Дата последней сборки документа:
19 февраля 2022 г. в 01:01

Общие и специальные вопросы оптимизации

Подвойский А.О.

Краткое содержание

Содержание

1. Полезные ссылки

https://github.com/ceandrade/brkga_mip_feasibility

2. Методы решения задач линейного программирования

2.1. Симплекс-метод Данцига

Постановка задачи. Найти максимум функции

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leftarrow c^T x$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1, \ldots, m\ (m < n) \leftarrow Ax = b,$$
$$x_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n.$$

Такая постановка называется *канонической*, а искомое решение $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)^T$ – *оптимальным*.

Замечания:

- Максимизируемая функция и ограничения линейны по $x_j,\ j = 1, \ldots, n$,
- Задача содержит ограничения на неотрицательность переменных, присутствие которых диктуется процедурой симплекс-метода. Если по физической постановке задачи какая-либо переменная, например, x_n, неограничена по знаку, то ее можно представить в виде $x_n = x_{n+1} - x_{n+2}$, где $x_{n+1}, x_{n+2} \geqslant 0$,
- В ограничениях $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1, \ldots, m\ (m < n)$ будем считать переменные $b_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m$.

Стратегия метода Данцига решения описаной задачи основана на особенностях постановки этой задачи. Множество

$$X = \{x \mid \sum_{i}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1, \ldots, m,\ x \in \mathbb{R}^n,\ x_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n\}$$

допустимых решений задачи – есть выпуклое множество, которое геометрически представляет собой *выпуклый политоп*[1], имеющий конечное число *крайних точек*.

Крайней точкой выпуклого множества X называется точка $x \in X$, которая не может быть выражена в виде выпуклой комбинации других точек $y \in X, x \neq y$.

Стратегия решения задачи симплекс-методом состоит в направленном переборе базисных решений, определяющих крайние точки политопа. Направленность перебора предполагает следующую организацию вычислительного процесса [2]:

1. Нахождение базисного решения (метод Гаусса-Жордана, переход к M-задаче),
2. Переход от одного базисного решения к другому таким образом, чтобы обеспечить возрастание целевой функции (другими словами, переход от одной *вершины политопа* к другой в направлении возрастания целевой функции).

[1] Политоп – подмножество Евклидова пространства, представимое объединением симплексов (n-мерное обобщение треугольника)

3. Общие положения постановки частично-целочисленного линейного программирования

Задача линейного программирования в частично-целочисленной постановке (Mixed Integer Linear Program, MILP, MIP) записывается в форме

$$\begin{aligned} \min c^T x&,\\ Ax = b&,\\ x \geqslant 0&,\\ x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in \mathcal{I}& \end{aligned}$$

Задача, когда все переменные являются целочисленными, называется задачей линейного программирования в чистой целочисленной постановке (Pure Integer Linear Program, ILP, IP).

Если все переменные принимаются значения из множества $\{0, 1\}$, то задача называется задачей линейного программирования 0-1 (0-1 linear program).

Включение целочисленных переменных в постановку задачи расширяет возможности моделирования.

Задачи линейного программирования могут быть решены за полиномиальное время *методами внутренней точки* (метод эллипсоида, алгоритм Кармаркара).

Задачи целочисленного программирования относятся к классу NP-трудных:

- на текущий момент не известны алгоритмы, способные решить этот такого рода задачи за полиномиальное время,
- И, вообще говоря, есть мало шансов, что такие алгоритмы когда-нибудь будут найдены.

Релаксированное решение можно получить, сняв ограничения на целочисленность

$$\begin{aligned} \min c^T x&,\\ Ax = b&,\\ x \geqslant 0&. \end{aligned}$$

Замечание

Задачу линейного программирования в частично-целочисленной постановке нельзя решить, просто перейдя от решения задачи в релаксированной постановке с последующем округлением переменных

Например, оптимальным решением задачи линейного программирования в чистой целочисленной постановке будет

$$\begin{aligned} \max x + y&\\ -2x + 2y \geqslant 1&,\\ -8x + 10y \leqslant 13&,\\ x, y \geqslant 0&,\\ x, y \in \mathbb{Z}& \end{aligned}$$

вектор $(x, y) = (1, 2)$, которому отвечает целевая функция со значением 3.

А релаксированным оптимальным решением будет вектор $(x, y) = (4, 4.5)$ со значением целевой функции 9.5.

Не существует прямого способа перейти от релаксированного решения к целочисленному.

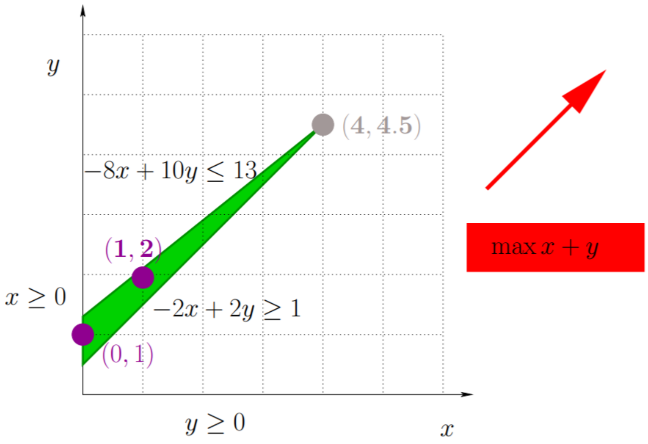

Рис. 1. Связь релаксированной и целочисленной постановок задачи

Предполагается, что переменные ограничены, т.е. имеют нижнюю и верхнюю границы.

Через P_0 обозначим рассматриваемую постановку задачи, а через $LP(P_0)$ релаксированное решение задачи P_0. Если в оптимальном релаксированном решении $LP(P_0)$ все целочисленные переменные принимают целочисленные значения, то это решение будет решением исходной задачи P_0.

В противном случае для целочисленной переменной x_j, которая принимает нецелочисленное значение β_j, $\beta_j \notin \mathbb{Z}$ в оптимальном релаксированном решении $LP(P_0)$, определяются подзадачи

$$P_1 := P_0 \wedge x_j \leqslant \lfloor \beta_j \rfloor,$$
$$P_2 := P_0 \wedge x_j \geqslant \lceil \beta_j \rceil.$$

Тогда физичным решением исходной задачи будет

$$feasibleSols(P_0) = feasibleSols(P_1) \cup feasibleSols(P_2).$$

Список иллюстраций

Список литературы

1. *Лутц М.* Изучаем Python, 4-е издание. – Пер. с англ. – СПб.: Символ-Плюс, 2011. – 1280 с.
2. *Пантлеев*
3. *Бурков А.* Машинное обучение без лишних слов. – СПб.: Питер, 2020. – 192 с.
4. *Бизли Д.* Python. Подробный справочник. – Пер. с англ. – СПб.: Символ-Плюс, 2010. – 864 с.