Introduktion til sandsynlighedsteori

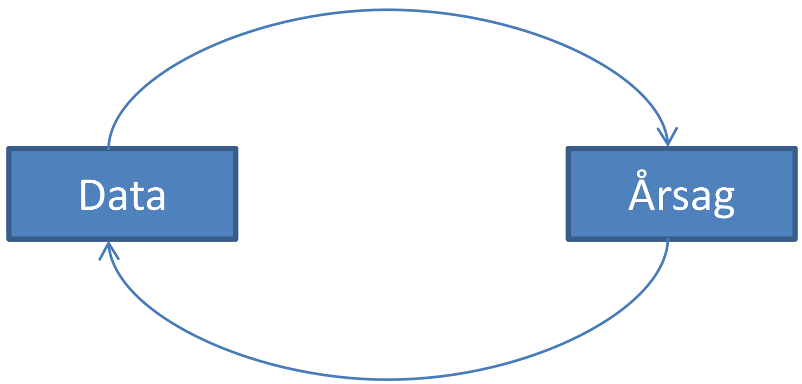
Læsning:

Cooper/McGillem kap. 1.1-1.6

Den overordnede tankegang

Givet data, hvad er årsagen?

Statistik



Sandsynlighedsteori

Givet årsagen, hvordan ser data ud?

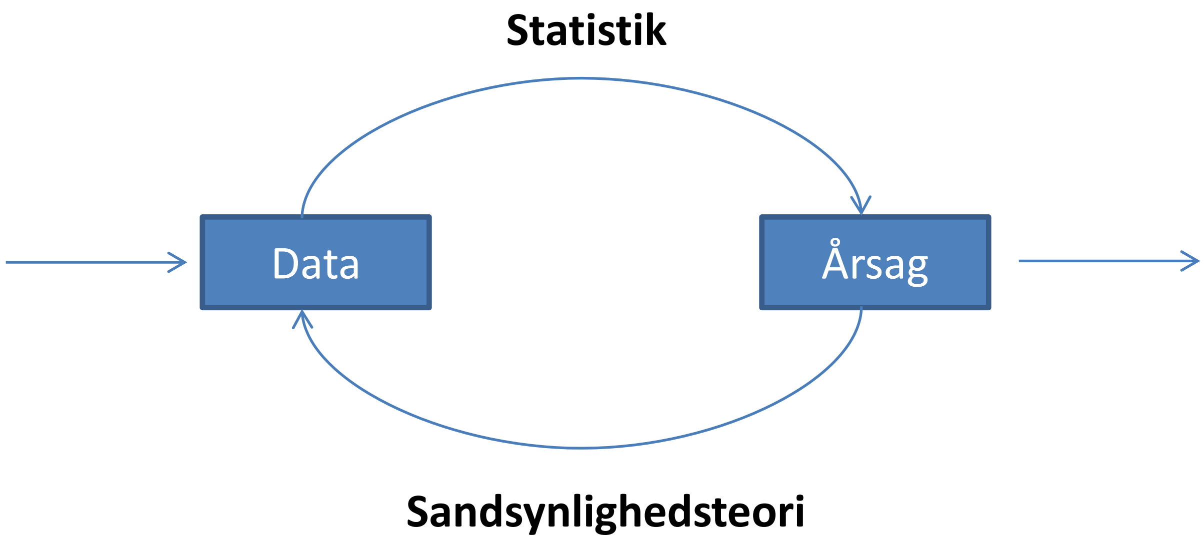
Eksempel

Population:
Alle studerende på AU

Sample på 10 studerende

Er gennemsnitsalderen i populationen 50 år?

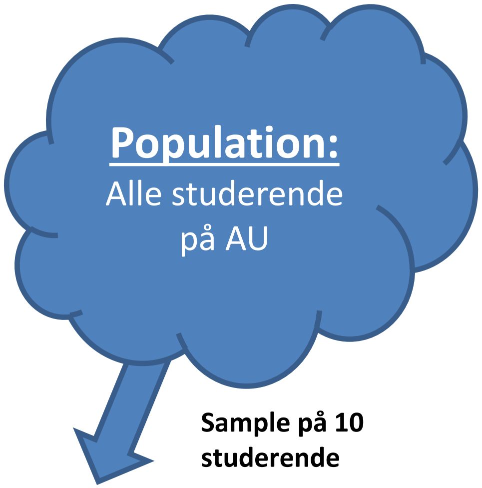
Person	Alder
1	22
2	24
3	26
4	22
5	21
6	23
7	24
8	23
9	23
10	25



Denne hypotese er meget usandsynlig!

Hvis alderen er normalfordelt omkring 50 år, hvordan bør data så se ud?

Eksempel



Sample på 10 studerende

Person	**Alder**
1	22
2	24
3	26
4	22
5	21
6	23
7	24
8	23
9	23
10	25

Givet de samplede data, hvad er det bedste bud på gennemsnitsalderen i populationen?

To tilgange:

1) **<u>Numerisk:</u> Test forskellige hypoteser og vælg den mest sandsynlige.**
2) **<u>Analytisk:</u> Prøv om du kan udlede en formel, som giver dig det mest sandsynlige bud på gennemsnitsalderen*.**

*Vi skal senere i kurset bevise, at det optimale bud på gennemsnitsalderen i populationen, givet disse 10 samples, er gennemsnitsalderen af de 10 samples = 23,3 år.

Eksempler

- Støjfyldt transmission af bit-strenge
- Cancer diagnostisk
- Billedbehandling
- Robotnavigation
- Trafiksimuleringer
- Radarteknologi
- Sammenligning af medicinske behandlinger
- Forudsigelse af hjertebevægelse i medicinske skanninger
- …

Forudsætninger

- Læs op på integration og differentiation
- Læs op på foldning (eng: convolution)
- Programmering – jeg tager udgangspunkt i Matlab

Nogle begreber

- Eksperiment/Trial
  - Et eksperiment eller en handling, som har et tilfældigt udfald
    - fx kast med en terning
- Hændelsestyper
  - En elementær hændelse har kun ét muligt udfald
    - fx slå en 6’er
  - En sammensat hændelse har mange mulige udfald
    - fx slå et lige tal
  - En simultan hændelse involverer to eller flere eksperimenter
    - fx kast med to terninger: slå en 1’er med den første og en 4’er med den anden

Opsummering 1

1. Sandsynlighed for hændelsen A — $\Pr(A)$

2. Sandsynligheden for komplementet $\bar{A}$ — $1 - \Pr(A)$

3. Sandsynligheden for den simultane hændelse A <u>og</u> B, skrevet (A,B) — $\Pr(A) \cdot \Pr(B)$

4. Sandsynlighed for den sammensatte hændelse A <u>eller</u> B, skrevet (A∪B) — $\Pr(A) + \Pr(B)$

Bemærkninger:

- Regel 3 gælder kun hvis hændelserne A og B er <u>uafhængige</u>.
- Regel 4 gælder kun hvis hændelserne A og B er <u>indbyrdes disjunkte</u>.

Afhængige hændelser

	1Ω	10Ω	100Ω	1000Ω	Total
1W	50	300	90	0	440
2W	50	50	0	100	200
5W	0	150	60	150	360
Total	100	500	150	250	1000

Tabel 1-2

1. Sandsynlighed for hændelsen $(10\Omega, 5W)$: $\Pr(10\Omega, 5W) = \frac{150}{1000} = 0{,}15$

2. Produkt: $\Pr(10\Omega) \cdot \Pr(5W) = \frac{500}{1000} \cdot \frac{360}{1000} = 0{,}18 \neq 0{,}15$

Nej, produktreglen gælder kun, hvis A og B er uafhængige hændelser!!!

Opsummering 2

1. Sandsynligheden for hændelsen A kan beregnes (generelt kun tilnærmes) ved den relative frekvens: $r(A) = N_A/N$

2. Sandsynligheden for den simultane hændelse (A,B) er generelt givet ved $\mathrm{Pr(A,B)} = \mathrm{Pr(B)} \cdot \mathrm{Pr(A|B)} = \mathrm{Pr(A)} \cdot \mathrm{Pr(B|A)}$

3. Den betingede sandsynlighed $\mathrm{Pr(A|B)}$ er sandsynligheden for hændelsen A, givet at hændelsen B allerede er indtruffet.

4. Hændelserne A og B er uafhængige, hvis A ikke afhænger af B, og B ikke afhænger af A. Dvs.,

$$\Pr(A|B) = \Pr(A) \quad \mathbf{og} \quad \Pr(B|A) = \Pr(B)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\Pr(A,B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

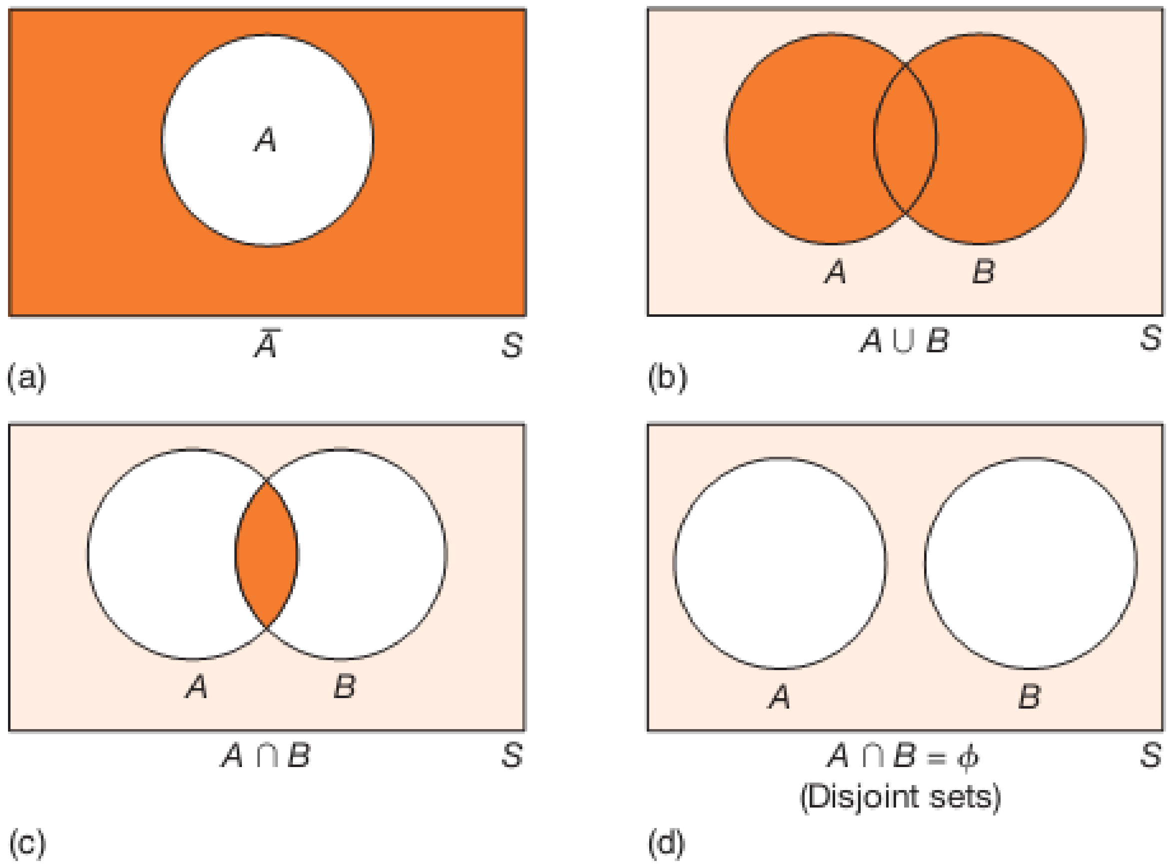
Venn diagrammer

Komplement

Forenings-
mængde

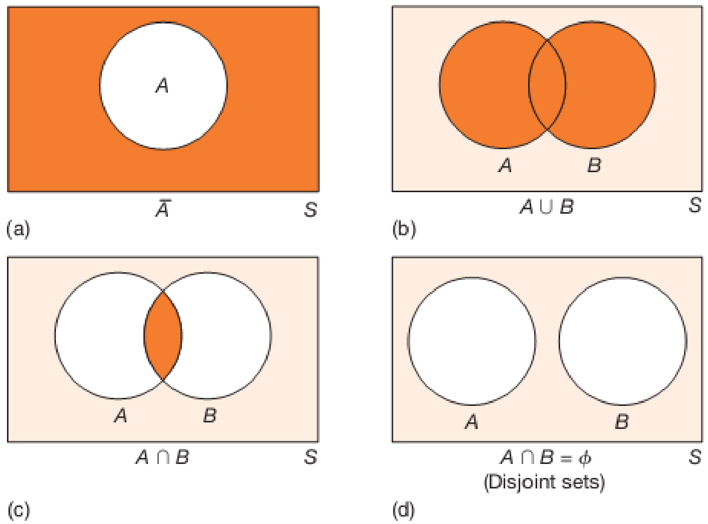
Fællesmængde

Indbyrdes
disjunkte



Axiomer

1. $\Pr(A) \geq 0$
2. $\Pr(S) = 1$
3. Hvis $A \cap B = \emptyset$, så er $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$



Tænk på sandsynligheder som arealer:
- Arealet af S er 1.
- Sandsynligheden for A i figur (a) er arealet af ciklen A .
- Sandsynligheden for AUB i figur (d) er summen af arealerne af cirklerne A og B.
- Hvis er sandsynligheden for AUB i figur (b)?

Notation

- En hændelse består af en mængde af udfald.
- Mængder skrives i Tuborg parentes.
- Eksempel 1 – slag med én terning
  - Udfaldsrummet S = {1,2,3,4,5,6}
  - Hændelsen A = {1,3}
  - Hændelsen B = {3,5}
  - Hændelsen A∩B = {3}
  - Hændelsen A∪B = {1,3,5}
- Eksempel 2 – slag med to terninger
  - Udfaldsrummet S = {(1,1),(1,2),…,(2,1),(2,2),…,(6,6)}
  - Hændelsen A = {slå mindst én 1'er} = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), (2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)}
  - Hændelsen B = {slå to ens} = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)}
  - Hændelsen A∩B = {(1,1)}
  - Hændelsen A∪B = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6), (1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), (2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)}

Foreningsmængde

Associativ lov

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

Kommutativ lov

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup S = S$$

$$A \cup B = A, hvis\ B \subset A$$

Fællesmængde

Associativ lov

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

Kommutativ lov

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cap S = A$$

$$A \cap B = B, hvis\ B \subset A$$

Distributive love

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Komplement

$$\overline{\emptyset} = S$$

$$\bar{S} = \emptyset$$

$$\overline{(\bar{A})} = A$$

$$A \cup \bar{A} = S$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$\bar{A} \subset \bar{B}, hvis\ B \subset A$$

$$\bar{A} = \bar{B}, hvis\ A = A$$

DeMorgans love

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Differens

$$A - B = A \cap \bar{B} = A - (A \cap B)$$

$$(A - B) \cup B \neq A$$

$$(A \cup A) - A = \emptyset$$

$$A \cup (A - A) = A$$

$$A - S = \emptyset$$

$$S - A = \bar{A}$$