

Numerical Python – ODE – Exercise 4

Имуются точное и приближенное решения $I \cos(\omega t)$ и $I \cos(\tilde{\omega} t)$. В качестве погрешности фазы будем понимать задержку по времени пика I точного решения и соответствующего пика приближенного решения после m периодов колебаний. Конкретнее, будем рассматривать локальные максимумы.

1 Аналитическое доказательство

Пики для аналитического и численного решения задаются формулами

$$t_m = \frac{2\pi}{\omega} m$$

и

$$\tilde{t}_m = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}} m.$$

Погрешность фазы получается равной

$$\varepsilon_m = t_m - \tilde{t}_m = \left(\frac{2\pi}{\omega} - \frac{2\pi}{\tilde{\omega}} \right) m,$$

то есть является линейной функцией относительно m .

2 Численное доказательство

Предположим, что погрешность фазы ε_m после m периодов колебаний представима в виде

$$\varepsilon_m = km. \tag{1}$$

Тогда, в силу того, что численное решение представляется сеточной функцией, представление (??) верно с точностью до τ , где τ – величина шага. То есть

$$km - \tau \leq \varepsilon_m \leq km + \tau. \tag{2}$$

Проведём серию вычислений $\frac{e_m}{m}$ для различных m . Если предположение верно, то

$$\frac{e_m}{m} \approx k$$

с точностью до $\frac{\tau}{m}$.