Exercices Corrigés
Probabilités conditionnelles

Le Max De Culture

Dernière mise à jour le 19 mai 2021

Sujet

Exercice 1

Dans une usine, on utilise conjointement deux machines M_1 et M_2 pour fabriquer des pièces cylindriques en série. Pour une période donnée, leurs probabilités de tomber en panne sont respectivement $0,01$ et $0,008$. De plus, la probabilité de l'événement "la machine M_2 est en panne sachant que M_1 est en panne" est égale à $0,4$.

1) Quelle est la probabilité d'avoir les deux machines en panne au même moment ?
2) Quelle est la probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne ?

Exercice 2

À l'IUT de Digne, 40% des garçons et 15% des filles mesurent plus de $1,80$m. De plus, 60% des élèves sont des filles. Sachant qu'un él-ve, choisi au hasard, mesure plus de $1,80$m, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

Exercice 3

Dans une université, une enquête sur le tabagisme a donné les résultats suivants :

	Hommes	Femmes
Fumeurs	420	75
Non fumeurs	280	225

On choisit au hasard l'une des 1000 personnes interrogées. On note A l'événement "en réponse à l'enquête, la personne a déclaré fumer" et on note B l'événement "en réponse à l'enquête, la personne a déclaré être du sexe féminin".

1) A et B sont-ils indépendants pour l'équiprobabilité P définie sur l'ensemble des 1000 personnes interrogées ?
2) Même question pour la même enquête dans une autre université où les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

	Hommes	Femmes
Fumeurs	440	360
Non fumeurs	110	90

Exercice 4

Au cours de la fabrication d'un certain type de lentilles, chacune de ces lentilles doit subir deux traitements notés T_1 et T_2. On prélève au hasard une lentille dans la production.
On désigne par A l'événement : "la lentille présente un défaut pour le traitement T_1.
On désigne par B l'événement : "la lentille présente un défaut pour le traitement T_2.
Une étude a montré que :

- la probabilité qu'une lentille présente une défaut pour le traitement T_1 est $P(A) = 0,10$;
- la probabilité qu'une lentille présente une défaut pour le traitement T_2 est $P(A) = 0,20$;
- la probabilité qu'une lentille présente aucun des deux défauts est $0,75$.

1) Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T_1 ou T_2.
2) Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour les deux traitements T_1 et T_2.
3) Les événements T_1 et T_2 sont-ils indépendants ?
4) Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.
5) Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement T_2, sachant qu'elle présente un défaut pour le traitement T_1.

Solution

Exercice 1

On note P_1 l'événement "la machine M_1 est en panne" et P_2 l'événement "la machine M_2 est en panne".

1) La probabilité d'avoir les deux machines en panne au même moment se traduit par $P(P_1 \cap P_2)$. Pour la calculer, on utilise la formule des probabilités conditionnelles : $P_{P_1}(P_2) = \dfrac{P(P_1 \cap P_2)}{P(P_1)}$ et on en déduit que $P(P_1 \cap P_2) = P_{P_1}(P_2) \times P(P_1)$. On peut maintenant substituer par les valeurs respectives des probabilités et on a :

$$\boxed{P(P_1 \cap P_2) = 0,4 \times 0,01 = 0,004}$$

La probabilité d'avoir les deux machines en panne au même moment vaut donc $0,004$.

2) L'événement "avoir au moins une machine qui fonctionne" est l'événement contraire d'avoir les deux machines en panne. La probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne se traduit par $P(\overline{P_1} \cup \overline{P_2})$ et

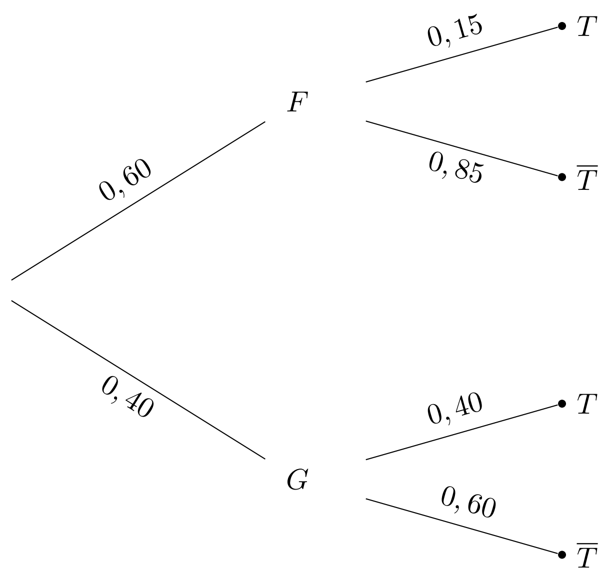
$$\boxed{P(\overline{P_1} \cup \overline{P_2}) = 1 - P(P_1 \cap P_2) = 1 - 0,004 = 0,996}$$

La probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne vaut donc $0,996$.

Exercice 2

Pour nous aider, nous allons réaliser un arbre de probabilité. Pour ce faire, on distingue les événements suivants :
On note F l'événement : "l'élève est une fille".
On note G l'événement : "l'élève est un garçon".
On note T l'événement : "l'élève mesure plus de $1,80$m".

Par lecture de l'énoncé, on a $P(F) = 0,60$, $P_G(T) = 0,40$ et $P_F(T) = 0,15$. On complète l'arbre avec ces probabilités et leurs complémentaires.



La question est maintenant de calculer la probabilité que l'élève choisi au hasard soit une fille sachant qu'elle mesure plus de $1,80$m. Cet événement se traduit par $P_T(F)$. Une fois de plus, on utilise la formule des probabilités conditionnelles et on a $P_T(F) = \dfrac{P(F \cap T)}{P(T)}$.

On cherche donc à calculer $P(T)$. $F \cap T$ et $G \cap T$ forment une partition de T. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(T) &= P(F \cap T) + P(G \cap T) \\ &= P(F) \times P_F(T) + P(G) \times P_G(T) \\ &= 0,60 \times 0,15 + 0,40 \times 0,40 \\ &= 0,25 \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\boxed{P_T(F) = \frac{P(F \cap T)}{P(T)} = \frac{0,09}{0,25} = 0,36}$$

La probabilité que l'élève choisi au hasard soit une fille sachant qu'elle mesure plus de $1,80$m vaut donc $0,36$.

Exercice 3

1) Par définition, les événements A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Par lecture du tableau, on a $P(A) = \dfrac{495}{1000}$, $P(B) = \dfrac{300}{1000}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{75}{1000}$.
   Or, $\boxed{P(A) \times P(B) = \dfrac{495}{1000} \times \dfrac{300}{1000} = \dfrac{297}{1000} \neq \dfrac{75}{1000}}$. Donc, les événements ne sont pas indépendants.
2) Par définition, les événements A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Par lecture du tableau, on a $P(A) = \dfrac{800}{1000}$, $P(B) = \dfrac{450}{1000}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{360}{1000} = \dfrac{9}{25}$.
   Or, $\boxed{P(A) \times P(B) = \dfrac{800}{1000} \times \dfrac{450}{1000} = \dfrac{9}{25} = P(A \cap B)}$. Donc, les événements sont indépendants.

Exercice 4

Par lecture de l'énoncé, on a $P(A) = 0,10$, $P(B) = 0,20$ et $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,75$

1) La probabilité qu'une lentille prélevée au hasard dans la production présente un défaut pour au moins un des deux traitements T_1 ou T_2 se traduit par $P(A \cup B)$. C'est l'événement contraire d'avoir une lentille qui ne présente aucun des deux défauts. Ainsi,
   $$\boxed{P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,75 = 0,25}$$
   La probabilité qu'une lentille prélevée au hasard dans la production présente un défaut pour au moins un des deux traitements T_1 ou T_2 vaut donc $0,25$.
2) La probabilité qu'une lentille prélevée au hasard dans la production présente un défaut pour les deux traitements T_1 et T_2 se traduit par $P(A \cap B)$. Pour calculer cette probabilité, on utilise la formule de Poincaré qui nous dit que $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$. Ainsi,
   $$\boxed{P(A \cap B) = 0,10 + 0,20 - 0,25 = 0,05}$$
   La probabilité qu'une lentille prélevée au hasard dans la production présente un défaut pour les deux traitements T_1 et T_2 vaut donc $0,05$.

3) Par définition, les événements A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
Or, $\boxed{P(A) \times P(B) = 0,10 \times 0,20 = 0,02 \neq 0,05}$. Donc, les événements ne sont pas indépendants.

4) La probabilité qu'une lentille prélevée au hasard dans la production présente un défaut pour un seul des deux traitements correspond à $P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$. Il y a deux méthodes pour calculer cette probabilité.

— On a

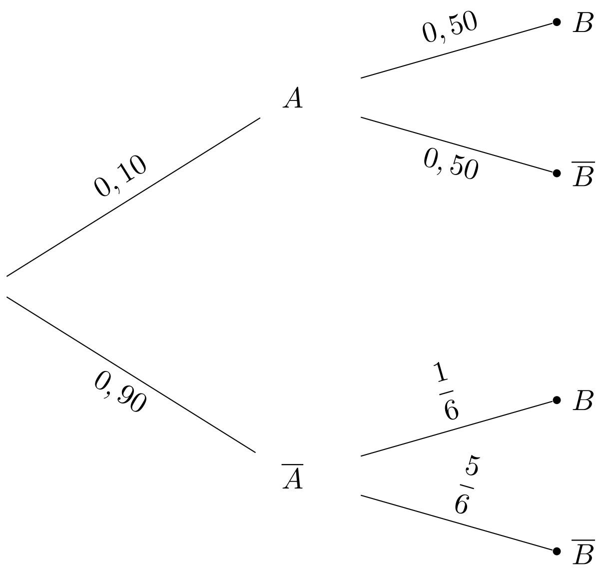
$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0,10 - 0,05 + 0,20 - 0,05 \\ &= 0,2 \end{aligned}$$

— Sinon, on peut dresser l'arbre de probabilité suivant à partir de l'énoncé :

En effet, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,75$ donc $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{10}} = \dfrac{5}{6}$.

Et de plus, $P(A \cap B) = 0,05$ donc $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,05}{0,10} = 0,50$.

Il ne reste plus qu'à calculer les probabilités complémentaires pour dresser l'arbre :



Et donc, finalement, par le principe multiplicatif et additif,

$$\boxed{P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 0,10 \times 0,5 + 0,90 \times \frac{1}{6} = 0,2}$$

La probabilité qu'une lentille prélevée au hasard dans la production présente un défaut pour un seul des deux traitements vaut donc $0,2$.

5) La probabilité qu'une lentille prélevée au hasard dans la production présente un défaut pour le traitement T_2 sachant qu'elle présente une défaut pour le traitement T_1 correspond à $P_A(B)$. On utilise la formule des probabilités totales et on a :

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,05}{0,10} = 0,5}$$

La probabilité qu'une lentille prélevée au hasard dans la production présente un défaut pour le traitement T_2 sachant qu'elle présente une défaut pour le traitement T_1 vaut donc $0,5$.