MA0001 Brukerkurs i matematikk A
Høst 2018

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 6

Innleveringsoppgaver

$\boxed{1}$ **a)** La a være et reelt tall. Regn ut grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+a)^2 - a^2}{x}.$$

b) La $b \neq 0$. Regn ut grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{(x+b)^2} - \frac{1}{b^2}\right).$$

Hint: Felles brøkstrek!

$\boxed{2}$ La $c > 0$.

a) Regn ut grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+c} - \sqrt{c}}{x}.$$

b) Regn ut grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x+c}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right).$$

$\boxed{3}$ I denne oppgaven skal vi se på tredjegradsligningen

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{1}$$

a) La $a = 0$. Velg b, c og d slik at ligningen (1) ikke har en løsing.

b) Anta at $a > 0$ og bestem grenseverdiene

$$\lim_{x\to\infty} \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to -\infty} \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right).$$

Bestem grenseverdiene under den motsatte antagelsen $a < 0$.

c) Forklar hvorfor ligningen (1) alltid har minst én løsning når $a \neq 0$.

Hint: Skjæringssetningen!

Anbefalte øvingsoppgaver

Fra Avsnitt 3.2 (side 108—109) i *Calculus for Biology and Medicine*, 3. utgave av Claudia Neuhauser.

- 15, 17, 19, 29, 33, 47.

Fra Avsnitt 3.5 (side 122–123).

- 1, 3.

OBS: Disse oppgaven skal *ikke* leveres inn!

MA0001 – Øving nr 6 Gruppe 4

Magnus L. Holtet

Oppgave 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+a)^2 - a^2}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left((x+a)-a\right)\left((x+a)+a\right)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x)\,(x+2a)}{x} = \underline{\underline{2a}}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{(x+b)^2} - \frac{1}{b^2}\right)$$

$(x+b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$

$b^2 \cdot \; = x^2b^2 + 2b^3x + b^4$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{\cancel{b^2} - (x^2 + 2bx + \cancel{b^2})}{x^2b^2 + 2b^3x + b^4}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{-x^2 - 2bx}{x^2b^2 + 2b^3x + b^4}\right)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-x^2 - 2bx}{x^3 b^2 + 2b^3 x^2 + x b^4}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(-x - 2b)}{x(x^2 b^2 + 2b^3 x + b^4)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-x - 2b}{b^2(x^2 + bx + b^2)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-2b}{b^4} = \underline{\underline{\frac{-2}{b^3}}}$$

Oppgave 2

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + c} - \sqrt{c}}{x} \quad \Big| \cdot \sqrt{x+c} + \sqrt{c}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + c - c}{x \cdot (\sqrt{x + c} + \sqrt{c})}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + c} + \sqrt{c}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{c}}}}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x+c}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{c} - \sqrt{x+c}}{\sqrt{x+c}\cdot\sqrt{c}}\right) \quad \Big| \cdot \sqrt{c} + \sqrt{x+c}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{c - x + c}{\sqrt{x+c}\cdot\sqrt{c}\cdot\left(\sqrt{c}+\sqrt{x+c}\right)}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1}{\sqrt{x+c}\cdot\sqrt{c}\cdot\left(\sqrt{c}+\sqrt{x+c}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} \underline{\underline{\frac{-1}{c\cdot 2\sqrt{c}}}}$$

Oppgave 3

a)

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad , \quad a = 0$$

$$c^2 - 4\cdot b\cdot d < 0 \longrightarrow$$ Rotan i abc-formelen må være < 0 for å ikke ha noen løsning

$$c^2 < 4\cdot b\cdot d$$

$$c < \pm\sqrt{4\cdot b\cdot d} \qquad b > \frac{c^2}{4\cdot d} \qquad d > \frac{c^2}{4\cdot b}$$

$\underline{\underline{\textbf{Eks;}\quad c = 2, \quad b = 1, \quad d = 4}}$

b) $a > 0$

$$\lim_{x \to \infty} a(x^3) + bx^2 + cx + d$$

$$a(\infty)^3 + b(\infty)^2 + c \cdot \infty + d = \underline{\underline{\infty}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a(x^3) + bx^2 + cx + d$$

$$\lim_{x \to \infty} -a \cdot \infty^3 + b \cdot \infty^2 - c \cdot \infty + d = \underline{\underline{-\infty}}$$

Siden x^3 ~~a~~ så mye større enn de andre potensene, så vil denne trumfe de andre.

Når $a < 0$ endres fortegnet på tredjegradsleddet og da har vi at

$$\lim_{x \to \infty} ax^3 + bx^2 + cx + d = \underline{\underline{-\infty}}$$

og

$$\lim_{x \to -\infty} ax^3 + bx^2 + cx + d = \underline{\underline{\infty}}$$

c)

$D_f = [-\infty, \infty]$

f er kontinuerlig på intervallet $[-\infty, \infty]$.

Og 0 er da $f(-\infty) < 0 < f(\infty)$.

Det finnes altså et tal c slik at

$$f(c) = 0$$