Задача 1: Использование линейной и квадратичной функций для тестирования

Рассмотрим задачу для ОДУ:

$$u'' + w^2 u = f(t)$$
$$u(0) = U$$
$$u'(0) = V$$
$$t \in (0, T]$$

Аппроксимируем уравнение разностной схемой

$$y^n_{\bar{t}t} + w^2 y^n = f^n$$

<u>Вывод уравнения для нахождения приближенного решения y^1 на первом временном шаге.</u>

Вторую производную $y^n_{\bar{t}t}$ аппроксимируем следующим образом:

$$y^n_{\bar{t}t} = \frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2}$$

подставляем в исходное уравнение:

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + w^2 y^n = f(t_n)$$

где $t_n = \tau n, \tau$ – шаг по времени.

Выразим отсюда y^{n+1}.

$$y^{n+1} = -\tau^2 w^2 y^n + f(t_n)\tau^2 + 2y^n - y^{n-1}$$

при $n = 0$ найдем решение на первом временном слое:

$$y^1 = -\tau^2 w^2 y^0 + f(t_0)\tau^2 + 2y^0 - y^{-1}$$

y^{-1} найдем из условия $u'(0) = V$, аппроксимируя u' по формуле для центральной разностной производной:

$$y^0_{\dot{x}} = \frac{y^1 - y^{-1}}{2\tau}$$

Отсюда имеем:

$$y^{-1} = -2\tau V + y^1$$

Подставим в формулу для y^1 и получим:

$$y^1 = -\tau^2 w^2 U + f(0)\tau^2 + 2U + 2\tau V - y^1$$

$$y^1 = \frac{-\tau^2 w^2 U + f(0)\tau^2 + 2U + 2\tau V}{2} = \frac{-\tau^2 w^2 U + f(0)\tau^2}{2} + U + \tau V$$