Løsningsforslag – Cooper/McGillem kap. 1-1 til 1-6

Opg. 1-2.1

a) TT, TH, HT, HH (lige sandsynlige).
b) 0, 1, …, 9 (lige sandsynlige).
c) 0, 1, …, 18 (ikke lige sandsynlige, da der kun er én måde at opnå sum = 0 = 0+0, men fx tre måder at opnå sum = 2 = 0+2, 2+0, 1+1).

Opg. 1-4.1

Udfaldsrum: S = {1,2,3,4,5,6} og N = 6.

a) Lad A = {5}, så N_A=1 og Pr(A) = N_A /N = 1/6.
b) Lad A = {4,5,6}, så N_A=3 og Pr(A) = N_A /N = 3/6 = 1/2.
c) Lad A = {2,4,6}, så N_A=3 og Pr(A) = N_A /N = 3/6 = 1/2.

Opg. 1-4.2

Udfaldsrum: S = {(1,1),(1,2),…,(1,6),(2,1),…,(6,6)} og N = 36.

a) Lad A = {sum=11} = {(5,6),(6,5)}, så N_A=2 og Pr(A) = N_A /N = 2/36 = 1/18.
b) Lad A = {sum<5} = {sum=2 eller sum=3 eller sum=4} = { (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,2) }, så N_A=6 og Pr(A) = N_A /N = 6/36 = 1/6.
c) Lad A = {sum er et lige tal} = {(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), …, (6,6) }, så N_A=18 og Pr(A) = N_A /N = 18/36 = 1/2.

Opg. 1-4.3

Udfaldsrum: S = { 200xHI, 100xAG, 50xFF, 25xDC, 25xSR} og N = 400.

a) Lad A = {FF}, så N_A=50 og Pr(A) = N_A /N = 50/400 = 1/8.
b) Lad A = {HI}. Vi er interesserede i $\bar{A}$ = {ikke HI}: Komplementreglen siger, at Pr($\bar{A}$) = 1-Pr(A). Vi har, at N_A=200. Derfor bliver Pr(A) = N_A /N = 200/400 = 1/2. Således bliver Pr($\bar{A}$) = 1-Pr(A) = 1-1/2 = 1/2.
c) Ideen med denne opgave er at få jer til at tænke over begrebet ”tilbagelægning”. Her fjerner vi én SR fra kassen, og altså er der kun 25-1=24 SR tilbage (og N=400-1=399), når vi trækker anden gang. Der er med andre ord ingen tilbagelægning. Vores mængde S ændrer sig således til

   S = { 200xHI, 100xAG, 50xFF, 25xDC, **24xSR**} og N = 399.

   Lad nu A = {SR}, så N_A=24 og Pr(A) = N_A /N = 24/399 = 0,062.

Opg. 1-4.4

Lav en tabel!

	HI	AG	FF	DC	SR	**Total**
Good	180	85	41	20	20	**346**
Bad	20	15	9	5	5	**54**
Total	**200**	**100**	**50**	**25**	**25**	**400**

a) Lad A = {DC} og B = {Good}. Vi søger den simultane sandsynlighed, Pr(A,B). Denne fås ved tabelopslag, idet $N_{(A,B)}$ = 20 og N = 400, og dermed Pr(A,B) = $N_{(A,B)}$/N =20/400 = 1/20.

b) Lad A = {Good} og B = {FF}. Vi søger den betingede sandsynlighed, Pr(A|B) = Pr(A,B)/Pr(B).
Vi har $N_{(A,B)}$ = 41 og N_B = 50, og dermed bliver Pr(A,B) = $N_{(A,B)}$/N = 41/400 og Pr(B) = N_B/N = 50/400.
Vi får nu, at Pr(A|B) = Pr(A,B)/Pr(B) = ($N_{(A,B)}$/N)/(N_B/N) = $N_{(A,B)}$/N_B = 41/50.
*Bemærk, at N'erne i tælleren og nævneren altid går ud med hinanden, så Pr(A|B) = $N_{(A,B)}$/N_B og tilsvarende Pr(B|A) = $N_{(B,A)}$/N_A.

c) Lad A = {Good} og B = {DC}. Vi søger den betingede sandsynlighed, Pr(B|A) = Pr(B,A)/Pr(A).
Vi har $N_{(B,A)}$ = 20 og N_A = 346, og dermed bliver Pr(B|A) = $N_{(B,A)}$/N_A = 20/346.

Opg. 1-4.7

Udfaldsrum: S = { 4 dårlige transistorer + 21 gode transistorer }, N = 25.

a) Lad A = {dårlig transistor}, så N_A=4 og Pr(A) = N_A /N = 4/25.

b) Vi fjerner en dårlig transistor fra vores oprindelig mængde. Dermed får vi
S = { 3 dårlige transistorer + 21 gode transistorer }, N = 25-1=24.
Lad A = {dårlig transistor}, så N_A=3 og Pr(A) = N_A /N = 3/24.

c) Vi fjerner en god transistor fra vores oprindelig mængde. Dermed får vi
S = { 4 dårlige transistorer + 20 gode transistorer }, N = 25-1=24.
Lad A = {dårlig transistor}, så N_A=4 og Pr(A) = N_A /N = 4/24.

Opg. 1-5.2

Udfaldsrum: S = {1,3,5,7,9,11}.

Hændelser: A = {1,3,5}, B = {7,9,11}, C = {1,3,9,11}.

$A \cup B = \{1,3,5,7,9,11\} = S = (A - B) \cup B$
$B \cup C = \{1,3,7,9,11\}$
$A \cup C = \{1,3,5,9,11\} = (A - B) \cup C$
$A \cap B = \emptyset = A \cap B \cap C$
$A \cap C = \{1,3\}$
$B \cap C = \{9,11\} = C - A$

$\bar{A} = \{7,9,11\} = B = \bar{A} \cap B$
$\bar{B} = \{1,3,5\} = A = A \cap \bar{B} = A - B$
$\bar{C} = \{5,7\}$
$\overline{(B \cap C)} = \{1,3,5,7\}$
$A - C = \{5\}$

Opg. 1-6.1

Udfaldsrum: S = {1,3,5,7,9,11}, hvor alle udfald er lige sandsynlige. Altså P({1}) = P({2}) = … = P({11}) = 1/6.

Hændelser: A = {1,3,5}, B = {7,9,11}, C = {1,3,9,11}.

Bemærk, at når jeg bruger aksiom 3, så skriver jeg lighedstegnet, $=_{\text{I.D.}}$, hvor I.D. står for *indbyrdes disjunkte*.

a) Pr(A) = Pr({1,3,5}) $=_{\text{I.D.}}$ Pr ({1}) + Pr({3}) + Pr({5}) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 1/2.
b) Pr(B) = Pr({7,9,11}) $=_{\text{I.D.}}$ Pr ({7}) + Pr({9}) + Pr({11}) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 1/2.
c) Pr(C) = Pr({1,3,9,11}) $=_{\text{I.D.}}$ Pr ({1}) + Pr({3}) + Pr({9}) + Pr({11}) = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 4/6 = 2/3.
d) Pr($A \cup B$) = Pr(S) = 1
e) Pr($A \cup C$) = Pr({1,3,5,9,11}) $=_{\text{I.D.}}$ Pr ({1}) + Pr({3}) + Pr({5}) + Pr({9}) + Pr({11}) = 5/6.
f) Pr($(A - C) \cup B$) = Pr({5}∪{7,9,11}) = Pr({5,7,9,11}) $=_{\text{I.D.}}$ Pr ({5}) + Pr({7}) + Pr({9}) + Pr({11}) = 4/6 = 2/3.