# 2024-2025(春学期) 概率论与数理统计试题(A卷)

**请在答题卡的规定区域内作答，试题上作答无效。**

## 一、填空题（每空 2 分，共 20 分）

1. 设随机事件$A$与$B$满足$P(\overline{A}) = 0.5$，$P(\overline{A}B) = 0.3$．若$A \subset B$，则$P(\overline{B}) =$________．

   若$A$与$B$相互独立，则$P(\overline{B}) =$________．

2. 设在某火车站从上午 7 点起每隔 15 分钟有一列开往甲地的火车；又从 7 点 5 分起，每隔 15 分钟有一列开往乙地的火车．一旅客在上午 7 点 10 分到 8 点 10 分到达该站是等可能的，且见到火车就上．则他被带到甲地的概率等于________．

3. 设随机变量$X,Y$相互独立，且都服从泊松分布，又知$\mathrm{E}X = 2$，$\mathrm{D}(2Y+1) = 4$，则$\mathrm{E}(2X-Y)^2 =$________．

4. 设随机变量$X,Y$相互独立，且都服从区间$[0,1]$上的均匀分布，则概率$P(Y + X^2 > 1) =$________．

5. 甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一球放入乙盒中，再从乙盒中任取一球．令$X,Y$分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数，则$\mathrm{E}(XY) =$________．

6. 设总体$X \sim N(0,3)$，$X_1, X_2, \cdots, X_8$为来自此总体的简单随机样本，则统计量$Y = \dfrac{X_2+X_4+X_6}{\sqrt{X_1^2+X_3^2+X_5^2}}$服从的分布为________．

7. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的一个样本，样本均值$\overline{x} = 9.5$，参数$\mu$的置信水平为 0.95 的置信区间的置信下限为 8.2，则$\mu$的置信水平为 0.95 的置信区间为________．

8. 设随机变量$X$的分布律为$P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{2}$，$Y$服从区间$[0,1]$上的均匀分布，且$X$与$Y$独立．令$Z = X + Y$，则$P(Z \le 1.5) =$________．

9. 设随机变量序列$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$独立同服从参数为 1 的指数分布，则$\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{X_i} \ge \frac{n\sqrt{\pi}}{2}\right) =$________．

## 二、（15 分）

对数学考试的结果分析发现，对数学有兴趣的学生如果努力，有 90%的概率考试得优，不努力的话有 60%的概率考试得优；对数学没兴趣的学生如果努力，有 50%的概率考试得优，不努力则有 5%的概率考试得优．假设某班里对数学有兴趣的占 60%，有兴趣的学生中努力的占 50%，无兴趣的学生中努力的占 50%．

(1) 求该班考试成绩的优秀率；

(2) 如果已知某同学考试成绩为优秀，求他对数学感兴趣的概率．

## 三、（10 分）

设随机向量$(X,Y)$的概率分布为

| $X$ \ $Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0.4 | a |
| 1 | b | 0.1 |

已知事件$\{X=0\}$与事件$\{X+Y=1\}$相互独立．

(1) 求$a,b$的值；

(2) 求$X$与$Y$的相关系数．

## 四、（15 分）

若随机向量$(X,Y)$的概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} ce^{-(x+y)}, & 0 \le x \le y, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1) 求常数$c$；

(2) 求$X$与$Y$的边缘概率密度函数；

(3) 求$P(Y<1 \mid X<1)$；

(4) 求$f_{Y|X}(y|x)$．

## 五、（15 分）

设总体$X \sim U(\theta, 2\theta)$，其中$\theta > 0$是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$X$的简单随机样本．

(1) 求参数$\theta$的矩估计量$\widehat{\theta_1}$，判断$\widehat{\theta_1}$是否是$\theta$的无偏估计，并说明理由；

(2) 求参数$\theta$的最大似然估计量$\widehat{\theta_2}$．

六、（10 分）设$X_1,X_2,\cdots,X_{18}$为来自正态总体$N(1,1)$的样本，记$Y=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}X_i$，

$$Z_1=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}(X_i+X_{i+3}+X_{i+6}-3Y)^2,\qquad Z_2=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}(X_{i+9}+X_{i+12}+X_{i+15}-3)^2.$$

(1) 求$Z_2$的分布（写出分布类型及分布参数即可）；

(2) 求$D(Z_1+Z_2)$.

七、（15 分）设总体$X\sim N(\mu,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_9$为来自总体$X$的一个样本. 要在显著性水平$\alpha=0.05$ 下检验假设$H_0:\mu=0\leftrightarrow H_1:\mu\neq 0$. 如果该检验的拒绝域为$C=\{|\overline{X}|\geq k\}$. (已知$u_{0.025}=1.96$，$u_{0.05}=1.65$，$\Phi(2.40)=0.992$. 计算结果保留小数点后三位数字)

(1) 求$k$的值；

(2) 若抽样后得样本均值$\overline{x}=1$，是否可以据此推断$\mu=0$（$\alpha=0.05$）？

(3) 如果$C=\{|\overline{X}|\geq 0.8\}$作为检验假设$H_0:\mu=0$ 的拒绝域，试求检验的显著性水平.

# 西北工业大学考试试题(A 卷)

2024 —2025 学年 秋 季 学期

开课学院 数学与统计学院 课程 概率论与数理统计 学时 48

考试日期 2024.12.31 考试时间 2 小时 考试形式（~~开~~ 闭）（A ~~B~~）卷

**请在答题卡的规定区域内作答，否则答案无效。**

**一、判断题（每空 2 分，共 8 分）对的涂 T，错的涂 F**

1.（ X ）对于随机事件$A$、$B$、$C$，若$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，则称$A$、$B$、$C$相互独立.

$A\cap B=\emptyset$

2.（ √ ）设随机事件$A$与$B$互不相容，则$P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$.

3.（ √ ）若随机变量$X\sim B(n,p)$，$Y\sim B(m,p)$，且 $X$ 和 $Y$独立，则 $Z=X+Y\sim B(m+n,p)$.

4.（ X ）二维均匀分布的条件分布和边际分布都是一维均匀分布.

**二、填空题（每空 2 分，共 12 分）**

1. 设随机变量$X$的密度函数为$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，$Y=e^X$，$Y$的密度函数 $f_Y(y)=$ $\begin{cases}\frac{1}{y^2}, & y>1\\ 0, & y\le 1\end{cases}$.

2. 设随机变量$X$的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1.\end{cases}$ 则$P(0\le X\le 1)=$ $1-e^{-1}$

3. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自标准正态总体$X\sim N(0,1)$的一个样本，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S_n^{*2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，则$D(S_n^{*2})=$ $\frac{2\sigma^4}{n-1}$.

注：命题纸上一般不留答题位置，试题请用小四、宋体打印且不出框。

4. 设随机变量 $X$ 服从参数为 1 的泊松分布，则 $E(|X-EX|)=$ $2e^{-1}$.

5. 假设长安校区云天苑 A 楼门口每辆共享单车是无法骑行的概率为 0.2，每天 8 点前有 120 人需要骑共享单车赶早八的课．在保证有 97.5%把握所有人都能骑上好的共享单车，用中心极限定理估算，应至少配置______辆共享单车合适？
$(\Phi(1.96)=0.975)$ 247.

6. 设$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$为取自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本.样本均值观测值 $\bar{x}=8$，参数$\mu$的双侧置信水平为 0.95 的置信区间的上限为 10，则$\mu$的双侧置信水平为 0.95 的置信区间为 (6, 10).

三、(12 分)某保险公司将被保险人分成三类：谨慎型、普通型和冲动型，统计资料显示：三类被保险人的占比依次为 20%、50%和 30%，三类被保险人在一年内发生事故的概率分别为 0.05、0.15 和 0.30。(计算结果保留到小数点后 3 位)
求：(1) 某被保险人在一年内出事故的概率；
(2) 若已知某位被保险人在一年内出了事故，问其是冲动型客户的概率。

四、(12 分)设二维随机变量$(X,Y)$在区域$D=\{(x,y)|0<y<\sqrt{1-x^2}\}$上服从均匀分布，

令$Z_1=\begin{cases}1, X-Y>0,\\0, X-Y\le 0.\end{cases}$ $\quad Z_2=\begin{cases}1, X+Y>0,\\0, X+Y\le 0.\end{cases}$

求 (1) $(Z_1,Z_2)$的联合分布律； (2) $Z_1,Z_2$是否相关，请给出理由。

五、(14 分)设$X$的概率分布为$P(X=1)=P(X=2)=\frac{1}{2}$，在给定$X=i$的条件下，$Y\sim U(0,i)$，

求：(1) $P\left(Y\le\frac{1}{2}\middle|X=1\right)$； (2) $P\left(Y\le\frac{1}{2}\right)$； (3) $Y$的密度函数$f_Y(y)$.

六、(12 分) 设二维随机变量$(X,Y)$的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}12e^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

七、 (15 分)设总体$X$的概率密度函数为

$$f_X(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geq\mu,\\ 0, & x<\mu.\end{cases}$$

其中$\mu$为已知参数，$\sigma>0$是未知参数，$A$是常数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自该总体$X$的一个简单随机样本，

(1) 求$A$；(2) 求$\sigma^2$的最大似然估计量$\hat{\sigma}^2$；(3) $\hat{\sigma}^2$是否是$\sigma^2$的无偏估计，请说明理由.

八、(15 分)某锌矿的南北两支矿脉中，各抽取样本容量分别为 10 与 9 的样本分析后，算得其样本含锌（%）均值及样本方差分别如下：

南支：　$\bar{x}_1=0.252$，$S_1^2=0.140$，$n_1=10$；

北支：　$\bar{x}_2=0.281$，$S_2^2=0.182$，$n_2=9$，

若南北两支矿脉含锌量服从正态分布，在$\alpha=0.05$的条件下，问南北两支矿脉含锌量的平均值是否可看作一样？

($F_{0.025}(8,9)=4.10$，$F_{0.025}(9,8)=4.3572$，$t_{0.025}(17)=2.1098$, $t_{0.025}(18)=2.1009$, ,计算结果保留到小数点后 4 位)