Дата последней сборки документа:
19 февраля 2022 г. в 19:50

Общие и специальные вопросы оптимизации

Подвойский А.О.

Краткое содержание

Содержание

1. Полезные ссылки

https://github.com/ceandrade/brkga_mip_feasibility

2. Методы решения задач линейного программирования

2.1. Симплекс-метод Данцига

Постановка задачи. Найти максимум функции

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leftarrow c^T x$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, \dots, m\ (m < n) \leftarrow Ax = b,$$

$$x_j \geqslant 0,\ j = 1, \dots, n.$$

Такая постановка называется *канонической*, а искомое решение $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$ – *оптимальным.*

Замечания:

- Максимизируемая функция и ограничения линейны по $x_j,\ j = 1, \dots, n$,
- Задача содержит ограничения на неотрицательность переменных, присутствие которых диктуется процедурой симплекс-метода. Если по физической постановке задачи какая-либо переменная, например, x_n, неограничена по знаку, то ее можно представить в виде $x_n = x_{n+1} - x_{n+2}$, где $x_{n+1}, x_{n+2} \geqslant 0$,
- В ограничениях $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, \dots, m\ (m < n)$ будем считать переменные $b_i \geqslant 0,\ i = 1, \dots, m$.

Стратегия метода Данцига решения описаной задачи основана на особенностях постановки этой задачи. Множество

$$X = \{x \mid \sum_{i}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, \dots, m,\ x \in \mathbb{R}^n,\ x_j \geqslant 0,\ j = 1, \dots, n\}$$

допустимых решений задачи – есть выпуклое множество, которое геометрически представляет собой *выпуклый политоп*[1], имеющий конечное число *крайних точек.*

Крайней точкой выпуклого множества X называется точка $x \in X$, которая не может быть выражена в виде выпуклой комбинации других точек $y \in X, x \neq y$.

Стратегия решения задачи симплекс-методом состоит в направленном переборе базисных решений, определяющих крайние точки политопа. Направленность перебора предполагает следующую организацию вычислительного процесса [2]:

1. Нахождение базисного решения (метод Гаусса-Жордана, переход к M-задаче),
2. Переход от одного базисного решения к другому таким образом, чтобы обеспечить возрастание целевой функции (другими словами, переход от одной *вершины политопа* к другой в направлении возрастания целевой функции).

[1] Политоп – подмножество Евклидова пространства, представимое объединением симплексов (n-мерное обобщение треугольника)

3. Методы решения задач линейного целочисленного программирования

3.1. Метод ветвей и границ

Постановка задачи (Mixed Integer Linear Programming, MILP)

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i, \ i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geqslant 0, \ x \in \mathbb{Z}, \ j = 1, \dots, n.$$

Замечание

Описанная задача является задачей линейного целочисленного программирования. Ограничения, связанные с целочисленностью, могут быть наложены не на все переменные, а лишь на их часть

Стратегия поиска

Для корня дерева ветвей-и-границ (branch-and-bound tree) описанная задача решается *симплекс-методом* без учета ограничений на целочисленность (т.е. в релаксированной постановке). Считается, что она имеет решение. На полученном оптимальном решении $x^{0*} = (x_1^{0*}, \dots, x_n^{0*})$ вычисляется значение *целевой функции* $f(x^{0*})$.

Если решение x^{0*} является целочисленным, то поставленная задача решена. Если решение x^{0*} оказывается нецелочисленным, то значение $f(x^{0*})$ (полученное для решаемой задачи в релаксированной постановке) является *верхней границей* (потому что мы решаем задачу на максимум) возможных оптимальных значений $f(x)$ на целочисленных решениях.

При нецелочисленном решении дальнейшая процедура решения задачи состоит в ее ветвлении на две подзадачи. Целью этого ветвления является разбиение множества допустимых решений на два подмножества путем построения дополнительных ограничений таким образом, чтобы исключить нецелочисленную точку x^{0*} и сделать решение по крайней мере одной из задач целочисленным по одной выбранной координате x_k.

Координатой x_k может быть [2, стр. 339]:

1. Нецелочисленная координата с наименьшим или наибольшим индексом.
2. Нецелочисленная координата с наименьшей или наибольшей дробной частью.
3. Нецелочисленная координата, которой соответствует наибольший коэффициент в целевой функции.
4. Нецелочисленная координата, выбранная на основани приоритетов, определяемых физическим содержанием задачи.

Для построения дополнительных ограничений округляем нецелочисленное решение вниз и исследуем область значений левее, т.е. $x_k \leqslant \lfloor x_k^{0*} \rfloor$, и округляем вверх и исследуем область правее, т.е. $\lceil x_k^{0*} \rceil \leqslant x_k$.

Построение дополнительных ограничений позволило исключить из рассмотрения оптимальное нецелочисленное решение x^{0*} и обеспечить целочисленность значений координаты x_k.

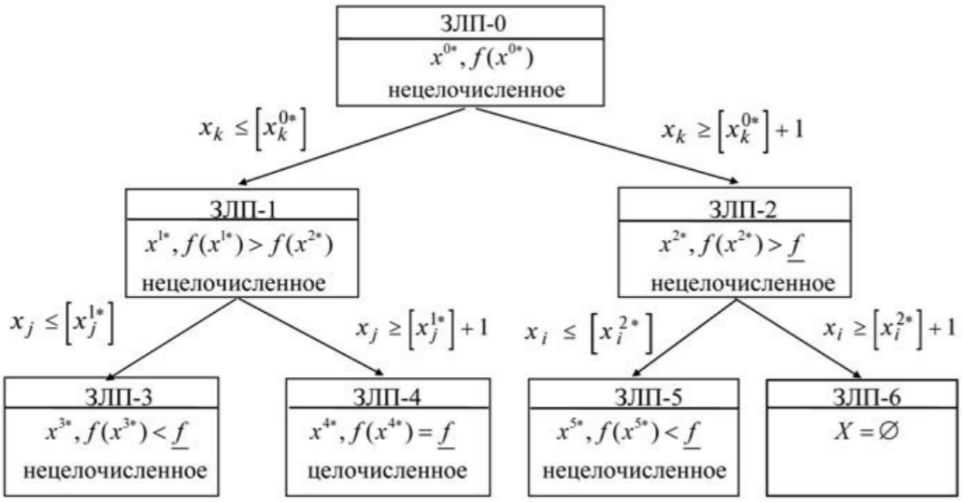

Рис. 1. Пример дерева ветвей-и-границ

Задачи ЗЛП-1 и ЗЛП-2 записываются в виде, изображенном на рис. 2.

ЗЛП-1

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i = 1, \ldots, m;$$
$$x_k \leq \left[x_k^{0*}\right];$$
$$x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n;$$

ЗЛП-2

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i = 1, \ldots, m;$$
$$x_k \geq \left[x_k^{0*}\right] + 1;$$
$$x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n.$$

Рис. 2. Подзадачи корневого узла дерева ветвей-и-границ

Задачи ЗЛП-1 и ЗЛП-2 решаются самостоятельно симплекс-методом *без учета ограничений на целочисленность* координт x_j, $j = 1, \ldots, n$. Вычисляются значения функции $f(x)$ на оптимальных решениях обеих задач. Если ни одна из них не имеет целочисленного решения, то выбрирается задача для приоритетного дальнейшего ветвления по установленному правилу: например, приоритетному ветвлению подлежит та задача, в которой значение $f(x)$ на оптимальном *нецелочисленном* решении максимально.

Пусть $f(x^{1*}) > f(x^{2*})$, тогда задача ЗЛП-1 первой ветвится на ЗЛП-3 и ЗЛП-4, которые решаются симплекс-методом *без учета требований на целочисленность* с последующим анализом решений [2, стр. 340]. Если ни одна из задач ЗЛП-3 и ЗЛП-4 не имеет целочисленного решения, приступают к ветвлению задачи ЗЛП-2.

Процесс ветвления продолжается до тех пор, пока не будет получено в одной из ветвей целочисленное решение. Пусть задача ЗЛП-4 имеет целочисленное решение. Обозначим $\underline{f}$ – значение функции на первом целочисленном решении: $\underline{f} = f(x^{4*})$. Соответсвующее целочисленное решение включается в множество $\bar{X}^*$ возможных оптимальных решений исходной задачи.

После того, как найдено первое целочисленное решение, вопрос о дальнейшем ветвлении других задач решается на основании сравнения значений $f(x^{k*})$ на оптимальных <u>нецелочисленных</u> решениях в оставшихся ветвях со значением $\underline{f}$.

Если $f(x^{k*}) \leqslant \underline{f}$ для всех оставшихся k, то расчет закончен. Решениями исходной задачи являются те целочисленные решения x^{k*}, для которых $f(x^{k*}) = \underline{f}$.

Если $f(x^{k*}) > \underline{f}$, то соответствующая этому номеру k задача ветвится далее. Так, на рис. 1 имеем $f(x^{2*}) > \underline{f}$ и $f(x^{3*}) < \underline{f}$. Задача ЗЛП-2 подлежит ветвлению на ЗЛП-5, ЗЛП-6, а задача ЗЛП-3 не подлежит. Задача ЗЛП-6 не имеет решения, так как множество допустимых решений пустое, и далее не рассматривается. Задача ЗЛП-5 имеет нецелочисленное решение $x^{5*}, f(x^{5*})$. Если $f(x^{5*}) < \underline{f}$, то решение задачи закончено и $x^* = x^{4*}, f(x^*) = \underline{f}$. В противном случае задача ЗЛП-5 ветвится дальше.

Если в одной из задач получено целочисленное решение, то ее ветвление далее не прозводится. Если соответствующее значение целевой функции $\geqslant \underline{f}$, решение считается принадлежащим множеству X^* возможных оптимальных решений исходной задачи.

Если значение целевой функции $< \underline{f}$, целочисленное решение не включается в множество X^*.

Таким образом, ветвление какой-либо задачи заканчивается, если выполняется одно из условий [2]:

1. решение целочисленное,
2. значение целевой функции данной задачи $\leqslant \underline{f}$,
3. множество допустимых решений пустое.

Если ветвление всех задач закончено, то в множестве X^* выбирается решение (решения), которому соответствует наибольшее значение целевой функции. Оно является решением исходной задачи. Если множество X^* пустое, то исходная задача не имеет решения.

4. Общие положения постановки частично-целочисленного линейного программирования

Задача линейного программирования в частично-целочисленной постановке (Mixed Integer Linear Program, MILP, MIP) записывается в форме

$$\begin{aligned} \min c^T x, \\ Ax = b, \\ x \geqslant 0, \\ x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

Задача, когда все переменные являются целочисленными, называется задачей линейного программирования в чистой целочисленной постановке (Pure Integer Linear Program, ILP, IP).

Если все переменные принимаются значения из множества $\{0, 1\}$, то задача называется задачей линейного программирования 0-1 (0-1 linear program).

Включение целочисленных переменных в постановку задачи расширяет возможности моделирования.

Задачи линейного программирования могут быть решены за полиномиальное время *методами внутренней точки* (метод эллипсоида, алгоритм Кармаркара).

Задачи целочисленного программирования относятся к классу NP-трудных:

- на текущий момент не известны алгоритмы, способные решить этот такого рода задачи за полиномиальное время,
- И, вообще говоря, есть мало шансов, что такие алгоритмы когда-нибудь будут найдены.

Релаксированное решение можно получить, сняв ограничения на целочисленность

$$\min c^T x,$$
$$Ax = b,$$
$$x \geqslant 0.$$

Замечание

Задачу линейного программирования в частично-целочисленной постановке нельзя решить, просто перейдя от решения задачи в релаксированной постановке с последующем округлением переменных

Например, оптимальным решением задачи линейного программирования в чистой целочисленной постановке будет

$$\begin{aligned} \max x + y \\ -2x + 2y \geqslant 1, \\ -8x + 10y \leqslant 13, \\ x, y \geqslant 0, \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

вектор $(x, y) = (1, 2)$, которому отвечает целевая функция со значением 3.

А релаксированным оптимальным решением будет вектор $(x, y) = (4, 4.5)$ со значением целевой функции 9.5.

Не существует прямого способа перейти от релаксированного решения к целочисленному.

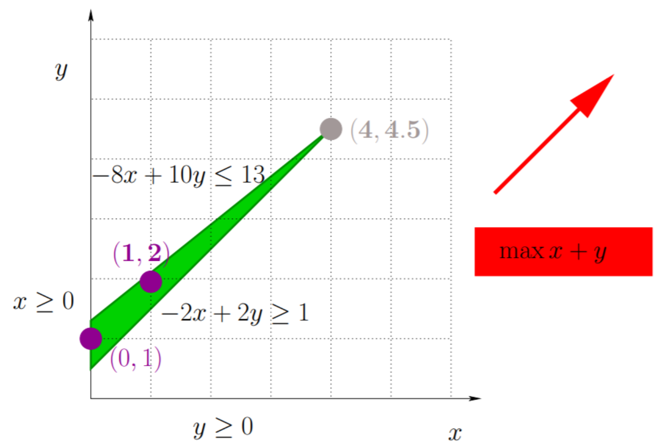

Рис. 3. Связь релаксированной и целочисленной постановок задачи

Предполагается, что переменные ограничены, т.е. имеют нижнюю и верхнюю границы.

Через P_0 обозначим рассматриваемую постановку задачи, а через $LP(P_0)$ релаксированное решение задачи P_0. Если в оптимальном релаксированном решении $LP(P_0)$ все целочисленные переменные принимают целочисленные значения, то это решение будет решением исходной задачи P_0.

В противном случае для целочисленной переменной x_j, которая принимает нецелочисленное значение $\beta_j,\ \beta_j \notin \mathbb{Z}$ в оптимальном релаксированном решении $LP(P_0)$, определяются подзадачи

$$P_1 := P_0 \wedge x_j \leqslant \lfloor \beta_j \rfloor,$$
$$P_2 := P_0 \wedge x_j \geqslant \lceil \beta_j \rceil.$$

Тогда физичным решением исходной задачи будет

$$feasibleSols(P_0) = feasibleSols(P_1) \cup feasibleSols(P_2).$$

Список иллюстраций

Список литературы

1. *Лутц М.* Изучаем Python, 4-е издание. – Пер. с англ. – СПб.: Символ-Плюс, 2011. – 1280 с.
2. *Пантлеев А. В., Летова Т.А,* Методы оптимизации в примерах и задачах. – СПб.: Издательство «Лань», 2015. – 512 с.
3. *Бурков А.* Машинное обучение без лишних слов. – СПб.: Питер, 2020. – 192 с.
4. *Бизли Д.* Python. Подробный справочник. – Пер. с англ. – СПб.: Символ-Плюс, 2010. – 864 с.