c_1, c_2, \ldots, c_r$ são escalares, então uma expressão do forma

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_rA_r$$

é chamado de ***combinação linear*** de $A_1, A_2, \ldots, A_r$ com ***coeficientes*** $c_1, c_2, \ldots, c_r$.

Para ver como produtos de matrizes podem ser vistos como combinações lineares, seja *A* um $m \times n$ matriz e **x** an $n \times 1$ coluna vetor, digamos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Então

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Isso prova o seguinte teorema.

TEOREMA 1.3.1

Se A é uma matriz $m \times n$ *e se* **x** *é uma combinação* $n \times 1$ *vetor coluna, então o produto* **Ax** *pode ser expresso como um vetor linear dos vetores coluna de A em que os coeficientes são as entradas de* x.

EXEMPLO 8 Produtos de Matriz como Combinações Lineares

O produto da matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

pode ser escrito como a seguinte combinação linear de vetores coluna

$$2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 9 Colunas de um produto *AB* como combinações lineares

Mostramos no Exemplo 5 que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

Segue da Fórmula 6 e do Teorema 1.3.1 que o *j* -ésimo vetor coluna de *AB* pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores-coluna de *A* em que os coeficientes na combinação linear são as entradas da *j*- ésima coluna de B. Os cálculos são os seguintes:

$$\begin{bmatrix}12\\8\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}27\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}+7\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}30\\26\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}13\\12\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$$

Forma matricial de um sistema linear

A multiplicação de matrizes tem uma aplicação importante em sistemas de equações lineares. Considere um sistema de *m* equações lineares em *n* incógnitas:

$$\begin{matrix}a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = b_1\\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = b_2\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = b_m\end{matrix}$$

Como duas matrizes são iguais se e somente se suas entradas correspondentes forem iguais, podemos substituir as *m* equações neste sistema pela equação de matriz única

$$\begin{bmatrix}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n\\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots\\b_m\end{bmatrix}$$

O $m \times 1$ matriz no lado esquerdo desta equação pode ser escrita como um produto para dar

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots\\b_m\end{bmatrix}$$

Se designarmos essas matrizes por A, x e b, respectivamente, podemos substituir o sistema original de *m* equações em *n* incógnitas foi substituído pela equação de matriz única

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

A matriz *A* nesta equação é chamada de ***matriz de coeficientes*** do sistema. A ***matriz aumentada*** para o sistema é obtida juntando **b** a *A* como a última coluna; assim a matriz aumentada é

$$[A|\mathbf{b}]=\left[\begin{array}{cccc|c}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{array}\right]$$

A barra vertical em [A|b] é uma maneira conveniente de separar *A* de **b** visualmente; não tem significado matemático.

Transposição de uma Matriz

Concluímos esta seção definindo duas operações matriciais que não têm análogos na aritmética dos números reais.

DEFINIÇÃO 7

Se *A* for $m \times n$ matriz, então a ***transposta de*** A, denotada por *AT*, é definido como o $n \times m$ matriz que resulta qualquer trocando as linhas e colunas de A; ou seja, a primeira coluna de *AT* é a primeira linha de A, a segunda coluna de *AT* é a segunda linha de A e assim por diante.

EXEMPLO 10 Algumas Transposições

A seguir estão alguns exemplos de matrizes e suas transpostas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 3 \quad 5], \quad D = [4]$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad D^T = [4]$$

Observe que não apenas as colunas de *AT* são as linhas de A, mas as linhas de *AT* são as colunas de A. Assim, a entrada na linha *i* e na coluna *j* de *AT* é a entrada na linha *j* e na coluna *i* de A; aquilo é,

$$\left(A^T\right)_{ij} = (A)_{ji} \tag{11}$$

Observe a inversão dos subscritos.

No caso especial em que *A* é uma matriz quadrada, a transposição de *A* pode ser obtida trocando entradas simetricamente posicionadas em relação à diagonal principal. Em 12 vemos que *AT* também pode ser obtido "refletindo" *A* sobre sua diagonal principal.

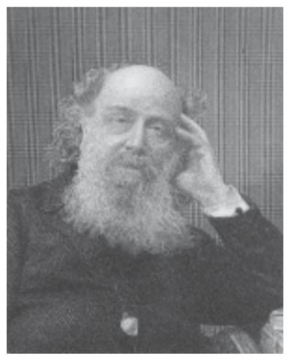
(12)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ -5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ -5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

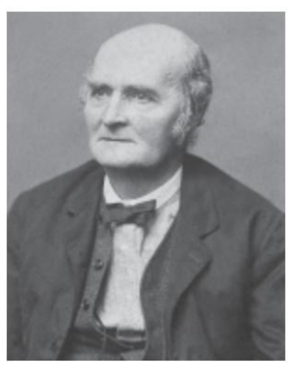
Interchange entries that are symmetrically positioned about the main diagonal.

DEFINIÇÃO 8

Se *A* é uma matriz quadrada, então o ***traço de*** A, denotado por *tr(A),* é definido como sendo a soma das entradas na diagonal principal de A. O traço de *A* é indefinido se *A* não for uma matriz quadrada.



James Silvestre (1814–1897)



Artur Cayley (1821–1895)

Nota Histórica O termo *matriz* foi usado pela primeira vez pelo matemático (e advogado) inglês James Sylvester, que definiu o termo em 1850 como um "arranjo oblongo de termos". Sylvester comunicou seu trabalho sobre matrizes a um colega matemático e advogado inglês chamado Arthur Cayley, que então apresentou algumas das operações básicas sobre matrizes em um livro intitulado *Memoir on the Theory of Matrices* , publicado em 1858. Como curiosidade, Sylvester , que era judeu, não obteve seu diploma universitário porque se recusou a assinar um juramento obrigatório à Igreja da Inglaterra. Ele foi nomeado para uma cadeira na Universidade da Virgínia, nos Estados Unidos, mas renunciou após golpear um aluno com um pedaço de pau porque ele estava lendo um jornal em sala de aula.

Sylvester, pensando que havia matado o aluno, fugiu de volta para a Inglaterra no primeiro navio disponível. Felizmente, o aluno não estava morto, apenas em estado de choque!
[Imagens: The Granger Collection, Nova York]

EXEMPLO 11 Traço de uma Matriz

A seguir estão exemplos de matrizes e seus traços.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{tr}(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33} \quad \operatorname{tr}(B)=-1+5+7+0=11$$

Nos exercícios você terá alguma prática trabalhando com as operações de transposição e rastreamento.

Revisão do conceito

• Matriz

• Entradas

• Vetor coluna (ou matriz coluna) • Vetor linha

(ou matriz linha) • Matriz quadrada •

Diagonal principal •

Matrizes iguais •

Operações com

matrizes: soma, diferença, multiplicação escalar

• Combinação linear de matrizes

• Produto de matrizes (multiplicação de matrizes)

• Matrizes particionadas

• Submatrizes

• Método linha-coluna

• Método de coluna

• Método de linha

• Matriz de coeficientes de um sistema linear

• Transpor

• Rastrear

Habilidades

• Determinar o tamanho de uma determinada

matriz. • Identificar os vetores linha e os vetores coluna de uma dada matriz.

• Realizar as operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação escalar e multiplicação de matrizes. • Determinar se o produto de duas matrizes dadas está definido. • Calcule os produtos da matriz

usando o método linha-coluna, o método da coluna e o método da linha. • Expresse o produto de uma matriz e um

vetor coluna como uma combinação linear das colunas da matriz. • Expresse um sistema linear como uma equação matricial e identifique a matriz de coeficientes. • Calcular a transposta de uma matriz. • Calcular o traço de

uma matriz quadrada.

Conjunto de exercícios 1.3

1. Suponha que A, B, C, D e *E* sejam matrizes com os seguintes tamanhos:

A	*B*	*C*	*D*	*E*
(4×5)	(4×5)	(5×2)	(4×2)	(5×4)

Em cada parte, determine se a expressão de matriz fornecida está definida. Para aqueles que estão definidos, dê o tamanho da matriz resultante.

(a) *NÃO*

(b) $AC + D$

(c) $AE + B$

(d) $AB + B$

(e) $E(A + B)$

(f) *E(AC)* (g)

E A

(h) $(A^T + E)D$

Responder:

(a) Indefinido

(b) 4×2

(c) Indefinido

(d) Indefinido

(e) 5×5

(f) 5×2

(g) Indefinido

(h) 5×2

2. Suponha que A, B, C, D e *E* sejam matrizes com os seguintes tamanhos:

A	B	C	D	E
(3×1)	(3×6)	(6×2)	(2×6)	(1×3)

Em cada parte, determine se a expressão de matriz fornecida está definida. Para aqueles que estão definidos, dê o tamanho da matriz resultante.

(a) *EA*

(b) *DEPTO*

(c) $B^T\left(A+E^T\right)$

(d) $2A+C$

(e) $\left(C^T+D\right)B^T$

(f) $CD+B^TE^T$

(g) $\left(BD^T\right)C^T$

(h) $DC+EA$

3. Considere as matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Em cada parte, calcule a expressão dada (quando possível). (a)

(b) $D+E$

(c) $D-E$

5A (d)

(e) $-7C$

(f) $2B-C$

$4E-2D$

(g) $-3(D+2E)$

(h) $A-A$

(i) tr(D) (j)

$\operatorname{tr}(D-3E)$

(k) 4 tr(7B)

(l) tr(A)

Responder:

(a) $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ -5 & 10 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -7 & -28 & -14 \\ -21 & -7 & -35 \end{bmatrix}$

(e) Indefinido (f)

$\begin{bmatrix} 22 & -6 & 8 \\ -2 & 4 & 6 \\ 10 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} -39 & -21 & -24 \\ 9 & -6 & -15 \\ -33 & -12 & -30 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) 5

(j) -25

(k) 168

(l) Indefinido

4. Usando as matrizes do Exercício 3, calcule em cada parte a expressão dada (quando possível).

(a) $2A^T + C$

(b) $D^T - E^T$

(c) $(D - E)^T$

(d) $B^T + 5C^T$

(e) $\frac{1}{2}C^T - \frac{1}{4}A$

(f) $B - B^T$

(g) $2E^T - 3D^T$

(h) $\left(2E^T - 3D^T\right)^T$

(i) *(CD)E*

(j) *C(BA)*

(k) *tr(DET)*

(l) *tr(BC)*

5. Usando as matrizes do Exercício 3, calcule em cada parte a expressão dada (quando possível).

(a) *AB*

(b) *NÃO*

(c) *(3E)D*

(d) *(AB)C*

(e) *A(BC)*

(f) *TCC*

(g) $(DA)^T$

(h) $\left(C^T B\right)A^T$

(i) $tr(DD^T)$

(j) $\operatorname{tr}\left(4E^T - D\right)$

(k) $\operatorname{tr}\left(C^T A^T + 2E^T\right)$

(eu) $\operatorname{tr}\left(\left(EC^T\right)^T A\right)$

Responder:

(a) $\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

(b) Indefinido

(c) $\begin{bmatrix} 42 & 108 & 75 \\ 12 & -3 & 21 \\ 36 & 78 & 63 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 21 & 17 \\ 17 & 35 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 11 \\ 12 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 12 & 6 & 9 \\ 48 & -20 & 14 \\ 24 & 8 & 16 \end{bmatrix}$

(e) 61

(j) 35

(k) 28

(eu) 99

6. Usando as matrizes do Exercício 3, calcule em cada parte a expressão dada (quando possível).

(a) $\left(2D^T - E\right)A$

(b) $(4B)C + 2B$

(c) $(-AC)^T + 5D^T$

(d) $\left(BA^T - 2C\right)^T$

(e) $B^T\left(CC^T - A^TA\right)$

(f) $D^TE^T - (ED)^T$

7. Deixe

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Use o método de linha ou método de coluna (conforme apropriado) para encontrar

(a) a primeira linha de *AB.* (b) a terceira linha de *AB.* (c) a segunda coluna de *AB.* (d) a primeira coluna de *BA.* (e) a terceira linha de *AA.* (f) a terceira coluna de *AA.*

Responder:

(a) $\begin{bmatrix} 67 & 41 & 41 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 63 & 67 & 57 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 41 \\ 21 \\ 67 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 63 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 24 & 56 & 97 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 76 \\ 98 \\ 97 \end{bmatrix}$

8. Referindo-se às matrizes no Exercício 7, use o método de linha ou método de coluna (conforme apropriado) para encontrar

(a) a primeira coluna de *AB.* (b) a terceira coluna de *BB.* (c) a segunda linha do *BB.* (d) a primeira coluna de *AA.* (e) a terceira coluna de *AB.* (f) a primeira linha de *BA.*

9. Referindo-se às matrizes A e B no Exercício 7 e no Exemplo 9,

(a) expresse cada vetor coluna de *AA* como uma combinação linear dos vetores coluna de A.

(b) expresse cada vetor coluna de *BB* como uma combinação linear dos vetores coluna de B.

Responder:

(a) $\begin{bmatrix}-3\\48\\24\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}3\\6\\0\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}-2\\5\\4\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}12\\29\\56\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}3\\6\\0\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}-2\\5\\4\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}7\\4\\9\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}76\\98\\97\end{bmatrix}=7\begin{bmatrix}3\\6\\0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}-2\\5\\4\end{bmatrix}+9\begin{bmatrix}7\\4\\9\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix}64\\21\\77\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}6\\0\\7\end{bmatrix}+7\begin{bmatrix}4\\3\\5\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}14\\22\\28\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}6\\0\\7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\1\\7\end{bmatrix}+7\begin{bmatrix}4\\3\\5\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}38\\18\\74\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}6\\0\\7\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-2\\1\\7\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}4\\3\\5\end{bmatrix}$

10. Referindo-se às matrizes A e B no Exercício 7 e no Exemplo 9,

(a) expresse cada vetor coluna de *AB* como uma combinação linear dos vetores coluna de A. (b)

expresse cada vetor coluna de *BA* como uma combinação linear dos vetores coluna de B.

11. Em cada parte, encontre as matrizes A, x e **b** que expressam o sistema dado de equações lineares como uma única equação $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, matricial e escreva essa equação matricial.

(a)
$$\begin{aligned}2x_1-3x_2+5x_3&=7\\9x_1-x_2+x_3&=-1\\x_1+5x_2+4x_3&=0\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}4x_1\qquad\quad-3x_3+x_4&=1\\5x_1+x_2\qquad\quad-8x_4&=3\\2x_1-5x_2+9x_3-x_4&=0\\3x_2-x_3+7x_4&=2\end{aligned}$$

Responder:

(a) $\begin{bmatrix}2&-3&5\\9&-1&1\\1&5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-1\\0\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix}4&0&-3&1\\5&1&0&-8\\2&-5&9&-1\\0&3&-1&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\0\\2\end{bmatrix}$

12. Em cada parte, encontre as matrizes A, x e **b** que expressam o sistema dado de equações lineares como uma única equação $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, matricial e escreva essa equação matricial.

(a)
$$\begin{aligned}x_1-2x_2+3x_3&=-3\\2x_1+x_2\qquad\quad&=0\\-3x_2+4x_3&=1\\x_1\qquad\quad+x_3&=5\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}3x_1+3x_2+3x_3&=-3\\-x_1-5x_2-2x_3&=3\\-4x_2+x_3&=0\end{aligned}$$

13. Em cada parte, expresse a equação matricial como um sistema de equações lineares.

(a) $\begin{bmatrix}5&6&-7\\-1&-2&3\\0&4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}$

Responder:

(a) $\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 - 7x_3 &= 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 2 \\ 5x_1 - 3x_2 - 6x_3 &= -9 \end{aligned}$

14. Em cada parte, expresse a equação matricial como um sistema de equações lineares.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 15–16, encontre todos os valores de k, se houver, que satisfaçam a equação.

15. $\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

Responder:

-1

16. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ k \end{bmatrix} = 0$

Nos Exercícios 17–18, resolva a equação matricial para a, b, c e d.

17. $\begin{bmatrix} a & 3 \\ -1 & a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & d-2c \\ d+2c & -2 \end{bmatrix}$

Responder:

$a = 4,\ b = -6,\ c = -1,\ d = 1$

18. $\begin{bmatrix} a-b & b+a \\ 3d+c & 2d-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

19. Seja *A* qualquer $m \times n$ matriz e seja *0* o $m \times n$ matriz cujas entradas são zero. Mostre que se $kA = 0$, então $k = 0$ ou $A = 0$.

20. (a) Mostre que se *AB* e *BA* são ambos definidos, então *AB* e *BA* são matrizes quadradas. (b) Mostre que se *A* é uma matriz e *A*(*BA*) está definido, então *B* é uma $m \times n$ $n \times m$ matriz.

21. Prove: Se *A* e *B* são $n \times n$ matrizes, então $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.

22. (a) Mostre que se *A* tem uma linha de zeros e *B* é qualquer matriz para a qual *AB* é definido, então *AB* também tem uma linha de zeros.

(b) Encontre um resultado semelhante envolvendo uma coluna de zeros.

23. Em cada parte, encontre um 6×6 matriz *[aij]* que satisfaz a condição estabelecida. Torne suas respostas o mais geral possível usando letras em vez de números específicos para as entradas diferentes de zero. (a)

$a_{ij} = 0$ if $i \neq j$

(b) $a_{ij} = 0$ if $i > j$

(c) $a_{ij} = 0$ if $i < j$

(d) $a_{ij} = 0$ if $|i - j| > 1$

Responder:

(a) $$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix}$$

(b) $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix}$$

(c) $$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

(d) $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

24. Encontre o 4×4 matriz $A = [a_{ij}]$ cujas entradas satisfazem a condição estabelecida.

(a) $a_{ij} = i + j$

(b) $a_{ij} = i^{j-1}$

(c) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad |i-j| > 1 \\ -1 & \text{if} \quad |i-j| \le 1 \end{cases}$

25. Considere a função $y = f(x)$ definido para 2×1 matrizes *x* por $y = Ax$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Plote *f(x)* junto com *x* em cada caso abaixo. Como você descreveria a ação de f?

(a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

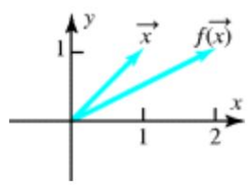
(c) $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

(d) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

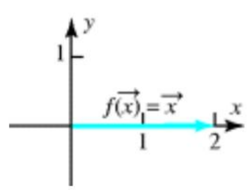
Responder:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

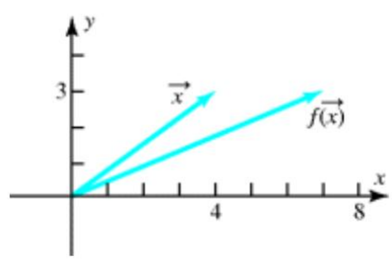
(a) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



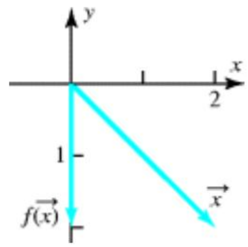
(b) $f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$



(c) $f\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$



(d) $f\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$



26. Deixe *-me* ser o $n \times n$ matriz cuja entrada na linha *i* e coluna *j* é

$$\begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}$$

Mostre que $AI = IA = A$ para cada $n \times n$ matriz A.

27. Quantos 3×3 matrizes *A* você pode encontrar tal que

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \\ 0 \end{bmatrix}$$

para todas as escolhas de x, y e z?

Responder:

Um; nomeadamente, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

28. Quantos 3×3 matrizes *A* você pode encontrar tal que

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para todas as escolhas de x, y e z?

29. Diz-se que uma matriz *B* é uma ***raiz quadrada*** de uma matriz *A* se $BB = A$.

(a) Encontre duas raízes quadradas de $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Quantas raízes quadradas diferentes você pode encontrar de $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$?

(c) Você acha que cada 2×2 matriz tem pelo menos uma raiz quadrada? Explique seu raciocínio.

Responder:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

(b) Quatro; $\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

30. Deixe *0* denotar um 2×2 matriz, cada uma de cujas entradas é zero.

(a) Existe um 2×2 matriz *A* tal que $A \neq 0$ e $AA = 0$? Justifique sua resposta.

(b) Existe um 2×2 matriz *A* tal que $A \neq 0$ e $AA = A$? Justifique sua resposta.

Exercícios de Verdadeiro-Falso

Nas partes (a)–(o), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

(a) O Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ não tem diagonal principal.

Responder:

Verdadeiro

(b) Um $m \times n$ a matriz tem *m* vetores de coluna e *n* vetores de linha.

Responder:

Falso

(c) Se *A* e *B* são 2×2 matrizes, então $AB = BA$.

Responder:

Falso

(d) O *i*- ésimo vetor linha de um produto de matriz *AB* pode ser calculado multiplicando-se *A* pelo i-ésimo vetor linha de B.

Responder:

Falso

(e) Para toda matriz A, é verdade que $\left(A^T\right)^T = A$.

Responder:

Verdadeiro

(f) Se *A* e *B* são matrizes quadradas de mesma ordem, então $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

Responder:

Falso

(g) Se *A* e *B* são matrizes quadradas de mesma ordem, então $(AB)^T = A^T B^T$.

Responder:

Falso

(h) Para toda matriz quadrada A, é verdade que $\operatorname{tr}\left(A^T\right) = \operatorname{tr}(A)$.

Responder:

Verdadeiro

(i) Se *A* é um 6×4 matriz e *B* é uma $m \times n$ matriz tal que *BT AT* é uma 2×6 matriz, então $m = 4$ e $n = 2$.

Responder:

Verdadeiro

(j) Se *A* é um $n \times n$ matriz e *c* é um escalar, então $\operatorname{tr}(cA) = c \operatorname{tr}(A)$.

Responder:

Verdadeiro

(k) Se A, B e *C* são matrizes de mesmo tamanho tais que $A - C = B - C$, então $A = B$.

Responder:

Verdadeiro

(l) Se A, B e *C* são matrizes quadradas de mesma ordem tais que $AC = BC$, então $A = B$.

Responder:

Falso

(m) Se $AB + BA$ é definido, então *A* e *B* são matrizes quadradas de mesmo tamanho.

Responder:

Verdadeiro

(n) Se *B* tem uma coluna de zeros, *AB* também tem se este produto for definido.

Responder:

Verdadeiro

(o) Se *B* tem uma coluna de zeros, então *BA* também tem se este produto for definido.

Responder:

Falso

1.4 Inversas; Propriedades Algébricas de Matrizes

Nesta seção, discutiremos algumas das propriedades algébricas das operações com matrizes. Veremos que muitas das regras básicas da aritmética para números reais são válidas para matrizes, mas também veremos que outras não.

Propriedades da Adição de Matrizes e da Multiplicação Escalar

O teorema a seguir lista as propriedades algébricas básicas das operações com matrizes.

TEOREMA 1.4.1 Propriedades da Aritmética Matricial

Assumindo que os tamanhos das matrizes são tais que as operações indicadas podem ser realizadas, as seguintes regras de aritmética de matrizes são válidas.

(a) $A+B=B+A \quad (\textbf{Commutative law for addition})$

(b) $A+(B+C)=(A+B)+C \quad (\textbf{Associative law for addition})$

(c) $A(BC)=(AB)C \quad (\textbf{Associative law for multiplication})$

(d) $A(B+C)=AB+AC \quad (\textbf{Left distributive law})$

(e) $(B+C)A=BA+CA \quad (\textbf{Right distributive law})$

(f) $A(B-C)=AB-AC$

(g) $(B-C)A=BA-CA$

(h) $a(B+C)=aB+aC$

(i) $a(B-C)=aB-aC$

(j) $(a+b)C=aC+bC$

(k) $(a-b)C=aC-bC$

(l) $a(bC)=(ab)C$

(m) $a(BC)=(aB)C=B(aC)$

Para provar qualquer uma das igualdades neste teorema, devemos mostrar que a matriz do lado esquerdo tem o mesmo tamanho que a do lado direito e que as entradas correspondentes nos dois lados são iguais. A maioria das provas segue o mesmo padrão, então provaremos a parte *(d)* como uma amostra. A prova da lei associativa para a multiplicação é mais complicada que as outras e está esboçada nos exercícios.

Existem três maneiras básicas de provar que duas matrizes do mesmo tamanho são iguais — provar que as entradas correspondentes são iguais, provar que os vetores linha correspondentes são iguais ou provar que os vetores coluna correspondentes são iguais.

Prova (d) Devemos mostrar que $A(B+C)$ e $AB+AC$ têm o mesmo tamanho e as entradas correspondentes são iguais. Para formar $A(B+C)$, as matrizes *B* e *C* devem ter o mesmo tamanho, digamos então $m \times n$, e a matriz *A* devem ter *m* colunas, então seu tamanho deve ser da forma $r \times m$. Isso faz com que siga essa $A(B+C)$ um $r \times n$ matriz. Isto matriz e, consequentemente, $AB+AC$ também é um $r \times n$ $A(B+C)$ e $AB+AC$ têm o mesmo tamanho.

Suponha $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$, e $C=[c_{ij}]$. Queremos mostrar que entradas correspondentes de $A(B+C)$ que e $AB+AC$ são iguais; aquilo é,

$$[A(B+C)]_{ij} = [AB+AC]_{ij}$$

para todos os valores de *i* e j. Mas a partir das definições de adição de matrizes e multiplicação de matrizes, temos

$$\begin{aligned} [A(B+C)]_{ij} &= a_{i1}(b_{1j}+c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j}+c_{2j}) + \cdots + a_{im}(b_{mj}+c_{mj}) \\ &= (a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}) + (a_{i1}c_{1j}+a_{i2}c_{2j}+\cdots+a_{im}c_{mj}) \\ &= [AB]_{ij} + [AC]_{ij} = [AB+AC]_{ij} \end{aligned}$$

Observação Embora as operações de adição e multiplicação de matrizes tenham sido definidas para pares de matrizes, as leis associativas *(b)* e *(c)* nos permitem denotar somas e produtos de três matrizes $A+B+C$ como e *ABC* sem inserir parênteses. Isso se justifica pelo fato de que não importa como os parênteses são inseridos, as leis associativas garantem que o mesmo resultado final será obtido. Em geral, *dada qualquer soma ou produto de matrizes, pares de parênteses podem ser inseridos ou excluídos em qualquer lugar da expressão sem afetar o resultado final.*

EXEMPLO 1 Associatividade da Multiplicação de Matrizes

Como ilustração da lei associativa para a multiplicação de matrizes, considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Por isso

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

então $(AB)C = A(BC)$, conforme garantido pelo Teorema 1.4.1(c).

Propriedades da multiplicação de matrizes

Não deixe o Teorema 1.4.1 induzi-lo a acreditar que *todas* as leis da aritmética real se aplicam à aritmética matricial. Por exemplo, você sabe que na aritmética real é sempre verdade que a $ab = ba$, que é chamado de *lei comutativa para a multiplicação.* Na aritmética matricial, no entanto, a igualdade de *AB* e *BA* pode falhar por três razões possíveis:

1. *AB* pode ser definido e *BA* não pode (por exemplo, se *A* for 2×3 e *B* é 3×4).
2. *AB* e *BA* podem ser definidos, mas podem ter tamanhos diferentes (por exemplo, se *A* for 2×3 e *B* é 3×2).
3. *AB* e *BA* podem ser definidos e ter o mesmo tamanho, mas as duas matrizes podem ser diferentes (como ilustrado no próximo exemplo).

Não leia muito o Exemplo 2 - ele não exclui a possibilidade de que *AB* e *BA* possam ser iguais em *certos* casos, apenas que não são iguais em *todos* os casos. Se isso acontecer, $AB = BA$, dizemos que *AB* e *BA* ***trajeto.***

EXEMPLO 2 A Ordem Importa na Multiplicação de Matrizes

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicar dá

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \text{ and } BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Por isso, $AB \neq BA$.

Matrizes Zero

Uma matriz cujas entradas são todas nulas é chamada de ***matriz zero.*** Alguns exemplos são

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [0]$$

Denotaremos uma matriz zero por *0* , a menos que seja importante especificar seu tamanho, caso em que denotaremos o $m \times n$ matriz zero por $0_{m \times n}$.

Deve ser evidente que se *A* e *0* são matrizes com o mesmo tamanho, então

$$A + 0 = 0 + A = A$$

Assim, *0* desempenha o mesmo papel nesta equação matricial que o número 0 desempenha na equação numérica $a + 0 = 0 + a = a$.

O teorema a seguir lista as propriedades básicas de matrizes nulas. Como os resultados devem ser autoevidentes, omitiremos as provas formais.

TEOREMA 1.4.2 Propriedades de Matrizes Zero

Se c é um escalar, e se os tamanhos das matrizes são tais que as operações podem ser realizadas, então:

(a) $A + 0 = 0 + A = A$

(b) $A - 0 = A$

(c) $A - A = A + (-A) = 0$

(d) $0A = 0$

(e) Se $cA = 0$, então $c = 0$ ou $A = 0$.

Como sabemos que a lei comutativa da aritmética real não é válida na aritmética matricial, não deveria ser surpreendente que existam outras regras que também falham. Por exemplo, considere as seguintes duas leis da aritmética real:

- Se $ab = bc$ e $a \neq 0$, então $b = c$. **[A lei do cancelamento]**
- Se $ab = 0$, então pelo menos um dos fatores à esquerda é 0.

Os próximos dois exemplos mostram que essas leis não são universalmente verdadeiras na aritmética matricial.

EXEMPLO 3 Descumprimento da Lei de Cancelamento

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Deixamos para você confirmar que

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Embora $A \neq 0$, cancelando *A* de ambos os lados da equação .$AB = AC$ levaria ao conclusão incorreta que a $B = C$ Assim, a lei do cancelamento não vale, em geral, para matrizes multiplicação.

EXEMPLO 4 Um produto zero com fatores diferentes de zero

Aqui estão duas matrizes para as quais $AB = 0$, mas $A \neq 0$ e $B \neq 0$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes de Identidade

Uma matriz quadrada com 1 na diagonal principal e zeros nas demais é chamada de ***matriz identidade.*** Alguns exemplos são

$$[1], \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma ***matriz identidade*** é denotada pela letra I. Se for importante enfatizar o tamanho, escreveremos *In* para o $n \times n$ matriz de identidade.

Para explicar o papel das matrizes identidade na aritmética matricial, vamos considerar o efeito da multiplicação de uma matriz 2×3 geral *A* em cada lado por uma matriz identidade. Multiplicando à direita pela matriz de identidade 3×3 resulta

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

e multiplicando à esquerda pelo 2×2 rendimentos da matriz de identidade

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

O mesmo resultado é válido em geral; isto é, se *A* é qualquer $m \times n$ matriz, então

$$AI_n = A \quad \text{and} \quad I_mA = A$$

Assim, as matrizes identidade desempenham o mesmo papel nessas equações matriciais que o número 1 desempenha na equação numérica $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Como mostra o próximo teorema, as matrizes identidade surgem naturalmente no estudo de formas escalonadas reduzidas de matrizes *quadradas* .

TEOREMA 1.4.3

Se *R* é a forma escalonada reduzida por linhas de $n \times n$ matriz A, então *R* tem uma linha de zeros ou *R* é o uma matriz identidade *In.*

Prova Suponha que a forma escalonada reduzida por linhas de *A* seja

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

A última linha desta matriz consiste inteiramente em zeros ou não. Caso contrário, a matriz não contém nenhuma linha zero e, consequentemente, cada uma das *n* linhas tem uma entrada inicial de 1. Como esses 1s iniciais ocorrem progressivamente mais à direita à medida que descemos na matriz, cada um desses 1s deve ocorrer no principal diagonal. Como as outras entradas na mesma coluna de um desses 1 são zero, *R* deve ser *In.* Assim, ou *R* tem uma linha de zeros ou $R = I_n$.

Inversa de uma Matriz

Na aritmética real, todo número diferente de zero *a* tem um recíproco $a^{-1}(= 1/a)$ com a propriedade

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

O número a^{-1} às vezes é chamado de *inverso multiplicativo* de a. Nosso próximo objetivo é desenvolver um análogo deste resultado para aritmética de matrizes. Para isso fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1

Se *A* é uma matriz quadrada e se uma matriz *B* do mesmo tamanho pode ser encontrada de modo que $AB = BA = I$, seja ***invertível*** (ou ***não singular)*** e *B* é chamada de ***inversa*** de A. Se nenhuma matriz *B* puder ser encontrada, então *A* é dito ser ***singular.***

Observação A relação não é alterada pela troca $AB = BA = I$ de *A* e B, portanto, se *A* é invertível e *B* é um inverso de A, também é verdade que *B* é invertível e *A* é um inverso de B. Assim, quando

$$AB = BA = I$$

dizemos que *A* e *B* são *inversos um do outro.*

EXEMPLO 5 Uma Matriz Invertível

Deixar

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Então

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$
$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Assim, *A* e *B* são inversíveis e cada um é o inverso do outro.

EXEMPLO 6 Classe de Matrizes Singulares

Em geral, uma matriz quadrada com uma linha ou coluna de zeros é singular. Para ajudar a entender por que isso acontece, considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Para provar que *A* é singular devemos mostrar que não existe . 3×3 matriz *B* tal que $AB = BA = I$ Para este propósito, sejam os vetores $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{0}$ coluna de A. Assim, para qualquer pode-se 3×3 matriz *B* nós expressar o produto *BA* como

$$BA = B[\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{0}] = [B\mathbf{c}_1 \quad B\mathbf{c}_2 \quad \mathbf{0}] \quad [\textbf{Formula (6) of Section 1.3}]$$

A coluna de zeros mostra que $BA \neq I$ e, portanto, que *A* é singular.

Propriedades dos Inversos

É razoável perguntar se uma matriz invertível pode ter mais de uma inversa. O próximo teorema mostra que a resposta é não – uma *matriz invertível tem exatamente um inverso.*

TEOREMA 1.4.4

Se *B* e *C* são ambos inversos da matriz A, então $B = C$.

Prova Como *B* é inverso de A, temos $BA = I$. Multiplicando ambos os lados à direita por *C* dá $(BA)C = IC = C$. Mas também é verdade que $(BA)C = B(AC) = BI = B$, então $C = B$.

Como consequência deste importante resultado, podemos agora falar em “a” inversa de uma matriz invertível. Se *A* é invertível, então seu inverso será denotado pelo símbolo A^{-1}. Por isso,

$$AA^{-1} = I \quad \text{and} \quad A^{-1}A = I \tag{1}$$

A inversa de *A* desempenha praticamente o mesmo papel na aritmética matricial que as a^{-1} joga no numérico relações recíprocas $aa^{-1}=1$ e $a^{-1}a=1$.

Na próxima seção, desenvolveremos um método para calcular a inversa de uma matriz invertível de qualquer tamanho. Por ora, damos o seguinte teorema que especifica as condições sob as quais a fornece 2×2 matriz é invertível e uma fórmula simples para sua inversa.

TEOREMA 1.4.5

O Matrix

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é invertível se e somente se $ad-bc\neq 0$, caso em que o inverso é dado pela fórmula

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{2}$$

Iremos omitir a demonstração, pois estudaremos uma versão mais geral deste teorema posteriormente. Por enquanto, você deve pelo menos confirmar a validade da Fórmula 2 mostrando que $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

Nota Histórica A fórmula para A^{-1} dado no Teorema 1.4.5 apareceu pela primeira vez (de uma forma mais geral forma) em Arthur Cayley's 1858 *Memoir on the Theory of Matrices.* O resultado mais geral que Cayley descobriu será estudado mais tarde.

A quantidade $ad-bc$ no Teorema 1.4.5 é chamada ***determinante*** de e é 2×2 matriz *A* denotada por

$$\det(A)=ad-bc$$

ou alternativamente por

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

Observação A Figura 1.4.1 ilustra que o determinante de uma matriz 2×2 *A* é o produto das entradas em sua diagonal principal menos o produto das entradas *em* sua diagonal principal. Em palavras, o Teorema 1.4.5 afirma que um 2×2 A matriz *A* é invertível se e somente se seu determinante for diferente de zero, e se invertível, então seu inverso pode ser obtido trocando suas entradas diagonais, invertendo os sinais de suas entradas fora da diagonal e multiplicando as entradas pelo recíproco do determinante de A.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Figura 1.4.1

EXEMPLO 7 Calculando o inverso de uma matriz 2 × 2

Em cada parte, determine se a matriz é invertível. Em caso afirmativo, encontre seu inverso.

(a) $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

Solução

(a) O determinante de *A* é $\det(A) = (6)(2) - (1)(5) = 7$, que é diferente de zero. Assim, *A* é invertível, e sua inversa é

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

Deixamos para você confirmar que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

(b) A matriz não é invertível, pois $\det(A) = (-1)(-6) - (2)(3) = 0$.

EXEMPLO 8 Solução de um Sistema Linear por Inversão de Matrizes

Um problema que surge em muitas aplicações é resolver um par de equações da forma

$$\begin{aligned} u &= ax + by \\ v &= cx + dy \end{aligned}$$

para *x* e *y* em termos de *u* e v. Uma abordagem é tratar isso como um sistema linear de duas equações nas incógnitas *x* e *y* e usar a eliminação de Gauss-Jordan para resolver *x* e y. No entanto, como os coeficientes das incógnitas são *literais* e não *numéricos,* esse procedimento é um pouco desajeitado. Como uma abordagem alternativa, vamos substituir as duas equações pela equação de matriz única

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

que podemos reescrever como

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Se assumirmos que o 2×2 matriz é invertível (ou seja, $ad - bc \neq 0$), então podemos multiplicar por on a esquerda pelo inverso e reescrever a equação como

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

o que simplifica para

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Usando o Teorema 1.4.5, podemos reescrever esta equação como

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

do qual obtemos

$$x = \frac{du-bv}{ad-bc}, \quad y = \frac{av-cu}{ad-bc}$$

O próximo teorema trata de inversas de produtos matriciais.

TEOREMA 1.4.6

Se A e B são matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então AB é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Prova Podemos estabelecer a inversibilidade e obter a fórmula apresentada ao mesmo tempo, mostrando que

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = \left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = I$$

Mas

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

e da mesma forma, $\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = I$.

Embora não o provemos, este resultado pode ser estendido a três ou mais fatores:

Um produto de qualquer número de matrizes invertíveis é invertível, e o inverso do produto é o produto dos inversos na ordem inversa.

EXEMPLO 9 O inverso de um produto

Considere as matrizes

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

Deixamos para você mostrar que

$$AB=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 9 & 8\end{bmatrix},\quad (AB)^{-1}=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2}\end{bmatrix}$$

e também isso

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix},\quad B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix},\quad B^{-1}A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2}\end{bmatrix}$$

Por isso, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ conforme garantido pelo Teorema 1.4.6.

Poderes de uma Matrix

Se A é uma matriz *quadrada* , então definimos as potências inteiras não negativas de A como sendo

$$A^0=I \quad \text{and} \quad A^n=AA\cdot\cdot\cdot A \quad [\boldsymbol{n}\ \textbf{factors}]$$

e se A é invertível, então definimos as potências inteiras negativas de A como sendo

$$A^{-n}=\left(A^{-1}\right)^n=A^{-1}A^{-1}\cdot\cdot\cdot A^{-1} \quad [\boldsymbol{n}\ \textbf{factors}]$$

Como essas definições são paralelas àquelas para números reais, as leis usuais de expoentes não negativos são válidas; por exemplo,

$$A^rA^s=A^{r+s} \quad \text{and} \quad \left(A^r\right)^s=A^{rs}$$

Se um produto de matrizes é singular, então pelo menos
um dos fatores deve ser singular. Por que?

Além disso, temos as seguintes propriedades de expoentes negativos.

TEOREMA 1.4.7

Se A é invertível e n é um inteiro não negativo, então:

(a) A^{-1} é invertível e $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

(b) An é invertível e $\left(A^{n}\right)^{-1}=A^{-n}=\left(A^{-1}\right)^{n}$.

(c) kA é invertível para qualquer k escalar diferente de zero, e $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$.

Vamos provar a parte *(c)* e deixar as provas das partes *(a)* e *(b)* como exercícios.

Prova (c) As propriedades *(c)* e *(m)* no Teorema 1.4.1 implicam que

$$(kA)\left(k^{-1}A^{-1}\right)=k^{-1}(kA)A^{-1}=\left(k^{-1}k\right)AA^{-1}=(1)I=I$$

e da mesma forma, $\left(k^{-1}A^{-1}\right)=(kA)=I$. Assim, *kA* é invertível e $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$.

EXEMPLO 10 Propriedades dos expoentes

Seja *A* e A^{-1} sejam as matrizes do Exemplo 9; aquilo é,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix} \text{ and } A^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

Então

$$A^{-3}=\left(A^{-1}\right)^{3}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}41 & -30\\ -15 & 11\end{bmatrix}$$

Também,

$$A^{3}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 30\\ 15 & 41\end{bmatrix}$$

então, como esperado do Teorema 1.4.7(b),

$$\left(A^{3}\right)^{-1}=\frac{1}{(11)(41)-(30)(15)}\begin{bmatrix}41 & -30\\ -15 & 11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}41 & -30\\ -15 & 11\end{bmatrix}=\left(A^{-1}\right)^{3}$$

EXEMPLO 11 O quadrado de uma soma matricial

Na aritmética real, onde temos uma lei comutativa para a multiplicação, podemos escrever

$$(a+b)^{2}=a^{2}+ab+ba+b^{2}=a^{2}+ab+ab+b^{2}=a^{2}+2ab+b^{2}$$

No entanto, na aritmética matricial, onde não temos lei comutativa para a multiplicação, o melhor que podemos fazer é escrever

$$(A+B)^{2}=A^{2}+AB+BA+B^{2}$$

É apenas no caso especial em que *A* e *B comutam* (isto é, avançam e $AB=BA$) que podemos dar um passo escrevem

$$(A+B)^{2}=A^{2}+2AB+B^{2}$$

polinômios matriciais

Se *A* é uma matriz quadrada, digamos $n \times n$, e se

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdot \cdot \cdot + a_m x^m$$

é qualquer polinômio, então definimos o $n \times n$ matriz *p(A)* a ser

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdot \cdot \cdot + a_m A^m \tag{3}$$

onde *eu* sou o $n \times n$ matriz de identidade; isto é, *p(A)* é obtido substituindo *A* por *x* e substituindo o termo constante pela matriz $a_0 I$. Uma expressão da forma 3 é chamada de ***matriz polinomial em*** A.

EXEMPLO 12 Uma matriz polinomial

Encontrar $p(A)$ para

$$p(x) = x^2 - 2x - 3 \quad \text{and} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução

$$\begin{aligned} p(A) &= A^2 - 2A - 3I \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 - 2\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou mais brevemente, $p(A) = 0$.

Observação Segue-se do fato de que $A^r A^s = A^{r+s} = A^{s+r} = A^s A^r$ que potências de uma matriz quadrada comuta, e desde que um polinômio de matriz em *A* é construído a partir de potências de A, quaisquer dois polinômios de matriz em *A* também comutam; ou seja, para quaisquer polinômios p1 e p2 temos

$$p_1(A) p_2(A) = p_2(A) p_1(A) \tag{4}$$

Propriedades da transposição

O teorema a seguir lista as principais propriedades da transposição.

TEOREMA 1.4.8

Se os tamanhos das matrizes são tais que as operações indicadas podem ser realizadas, então:

(a) $\left(A^T\right)^T = A$

(b) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(c) $(A-B)^T = A^T - B^T$

(d) $(kA)^T = kA^T$

(e) $(AB)^T = B^T A^T$

Se você tiver em mente que a transposição de uma matriz troca suas linhas e colunas, não deverá ter problemas para visualizar os resultados nas partes (a)–(d). Por exemplo, a parte *(a)* afirma o fato óbvio de que a troca de linhas e colunas duas vezes deixa uma matriz inalterada; e a parte *(b)* afirma que somar duas matrizes e depois trocar as linhas e colunas produz o mesmo resultado que trocar as linhas e colunas antes da adição. Vamos omitir as provas formais. A parte *(e)* é menos óbvia, mas, por brevidade, também omitiremos sua prova. O resultado nessa parte pode ser estendido para três ou mais fatores e reapresentado como:

A transposta de um produto de qualquer número de matrizes é o produto das transpostas na ordem inversa.

O teorema a seguir estabelece uma relação entre a inversa de uma matriz e a inversa de sua transposta.

TEOREMA 1.4.9

Se *A* é uma matriz invertível, então *AT* também é invertível e

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

Prova Podemos estabelecer a invertibilidade e obter a fórmula ao mesmo tempo mostrando que

$$A^T\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T A^T = I$$

Mas da parte *(e)* do Teorema 1.4.8 e do fato de que $I^T = I$, Nós temos

$$\begin{aligned} A^T\left(A^{-1}\right)^T &= \left(A^{-1}A\right)^T = I^T = I \\ \left(A^{-1}\right)^T A^T &= \left(AA^{-1}\right)^T = I^T = I \end{aligned}$$

o que completa a prova.

EXEMPLO 13 Inversa de uma Transposição

Considere um general 2×2 matriz invertível e sua transposta:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ and } A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Como *A* é invertível, seu determinante *AT* $ad - bc$ é diferente de zero. Mas o determinante de *AT* também é $ad - bc$ também é invertível. Segue do Teorema 1.4.5 que (verifique), então

$$\left(A^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & -\dfrac{c}{ad-bc} \\ -\dfrac{b}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

que é a mesma matriz que resulta se A^{-1} é transposto (verificar). Por isso,

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

conforme garantido pelo Teorema 1.4.9.

Revisão do conceito

- Lei comutativa para adição de matrizes
- Lei associativa para adição de matrizes
- Lei associativa para multiplicação de matrizes • Leis

distributivas esquerda e direita
- Matriz zero
- Matriz de identidade
- Inversa de uma matriz
- Matriz invertível
- Matriz não singular •

Matriz singular
- Determinante
- Potência de uma matriz

- Matriz polinomial

Habilidades

- Conhecer as propriedades aritméticas das operações matriciais.
- Ser capaz de provar propriedades aritméticas de matrizes. •

Conhecer as propriedades das matrizes nulas.

- Conhecer as propriedades das matrizes identidade.
- Ser capaz de reconhecer quando duas matrizes quadradas são inversas uma da outra.
- Ser capaz de determinar se um 2×2 matriz é invertível.
- Ser capaz de resolver um sistema linear de duas equações em duas incógnitas cuja matriz de coeficientes é invertível.
- Ser capaz de demonstrar propriedades básicas envolvendo matrizes

invertíveis. • Conhecer as propriedades da matriz transposta e sua relação com matrizes invertíveis.

Conjunto de exercícios 1.4

1. Deixe

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad a = 4, \quad b = -7$$

Mostre que

(a) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(b) $(AB)C = A(BC)$

(c) $(a + b)C = aC + bC$

(d) $a(B - C) = aB - aC$

2. Usando as matrizes e escalares do Exercício 1, verifique que

(a) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

(b) $A(B - C) = AB - AC$

(c) $(B + C)A = BA + CA$

(d) $a(bC) = (ab)C$

3. Usando as matrizes e escalares do Exercício 1, verifique que

(a) $\left(A^T\right)^T = A$

(b) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(c) $(aC)^T = aC^T$

(d) $(AB)^T = B^T A^T$

Nos Exercícios 4–7, use o Teorema 1.4.5 para calcular as inversas das seguintes matrizes.

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

5. $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

Responder:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

6. $C = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

7. $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Responder:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

8. Encontre o inverso de

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

9. Encontre o inverso de

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix}$$

Responder:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix}$$

10. Use a matriz *A* no Exercício 4 para verificar que $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

11. Use a matriz *B* no Exercício 5 para verificar que $\left(B^T\right)^{-1} = \left(B^{-1}\right)^T$.

12. Use as matrizes *A* e *B* em 4 e 5 para verificar que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

13. Use as matrizes A, B e *C* nos Exercícios 4–6 para verificar que $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

Nos Exercícios 14–17, use as informações fornecidas para encontrar A.

14. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

15. $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Responder:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

16. $\left(5A^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

17. $(I + 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Responder:

$$\begin{bmatrix} -\frac{9}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{6}{13} \end{bmatrix}$$

18. Seja *A* a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Em cada parte, calcule a quantidade dada.

(a) A^3

(b) A^{-3}

(c) $A^2 - 2A + I$

(d) $p(A)$, onde $p(x) = x - 2$

(e) $p(A)$, onde $p(x) = 2x^2 - x + 1$

(f) $p(A)$, onde $p(x) = x^3 - 2x + 4$

19. Repita o Exercício 18 para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Responder:

(a) $\begin{bmatrix} 41 & 15 \\ 30 & 11 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 11 & -15 \\ -30 & 41 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 20 & 7 \\ 14 & 6 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 39 & 13 \\ 26 & 13 \end{bmatrix}$

20. Repita o Exercício 18 para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

21. Repita o Exercício 18 para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Responder:

(a) $\begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 26 & -18 \\ 0 & 18 & 26 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{27} & 0 & 0 \\ 0 & 0.026 & 0.018 \\ 0 & -0.018 & 0.026 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 12 & -5 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & -15 \\ 0 & 15 & -14 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & -24 \\ 0 & 24 & 32 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 22–24, deixe $p_1(x) = x^2 - 9,\ p_2(x) = x + 3$, e $p_3(x) = x - 3$. Mostre que $p_1(A) = p_2(A)p_3(A)$ para a matriz dada.

22. A matriz *A* no Exercício 18.

23. A matriz *A* no Exercício 21.

24. Uma matriz quadrada arbitrária A.

25. Mostre que se $p(x) = x^2 - (a + d)x + (ad - bc)$ e

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

então $p(A) = 0$.

26. Mostre que se $p(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ae + be - cd)x - a(be - cd)$ e

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{bmatrix}$$

então $p(A) = 0$.

27. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

onde $a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$. Mostre que *A* é invertível e encontre sua inversa.

Responder:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

28. Mostre que se uma matriz quadrada *A* satisfaz $A^2 - 3A + I = 0$, então $A^{-1} = 3I - A$.

29. (a) Mostre que uma matriz com uma linha de zeros não pode ter uma inversa.

(b) Mostre que uma matriz com uma coluna de zeros não pode ter uma inversa.

30. Assumindo que todas as matrizes são $n \times n$ e invertível, resolva para D.

$$ABC^TDBA^TC = AB^T$$

31. Assumindo que todas as matrizes são $n \times n$ e invertível, resolva para D.

$$C^T B^{-1} A^2 BAC^{-1} DA^{-2} B^T C^{-2} = C^T$$

Responder:

$$D = CA^{-1} B^{-1} A^{-2} BC^2 \left(B^T\right)^{-1} A^2$$

32. Se A é uma matriz quadrada e n é um inteiro positivo, é verdade que $\left(A^n\right)^T = \left(A^T\right)^n$? Justifique sua resposta.

33. Simplifique:

$$(AB)^{-1} \left(AC^{-1}\right)\left(D^{-1} C^{-1}\right)^{-1} D^{-1}$$

Responder:

B^{-1}

34. Simplifique:

$$\left(AC^{-1}\right)^{-1} \left(AC^{-1}\right)\left(AC^{-1}\right)^{-1} AD^{-1}$$

Nos Exercícios 35–37, determine se A é invertível e, se for, encontre o inverso. *[Dica:* Resolva igualando as entradas $AX = I$ para X correspondentes nos dois lados.]

35. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Responder:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

36. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

37. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Responder:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

38. Prove o Teorema 1.4.2.

Nos Exercícios 39–42, use o método do Exemplo 8 para encontrar a única solução do sistema linear dado.

39. $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Responder:

$$x_1 = \frac{1}{23},\ x_2 = \frac{13}{23}$$

40. $$\begin{aligned} -x_1 + 5x_2 &= 4 \\ -x_1 - 3x_2 &= 1 \end{aligned}$$

41. $$\begin{aligned} 6x_1 + x_2 &= 0 \\ 4x_1 - 3x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Responder:

$$x_1 = -\frac{1}{11},\ x_2 = \frac{6}{11}$$

42. $$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 &= 4 \end{aligned}$$

43. Prove a parte *(a)* do Teorema 1.4.1.

44. Prove a parte *(c)* do Teorema 1.4.1.

45. Prove a parte *(f)* do Teorema 1.4.1.

46. Prove a parte *(b)* do Teorema 1.4.2.

47. Prove a parte *(c)* do Teorema 1.4.2.

48. Verifique a Fórmula 4 no texto por um cálculo direto.

49. Prove a parte *(d)* do Teorema 1.4.8.

50. Prove a parte *(e)* do Teorema 1.4.8.

51. (a) Mostre que se *A* é invertível e (b) Explique $AB = AC$, então $B = C$.

por que a parte (a) e o Exemplo 3 não se contradizem.

52. Mostre que se *A* é invertível e *k* é qualquer escalar diferente de zero, então $(kA)^n = k^n A^n$ para todos os valores inteiros de n.

53. (a) Mostre que se A, B e $A + B$ são matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então

$$A\left(A^{-1} + B^{-1}\right)B(A+B)^{-1} = I$$

(b) O que o resultado da parte (a) informa sobre a matriz $A^{-1} + B^{-1}$?

54. Uma matriz quadrada *A* é considerada ***idempotente*** se $A^2 = A$.

(a) Mostre que se *A* é idempotente, então também é $I - A$.

(b) Mostre que se *A* é idempotente, então $2A - I$ é invertível e é seu próprio inverso.

55. Mostre que se *A* é uma matriz quadrada tal que $A^k = 0$ para algum inteiro positivo k, então a matriz *A* é invertível e

$$(1 - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdot\cdot\cdot + A^{k-1}$$

Exercícios de Verdadeiro-Falso

Nas partes (a)–(k), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

(a) Dois $n \times n$ matrizes, *A* e B, são inversas uma da outra se e somente se $AB = BA = 0$.

Responder:

Falso

(b) Para todas as matrizes quadradas *A* e *B* de mesmo tamanho, é verdade que $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Responder:

Falso

(c) Para todas as matrizes quadradas *A* e *B* de mesmo tamanho, é verdade que $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

Responder:

Falso

(d) Se *A* e *B* são matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então *AB* é invertível e $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

Responder:

Falso

(e) Se *A* e *B* são matrizes tais que *AB* está definido, então é verdade que $(AB)^T = A^T B^T$.

Responder:

Falso

(f) A matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é invertível se e somente se $ad - bc \neq 0$.

Responder:

Verdadeiro

(g) Se *A* e *B* são matrizes de mesmo tamanho e *k* é uma constante, então $(kA+B)^T = kA^T + B^T$.

Responder:

Verdadeiro

(h) Se *A* é uma matriz invertível, então também é A^T.

Responder:

Verdadeiro

(i) Se $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdot\cdot\cdot + a_m x^m$ e *I* é uma matriz identidade, então $p(I) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdot\cdot\cdot + a_m$.

Responder:

Falso

(j) Uma matriz quadrada contendo uma linha ou coluna de zeros não pode ser invertida.

Responder:

Verdadeiro

(k) A soma de duas matrizes invertíveis de mesmo tamanho deve ser invertível.

Responder:

Falso

1.5 Matrizes Elementares e um Método para Encontrar A^{-1}

Nesta seção, desenvolveremos um algoritmo para encontrar a inversa de uma matriz e discutiremos algumas das propriedades básicas das matrizes invertíveis.

Na Seção 1.1, definimos três operações elementares sobre linhas em uma matriz A:

1. Multiplique uma linha por uma constante diferente de zero c.
2. Troque duas carreiras.
3. Adicione uma constante *c* vezes uma linha a outra.

Deve ser evidente que se deixarmos *B* ser a matriz que resulta de *A* realizando uma das operações nesta lista, então a matriz *A* pode ser recuperada de *B* realizando a operação correspondente na seguinte lista:

1. Multiplique a mesma linha por *1/c.*
2. Troque as mesmas duas carreiras.
3. Se *B* resultou da adição *de c* vezes a linha r1 de *A* à linha r2, adicione *ÿc* vezes r1 a r2.

Segue-se que se *B* é obtido de *A* realizando uma sequência de operações elementares sobre linhas, então existe uma segunda sequência de operações elementares sobre linhas, que quando aplicada a *B* recupera *A* (Exercício 43). Assim, fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1

As matrizes *A* e *B* são ditas ***equivalentes por linha*** se uma (portanto, cada uma) pode ser obtida da outra por uma sequência de operações elementares de linha.

Nosso próximo objetivo é mostrar como a multiplicação de matrizes pode ser usada para realizar uma operação elementar de linhas.

DEFINIÇÃO 2

Um $n \times n$ A matriz é chamada de ***matriz elementar*** se pode ser obtida a partir da $n \times n$ matriz de identidade I_n executando uma *única* operação de linha elementar.

EXEMPLO 1 Matrizes Elementares e Operações com Linhas

Abaixo estão listadas quatro matrizes elementares e as operações que as produzem.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
Multiply the second row of I_2 by -3.	Interchange the second and fourth rows of I_4.	Add 3 times the third row of I_3 to the first row.	Multiply the first row of I_3 by 1 .

O teorema a seguir, cuja demonstração é deixada como exercício, mostra que quando uma matriz *A* é multiplicada à *esquerda* por uma matriz elementar E, o efeito é realizar uma operação elementar de linhas em A.

TEOREMA 1.5.1 Operações com Linhas por Multiplicação de Matrizes

Se a matriz elementar *E* resulta da execução de uma certa operação de linha em *Im* e se *A* é uma matriz, $m \times n$ então o produto *EA* é a matriz que resulta quando essa mesma operação de linha é realizada em A.

EXEMPLO 2 Usando Matrizes Elementares

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

e considere a matriz elementar

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que resulta da adição de 3 vezes a primeira linha de I_3 à terceira linha. O produto *EA* é

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

que é precisamente a mesma matriz que resulta quando somamos 3 vezes a primeira linha de *A* à terceira linha.

O Teorema 1.5.1 será uma ferramenta útil para o desenvolvimento de novos resultados sobre matrizes, mas, na prática, é geralmente preferível realizar operações de linhas diretamente.

Sabemos da discussão no início desta seção que se *E* é uma matriz elementar que resulta da realização de uma operação elementar de linha em uma matriz identidade I, então há uma segunda operação elementar de linha, que quando aplicada a E, produz *I* de volta de novo. A Tabela 1 lista essas operações. As operações do lado direito da tabela são chamadas de ***operações inversas*** das operações correspondentes do lado esquerdo.

tabela 1

Operação de linha em *I* que produz *E*	**Operação de linha em *E* que reproduz *I***
Multiplique a linha *i* por $c \neq 0$	Multiplique a linha *i* por 1/c
Troque as linhas *i* e j	Troque as linhas *i* e *j*
Adicione *c* vezes a linha *i* à linha j	Adicione *ÿc* vezes a linha *i* à linha *j*

EXEMPLO 3 Operações de linha e operações de linha inversa

Em cada um dos seguintes, uma operação de linha elementar é aplicada para obter uma 2×2 matriz de identidade para matriz elementar E, então *E* é restaurada para a matriz de identidade aplicando a operação de linha inversa.

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Multiply the second row by 7.}]{} \begin{bmatrix}1&0\\0&7\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Multiply the second row by } \frac{1}{7}.]{} \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Interchange the first and second rows.}]{} \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Interchange the first and second rows.}]{} \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Add 5 times the second row to the first.}]{} \begin{bmatrix}1&5\\0&1\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Add } -5 \text{ times the second row to the first.}]{} \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

O próximo teorema é um resultado chave sobre invertibilidade de matrizes elementares. Será um bloco de construção para muitos resultados que se seguem.

TEOREMA 1.5.2

Toda matriz elementar é invertível, e a inversa também é uma matriz elementar.

Prova Se *E* é uma matriz elementar, então *E* resulta da realização de alguma operação de linha em I. Seja a matriz que E_0 resulta quando a inversa dessa operação é realizada em I. Aplicando o Teorema 1.5.1 e usando o fato de que as operações de linha inversa cancelam efeito um do outro, segue-se que

$$E_0E = I \text{ and } EE_0 = I$$

Assim, a matriz elementar E_0 é o inverso de E.

Teorema de Equivalência

Um de nossos objetivos à medida que avançamos neste texto é mostrar como ideias aparentemente diversas em álgebra linear estão relacionadas. O teorema a seguir, que relaciona os resultados que obtivemos sobre invertibilidade de matrizes, sistemas lineares homogêneos, formas escalonadas reduzidas e matrizes elementares, é nosso primeiro passo nessa direção. À medida que estudamos novos tópicos, mais declarações serão adicionadas a este teorema.

TEOREMA 1.5.3 **Declarações Equivalentes**

Se *A* é um $n \times n$ matriz, então as seguintes afirmações são equivalentes, isto é, todas verdadeiras ou todas falsas.

(a) A é invertível. *(b)*

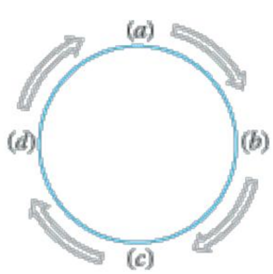
(c) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem apenas a solução trivial.

A forma escalonada reduzida de *A* é *(d)* A é I_n.

expressável como um produto de matrizes elementares.

Isso pode tornar a lógica de nossa prova do Teorema 1.5.3 mais aparente escrevendo as implicações

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$$



Isso torna evidente visualmente que a validade de qualquer declaração implica a validade de todas as outras e, portanto, a falsidade de qualquer uma implica a falsidade das outras.

Prova Vamos provar a equivalência estabelecendo a cadeia de implicações:

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$$

$(a) \Rightarrow (b)$ Assuma que *A é invertível e seja qualquer solução de.* $\mathbf{x}_0$ Multiplicando ambos os lados desta equação pelo dá . Por matriz A^{-1} isso, $A^{-1}(A\mathbf{x}_0) = A^{-1}\mathbf{0}$, ou $\left(A^{-1}A\right)\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, ou $I\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, ou $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ $A\mathbf{x} = 0$ tem apenas o solução trivial.

$(b) \Rightarrow (c)$ Deixar $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ seja a forma matricial do sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad & \;\;\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

e suponha que o sistema tenha apenas a solução trivial. Se resolvermos por eliminação de Gauss-Jordan, então o sistema de equações correspondente à forma escalonada de linhas reduzida da matriz aumentada será

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 0 \\ x_2 \qquad &= 0 \\ \ddots \quad & \\ x_n &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Assim, a matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}$$

para 1 pode ser reduzido à matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

para 2 por uma sequência de operações elementares de linha. Se desconsiderarmos a última coluna (todos os zeros) em cada uma dessas matrizes, podemos concluir que a forma escalonada reduzida de *A* é I_n.

$(c) \Rightarrow (d)$ Suponha que a forma escalonada reduzida por linhas de *A* seja I_n, de modo que *A* pode ser reduzido a I_n por uma sequência finita de operações elementares sobre linhas. Pelo Teorema 1.5.1, cada uma dessas operações pode ser realizada multiplicando-se à esquerda por uma matriz elementar apropriada. Assim, podemos encontrar matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tais que

$$E_k \cdot \cdot \cdot E_2 E_1 A = I_n \tag{3}$$

Pelo Teorema 1.5.2, por $E_1, E_2, \ldots, E_k$ são inversíveis. Multiplicando ambos os lados da Equação 3 à esquerda sucessivamente $E_k^{-1}, \ldots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$ nós obtemos

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdot \cdot \cdot E_k^{-1}I_n = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdot \cdot \cdot E_k^{-1} \quad (4)$$

Pelo Teorema 1.5.2, esta equação expressa *A* como um produto de matrizes elementares.

$(d) \Rightarrow (a)$ Se *A* é um produto de matrizes elementares, então do Teorema 1.4.7 e do Teorema 1.5.2, a matriz *A* é um produto de matrizes invertíveis e, portanto, é invertível.

Um método para inverter matrizes

Como primeira aplicação do Teorema 1.5.3, desenvolveremos um procedimento (ou algoritmo) que pode ser usado para dizer se uma dada matriz é invertível e, se for, produzir sua inversa. Para derivar este algoritmo, assuma, por enquanto, que *A* é uma matriz invertível. Na Equação 3, as matrizes elementares executam uma sequência de operações de linhas que reduzem *A* a . I_n Se multiplicarmos ambos os lados desta equação à direita por e simplificarmos, teremos A^{-1}

obtivermos

$$A^{-1} = E_k \cdot \cdot \cdot E_2E_1I_n$$

Mas esta equação nos diz que *a mesma sequência de operações de linha que reduz A a* . Assim, I_n *vai se transformar em* I_n A^{-1} estabelecemos o seguinte resultado.

Algoritmo de Inversão

Para encontrar a inversa de uma matriz invertível A, encontre uma sequência de operações elementares com linhas que reduz *A* à identidade e, em seguida, execute a mesma sequência de operações para obter I_n A^{-1}.

Um método simples para executar este procedimento é fornecido no exemplo a seguir.

EXEMPLO 4 Usando operações de linha para encontrar A-1

Encontre o inverso de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Solução Queremos reduzir *A* à matriz identidade por operações de linha e simultaneamente aplicar essas operações a *I* para produzir . Para conseguir isso, vamos juntar a matriz identidade ao lado direito de A, produzindo assim uma matriz A^{-1} particionada da forma

$$[A \mid I]$$

Em seguida, aplicaremos operações de linha a esta matriz até que o lado esquerdo seja reduzido a I; essas operações converterão o lado direito em A^{-1}, então a matriz final terá a forma

$$\left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right]$$

Os cálculos são os seguintes:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \leftarrow \text{We added } -2 \text{ times the first row to the second and } -1 \text{ times the first row to the third.}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \leftarrow \text{We added 2 times the second row to the third.}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \leftarrow \text{We multiplied the third row by} -1.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \leftarrow \text{We added 3 times the third row to the second and } -3 \text{ times the third row to the first.}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \leftarrow \text{We added } -2 \text{ times the second row to the first.}$$

Por isso,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Freqüentemente, não se saberá com antecedência se uma dada matriz $n \times n$ A é invertível. Entretanto, se não for, então pelas partes *(a)* e *(c)* do Teorema 1.5.3 será impossível reduzir A a I_n por operações elementares sobre linhas. Isso será sinalizado por uma linha de zeros aparecendo no *lado esquerdo* da partição em algum estágio do algoritmo de inversão. Se isso ocorrer, você pode interromper os cálculos e concluir que A não é invertível.

EXEMPLO 5 Mostrando que uma Matriz Não é Invertível

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

A aplicação do procedimento do Exemplo 4 produz

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longleftarrow \begin{array}{l}\text{We added } -2 \text{ times the first} \\ \text{row to the second and added} \\ \text{the first row to the third.}\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longleftarrow \begin{array}{l}\text{We added the} \\ \text{second row to} \\ \text{the third.}\end{array}$$

Como obtivemos uma linha de zeros no lado esquerdo, *A* não é invertível.

EXEMPLO 6 Analisando Sistemas Homogêneos

Use o Teorema 1.5.3 para determinar se o sistema homogêneo dado tem soluções não triviais.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solução Das partes *(a)* e *(b)* do Teorema 1.5.3 um sistema linear homogêneo tem apenas a solução trivial se e somente se sua matriz de coeficientes é invertível. Do Exemplo 4 e do Exemplo 5, a matriz de coeficientes do sistema (a) é invertível e a do sistema (b) não. Assim, o sistema (a) tem apenas a solução trivial, enquanto o sistema (b) tem soluções não triviais.

Revisão do Conceito

• Matrizes equivalentes por

linhas • Matriz

elementar • Operações

inversas • Algoritmo de inversão

Habilidades

• Determinar se uma dada matriz quadrada é elementar. •

Determine se duas matrizes quadradas são equivalentes por linha.

• Aplicar o inverso de uma dada operação elementar rwo a uma matriz. •

Aplicar operações elementares de linha para reduzir uma dada matriz quadrada à matriz identidade.

- Compreender as relações entre afirmações que são equivalentes à invertibilidade de uma matriz quadrada (Teorema 1.5.3).
- Use o algoritmo de inversão para encontrar a inversa de uma matriz invertível.
- Expresse uma matriz invertível como produto de matrizes elementares.

Conjunto de exercícios 1.5

1. Decida se cada matriz abaixo é uma matriz elementar.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Responder:

(a) Elementar (b)

Não elementar (c)

Não elementar (d)

Não elementar

2. Decida se cada matriz abaixo é uma matriz elementar.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Encontre uma operação de linha e a matriz elementar correspondente que irá restaurar a dada matriz elementar para a matriz identidade.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Responder:

(a) Adicione 3 vezes a linha 2 à linha 1: $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) Multiplique a linha 1 por $-\frac{1}{7}$: $\begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) Adicione 5 vezes a linha 1 à linha 3: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) Troque as linhas 1 e 3: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Encontre uma operação de linha e a matriz elementar correspondente que irá restaurar a dada matriz elementar para a matriz identidade.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Em cada parte, uma matriz elementar *E* e uma matriz *A* são dadas. Escreva a operação de linha correspondente a *E* e mostre que o produto *EA* resulta da aplicação da operação de linha a A. (a)

$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & -6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$

(b) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Responder:

(a) Troque as linhas 1 e 2: $EA = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 & -6 \\ -1 & -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

(b) Adicione -3 vezes a linha 2 à linha 3: $EA = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 5 & 3 \\ -1 & 9 & 4 & -12 & -10 \end{bmatrix}$

(c) Adicione 4 vezes a linha 3 à linha 1: $EA = \begin{bmatrix} 13 & 28 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

6. Em cada parte, uma matriz elementar *E* e uma matriz *A* são dadas. Escreva a operação de linha correspondente a *E* e mostre que o produto *EA* resulta da aplicação da operação de linha a A. (a)

$E = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & -6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$

(b) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 7–8, use as seguintes matrizes.

$$A=\begin{bmatrix}3&4&1\\2&-7&-1\\8&1&5\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}8&1&5\\2&-7&-1\\3&4&1\end{bmatrix}$$
$$C=\begin{bmatrix}3&4&1\\2&-7&-1\\2&-7&3\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}8&1&5\\-6&21&3\\3&4&1\end{bmatrix}$$
$$F=\begin{bmatrix}8&1&5\\8&1&1\\3&4&1\end{bmatrix}$$

7. Encontre uma matriz elementar *E* que satisfaça a equação.

(a) $EA=B$

(b) $EB=A$

(c) $EA=C$

(d) $EC=A$

Responder:

(a) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$

8. Encontre uma matriz elementar *E* que satisfaça a equação.

(a) $EB=D$

(b) $ED=B$

(c) $EB=F$

(d) $EF=B$

Nos Exercícios 9–24, use o algoritmo de inversão para encontrar a inversa da matriz dada, se a inversa existir.

9. $\begin{bmatrix}1&4\\2&7\end{bmatrix}$

Responder:

$$\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

10. $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

Responder:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

12. $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

Responder:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{10} & -\frac{6}{5} \\ -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$

Responder:

não inverta

16. $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Responder:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

18. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

Responder:

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

20. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

Responder:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -3 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{40} & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

22. $\begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Responder:

$$\begin{bmatrix} -\frac{7}{12} & \frac{5}{24} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{12} & \frac{5}{24} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

24. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 25–26, encontre o inverso de cada um dos seguintes todos 4×4 matrizes, onde $k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4,$ e k são diferentes de zero.

25. (a) $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Responder:

(a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{k} & -\frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} & -\frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

26. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

No Exercício 27–Exercício 28, encontre todos os valores de c, se houver, para os quais a matriz dada é invertível.

27. $\begin{bmatrix} c & c & c \\ 1 & c & c \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}$

Responder:

$c \neq 0, 1$

28. $\begin{bmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 29–32, escreva a matriz dada como um produto de matrizes elementares.

29. $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Responder:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

30. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Responder:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

32. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 33–36, escreva a *inversa* da matriz dada como um produto de matrizes elementares.

33. A matriz no Exercício 29.

Responder:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

34. A matriz no Exercício 30.

35. A matriz no Exercício 31.

Responder:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

36. A matriz no Exercício 32.

Nos Exercícios 37–38, mostre que as matrizes *A* e *B* dadas são equivalentes por linhas e encontre uma sequência de operações elementares com linhas que produz *B* a partir de A.

37. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Responder:

Adicione -1 vezes a primeira linha à segunda linha. Adicione -1 vezes a primeira linha à terceira linha. Adicione -1 vezes a segunda linha à primeira linha. Adicione a segunda linha à terceira linha.

38. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -5 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

39. Mostre que se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

é uma matriz elementar, então pelo menos uma entrada na terceira linha deve ser zero.

40. Mostre que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

não é invertível para quaisquer valores das entradas.

41. Prove que se *A* e *B* são matrizes $n \times n$, então *A* e *B* são equivalentes por linhas se e somente se *A* e *B* têm a mesma forma escalonada reduzida por linhas.

42. Prove que se *A* é uma matriz invertível e *B* é equivalente por linhas a A, então *B* também é invertível.

43. Mostre que se *B* é obtido de *A* executando uma sequência de operações elementares com linhas, então existe um segunda sequência de operações elementares de linha, que quando aplicadas a *B* recuperam A.

Exercícios de Verdadeiro-Falso

Nas partes (a)–(g), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

(a) O produto de duas matrizes elementares de mesmo tamanho deve ser uma matriz elementar.

Responder:

Falso

(b) Toda matriz elementar é invertível.

Responder:

Verdadeiro

(c) Se *A* e *B* são equivalentes por linha, e se *B* e *C* são equivalentes por linha, então *A* e *C* são equivalentes por linha.

Responder:

Verdadeiro

(d) Se *A* é um $n \times n$ matriz que não é invertível, então o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem infinitas soluções.

Responder:

Verdadeiro

(e) Se *A* é um $n \times n$ matriz que não é invertível, então a matriz obtida pela troca de duas linhas de *A* não pode ser invertível.

Responder:

Verdadeiro

(f) Se A é invertível e um múltiplo da primeira linha de A é adicionado à segunda linha, então a matriz resultante é invertível.

Responder:

Verdadeiro

(g) Uma expressão da matriz invertível A como um produto de matrizes elementares é única.

Responder:

Falso

1.6 Mais sobre sistemas lineares e matrizes invertíveis

Nesta seção mostraremos como a inversa de uma matriz pode ser usada para resolver um sistema linear e desenvolveremos mais alguns resultados sobre matrizes invertíveis.

Número de Soluções de um Sistema Linear

Na Seção 1.1, afirmamos (com base nas Figuras 1.1.1 e 1.1.2) que todo sistema linear não tem soluções, tem exatamente uma solução ou tem infinitas soluções. Estamos agora em condições de provar este resultado fundamental.

TEOREMA 1.6.1

Um sistema de equações lineares tem zero, uma ou infinitas soluções. Não há outras possibilidades.

Prova Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é um sistema de equações lineares, exatamente uma das seguintes é verdadeira: (a) o sistema não tem soluções, (b) o sistema tem exatamente uma solução, ou (c) o sistema tem mais de uma solução. A prova estará completa se pudermos mostrar que o sistema tem infinitas soluções no caso (c).

Assuma isso $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem mais de uma solução, e sejam $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, onde x1 e x2 são quaisquer duas soluções distintas. Como x1 e x2 são distintas, a matriz x0 é diferente de zero; além disso,

$$A\mathbf{x}_0 = A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = 0$$

Se agora deixarmos *k* ser qualquer escalar, então

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}_1 + k\mathbf{x}_0) &= A\mathbf{x}_1 + A(k\mathbf{x}_0) = A\mathbf{x}_1 + k(A\mathbf{x}_0) \\ &= \mathbf{b} + k\mathbf{0} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Mas isso diz que $\mathbf{x}_1 + k\mathbf{x}_0$ é uma solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Como x0 é diferente de zero e existem infinitas opções para k, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem infinitas soluções.

Resolução de sistemas lineares por inversão de matrizes

Até agora estudamos dois *procedimentos* para resolver sistemas lineares – eliminação de Gauss-Jordan e eliminação de Gauss. O teorema a seguir fornece uma *fórmula* real para a solução de um sistema linear de *n* equações em *n* incógnitas no caso em que a matriz de coeficientes é invertível.

TEOREMA 1.6.2

Se *A* é invertível $n \times n$ matriz, então para cada $n \times 1$ *matriz* b, o sistema de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução, ou seja, $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Prova Desde $A\left(A^{-1}\mathbf{b}\right) = \mathbf{b}$, segue que $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ é uma solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Para mostrar que esta é a única solução, assumiremos que x0 é uma solução arbitrária e então mostre que x0 deve ser a solução $A^{-1}\mathbf{b}$.

Se x0 é qualquer solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, então $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$. Multiplicando ambos os lados desta equação por A^{-1}, obtemos $\mathbf{x}_0 = A^{-1}\mathbf{b}$.

EXEMPLO 1 Solução de um Sistema Linear Usando A-1

Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 \qquad + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

Na forma matricial, esse sistema pode ser escrito como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}5\\3\\17\end{bmatrix}$$

No Exemplo 4 da seção anterior, mostramos que *A* é invertível e

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{bmatrix}$$

Pelo Teorema 1.6.2, a solução do sistema é

$$\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}=\begin{bmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\3\\17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

ou $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=2.$

Tenha em mente que o método do Exemplo 1 só se aplica quando o sistema tem tantas equações quanto incógnitas e a matriz de coeficientes é invertível.

Sistemas Lineares com uma Matriz de Coeficiente Comum

Frequentemente, preocupa-se em resolver uma sequência de sistemas

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}_1,\quad A\mathbf{x}=\mathbf{b}_2,\quad A\mathbf{x}=\mathbf{b}_3,\ldots,\quad A\mathbf{x}=\mathbf{b}_k$$

cada um dos quais tem a mesma matriz quadrada de coeficientes A. Se *A* é invertível, então as soluções

$$\mathbf{x}_1=A^{-1}\mathbf{b}_1,\quad \mathbf{x}_2=A^{-1}\mathbf{b}_2,\quad \mathbf{x}_3=A^{-1}\mathbf{b}_3,\ldots,\quad \mathbf{x}_k=A^{-1}\mathbf{b}_k$$

pode ser obtido com uma inversão de matrizes e *k* multiplicações de matrizes. Uma maneira eficiente de fazer isso é formar a matriz particionada

$$[A|\mathbf{b}_1|\mathbf{b}_2|\cdots|\mathbf{b}_k|] \tag{1}$$

em que a matriz de coeficientes *A* é “aumentada” por todos *os k* das matrizes b1, b2,…,bk, e então reduz 1 para a forma escalonada reduzida por eliminação de Gauss Jordan. Desta forma, podemos resolver todos os *k* sistemas de uma só vez. Este método tem a vantagem adicional de ser aplicado mesmo quando *A* não é invertível.

EXEMPLO 2 Resolução de dois sistemas lineares ao mesmo tempo

Resolva os sistemas

(a)
$$\begin{aligned}x_1+2x_2+3x_3&=4\\2x_1+5x_2+3x_3&=5\\x_1\qquad\quad+8x_3&=9\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}x_1+2x_2+3x_3&=1\\2x_1+5x_2+3x_3&=6\\x_1\qquad\quad+8x_3&=-6\end{aligned}$$

Solução Os dois sistemas têm a mesma matriz de coeficientes. Se aumentarmos esta matriz de coeficientes com as colunas de constantes nos lados direitos destes sistemas, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c}1&2&3&4&1\\2&5&3&5&6\\1&0&8&9&-6\end{array}\right]$$

Reduzir esta matriz para uma forma escalonada reduzida produz (verificar)

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c}1&0&0&1&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&1&-1\end{array}\right]$$

Segue-se das duas últimas colunas que a solução do sistema (a) é $x_1=1, x_2=0, x_3=1$ e a solução do sistema (b) é $x_1=2$, $x_2=1, x_3=-1.$

Propriedades de Matrizes Invertíveis

Até agora, para mostrar que um $n \times n$ matriz *A* é invertível, foi necessário encontrar um $n \times n$ matriz *B* tal que

$$AB = I \quad \text{and} \quad BA = I$$

O próximo teorema mostra que se produzirmos um $n \times n$ matriz *B* satisfazendo *qualquer uma* das condições, então a outra condição é válida automaticamente.

TEOREMA 1.6.3

Seja *A* uma matriz quadrada.

(a) Se *B* é uma matriz quadrada satisfazendo $BA = I$, então $B = A^{-1}$.

(b) Se *B* é uma matriz quadrada satisfazendo $AB = I$, então $B = A^{-1}$.

Vamos provar a parte *(a)* e deixar a parte *(b)* como exercício.

Prova (a) Suponha que $BA = I$. Se pudermos mostrar que *A* é invertível, a prova pode ser completada multiplicando $BA = I$ em ambos os lados por A^{-1} para obtivermos

$$BAA^{-1} = IA^{-1} \quad \text{or} \quad BI = IA^{-1} \quad \text{or} \quad B = A^{-1}$$

Para mostrar que *A* é invertível, basta mostrar que o sistema é este sistema. Se $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem apenas a solução trivial (ver Teorema 1.5.3). Seja x0 qualquer solução de multiplicarmos ambos os lados de à esquerda por B, obtemos $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ $BA\mathbf{x}_0 = B\mathbf{0}$ ou $I\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Assim, o sistema de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem apenas a solução trivial.

Teorema de Equivalência

Estamos agora em condições de acrescentar mais duas afirmações às quatro dadas no Teorema 1.5.3.

TEOREMA 1.6.4 Declarações Equivalentes

Se *A* é um $n \times n$ matriz, então os seguintes são equivalentes.

(a) *A* é invertível.

(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem apenas a solução trivial.

(c) A forma escalonada reduzida de *A* é *In. (d) A* é

exprimível como um produto de matrizes elementares. *(e)* é consistente

para cada $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $n \times 1$ matriz b.

(f) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução para cada $n \times 1$ matriz b.

Segue-se da equivalência das partes *(e)* e *(f)* que se você pode mostrar que a matriz $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem pelo *menos uma* solução para cada $n \times 1$ b, então você pode concluir que tem *exatamente uma* solução para cada $n \times 1$ matriz b.

Prova Como provamos no Teorema 1.5.3 que (a), (b), (c) e *(d)* são equivalentes, será suficiente provar que $(a) \Rightarrow (f) \Rightarrow (e) \Rightarrow (a)$.

$(a) \Rightarrow (f)$ Isso já foi provado no Teorema 1.6.2. tem exatamente

$(f) \Rightarrow (e)$ Isso é evidente, pois se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ uma solução para cada $n \times 1$ matriz b, então $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente para cada $n \times 1$ matriz b.

$(e) \Rightarrow (a)$ Se o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente para cada $n \times 1$ matriz b, então, em particular, isso é assim para os sistemas

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \quad A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sejam x1, x2,…,xn soluções dos respectivos sistemas, e formemos uma $n \times n$ matriz *C* tendo essas soluções como colunas. Assim *C* tem a forma

$$C = [\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 | \cdots | \mathbf{x}_n]$$

Conforme discutido na Seção 1.3, as colunas sucessivas do produto *AC* serão

$$A\mathbf{x}_1, \ A\mathbf{x}_2, \ \ldots, \ A\mathbf{x}_n$$

[ver Fórmula 8 da Seção 1.3]. Por isso,

$$AC = [A\mathbf{x}_1 | A\mathbf{x}_2 | \cdots | A\mathbf{x}_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$$

Pela parte *(b)* do Teorema 1.6.3, segue que $C = A^{-1}$. Assim, *A* é invertível.

Sabemos de trabalhos anteriores que fatores de matriz invertível produzem um produto invertível. Por outro lado, o seguinte teorema mostra que, se o produto de matrizes quadradas é invertível, os próprios fatores devem ser inversíveis.

TEOREMA 1.6.5

Sejam *A* e *B* matrizes quadradas de mesmo tamanho. Se *AB* é invertível, então *A* e *B* também devem ser inversíveis.

Em nosso trabalho posterior, o seguinte problema fundamental ocorrerá com frequência em vários contextos.

Um problema fundamental

Seja *A* um fixo $m \times n$ matriz. Encontrar tudo $m \times 1$ matrizes **b** tais que o sistema de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente.

Se *A* é uma matriz invertível, o Teorema 1.6.2 resolve completamente este problema afirmando que para *todo* a solução única $m \times 1$ matriz b, o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem deve geralmente $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Se *A* não é quadrado, ou se *A* é quadrado mas não invertível, então o Teorema 1.6.2 não se aplica. Nestes casos a matriz **b** deve ser consistente. satisfazer certas condições para ser usada para determinar tais $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ O exemplo a seguir ilustra como os métodos da Seção 1.2 podem condições.

EXEMPLO 3 Determinando a consistência por eliminação

Quais condições b1, b2 e b3 devem satisfazer para que o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ x_1 \qquad + x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

para ser consistente?

Solução A matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{bmatrix}$$

que pode ser reduzido à forma escalonada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \quad -1 \text{ times the first row was added to the second and } -2 \text{ times the first row was added to the third.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \quad \text{The second row was multiplied by} -1.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \quad \text{The second row was added to the third.}$$

Agora é evidente a partir da terceira linha da matriz que o sistema tem solução se e somente se b1, b2 e b3 satisfazem a condição

$$b_3 - b_2 - b_1 = 0 \quad \text{or} \quad b_3 = b_1 + b_2$$

Para expressar essa condição de outra maneira, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente se e somente se **b** é uma matriz da forma

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

onde b1 e b2 são arbitrários.

EXEMPLO 4 Determinando a consistência por eliminação

Quais condições b1, b2 e b3 devem satisfazer para que o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= b_2 \\ x_1 \qquad + 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

para ser consistente?

Solução A matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{bmatrix}$$

Reduzindo isso para rendimentos de forma escalonada de linha reduzida (verificar)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40b_1 + 16b_2 + 9b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 13b_1 - 5b_2 - 3b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 5b_1 - 2b_2 - b_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Neste caso não há restrições em b1, b2 e b3, então o sistema tem a única solução

$$x_1 = -40b_1 + 16b_2 + 9b_3, \quad x_2 = 13b_1 - 5b_2 - 3b_3, \quad x_3 = 5b_1 - 2b_2 - b_3 \tag{3}$$

para todos os valores de b1, b2 e b3.

O que o resultado do Exemplo 4 informa sobre a matriz de coeficientes do sistema?

Habilidades

- Determine se um sistema linear de equações não tem soluções, exatamente uma solução ou infinitas soluções.
- Resolver sistemas lineares invertendo sua matriz de coeficientes.
- Resolver vários sistemas lineares com a mesma matriz de coeficientes simultaneamente.

- Estar familiarizado com as condições adicionais de invertibilidade estabelecidas no Teorema da Equivalência.

Conjunto de exercícios 1.6

Nos Exercícios 1–8, resolva o sistema invertendo a matriz de coeficientes e usando o Teorema 1.6.2.

1. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 9 \end{aligned}$$

Responder:

$x_1 = 3,\ x_2 = -1$

2. $$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 &= -3 \\ 2x_1 - 5x_2 &= 9 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Responder:

$x_1 = -1,\ x_2 = 4,\ x_3 = -7$

4. $$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ x + y - 4z &= 10 \\ -4x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

Responder:

$x = 1,\ x = 5,\ x = -1$

6. $$\begin{aligned} -x - 2y - 3z &= 0 \\ w + x + 4y + 4z &= 7 \\ w + 3x + 7y + 9z &= 4 \\ -w - 2x - 4y - 6z &= 6 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= b_1 \\ x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Responder:

$x_1 = 2b_1 - 5b_2,\ x_2 = -b_1 + 3b_2$

8. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= b_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Nos Exercícios 9–12, resolva os sistemas lineares juntos reduzindo a matriz aumentada apropriada.

9. $$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= b_1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

(eu) $b_1 = 1,\ b_2 = 4$

(ii) $b_1 = -2,\ b_2 = 5$

Responder:

(eu) $x_1 = \frac{22}{17},\ x_2 = \frac{1}{17}$

(ii) $x_1 = \frac{21}{17},\ x_2 = \frac{11}{17}$

10. $-x_1 + 4x_2 + x_3 = b_1$
$x_1 + 9x_2 - 2x_3 = b_2$
$6x_1 + 4x_2 - 8x_3 = b_3$
(i) $b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0$
(ii) $b_1 = -3,\ b_2 = 4,\ b_3 = -5$

11. $4x_1 - 7x_2 = b_1$
$x_1 + 2x_2 = b_2$
(eu) $b_1 = 0,\ b_2 = 1$
(ii) $b_1 = -4,\ b_2 = 6$
(iii) $b_1 = -1,\ b_2 = 3$
(4) $b_1 = -5,\ b_2 = 1$

Responder:

(eu) $x_1 = \frac{7}{15},\ x_2 = \frac{4}{15}$
(ii) $x_1 = \frac{34}{15},\ x_2 = \frac{28}{15}$
(iii) $x_1 = \frac{19}{15},\ x_2 = \frac{13}{15}$
(4) $x_1 = -\frac{1}{5},\ x_2 = \frac{3}{5}$

12. $x_1 + 3x_2 + 5x_3 = b_1$
$-x_1 - 2x_2 = b_2$
$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = b_3$
(i) $b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = -1$
(ii) $b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 1$
(iii) $b_1 = -1,\ b_2 = -1,\ b_3 = 0$

Nos Exercícios 13–17, determine condições nos bis, se houver, para garantir que o sistema linear seja consistente.

13. $x_1 + 3x_2 = b_1$
$-2x_1 + x_2 = b_2$

Responder:

Sem condições e b_1 b_2

14. $6x_1 - 4x_2 = b_1$
$3x_1 - 2x_2 = b_2$

15. $x_1 - 2x_2 + 5x_3 = b_1$
$4x_1 - 5x_2 + 8x_3 = b_2$
$-3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = b_3$

Responder:

$b_3 = b_1 - b_2$

16. $x_1 - 2x_2 - x_3 = b_1$
$-4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = b_2$
$-4x_1 + 7x_2 + 4x_3 = b_3$

17. $x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = b_1$
$-2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = b_2$
$-3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = b_3$
$4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = b_4$

Responder:

$b_1 = b_3 + b_4,\ b_2 = 2b_3 + b_4$

18. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que a equação (b) $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ pode ser reescrito como $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e use este resultado para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para x.

Resolva $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$.

Nos Exercícios 19–20, resolva a equação matricial dada para X.

19. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Responder:

$$X = \begin{bmatrix} 11 & 12 & -3 & 27 & 26 \\ -6 & -8 & 1 & -18 & -17 \\ -15 & -21 & 9 & -38 & -35 \end{bmatrix}$$

20. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

21. Deixe $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ seja um sistema homogêneo de *n* equações lineares em *n* incógnitas que possua apenas a solução trivial. Mostre que se *k* é qualquer inteiro positivo, então o sistema também possui apenas a $A^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$ solução trivial.

22. Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ seja um sistema homogêneo de *n* equações lineares em *n* incógnitas, e seja *Q* um invertível $n \times n$ matriz. Mostre que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ acabou de a solução trivial se e somente se $(QA)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem apenas a solução trivial.

23. Deixe $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ seja qualquer sistema consistente de equações lineares, e seja x1 uma solução fixa. Mostre que toda solução do sistema pode ser escrita em . Mostre também que toda a forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0$, onde x0 é uma solução para $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ matriz desta forma é uma solução.

24. Use a parte *(a)* do Teorema 1.6.3 para provar a parte *(b).*

Exercícios de Verdadeiro-Falso

Nas partes (a)–(g), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

(a) É impossível para um sistema linear de equações lineares ter exatamente duas soluções.

Responder:

Verdadeiro

(b) Se o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma única solução, então o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ também deve ter uma solução única.

Responder:

Verdadeiro

(c) Se *A* e *B* são $n \times n$ matrizes tais que $AB = I_n$, então $BA = I_n$.

Responder:

Verdadeiro

(d) Se *A* e *B* são matrizes equivalentes por linha, então os sistemas lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ têm o mesmo conjunto solução.

Responder:

Verdadeiro

(e) Se *A* é um $n \times n$ matriz e *S* é uma $n \times n$ matriz invertível, então se **x** é uma solução para o sistema linear $(S^{-1}AS)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, então **Sx** é uma solução para o sistema linear $A\mathbf{y} = S\mathbf{b}$.

Responder:

Verdadeiro

(f) Seja *A* um $n \times n$ matriz. O sistema linear $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$ tem solução única se e somente se $A - 4I$ é uma matriz invertível.

Responder:

Verdadeiro

(g) Sejam *A* e *B* $n \times n$ matrizes. Se *A* ou *B* (ou ambos) não são inversíveis, então nenhum deles é *AB*.

Responder:

Verdadeiro

1.7 Matrizes Diagonais, Triangulares e Simétricas

Nesta seção, discutiremos matrizes que possuem várias formas especiais. Essas matrizes surgem em uma ampla variedade de aplicações e também desempenharão um papel importante em nosso trabalho subsequente.

matrizes diagonais

Uma matriz quadrada na qual todas as entradas fora da diagonal principal são zero é chamada de *matriz diagonal.* aqui estão alguns exemplos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Um general $n \times n$ A matriz diagonal *D* pode ser escrita como

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

Uma matriz diagonal é invertível se e somente se todas as suas entradas diagonais forem diferentes de zero; neste caso o inverso de 1 é

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/d_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

Confirme a Fórmula 2 mostrando que

$$DD^{-1} = D^{-1}D = I$$

Potências de matrizes diagonais são fáceis de calcular; deixamos para você verificar que se *D* é a matriz diagonal 1 e *k* é um inteiro positivo, então

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^k \end{bmatrix} \tag{3}$$

EXEMPLO 1 Inversas e Potências de Matrizes Diagonais

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

então

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad A^{5}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -243 & 0\\ 0 & 0 & 32\end{bmatrix},\quad A^{-5}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{243} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{32}\end{bmatrix}$$

Produtos de matriz que envolvem fatores diagonais são especialmente fáceis de calcular. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix}d_1 & 0 & 0\\ 0 & d_2 & 0\\ 0 & 0 & d_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1a_{11} & d_1a_{12} & d_1a_{13} & d_1a_{14}\\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & d_2a_{23} & d_2a_{24}\\ d_3a_{31} & d_3a_{32} & d_3a_{33} & d_3a_{34}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1 & 0 & 0\\ 0 & d_2 & 0\\ 0 & 0 & d_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1a_{11} & d_2a_{12} & d_3a_{13}\\ d_1a_{21} & d_2a_{22} & d_3a_{23}\\ d_1a_{31} & d_2a_{32} & d_3a_{33}\\ d_1a_{41} & d_2a_{42} & d_3a_{43}\end{bmatrix}$$

Em palavras, para multiplicar uma matriz A à esquerda por uma matriz diagonal D, pode-se multiplicar sucessivas linhas de A pelas sucessivas entradas diagonais de D, e para multiplicar A à direita por D, pode-se multiplicar colunas sucessivas de A por as sucessivas entradas diagonais de D.

Matrizes Triangulares

Uma matriz quadrada na qual todas as entradas acima da diagonal principal são zero é chamada de ***triangular inferior,*** e uma matriz quadrada na qual todas as entradas abaixo da diagonal principal são zero é chamada de ***triangular superior.*** Uma matriz que é triangular superior ou triangular inferior é chamada de ***triangular.***

EXEMPLO 2 Matrizes Triangulares Superiores e Inferiores

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34}\\ 0 & 0 & 0 & a_{44}\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}$$

A general 4 × 4 upper triangular matrix

A general 4 × 4 lower triangular matrix

Observação Observe que as matrizes diagonais são triangulares superiores e triangulares inferiores, pois possuem zeros abaixo e acima da diagonal principal. Observe também que uma matriz *quadrada* na forma escalonada por linhas é triangular superior, pois possui zeros abaixo da diagonal principal.

Propriedades de Matrizes Triangulares

O Exemplo 2 ilustra os quatro fatos a seguir sobre matrizes triangulares que enunciaremos sem prova formal.

- Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é triangular superior se e somente se todas as entradas à esquerda da diagonal principal forem zero; ou seja, $a_{ij} = 0$ se $i > j$ (Figura 1.7.1).
- Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é triangular inferior se e somente se todas as entradas à direita da diagonal principal forem zero; ou seja, $a_{ij} = 0$ se $i < j$ (Figura 1.7.1).
- Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é triangular superior se e somente se a linha i começa com pelo menos $i - 1$ zeros para cada i.
- Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é triangular inferior se e somente se a *j*- ésima coluna começa com pelo menos $j - 1$ zeros para cada j.

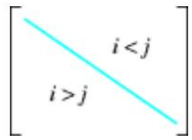


Figura 1.7.1

O teorema a seguir lista algumas das propriedades básicas das matrizes triangulares.

TEOREMA 1.7.1

(a) A transposta de uma matriz triangular inferior é triangular superior, e a transposta de uma matriz triangular superior é triangular inferior.

(b) O produto das matrizes triangulares inferiores é triangular inferior, e o produto das matrizes triangulares superiores é superior triangular.

(c) Uma matriz triangular é invertível se e somente se suas entradas diagonais são todas diferentes

de zero. *(d)* A inversa de uma matriz triangular inferior invertível é triangular inferior, e a inversa de uma matriz triangular superior invertível matriz triangular é triangular superior.

A parte *(a)* é evidente pelo fato de que a transposição de uma matriz quadrada pode ser realizada refletindo as entradas sobre a diagonal principal; omitimos a prova formal. Provaremos *(b),* mas deixaremos as provas de *(c)* e *(d)* para o próximo capítulo, onde teremos as ferramentas para provar esses resultados de forma mais eficiente.

Prova (b) Provaremos o resultado para matrizes triangulares inferiores; a prova para matrizes triangulares superiores é similar. Let Ser matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ $n \times n$ triangulares inferiores, e deixe $C = [c_{ij}]$ Ser o produto $C = AB$. Podemos provar que *C* é triangular inferior mostrando que $c_{ij} = 0$ para $i < j$. Mas a partir da definição de multiplicação de matrizes,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Se assumirmos que $i < j$, então os termos nesta expressão podem ser agrupados da seguinte forma:

$$c_{ij} = \underbrace{a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{i(j-1)}b_{(j-1)j}}_{\substack{\textbf{Terms in which the row}\\ \textbf{number of } b \textbf{ is less than the}\\ \textbf{column number of } b}} + \underbrace{a_{ij}b_{jj} + \cdots + a_{in}b_{nj}}_{\substack{\textbf{Terms in which the row}\\ \textbf{number of } a \textbf{ is less than}\\ \textbf{the column number of } a}}$$

No primeiro agrupamento, todos os fatores *b* são zero, pois *B* é triangular inferior, e no segundo agrupamento, todos os fatores *a* são zero, pois *A* é triangular inferior. Por isso, $c_{ij} = 0$, que é o que queríamos provar.

EXEMPLO 3 Cálculos com Matrizes Triangulares

Considere as matrizes triangulares superiores

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segue da parte *(c)* do Teorema 1.7.1 que a matriz *A* é invertível, mas a matriz *B* não é. Além disso, o teorema também nos diz que A^{-1}, *AB* e *BA* devem ser triangulares superiores. Deixamos para você confirmar esses três afirmações mostrando que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Matrizes Simétricas

DEFINIÇÃO 1

Uma matriz quadrada *A* é dita ***simétrica*** se $A = A^T$.

É fácil reconhecer uma matriz simétrica por inspeção: as entradas na diagonal principal não têm restrições, mas as imagens espelhadas das entradas *na* diagonal principal devem ser iguais. Aqui está uma imagem usando a segunda matriz no Exemplo 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Todas as matrizes diagonais, como a terceira matriz do Exemplo 4, obviamente possuem essa propriedade.

EXEMPLO 4 Matrizes Simétricas

As seguintes matrizes são simétricas, pois cada uma é igual à sua própria transposta (verifique).

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

Observação Segue da Fórmula 11 da Seção 1.3 que uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é simétrica se e somente se

$$(A)_{ij} = (A)_{ji} \tag{4}$$

para todos os valores de *i* e j.

O teorema a seguir lista as principais propriedades algébricas de matrizes simétricas. As provas são consequências diretas do Teorema 1.4.8 e são omitidas.

TEOREMA 1.7.2

Se *A* e *B* são matrizes simétricas com o mesmo tamanho, e se *k* é qualquer escalar, então:

(a) *AT* é simétrica. *(b)*

(c) $A + B$ e $A - B$ são simétricos.

kA é simétrico.

Não é verdade, em geral, que o produto de matrizes simétricas seja simétrico. Para ver por que isso ocorre, sejam *A* e *B* matrizes simétricas com o mesmo tamanho. Então segue da parte *(e)* do Teorema 1.4.8 e da simetria de *A* e *B* que

$$(AB)^T = B^T A^T = BA$$

Por isso, $(AB)^T = AB$ se e apenas se $AB = BA$, isto é, se e somente se *A* e *B* comutam. Em resumo, temos o seguinte resultado.

TEOREMA 1.7.3

O produto de duas matrizes simétricas é simétrico se e somente se as matrizes comutam.

EXEMPLO 5 Produtos de Matrizes Simétricas

A primeira das equações a seguir mostra um produto de matrizes simétricas que *não é* simétrica, e a segunda mostra um produto de matrizes simétricas que *é* simétrica. Concluímos que os fatores da primeira equação não comutam, mas os da segunda equação sim. Deixamos para você verificar se é assim.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Invertibilidade de Matrizes Simétricas

Em geral, uma matriz simétrica não precisa ser invertível. Por exemplo, uma matriz diagonal com um zero na diagonal principal é simétrica, mas não invertível. No entanto, o teorema a seguir mostra que, se uma matriz simétrica for invertível, sua inversa também deve ser simétrica.

TEOREMA 1.7.4

Se *A* é uma matriz simétrica invertível, então A^{-1} é simétrico.

Prova Assuma que *A* é simétrico e invertível. Do Teorema 1.4.9 e do fato de que $A = A^T$, Nós temos

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1} = A^{-1}$$

o que prova que A^{-1} é simétrico.

Produtos AAT e ATA

Os produtos de matriz da forma *AAT* e *AT A* surgem em uma variedade de aplicações. Se *A* é $m \times n$ matriz, então *AT* é an e $n \times m$ uma matriz, então os produtos *AAT* e *AT A* são ambos matrizes quadradas – a matriz *AAT* tem tamanho $m \times m$, a matriz *AT A* tem tamanho $n \times n$. Tais produtos são sempre simétricos, pois

$$\left(AA^T\right)^T = \left(A^T\right)^T A^T = AA^T \quad \text{and} \quad \left(A^TA\right)^T = A^T\left(A^T\right)^T = A^TA$$

EXEMPLO 6 O produto de uma matriz e sua transposição é simétrico

Seja *A* o 2×3 matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Então

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -11 \\ -2 & 4 & -8 \\ -11 & -8 & 41 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -17 \\ -17 & 34 \end{bmatrix}$$

Observe que *AT A* e *AAT* são simétricos como esperado.

Mais adiante neste texto, obteremos condições gerais sobre *A* sob as quais *AAT* e *AT A* são inversíveis. No entanto, no caso especial em que *A* é *quadrado,* temos o seguinte resultado.

TEOREMA 1.7.5

Se *A* é uma matriz invertível, então AAT e ATA também são inversíveis.

Prova Como A é invertível, A^T também é invertível pelo Teorema 1.4.9. Assim, AA^T e $A^T A$ são inversíveis, pois são produtos de matrizes invertíveis.

Revisão do Conceito

- Matriz diagonal
- Matriz triangular inferior
- Matriz triangular superior
- Matriz triangular
- Matriz simétrica

Habilidades

- Determinar se uma matriz diagonal é invertível sem cálculos.
- Calcular produtos matriciais envolvendo matrizes diagonais por inspeção.
- Determinar se uma matriz é triangular.
- Compreender como a operação de transposição afeta matrizes diagonais e triangulares.
- Compreender como a inversão afeta as matrizes diagonais e triangulares.
- Determinar se uma matriz é uma matriz simétrica.

Conjunto de exercícios 1.7

Nos Exercícios 1–4, determine se a matriz dada é invertível.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

Responder:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

2. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Responder:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 5–8, determine o produto por inspeção.

5. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Responder:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & -5 & 3 & 0 & 3 \\ -6 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Responder:

$$\begin{bmatrix} -15 & 10 & 0 & 20 & -20 \\ 2 & -10 & 6 & 0 & 6 \\ 18 & -6 & -6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

8. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 9–12, encontre A^2, A^{-2}, e A^{-k} (onde *k* é qualquer número inteiro) por inspeção.

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Responder:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\ A^{-2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix},\ A^{-k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(-2)^k \end{bmatrix}$$

10. $A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

11.

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

Responder:

$$A^2=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{9} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{16}\end{bmatrix},\ A^{-2}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 16\end{bmatrix},\ A^{-k}=\begin{bmatrix}2^k & 0 & 0\\ 0 & 3^k & 0\\ 0 & 0 & 4^k\end{bmatrix}$$

12.

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

Nos Exercícios 13–19, decida se a matriz dada é simétrica.

13. $\begin{bmatrix}-8 & -8\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

Responder:

Não simétrico

14. $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix}0 & -7\\ -7 & 7\end{bmatrix}$

Responder:

Simétrico

16. $\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & 0\end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -6\\ 2 & 6 & 6\end{bmatrix}$

Responder:

Não simétrico

18. $\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ -1 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 7\end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Responder:

Não simétrico

Nos Exercícios 20–22, decida por inspeção se a matriz dada é invertível.

20. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Responder:

Não invertível

22. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & -5 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 23–24, encontre todos os valores da(s) constante(s) desconhecida(s) para que *A* seja simétrico.

23. $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ a+5 & -1 \end{bmatrix}$

Responder:

$a = -8$

24. $A = \begin{bmatrix} 2 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 3 & 5 & a+c \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 25–26, encontre todos os valores de *x* para que *A* seja invertível.

25. $A = \begin{bmatrix} x-1 & x^2 & x^4 \\ 0 & x+2 & x^3 \\ 0 & 0 & x-4 \end{bmatrix}$

Responder:

$x \neq 1, \ -2, 4$

26. $A = \begin{bmatrix} x-\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ x & x-\frac{1}{3} & 0 \\ x^2 & x^3 & x-\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 27–28, encontre uma matriz diagonal *A* que satisfaça a condição dada.

27. $A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Responder:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

28. $A^{-2} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

29. Verifique o Teorema 1.7.1(b) para o produto *AB,* onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

30. Verifique o Teorema 1.7.1(d) para as matrizes *A* e *B* no Exercício 29.

31. Verifique o Teorema 1.7.4 para a matriz A dada.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

32. Seja *A* um $n \times n$ matriz simétrica.

(a) Mostre que A2 é simétrico. (b)

Mostre que $2A^2 - 3A + I$ é simétrico.

33. Prove: Se $A^T A = A$, então *A* é simétrico e $A = A^2$.

34. Encontre tudo 3×3 matrizes diagonais *A* que satisfazem $A^2 - 3A - 4I = 0$.

35. Deixe $A = [a_{ij}]$ feijão $n \times n$ matriz. Determine se *A* é simétrico.

(a) $a_{ij} = i^2 + j^2$

(b) $a_{ij} = i^2 - j^2$

$a_{ij} = 2i + 2j$

(cd) $a_{ij} = 2i^2 + 2j^3$

Responder:

(a) Sim

(b) Não (a menos $n = 1$)

que (c)

Sim (d) Não (a menos que $n = 1$)

36. Com base em sua experiência com o Exercício 35, elabore um teste geral que possa ser aplicado a uma fórmula para *aij* determinar se $A = [a_{ij}]$ que é simétrica.

37. Uma matriz quadrada *A* é chamada ***de simétrica*** se $A^T = -A$.

Provar:

(a) Se *A* é uma matriz assimétrica invertível, então A^{-1} é assimétrica.

(b) Se *A* e *B* são matrizes assimétricas, então também são $A^T,\ A + B,\ A - B,$ and kA para qualquer escalar k.

(c) Toda matriz quadrada *A* pode ser expressa como a soma de uma matriz simétrica e uma matriz assimétrica. *[Dica:* Nota a identidade $A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$.]

Nos Exercícios 38–39, preencha as entradas que faltam (marcadas com ×) para produzir uma matriz simétrica.

38. $A = \begin{bmatrix} \times & \times & 4 \\ 0 & \times & \times \\ \times & -1 & \times \end{bmatrix}$

39. $A = \begin{bmatrix} \times & 0 & \times \\ \times & \times & -4 \\ 8 & \times & \times \end{bmatrix}$

Responder:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -4 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

40. Encontre todos os valores de a, b, c e *d* para os quais *A* é assimétrico.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2a - 3b + c & 3a - 5b + 5c \\ -2 & 0 & 5a - 8b + 6c \\ -3 & -5 & d \end{bmatrix}$$

41. Mostramos no texto que o produto de matrizes simétricas é simétrico se e somente se as matrizes comutam. É o produto da comutação de matrizes simétricas assimétricas simétricas assimétricas? Explicar. *[Nota:* Veja o Exercício 37 para a definição de *assimetria.]*

42. Se o $n \times n$ A matriz *A* pode ser expressa como $A = LU$, onde *L* é uma matriz triangular inferior e *U* é uma triangular superior e pode ser matriz, então o sistema linear Etapa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser expresso como $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ resolvido em duas etapas:

1. Vamos $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, para que $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser expresso como $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Resolva este sistema.

Etapa 2. Resolva o sistema Em $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ para x.

cada parte, use este método de duas etapas para resolver o sistema dado. (a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

43. Encontre uma matriz triangular superior que satisfaça

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 30 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Responder:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Exercícios de Verdadeiro-Falso

Nas partes (a)–(m), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

(a) A transposta de uma matriz diagonal é uma matriz diagonal.

Responder:

Verdadeiro

(b) A transposta de uma matriz triangular superior é uma matriz triangular superior.

Responder:

Falso

(c) A soma de uma matriz triangular superior e uma matriz triangular inferior é uma matriz diagonal.

Responder:

Falso

(d) Todas as entradas de uma matriz simétrica são determinadas pelas entradas que ocorrem na diagonal principal e acima dela.

Responder:

Verdadeiro

(e) Todas as entradas de uma matriz triangular superior são determinadas pelas entradas que ocorrem na diagonal principal e acima dela.

Responder:

Verdadeiro

(f) A inversa de uma matriz triangular inferior invertível é uma matriz triangular superior.

Responder:

Falso

(g) Uma matriz diagonal é invertível se e somente se todas as suas entradas diagonais forem positivas.

Responder:

Falso

(h) A soma de uma matriz diagonal e uma matriz triangular inferior é uma matriz triangular inferior.

Responder:

Verdadeiro

(i) Uma matriz que é simétrica e triangular superior deve ser uma matriz diagonal.

Responder:

Verdadeiro

(j) Se *A* e *B* são $n \times n$ matrizes tais que $A + B$ é simétrico, então *A* e *B* são simétricos.

Responder:

Falso

(k) Se *A* e *B* são $n \times n$ matrizes tais que $A + B$ é triangular superior, então *A* e *B* são triangulares superiores.

Responder:

Falso

(l) Se A2 é uma matriz simétrica, então *A* é uma matriz simétrica.

Responder:

Falso

(m) Se *kA* é uma matriz simétrica para algum $k \neq 0$, então *A* é uma matriz simétrica.

Responder:

Verdadeiro

1.8 Aplicações de Sistemas Lineares

Nesta seção, discutiremos algumas aplicações relativamente breves de sistemas lineares. Estas são apenas uma pequena amostra da ampla variedade de problemas do mundo real aos quais nosso estudo de sistemas lineares é aplicável.

Análise de rede

O conceito de *rede* aparece em uma variedade de aplicações. Em termos gerais, uma ***rede*** é um conjunto de ***ramificações*** através das quais algo "flui". Por exemplo, as ramificações podem ser fios elétricos através dos quais flui a eletricidade, canos através dos quais flui água ou óleo, faixas de tráfego através das quais flui o tráfego de veículos ou ligações econômicas através das quais o dinheiro flui, para citar algumas possibilidades.

Na maioria das redes, os ramos se encontram em pontos, chamados ***nós*** ou ***junções,*** onde o fluxo se divide. Por exemplo, em uma rede elétrica, os nós ocorrem onde três ou mais fios se unem, em uma rede de tráfego eles ocorrem em cruzamentos de ruas e em uma rede financeira eles ocorrem em centros bancários onde o dinheiro recebido é distribuído para indivíduos ou outras instituições.

No estudo de redes, geralmente há alguma medida numérica da taxa na qual o meio flui através de um ramo. Por exemplo, a taxa de fluxo de eletricidade é frequentemente medida em amperes, a taxa de fluxo de água ou óleo em galões por minuto, a taxa de fluxo de tráfego de veículos por hora e a taxa de fluxo de moeda europeia em milhões de euros por dia.
Restringiremos nossa atenção a redes nas quais há ***conservação de fluxo*** em cada nó, o que significa que *a taxa de fluxo para qualquer nó é igual à taxa de fluxo para fora desse nó.* Isso garante que o meio de fluxo não se acumule nos nós e bloqueie o movimento livre do meio pela rede.

Um problema comum na análise de rede é usar taxas de fluxo conhecidas em certos ramos para encontrar as taxas de fluxo em todos os ramos. Aqui está um exemplo.

EXEMPLO 1 Análise de rede usando sistemas lineares

A Figura 1.8.1 mostra uma rede com quatro nós em que a vazão e a direção do fluxo em determinados ramos são conhecidas. Encontre as taxas de fluxo e direções de fluxo nos ramos restantes.

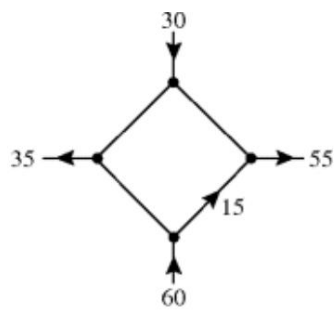


Figura 1.8.1

Solução Conforme ilustrado na Figura 1.8.2, atribuímos direções arbitrárias às vazões desconhecidas x_1, x_2, e x_3. Não precisamos nos preocupar se algumas das direções estiverem incorretas, pois uma direção incorreta será sinalizado por um valor negativo para a vazão quando resolvermos as incógnitas.

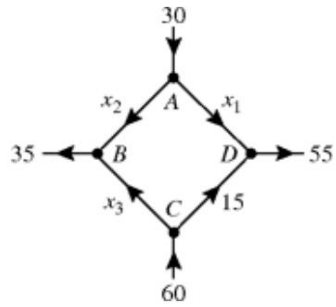


Figura 1.8.2

Segue da conservação do fluxo no nó *A* que

$$x_1 + x_2 = 30$$

Da mesma forma, nos outros nós temos

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 35 \quad (\text{node } B) \\ x_3 + 15 &= 60 \quad (\text{node } C) \\ x_1 + 15 &= 55 \quad (\text{node } D) \end{aligned}$$

Estas quatro condições produzem o sistema linear

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 30 \\ x_2 + x_3 &= 35 \\ x_3 &= 45 \\ x_1 &= 40 \end{aligned}$$

que agora podemos tentar resolver para as vazões desconhecidas. Neste caso particular, o sistema é suficientemente simples para ser resolvido por inspeção (trabalho de baixo para cima). Deixamos para você confirmar que a solução é

$$x_1 = 40, \quad x_2 = -10, \quad x_3 = 45$$

O fato de que x_2 é negativo nos diz que a direção atribuída a esse fluxo na Figura 1.8.2 está incorreta; aquilo é, o fluxo nesse ramo é *para* o nó A.

EXEMPLO 2 Projeto de Padrões de Tráfego

A rede na Figura 1.8.3 mostra um plano proposto para o fluxo de tráfego em torno de um novo parque que abrigará o Liberty Bell na Filadélfia, Pensilvânia. O plano prevê um semáforo computadorizado na saída norte da Fifth Street, e o diagrama indica o número médio de veículos por hora que devem entrar e sair das ruas que circundam o complexo. Todas as ruas são de mão única. **(a)** Quantos veículos por hora o semáforo deve deixar passar para garantir que o número

médio de

veículos por hora que entram no complexo é igual ao número médio de veículos que saem? **(b)** Supondo que o semáforo

tenha sido ajustado para equilibrar o fluxo total de entrada e saída do complexo, o que você pode dizer sobre o número médio de veículos por hora que circularão pelas ruas que margeiam o complexo?

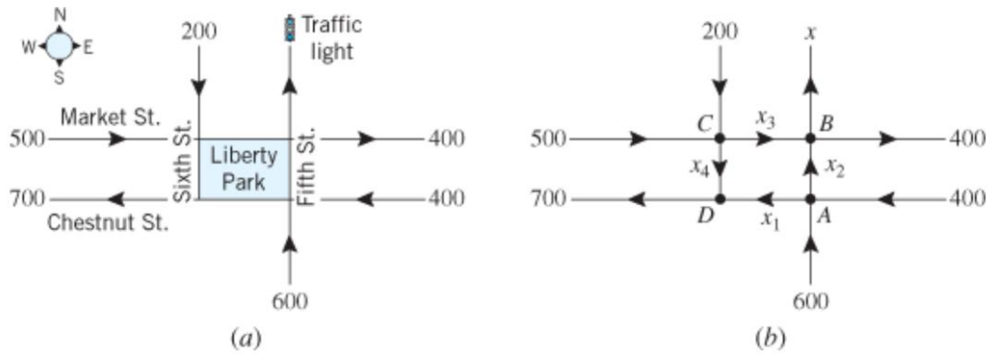


Figura 1.8.3

Solução

(a) Se, conforme indicado na Figura 1.8.3b, considerarmos *x* o número de veículos por hora que o semáforo deve deixar passar, então o número total de veículos por hora que entram e saem do complexo será

$$\textbf{Flowing in: } 500+400+600+200=1700$$
$$\textbf{Flowing out: } x+700+400$$

Igualando os fluxos de entrada e saída mostra que o semáforo deve deixar passar x = 600 veículos por hora.

(b) Para evitar o congestionamento do tráfego, o fluxo de entrada deve ser igual ao fluxo de saída em cada interseção. Para isso acontecer, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

Fluxo de interseção			fluxo para fora
A	$400+600$	=	x_1+x_2
B	x_2+x_3	=	$400+x$
C	$500+200$	=	x_3+x_4
D	x_1+x_4	=	700

Assim, com $x=600$, como calculado na parte (a), obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 1000 \\ x_2 + x_3 \qquad &= 1000 \\ x_3 + x_4 &= 700 \\ x_1 \qquad\qquad + x_4 &= 700 \end{aligned}$$

Deixamos para você mostrar que o sistema tem infinitas soluções e que estas são dadas pelas equações paramétricas

$$x_1=700-t,\ x_2=300+t,\ x_3=700-t,\ x_4=t \tag{1}$$

No entanto, o parâmetro *t* não é completamente arbitrário aqui, pois existem restrições físicas a serem consideradas. Por exemplo, as vazões médias devem ser não negativas, pois assumimos que as ruas são de mão única, e uma vazão negativa indicaria um fluxo na direção errada. Sendo este o caso, vemos a partir de 1 que *t* pode ser qualquer número real que satisfaça as vazões médias ao longo das ruas cairão nos intervalos $0 \le t \le 700$, o que implica que o

$$0 \le x_1 \le 700, \quad 300 \le x_2 \le 1000, \quad 0 \le x_3 \le 700, \quad 0 \le x_4 \le 700$$

Circuitos elétricos

A seguir, mostraremos como a análise de rede pode ser usada para analisar circuitos elétricos compostos por baterias e resistores. Uma ***bateria*** é uma fonte de energia elétrica e um ***resistor,*** como uma lâmpada, é um elemento que dissipa energia elétrica. A Figura 1.8.4 mostra um diagrama esquemático de um circuito com uma bateria (representada pelo símbolo), um resistor (representado por considera-) e um interruptor. A bateria tem um ***pólo positivo*** (+) e um ***pólo negativo*** (-). Quando o interruptor é fechado, se que a corrente elétrica do símbolo flui do polo positivo da bateria, através do resistor, e de volta ao polo negativo (indicado pela seta na figura).

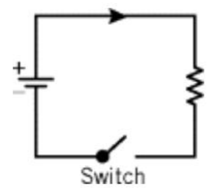


Figura 1.8.4

A corrente elétrica, que é um fluxo de elétrons através de fios, se comporta de forma muito semelhante ao fluxo de água através de canos. Uma bateria age como uma bomba que cria "pressão elétrica" para aumentar a taxa de fluxo de elétrons, e um resistor age como uma restrição em um tubo que reduz a taxa de fluxo de elétrons. O termo técnico para pressão elétrica é ***potencial elétrico;*** é comumente medido em ***volts*** (V). O grau em que um resistor reduz o potencial elétrico é chamado de ***resistência*** e geralmente é medido em ***ohms*** (ÿ). A taxa de fluxo de elétrons em um fio é chamada de ***corrente*** e é comumente medida em ***ampères*** (também chamados ***de amperes)*** (A). O efeito preciso de um resistor é dado pela seguinte lei:

Lei de Ohm

Se uma corrente de *1* amperes passa por um resistor com uma resistência de *R* ohms, então há uma queda resultante de *E* volts no potencial elétrico que é o produto da corrente pela resistência; aquilo é,

$$E = IR$$

Uma rede elétrica típica terá várias baterias e resistores unidos por alguma configuração de fios. Um ponto no qual três ou mais fios em uma rede são unidos é chamado de ***nó*** (ou ***ponto de junção).*** Uma ***ramificação*** é um fio conectando dois nós e um ***loop fechado*** é uma sucessão de ramificações conectadas que começam e terminam no mesmo nó. Por exemplo, a rede elétrica da Figura 1.8.5 tem dois nós e três malhas fechadas — duas malhas internas e uma malha externa. À medida que a corrente flui através de uma rede elétrica, ela sofre aumentos e diminuições no potencial elétrico, chamados ***aumentos*** e ***quedas de tensão,*** respectivamente. O comportamento da corrente nos nós e em torno de loops fechados é regido por duas leis fundamentais:

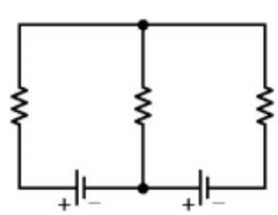


Figura 1.8.5

Lei das Correntes de Kirchhoff

A soma das correntes fluindo para qualquer nó é igual à soma das correntes fluindo para fora.

Lei das Tensões de Kirchhoff

Em uma travessia de qualquer malha fechada, a soma das elevações de tensão é igual à soma das quedas de tensão.

A lei atual de Kirchhoff é uma reafirmação do princípio de conservação de fluxo em um nó que foi estabelecido para redes gerais. Assim, por exemplo, as correntes no nó superior da Figura 1.8.6 satisfazem a equação $I_1 = I_2 + I_3$.

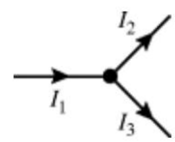


Figura 1.8.6

Em circuitos com vários loops e baterias, geralmente não há como saber com antecedência em que direção as correntes estão fluindo; portanto, o procedimento usual na análise de circuitos é atribuir direções arbitrárias aos fluxos de corrente *nos* ramos e deixar que os cálculos matemáticos determinem se o atribuições estão corretas. Além de atribuir direções aos fluxos de corrente, a lei de tensão de Kirchhoff requer uma direção de deslocamento para cada malha fechada. A escolha é arbitrária, mas para manter a consistência, sempre consideraremos essa direção no sentido *horário* (Figura 1.8.7). Também fazemos as seguintes convenções:

- Uma queda de tensão ocorre em um resistor se a direção atribuída à corrente através do resistor for a mesma que a direção atribuída ao loop, e um aumento de tensão ocorre em um resistor se a direção atribuída ao loop A corrente através do resistor é oposta àquela atribuída ao loop.

- Um aumento de tensão ocorre em uma bateria se a direção atribuída ao loop for de - para + através da bateria, e uma tensão a queda ocorre em uma bateria se a direção atribuída ao loop for de + para - através da bateria.

Se você seguir essas convenções ao calcular as correntes, as correntes cujas direções foram atribuídas corretamente terão valores positivos e aquelas cujas direções foram atribuídas incorretamente terão valores negativos.

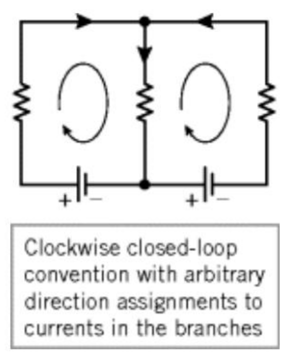


Figura 1.8.7

EXEMPLO 3 Um circuito com um loop fechado

Determine a corrente ***I*** no circuito mostrado na Figura 1.8.8.

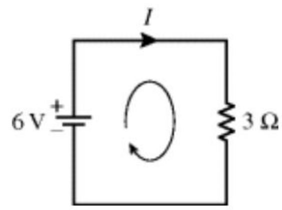


Figura 1.8.8

Solução Como o sentido atribuído à corrente através do resistor é o mesmo que o sentido da espira, há uma queda de tensão no resistor. Pela lei de Ohm, essa queda de tensão é $E = IR = 3I$. Além disso, como a direção atribuída ao loop é de - para + através da bateria, há um aumento de tensão de 6 volts na bateria. Assim, segue da lei de tensão de Kirchhoff que

$$3I = 6$$

a partir do qual concluímos que o fluxo de corrente $I = 2\text{ A}$. Como I é positivo, a direção atribuída à corrente está correto.

EXEMPLO 4 Um circuito com três malhas fechadas

Determine as correntes I_1, I_2, e I_3 no circuito mostrado na Figura 1.8.9.

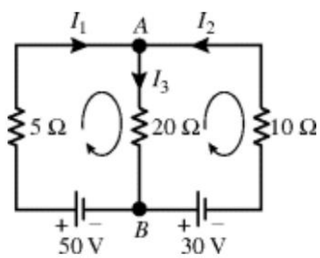


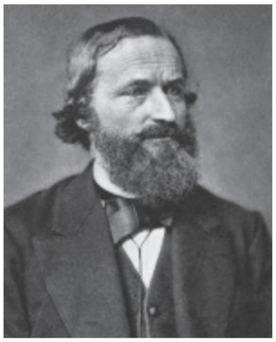
Figura 1.8.9

Solução Usando as direções atribuídas para as correntes, a lei das correntes de Kirchhoff fornece uma equação para cada nó:

	Corrente do Nó		Saída de Corrente
A	$I_1 + I_2$	=	I_3
B	I_3	=	$I_1 + I_2$

No entanto, essas equações são realmente as mesmas, pois ambas podem ser expressas como

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad (2)$$



Gustav Kirchhoff (1824-1887)

Nota Histórica O físico alemão Gustav Kirchhoff foi aluno de Gauss. Seu trabalho sobre as leis de Kirchhoff, anunciado em 1854, foi um grande avanço no cálculo de correntes, tensões e resistências de circuitos elétricos. Kirchhoff ficou gravemente incapacitado e passou a maior parte de sua vida de muletas ou em uma cadeira de rodas.

Imagem: © SSPL/ The Image Works]

Para encontrar valores únicos para as correntes precisaremos de mais duas equações, que obteremos da lei das tensões de Kirchhoff. Podemos ver no diagrama de rede que há três espiras fechadas, uma espira interna esquerda contendo a bateria de 50 V, uma espira interna direita contendo a bateria de 30 V e uma espira externa que contém ambas as baterias. Assim, a lei de voltagem de Kirchhoff produzirá, na verdade, três equações. Com uma passagem no sentido horário dos loops, os aumentos e quedas de tensão nesses loops são os seguintes:

	Tensão sobe	**Quedas de Tensão**
Laço Interno Esquerdo	50	$5I_1 + 20I_3$
Laço interno direito	$30 + 10I_2 + 20I_3$	0
Circuito Externo	$30 + 50 + 10I_2$	$5I_1$

Essas condições podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} 5I_1 \qquad\quad + 20I_3 &= 50 \\ 10I_2 + 20I_3 &= -30 \\ 5I_1 - 10I_2 \qquad\quad &= 80 \end{aligned} \tag{3}$$

No entanto, a última equação é supérflua, pois é a diferença das duas primeiras. Assim, se combinarmos 2 e as duas primeiras equações em 3, obtemos o seguinte sistema linear de três equações nas três correntes desconhecidas:

$$\begin{aligned} I_1 + \quad I_2 - \quad I_3 &= 0 \\ 5I_1 \qquad\quad + 20I_3 &= 50 \\ 10I_2 + 20I_3 &= -30 \end{aligned}$$

Deixamos para você resolver esse sistema e mostrar que é $I_1 = 6\ \text{A}$, $I_2 = -5\ \text{A}$, e $I_3 = 1\text{A}$. O fato de que I_2 negativo nos diz que o sentido dessa corrente é oposto ao indicado na Figura 1.8.9.

Balanceamento de Equações Químicas

Os compostos químicos são representados por ***fórmulas químicas*** que descrevem a composição atômica de suas moléculas. Por exemplo, a água é composta por dois átomos de hidrogênio e um átomo de oxigênio, então sua fórmula química é H2O; e o oxigênio estável é composto de dois átomos de oxigênio, então sua fórmula química é O2.

Quando os compostos químicos são combinados nas condições certas, os átomos em suas moléculas se reorganizam para formar novos compostos. Por exemplo, quando o metano queima, o metano (CH4) e o oxigênio estável (O2) reagem para formar dióxido de carbono (CO2) e água (H2O). Isso é indicado pela ***equação química***

$$\mathrm{CH_4 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O} \tag{4}$$

As moléculas à esquerda da seta são chamadas de ***reagentes*** e aquelas à direita de ***produtos.*** Nesta equação, os sinais de mais servem para separar as moléculas e não pretendem ser operações algébricas. No entanto, esta equação não conta toda a história, pois não leva em conta as proporções de moléculas necessárias para uma ***reação completa*** (sem reagentes sobrando). Por exemplo, podemos ver do lado direito de 4 que para produzir uma molécula de dióxido de carbono e uma molécula de água, são necessários *três* átomos de oxigênio para cada átomo de carbono. No entanto, do lado esquerdo de 4, vemos que uma molécula de metano e uma molécula de oxigênio estável têm apenas *dois* átomos de oxigênio para cada átomo de carbono. Assim, no lado dos reagentes, a proporção de metano para oxigênio estável não pode ser de um para um em uma reação completa.

Uma equação química é dita balanceada ***se ,*** para cada tipo de átomo na reação, o mesmo número de átomos aparece em cada lado da seta. Por exemplo, a versão balanceada da Equação 4 é

$$\mathrm{CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O} \tag{5}$$

com o que queremos dizer que uma molécula de metano se combina com duas moléculas estáveis de oxigênio para produzir uma molécula de dióxido de carbono e duas moléculas de água. Em teoria, pode-se multiplicar essa equação por qualquer número inteiro positivo. Por exemplo, multiplicar por 2 produz a equação química balanceada

$$\mathrm{2CH_4 + 4O_2 \rightarrow 2CO_2 + 4H_2O}$$

No entanto, a convenção padrão é usar os menores inteiros positivos que equilibrarão a equação.

A equação 4 é suficientemente simples para ser balanceada por tentativa e erro, mas para equações químicas mais complicadas precisaremos de um método sistemático. Existem vários métodos que podem ser usados, mas daremos um que usa sistemas de equações lineares. Para ilustrar o método, vamos reexaminar a Equação 4. Para balancear esta equação, devemos encontrar inteiros positivos, e tal que $x_1,\ x_2,\ x_3,\qquad x_4$

$$x_1(\mathrm{CH_4}) + x_2(\mathrm{O_2}) \rightarrow x_3(\mathrm{CO_2}) + x_4(\mathrm{H_2O}) \tag{6}$$

Para cada um dos átomos na equação, o número de átomos à esquerda deve ser igual ao número de átomos à direita. Expressando isso na forma tabular, temos

	Lado esquerdo		Lado direito
Carbono	x_1	=	x_3
hidrogênio	$4x_1$	=	$2x_4$
Oxigênio	$2x_2$	=	$2x_3 + x_4$

do qual obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{aligned} x_1 \quad - \quad x_3 \qquad &= 0 \\ 4x_1 \qquad\qquad - 2x_4 &= 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - \quad x_4 &= 0 \end{aligned}$$

A matriz aumentada para este sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Deixamos para você mostrar que a forma escalonada reduzida por linhas dessa matriz é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

do qual concluímos que a solução geral do sistema é

$$x_1 = t/2, \quad x_2 = t, \quad x_3 = t/2, \quad x_4 = t$$

onde *t* é arbitrário. Os menores valores inteiros positivos para as incógnitas ocorrem quando deixamos $t = 2$, então a equação pode ser equilibrado por deixar $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 2$. Isso concorda com nossas conclusões anteriores, pois a substituição desses valores na Equação 6 produz a Equação 5.

EXEMPLO 5 Balanceamento de Equações Químicas Usando Sistemas Lineares

Equilibre a equação química

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{HCl} & + & \mathrm{Na_3PO_4} & \rightarrow & \mathrm{H_3PO_4} & + & \mathrm{NaCl} \\ [\text{hydrochloric acid}] & + & [\text{sodium phosphate}] & \rightarrow & [\text{phosphoric acid}] & + & [\text{sodium chloride}] \end{array}$$

Solução Let x_1, x_2, x_3, e ser x_4 inteiros positivos que equilibram a equação

$$x_1(\mathrm{HCl}) + x_2(\mathrm{Na_3PO_4}) \rightarrow x_3(\mathrm{H_3PO_4}) + x_4(\mathrm{NaCl}) \tag{7}$$

Igualando o número de átomos de cada tipo nos dois lados, obtemos

$$\begin{array}{ll} 1x_1 = 3x_3 & \textbf{Hydrogen(H)} \\ 1x_1 = 1x_4 & \textbf{Chlorine(Cl)} \\ 3x_2 = 1x_4 & \textbf{Sodium(Na)} \\ 1x_2 = 1x_3 & \textbf{Phosphorous(P)} \\ 4x_2 = 4x_3 & \textbf{Oxygen(O)} \end{array}$$

do qual obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & & -3x_3 & & = 0 \\ x_1 & & & -x_4 & = 0 \\ & 3x_2 & & -x_4 & = 0 \\ & x_2 & -\ x_3 & & = 0 \\ & 4x_2 & -4x_3 & & = 0 \end{array}$$

Deixamos para você mostrar que a forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada para este sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

do qual concluímos que a solução geral do sistema é

$$x_1 = t, \quad x_2 = t/3, \quad x_3 = t/3, \quad x_4 = t$$

onde *t* é arbitrário. Para obter os menores inteiros positivos que equilibram a equação, deixamos $t = 3$, no qual que caso obtenhamos $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ e $x_4 = 3$. Substituir esses valores em 7 produz o balanceado equação

$$3HCl + Na_3PO_4 \rightarrow H_3PO_4 + 3NaCl$$

Interpolação Polinomial

Um problema importante em várias aplicações é encontrar um polinômio cujo gráfico passe por um conjunto especificado de pontos no plano; isso é chamado de ***polinômio interpolador*** para os pontos. O exemplo mais simples de tal problema é encontrar um polinômio linear

$$p(x) = ax + b \tag{8}$$

cujo gráfico passa por dois pontos distintos conhecidos, (x_1, y_1) e (x_2, y_2), no plano xy (Figura 1.8.10). Você provavelmente já encontrou vários métodos em geometria analítica para encontrar a equação de uma reta passando por dois pontos, mas aqui daremos um método baseado em sistemas lineares que podem ser adaptados à interpolação polinomial geral.

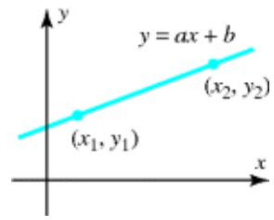


Figura 1.8.10

O gráfico de 8 é a reta $y = ax + b$, e para esta reta passar pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), nós devemos ter

$$y_1 = ax_1 + b \quad \text{and} \quad y_2 = ax_2 + b$$

Portanto, os coeficientes desconhecidos *a* e *b* podem ser obtidos resolvendo o sistema linear

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2 \end{aligned}$$

Não precisamos de nenhum método sofisticado para resolver esse sistema - o valor de *a* pode ser obtido subtraindo as equações para eliminar b e, em seguida, o valor de *a* pode ser substituído em qualquer uma das equações para encontrar b. Deixamos como exercício para você encontrar *a* e *b* e depois mostrar que eles podem ser expressos na forma

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{and} \quad b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \tag{9}$$

oferecido $x_1 \neq x_2$. Assim, por exemplo, a linha $y = ax + b$ que passa pelos pontos

$$(2, 1) \quad \text{and} \quad (5, 4)$$

pode ser obtido tomando $(x_1, y_1) = (2, 1)$ e $(x_2, y_2) = (5, 4)$, nesse caso, 9 produz

$$a = \frac{4 - 1}{5 - 2} = 1 \quad \text{and} \quad b = \frac{(1)(5) - (4)(2)}{5 - 2} = -1$$

Portanto, a equação da reta é

$$y = x - 1$$

(Figura 1.8.11).

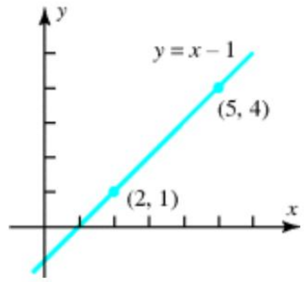


Figura 1.8.11

Agora vamos considerar o problema mais geral de encontrar um polinômio cujo gráfico passe por *n* pontos com coordenadas x distintas

$$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ (x_3,\ y_3),\ \ldots,\ (x_n,\ y_n) \qquad (10)$$

Como existem *n* condições a serem satisfeitas, a intuição sugere que devemos começar procurando um polinômio da forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \qquad (11)$$

já que um polinômio desta forma possui *n* coeficientes que estão à nossa disposição para satisfazer as *n* condições. No entanto, queremos permitir casos em que os pontos podem estar em uma linha ou ter alguma outra configuração que torne possível usar um polinômio cujo grau seja menor que $n-1$; assim, permitimos a possibilidade de que a_{n-1} e outros coeficientes em 11 possam ser zero.

O teorema a seguir, que provaremos mais adiante no texto, é o resultado básico da interpolação polinomial.

TEOREMA 1.8.1 Interpolação Polinomial

Dados quaisquer n pontos no plano xy que tenham coordenadas x distintas, existe um único polinômio de grau n — 1 ou menor cujo gráfico passa por esses pontos.

Vamos agora considerar como poderíamos encontrar o polinômio interpolador 11 cujo gráfico passa pelos pontos em 10. Como o gráfico desse polinômio é o gráfico da equação

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \qquad (12)$$

segue-se que as coordenadas dos pontos devem satisfazer

$$\begin{array}{ccccccccc} a_0 & + & a_1 x_1 & + & a_2 x_1^2 & + \ldots + & a_{n-1} x_1^{n-1} & = & y_1 \\ a_0 & + & a_1 x_2 & + & a_2 x_2^2 & + \ldots + & a_{n-1} x_2^{n-1} & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_0 & + & a_1 x_n & + & a_2 x_n^2 & + \ldots + & a_{n-1} x_n^{n-1} & = & y_n \end{array} \qquad (13)$$

Nessas equações, os valores de x e y são considerados conhecidos, então podemos ver isso como um sistema linear nas incógnitas $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Deste ponto de vista, a matriz aumentada para o sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & y_n \end{bmatrix} \tag{14}$$

e, portanto, o polinômio de interpolação pode ser encontrado reduzindo essa matriz à forma escalonada de linha reduzida (eliminação de Gauss-Jordan).

EXEMPLO 6 Interpolação Polinomial por Eliminação de Gauss-Jordan

Encontre um polinômio cúbico cujo gráfico passe pelos pontos

$$(1, 3), \quad (2, \ -2), \quad (3, \ -5), \quad (4, 0)$$

Solução Como são quatro pontos, usaremos um polinômio interpolador de polinômio de $n=3$. Denote isso grau por

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

e denote as coordenadas x e y dos pontos dados por

$$x_1 = 1, \ x_2 = 2, \ x_3 = 3, \ x_4 = 4 \quad \text{and} \quad y_1 = 3, \ y_2 = -2, \ y_3 = -5, \ y_4 = 0$$

Assim, segue de 14 que a matriz aumentada para o sistema linear nas incógnitas é $a_0, \ a_1, \ a_2,$ e a_3

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & y_3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -2 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & -5 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \end{bmatrix}$$

Deixamos para você confirmar que a forma escalonada reduzida por linhas desta matriz é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

do que se segue que $a_0 = 4, \ a_1 = 3, \ a_2 = -5, a_3 = 1$. Assim, o polinômio interpolador é

$$p(x) = 4 + 3x - 5x^2 + x^3$$

O gráfico deste polinômio e os pontos dados são mostrados na Figura 1.8.12.

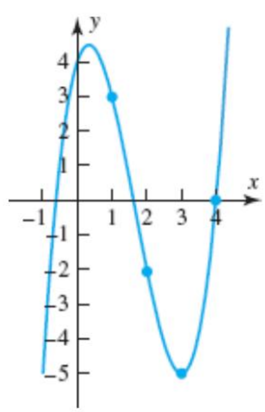


Figura 1.8.12

Observação Mais adiante, daremos um método mais eficiente para encontrar polinômios de interpolação que é mais adequado para problemas nos quais o número de pontos de dados é grande.

UTILIDADE DE CÁLCULO E CÁLCULO NECESSÁRIA

EXEMPLO 7 Integração Aproximada

Não há como calcular a integral

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx$$

diretamente, pois não há como expressar uma antiderivada do integrando em termos de funções elementares. Essa integral pode ser aproximada pela regra de Simpson ou algum método comparável, mas uma abordagem alternativa é aproximar o integrando por um polinômio de interpolação e integrar o polinômio de aproximação. Por exemplo, vamos considerar os cinco pontos

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.25, \quad x_2 = 0.5, \quad x_3 = 0.75, \quad x_4 = 1$$

que dividem o intervalo [0, 1] em quatro subintervalos igualmente espaçados. os valores de

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$$

nestes pontos são aproximadamente

$$f(0) = 0, \quad f(0.25) = 0.098017, \quad f(0.5) = 0.382683, \quad f(0.75) = 0.77301, \quad f(1) = 1$$

O polinômio interpolador é (verifique)

$$p(x) = 0.098796x + 0.762356x^2 + 2.14429x^3 - 2.00544x^4 \tag{15}$$

e

$$\int_0^1 p(x)\, dx \approx 0.438501 \tag{16}$$

Conforme mostrado na Figura 1.8.13, os gráficos de *f* e *p* correspondem muito bem no intervalo [0, 1], portanto a aproximação é muito boa.

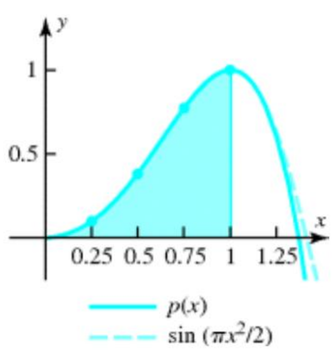


Figura 1.8.13

Revisão do conceito

- Rede
- Filiais
- Nós
- Conservação do fluxo
- Circuitos elétricos: bateria, resistor, polos (positivo e negativo), potencial elétrico, lei de Ohm, lei de Kirchhoff para correntes, lei de Kirchhoff para tensões
- Equações químicas: reagentes, produtos, equação balanceada • Polinômio interpolador

Habilidades

- Encontre as taxas de fluxo e direções de fluxo em ramos de uma rede.
- Encontre a quantidade de corrente que flui através de partes de um circuito elétrico. • Escreva uma equação química balanceada para uma determinada reação química. • Encontre um polinômio de interpolação para um gráfico passando por uma determinada coleção de pontos.

Conjunto de exercícios 1.8

1. A figura a seguir mostra uma rede na qual a vazão e a direção do fluxo em determinados ramos são conhecidas. Encontre as taxas de fluxo e direções de fluxo nos ramos restantes.

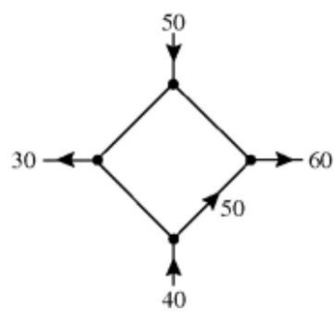
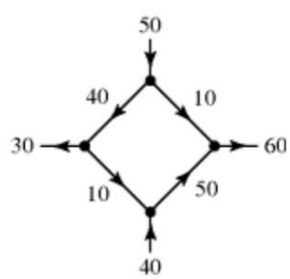


Figura Ex-1

Responder:



2. A figura a seguir mostra vazões conhecidas de hidrocarbonetos para dentro e para fora de uma rede de tubulações em uma refinaria de petróleo.

(a) Monte um sistema linear cuja solução forneça as vazões desconhecidas.

(b) Resolva o sistema para as vazões desconhecidas.

(c) Encontre as vazões e direções de fluxo se $x_4 = 50$ e $x_6 = 0$.

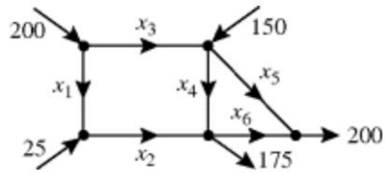


Figura Ex-2

3. A figura a seguir mostra uma rede de ruas de mão única com tráfego fluindo nas direções indicadas. As taxas de fluxo ao longo das ruas são medidas como o número médio de veículos por hora. (a) Monte um sistema linear cuja solução forneça as vazões desconhecidas. (b) Resolva o sistema para as vazões desconhecidas. (c) Se o fluxo ao longo da estrada de *A* para *B* deve ser reduzido para construção, qual é o fluxo mínimo necessário para manter o tráfego fluindo em todas as estradas?

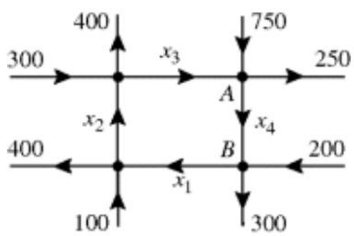


Figura Ex-3

Responder:

(a) $x_3 - x_4 = -500, \ -x_1 + x_4 = 100, \ x_1 - x_2 = 300, \ x_2 - x_3 = 100$

(b) $x_1 = -100 + t, \ x_2 = -400 + t, \ x_3 = -500 + t, \ x_4 = t$

(c) Para que todas as taxas sejam não negativas, precisamos $t = 500$ carros por hora, então $x_1 = 400, \ x_2 = 100, \ x_3 = 0, \ x_4 = 500$

4. A figura a seguir mostra uma rede de ruas de mão única com tráfego fluindo nas direções indicadas. As taxas de fluxo ao longo das ruas são medidas como o número médio de veículos por hora. (a) Monte um sistema linear cuja solução forneça as vazões desconhecidas. (b) Resolva o sistema para as vazões desconhecidas.

(c) É possível fechar a estrada de *A* a *B* para construção e manter o tráfego fluindo nas outras ruas? Explicar.

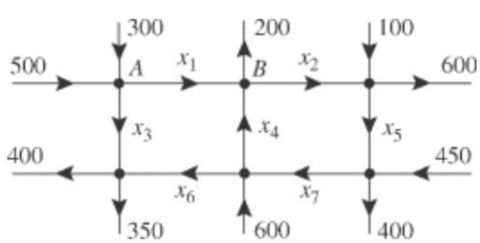
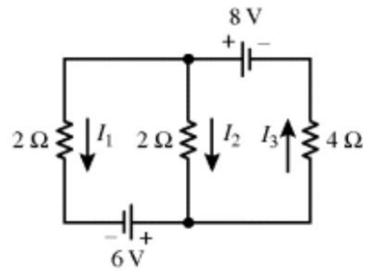


Figura Ex-4

Nos Exercícios 5–8, analise os circuitos elétricos dados encontrando as correntes desconhecidas.

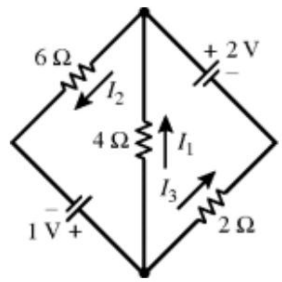
5.



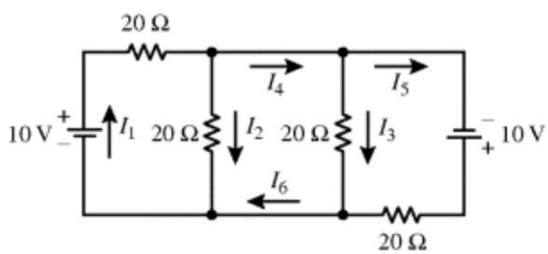
Responder:

$I_1 = \frac{13}{5}\mathrm{A},\ I_2 = -\frac{2}{5}\mathrm{A},\ I_3 = \frac{11}{5}\mathrm{A}$

6.



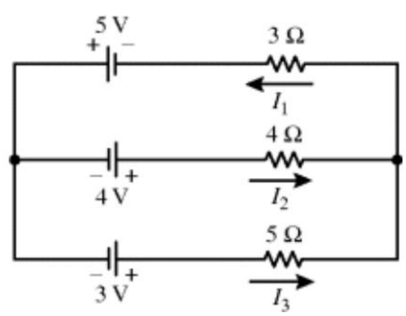
7.



Responder:

$I_1 = I_4 = I_5 = I_6 = \frac{1}{2}\mathrm{A},\ I_2 = I_3 = 0\ \mathrm{A}$

8.



Nos Exercícios 9–12, escreva uma equação balanceada para a reação química dada.

9. $C_3H_8 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$ (propane combustion)

Responder:

$x_1 = 1,\ x_2 = 5,\ x_3 = 3,$ e $x_4 = 4$; a equação balanceada é $C_3H_8 + 5O_2 \rightarrow 3CO_2 + 4H_2O$

10. $C_6H_{12}O_6 \rightarrow CO_2 + C_2H_5OH$ (fermentation of sugar)

11. $CH_3COF + H_2O \rightarrow CH_3COOH + HF$

Responder:

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = t$; a equação balanceada é $CH_3COF + H_2O \rightarrow CH_3COOH + HF$

12. $CO_2 + H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2$ (photosynthesis)

13. Encontre o polinômio quadrático cujo gráfico passa pelos pontos (1, 1), (2, 2) e (3, 5).

Responder:

$p(x) = x^2 - 2x + 2$

14. Encontre o polinômio quadrático cujo gráfico passa pelos pontos (0, 0), (ÿ1, 1) e (1, 1).

15. Encontre o polinômio cúbico cujo gráfico passa pelos pontos (ÿ1, ÿ1), (0, 1), (1, 3), (4, ÿ1).

Responder:

$p(x) = 1 + \frac{13}{6}x - \frac{1}{6}x^3$

16. A figura a seguir mostra o gráfico de um polinômio cúbico. Encontre o polinômio.

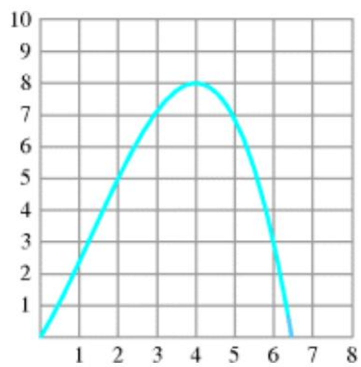


Figura Ex-16

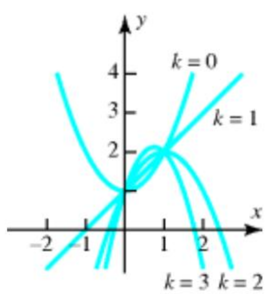
17. (a) Encontre uma equação que represente a família de todos os polinômios de segundo grau que passam pelos pontos (0, 1) e (1,2). *[Dica:* a equação envolverá um parâmetro arbitrário que produz os membros da família quando variado.]

(b) À mão, ou com a ajuda de um recurso gráfico, esboce quatro curvas da família.

Responder:

(a) Usando $a_1 = k$ como parâmetro, $p(x) = 1 + kx + (1-k)x^2$ onde $-\infty < k < \infty$.

(b) Os gráficos para $k = 0, 1, 2,$ e 3 são mostrados.



18. Nesta seção, selecionamos apenas algumas aplicações de sistemas lineares. Usando a Internet como uma ferramenta de pesquisa, tente encontrar mais aplicações reais de tais sistemas. Selecione um que seja do seu interesse e escreva um parágrafo sobre ele.

Exercícios de Verdadeiro-Falso

Nas partes (a)–(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

(a) Em qualquer rede, a soma dos fluxos que saem de um nó deve ser igual à soma dos fluxos que entram em um nó.

Responder:

Verdadeiro

(b) Quando uma corrente passa por um resistor, há um aumento no potencial elétrico em um circuito.

Responder:

Falso

(c) A lei das correntes de Kirchhoff afirma que a soma das correntes que entram em um nó é igual à soma das correntes que saem do nó.

Responder:

Verdadeiro

(d) Uma equação química é chamada balanceada se o número total de átomos em cada lado da equação for o mesmo.

Responder:

Falso

(e) Dados quaisquer *n* pontos no plano xy, existe um único polinômio de grau $n-1$ ou menos cujo gráfico passa por aqueles pontos.

Responder:

Falso

1.9 Modelos de entrada-saída Leontief

Em 1973, o economista Wassily Leontief recebeu o prêmio Nobel por seu trabalho sobre modelagem econômica, no qual usou métodos matriciais para estudar as relações entre diferentes setores de uma economia. Nesta seção, discutiremos algumas das ideias desenvolvidas por Leontief.

Entradas e saídas em uma economia

Uma maneira de analisar uma economia é dividi-la em ***setores*** e estudar como os setores interagem entre si. Por exemplo, uma economia simples pode ser dividida em três setores: manufatura, agricultura e serviços públicos. Normalmente, um setor produzirá certos ***produtos ,*** mas exigirá ***insumos*** de outros setores e de si mesmo. Por exemplo, o setor agrícola pode produzir trigo como produto, mas exigirá insumos de maquinário agrícola do setor manufatureiro, energia elétrica do setor de serviços públicos e alimentos de seu próprio setor para alimentar seus trabalhadores. Assim, podemos imaginar uma economia como uma rede em que entradas e saídas fluem para dentro e para fora dos setores; o estudo de tais fluxos é chamado de ***análise input-output.*** Entradas e saídas são comumente medidas em unidades monetárias (dólares ou milhões de dólares, por exemplo), mas outras unidades de medida também são possíveis.

Os fluxos entre setores de uma economia real nem sempre são óbvios. Por exemplo, na Segunda Guerra Mundial, os Estados Unidos tiveram uma demanda de 50.000 novos aviões que exigiram a construção de muitas novas fábricas de alumínio. Isso produziu uma demanda inesperadamente grande de certos componentes elétricos de cobre, o que, por sua vez, produziu uma escassez de cobre. O problema acabou sendo resolvido usando prata emprestada de Fort Knox como substituto do cobre. Com toda a probabilidade, a análise moderna de insumos e produtos teria antecipado a escassez de cobre.

A maioria dos setores de uma economia produzirá produtos, mas pode haver setores que consomem produtos sem produzir nada (o mercado consumidor, por exemplo). Aqueles setores que não produzem produtos são chamados de ***setores abertos.*** Economias sem setores abertos são chamadas de ***economias fechadas,*** e economias com um ou mais setores abertos são chamadas de ***economias abertas*** (Figura 1.9.1). Nesta seção, estaremos preocupados com economias com um setor aberto, e nosso objetivo principal será determinar os níveis de produção necessários para que os setores produtivos se sustentem e satisfaçam a demanda do setor aberto.

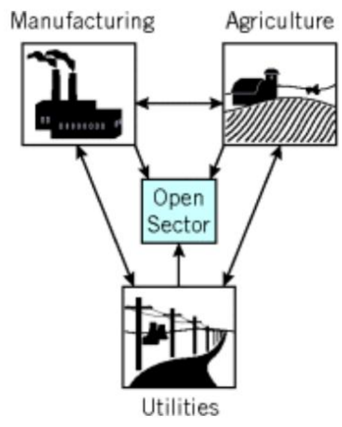


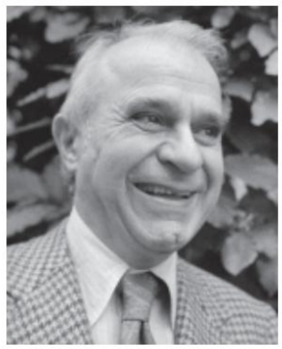
Figura 1.9.1

Modelo Leontief de uma Economia Aberta

Consideremos uma economia aberta simples com um setor aberto e três setores produtores de produtos: manufatura, agricultura e serviços públicos. Suponha que as entradas e saídas sejam medidas em dólares e que as entradas exigidas pelo setores produtivos para produzir um dólar de produção estão de acordo com a Tabela 1.

tabela 1

		Renda necessária por saída em dólar		
		Utilidades Agrícolas de Manufatura		
Fornecedor	**Fabricação** $ 0,50		$ 0,10	$ 0,10
	Agricultura	$ 0,20	$ 0,50	$ 0,30
	Serviços de utilidade pública	$ 0,10	$ 0,30	$ 0,40



Wassily Leontief (1906–1999)

Nota histórica É um tanto irônico que tenha sido Wassily Leontief, nascido na Rússia, quem ganhou o prêmio Nobel em 1973 por ser o pioneiro dos métodos modernos de análise de economias de livre mercado. Leontief foi um estudante precoce que ingressou na Universidade de Leningrado aos 15 anos. D. lá em 1928. Ele veio para os Estados Unidos em 1931, onde ocupou cargos de professor em Harvard e depois na Universidade de Nova York.

[Imagem: © Bettmann/ ©Corbis]

Normalmente, alguém suprimiria a rotulagem e expressaria essa matriz como

$$C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Isso é chamado de ***matriz de consumo*** (ou às vezes ***matriz de tecnologia)*** para a economia. Os vetores coluna

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

em *C,* liste os insumos exigidos pelos setores de manufatura, agricultura e serviços públicos, respectivamente, para produzir $ 1,00 de produção. Estes são chamados de ***vetores de consumo*** dos setores. Por exemplo, c1 nos diz que, para produzir $ 1,00 de produção, o setor manufatureiro precisa de $ 0,50 de produção industrial, $ 0,20 de produção agrícola e $ 0,10 de produção de serviços públicos.

Qual é o significado econômico das somas das linhas da matriz de consumo?

Continuando com o exemplo acima, suponha que o setor aberto queira que a economia forneça bens manufaturados, produtos agrícolas e utilidades com valores em dólares: dólares de bens

d_1 manufaturados dólares de produtos

d_2 agrícolas

d_3 dólares de utilitários

O vetor coluna **d** que tem esses números como componentes sucessivos é chamado de ***vetor de demanda externa.*** Como os setores produtores de produtos consomem parte de sua própria produção, o valor em dólares de sua produção deve cobrir suas próprias necessidades mais a demanda externa. Suponha que os valores em dólares necessários para fazer isso sejam

x_1 dólares de produtos manufaturados

x_2 dólares de produtos agrícolas

x_3 dólares de utilitários

O vetor coluna **x** que tem esses números como componentes sucessivos é chamado de ***vetor de produção*** da economia.
Para a economia com matriz de consumo 1, a parcela do vetor de produção **x** que será consumida pelos três setores produtivos é

$$\underbrace{x_1\begin{bmatrix}0.5\\0.2\\0.1\end{bmatrix}}_{\text{Fractions consumed by manufacturing}} + \underbrace{x_2\begin{bmatrix}0.1\\0.5\\0.3\end{bmatrix}}_{\text{Fractions consumed by agriculture}} + \underbrace{x_3\begin{bmatrix}0.1\\0.3\\0.4\end{bmatrix}}_{\text{Fractions consumed by utilities}} = \begin{bmatrix}0.5 & 0.1 & 0.1\\0.2 & 0.5 & 0.3\\0.1 & 0.3 & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = C\mathbf{x}$$

o vetor $C\mathbf{x}$ é chamado de ***vetor de demanda intermediária*** para a economia. Uma vez atendida a demanda intermediária, o parte da produção que resta para satisfazer a demanda externa é **x** deve $\mathbf{x} - C\mathbf{x}$. Assim, se o vetor de demanda externa for d, então satisfazer a equação

$$\underbrace{\mathbf{x}}_{\text{Amount produced}} - \underbrace{C\mathbf{x}}_{\text{Intermediate demand}} = \underbrace{\mathbf{d}}_{\text{Outside demand}}$$

que achamos conveniente reescrever como

$$(1 - C)\mathbf{x} = \mathbf{d} \tag{2}$$

O Matrix $I - C$ é chamada de ***matriz de Leontief*** e 2 é chamada de ***equação de Leontief.***

EXEMPLO 1 Satisfazendo a Demanda Externa

Considere a economia descrita na Tabela 1. Suponha que o setor aberto tenha uma demanda de US$ 7.900 em produtos manufaturados, US$ 3.950 em produtos agrícolas e US$ 1.975 em serviços públicos. **(a)** A economia pode

atender a essa demanda? **(b)** Em caso

afirmativo, encontre um vetor de produção **x** que o satisfaça exatamente.

Solução A matriz de consumo, o vetor de produção e o vetor de demanda externa são

$$C = \begin{bmatrix}0.5 & 0.1 & 0.1\\0.2 & 0.5 & 0.3\\0.1 & 0.3 & 0.4\end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix}7900\\3950\\1975\end{bmatrix} \tag{3}$$

Para atender a demanda externa, o vetor **x** deve satisfazer a equação 2 de Leontief, então o problema se reduz a resolver o sistema linear

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0.5 & -0.3 \\ -0.1 & -0.3 & 0.6 \end{bmatrix}}_{I-C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7900 \\ 3950 \\ 1975 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \tag{4}$$

(se consistente). Deixamos para você mostrar que a forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada para este sistema é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 27{,}500 \\ 0 & 1 & 0 & 33{,}750 \\ 0 & 0 & 1 & 24{,}750 \end{array}\right]$$

Isso nos diz que 4 é consistente, e a economia pode satisfazer a demanda do setor aberto exatamente produzindo \$ 27.500 em produção industrial, \$ 33.750 em produção agrícola e \$ 24.750 em serviços públicos.

Economias Abertas Produtivas

Na discussão anterior, consideramos uma economia aberta com três setores produtores de produtos; as mesmas ideias se aplicam a uma economia aberta com *n* setores produtores de produtos. Nesse caso, a matriz de consumo, o vetor de produção e o vetor de demanda externa têm a forma

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

onde todas as entradas são não negativas e

c_{ij} = o valor monetário da produção do setor i que é necessário para o setor j produzir uma unidade de produção = o valor monetário

x_i da produção do setor i = o valor monetário da produção do

d_i setor i necessário para atender a demanda do setor aberto

Observação Observe que o vetor coluna j de *C* contém os valores monetários que o setor j requer dos outros setores para produzir uma unidade monetária de produto, e o vetor linha i de *C* contém os valores monetários exigidos do setor i pelos outros setores para cada um deles produzir uma unidade monetária de produção.

Conforme discutido em nosso exemplo acima, um vetor de produção **x** que atenda a demanda **d** do setor externo deve satisfazer o equação de Leontief

$$(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

Se a matriz $I - C$ é invertível, então esta equação tem a única solução

$$\mathbf{x} = (I - C)^{-1}\mathbf{d} \tag{5}$$

para cada vetor de demanda d. No entanto, para **x** ser um vetor de produção válido, ele deve ter entradas não negativas, então o problema de importância em economia é determinar as condições sob as quais a equação de Leontief tem uma solução com entradas não negativas.

É evidente pela forma de 5 que se $I - C$ é invertível, e se $(I - C)^{-1}$ tem entradas não negativas, então para cada vetor de demanda **d,** o **x** correspondente também terá entradas não negativas e, portanto, será um vetor de produção válido para a economia. Economias que são desejáveis porque a $(I - C)^{-1}$ tem entradas não negativas são ditas ***produtivas.*** Tais economias são demanda sempre pode ser atendida por algum nível de produção. O seguinte teorema, cuja prova pode ser encontrada em muitos livros de economia, dá condições sob as quais as economias abertas são produtivas.

TEOREMA 1.9.1

Se *C* for a matriz de consumo para uma economia aberta e se todas as somas das colunas forem menores que, então a matriz é $I - C$ é invertível, as entradas de $(I - C)^{-1}$ não negativa e a economia é produtiva.

Observação A soma da coluna j de *C* representa o valor total em dólares do insumo que o setor j requer para produzir $ 1 de produto, portanto, se a soma da coluna j for menor que 1, o setor j requer menos de $ 1 de insumo para produzir $ 1 de saída; neste caso dizemos que o setor j é ***rentável.*** Assim, o Teorema 1.9.1 afirma que se todos os setores produtores de produtos de uma economia aberta são lucrativos, então a economia é produtiva. Nos exercícios, pediremos que você mostre que uma economia aberta é produtiva se todas as somas das linhas de *C* forem menores que 1 (Exercício 11). Assim, uma economia aberta é produtiva se *todas* as somas das colunas ou todas as somas das linhas de *C* forem menores que 1.

EXEMPLO 2 Uma economia aberta cujos setores são todos lucrativos

As somas das colunas da matriz de consumo *C* em 1 são menores que 1, então $(I - C)^{-1}$ existe e tem não negativo as entradas. Use um utilitário de cálculo para confirmar isso e use esse inverso para resolver a Equação 4 no Exemplo 1.

Solução Deixamos para você mostrar que

$$(I - C)^{-1} \approx \begin{bmatrix} 2.65823 & 1.13924 & 1.01266 \\ 1.89873 & 3.67089 & 2.15190 \\ 1.39241 & 2.02532 & 2.91139 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tem entradas não negativas, e

$$\mathbf{x} = (I - C)^{-1}\mathbf{d} \approx \begin{bmatrix} 2.65823 & 1.13924 & 1.01266 \\ 1.89873 & 3.67089 & 2.15190 \\ 1.39241 & 2.02532 & 2.91139 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7900 \\ 3950 \\ 1975 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 27,500 \\ 33,750 \\ 24,750 \end{bmatrix}$$

que é consistente com a solução do Exemplo 1.

Revisão do conceito

- Setores
- Entradas
- Saídas
- Análise de entrada-saída
- Setor aberto
- Economias: abertas, fechadas

- Matriz de consumo (tecnologia)
- Vetor de consumo
- Vetor de demanda externa
- Vetor de produção
- Vetor de demanda intermediária
- Matriz leontiva
- Equação de Leontief

Habilidades

- Construir uma matriz de consumo para uma economia.
- Compreender as relações entre os vetores de um setor de uma economia: consumo, demanda externa, produção e demanda intermediária.

Conjunto de exercícios 1.9

1. Um mecânico de automóveis *(M)* e uma oficina mecânica *(B)* usam os serviços um do outro. Para cada $ 1,00 de negócios que *M* faz, ele usa $ 0,50 de seus próprios serviços e $ 0,25 dos serviços de B, e para cada $ 1,00 de negócios que *B* faz, ele usa $ 0,10 de seus próprios serviços e $ 0,25 dos serviços de M.

(a) Construa uma matriz de consumo para esta economia. (b)

Quanto *M* e *B* devem produzir cada um para fornecer aos clientes $ 7.000 em trabalho mecânico e $ 14.000 valor do trabalho corporal?

Responder:

(a) $\begin{bmatrix} 0.50 & 0.25 \\ 0.25 & 0.10 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} \$\,25,290 \\ \$\,22,581 \end{bmatrix}$

2. Uma economia simples produz alimentos *(F)* e habitação (H). A produção de $ 1,00 de comida requer $ 0,30 de comida e $ 0. 10 em moradias, e a produção de $ 1,00 em moradias requer $ 0,20 em alimentos e $ 0,60 em moradias. (a) Construa uma matriz de consumo para esta

economia. (b) Que valor em dólares de alimentos e moradia

deve ser produzido para que a economia forneça aos consumidores o valor de $ 130.000? de comida e $ 130.000 em moradia?

3. Considere a economia aberta descrita na tabela a seguir, onde o insumo é em dólares necessário para $ 1,00 de saída.

(a) Encontre a matriz de consumo para a economia. (b)

Suponha que o setor aberto tenha uma demanda de $ 1.930 em habitação, $ 3.860 em alimentos e $ 5.790 em Serviços de utilidade pública. Use a redução de linha para encontrar um vetor de produção que atenda exatamente a essa demanda.

Tabela Ex-3

	Renda necessária por saída em dólar

		Habitação	Comida	Serviços de utilidade pública
Fornecedor	Habitação	$ 0,10	$ 0,60	$ 0,40
	Comida	$ 0,30	$ 0,20	$ 0,30
	Utilitários	$ 0,40	$ 0,10	$ 0,20

Responder:

(a) $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} \$\,31,500 \\ \$\,26,500 \\ \$\,26,300 \end{bmatrix}$

4. Uma empresa produz Web design, software e serviços de rede. Veja a empresa como uma economia aberta descrito pela tabela a seguir, onde a entrada é em dólares necessária para $ 1,00 de saída. (a) Encontre a matriz de consumo da empresa. (b) Suponha que os clientes (o setor aberto) tenham uma demanda de $ 5.400 em Web design, $ 2.700 em software e $ 900 em rede. Use a redução de linha para encontrar um vetor de produção que atenda exatamente a essa demanda.

Tabela Ex-4

		Renda necessária por saída em dólar		
		Redes de Software de Web Design		
Fornecedor	Webdesign	$ 0,40	$ 0,20	$ 0,45
	Programas	$ 0,30	$ 0,35	$ 0,30
	Rede	$ 0,15	$ 0,10	$ 0,20

Nos Exercícios 5–6, use a inversão de matrizes para encontrar o vetor de produção **x** que atende à demanda **d** para a matriz de consumo C.

5. $C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}; \ \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 50 \\ 60 \end{bmatrix}$

Responder:

$\begin{bmatrix} 123.08 \\ 202.56 \end{bmatrix}$

6. $C = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}; \ \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 22 \\ 14 \end{bmatrix}$

7. Considere uma economia aberta com matriz de consumo

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que a economia pode atender uma demanda de $d_1 = 2$ unidades do primeiro setor e $d_2 = 0$ unidades do segundo setor, mas não consegue atender uma demanda de $d_1 = 2$ unidades do primeiro setor e $d_2 = 1$ unidade do segundo setor.

(b) Dê uma explicação matemática e econômica para o resultado da parte (a).

8. Considere uma economia aberta com matriz de consumo

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Se o setor aberto demanda o mesmo valor em dólares de cada setor produtor de produtos, qual desses setores deve produzir o maior valor em dólares para atender à demanda?

9. Considere uma economia aberta com matriz de consumo

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Mostre que a equação de Leontief $\mathbf{x} - C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ tem uma solução única para cada vetor de demanda **d** se $c_{21}c_{12} < 1 - c_{11}$.

10. (a) Considere uma economia aberta com uma matriz de consumo *C* cujas somas de colunas são menores que 1 e seja **x** o vetor de produção que satisfaça uma demanda externa d; isto é, obtido $(I - C)^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{x}$. Seja $\mathbf{d}_j$ vetor de demanda que é aumentando a j-ésima entrada de **d** em 1 e deixando as outras entradas fixas. Prove que o vetor de produção que atende a essa demanda é $\mathbf{x}_j$

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x} + j\text{th column vector of } (I - C)^{-1}$$

(b) Em palavras, qual é o significado econômico do j-ésimo vetor coluna de $(I - C)^{-1}$? *[Dica:* veja $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}$.]

11. Prove: Se *C* é um $n \times n$ matriz cujas entradas são não negativas e cujas somas de linhas são menores que 1, então $I - C$ é invertível e tem entradas não negativas. *[Dica:* $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ para qualquer matriz invertível A.]

Exercícios de Verdadeiro-Falso

Nas partes (a)–(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

(a) Os setores de uma economia que produzem produtos são chamados de setores abertos.

Responder:

Falso

(b) Uma economia fechada é uma economia que não tem setores abertos.

Responder:

Verdadeiro

(c) As linhas de uma matriz de consumo representam os produtos em um setor de uma economia.

Responder:

Falso

(d) Se as somas das colunas da matriz de consumo forem todas menores que 1, então a matriz de Leontif é invertível.

Responder:

Verdadeiro

(e) A equação de Leontif relaciona o vetor de produção de uma economia com o vetor de demanda externa.

Responder:

Verdadeiro

Capítulo 1 Exercícios Suplementares

Nos Exercícios 1–4, a matriz dada representa uma matriz aumentada para um sistema linear. Escreva o conjunto correspondente de equações lineares para o sistema e use a eliminação gaussiana para resolver o sistema linear. Introduza parâmetros livres conforme necessário.

1. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Responder:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 \qquad + x_4 &= 1 \\ 2x_1 \qquad + 3x_3 + 3x_4 &= -1 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{3}{2}s - \frac{3}{2}t - \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{9}{2}s - \frac{1}{2}t - \frac{5}{2},\ x_3 = s,\ x_4 = t$$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & -8 & 2 \\ 3 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & 6 \\ -4 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

Responder:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 6 \\ -4x_1 \qquad + 3x_3 &= -1 \\ x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1 = -\frac{17}{2},\ x_2 = -\frac{26}{3},\ x_3 = -\frac{35}{3}$$

4. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -9 & -3 & 6 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. Use a eliminação de Gauss-Jordan para calcular xÿ e yÿ em termos de *x* e y.

$$x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'$$
$$y = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y'$$

Responder:

$$x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y,\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$$

6. Use a eliminação de Gauss-Jordan para calcular xÿ e yÿ em termos de *x* e y.

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$$
$$y = x' \sin\theta - y' \cos\theta$$

7. Encontre inteiros positivos que satisfaçam

$$\begin{aligned} x + \ y + \ \ z &= \ 9 \\ x + 5y + 10z &= 44 \end{aligned}$$

Responder:

$x = 4, \ y = 2, \ z = 3$

8. Uma caixa contendo moedas de um centavo, cinco e dez centavos tem 13 moedas com um valor total de 83 centavos. quantas moedas de cada tipo estão na caixa?

9. Deixe

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{bmatrix}$$

Seja a matriz aumentada para um sistema linear. Encontre para quais valores de *a* e *b* o sistema tem

(a) uma solução única. (b)

uma solução de um parâmetro. (c) uma

solução de dois parâmetros. (d) nenhuma

solução.

Responder:

(a) $a \neq 0, \ b \neq 2$

(b) $a \neq 0, \ b = 2$

(c) $a = 0, \ b = 2$

(d) $a = 0, \ b \neq 2$

10. Para qual(is) valor(es) de *a* o seguinte sistema tem solução nula? Uma solução? Infinitamente muitos soluções?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_3 &= 2 \\ \left(a^2 - 4\right)x_3 &= a - 2 \end{aligned}$$

11. Encontre uma matriz *K* tal que $AKB = C$ dado que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 6 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Responder:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Como os coeficientes a, b e *c* devem ser escolhidos para que o sistema

$$\begin{aligned} ax + by - 3z &= -3 \\ -2x - by + cz &= -1 \\ ax + 3y - cz &= -3 \end{aligned}$$

tem a solução $x = 1,\ y = -1$, e $z = 2$?

13. Em cada parte, resolva a equação da matriz para X.

(a) $X\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $X\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}X - X\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

Responder:

(a) $X = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $X = \begin{bmatrix} -\frac{113}{37} & -\frac{160}{37} \\ -\frac{20}{37} & -\frac{46}{37} \end{bmatrix}$

14. Seja *A* uma matriz quadrada.

(a) Mostre que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$ se $A^4 = 0$.

(b) Mostre que

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^n$$

se $A^{n+1} = 0$.

15. Encontre os valores de a, b e *c* de modo que o gráfico do polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$ passa pelo pontos (1, 2), (ÿ1, 6) e (2, 3).

Responder:

$a = 1,\ b = -2,\ c = 3$

16. ***(Cálculo necessário)*** Encontre os valores de a, b e *c* de modo que o gráfico do polinômio

$p(x) = ax^2 + bx + c$ passa pelo ponto (ÿ1, 0) e tem uma tangente horizontal em (2, ÿ9).

17. Seja *Jn* o $n \times n$ matriz cujas entradas são 1. Mostre que se $n > 1$, então

$$(I - J_n)^{-1} = I - \frac{1}{n-1} J_n$$

18. Mostre que se uma matriz quadrada *A* satisfaz

$$A^3 + 4A^2 - 2A + 7I = 0$$

então o mesmo acontece. A^T

19. Prove: Se *B* é invertível, então $AB^{-1} = B^{-1}A$ se e apenas se $AB = BA$.

20. Prove: Se *A* é invertível, então $A + B$ e $I + BA^{-1}$ são ambos inversíveis ou ambos não inversíveis.

21. Prove: Se *A* é um $m \times n$ matriz e *B* é o $n \times 1$ matriz cujas entradas são *1/n,* então

$$AB = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \vdots \\ \bar{r}_m \end{bmatrix}$$

onde é $\bar{r}_i$ média das entradas na i-ésima linha de A.

22. ***(Cálculo necessário)*** Se as entradas da matriz

$$C = \begin{bmatrix} c_{11}(x) & c_{12}(x) & \cdots & c_{1n}(x) \\ c_{21}(x) & c_{22}(x) & \cdots & c_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1}(x) & c_{m2}(x) & \cdots & c_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

são funções diferenciáveis de x, então definimos

$$\frac{dC}{dx} = \begin{bmatrix} c'_{11}(x) & c'_{12}(x) & \cdots & c'_{1n}(x) \\ c'_{21}(x) & c'_{22}(x) & \cdots & c'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c'_{m1}(x) & c'_{m2}(x) & \cdots & c'_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

Mostre que se as entradas em *A* e *B* são funções diferenciáveis de *x* e os tamanhos das matrizes são tais que as operações indicadas podem ser executadas, então

(a) $\frac{d}{dx}(kA) = k\frac{dA}{dx}$

(b) $\frac{d}{dx}(A + B) = \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx}$

(c) $\frac{d}{dx}(AB) = \frac{dA}{dx}B + A\frac{dB}{dx}$

23. ***(Cálculo necessário)*** Use a parte (c) do Exercício 22 para mostrar que

$$\frac{dA^{-1}}{dx} = -A^{-1}\frac{dA}{dx}A^{-1}$$

Indique todas as suposições que você faz para obter esta fórmula.

24. Supondo que existam as inversas indicadas, prove as seguintes igualdades.

(a) $\left(C^{-1}+D^{-1}\right)^{-1}=C(C+D)^{-1}D$

(b) $(I+CD)^{-1}C=C(I+DC)^{-1}$

(c) $\left(C+DD^{T}\right)^{-1}D=C^{-1}D\left(I+D^{T}C^{-1}D\right)^{-1}$

CAPÍTULO

2 Determinantes

CONTEÚDO DO CAPÍTULO

INTRODUÇÃO

Neste capítulo estudaremos "determinantes" ou, mais precisamente, "funções determinantes". Ao contrário das funções de valores reais, como as que, $f(x) = x^2$, atribuem um número real a uma variável real x, as funções determinantes atribuem um $f(A)$ a uma variável de matriz A. número real. aplicações mundiais. Embora possam ser úteis para resolver sistemas lineares muito pequenos (digamos, duas ou três incógnitas), nosso principal interesse neles decorre do fato de que eles ligam vários conceitos em álgebra linear e fornecem uma fórmula útil para a inversa de uma matriz.

2.1 Determinantes pela Expansão do Cofator

Nesta seção, definiremos a noção de “determinante”. Isso nos permitirá fornecer uma fórmula específica para a inversa de uma matriz invertível, enquanto até agora dispusemos apenas de um procedimento computacional para encontrá-la. Isso, por sua vez, nos fornecerá uma fórmula para soluções de certos tipos de sistemas lineares.

Lembre-se do Teorema 1.4.5 que o 2×2 matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

AVISO

É importante ter em mente que enquanto $\det(A)$ é um *número,* *A* é uma *matriz.*

é invertível se e somente se $ad - bc \neq 0$ e que a expressão $ad - bc$ é chamado de ***determinante*** da matriz A. Lembre-se também esse determinante é denotado por escrever

$$\det(A) = ad - bc \quad \text{or} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{1}$$

e que o inverso de *A* pode ser expresso em termos do determinante como

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{2}$$

Menores e Cofatores

Um de nossos principais objetivos neste capítulo é obter um análogo da Fórmula 2 que seja aplicável a matrizes quadradas de *todas as ordens.* Para esse propósito, acharemos conveniente usar entradas subscritas ao escrever matrizes ou determinantes. Assim, se denotamos um 2×2 matriz como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

então as duas equações em 1 assumem a forma

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{3}$$

Definimos o determinante de um 1×1 matriz $A = [a_{11}]$ como $\det[A] = \det[a_{11}] = a_{11}$

A seguinte definição será a chave para nosso objetivo de estender a definição de um determinante para matrizes de ordem superior.

DEFINIÇÃO 1

Se *A* é uma matriz quadrada, então o ***menor de entrada*** a_{ij} é denotado pela M_{ij} e é definido como o determinante da submatriz que permanece depois que a i-ésima linha e a j-ésima coluna são excluídas de A. O número $(-1)^{i+j} M_{ij}$ é denotado por C_{ij} e é chamado de ***cofator de entrada*** a_{ij}.

EXEMPLO 1 Encontrando Menores e Cofatores

Deixar

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

AVISO

Seguimos a convenção padrão de usando letras maiúsculas para denotar menores e cofatores, mesmo que sejam números, não matrizes.

O menor de entrada a_{11} é

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

O cofator de é a_{11}

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 16$$

Da mesma forma, o menor de entrada a_{32} é

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$$

O cofator de é a_{32}

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -26$$

Nota Histórica O termo *determinante* foi introduzido pela primeira vez pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss em 1801 (ver p. 15), que os usou para "determinar" propriedades de certos tipos de funções. Curiosamente, o termo *matriz* é derivado de uma palavra latina para "útero" porque era visto como um recipiente de determinantes.

Nota Histórica O termo *menor* aparentemente se deve ao matemático inglês James Sylvester (ver p. 34), que escreveu o seguinte em um artigo publicado em 1850: "Agora imagine qualquer linha e qualquer coluna riscada, obtemos... quadrado, um termo a menos em largura e profundidade do que o quadrado original; e variando em cada seleção possível da linha e coluna excluídas, obtemos, supondo que o quadrado original consista em *n* linhas e *n* colunas, tais quadrados menores, n^2 cada um dos quais representará o que chamo de "Primeiro Determinante Menor" relativo a o determinante principal ou completo".

Observação Observe que um menor M_{ij} e seu cofator correspondente C_{ij} são iguais ou negativos um do outro e que o sinal relacionado $(-1)^{i+j}$ é também $+1$ ou -1 de acordo com o padrão na matriz “checkerboard”

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Por exemplo,

$$C_{11} = M_{11}, \quad C_{21} = -M_{21}, \quad C_{22} = M_{22}$$

e assim por diante. Assim, nunca é realmente necessário calcular e $(-1)^{i+j}$ para calcular - C_{ij} você pode simplesmente calcular o menor M_{ij} depois ajustar o sinal de acordo com o padrão quadriculado. Tente isso no Exemplo 1.

EXEMPLO 2 Expansões de cofatores de um 2×2 Matriz

O padrão quadriculado para um 2×2 matriz $A = [a_{ij}]$ é

$$\begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix}$$

para que

$$\begin{aligned} C_{11} &= M_{11} = a_{22} & \qquad C_{12} &= -M_{12} = -a_{21} \\ C_{21} &= -M_{21} = -a_{12} & \qquad C_{22} &= M_{22} = a_{11} \end{aligned}$$

Deixamos para você usar a Fórmula 3 para verificar que $\det(A)$ pode ser expresso em termos de cofatores da seguinte forma: quatro maneiras:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} \\ &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} \\ &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} \end{aligned} \tag{4}$$

Cada uma das últimas quatro equações é chamada de *expansão* de $\det[A]$. Em cada expansão de cofator, as entradas e cofatores de cofatores, todos vêm da mesma linha ou da mesma coluna de A. Por exemplo, na primeira equação, todas as entradas e cofatores vêm da primeira linha de A, na segunda, todos eles vêm da segunda linha de A, na terceira vêm todos da primeira coluna de A e na quarta vêm todos da segunda coluna de A.

Definição de um Determinante Geral

A Fórmula 4 é um caso especial do seguinte resultado geral, que enunciaremos sem demonstração.

TEOREMA 2.1.1

Se *A* é $n \times n$ matriz, independentemente de qual linha ou coluna de *A* é escolhida, o número obtido pela multiplicação do uma entrada nessa linha ou coluna pelos cofatores correspondentes e a adição dos produtos resultantes é sempre a mesma.

Este resultado nos permite fazer a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 2

Se *A* é um $n \times n$ matriz, então o número obtido multiplicando as entradas em qualquer linha ou coluna de *A* pelo os cofatores correspondentes e a adição dos produtos resultantes é chamado de ***determinante de*** A, e as próprias somas são chamadas de ***expansões de cofatores de*** A. Ou seja,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj} \quad (5)$$
$$[\text{cofactor expansion along the } j\text{th column}]$$

e

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in} \quad (6)$$
$$[\text{cofactor expansion along the } i\text{th row}]$$

EXEMPLO 3 Expansão do cofator ao longo da primeira linha

Encontre o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

pela expansão do cofator ao longo da primeira linha.

Solução

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 3(-4) - (1)(-11) + 0 = -1$$

EXEMPLO 4 Expansão do cofator ao longo da primeira coluna

Seja *A* a matriz do Exemplo 3 e calcule $\det(A)$ pela expansão do cofator ao longo da primeira coluna de A.

Solução

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 3(-4) - (-2)(-2) + 5(3) = -1$$

Observe que no Exemplo 4 tivemos que calcular três cofatores, enquanto no Exemplo 3 apenas dois foram necessários porque o terceiro foi multiplicado por zero. Como regra, a melhor estratégia para a expansão do cofator é expandir ao longo de uma linha ou coluna com mais zeros.

Isso está de acordo com o resultado obtido no Exemplo 3.

Charles Lutwidge Dodgson (Lewis Carroll) (1832–1898)

Nota histórica A expansão de cofatores não é o único método para expressar o determinante de uma matriz em termos de determinantes de ordem inferior. Por exemplo, embora não seja muito conhecido, o matemático inglês Charles Dodgson, autor de *Alice no País das Maravilhas* e *Através do Espelho* sob o pseudônimo de Lewis Carroll, inventou tal método, chamado *"condensação".* Esse método ressuscitou recentemente da obscuridade por causa de sua adequação ao processamento paralelo em computadores.
[Imagem: Time & Life Pictures/ Getty Images, Inc.]

EXEMPLO 5 Escolha Inteligente de Linha ou Coluna

Se *A* é o 4×4 matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então para encontrar $\det(A)$ será mais fácil usar a expansão do cofator ao longo da segunda coluna, pois ela tem mais zeros:

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Para o 3×3 determinante, será mais fácil usar a expansão do cofator ao longo de sua segunda coluna, pois tem a maior zeros:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2(1+2) \\ &= -6 \end{aligned}$$

EXEMPLO 6 Determinante de uma Matriz Triangular Superior

O cálculo a seguir mostra que o determinante de entradas 4×4 matriz triangular superior é o produto de sua diagonais. Cada parte do cálculo usa uma expansão de cofator ao longo da primeira linha.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}|a_{44}| = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

O método ilustrado no Exemplo 6 pode ser facilmente adaptado para provar o seguinte resultado geral.

TEOREMA 2.1.2

Se *A* é um $n \times n$ matriz triangular (triangular superior, triangular inferior ou diagonal), $\det(A)$ é o produto do então entradas na diagonal principal da matriz; aquilo é, $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdot \cdot \cdot a_{nn}$.

Uma técnica útil para avaliar determinantes 2 × 2 e 3 × 3

Determinantes de 2×2 e 3×3 as matrizes podem ser avaliadas com muita eficiência usando o padrão sugerido na Figura 2.1.1.

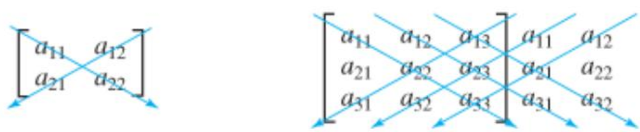


Figura 2.1.1

No 2×2 Nesse caso, o determinante pode ser calculado formando o produto das entradas na seta à direita e subtraindo o produto das entradas na seta à esquerda. No 3×3 caso, primeiro recopiamos a primeira e a segunda colunas como mostrado na figura, após o qual podemos calcular o determinante somando os produtos das entradas nas setas à direita e subtraindo os produtos nas setas à esquerda. Esses procedimentos executam os cálculos

AVISO

A técnica da seta só funciona para determinantes de 2×2 e 3×3 matrizes.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

que concorda com as expansões do cofator ao longo da primeira linha.

EXEMPLO 7 Uma Técnica para Avaliação de Determinantes 2 × 2 e 3 × 3

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 6 & -4 & 5 \\ 7 & -8 & 9 & 7 & -8 \end{array}\right.$$

$$= [45 + 84 + 96] - [105 - 48 - 72] = 240$$

Revisão do conceito

- Determinante
- Menor
- Cofator
- Expansão do cofator

Habilidades

- Encontre os menores e cofatores de uma matriz quadrada. •
Use a expansão do cofator para calcular o determinante de uma matriz quadrada. • Use a técnica de seta para avaliar o determinante de um 2×2 ou 3×3 matriz.
- Use o determinante de um 2×2 matriz invertível para encontrar a inversa dessa matriz.
- Encontre o determinante de uma matriz triangular superior, triangular inferior ou diagonal por inspeção.

Conjunto de exercícios 2.1

Nos Exercícios 1–2, encontre todos os menores e cofatores da matriz A.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Responder:

$M_{11} = 29,\ C_{11} = 29$
$M_{12} = 21,\ C_{12} = -21$
$M_{13} = 27,\ C_{13} = 27$
$M_{21} = -11,\ C_{21} = 11$
$M_{22} = 13,\ C_{22} = 13$
$M_{23} = -5,\ C_{23} = 5$
$M_{31} = -19,\ C_{31} = -19$
$M_{32} = -19,\ C_{32} = 19$
$M_{33} = 19,\ C_{33} = 19$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

3. Deixe

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Encontrar

(a) M_{13} and C_{13}.

(b) M_{23} and C_{23}.

(c) M_{22} and C_{22}.

(d) M_{21} and C_{21}.

Responder:

(a) $M_{13} = 0,\ C_{13} = 0$

(b) $M_{23} = -96,\ C_{23} = 96$

(c) $M_{22} = -48,\ C_{22} = -48$

(d) $M_{21} = 72,\ C_{21} = -72$

4. Deixe

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Encontrar

(a) M_{32} and C_{32}.

(b) M_{44} and C_{44}.

(c) M_{41} and C_{41}.

(d) M_{24} and C_{24}.

Nos Exercícios 5–8, calcule o determinante da matriz dada. Se a matriz for invertível, use a Equação 2 para encontrar sua inversa.

5. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

Responder:

$$22; \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{5}{22} \\ \frac{1}{11} & \frac{3}{22} \end{bmatrix}$$

6. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}$

Responder:

$$59; \begin{bmatrix} -\frac{2}{59} & -\frac{7}{59} \\ \frac{7}{59} & -\frac{5}{59} \end{bmatrix}$$

8. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 4 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 9–14, use a técnica da seta para calcular o determinante da matriz dada.

9. $\begin{bmatrix} a-3 & 5 \\ -3 & a-2 \end{bmatrix}$

Responder:

$$a^2 - 5a + 21$$

10. $\begin{bmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

Responder:

$$-65$$

12. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}$

Responder:

$$-123$$

14. $\begin{bmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 15–18, encontre todos os valores de ÿ para os quais $\det(A) = 0$.

15. $A=\begin{bmatrix}\lambda-2 & 1\\ -5 & \lambda+4\end{bmatrix}$

Responder:

$\lambda=1 \text{ or } -3$

16. $A=\begin{bmatrix}\lambda-4 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 2\\ 0 & 3 & \lambda-1\end{bmatrix}$

17. $A=\begin{bmatrix}\lambda-1 & 0\\ 2 & \lambda+1\end{bmatrix}$

Responder:

$\lambda=1 \text{ or } -1$

18. $A=\begin{bmatrix}\lambda-4 & 4 & 0\\ -1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda-5\end{bmatrix}$

19. Avalie o determinante da matriz no Exercício 13 por uma expansão de cofator ao longo

(a) a primeira linha.

(b) a primeira coluna. (c)

a segunda linha. (d) a

segunda coluna. (e) a terceira

linha. (f) a terceira

coluna.

Responder:

$(\text{all parts}) - 123$

20. Avalie o determinante da matriz no Exercício 12 por uma expansão do cofator ao longo

(a) a primeira linha.

(b) a primeira coluna.

(c) a segunda linha. (d)

a segunda coluna. (e) a

terceira linha. (f) a

terceira coluna.

Nos Exercícios 21–26, avalie $\det(A)$ por uma expansão de cofator ao longo de uma linha ou coluna de sua escolha.

21. $A=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 7\\ 2 & 5 & 1\\ -1 & 0 & 5\end{bmatrix}$

Responder:

-40

22. $A=\begin{bmatrix}3 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -4\\ 1 & -3 & 5\end{bmatrix}$

23. $$A=\begin{bmatrix}1 & k & k^2\\ 1 & k & k^2\\ 1 & k & k^2\end{bmatrix}$$

Responder:

0

24. $$A=\begin{bmatrix}k+1 & k-1 & 7\\ 2 & k-3 & 4\\ 5 & k+1 & k\end{bmatrix}$$

25. $$A=\begin{bmatrix}3 & 3 & 0 & 5\\ 2 & 2 & 0 & -2\\ 4 & 1 & -3 & 0\\ 2 & 10 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

Responder:

-240

26. $$A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3\\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

Nos Exercícios 27–32, calcule o determinante da matriz dada por inspeção.

27. $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Responder:

-1

28. $$\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

29. $$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 8\end{bmatrix}$$

Responder:

0

30. $$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

31. $$\begin{bmatrix}1 & 2 & 7 & -3\\ 0 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

Responder:

6

32. $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 40 & 10 & -1 & 0 \\ 100 & 200 & -23 & 3 \end{bmatrix}$

33. Mostre que o valor do seguinte determinante é independente de ÿ.

$$\begin{vmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta)-\cos(\theta) & \sin(\theta)+\cos(\theta) & 1 \end{vmatrix}$$

Responder:

O determinante é $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

34. Mostre que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

comutar se e somente se

$$\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$$

35. Por inspeção, qual é a relação entre os seguintes determinantes?

$$d_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & 1 & f \\ g & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{and} \quad d_2 = \begin{vmatrix} a+\lambda & b & c \\ d & 1 & f \\ g & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Responder:

$d_2 = d_1 + \lambda$

36. Mostre que

$$\det(A) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \operatorname{tr}(A) & 1 \\ \operatorname{tr}(A^2) & \operatorname{tr}(A) \end{vmatrix}$$

para cada 2×2 matriz A.

37. O que você pode dizer sobre um determinante de enésima ordem cujas entradas são 1? Explique seu raciocínio. matriz

38. Qual é o número máximo de zeros que um 3×3 pode ter sem ter um determinante nulo? explique seu raciocínio.

39. Qual é o número máximo de zeros que um 4×4 matriz pode ter sem ter um determinante nulo? explique seu raciocínio.

40. Prove que (x_1, y_1), (x_2, y_2), e (x_3, y_3) são pontos colineares se e somente se

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

41. Prove que a equação da reta que passa pelos pontos distintos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) pode ser escrito como

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

42. Prove que se *A* é triangular superior e é a matriz que B_{ij} resulta quando a i-ésima linha e a j-ésima coluna de *A* são excluídas, então B_{ij} é triangular superior se $i < j$.

Exercícios de Verdadeiro-Falso

Nas partes (a)–(i), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

(a) O determinante do 2×2 matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é $ad + bc$.

Responder:

Falso

(b) Duas matrizes quadradas *A* e *B* podem ter o mesmo determinante somente se forem do mesmo tamanho.

Responder:

Falso

(c) O menor M_{ij} é o mesmo que o cofator C_{ij} se e apenas se $i + j$ é par.

Responder:

Verdadeiro

(d) Se *A* é um 3×3 matriz simétrica, então $C_{ij} = C_{ji}$ para todo *i* e j.

Responder:

Verdadeiro

(e) O valor de uma expansão de cofator de uma matriz *A* é independente da linha ou coluna escolhida para a expansão.

Responder:

Verdadeiro

(f) O determinante de uma matriz triangular inferior é a soma das entradas ao longo de sua diagonal principal.

Responder:

Falso

(g) Para toda matriz quadrada *A* e todo escalar c, temos $\det(cA) = c\,\det(A)$.

Responder:

Falso

(h) Para todas as matrizes quadradas *A* e B, temos $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

Responder:

Falso

(e) Para cada 2×2 matriz A, temos $\det(A^2) = (\det(A))^2$.

Responder:

Verdadeiro

2.2 Avaliando Determinantes por Redução de Linha

Nesta seção, mostraremos como avaliar um determinante reduzindo a matriz associada à forma escalonada por linhas. Em geral, esse método requer menos computação do que a expansão de cofator e, portanto, é o método de escolha para grandes matrizes.

Um Teorema Básico

Começamos com um teorema fundamental que nos levará a um procedimento eficiente para calcular o determinante de uma matriz quadrada de qualquer tamanho.

TEOREMA 2.2.1

Seja *A* uma matriz quadrada. Se *A* tem uma linha de zeros ou uma coluna de zeros, então $\det(A) = 0$.

Prova Como o determinante de *A* pode ser encontrado por uma expansão de cofator ao longo de qualquer linha ou coluna, podemos usar a linha ou coluna de zeros. Assim, se $C_1, C_2, \ldots, C_n$ denote os cofatores de *A* ao longo dessa linha ou coluna, então segue de deixarmos a Fórmula 5 ou 6 na Seção 2.1 que

$$\det(A) = 0 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 + \ldots + 0 \cdot C_n = 0$$

O seguinte teorema útil relaciona o determinante de uma matriz e o determinante de sua transposta.

TEOREMA 2.2.2

Seja *A* uma matriz quadrada. Então $\det(A) = \det(A^T)$.

Como a transposição de uma matriz transforma suas colunas em linhas e suas linhas em colunas, quase todo teorema sobre as linhas de um determinante tem uma versão complementar sobre colunas e vice-versa.

Prova Como a transposição de uma matriz transforma suas colunas em linhas e suas linhas em colunas, a expansão do cofator de *A* ao longo de qualquer linha é a mesma que a expansão do cofator de *AT* ao longo da coluna correspondente. Assim, ambos têm o mesmo determinante.

Operações elementares de linha

O próximo teorema mostra como uma operação elementar de linha em uma matriz quadrada afeta o valor de seu determinante. Em lugar de uma prova formal, fornecemos uma tabela para ilustrar as idéias no 3×3 caso (ver Tabela 1).

TEOREMA 2.2.3

Seja *A* um $n \times n$ matriz.

(a) Se *B* é a matriz que resulta quando uma única linha ou coluna de *A* é multiplicada por um escalar k, então $\det(B) = k\det(A)$.

(b) Se *B* é a matriz que resulta quando duas linhas ou duas colunas de *A* são trocadas, então $\det(B) = -\det(A)$.

(c) Se *B* é a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha de *A* é adicionado a outra linha ou quando um múltiplo de uma coluna é adicionada a outra coluna, então $\det(B) = \det(A)$.

O primeiro painel da Tabela 1 mostra que você pode trazer um fator comum de qualquer linha (coluna) de um determinante através do sinal de determinante. Esta é uma maneira ligeiramente diferente de pensar sobre a parte *(a)* do Teorema 2.2.3.

tabela 1

Relationship	Operation
$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = k\det(A)$	The first row of A is multiplied by k.
$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = -\det(A)$	The first and second rows of A are interchanged.
$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = \det(A)$	A multiple of the second row of A is added to the first row.

Verificaremos a primeira equação da Tabela 1 e deixaremos as outras duas para você. Para começar, observe que os determinantes nos dois lados da equação diferem apenas na primeira linha, portanto, esses determinantes têm os mesmos cofatores, , ao longo dessa linha C_{11}, C_{12}, C_{13} (uma vez que esses cofatores dependem apenas das entradas nas duas segundas linhas) . Assim, expandindo o lado esquerdo por cofatores ao longo da primeira linha produz

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}C_{11} + ka_{12}C_{12} + ka_{33}C_{13}$$

$$= k(a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{33}C_{13})$$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

matrizes elementares

Será útil considerar o caso especial do Teorema 2.2.3 no qual a matriz identidade é $A = I_n$ E é a $n \times n$ (ao invés de B) denota a matriz elementar que resulta quando a operação de linha é executada em . I_n Neste caso especial, o Teorema 2.2.3 implica o seguinte resultado.

TEOREMA 2.2.4

Seja *E* um $n \times n$ matriz elementar. *(a)*

Se *E* resulta da multiplicação de uma linha de por I_n um número diferente de zero k, então $\det(E) = k$.

(b) Se *E* resulta do intercâmbio de duas linhas de I_n, então $\det(E) = -1$.

(c) Se *E* resulta da adição de um múltiplo de uma linha de I_n a outra, então $\det(E) = 1$.

EXEMPLO 1 Determinantes de Matrizes Elementares

Os seguintes determinantes de matrizes elementares, que são avaliados por inspeção, ilustram o Teorema 2.2.4.

Observe que o determinante de uma matriz elementar não pode ser zero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

The second row of I_4 was multiplied by 3. **The first and last rows of I_4 were interchanged.** **7 times the last row of I_4 was added to the first row.**

Matrizes com linhas ou colunas proporcionais

Se uma matriz quadrada *A* tem duas linhas proporcionais, então uma linha de zeros pode ser introduzida adicionando um múltiplo adequado de um das linhas para a outra. Da mesma forma para colunas. Mas adicionar um múltiplo de uma linha ou coluna a outra não altera o determinante, portanto, pelo Teorema 2.2.1, devemos ter $\det(A) = 0$. Isso prova o seguinte teorema.

TEOREMA 2.2.5

Se *A* é uma matriz quadrada com duas linhas proporcionais ou duas colunas proporcionais, então $\det(A) = 0$.

EXEMPLO 2 Apresentando Linhas Zero

O cálculo a seguir mostra como introduzir uma linha de zeros quando há duas linhas proporcionais.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0 \quad \leftarrow$$

The second row is 2 times the first, so we added -2 times the first row to the second to introduce a row of zeros .

Cada uma das seguintes matrizes tem duas linhas ou colunas proporcionais; assim, cada um tem um determinante de zero.

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{bmatrix}$$

Avaliando Determinantes por Redução de Linha

Daremos agora um método para avaliar determinantes que envolve substancialmente menos computação do que a expansão do cofator. A ideia do método é reduzir a matriz dada à forma triangular superior por operações elementares de linhas, depois calcular o determinante da matriz triangular superior (um cálculo fácil) e, então, relacionar esse determinante com o da matriz original. Aqui está um exemplo.

EXEMPLO 3 Usando Redução de Linha para Avaliar um Determinante

Avalie $\det(A)$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução Vamos reduzir *A* à forma escalonada por linhas (que é triangular superior) e então aplicar o Teorema 2.1.2.

Mesmo com os computadores mais rápidos de hoje, levaria milhões de anos para calcular um 25×25 determinante pela expansão do cofator, então métodos baseados em redução de linha são freqüentemente usados para grandes determinantes. Para determinantes de tamanho pequeno (como os deste texto), a expansão do cofator costuma ser uma escolha razoável.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad \leftarrow \text{The first and second rows of } A \text{ where interchanged .}$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad \leftarrow \text{A common factor of 3 from the first row was taken through the determinant sign .}$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \quad \leftarrow -2 \text{ times the first row was added to the third row .}$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} \quad \leftarrow -10 \text{ times the second row was added to the third row .}$$

$$= (-3)(-55)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \leftarrow \text{A common factor of } -55 \text{ from the last row was taken through the determinant sign .}$$

$$= (-3)(-55)(1) = 165$$

EXEMPLO 4 Usando operações de coluna para avaliar um determinante ◀

Calcule o determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Solução Este determinante pode ser calculado como acima usando operações elementares de linhas para reduzir A à forma escalonada de linhas, mas podemos colocar A na forma triangular inferior em uma etapa adicionando -3 vezes a primeira coluna à quarta para obter

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{bmatrix} = (1)(7)(3)(-26) = -546$$

O exemplo 4 indica que é sempre bom ficar de olho nas operações de coluna que podem encurtar cálculos.

Às vezes, a expansão do cofator e as operações de linha ou coluna podem ser usadas em combinação para fornecer um método eficaz para avaliar determinantes. O exemplo a seguir ilustra essa ideia.

EXEMPLO 5 Operações de Linha e Expansão de Cofator

Avalie $\det(A)$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução Adicionando múltiplos adequados da segunda linha às linhas restantes, obtemos

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} && \leftarrow \textbf{Cofactor expansion along the first column .} \\
&= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} && \leftarrow \textbf{We added the first row to the third row .} \\
&= -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} && \leftarrow \textbf{Cofactor expansion along the first column .} \\
&= -18
\end{aligned}$$

Habilidades

- Conhecer o efeito de operações elementares de linha no valor de um determinante.
- Conhecer os determinantes dos três tipos de matrizes elementares.
- Saber introduzir zeros nas linhas ou colunas de uma matriz para facilitar a avaliação do seu determinante.
- Use a redução de linhas para calcular o determinante de uma matriz.
- Use operações de coluna para calcular o determinante de uma matriz.
- Combine o uso de redução de linha e expansão de cofator para avaliar o determinante de uma matriz.

Conjunto de exercícios 2.2

Nos Exercícios 1–4, verifique que $\det(A) = \det(A^T)$.

1. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 5–9, encontre o determinante da matriz elementar dada por inspeção.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Responder:

-5

6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Responder:

-1

8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Responder:

1

Nos Exercícios 10–17, calcule o determinante da matriz dada reduzindo a matriz à forma escalonada por linhas.

10. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Responder:

5

12. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Responder:

33

14. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Responder:

6

16. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Responder:

-2

18. Repita os Exercícios 10–13 usando uma combinação de redução de linha e expansão de cofator.

19. Repita os Exercícios 14–17 usando uma combinação de operações de linha e expansão de cofator.

Responder:

Exercício 14: 39; Exercício 15: 6; Exercício 16: $-\frac{1}{6}$; Exercício 17: -2

Nos Exercícios 20–27, calcule o determinante, dado que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$$

20. $\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$

Responder:

-6

22. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$

Responder:

72

24. $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ -d & -e & -f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Responder:

-6

26. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g+3a & h+3b & i+3c \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

Responder:

18

28. Mostre que

(a)
$$\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}$$

(b)
$$\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

29.

Use redução de linha para mostrar que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

Nos Exercícios 30–33, confirme as identidades sem avaliar os determinantes diretamente.

30. $\begin{vmatrix} a_1+b_1t & a_2+b_2t & a_3+b_3t \\ a_1t+b_1 & a_2t+b_2 & a_3t+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (1-t^2)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1+ta_1 & c_1+rb_1+sa_1 \\ a_2 & b_2+ta_2 & c_2+rb_2+sa_2 \\ a_3 & b_3+ta_3 & c_3+rb_3+sa_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

34. Encontre o determinante da seguinte matriz.

$$\begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}$$

Nos Exercícios 35–36, mostre que $\det(A) = 0$ sem avaliar diretamente o determinante.

35.
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 10 & 6 & 5 \\ 4 & -6 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

36.
$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Exercícios de Verdadeiro-Falso

Nas partes (a)–(f), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

(a) Se *A* é 4×4 matriz e *B* é obtido de *A* trocando as duas primeiras linhas e depois trocando as duas últimas uma linha, então $\det(B) = \det(A)$.

Responder:

Verdadeiro

(b) Se *A* é um 3×3 matriz e *B* é obtido de *A* multiplicando a primeira coluna por 4 e multiplicando a terceira coluna até $\frac{3}{4}$ então $\det(B) = 3\ \det(A)$.

Responder:

Verdadeiro

(c) Se *A* é um 3×3 matriz e *B* é obtido de *A* adicionando 5 vezes a primeira linha a cada uma das segunda e terceira linhas, então $\det(B) = 25\ \det(A)$.

Responder:

Falso

(d) Se *A* é um $n \times n$ matriz e *B* é obtido de *A* multiplicando cada linha de *A* por seu número de linha, então

$$\det(B) = \frac{n(n+1)}{2}\ \det(A)$$

Responder:

Falso

(e) Se *A* é uma matriz quadrada com duas colunas idênticas, então $\det(A) = 0$.

Responder:

Verdadeiro

(f) Se a soma dos vetores segunda e quarta linha de um 6×6 matriz *A* é igual ao último vetor linha, então $\det(A) = 0$.

Responder:

Verdadeiro

2.3 Propriedades dos Determinantes; Regra de Cramer

Nesta seção, desenvolveremos algumas propriedades fundamentais das matrizes e usaremos esses resultados para derivar uma fórmula para a inversa de uma matriz invertível e fórmulas para as soluções de certos tipos de sistemas lineares.

Propriedades básicas dos determinantes

Suponha que *A* e *B* $n \times n$ matrizes *ek* é qualquer escalar. Começamos considerando possíveis relações estão entre $\det(A)$, $\det(B)$,

$$\det(kA), \quad \det(A+B), \quad \text{and} \quad \det(AB)$$

Como um fator comum de qualquer linha de uma matriz pode ser movido pelo sinal do determinante e como cada uma das *n* linhas em kA tem um fator comum de k, segue que

$$\det(kA) = k^n \det(A) \tag{1}$$

Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Infelizmente, não existe nenhuma relação simples entre $\det(A)$, $\det(B)$, e $\det(A+B)$. Em particular, enfatizamos. que $\det(A+B)$ normalmente *não* será igual a $\det(A) + \det(B)$ O exemplo a seguir ilustra esse fato.

EXEMPLO 1 it(A + B) ÿ it(A) + it(B)

Considerar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A+B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Nós temos $\det(A) = 1$, $\det(B) = 8$, e $\det(A+B) = 23$; por isso

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$$

Apesar do exemplo anterior, existe uma relação útil referente a somas de determinantes que é aplicável quando as matrizes envolvidas são as mesmas exceto por *uma* linha (coluna). Por exemplo, considere as duas matrizes a seguir que diferem apenas na segunda linha:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Calculando os determinantes de *A* e *B* obtemos

$$\begin{aligned}\det(A)+\det(B) &= (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})+(a_{11}b_{22}-a_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}(a_{22}+b_{22})-a_{12}(a_{21}+b_{21}) \\ &= \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Por isso

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{bmatrix}$$

Este é um caso especial do seguinte resultado geral.

TEOREMA 2.3.1

Sejam A, B e *C* matrizes $n \times n$ que diferem apenas em uma única linha, digamos a r-ésima, e assuma que a r-ésima linha de *C* pode ser obtida adicionando entradas correspondentes nas r-ésimas linhas de *A* e B. Então

$$\det(C)=\det(A)+\det(B)$$

O mesmo resultado vale para colunas.

EXEMPLO 2 Somas de Determinantes

Deixamos para você confirmar a seguinte igualdade avaliando os determinantes.

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1)\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Determinante de um Produto de Matriz

Considerando a complexidade das fórmulas para determinantes e multiplicação de matrizes, parece improvável que exista uma relação simples entre eles. É isso que torna a simplicidade do nosso próximo resultado tão surpreendente. Mostraremos que se *A* e *B* são matrizes quadradas de mesmo tamanho, então

$$\det(AB)=\det(A)\ \det(B) \tag{2}$$

A prova deste teorema é bastante complicada, então teremos que desenvolver alguns resultados preliminares primeiro. Começamos com o caso especial de 2 em que *A* é uma matriz elementar. Como esse caso especial é apenas um prelúdio para 2, nós o chamamos de lema.

LEMA 2.3.2

Se *B* é um $n \times n$ matriz e *E* é uma $n \times n$ matriz elementar, então

$$\det(EB) = \det(E)\ \det(B)$$

Prova Vamos considerar três casos, cada um de acordo com a operação de linha que produz a matriz E.

Caso 1 Se *E* resulta da multiplicação de uma linha de I_n por k, então pelo Teorema 1.5.1, EB resulta de *B* multiplicando a linha correspondente por k; então do Teorema 2.2.3(a) temos

$$\det(EB) = k\ \det(B)$$

Mas do Teorema 2.2.4(a) temos $\det(E) = k$, então

$$\det(EB) = \det(E)\ \det(B)$$

Caso 2 e 3 As provas dos casos em que *E* resulta da troca de duas linhas ou da adição de um múltiplo de uma linha à outra de I_n seguem o mesmo padrão do Caso 1 e são deixadas como exercícios.

Observação Segue-se por repetidas aplicações do Lema 2.3.2 que se *B* é uma $n \times n$ matriz e $E_1, E_2, \ldots, E_r$ são $n \times n$ matriz elementar, então

$$\det(E_1E_2 \ldots E_rB) = \det(E_1)\ \det(E_2) \ldots \det(E_r)\det(B) \tag{3}$$

Teste Determinante para Invertibilidade

Nosso próximo teorema fornece um critério importante para determinar se uma matriz é invertível. Também nos leva um passo mais perto de estabelecer a Fórmula 2.

TEOREMA 2.3.3

Uma matriz quadrada *A* é invertível se e somente se $\det(A) \neq 0$.

Prova Seja *R* a forma escalonada reduzida por linhas de A. Como passo preliminar, mostraremos $\det(A)$ e $\det(R)$ que são ambos nulos ou não nulos: Sejam $E_1, E_2, \ldots, E_r$ as matrizes elementares que correspondem ao elementar operações de linha que produzem *R* de A. Assim

$$R = E_r \cdot \cdot \cdot E_2E_1A$$

e de 3,

$$\det(R) = \det(E_r) \cdot \cdot \cdot \det(E_2)\ \det(E_1)\ \det(A) \tag{4}$$

Apontamos na nota de margem que acompanha o Teorema 2.2.4 que o determinante de uma matriz elementar é diferente de zero. Assim, segue-se da Fórmula 4 que $\det(A)$ e $\det(R)$ são ambos nulos ou ambos diferentes de zero, o que prepara o terreno para a parte principal da prova. Se assumirmos primeiro que *A* é invertível, segue-se do Teorema 1.6.4 que e, portanto, que $R = I$. Isso, por sua vez, implica que $\det(R) = 1\ (\neq 0)$ $\det(A) \neq 0$, que é o que nós queria mostrar.

Segue dos Teoremas 2.3.3 e Teorema 2.2.5 que uma matriz quadrada com duas linhas proporcionais ou duas colunas proporcionais não é invertível.

Por outro lado, assuma que $\det(A) \neq 0$. Segue-se disso que $\det(R) \neq 0$, o que nos diz que *R* não pode ter uma linha de zeros. Assim, segue do Teorema 1.4.3 que $R = I$ e portanto *A* é invertível pelo Teorema 1.6.4.

EXEMPLO 3 Teste de Determinante para Invertibilidade

Desde a primeira e terceira linhas de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

são proporcionais, $\det(A) = 0$. Assim, *A* não é invertível.

Agora estamos prontos para o resultado principal sobre produtos de matrizes.

TEOREMA 2.3.4

Se *A* e *B* são matrizes quadradas de mesmo tamanho, então

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Prova Dividimos a prova em dois casos que dependem de *A* ser ou não invertível. Se a matriz *A* não é invertível, então pelo Teorema 1.6.5 o produto *AB também não é.* Assim, do Teorema Teorema 2.3.3, temos $\det(AB) = 0$ e $\det(A) = 0$, então segue que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Agostinho Louis Cauchy (1789-1857)

Nota Histórica Em 1815, o grande matemático francês Augustin Cauchy publicou um artigo histórico no qual deu o primeiro tratamento sistemático e moderno dos determinantes. Foi nesse artigo que o Teorema 2.3.4 foi enunciado e provado em plena generalidade pela primeira vez. Casos especiais do teorema foram declarados e provados anteriormente, mas foi Cauchy quem deu o salto final.

[Imagem: The Granger Collection, Nova York]

Agora suponha que A é invertível. Pelo Teorema 1.6.4, a matriz A é expressa como um produto de matrizes elementares, digamos

$$A = E_1 E_2 \cdot \cdot \cdot E_r \tag{5}$$

então

$$AB = E_1 E_2 \cdot \cdot \cdot E_r B$$

Aplicando 3 a esta equação produz

$$\det(AB) = \det(E_1)\det(E_2) \cdot \cdot \cdot \det(E_r)\det(B)$$

e aplicando 3 novamente produz

$$\det(AB) = \det(E_1 E_2 \cdot \cdot \cdot E_r)\det(B)$$

que, a partir de 5, pode ser escrito como $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

EXEMPLO 4 Verificando se det(AB) = det(A), det(B)

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

Deixamos para você verificar que

$$\det(A) = 1, \quad \det(B) = -23, \quad \text{and} \quad \det(AB) = -23$$

Por isso $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, conforme garantido pelo Teorema 2.3.4.

O teorema a seguir fornece uma relação útil entre o determinante de uma matriz invertível e o determinante de sua inversa.

TEOREMA 2.3.5

Se *A* é invertível, então

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Prova Desde $A^{-1}A = I$, segue que $\det(A^{-1}A) = \det(I)$. Portanto, devemos ter $\det(A^{-1})\det(A) = 1$. Desde $\det(A) \neq 0$, a prova pode ser completada dividindo por $\det(A)$.

Adjunto de uma Matriz

Em uma expansão de cofatores, calculamos $\det(A)$ multiplicando as entradas em uma linha ou coluna por seus cofatores e adicionando os produtos resultantes. Acontece que, se multiplicarmos as entradas em qualquer linha pelos cofatores correspondentes de uma linha *diferente* , a soma desses produtos será sempre zero. (Esse resultado também é válido para colunas.) Embora omitimos a prova geral, o próximo exemplo ilustra a ideia da prova em um caso especial.

Segue dos Teoremas 2.3.5 e 2.1.2 que

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{a_{11}}\frac{1}{a_{22}}\cdots\frac{1}{a_{nn}}$$

Além disso, usando a fórmula adjunta é possível mostrar que

$$\frac{1}{a_{11}}, \quad \frac{1}{a_{22}}, \ldots, \quad \frac{1}{a_{nn}}$$

são na verdade as entradas diagonais sucessivas A^{-1} de (compare *A* e no A^{-1} Exemplo 3 da Seção 1.7).

EXEMPLO 5 Entradas e Cofatores de Diferentes Linhas

Deixar

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Considere a quantidade

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33}$$

que é formado multiplicando as entradas na primeira linha pelos cofatores das entradas correspondentes na terceira linha e somando os produtos resultantes. Podemos mostrar que essa quantidade é igual a zero com o seguinte truque: Construa uma nova matriz A' substituindo a terceira linha de *A* por outra cópia da primeira linha. Aquilo é,

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

Deixar $C'_{31}, C'_{32}, C'_{33}$ sejam os cofatores das entradas na terceira linha de A'. Como as duas primeiras linhas de *A* e A' são os mesmos, e desde que os cálculos de $C_{31}, C_{32}, C_{33}, C'_{31}, C'_{32}$, e C'_{33} envolver apenas entradas das duas primeiras linhas de *A* e A', segue que

$$C_{31} = C'_{31}, \quad C_{32} = C'_{32}, \quad C_{33} = C'_{33}$$

Como A' tem duas linhas idênticas, segue de 3 que

$$\det(A') = 0 \tag{6}$$

Por outro lado, avaliar $\det(A')$ pela expansão do cofator ao longo da terceira linha dá

$$\det(A') = a_{11}C'_{31} + a_{12}C'_{32} + a_{13}C'_{33} = a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} \tag{7}$$

De 6 e 7 obtemos

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} = 0$$

DEFINIÇÃO 1

Se *A* é qualquer $n \times n$ matriz e C_{ij} é o cofator de a_{ij}, então a matriz

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

é chamada de ***matriz de cofatores de*** A. A transposta dessa matriz é chamada de ***adjunta de A*** e é denotada por adj(A).

EXEMPLO 6 Adjunto de uma Matriz 3 × 3

Deixar

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Os cofatores de *A* são

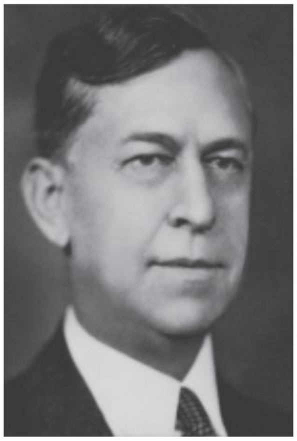
$$\begin{array}{lll} C_{11} = 12 & C_{12} = 6 & C_{13} = -16 \\ C_{21} = 4 & C_{22} = 2 & C_{23} = 16 \\ C_{31} = 12 & C_{32} = -10 & C_{33} = 16 \end{array}$$

então a matriz de cofatores é

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

e o adjunto de A é

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$



Leonard Eugene Dickson (1874–1954)

Nota Histórica O uso do termo *adjunto* para a transposição da matriz de cofatores parece ter sido introduzido pelo matemático americano LE Dickson em um trabalho de pesquisa publicado por ele em 1902.

[Imagem: cortesia da American Mathematical Society]

No Teorema 1.4.5 demos uma fórmula para a inversa de um 2×2 matriz invertível. Nosso próximo teorema estende que resultado para $n \times n$ matrizes invertíveis.

TEOREMA 2.3.6 Inversa de uma Matriz Usando Seu Adjunto

Se A é uma matriz invertível, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \tag{8}$$

Demonstração Mostramos primeiro que

$$A \, \text{adj}(A) = \det(A) I$$

Considere o produto

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{j1} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{j2} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{jn} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

A entrada na i-ésima linha e j-ésima coluna do produto $A\,\mathrm{adj}(A)$ é

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \ldots + a_{in}C_{jn} \tag{9}$$

(veja as linhas sombreadas acima).

Se ~~então~~ 9 é a expansão do cofator de a's e os $\det(A)$ ao longo da linha i de *A* (Teorema 2.1.1), e se $i \neq j$, então o cofatores vêm de diferentes linhas de A, então o valor de 9 é zero. Portanto,

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)I \tag{10}$$

Como *A* é invertível, $\det(A) \neq 0$. Portanto, a Equação 10 pode ser reescrita como

$$\frac{1}{\det(A)}[A\,\mathrm{adj}(A)] = I \quad \text{or} \quad A\left[\frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)\right] = I$$

Multiplicando ambos os lados à esquerda por A^{-1} rendimentos

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$$

EXEMPLO 7 Usando o Adjunto para Encontrar uma Matriz Inversa ◀

Use 8 para encontrar a inversa da matriz *A* no Exemplo 6.

Solução Deixamos para você verificar se $\det(A) = 64$. Por isso

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & -\frac{10}{64} \\ -\frac{16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{bmatrix}$$

Regra de Cramer

Nosso próximo teorema usa a fórmula da inversa de uma matriz invertível para produzir uma fórmula, chamada ***de Cramer***

regra, para a solução de um sistema linear a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de *n* equações em *n* incógnitas no caso em que o coeficiente matriz *A* é invertível (ou, de forma equivalente, quando $\det(A) \neq 0$).

TEOREMA 2.3.7 Regra de Cramer

Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é um sistema de *n* equações lineares em *n* incógnitas tal que solução $\det(A) \neq 0$, então o sistema tem um única. Esta solução é

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

onde é A_j a matriz obtida substituindo as entradas na j-ésima coluna de *A* pelas entradas na matriz

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Prova se $\det(A) \neq 0$, então *A* é invertível, e pelo Teorema 1.6.2, $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ é a única solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Portanto, pelo Teorema 2.3.6 temos

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Multiplicando as matrizes dá

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \ldots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \ldots + b_nC_{n2} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \ldots + b_nC_{nn} \end{bmatrix}$$

A entrada na j-ésima linha de *x* é, portanto,

$$x_j = \frac{b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \ldots + b_nC_{nj}}{\det(A)} \tag{11}$$

Agora deixe

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Como A_j difere de *A* apenas na j-ésima coluna, segue-se que os cofatores das entradas são $b_1, b_2, \ldots, b_n$ em A_j são as iguais aos cofatores das entradas correspondentes na j-ésima coluna de A. A expansão do cofator de ao longo $\det(A_j)$ da j-ésima coluna é, portanto,

$$\det(A_j) = b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \ldots + b_n C_{nj}$$

Substituindo este resultado em 11 dá

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

EXEMPLO 8 Usando a Regra de Cramer para Resolver um Sistema Linear

Use a regra de Cramer para resolver

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & & + & 2x_3 & = & 6 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 30 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \end{array}$$

Gabriel Cramer (1704-1752)

Nota histórica As variações da regra de Cramer eram bastante conhecidas antes de o matemático suíço discuti-la em um trabalho que publicou em 1750. Foi a notação superior de Cramer que popularizou o método e levou os matemáticos a atribuir seu nome a ela.
[Imagem: Coleção Granger]

Solução

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Para $n > 3$, geralmente é mais eficiente resolver um sistema linear com n equações em n incógnitas pela eliminação de Gauss-Jordan do que pela regra de Cramer. Seu principal uso é obter propriedades de soluções de um sistema linear sem realmente resolver o sistema.

Portanto,

$$cx_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$
$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

Teorema de Equivalência

No Teorema 1.6.4 listamos cinco resultados que são equivalentes à invertibilidade de uma matriz A. Concluímos esta seção mesclando o Teorema 2.3.3 com essa lista para produzir o seguinte teorema que relaciona todos os principais tópicos que estudamos até agora .

TEOREMA 2.3.8 Declarações Equivalentes

Se *A* é um $n \times n$ matriz, então as seguintes declarações são equivalentes.

(a) *A* é invertível. *(b)*

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem apenas a solução trivial.

(c) A forma escalonada reduzida de *A* é . I_n

(d) *A* pode ser expresso como um produto de matrizes elementares. *(e)*

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente para cada $n \times 1$ matriz b.

(f) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução para cada $n \times 1$ matriz b.

(g) $\det(A) \neq 0$.

OPCIONAL

Agora temos todo o maquinário necessário para provar os dois resultados a seguir, que enunciamos sem demonstração no Teorema 1.7.1:

- Teorema 1.7.1(c) Uma matriz triangular é invertível se e somente se suas entradas diagonais são todas diferentes de zero.

• Teorema 1.7.1(d) A inversa de uma matriz triangular inferior invertível é triangular inferior, e a inversa de uma matriz triangular superior invertível é triangular superior.

Prova do Teorema 1.7.1(c) Seja $A = [a_{ij}]$ Seja uma matriz triangular, de modo que suas entradas diagonais sejam

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$$

Do Teorema 2.1.2, a matriz *A* é invertível se e somente se

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \cdot \cdot \cdot a_{nn}$$

é diferente de zero, o que é verdadeiro se e somente se as entradas diagonais forem todas diferentes de zero.

Prova do Teorema 1.7.1(d) Provaremos o resultado para matrizes triangulares superiores e deixaremos o caso triangular inferior para você. Assuma que *A* é triangular superior e invertível. Desde

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$$

podemos provar que A^{-1} é triangular superior mostrando que $\operatorname{adj}(A)$ é triangular superior ou, equivalentemente, que o a matriz de cofatores é triangular inferior. Podemos fazer isso mostrando que todo cofator (a diagonal C_{ij} com $i < j$ (ou seja, acima principal) é zero. Desde

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

basta mostrar que cada menor M_{ij} com $i < j$ é zero. Para tanto, seja a matriz que B_{ij} resulta quando a i-ésima linha e a j-ésima coluna de *A* são deletadas, então

$$M_{ij} = \det(B_{ij}) \tag{12}$$

Partindo do pressuposto de $i < j$, segue que B_{ij} é triangular superior (ver Figura Figura 1.7.1). Como *A* é superior que triangular, $(i+1)$-a linha começa com pelo menos *i* zeros. Mas a i-ésima linha de B_{ij} a $(i+1)$-a carreira de *A* com o sua entrada na j-ésima coluna foi removida. Como $i < j$ nenhum dos primeiros *i* zeros é removido ao deletar a j-ésima coluna; assim a i-ésima linha de B_{ij} começa com pelo menos *i* zeros, o que implica que esta linha tem um zero na diagonal principal. Segue agora do Teorema 2.1.2 que e do 12 que $\det(B_{ij}) = 0$ $M_{ij} = 0$.

Revisão do Conceito •

Teste determinante para invertibilidade

• Matriz de cofatores

• Adjunto de uma matriz

• Regra de Cramer

• Declarações equivalentes sobre uma matriz invertível

Habilidades

• Saber como os determinantes se comportam em relação às operações aritméticas básicas, conforme apresentado na Equação 1, Teorema 2.3.1, Lema 2.3.2 e Teorema 2.3.4.

• Use o determinante para testar a inversibilidade de uma matriz.

- Saber como $\det(A)$ e $\det(A^{-1})$ são relacionados.
- Calcule a matriz de cofatores para uma matriz quadrada A. •

Calcule • $\text{adj}(A)$ para uma matriz quadrada A.

Use o adjunto de uma matriz invertível para encontrar sua inversa.

- Use a regra de Cramer para resolver sistemas lineares de

equações. • Conhecer as caracterizações equivalentes de uma matriz invertível dadas no Teorema 2.3.8.

Conjunto de exercícios 2.3

Nos Exercícios 1–4, verifique que $\det(kA) = k^n \det(A)$.

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $k = 2$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$; $k = -4$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$; $k = -2$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$; $k = 3$

Nos Exercícios 5–6, verifique que $\det(AB) = \det(BA)$ e determine se a igualdade $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ detém.

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 7–14, use determinantes para decidir se a matriz dada é invertível.

7. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Responder:

Invertível

8. $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

9. $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Responder:

Invertível

10. $A=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

11. $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

Responder:

Não invertível

12. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 4 \\ 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}$

13. $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

Responder:

Invertível

14. $A=\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{7} & 0 \\ 3\sqrt{2} & -3\sqrt{7} & 0 \\ 5 & -9 & 0 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 15–18, encontre os valores de *k* para os quais *A* é invertível.

15. $A=\begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$

Responder:

$k \neq \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$

16. $A=\begin{bmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Responder:

$k \neq -1$

18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 1 & k \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 19–23, decida se a matriz dada é invertível e, se for, use o método adjunto para encontrar sua inversa.

19. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Responder:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

20. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Responder:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

22. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Responder:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Nos Exercícios 24–29, resolva pela regra de Cramer, onde se aplica.

24. $$\begin{aligned} 7x_1 - 2x_2 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$$

25. $$\begin{aligned} 4x + 5y \phantom{{}+2z} &= 2 \\ 11x + y + 2z &= 3 \\ x + 5y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

Responder:

$$x = \frac{3}{11},\ y = \frac{2}{11},\ z = -\frac{1}{11}$$

26. $$\begin{aligned} x - 4y + z &= 6 \\ 4x - y + 2z &= -1 \\ 2x + 2y - 3z &= -20 \end{aligned}$$

27. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 \phantom{{}+x_3} &= -2 \\ 4x_1 \phantom{{}-3x_2} - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Responder:

$$x_1 = -\frac{30}{11},\ x_2 = -\frac{38}{11},\ x_3 = -\frac{40}{11}$$

28. $$\begin{aligned} -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= -32 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 &= 14 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= -4 \end{aligned}$$

29. $$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + 7x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Responder:

A regra de Cramer não se aplica.

30. Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível para todos os valores de ÿ; então encontre A^{-1} usando o Teorema 2.3.6.

31. Use a regra de Cramer para calcular *y* sem resolver as incógnitas x, z e w.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x & + & y & + & z & + & w & = & 6 \\ 3x & + & 7y & - & z & + & w & = & 1 \\ 7x & + & 3y & - & 5z & + & 8w & = & -3 \\ x & + & y & + & z & + & 2w & = & 3 \end{array}$$

Responder:

$y = 0$

32. Deixe $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ seja o sistema do Exercício 31.

(a) Resolva pela regra de Cramer.

(b) Resolva por eliminação de Gauss-Jordan.

(c) Qual método envolve menos cálculos?

33. Prove que se $\det(A) = 1$ e todas as entradas em *A* são números inteiros, então todas as entradas em A^{-1} são números inteiros.

34. Deixe $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ser um sistema de *n* equações lineares em *n* incógnitas com coeficientes inteiros e constantes inteiras. Prove que se a $\det(A) = 1$, solução *x* tem entradas inteiras.

35. Deixe

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Assumindo que $\det(A) = -7$, encontrar

(a) $\det(3A)$

(b) $\det(A^{-1})$

(c) $\det(2A^{-1})$

(d) $\det((2A)^{-1})$

(e) $\det\begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

Responder:

(a) -189

(b) $-\frac{1}{7}$

(c) $-\frac{8}{7}$

(d) $-\frac{1}{56}$

(e) 7

36. Em cada parte, encontre o determinante dado que *A* é um 4×4 matriz para a qual $\det(A) = -2$.

(a) $\det(-A)$

(b) $\det(A^{-1})$

(c) $\det(2A^T)$

(d) $\det(A^3)$

37. Em cada parte, encontre o determinante dado que *A* é um 3×3 matriz para a qual $\det(A) = 7$.

(a) $\det(3A)$

(b) $\det(A^{-1})$

(c) $\det(2A^{-1})$

(d) $\det((2A)^{-1})$

Responder:

(um) 189

(b) $\frac{1}{7}$

(c) $\frac{8}{7}$

(d) $\frac{1}{56}$

38. Prove que uma matriz quadrada *A* é invertível se e somente se $A^T A$ é invertível.

39. Mostre que se *A* é uma matriz quadrada, então $\det(A^T A) = \det(AA^T)$.

Exercícios de Verdadeiro-Falso

Nas partes (a)–(l), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

(a) Se *A* é um 3×3 matriz, então $\det(2A) = 2\det(A)$.

Responder:

Falso

(b) Se *A* e *B* são matrizes quadradas de mesmo tamanho tais que $\det(A) = \det(B)$, então $\det(A + B) = 2\det(A)$.

Responder:

Falso

(c) Se *A* e *B* são matrizes quadradas de mesmo tamanho e *A* é invertível, então

$$\det(A^{-1}BA) = \det(B)$$

Responder:

Verdadeiro

(d) Uma matriz quadrada *A* é invertível se e somente se $\det(A) = 0$.

Responder:

Falso

(e) A matriz de cofatores de *A* é precisamente $[\operatorname{adj}(A)]^T$.

Responder:

Verdadeiro

(f) Para cada $n \times n$ matriz A, temos

$$A \cdot \operatorname{adj}(A) = (\det(A))I_n$$

Responder:

Verdadeiro

(g) Se *A* é uma matriz quadrada e o sistema linear $A\mathbf{x} = 0$ tem múltiplas soluções para x, então $\det(A) = 0$.

Responder:

Verdadeiro

(h) Se *A* é um $n \times n$ matriz e existe uma $n \times 1$ matriz *b* tal que o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ não tem soluções, então a forma escalonada reduzida de *A* não pode ser *In.*

Responder:

Verdadeiro

(i) Se *E* é uma matriz elementar, então $E\mathbf{x} = 0$ tem apenas a solução trivial.

Responder:

Verdadeiro

(j) Se *A* é uma matriz invertível, então o sistema linear $A\mathbf{x} = 0$ tem apenas a solução trivial se e somente se o linear sistema $A^{-1}\mathbf{x} = 0$ tem apenas a solução trivial.

Responder:

Verdadeiro

(k) Se *A* é invertível, então $\operatorname{adj}(A)$ também deve ser invertível.

Responder:

Verdadeiro

(l) Se *A* tem uma linha de zeros, então também tem $\operatorname{adj}(A)$.

Responder:

Falso

Capítulo 2 Exercícios Suplementares

Nos Exercícios 1–8, calcule o determinante da matriz dada por (a) expansão de cofatores e (b) usando operações elementares de linhas para introduzir zeros na matriz.

1. $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

Responder:

-18

2. $\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Responder:

24

4. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ -7 & -8 & -9 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Responder:

-10

6. $\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -9 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

Responder:

329

8. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

9. Avalie os determinantes nos Exercícios 3–6 usando a técnica da seta (consulte o Exemplo 7 na Seção 2.1).

Responder:

Exercício 3: 24; Exercício 4: 0; Exercício 5: -10; Exercício 6: -48

10. (a) Construa uma 4×4 matriz cujo determinante é fácil de calcular usando a expansão do cofator, mas difícil de calcular avaliação usando operações elementares de linha.

(b) Construa um 4×4 matriz cujo determinante é fácil de calcular usando operações elementares de linha, mas difícil de avaliar usando a expansão do cofator.

11. Use o determinante para decidir se as matrizes dos Exercícios 1–4 são inversíveis.

Responder:

As matrizes dos Exercícios 1–3 são invertíveis, a matriz do Exercício 4 não é.

12. Use o determinante para decidir se as matrizes dos Exercícios 5–8 são inversíveis.

Nos Exercícios 13–15, encontre o determinante da matriz dada por qualquer método.

13. $\begin{vmatrix} 5 & b-3 \\ b-2 & -3 \end{vmatrix}$

Responder:

$-b^2+5b-21$

14. $\begin{vmatrix} 3 & -4 & a \\ a^2 & 1 & 2 \\ 2 & a-1 & 4 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Responder:

-120

16. Resolva para x.

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$$

Nos Exercícios 17–24, use o método adjunto (Teorema 2.3.6) para encontrar a inversa da matriz dada, se ela existir.

17. A matriz do Exercício 1.

Responder:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

18. A matriz do Exercício 2.

19. A matriz no Exercício 3.

Responder:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{24} & -\frac{1}{24} \\ \frac{1}{4} & -\frac{7}{12} & -\frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

20. A matriz do Exercício 4.

21. A matriz do Exercício 5.

Responder:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

22. A matriz do Exercício 6.

23. A matriz no Exercício 7.

Responder:

$$\begin{bmatrix} \frac{10}{329} & -\frac{2}{329} & \frac{52}{329} & -\frac{27}{329} \\ \frac{55}{329} & -\frac{11}{329} & -\frac{43}{329} & \frac{16}{329} \\ -\frac{3}{47} & \frac{10}{47} & -\frac{25}{47} & -\frac{6}{47} \\ -\frac{31}{329} & \frac{72}{329} & \frac{102}{329} & -\frac{15}{329} \end{bmatrix}$$

24. A matriz no Exercício 8.

25. Use a regra de Cramer para resolver para x' e y' em termos de *x* e y.

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' \\ y &= \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \end{aligned}$$

Responder:

$x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y,\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$

26. Use a regra de Cramer para resolver para x' e y' em termos de *x* e y.

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y &= x' \sin\theta + y' \cos\theta \end{aligned}$$

27. Examinando o determinante da matriz de coeficientes, mostre que o seguinte sistema tem uma solução não trivial se e somente se $\alpha = \beta$.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & \alpha z & = & 0 \\ x & + & y & + & \beta z & = & 0 \\ \alpha x & + & \beta y & + & z & = & 0 \end{array}$$

28. Seja *A* um 3×3 matriz, cada uma das entradas é 1 ou 0. Qual é o maior valor possível para $\det(A)$?

29. (a) Para o triângulo na figura a seguir, use trigonometria para mostrar que

$$\begin{array}{ccccc} b\cos\gamma & + & c\cos\beta & = & a \\ c\cos\alpha & + & a\cos\gamma & = & b \\ a\cos\beta & + & b\cos\alpha & = & c \end{array}$$

e então aplique a regra de Cramer para mostrar que

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(b) Use a regra de Cramer para obter fórmulas semelhantes para $\cos\beta$ e $\cos\gamma$.

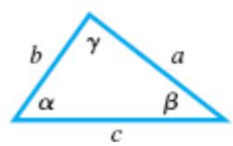


Figura Ex-29

Responder:

(b) $\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac},\ \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

30. Use determinantes para mostrar que para todos os valores reais de ÿ, a única solução de

$$\begin{array}{ccccc} x & - & 2y & = & \lambda x \\ x & - & y & = & \lambda y \end{array}$$

é $x = 0$, $y = 0$.

31. Prove: Se *A* é invertível, então $\operatorname{adj}(A)$ é invertível e

$$[\operatorname{adj}(A)]^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A = \operatorname{adj}(A^{-1})$$

32. Prove: Se *A* é um $n \times n$ matriz, então

$$\det[\operatorname{adj}(A)] = [\det(A)]^{n-1}$$

33. Prove: Se as entradas em cada linha de uma $n \times n$ matriz *A* somam zero, então o determinante de *A* é zero.

[Dica: considere o produto AX, onde *X* é a $n \times 1$ matriz, cada uma de cujas entradas é uma.

34. (a) Na figura a seguir, a área do triângulo ABC pode ser expresso como

$$\text{area } ABC = \text{area } ADEC + \text{area } CEFB - \text{area} ADFB$$

Use isso e o fato de que a área de um trapézio é igual à altura vezes a $\frac{1}{2}$ soma do paralelo lados para mostrar que

$$\text{area } ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

[Nota: Na derivação desta fórmula, os vértices são rotulados de forma que o triângulo seja traçado no sentido anti-horário procedendo de (x_1, y_1) para (x_2, y_2) para (x_3, y_3). Para uma orientação no sentido horário, o determinante acima produz o *negativo* da área.]

(b) Use o resultado em (a) para encontrar a área do triângulo com vértices (3, 3), (4, 0), (ÿ2, ÿ1).

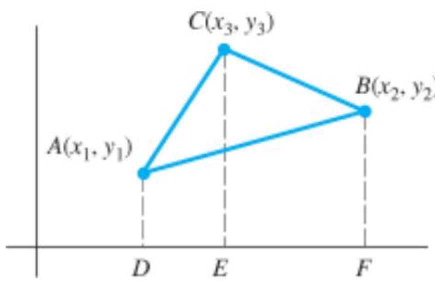


Figura Ex-34

35. Use o fato de que 21.375, 38.798, 34.162, 40.223 e 79.154 são todos divisíveis por 19 para mostrar que

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

é divisível por 19 sem avaliar diretamente o determinante.

36. Sem avaliar diretamente o determinante, mostre que

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$$

CAPÍTULO

3 Espaços Vetoriais Euclidianos

CONTEÚDO DO CAPÍTULO

INTRODUÇÃO

Engenheiros e físicos distinguem entre dois tipos de grandezas físicas - escalares, que são quantidades que podem ser descritas apenas por um valor numérico, e ***vetores,*** que são quantidades que requerem um número e uma direção para sua descrição física completa. Por exemplo, temperatura, comprimento e velocidade são escalares porque podem ser completamente descritos por um número que diz “quanto” – uma temperatura de 20°C, um comprimento de 5 cm ou uma velocidade de 75 km/h. Em contraste, velocidade e força são vetores porque requerem um número que diz “quanto” e uma direção que diz “para que lado” – digamos, um barco se movendo a 10 nós em uma direção 45° nordeste, ou uma força de 100 lb agindo verticalment
Embora as noções de vetores e escalares que estudaremos neste texto tenham sua origem na física e na engenharia, estaremos mais preocupados em usá-los para construir estruturas matemáticas e depois em aplicar essas estruturas a campos tão diversos como genética, ciência da computação, economia , telecomunicações e ciências ambientais.

3.1 Vetores em 2-Espaço, 3-Espaço e n-Espaço

A álgebra linear se preocupa com dois tipos de objetos matemáticos, “matrizes” e “vetores”. Já estamos familiarizados com as ideias básicas sobre matrizes, portanto, nesta seção, apresentaremos algumas das ideias básicas sobre vetores. À medida que avançamos neste texto, veremos que vetores e matrizes estão intimamente relacionados e que grande parte da álgebra linear se preocupa com essa relação.

Vetores Geométricos

Engenheiros e físicos representam vetores em duas dimensões (também chamados ***de espaço 2)*** ou em três dimensões (também chamados ***de espaço 3)*** por meio de setas. A direção da ponta da seta especifica a ***direção*** do vetor e o ***comprimento*** da seta especifica a magnitude. Os matemáticos chamam esses ***vetores geométricos.*** A cauda da seta é chamada de ***ponto inicial*** do vetor e a ponta de ***ponto terminal*** (Figura 3.1.1).

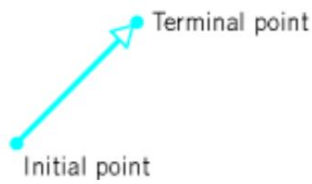


Figura 3.1.1

Neste texto, denotaremos vetores em negrito, como a, b, v, w e x, e denotaremos escalares em itálico minúsculo, como a, k, v, w e x. Quando quisermos indicar que um vetor **v** tem ponto inicial *A* e ponto terminal B, então, como mostra a Figura 3.1.2, escreveremos

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$$

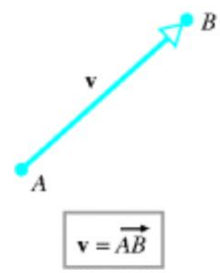


Figura 3.1.2

Vetores com o mesmo comprimento e direção, como os da Figura 3.1.3, são considerados ***equivalentes.*** Como queremos que um vetor seja determinado apenas por seu comprimento e direção, vetores equivalentes são considerados o mesmo vetor, mesmo que estejam em posições diferentes. Os vetores equivalentes também são ditos ***iguais,*** o que indicamos escrevendo

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

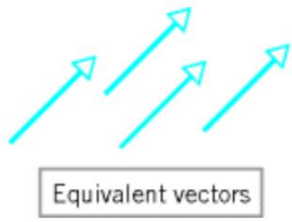


Figura 3.1.3

O vetor cujos pontos inicial e terminal coincidem tem comprimento zero, então o chamamos de ***vetor zero*** e o denotamos por 0. O vetor zero não tem direção natural, então concordaremos que pode ser atribuído a ele qualquer direção que seja conveniente para o problema à mão.

Adição de vetores

Existem várias operações algébricas importantes sobre vetores, todas com origem nas leis da física.

Regra do paralelogramo para adição de vetores

Se **v** e **w** são vetores no espaço 2 ou 3 que estão posicionados de forma que seus pontos iniciais coincidam, então os dois vetores formam lados adjacentes de um paralelogramo, e a soma **v** + **w** é o vetor representado pela seta do ponto inicial comum de **v** e **w** ao vértice oposto do paralelogramo (Figura 3.1.4a).

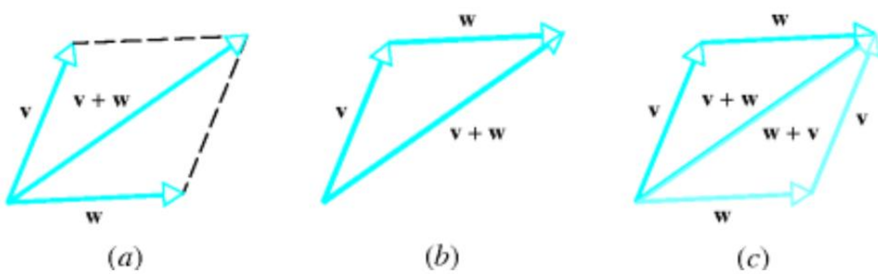


Figura 3.1.4

Aqui está outra maneira de formar a soma de dois vetores.

Regra do triângulo para adição de vetores

Se **v** e **w** são vetores no espaço 2 ou 3 que estão posicionados de modo que o ponto inicial de **w** esteja no ponto terminal de **v**, então a ***soma*** **v** + **w** é representada pela seta do ponto inicial de **v** até o ponto terminal de **w** (Figura 3.1.4b) .

Na Figura 3.1.4c construímos as somas, é $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ e $\mathbf{w}+\mathbf{v}$ pela regra do triângulo. Esta construção faz evidente que

$$\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{w}+\mathbf{v} \tag{1}$$

e que a soma obtida pela regra do triângulo é igual à soma obtida pela regra do paralelogramo.

A adição de vetores também pode ser vista como um processo de translação de pontos.

Adição de vetor vista como tradução

Se $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, e $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ estão posicionados de modo que seus pontos iniciais coincidam, então o ponto terminal de $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ pode ser visto de duas maneiras:

1. O ponto terminal de $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ é o ponto que resulta quando o ponto terminal de $\mathbf{v}$ é traduzido em a direção de $\mathbf{w}$ por uma distância igual ao comprimento de $\mathbf{w}$ (Figura 3.1.5a).

2. O ponto terminal de $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ é o ponto que resulta quando o ponto terminal de $\mathbf{w}$ é traduzido em a direção de $\mathbf{v}$ por uma distância igual ao comprimento de $\mathbf{v}$ (Figura 3.1.5b).

Consequentemente, dizemos que $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ é a ***tradução de $\mathbf{v}$ por $\mathbf{w}$*** ou, alternativamente, a ***tradução de $\mathbf{w}$ por $\mathbf{v}$.***

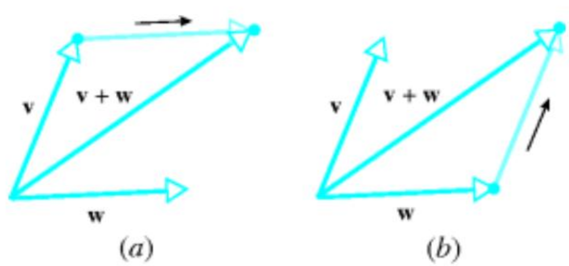


Figura 3.1.5

Subtração de Vetor

Na aritmética ordinária podemos escrever $a-b=a+(-b)$, que expressa subtração em termos de adição. Existe uma ideia análoga na aritmética vetorial.

Subtração de Vetor

O ***negativo*** de um vetor $\mathbf{v}$, denotado por $-\mathbf{v}$, é o vetor que tem o mesmo comprimento, mas tem direção oposta (Figura 3.1.6a), e a ***diferença*** de $\mathbf{v}$ de $\mathbf{w}$, denotado por $\mathbf{w}-\mathbf{v}$, é levado para ser a soma

$$\mathbf{w}-\mathbf{v}=\mathbf{w}+(-\mathbf{v}) \tag{2}$$

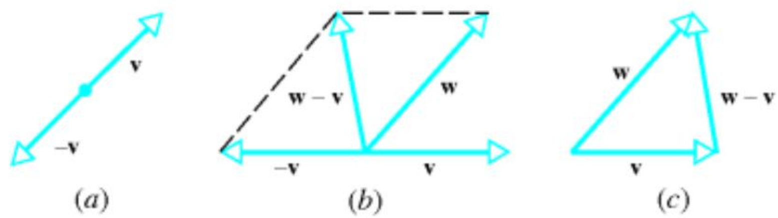


Figura 3.1.6

A diferença de $\mathbf{v}$ de $\mathbf{w}$ pode ser obtida geometricamente pelo método do paralelogramo mostrado na Figura 3.1.6b, ou mais diretamente posicionando $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ assim seus pontos iniciais coincidem e desenhando o vetor do ponto terminal de $\mathbf{v}$ até o ponto terminal de $\mathbf{w}$ (Figura 3.1.6c) .

Multiplicação escalar

Às vezes, é necessário alterar o comprimento de um vetor ou alterar seu comprimento e inverter sua direção. Isso é feito por um tipo de multiplicação em que os vetores são multiplicados por escalares. Por exemplo, o produto $2\mathbf{v}$ denota o vetor que tem a mesma direção, mas o dobro do comprimento, e o produto $-2\mathbf{v}$ denota o vetor que tem direção oposta e tem o dobro do comprimento. Aqui está o resultado geral.

Multiplicação escalar

Se $\mathbf{v}$ é um vetor diferente de zero no espaço 2 ou 3, e se *k* é um escalar diferente de zero, então definimos o ***produto escalar de*** $\mathbf{v}$ ***por*** k ***como*** $k\mathbf{v}$ sendo o vetor cujo comprimento é $|k|$ vezes o comprimento de $\mathbf{v}$ e cuja direção é a mesma de $\mathbf{v}$ se *k* é positivo e oposto ao de $\mathbf{v}$ se *k* é negativo. Se $k=0$ ou $\mathbf{v}=\mathbf{0}$, então nós definir $k\mathbf{v}$ como $\mathbf{0}$.

A Figura 3.1.7 mostra a relação geométrica entre um vetor $\mathbf{v}$ e alguns de seus múltiplos escalares. Em particular, observe que $(-1)\mathbf{v}$ tem o mesmo comprimento $\mathbf{v}$, mas tem direção oposta; portanto,

$$(-1)\mathbf{v}=-\mathbf{v} \tag{3}$$

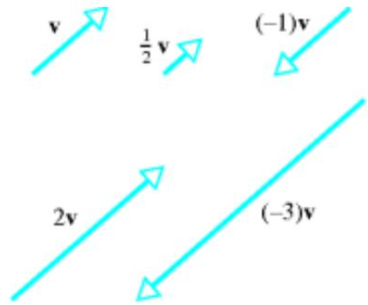


Figura 3.1.7

Vetores paralelos e colineares

Suponha que $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vetores no espaço 2 ou no espaço 3 com um ponto inicial comum. Se um dos vetores é um múltiplo escalar do outro, então os vetores estão em uma linha comum, então é razoável dizer que eles são *colineares* (Figura 3.1.8a). No entanto, se transladarmos um dos vetores, conforme indicado na Figura 3.1.8b, os vetores serão *paralelos* , mas não mais colineares. Isso cria um problema linguístico porque traduzir um vetor não o altera. A única maneira de resolver esse problema é concordar que os termos *paralelo* e *colinear* significam a mesma coisa quando aplicados a vetores. Embora o vetor $\mathbf{0}$ não tenha uma direção claramente definida, vamos considerá-lo paralelo a todos os vetores quando conveniente.

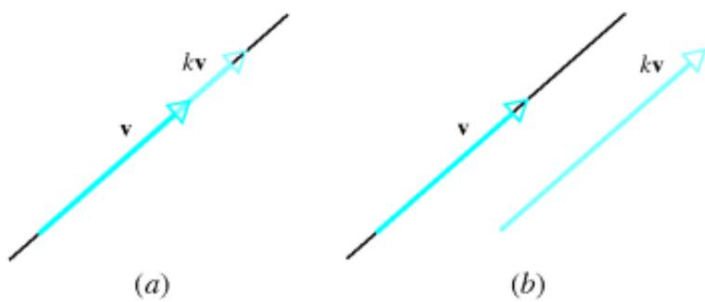


Figura 3.1.8

Somas de três ou mais vetores

A adição de vetores satisfaz a ***lei associativa para adição,*** o que significa que quando adicionamos três vetores, digamos u, $\mathbf{v}$, e $\mathbf{w}$, não importa quais dois adicionamos primeiro; aquilo é,

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

Segue-se disso que não há ambigüidade na expressão, não importa como $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ porque o mesmo resultado é obtido os vetores estejam agrupados.

Uma maneira simples de construir $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ é colocamos os vetores "ponta a cauda" em sucessão e então desenhar o vetor do ponto inicial de **u** até o ponto terminal de $\mathbf{w}$ (Figura 3.1.9a). O método ponta-a-cauda também funciona para quatro ou mais vetores (Figura 3.1.9b). O método ponta-a-cauda também evidencia que se u, $\mathbf{v}$, e $\mathbf{w}$ são vetores no espaço tridimensional com um *ponto inicial comum,* então $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ é a diagonal do paralelepípedo que tem os três vetores como lados adjacentes (Figura 3.1.9c). .

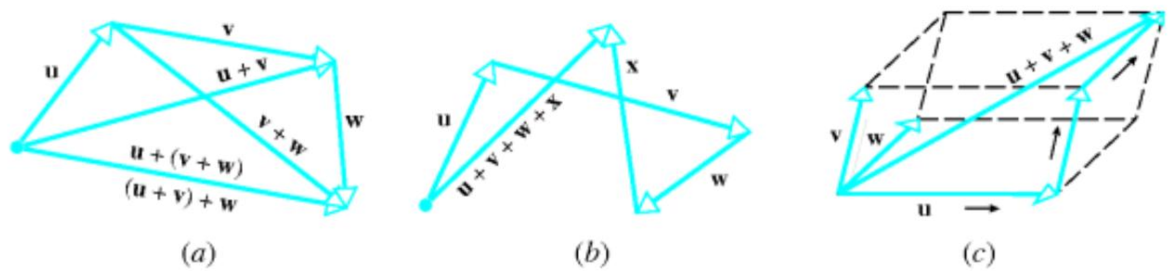


Figura 3.1.9

Vetores em Sistemas de Coordenadas

Até agora discutimos vetores sem referência a um sistema de coordenadas. No entanto, como veremos em breve, os cálculos com vetores são muito mais simples de executar se um sistema de coordenadas estiver presente para trabalhar.

> As formas componentes do vetor zero estão no $\mathbf{0}=(0,0)$ espaço 2 e $\mathbf{0}=(0,0,0)$ em 3-espaço.

Se um vetor $\mathbf{v}$ no espaço 2 ou no espaço 3 é posicionado com seu ponto inicial na origem de um sistema de coordenadas retangulares, então o vetor é completamente determinado pelas coordenadas de seu ponto terminal (Figura 3.1.10). Chamamos essas coordenadas de ***componentes*** de $\mathbf{v}$ relativo ao sistema de coordenadas. Vamos $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ para escrever denotar um vetor $\mathbf{v}$ no espaço 2 com (v_1,v_2), e $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ para denotar um vetor no espaço tridimensional $\mathbf{v}$ componentes com componentes (v_1,v_2,v_3).

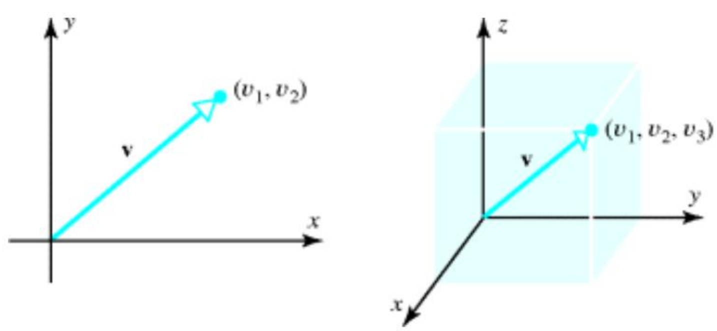


Figura 3.1.10

Deve ser evidente geometricamente que dois vetores no espaço 2 ou no espaço 3 são equivalentes se e somente se eles têm o mesmo ponto terminal quando seus pontos iniciais estão na origem. Algebricamente, isso significa que dois vetores são equivalentes se e somente se seus componentes correspondentes forem iguais. Assim, por exemplo, os vetores

$$\mathbf{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3) \quad \text{and} \quad \mathbf{w}=(w_1\, w_2,\ w_3)$$

em espaço tridimensional são equivalentes se e somente se

$$v_1=w_1, \quad v_2=w_2, \quad v_3=w_3$$

Observação Pode ter ocorrido a você que um par ordenado (v_1,v_2) pode representar um vetor com *componentes* v_1 e v_2 ou um ponto com *componentes* v_1 e v_2 (e similarmente para triplos ordenados). Ambas são interpretações geométricas válidas, portanto a escolha apropriada dependerá do ponto de vista geométrico que queremos enfatizar (Figura 3.1.11).

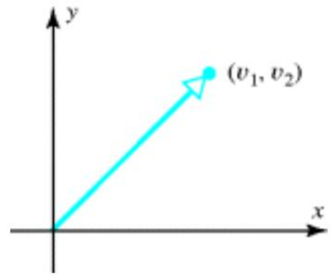


Figura 3.1.11 O par ordenado $(v_1,\ v_2)$ pode representar um ponto ou um vetor.

Vetores cujo ponto inicial não está na origem

Às vezes é necessário considerar vetores cujos pontos iniciais não estão na origem. Se vetor com $\overrightarrow{P_1P_2}$ denota o ponto inicial dado pela $P_1(x_1, y_1)$ e ponto terminal $P_2(x_2, y_2)$, então os componentes desse vetor são fórmula

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1) \tag{4}$$

Ou seja, os componentes de $\overrightarrow{P_1P_2}$ são obtidos subtraindo-se as coordenadas do ponto inicial das coordenadas do ponto terminal. Por exemplo, na Figura 3.1.12 o vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ é a diferença de vetores $\overrightarrow{OP_2}$ e $\overrightarrow{OP_1}$, então

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2,\ y_2) - (x_1,\ y_1) = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$$

Como você pode esperar, os componentes de um vetor no espaço tridimensional que tem ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e terminal inicial $P_2(x_2, y_2, z_2)$ são dados por

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1) \tag{5}$$

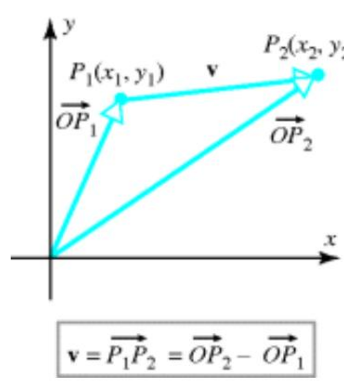


Figura 3.1.12

EXEMPLO 1 Encontrando os Componentes de um Vetor

Os componentes do vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ com ponto inicial $P_1(2, -1, 4)$ e ponto terminal $P_2(7, 5, -8)$ são

$$\mathbf{v} = (7-2,\ 5-(-1),\ (-8)-4) = (5,\ 6,\ -12)$$

n-Espaço

A ideia de usar pares ordenados e triplos de números reais para representar pontos no espaço bidimensional e no espaço tridimensional era bem conhecida nos séculos XVIII e XIX. No alvorecer do século XX, matemáticos e físicos exploravam o uso de espaços de "dimensões superiores" em matemática e física. Hoje, até o leigo está familiarizado com a noção de tempo como uma quarta dimensão, uma ideia usada por Albert Einstein no desenvolvimento da teoria geral da relatividade. Hoje, os físicos que trabalham no campo da "teoria das cordas" geralmente usam o espaço de 11 dimensões em sua busca por uma teoria unificada que explique como funcionam as forças fundamentais da natureza. Grande parte do trabalho restante nesta seção se preocupa em estender a noção de espaço para n-dimensões.

Para explorar mais essas ideias, começamos com alguma terminologia e notação. O conjunto de todos os números reais pode ser visto geometricamente como uma linha. É chamada de ***linha real*** e é denotada por *R* ou R^1. O sobrescrito reforça a ideia intuitiva de que uma linha é unidimensional. O conjunto de todos os pares ordenados de números reais (chamados ***2-uplos)*** e o conjunto de todos os triplos ordenados de números reais (chamados ***3-uplos)*** são denotados por e, R^2 R^3, respectivamente. O sobrescrito reforça a ideia de que os pares ordenados correspondem a pontos no plano (bidimensional) e os triplos ordenados a pontos no espaço (tridimensional). A definição a seguir estende essa ideia.

DEFINIÇÃO 1

Se *n* é um inteiro positivo, então uma ***n-upla ordenada*** é uma sequência de *n* números reais. $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.
O conjunto de todas as n-uplas ordenadas é chamado de ***n-espaço*** e é denotado por R^n.

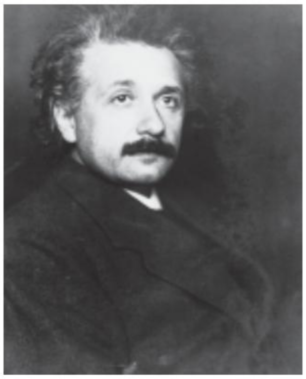
Observação Você pode pensar nos números em um *ponto* $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ como as coordenadas de um *generalizado* n-uplo ou nos componentes de um *vetor generalizado,* dependendo da imagem geométrica que deseja trazer à mente - a escolha não faz diferença matematicamente, pois são as propriedades algébricas de n- tuplas que são motivo de preocupação.

Aqui estão algumas aplicações típicas que levam a n-tuplas.

- **Dados experimentais** Um cientista realiza um experimento e faz *n* medições numéricas a cada vez o experimento é realizado. O resultado de cada experimento pode ser considerado como um vetor em $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ R^n no qual $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são os valores medidos.
- **Armazenagem e Armazenagem** Uma empresa nacional de transporte rodoviário tem 15 depósitos para armazenar e fazer a manutenção de seus caminhões. Em cada ponto no tempo, a distribuição de caminhões nos depósitos de serviço pode ser descrita por 15 tuplas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{15})$ em que é o x_1 número de caminhões no primeiro depósito, é o número x_2 no segundo depósito, e assim por diante.
- **Circuitos Elétricos** Um certo tipo de chip de processamento é projetado para receber quatro voltagens de entrada e produz três tensões de saída em resposta. As tensões de entrada podem ser consideradas como vetores in e as R^4 tensões de saída como vetores in . Assim, o chip R^3 pode ser visto como um dispositivo que transforma um vetor de entrada em um vetor de $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ saída R^4 em $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ R^3.
- **Imagens Gráficas** Uma maneira pela qual as imagens coloridas são criadas nas telas de computador é atribuindo a cada pixel (um ponto endereçável na tela) três números que descrevem o ***matiz, a saturação*** e ***o brilho*** do pixel. Assim, uma imagem colorida completa pode ser vista como um conjunto de 5 tuplas da forma em que *x* e *y* são as coordenadas $\mathbf{v} = (x, y, h, s, b)$ de tela de um pixel e *h,* s e *b* são sua tonalidade, saturação e brilho.
- **Economia** Uma abordagem para a análise econômica é dividir uma economia em setores (manufatura, serviços, serviços públicos e assim por diante) e medir a produção de cada setor por um valor em dólares. Assim, em uma economia com 10 setores, a produção econômica de toda a economia pode ser representada por 10 tuplas são as produções dos setores $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_{10})$ em que os números $s_1, s_2, \ldots, s_{10}$ individuais.
- **Sistemas Mecânicos** Suponha que seis partículas se movam ao longo da mesma linha de coordenadas de modo que no tempo *t* as coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_6$ suas e suas velocidades sejam $v_1, v_2, \ldots, v_6$, respectivamente. Esta informação pode ser são representadas pelo vetor

$$\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, t)$$

em R^{13}. Esse vetor é chamado de ***estado*** do sistema de partículas no tempo t.



Albert Einstein (1879-1955)

Nota Histórica O físico nascido na Alemanha Albert Einstein imigrou para os Estados Unidos em 1935, onde se estabeleceu na Universidade de Princeton. Einstein passou as últimas três décadas de sua vida trabalhando sem sucesso na produção de uma *teoria de campo unificado* que estabeleceria uma ligação subjacente entre as forças da gravidade e do eletromagnetismo. Recentemente, os físicos fizeram progressos no problema usando uma estrutura conhecida como *teoria das cordas.* Nesta teoria, os componentes menores e indivisíveis do Universo não são partículas, mas loops que se comportam como cordas vibrantes. Enquanto

O universo espaço-tempo de Einstein era quadridimensional, as cordas residem em um mundo de 11 dimensões que é o foco da pesquisa atual.

[Imagem: © Bettmann/ © Corbis]

Operações sobre vetores em Rn

Nosso próximo objetivo é definir operações úteis sobre R^n. Todas essas operações serão extensões naturais vetores in das operações familiares sobre R^2 vetores in R^3 e . Vamos denotar um vetor $\mathbf{v}$ R^n usando a notação

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

e vamos ligar $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ o ***vetor nulo.***

Observamos anteriormente que em R^2 e R^3 dois vetores são equivalentes (iguais) se e somente se seus componentes correspondentes forem os mesmos. Assim, fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 2

vetores $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ em R^n são considerados ***equivalentes*** (também chamados ***igual)*** se

$$v_1 = w_1, \quad v_2 = w_2, \ldots, \quad v_n = w_n$$

Indicamos isso escrevendo $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

EXEMPLO 2 Igualdade de Vetores

$$(a, b, c, d) = (1, -4, 2, 7)$$

se e apenas se $a = 1, b = -4, c = 2,$ e $d = 7$.

Nosso próximo objetivo é definir as operações de adição, subtração e multiplicação escalar para vetores em . Para R^n motivar essas ideias, vamos considerar como essas operações podem ser realizadas em vetores usando R^2 componentes. Ao estudar a Figura 3.1.13, você deve ser capaz de deduzir que, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, se então

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, \ v_2 + w_2) \tag{6}$$

$$k\mathbf{v} = (kv_1, \ kv_2) \tag{7}$$

Em particular, segue de 7 que

$$-\mathbf{v}=(-1)\mathbf{v}=(-v_1,\ -v_2) \tag{8}$$

e daí que

$$\mathbf{w}-\mathbf{v}=\mathbf{w}+(-\mathbf{v})=(w_1-v_1,\ w_2-v_2) \tag{9}$$

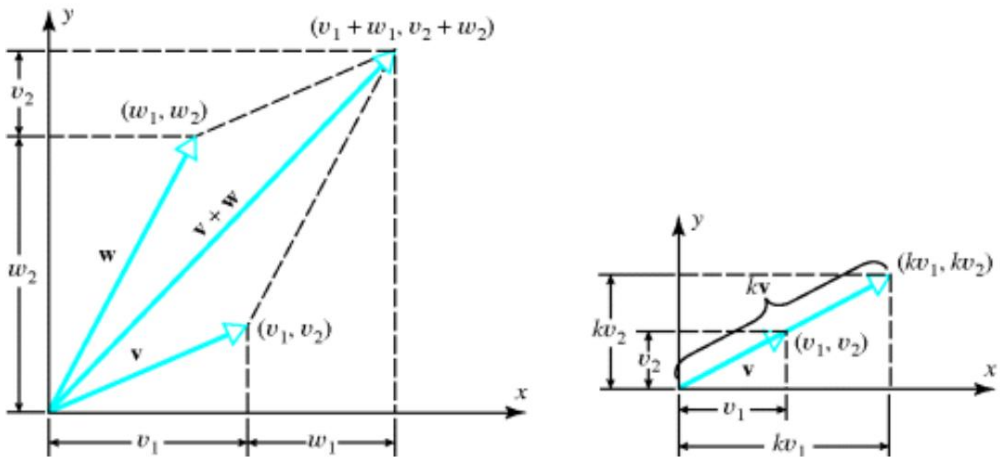


Figura 3.1.13

Motivados pelas Fórmulas 6–9, fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 3

Se $\mathbf{v}=(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $\mathbf{w}=(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ são vetores em R^n, e se *k* é qualquer escalar, então nós definir

$$\mathbf{v}+\mathbf{w}=(v_1+w_1,\ v_2+w_2, \ldots v_n+w_n) \tag{10}$$

$$k\mathbf{v}=(kv_1,\ kv_2, \ldots kv_n) \tag{11}$$

$$-\mathbf{v}=(-v_1,\ -v_2, \ldots -v_n) \tag{12}$$

$$\mathbf{w}-\mathbf{v}=\mathbf{w}+(-\mathbf{v})=(w_1-v_1,\ w_2-v_2, \ldots w_n-v_n) \tag{13}$$

Em palavras, os vetores são adicionados (ou subtraídos) pela adição (ou subtração) de seus componentes correspondentes, e um vetor é multiplicado por um escalar pela multiplicação de cada componente por aquele escalar.

EXEMPLO 3 Operações algébricas usando componentes

Se $\mathbf{v} = (1, -3, 2)$ e $\mathbf{w} = (4, 2, 1)$, então

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (5, -1, 3), \quad 2\mathbf{v} = (2, -6, 4)$$
$$-\mathbf{w} = (-4, -2 - 1) \quad \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w}) = (-3, -5, 1)$$

O teorema a seguir resume as propriedades mais importantes das operações vetoriais.

TEOREMA 3.1.1

Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, e $\mathbf{w}$ são vetores em R^n, e se k e m são escalares, então:

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(c) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(d) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

(e) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$

(f) $(k + m)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + m\mathbf{u}$

(g) $k(m\mathbf{u}) = (\mathrm{km})\mathbf{u}$

(h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Provaremos a parte *(b)* e deixaremos algumas das outras provas como exercícios.

Prova (b) Seja $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$. Então

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= ((u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n)) + (w_1, w_2, \ldots, w_n) \\
&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n) && [\text{Vector addition}] \\
&= ((u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2, \ldots, (u_n + v_n) + w_n) && [\text{Vector addition}] \\
&= (u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2), \ldots, u_n + (v_n + w_n)) && [\text{Regroup}] \\
&= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n) && [\text{Vector addition}] \\
&= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})
\end{aligned}$$

As seguintes propriedades adicionais de vetores podem R^n ser facilmente deduzidas expressando os vetores em termos de componentes (verificar).

TEOREMA 3.1.2

Se **v** é um vetor em R^n k é um escalar, então:

(a) $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$

(b) $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$

(c) $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$

Cálculo sem componentes

Uma das consequências poderosas dos Teoremas 3.1.1 e 3.1.2 é que eles permitem que cálculos sejam realizados sem expressar os vetores em termos de componentes. Por exemplo, suponha que x, a e *b* são vetores em R^n, e queremos resolver a equação vetorial $\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{b}$ para o vetor *x* sem usar componentes. Poderíamos proceder da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{b} & [\text{Given}] \\ (\mathbf{x} + \mathbf{a}) + (-\mathbf{a}) = \mathbf{b} + (-\mathbf{a}) & \text{Add the negative of } \mathbf{a} \text{ to both sides} \\ \mathbf{x} + (\mathbf{a} + (-\mathbf{a})) = \mathbf{b} - \mathbf{a} & \text{Part } (b) \text{ of Theorem 3.1.1} \\ \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{b} - \mathbf{a} & \text{Part } (d) \text{ of Theorem 3.1.1} \\ \mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a} & \text{Part } (c) \text{ of Theorem 3.1.1} \end{array}$$

Embora esse método seja obviamente mais complicado do que calcular com componentes, é R^n, se tornará importante mais adiante no texto, onde encontraremos tipos de vetores mais gerais.

Combinações Lineares

Adição, subtração e multiplicação escalar são freqüentemente usadas em combinação para formar novos vetores. Por exemplo, se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,$ e $\mathbf{v}_3$ são vetores em R^n, então os vetores

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \quad \text{and} \quad \mathbf{w} = 7\mathbf{v}_1 - 6\mathbf{v}_2 + 8\mathbf{v}_3$$

são formados desta forma. Em geral, fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 4

Se $\mathbf{w}$ é um vetor em R^n, então $\mathbf{w}$ é dito ser uma ***combinação linear*** dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ em R^n Se isso pode ser expresso na forma

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_r\mathbf{v}_r \tag{14}$$

onde $k_1, k_2, \ldots, k_r$ são escalares. Esses escalares são chamados de ***coeficientes*** da combinação linear. De o caso em que a Fórmula 14 se torna apenas $r = 1$, $\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1$, modo que uma combinação linear de um único vetor um múltiplo escalar desse vetor.

Note que esta definição de uma combinação linear
é consistente com o dado no contexto de matrizes
(ver Definição 6 na Seção 1.3).

Aplicação de Combinações Lineares a Modelos de Cores

As cores nos monitores de computador geralmente são baseadas no que é chamado de modelo de cores **RGB .** As cores neste sistema são criadas somando porcentagens das cores primárias vermelho (R), verde (G) e azul (B). Uma maneira de fazer isso é identificar as cores primárias com os vetores

$$\mathbf{r} = (1, 0, 0) \quad \text{(pure red)},$$
$$\mathbf{g} = (0, 1, 0) \quad \text{(pure green)},$$
$$\mathbf{b} = (0, 0, 1) \quad \text{(pure blue)}$$

em R^3 e para criar todas as outras cores formando combinações lineares de $\mathbf{r}$, $\mathbf{g}$ e *b* usando coeficientes entre 0 e 1, inclusive; esses coeficientes representam a porcentagem de cada cor pura na mistura.
O conjunto de todos esses vetores de cores é chamado ***espaço*** **RGB** ou ***cubo de cores*** **RGB** (Figura 3.1.14). Assim, cada vetor de cor *c* neste cubo é expresso como uma combinação linear da forma

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= k_1\mathbf{r} + k_2\mathbf{g} + k_3\mathbf{b} \\ &= k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) \\ &= (k_1, k_2, k_3)\end{aligned}$$

onde $0 \leq k_i \leq 1$. Conforme indicado na figura, os cantos do cubo representam as cores primárias puras junto com as cores preto, branco, magenta, ciano e amarelo. Os vetores ao longo da diagonal que vão do preto ao branco correspondem a tons de cinza.

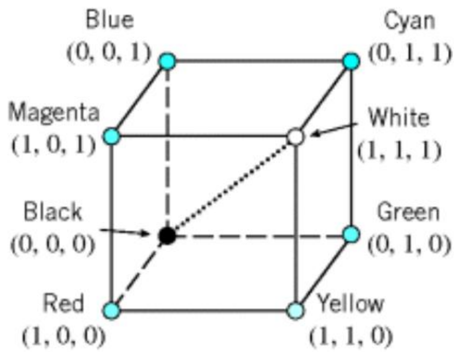


Figura 3.1.14

Notações alternativas para vetores

Até agora, escrevemos vetores usando a notação R^n

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \tag{15}$$

Chamamos isso de forma ***delimitada por vírgula .*** No entanto, como um vetor in R^n é apenas uma lista de seus *n* componentes em uma ordem específica, qualquer notação que exiba esses componentes na ordem correta é uma forma válida de representar o vetor. Por exemplo, o vetor em 15 pode ser escrito como

$$\mathbf{v} = [v_1 \; v_2 \ldots v_n] \tag{16}$$

que é chamado de forma ***de matriz de linha ,*** ou como

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{17}$$

que é chamada de forma ***coluna-matriz .*** A escolha da notação geralmente é uma questão de gosto ou conveniência, mas às vezes a natureza de um problema sugere uma notação preferida. As notações 15, 16 e 17 serão todas usadas em vários lugares neste texto.

Revisão do conceito

• Vetor geométrico

• Direção

•

Comprimento •

Ponto inicial • Ponto

terminal • Vetores equivalentes

• Vetor zero

• Adição de vetores: regra do paralelogramo e regra do triângulo

• Subtração de vetores

• Negativo de um vetor •

Multiplicação escalar •

Vetores colineares (isto é, paralelos) •

Componentes de um vetor •

Coordenadas de um ponto • n-

tupla

• n-espaço

• Operações vetoriais no espaço n: adição, subtração, multiplicação escalar

• Combinação linear de vetores

Habilidades

• Realizar operações geométricas em vetores: adição, subtração e multiplicação escalar. • Realizar operações

algébricas em vetores: adição, subtração e multiplicação escalar. • Determine se dois vetores são equivalentes.

• Determine se dois vetores são colineares.

• Esboçar vetores cujos pontos iniciais e terminais são dados. • Encontre

componentes de um vetor cujos pontos inicial e terminal são dados. • Provar propriedades

algébricas básicas de vetores (Teoremas 3.1.1 e 3.1.2).

Conjunto de exercícios 3.1

Nos Exercícios 1–2, desenhe um sistema de coordenadas (como na Figura 3.1.10) e localize os pontos cujas coordenadas são dadas.

1. (a) (3, 4, 5) (b)

(-3, 4, 5)

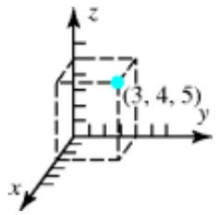
(c) (3, ÿ4, 5) (d)

(3, 4, ÿ5) (e) (ÿ3,

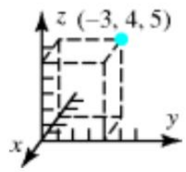
ÿ4, 5) (f) (ÿ3, 4, ÿ5)

Responder:

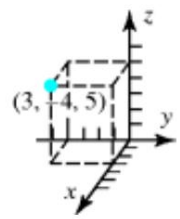
(a)



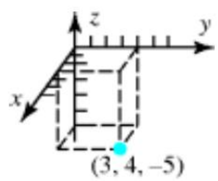
(b)



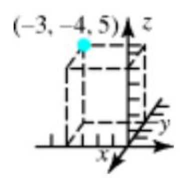
(c)



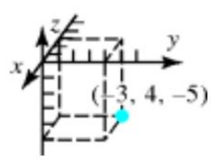
(d)



(e)



(f)



2. (a) (0,3,ÿ3) (b)
(3,ÿ3,0) (c)
(ÿ3, 0, 0) (d) (3,
0, 3) (e) (0 , 0,
ÿ3) (f) (0, 3, 0)

Nos Exercícios 3–4, esboce os seguintes vetores com os pontos iniciais localizados na origem.

3. (a) $\mathbf{v}_1 = (3, 6)$

(b) $\mathbf{v}_2 = (-4, -8)$

(c) $\mathbf{v}_3 = (-4, -3)$

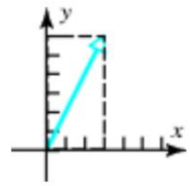
(d) $\mathbf{v}_4 = (3, 4, 5)$

(e) $\mathbf{v}_5 = (3, 3, 0)$

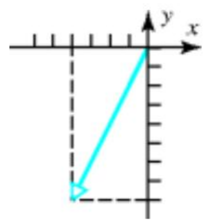
(f) $\mathbf{v}_6 = (-1, 0, 2)$

Responder:

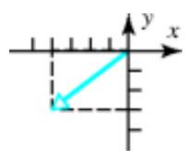
(a)



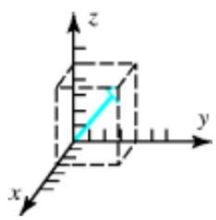
(b)



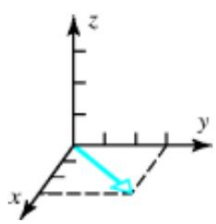
(c)



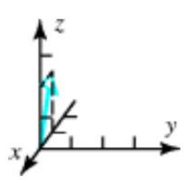
(d)



(e)



(f)



4. (a) $\mathbf{v}_1 = (5, -4)$

(b) $\mathbf{v}_2 = (3, 0)$

(c) $\mathbf{v}_3 = (0, -7)$

(d) $\mathbf{v}_4 = (0, 0, -3)$

(e) $\mathbf{v}_5 = (0, 4, -1)$

(f) $\mathbf{v}_6 = (2, 2, 2)$

Nos Exercícios 5–6, esboce os seguintes vetores com os pontos iniciais localizados na origem.

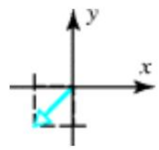
5. (a) $P_1(4, 8), \quad P_2(3, 7)$

(b) $P_1(3, -5), \quad P_2(-4, -7)$

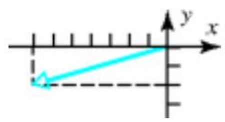
(c) $P_1(3, -7, 2), \quad P_2(-2, 5, -4)$

Responder:

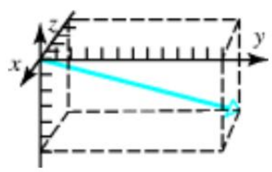
(a)



(b)



(c)



6. (a) $P_1(-5, 0), \quad P_2(-3, 1)$

(b) $P_1(0, 0), \quad P_2(3, 4)$

(c) $P_1(-1, 0, 2), \quad P_2(0, -1, 0)$

(d) $P_1(2, 2, 2), \quad P_2(0, 0, 0)$

Nos Exercícios 7–8, encontre as componentes do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$.

7. (a) $P_1(3, 5), \quad P_2(2, 8)$

(b) $P_1(5, -2, 1), \quad P_2(2, 4, 2)$

Responder:

(a) $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1, 3)$

(b) $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3, 6, 1)$

8. (a) $P_1(-6, 2), \quad P_2(-4, -1)$

(b) $P_1(0, 0, 0), \quad P_2(-1, 6, 1)$

9. (a) Encontre o ponto terminal do vetor que é equivalente a $\mathbf{u} = (1, 2)$ e cujo ponto inicial é $A(1, 1)$.

(b) Encontre o ponto inicial do vetor que é equivalente a $\mathbf{u} = (1, 1, 3)$ e cujo ponto terminal é $B(-1, -1, 2)$.

Responder:

(a) O ponto terminal é B(2, 3). (b) O ponto inicial é $A(-2, -2, -1)$.

10. (a) Encontre o ponto inicial do vetor que é equivalente a $\mathbf{u} = (1, 2)$ e cujo ponto terminal é $B(2, 0)$.

(b) Encontre o ponto terminal do vetor que é equivalente a $\mathbf{u} = (1, 1, 3)$ e cujo ponto inicial é $A(0, 2, 0)$.

11. Encontre um vetor diferente de zero **u** com ponto terminal $Q(3, 0, -5)$ de tal modo que

(a) **u** tem a mesma direção que $\mathbf{v} = (4, -2, -1)$.

(b) **u** tem direção oposta a $\mathbf{v} = (4, -2, -1)$.

Responder:

(a) $\mathbf{u} = (-1, 2, -4)$ é uma resposta possível.

(b) $\mathbf{u} = (7, -2, -6)$ é uma resposta possível.

12. Encontre um vetor diferente de zero **u** com ponto inicial $P(-1, 3, -5)$ de tal modo que

(a) **u** tem a mesma direção que $\mathbf{v} = (6, 7, -3)$.

(b) **u** tem direção oposta a $\mathbf{v} = (6, 7, -3)$.

13. Deixe $\mathbf{u} = (4, -1)$, $\mathbf{v} = (0, 5)$, e $\mathbf{w} = (-3, -3)$. Encontre os componentes de

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{w}$

(b) $\mathbf{v} - 3\mathbf{u}$

(c) $2(\mathbf{u} - 5\mathbf{w})$

(d) $3\mathbf{v} - 2(\mathbf{u} + 2\mathbf{w})$

(e) $-3(\mathbf{w} - 2\mathbf{u} + \mathbf{v})$

(f) $(-2\mathbf{u} - \mathbf{v}) - 5(\mathbf{v} + 3\mathbf{w})$

Responder:

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{w} = (1, -4)$

(b) $\mathbf{v} - 3\mathbf{u} = (-12, 8)$

(c) $2(\mathbf{u} - 5\mathbf{w}) = (38, 28)$

(d) $3\mathbf{v} - 2(\mathbf{u} + 2\mathbf{w}) = (4, 29)$

(e) $-3(\mathbf{w} - 2\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (33, -12)$

(f) $(-2\mathbf{u} - \mathbf{v}) - 5(\mathbf{v} + 3\mathbf{w}) = (37, 17)$

14. Deixe $\mathbf{u} = (-3, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (4, 0, -8)$, e $\mathbf{w} = (6, -1, -4)$. Encontre os componentes de

(a) $\mathbf{v}-\mathbf{w}$

(b) $6\mathbf{u}+2\mathbf{v}$

(c) $-\mathbf{v}+\mathbf{u}$

(d) $5(\mathbf{v}-4\mathbf{u})$

(e) $-3(\mathbf{v}-8\mathbf{w})$

(f) $(2\mathbf{u}-7\mathbf{w})-(8\mathbf{v}+\mathbf{u})$

15. Deixe $\mathbf{u}=(-3, 2, 1, 0)$, $\mathbf{v}=(4, 7, -3, 2)$, e $\mathbf{w}=(5, -2, 8, 1)$. Encontre os componentes de

(a) $\mathbf{v}-\mathbf{w}$

(b) $2\mathbf{u}+7\mathbf{v}$

(c) $-\mathbf{u}+(\mathbf{v}-4\mathbf{w})$

(d) $6(\mathbf{u}-3\mathbf{v})$

(e) $-\mathbf{v}-\mathbf{w}$

(f) $(6\mathbf{v}-\mathbf{w})-(4\mathbf{u}+\mathbf{v})$

Responder:

(a) $(-1, 9, -11, 1)$

(b) $(22, 53, -19, 14)$

(c) $(-13, 13, -36, -2)$

(d) $(-90, -114, 60, -36)$

(e) $(-9, -5, -5, -3)$

(f) $(27, 29, -27, 9)$

16. Sejam u, v e **w** os vetores do Exercício 15. Encontre o vetor **x** que satisfaz $5\mathbf{x}-2\mathbf{v}=2(\mathbf{w}-5\mathbf{x})$.

17. Deixe $\mathbf{u}=(5, -1, 0, 3, -3)$, $\mathbf{v}=(-1, -1, 7, 2, 0)$, e $\mathbf{w}=(-4, 2, -3, -5, 2)$. Encontre o componentes de

(a) $\mathbf{w}-\mathbf{u}$

(b) $2\mathbf{v}+3\mathbf{u}$

(c) $-\mathbf{w}+3(\mathbf{v}-\mathbf{u})$

(d) $5(-\mathbf{v}+4\mathbf{u}-\mathbf{w})$

(e) $-2(3\mathbf{w}+\mathbf{v})+(2\mathbf{u}+\mathbf{w})$

(f) $\frac{1}{2}(\mathbf{w}-5\mathbf{v}+2\mathbf{u})+\mathbf{v}$

Responder:

(a) $\mathbf{w}-\mathbf{u}=(-9, 3, -3, -8, 5)$

(b) $2\mathbf{v}+3\mathbf{u}=(13, -5, 14, 13, -9)$

(c) $-\mathbf{w}+3(\mathbf{v}-\mathbf{u})=(-14, -2, 24, 2, 7)$

(d) $5(-\mathbf{v}+4\mathbf{u}-\mathbf{w})=(125, -25, -20, 75, -70)$

(e) $-2(3\mathbf{w}+\mathbf{v})+(2\mathbf{u}+\mathbf{w})=(32,\ -10,\ 1,\ 27,\ -16)$

(f) $\frac{1}{2}(\mathbf{w}-5\mathbf{v}+2\mathbf{u})+\mathbf{v}=\left(\frac{9}{2},\ \frac{3}{2},\ -12,\ -\frac{5}{2},\ -2\right)$

18. Deixe $\mathbf{u}=(1,2,\ -3,5,0)$, $\mathbf{v}=(0,4,\ -1,1,2)$, e $\mathbf{w}=(7,1,\ -4,\ -2,3)$. Encontre os componentes de

(a) $\mathbf{v}+\mathbf{w}$

(b) $3(2\mathbf{u}-\mathbf{v})$

(c) $(3\mathbf{u}-\mathbf{v})-(2\mathbf{u}+4\mathbf{w})$

19. Deixe $\mathbf{u}=(-3,1,2,4,4)$, $\mathbf{v}=(4,0,\ -8,1,2)$, e $\mathbf{w}=(6,\ -1,\ -4,3,\ -5)$. Encontre os componentes de

(a) $\mathbf{v}-\mathbf{w}$

(b) $6\mathbf{u}+2\mathbf{v}$

(c) $(2\mathbf{u}-7\mathbf{w})-(8\mathbf{v}+\mathbf{u})$

Responder:

(a) $\mathbf{v}-\mathbf{w}=(-2,1,\ -4,\ -2,7)$

(b) $6\mathbf{u}+2\mathbf{v}=(-10,6,\ -4,26,28)$

(c) $(2\mathbf{u}-7\mathbf{w})-(8\mathbf{v}+\mathbf{u})=(-77,8,94,\ -25,23)$

20. Sejam u, v e **w** os vetores do Exercício 18. Encontre os componentes do vetor **x** que satisfaz a equação $3\mathbf{u}+\mathbf{v}-2\mathbf{w}=3\mathbf{x}+2\mathbf{w}$.

21. Sejam u, v e **w** os vetores do Exercício 19. Encontre os componentes do vetor **x** que satisfaz a equação $2\mathbf{u}-\mathbf{v}+\mathbf{x}=7\mathbf{x}+\mathbf{w}$.

Responder:

$$\mathbf{x}=\left(-\frac{8}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{11}{6}\right)$$

22. Para que valor(es) de t, se houver, o vetor dado é paralelo a $\mathbf{u}=(4,\ -1)$?

(a) $(8t,\ -2)$

(b) $(8t,2t)$

(c) $\left(1,t^2\right)$

23. Qual dos seguintes vetores em R^6 são paralelos a $\mathbf{u}=(-2,1,0,3,5,1)$?

(a) $(4,2,0,6,10,2)$

(b) $(4,\ -2,0,\ -6,\ -10,\ -2)$

(c) $(0,0,0,0,0,0)$

Responder:

(a) Não paralelo

(b) Paralelo

(c) Paralela

24. Deixe $\mathbf{u} = (2, 1, 0, 1, -1)$ e $\mathbf{v} = (-2, 3, 1, 0, 2)$. Encontre os escalares *a* e *b* de modo que $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = (-8, 8, 3, -1, 7)$.

25. Deixe $\mathbf{u} = (1, -1, 3, 5)$ e $\mathbf{v} = (2, 1, 0, -3)$. Encontre os escalares *a* e *b* de modo que $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = (1, -4, 9, 18)$.

Responder:

$a = 3,\ b = -1$

26. Encontre todos os escalares c_1, c_2, e c_3 tal que

$$c_1(1, 2, 0) + c_2(2, 1, 1) + c_3(0, 3, 1) = (0, 0, 0)$$

27. Encontre todos os escalares c_1, c_2, e c_3 tal que

$$c_1(1, -1, 0) + c_2(3, 2, 1) + c_3(0, 1, 4) = (-1, 1, 19)$$

Responder:

$c_1 = 2,\ c_2 = -1,\ c_3 = 5$

28. Encontre todos os escalares c_1, c_2, e c_3 tal que

$$c_1(-1, 0, 2) + c_2(2, 2, -2) + c_3(1, -2, 1) = (-6, 12, 4)$$

29. Deixe $\mathbf{u}_1 = (-1, 3, 2, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 0, 4, -1)$, $\mathbf{u}_3 = (7, 1, 1, 4)$, e $\mathbf{u}_4 = (6, 3, 1, 2)$. Encontrar escalares c_1, c_2, c_3, e c_4 tal que $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 + c_4\mathbf{u}_4 = (0, 5, 6, -3)$.

Responder:

$c_1 = 1,\ c_2 = 1,\ c_3 = -1,\ c_4 = 1$

30. Mostre que não existem escalares c_1, c_2, e c_3 tal que

$$c_1(1, 0, 1, 0) + c_2(1, 0, -2, 1) + c_3(2, 0, 1, 2) = (1, -2, 2, 3)$$

31. Mostre que não existem escalares c_1, c_2, e c_3 tal que

$$c_1(-2, 9, 6) + c_2(-3, 2, 1) + c_3(1, 7, 5) = (0, 5, 4)$$

32. Considere a Figura 3.1.12. Discuta uma interpretação geométrica do vetor

$$u = \overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP}_2 - \overrightarrow{OP}_1\right)$$

33. Seja *P* o ponto $(2, 3, -2)$ e *Q* o ponto (a) $(7, -4, 1)$.

Encontre o ponto médio do segmento de linha conectando *P* e

Q. (b) Encontre o ponto no segmento de linha conectando *P* e *Q* que $\frac{3}{4}$ está no caminho de *P* a Q.

Responder:

(a) $\left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

(b) $\left(\frac{23}{4}, -\frac{9}{4}, \frac{1}{4}\right)$

34. Seja *P* o ponto Q, o $(1, 3, 7)$. Se o ponto $(4, 0, -6)$ é o ponto médio do segmento de reta que liga *P* e que é Q?

35. Prove os itens (a), (c) e *(d)* do Teorema 3.1.1.

36. Prove as partes (e)–(h) do Teorema 3.1.1.

37. Prove as partes (a)–(c) do Teorema 3.1.2.

Exercícios de Verdadeiro-Falso

Nas partes (a)–(k), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

(a) Dois vetores equivalentes devem ter o mesmo ponto inicial.

Responder:

Falso

(b) Os vetores (a, b) e $(a, b, 0)$ são equivalentes.

Responder:

Falso

(c) Se *k* é um escalar e **v** é um vetor, então **v** e ***kv*** são paralelos se e somente se $k \geq 0$.

Responder:

Falso

(d) Os vetores $\mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{w})$ e $(\mathbf{w} + \mathbf{v}) + \mathbf{u}$ são os mesmos.

Responder:

Verdadeiro

(e) Se $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, então $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

Responder:

Verdadeiro

(f) Se *a* e *b* são escalares tais que $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = 0$, então **u** e **v** são vetores paralelos.

Responder:

Falso

(g) Vetores colineares com o mesmo comprimento são iguais.

Responder:

Falso

(h) Se $(a, b, c) + (x, y, z) = (x, y, z)$, então (a, b, c) deve ser o vetor zero.

Responder:

Verdadeiro

(i) Se *k* e *m* são escalares e **u** e **v** são vetores, então

$$(k+m)(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\mathbf{u}+m\mathbf{v}$$

Responder:

Falso

(j) Se os vetores **v** e **w** são dados, então a equação vetorial

$$3(2\mathbf{v}-\mathbf{x}) = 5\mathbf{x}-4\mathbf{w}+\mathbf{v}$$

pode ser resolvido para x.

Responder:

Verdadeiro

(k) As combinações lineares $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$ e $b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2$ só pode ser igual se $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$.

Responder:

Falso

3.2 Norma, produto escalar e distância em *Rn*

Nesta seção, estaremos preocupados com as noções de comprimento e distância conforme elas se relacionam com vetores. Vamos primeiro discutir essas ideias em R^2 e R^3, em seguida, estendê-las algebricamente para R^n.

Norma de um vetor

Neste texto denotaremos o comprimento de um vetor **v** pelo *comprimento* $\|\mathbf{v}\|$, que é lida como a *norma* de v, a do símbolo de v, ou a *magnitude* de **v** (o termo "norma" sendo um sinônimo matemático comum para comprimento). Conforme sugerido na Figura 3.2.1a, segue-se do Teorema de Pitágoras que a norma de um vetor em é (v_1, v_2) R^2

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \tag{1}$$

Da mesma forma, para um vetor (v_1, v_2, v_3) em R^3, segue da Figura 3.2.1b e duas aplicações do Teorema de Pitágoras que

$$\|\mathbf{v}\|^2 = (OR)^2 + (RP)^2 = (OQ)^2 + (QR)^2 + (RP)^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

e daí que

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \tag{2}$$

Motivados pelo padrão das Fórmulas 1 e 2 fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1

Se $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ é um vetor em R^n, então a ***norma*** de **v** (também chamada de ***comprimento*** de **v** ou ***magnitude*** de v) é denotado por , $\|\mathbf{v}\|$ e é definido pela fórmula

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_n^2} \tag{3}$$

EXEMPLO 1 Cálculo de Normas

Segue da Fórmula 2 que a norma do vetor $\mathbf{v} = (-3, 2, 1)$ em R^3 é

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

e segue da Fórmula 3 que a norma do vetor $\mathbf{v} = (2, -1, 3, -5)$ em R^4 é

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{39}$$

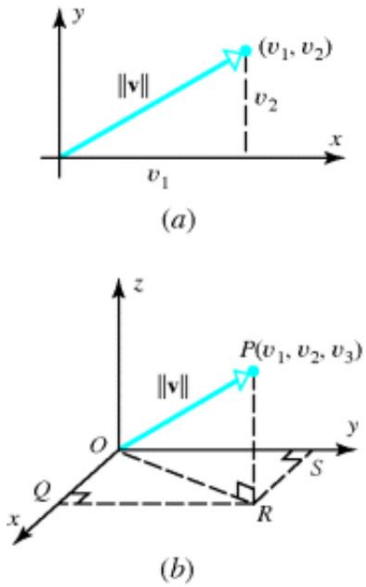


Figura 3.2.1

Nosso primeiro teorema nesta seção irá generalizar para R^n os três fatos familiares a seguir sobre vetores em e R^2 R^3:

• As distâncias não são negativas. •

O vetor zero é o único vetor de comprimento zero. • A

multiplicação de um vetor por um escalar multiplica seu comprimento pelo valor absoluto desse escalar.

É importante reconhecer que apenas porque esses resultados são válidos, e não garante que R^2 R^3 sejam válidos, sua validade deve ser *provada* usando R^n propriedades algébricas R^n de n-uplas.

TEOREMA 3.2.1

Se **v** é um vetor em R^n, e se *k* é qualquer escalar, então:

(a) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$

(b) $\|\mathbf{v}\| = 0$ se e apenas se $\mathbf{v} = 0$

(c) $\|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\|$

Vamos provar a parte *(c)* e deixar *(a)* e *(b)* como exercícios.

Prova (c) Se $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, então $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n)$, então

$$\begin{aligned} \|k\mathbf{v}\| &= \sqrt{(kv_1)^2 + (kv_2)^2 + \cdots + (kv_n)^2} \\ &= \sqrt{\left(k^2\right)\left(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2\right)} \\ &= |k|\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \\ &= |k|\|\mathbf{v}\| \end{aligned}$$

Vetores Unitários

Um vetor de norma 1 é chamado de ***vetor unitário.*** Esses vetores são úteis para especificar uma direção quando o comprimento não é relevante para o problema em questão. Você pode obter um vetor unitário em uma direção desejada escolhendo qualquer vetor diferente de *zero* **v** nessa direção e multiplicando **v** pelo recíproco de seu comprimento. Por exemplo, se **v** é um vetor de comprimento 2 em R^2 ou R^3 então $\frac{1}{2}\mathbf{v}$ é um vetor unitário na mesma direção que v. Mais geralmente, se **v** for qualquer diferente de zero vetor em R^n, então

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} \tag{4}$$

define um vetor unitário que está na mesma direção de v. Podemos confirmar que 4 é um vetor unitário aplicando a parte *(c)* do Teorema 3.2.1 com $k = 1 / \|\mathbf{v}\|$ obter

$$\|\mathbf{u}\| = \|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\| = k\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\| = 1$$

O processo de multiplicar um vetor diferente de zero pelo recíproco de seu comprimento para obter um vetor unitário é chamado de ***normalização*** v.

AVISO

Às vezes, você verá a Fórmula 4 expressa como

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

Esta é apenas uma maneira mais compacta de escrever essa fórmula e *não* pretende transmitir que **v** está sendo dividido por $\|\mathbf{v}\|$

EXEMPLO 2 Normalizando um Vetor

Encontre o vetor unitário **u** que tem a mesma direção que $\mathbf{v} = (2, 2, -1)$.

Solução O vetor **v** tem comprimento

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

Assim, a partir de 4

$$\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2, 2, -1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Como uma verificação, você pode querer confirmar que $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Os vetores unitários padrão

Quando um sistema de coordenadas retangulares é introduzido R^2 ou R^3, os vetores unitários nas direções positivas de os eixos de coordenadas são chamados de ***vetores unitários padrão.*** Nestes R^2 vetores são denotados por

$$\mathbf{i} = (1, 0) \quad \text{and} \quad \mathbf{j} = (0, 1)$$

e em por R^3

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \text{and} \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

(Figura 3.2.2). Todo vetor em e toda combinação linear de vetores de $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ R^2 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ em R^3 pode ser expresso como um vetores unitários padrão escrevendo

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) = v_1(1, 0) + v_2(0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} \tag{5}$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} \tag{6}$$

Além disso, podemos generalizar essas fórmulas definindo os ***vetores unitários padrão em*** R^n $\mathbf{R}^n$ ser

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1) \tag{7}$$

nesse caso todo vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ em R^n pode ser expresso como

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \ldots + v_n\mathbf{e}_n \tag{8}$$

EXEMPLO 3 Combinações lineares de vetores unitários padrão

$$(2, \ -3, 4) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$
$$(7, 3, \ -4, 5) = 7\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3 + 5\mathbf{e}_4$$

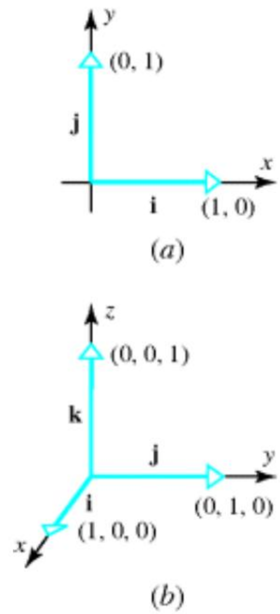


Figura 3.2.2

Distância em Rn

Se P_1 e P_2 São pontos em dois R^2 ou R^3, então o comprimento do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ é igual à distância *d* entre o pontos (Figura 3.2.3). Especificamente, $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ são pontos em R^2, então Fórmula 4 de se a Seção 3.1 implica que

$$d = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{9}$$

Esta é a fórmula de distância familiar da geometria analítica. Da mesma forma, a distância entre os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ em 3-espaço é

$$d(u,\ v) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{10}$$

Motivados pelas Fórmulas 9 e 10, fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 2

Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ são pontos em R^n, então denotamos a ***distância*** entre **u** e **v** por $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ e defini-lo para ser

$$d(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2} \tag{11}$$

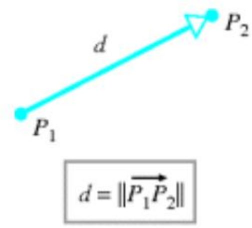


Figura 3.2.3

Observamos na seção anterior que as n-uplas podem ser vistas como vetores ou pontos. Na Definição 2, optamos por descrevê-las como pontos, pois essa parecia ser a interpretação mais natural. R^n.

EXEMPLO 4 Cálculo da Distância em *Rn*

Se

$$\mathbf{u} = (1, 3, -2, 7) \quad \text{and} \quad \mathbf{v} = (0, 7, 2, 2)$$

então a distância entre **u** e **v** é

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(1-0)^2 + (3-7)^2 + (-2-2)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{58}$$

Produto escalar

Nosso próximo objetivo é definir uma operação de multiplicação útil em vetores em e e então estender essa operação R^2 R^3 para . Para fazer isso, primeiro precisamos definir exatamente o que queremos dizer com o "ângulo" entre dois vetores R^n em ou . Para tanto, sejam **u** e **v** vetores não nulos em ou que tenham sido posicionados de forma que seus pontos iniciais R^2 R^3 R^2 R^3 coincidam. Definimos o ***ângulo entre* u *e* v** como sendo o ângulo ÿ determinado por **u** e **v** que satisfaz as desigualdades (Figura 3.2.4). $0 \leq \theta \leq \pi$

DEFINIÇÃO 3

Se **u** e **v** são vetores diferentes de zero em R^2 ou R^3, e se ÿ é o ângulo entre **u** e v, então o ***produto escalar*** e é (também chamado de ***produto interno euclidiano)*** de **u** e **v** é denotado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ definido como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos\theta \tag{12}$$

Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então definimos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ser 0.

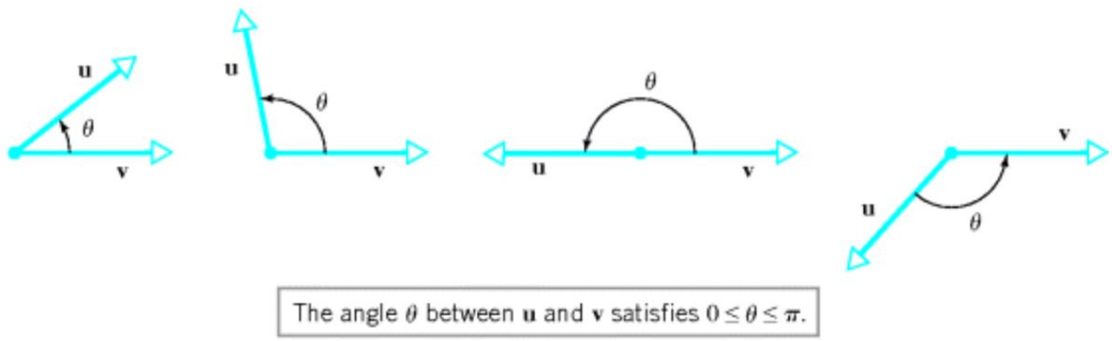


Figura 3.2.4

O sinal do produto escalar revela informações sobre o ângulo ÿ que podemos obter reescrevendo a Fórmula 12 como

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \tag{13}$$

Desde $0 \le \theta \le \pi$, decorre da Fórmula 13 e das propriedades da função cosseno estudadas em trigonometria que

- θ é agudo se $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$.
- θ é obtuso se $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$.
- $\theta = \pi/2$ se $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

EXEMPLO 5 Produto escalar

Encontre o produto escalar dos vetores mostrados na Figura 3.2.5.

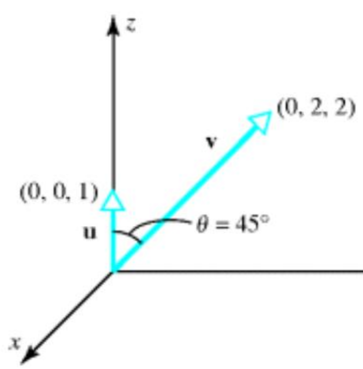


Figura 3.2.5

Solução Os comprimentos dos vetores são

$$\|\mathbf{u}\| = 1 \quad \text{and} \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

e o cosseno do ângulo ÿ entre eles é

$$\cos(45^\circ) = 1/\sqrt{2}$$

Assim, segue da Fórmula 12 que

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta = (1)\left(2\sqrt{2}\right)\left(1/\sqrt{2}\right) = 2$$

EXEMPLO 6 Um problema de geometria resolvido usando produto escalar

Encontre o ângulo entre uma diagonal de um cubo e uma de suas arestas.

Solução Seja *k* o comprimento de uma aresta e introduza um sistema de coordenadas como mostrado na Figura 3.2.6. Se deixarmos então o vetor $\mathbf{u}_1 = (k, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, k, 0)$, e $\mathbf{u}_3 = (0, 0, k)$,

$$\mathbf{d} = (k, k, k) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

é uma diagonal do cubo. Segue-se da Fórmula 13 que o ângulo ÿ entre **d** e a aresta $\mathbf{u}_1$ satisfaz

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{d}}{\|\mathbf{u}_1\|\|\mathbf{d}\|} = \frac{k^2}{(k)\left(\sqrt{3k^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Com a ajuda de uma calculadora obtemos

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54.74°$$

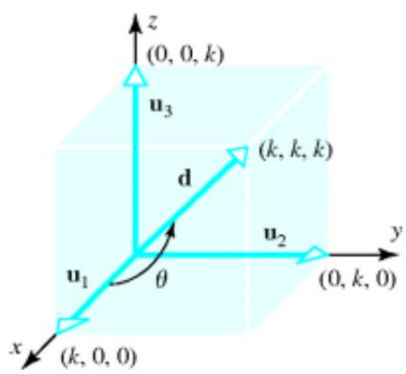


Figura 3.2.6

Observe que o ângulo ÿ obtido no Exemplo 6 não envolve k. Por que isso era de se esperar?

Forma de componente do produto escalar

Para fins computacionais, é desejável ter uma fórmula que expresse o produto escalar de dois vetores em termos de componentes. Derivaremos essa fórmula para vetores no espaço tridimensional; a derivação para vetores no espaço bidimensional é semelhante.