Løsningsforslag – Cooper/McGillem kap. 1-1 til 1-6

Opg. 1-6.2

a) Pr(A∪B) = Pr(A) +Pr(B) – Pr(A∩B) = (13+4-1)/52 = 4/13.
b) Pr(A∩B) = 1/52.
c) Pr($A \cup \bar{B}$) = Pr(A) + Pr($\bar{B}$) – Pr($A \cap \bar{B}$) = (4+39-3)/52 = 10/13.
d) Pr($A \cup C$) = (4+1-0)/52 = 5/52.
e) Pr($B \cup C$) = (13+1-1)/52 = 13/52 = 1/4.
f) Pr($A \cap C$) = 0.
g) Pr($B \cap C$) = 1/52.
h) Pr($(A \cap B) \cup \bar{C}$) = Pr($\bar{C}$) = 51/52.
i) Pr($A \cap (B \cap C)$) = Pr(Ø) = 0.

Opg. 1-6.4

Pr($\bar{A} \cup \bar{B}$) = 1 - Pr($\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$) = 1 - Pr($\bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}}$) = 1 – Pr($A \cap B$).

Opg. 1-7.1

T_0 = Transmitted 0, R_0 = Received 0

T_1 = Transmitted 1, R_1 = Received 1

Pr(T_0) = 0,4

Pr(T_1) = 0,6

Pr(R_1| T_0) = 0,08

Pr(R_0| T_1) = 0,05

a) $\Pr(T_0|R_0) = \frac{\Pr(R_0|T_0)\Pr(T_0)}{\Pr(R_0)} = \frac{\Pr(R_0|T_0)\Pr(T_0)}{\Pr(R_0|T_0)\Pr(T_0)+\Pr(R_0|T_1)\Pr(T_1)} = \frac{(1-0,08)\cdot 0,4}{(1-0,08)\cdot 0,4+0,05\cdot 0,6} = 0,9246$

b) $\Pr(T_1|R_1) = \frac{\Pr(R_1|T_1)\Pr(T_1)}{\Pr(R_1)} = \frac{\Pr(R_1|T_1)\Pr(T_1)}{\Pr(R_1|T_1)\Pr(T_1)+\Pr(R_1|T_0)\Pr(T_0)} = \frac{(1-0,05)\cdot 0,6}{(1-0,05)\cdot 0,6+0,08\cdot 0,4} = 0,9468$

c) $\Pr(\text{error}) = \Pr(R_0|T_1)\Pr(T_1) + \Pr(R_1|T_0)\Pr(T_0) = 0,05 \cdot 0,6 + 0,08 \cdot 0,4 = 0,062$

Opg. 1-7.3

Lad hændelsen A_i = { tryk på knap nr. i}. Der er n = 10 knapper. Alle knapper antages lige sandsynlige, så $Pr(A_i)$ = 1/n = 1/10.

Lad hændelsen B = {tryk på den knap, som aldrig virker}. Så er Pr(B) = 1/10, da der er 1 sådan knap.

Lad hændelsen C = {tryk på en knap, som virker halvdelen af gangene}. Så er Pr(C) = 2/10, da der er 2 sådanne knapper.

Lad hændelsen D = {knappen virker ikke}.

Så er Pr(D|B) = 1 og $\Pr(D|C) = \frac{1}{2}$.

a) $\Pr(\{Tryk\text{ på }en\ knap, som\ ikke\ virker\}) = \Pr((\mathrm{D} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{D} \cap \mathrm{C})) = \Pr(D|B)\Pr(B) + \Pr(D|C)\Pr(C) = 1 \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{2}\frac{2}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

b) $\Pr(\{Tryk\text{ på }den\ knap, som\ aldrig\ virker\}|\{Tryk\text{ på }en\ knap, som\ ikke\ virker\}) = \Pr\big(B\big|(D \cap B) \cup (D \cap C)\big) = \frac{\Pr\big(B\cap((D\cap B)\cup(D\cap C))\big)}{\Pr((D\cap B)\cup(D\cap C))} = \frac{\Pr\big((B\cap(D\cap B))\cup(B\cap(D\cap C))\big)}{Pr((D\cap B)\cup(D\cap C))} = \frac{\Pr(B)}{Pr((D\cap B)\cup(D\cap C))} = \frac{1/10}{2/10} = \frac{1}{2}$.

c) Vi ønsker at beregne $\Pr(C|\{Tryk\text{ på }en\ knap, som\ virker\})$. Dette kan vi gøre ud fra formlen for betinget sandsynlighed:

$$\Pr(C|\{Tryk\text{ på }en\ knap, som\ virker\}) = \frac{\Pr(C \cap \{Tryk\text{ på }en\ knap, som\ virker\})}{\Pr(\{Tryk\text{ på }en\ knap, som\ virker\})}$$

Først observerer vi, at hændelsen {Tryk på en knap, som virker}, er det samme som komplementet til hændelsen {Tryk på en knap, som <u>ikke</u> virker}. Dermed får vi følgende mellemresultat:

$$\Pr(\{Tryk\text{ på }en\ knap, som\ virker\}) = 1 - \Pr(\{Tryk\text{ på }en\ knap, som\ ikke\ virker\}) = 1 - \frac{1}{5} = 4/5$$

Hvad så med hændelsen $C \cap \{Tryk\text{ på }en\ knap, som\ virker\}$? Sandsynligheden for at udvælge en knap, som virker halvdelen af gangene er Pr(C) = 2/10. Hvis vi både skal udvælge en sådan knap, <u>og</u> den samtidig skal virke, må vi have

$$\Pr(C \cap \{Tryk\text{ på }en\ knap, som\ virker\}) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

Så vi får

$$\Pr(C|\{Tryk\text{ på }en\ knap, som\ virker\}) = \frac{\Pr(C\cap\{Tryk\text{ på }en\ knap,som\ virker\})}{\Pr(\{Tryk\text{ på }en\ knap,som\ virker\})} = \frac{1/10}{4/5} = 1/8.$$

Opg. 1-8.2

Pga. den indbyrdes uafhængighed, gælder der, at

$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$

$\Pr(A \cap C) = \Pr(A)\Pr(C)$

$\Pr(B \cap C) = \Pr(B)\Pr(C)$

$\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(A)\Pr(B)\Pr(C)$

a) Vi skal vise, at $\Pr\big(A \cap (B \cup C)\big) = \Pr(A)\Pr(B \cup C)$:
$\Pr\big(A \cap (B \cup C)\big) = \Pr\big((A \cap B) \cup (A \cap C)\big) = Pr(A \cap B) + Pr(A \cap C) - \Pr(A \cap B \cap C) =$
$\Pr(A)\Pr(B) + \Pr(A)\Pr(C) - \Pr(A)\Pr(B)\Pr(C) = \Pr(A)\,[\Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(B)\Pr(C)] =$
$\Pr(A)\Pr(B \cup C)$.
Her har jeg brugt den distributive lov (se slides).

b) Vi skal vise, at $\Pr\big(A \cap (B \cap C)\big) = \Pr(\mathrm{A})\Pr(\mathrm{B})\Pr(\mathrm{C})$:
$\Pr\big(A \cap (B \cap C)\big) = \Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(\mathrm{A})\Pr(\mathrm{B})\Pr(\mathrm{C})$.
Her har jeg brugt den associative lov (se slides).

c) Vi skal vise, at $\Pr\big(A \cap (B - C)\big) = \Pr(A)\Pr(B - C)$:
$\Pr\big(A \cap (B - C)\big) = \Pr\big(A \cap (B \cap \bar{C})\big) = \Pr(A \cap B \cap (S - C)) = \Pr(A \cap B \cap S - A \cap B \cap C) =$
$\Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(A)\Pr(B) - \Pr(A)\Pr(B)\Pr(C) = \Pr(A)\Pr(B)\,(1 - \Pr(C)) =$
$\Pr(A)\Pr(B)\Pr(\bar{C}) = \Pr(A)\Pr(B \cap \bar{C}) = \Pr(A)\Pr(B - C)$.

Opg. 1-8.3

Først observerer vi, at Pr(A) = ½, Pr(B) = ½, Pr(C) = ½.

a) $\Pr(A \cap B) = ½ \cdot ½ = \frac{1}{4} = \Pr(A)\Pr(B)$.
$\Pr(A \cap C) = \Pr(A \cap \bar{B}) = ½ \cdot ½ = \frac{1}{4} = \Pr(A)\Pr(C)$.
$\Pr(B \cap C) = \Pr(\bar{A} \cap B) = ½ \cdot ½ = \frac{1}{4} = \Pr(B)\Pr(C)$.

b) $\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(\emptyset) = 0 \neq \Pr(A)\Pr(B)\Pr(C)$.

Opg. 1-9.1

Vi har, at $S_1 = \{1,2, \dots ,6\}, S_2 = \{A, B, \dots , F\}, S = S_1 \times S_2$.

Antal mulige udfald er $|S| = |S_1| \times |S_2| = 6 \times 6 = 36$.

a) { (1,A) ; (1,B) ; … ; (1,F) ; (2,A) ; … ;(6,F) }

b) K = { (2,B) ; (4,B) ; (6,B) ; (2,C) ; (4,C) ; (6,C) }. Der er altså 6 mulige hændelser, svarende til K. Dermed er Pr(K) = 6/36 = 1/6.

Opg. 1-10.1

De to hændelser er uafhængige, fordi udfaldet af den ene mands kast ikke påvirker udfaldet af den anden mands kast (og vice versa).

a) Ved kast med 3 mønter, er der $2^3 = 8$ mulige udfald. Af disse 8 udfald er der 3 udfald, hvor antallet af Heads er 2. Så sandsynligheden for at slå 2 Heads er Pr(2 Heads) = 3/8. Hvis begge mænd skal slå 2 Heads har vi en *simultan* hændelse. På grund af uafhængigheden får vi Pr(Begge mænd slår 2 Heads) = Pr(2 Heads)xPr(2 Heads) = 3/8 x 3/8 = 0,1406.
Binomialformlen:
Vi kan også bruge binomialformlen til at beregne sandsynligheden for at en af mændene slår 2 Heads. Vi antager, at mønten er fair, så sandsynligheden for at slå Heads i et kast er Pr(H) = *p* = ½, og syndsynligheden for at slå Tails i et kast er Pr(T) = *q* = ½. Mønten kastes n = 3 gange, og vi er interesserede i sandsynligheden for, at Heads forekommer k = 2 gange. Jeg indsætter nu i formel 1-29:

$$p_n(k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{6}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{8}$$

b) Simultan sandsynlighed: Pr({En mand har ingen Heads}, {En mand har 3 Heads}) = Pr({En mand har ingen Heads}) x Pr({En mand har 3 Heads}) = 1/8 x 1/8 = 0,0156.

Opg. 1-10.2

a) Vi har, Pr({Spiller 1 vinder}) = Pr({Spiller 2 vinder}) = 1/2.

$$p_7(4) = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-4} = 0{,}2734$$
$$p_9(5) = \frac{9!}{5! \cdot (9-5)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9-5} = 0{,}2461$$

Svar: 4 sejre ud af 7 spil er mere sandsynligt.

b) Sammensat hændelse:

$$\Pr(\{mindst\ 4\ sejre\ ud\ af\ 7\ spil\}) = p_7(4) + p_7(5) + p_7(6) + p_7(7) = 0{,}5$$

hvor jeg selvfølgelig har regnet hver af binomialsyndsynlighederne ud…

$$\Pr(\{mindst\ 5\ sejre\ ud\ af\ 9\ spil\}) = p_9(5) + p_9(6) + p_9(7) + p_9(8) + p_9(9) = 0{,}5$$

Svar: Sandsynligheden er den samme.

Opg. 1-10.6

Fra opg. 1-7.1 ved vi, at sandsynligheden for at modtage en fejl er Pr(error) = 0,062.

a) Vi sender n = 6 bits og ønsker at beregne sandsynligheden for at modtage k = 0 fejl.

$$p_6(0) = \frac{6!}{0! \cdot (6-0)!} \cdot (0{,}062)^0 \cdot (1-0{,}062)^{6-0} = 0{,}6811$$

b) Vi sender n = 6 bits og ønsker at beregne sandsynligheden for at modtage k = 1 fejl.

$$p_6(1) = \frac{6!}{1! \cdot (6-1)!} \cdot (0{,}062)^1 \cdot (1-0{,}062)^{6-1} = 0{,}2701$$

c) Vi sender n = 6 bits og ønsker at beregne sandsynligheden for at modtage mere end 1 fejl.

$$\Pr(mere\ end\ 1\ error) = p_6(2) + p_6(3) + p_6(4) + p_6(5) + p_6(6)$$
$$= 1 - p_6(0) + p_6(1) = 0{,}0487$$

Her har jeg udnyttet komplement reglen.

d) Vi sender n = 6 bits og ønsker at beregne sandsynligheden for at modtage 1 eller flere fejl.

$$\Pr(1\ eller\ flere\ error) = p_6(1) + p_6(2) + p_6(3) + p_6(4) + p_6(5) + p_6(6)$$
$$= 1 - p_6(0) = 0{,}3189$$