

Teoria

curve

Curve e spline di Bézier

delimitare

da ritagliare

Nella prima fase di editing, per disegnare il contorno dell'immagine, vengono sfruttate le spline di Bézier (B-spline) planari, di grado 3 e con incollamento di classe C^0 (equivalente a G^0). Come sono definite e cosa vuol dire *classe di incollamento*?

Curve di Bézier in \mathbb{E}^2

distinti

Una curva di Bézier è un particolare tipo di curva parametrica, cioè una funzione vettoriale continua del tipo: $P = P(t): [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2$ con $P(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ e $x(t), y(t)$

polinomi di grado $k \geq 1$; essa è determinata da un **poligono di controllo**, cioè da un insieme ordinato di $k + 1$ punti di \mathbb{E}^2 (chiamati **punti di controllo**).

In particolare, Bézier sfrutta le curve cubiche di Bézier (di grado 3, $k = 3$), definite, quindi, da un poligono di controllo costituito da $k + 1 = 4$ punti in \mathbb{E}^2 solitamente indicati con $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$. Le coordinate dei punti di controllo sono sufficienti a determinare l'equazione della curva di Bézier associata tramite l'**algoritmo di de Casteljau**, da cui si ottiene un'equazione del tipo:

$$P(t) = (1-t)^3 \cdot P_0 + 3(1-t)^2 t \cdot P_1 + 3(1-t)t^2 \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3$$

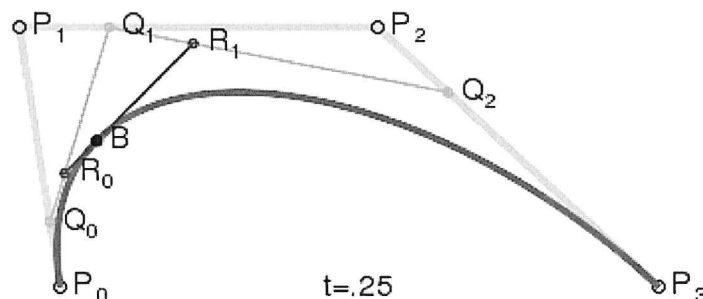
che, introducendo i **polinomi di Bernstein** di grado k in forma generale:

$B_i^k(t) = \binom{k}{i} (1-t)^{k-i} \cdot t^i$ con $i = 0, \dots, k$ si può riscrivere come:

$$P(t) = \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) \cdot P_i \quad \leftarrow$$

Quello che si vede disegnato a schermo, qui sotto in rosso, e quando utilizziamo l'applicazione, non è altro che l'immagine (o **supporto**) della curva così formulata.

definita



Spline di Bézier di grado 3 in \mathbb{E}^2

Per delimitare una figura arbitrariamente complessa sarebbe necessario introdurre una curva di Bézier di grado molto elevato, che risulterebbe pesante dal punto di vista computazionale e che dipenderebbe strettamente dal suo poligono di controllo senza, quindi, offrire un **controllo locale**. Per risolvere questi problemi, in computer grafica si utilizzano le spline di Bézier (B-spline), cioè curve date dall'incollamento di più curve di Bézier aventi lo stesso grado: nel nostro caso, essendo tutte le curve da incollare di grado 3, si parlerà di spline cubiche (di grado $k = 3$).

Formalmente, tutte le curve di Bézier hanno come dominio l'intervallo $[0, 1]$ ma, per poter definire una spline, è necessario che le curve siano definite su intervalli adiacenti: questo viene fatto grazie alla possibilità di **riparametrizzare** una curva di Bézier definita sull'intervallo $[0, 1]$ con una curva equivalente definita su un intervallo $[a, b]$ arbitrario (con $a < b$ e $a, b \in \mathbb{R}$). Se consideriamo

$t \in [0, 1]$ e $\tau \in [a, b]$ è possibile definire una **funzione di transizione (biunivoca, bicontinua e bidifferenziabile)**: $t = t(\tau) = \frac{\tau - a}{b - a}$ per due estremi a e b fissati che

riparametrizzi una curva $P(t)$ in una equivalente $Q(\tau)$ quindi tale che: $Q(\tau) = P[t(\tau)]$. Per far sì che i supporti di due curve cubiche P e Q definite su due

intervalli adiacenti $[a, b]$ e $[b, c]$ si incollino modo opportuno, è necessario,

inoltre, definire una **condizione di incollamento**. Nel nostro caso utilizziamo,

per dare massima libertà all'utente, la condizione di incollamento più "semplice" (chiamata C^0 o G^0 in caso si consideri come condizione di incollamento

geometrico) che impone solamente: $P(b) = Q(b)$ e, cioè, che l'ultimo punto del poligono di controllo della prima curva coincida con il primo punto del poligono di controllo della seconda curva.

Trasformazioni affini del piano

Passando alla seconda fase di editing, invece, si possono applicare, alla porzione di immagine ritagliata, tre tipi di trasformazioni affini del piano \mathbb{E}^2 , che, in pratica, sono definite sulla porzione di piano dell'intera pagina web. Teniamo in considerazione, però, che il sistema di riferimento cartesiano della pagina, con origine nell'angolo in alto a sinistra, asse delle ascisse con verso positivo a destra e asse delle ordinate con verso positivo in basso, non coincide con quello dell'immagine in primo piano che ha origine O nel centro della stessa, asse x positivo verso destra e asse y positivo verso l'alto.

Le trasformazioni affini utilizzate in Bétsie sono, più precisamente, delle **affinità**, ~~cioè delle trasformazioni affini di uno spazio in se stesso~~ $(\mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2)$; queste sono corrispondenze biunivoche che legano punti di coordinate $x = (x, y) \in \mathbb{E}^2$ a punti di coordinate $x' = (x', y') \in \mathbb{E}^2$ tramite una relazione in forma matriciale

$$\left[\begin{array}{c} \text{ACAP} \\ \downarrow \end{array} \right]$$

del tipo: $x \mapsto Ax + c$, dove A è la matrice di trasformazione 2×2 invertibile ($\det(A) \neq 0$) e c è un vettore fisso.

La seguente tabella mostra le caratteristiche delle tre affinità utilizzate in Bétsie:

Affinità	Matrice di trasformazione A	Vettore c
Traslazione (di centro O)	$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Rotazione (di angolo θ)	$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Omotetia (di fattore k) (e di centro O)	$kI_2 = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

con $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ vettore di traslazione, θ angolo di rotazione e k fattore di dilatazione/contrazione. Ricordiamo, inoltre, che, nel nostro caso, tutte le trasformazioni hanno l'origine nel centro dell'immagine ritagliata di partenza.

10

Manuale utente

L'utilizzo dell'editor può essere sintetizzato in cinque passi, che sono mostrati graficamente nella parte alta della pagina durante l'utilizzo dell'applicazioneX.

1. Upload (dell'immagine da ritagliare)

Il primo passo consiste nello scegliere l'immagine da modificare (da ritagliare), questo può essere fatto attraverso il caricamento di un'immagine direttamente dal PC dell'utente o scegliendone una tra le immagini di prova proposte cliccando l'apposito link.

2. Editing (Fase 1)

Dopo aver confermato la scelta dell'immagine da modificare, quest'ultima viene mostrata a schermo e l'utente può passare alla prima fase di modifica. Qui si può definire un'area di interesse all'interno dell'immagine caricata delimitandola con una spline cubica di Bézier (B-spline). Per creare la B-spline l'utente deve definire i punti di controllo delle varie curve che la compongono: la creazione di un punto avviene cliccando sull'immagine e, una volta creato, questo si può spostare con un click prolungato sul punto stesso e il trascinamento del mouse. Ogni 3 punti (4 per la prima curva) viene automaticamente disegnata a schermo la curva di Bezier relativa ai punti di controllo definiti; per personalizzarli vengono offerte le seguenti opzioni (ognuna delle quali viene applicata ai punti creati successivamente all'impostazione):

In questa fase

- *Colore* : permette di selezionare il colore dei punti del poligono di controllo;
- *Trasparenza* : permette di regolare la trasparenza dei punti rispetto all'immagine sottostante, più bassa la trasparenza, più opaco sarà il colore dei punti di controllo;
- *Dimensione* : permette di selezionare la dimensione (grafica) dei punti.

Opzioni simili vengono definite anche per le curve di Bézier:

- *Colore* : permette di selezionare il colore delle curve;
- *Trasparenza* : permette di regolare la trasparenza delle curve rispetto all'immagine sottostante, più bassa la trasparenza, più opaco sarà il colore della curva;

- *Spessore* : permette di selezionare lo spessore della linea utilizzata per il disegno delle curve.

Oltre alle opzioni "estetiche" appena descritte, vengono offerte anche:

- l'opzione di mostrare o nascondere i punti di controllo (tramite la casella selezionabile *Mostra punti di controllo*);
- l'opzione di mostrare o nascondere il poligono di controllo (tramite la casella selezionabile *Mostra poligono di controllo*), quest'ultimo sarà rappresentato attraverso dei segmenti tratteggiati dello stesso colore selezionato per i punti di controllo.

Sia dopo che le curve sono state create, sia con il poligono di controllo visibile, rimane la possibilità, per l'utente, di traslare i punti di controllo vedendo il cambiamento istantaneo della spline e del poligono.

Per cancellare l'ultimo punto di controllo creato si può utilizzare il bottone *Rimuovi ultimo punto*, se si elimina un punto facente parte del poligono di controllo di una curva, anche questa verrà eliminata. Se si vuole eliminare l'ultima curva disegnata si può utilizzare il bottone *Rimuovi ultima curva*: questa azione eliminerà gli ultimi 3 punti di controllo dell'ultima curva creata. Con il bottone *Rimuovi immagine* tutte le modifiche saranno cancellate e l'utente sarà riportato al passo 1 (Upload). Quando si è soddisfatti del contorno creato si può chiudere la spline attraverso il bottone *Chiudi spline e ritaglia*, l'immagine sarà ritagliata secondo il contorno definito e sarà data la possibilità di salvarla come immagine sul proprio PC e/o continuare ai passi successivi.

→ automaticamente sarà creato un segmento che unisce l'ultimo punto inserito al primo, qualora questi due siano diversi.

3. Upload (dell'immagine di sfondo)

Analogamente al passo 1, l'utente deve selezionare dal proprio PC o da un insieme di immagini di prova uno sfondo su cui operare nella seconda fase di editing (passo 4).

→ punto 1

4. Editing (Fase 2)

A questo punto l'utente dovrebbe ritrovarsi una schermata con l'immagine di sfondo selezionata al passo 3 con l'immagine ritagliata al passo 2 sovrapposta. Viene quindi offerta la possibilità di applicare tre tipi di trasformazioni affini sull'immagine in primo piano:

→ all'

e

- *Traslazione* : cliccando e tenendo premuto con il mouse, l'immagine può essere trascinata (traslata) in un qualsiasi punto della pagina;
- *Scala/Omotetia* : inserendo l'apposito fattore di scala (fino a due cifre decimali) nell'apposito spazio si effettua un ingrandimento/rimpicciolimento (si noti che il fattore si riferisce sempre all'immagine iniziale e non a quella corrente);
- *Rotazione* : è possibile eseguire una rotazione inserendo il valore dell'angolo di rotazione (rispetto all'orizzontale e centrato al centro dell'immagine) in gradi o in radianti come multipli di π (si noti che l'angolo di rotazione si riferisce sempre alla situazione iniziale e non a quella corrente), tenendo presente che un angolo di rotazione positivo corrisponde ad una rotazione in senso orario, mentre un angolo di rotazione negativo corrisponde ad una rotazione in senso antiorario.

Quando è soddisfatto dell'immagine (primo piano e sfondo) ottenuta, l'utente preme il bottone **Concludi** per passare all'ultimo ~~step~~.

punto.

5. Fine

All'utente è presentata l'immagine finale data dall'unione tramite sovrapposizione dell'immagine in primo piano e da quella di sfondo; se l'immagine in primo piano non rientrava completamente in quella di sfondo ci sarà un ritaglio per garantire che l'immagine finale include solo la parte *dell'immagine* sovrapposta con lo sfondo. Si può, ora, salvare il risultato come immagine PNG attraverso il tasto Salva e/o procedere a riportare l'editor al passo 1 attraverso il *ritagliata* tasto Modifica un'altra immagine!.

*che
risultati*

Acabo