Михед В.

Упражнение 5

Найти аналитическое решение волнового уравнения с затуханием

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

Решение волнового уравнения с затуханием будем искать в виде:

$$u_e(x,t) = e^{-\beta t}\sin kx\,(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

Из граничных условий имеем:

$$u_e(0,t) = 0$$

$$u_e(l,t) = e^{-\beta t}\sin kl\,(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = 0$$

Найдем k из второго граничного условия:

$$\sin kl = 0$$

$$k = \frac{\pi n}{l}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

С учетом этого точное решение запишется в виде:

$$u_e(x,t) = e^{-\beta t}\sin\frac{\pi n}{l}x\,(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

Начальное условие имеет вид:

$$u(x,0) = e^{-\beta 0}\sin\frac{\pi n}{l}x\,(A\cos 0 + B\sin 0)$$

$$u(x,0) = A\sin\frac{\pi n}{l}x$$

Вычислим производные $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ решения $u_e(x,t)$:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\beta e^{-\beta t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)\sin\frac{\pi n}{l}x + e^{-\beta t}\omega(B\cos\omega t - A\sin\omega t)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \big(\beta^2 e^{-\beta t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) - 2\beta e^{-\beta t}\omega(B\cos\omega t - A\sin\omega t) + e^{-\beta t}\omega^2(-A\cos\omega t - B\sin\omega t\,)\big)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = e^{-\beta t}\frac{\pi n}{l}\cos\frac{\pi n}{l}x\,(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -e^{\beta t}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(A\cos\omega t + B\sin\omega t)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

Подставим вычисленные производные в исходное уравнение и получим:

при $f(x,t) = 0$:

$$e^{-\beta t}\Bigg(A\beta^2\cos\omega t - A\beta b\cos\omega t + Ac^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\cos\omega t - 2\beta B\omega\cos\omega t + Bb\omega\cos\omega t - A\omega^2\cos\omega t + \beta^2 B\sin\omega t - \beta Bb\sin\omega t + Bc^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\sin\omega t + 2A\beta\omega\sin\omega t - Ab\omega\sin\omega t - B\omega^2\sin\omega t\Bigg)\sin\frac{\pi n}{l}x = 0$$

Имеем следующее уравнение для нахождения неизвестных β, ω, A, B:

$$A\beta^2\cos\omega t - A\beta b\cos\omega t + Ac^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\cos\omega t - 2\beta B\omega\cos\omega t + Bb\omega\cos\omega t - A\omega^2\cos\omega t + \beta^2 B\sin\omega t - \beta Bb\sin\omega t + Bc^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\sin\omega t + 2A\beta\omega\sin\omega t - Ab\omega\sin\omega t - B\omega^2\sin\omega t = 0$$

Группируя слагаемые, получаем:

$$\cos\omega t\left(A\beta^2 - A\beta b + Ac^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - 2\beta B\omega + Bb\omega - A\omega^2\right) + \sin\omega t\left(\beta^2 B - \beta Bb + Bc^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 + 2A\beta\omega - Ab\omega - B\omega^2\right) = 0$$

Функции $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ являются линейно независимыми, и поэтому можно приравнять коэффициенты, стоящие при этих функциях, нулю.

Отсюда получаем систему уравнений для нахождения неизвестных параметров:

$$\begin{cases} A\beta^2 - A\beta b + Ac^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - 2\beta B\omega + Bb\omega - A\omega^2 = 0 \\ \beta^2 B - \beta B b + Bc^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 + 2A\beta\omega - Ab\omega - B\omega^2 = 0 \end{cases}$$

Имеем два уравнения и 4 неизвестных.

Положим $\beta = 0, A = 1$

Остальные неизвестные найдем из полученной системы.

$$\begin{cases} c^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 + Bb\omega - \omega^2 = 0 \\ Bc^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - b\omega - B\omega^2 = 0 \end{cases}$$

одним из решений этой системы являются числа

$$\omega = \frac{\sqrt{-b^2 + 2c^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - b\sqrt{\left(b^2 - 4c^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right)}}}{\sqrt{2}}$$

$$B = \frac{1}{bc^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}\left(b^2\omega - c^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\omega + \omega^3\right)$$

Начально-краевая задача:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$0 \le x \le l, 0 \le t \le T$$

начальное условие:

$$u(x,0) = A\sin\frac{\pi n}{l}x$$

граничные условия:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

Аналитическое решение задачи:

$$u_e(l,t) = e^{-\beta t}\sin kl\,(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = 0$$

где

$$\beta = 0$$

$$\omega = \frac{\sqrt{-b^2 + 2c^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - b\sqrt{\left(b^2 - 4c^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right)}}}{\sqrt{2}}$$

$$A = 1$$

$$B = \frac{1}{bc^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}\left(b^2\omega - c^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\omega + \omega^3\right)$$