



## TENTAMEN / EXAMINATION



8164617

Fylls i av **student** / To be completed by the **student**

Skriv anonymiseringskoden på samtliga svarsblad / Write your anonymity code on each sheet		Anonymiseringskod / Anonymity code	
		M A G A 5 1 - 0 0 3 6 - U B E	
Provbenämning / Exam name		Önmäld	
Matematisk grundkurs			
Kurskod / Course code	Provkod / Exam code	Tentamensdatum / Examination date	
M A G A 5 1	3 0 0 0	2 0 1 8 - 1 1 - 0 2	
Jag har tagit del av regler som gäller i tentamenssalen / I have read the current exam hall rules		Antal inlämnade blad / Number of sheets	
<input checked="" type="checkbox"/> Ja / Yes		1 0	

Fylls i av **skrivvakt** / To be completed by the **invigilator**

Kontroll av legitimation / Identification checked	<input checked="" type="checkbox"/> Ja / Yes	Härmed intygas att ovanstående kontroller utförts / This is to certify that the above mentioned checks have been carried out
Kontroll av inlämnade blad / Answer sheets checked	<input checked="" type="checkbox"/> Ja / Yes	
Inlämningstid / Time of submission	13 : 06	Tydlig sign. / Signature 

Fylls i av **lärare** / To be completed by the **examiner**

Bedömning av uppgifter / Questions attempted										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	~
9	7	3	3,5	0,5	1,5	4,5	-	-		
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	~
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	~
Totalt antal poäng / Total points					Examin. lärare / Kursansvarig signatur / Signature of the examiner					
29 + 5 = 34										
Betyg / Grade					Namnförtydligande / Clarification of the signature					
3					Mirela Vinerean Bernhoff					

8164617

Försättsbladet ska alltid lämnas in även om ingen uppgift behandlats /  
Examination should always be submitted even if no questions are answered



MAGA51-0036-UBE

1

1

Svarsblad MAGA51

2018-11-02

Op	1p
0	
<del>0</del>	1 (der)
	1
0	
	1
	1
	1
	1
	1
0	

a) (2,3)

b) Alla negativa reella tal  $x$  uppfyller  $x \tan x$  <sup>sinx</sup>

c)  $M(1, -2)$  Halvaxlar:  $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $b = \sqrt{2}$

d)  $M = \{0, \frac{2\pi}{3}, 2\pi\}$   <sup>$\frac{4\pi}{3}$</sup>

e)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

f)  $\frac{36}{\pi^2}$

g)  $g(x) = \frac{7x}{3}$

h) -2

i)  $\sqrt{2}$

j)  $2a$

k) 1365

l)  $-\frac{2187}{128} \sqrt{\frac{3}{2}} i$





Ange anonymitetskod / Write your anonymity code  
(Vid icke anonym tentamen ange kurskod + namn + personnummer)  
(For non-anonymous exams write the course code + name + civic registration number)

MAGA<sup>51</sup>/0036-UBE

Löpande sidnr  
Consecutive no:

2

Uppgift nr /  
Question no:

2a

Poäng / Points  
awarded:

3

Lärarens  
anteckning  
Examiner's remarks:

$$x-1 - x+2 \geq x-1$$

Brytpunkter är  $x=1$  och  $x=-2$

$$x < -2$$

$$-2 \leq x < 1$$

$$-(x-1) + (x+2) \geq x-1 \quad -(x-1) - (x+2) \geq x-1$$

$$-x+1+x+2 \geq x-1 \quad -x+1-x-2 \geq x-1$$

$$x \leq 4$$

$$x \leq 0$$

Lösning inom intervall

Lösning inom intervall är

$$\text{är } x \in (-\infty, -2)$$

$$x \in [-2, 0]$$

$$x \geq 1$$

$$(x-1) - (x+2) \geq x-1$$

Svar: Unionen av

$$x-1-x-2 \geq x-1$$

lösningar blir  $x \in (-\infty, 0]$

$$x \leq -2$$

du

Ingen lösning inom  
intervall- $\pm$



Ange anonymitetskod / Write your anonymity code  
(Vid icke anonym tentamen ange kurskod + namn + personnummer)  
(For non-anonymous exams write the course code + name + civic registration number)

MAGASI-0036-UBE

Löpande sidnr  
Consecutive no:

3

Uppgift nr /  
Question no:

26

Poäng / Points  
awarded:

1

Lärarens  
anteckning  
Examiner's remarks:

$$\ln(2^{x+1} - 2^{x-1}) = 1 \Leftrightarrow 2^{x+1} - 2^{x-1} = e \Leftrightarrow 2^x = \frac{2e}{3}$$

$$2^x = \frac{2e}{3} \Leftrightarrow e^{x \ln 2} = 2 \ln\left(\frac{2e}{3}\right)$$

$$x \cdot \ln 2 = \ln\left(\frac{2e}{3}\right)$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{2e}{3}\right)}{\ln(2)} \Leftrightarrow x = \ln \frac{e}{3}$$

du förstår på slutet

$$\ln A - \ln B = \ln\left(\frac{A}{B}\right)$$





$$Z^3 = 1 + \sqrt{3}i$$

$W$  är i först kvadranten.

$$W = 1 + \sqrt{3}i$$

$$|W| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2, \quad \arg(W) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$W = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$Z^3 = r^3 (\cos(3v) + i \sin(3v))$$

$$Z^3 = W \Leftrightarrow r^3 (\cos(3v) + i \sin(3v)) = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$r = \sqrt[3]{2}$$

$$\cos(3v) = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3v = \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$3v = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$v = \frac{\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$v_1 = \frac{\pi}{9}$$

$$v_2 = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{9}$$

$$v_3 = \frac{\pi}{9} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{13\pi}{9}$$

$$\text{Svar: } Z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}\right)$$

$$Z_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{9} + i \sin \frac{7\pi}{9}\right)$$

$$Z_3 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{13\pi}{9} + i \sin \frac{13\pi}{9}\right)$$

du



Ange anonymitetskod / Write your anonymity code  
(Vid icke anonym tentamen ange kurskod + namn + personnummer)  
(For non-anonymous exams write the course code + name + civic registration number)

MAGA<sup>51</sup>/0036-UBE

Löpande sidnr  
Consecutive no:

5

Uppgift nr /  
Question no:

3

Poäng / Points  
awarded:

2+1=3

Lärarens  
anteckning  
Examiner's remarks:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$V_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$x = \frac{2y-1}{y+3} \Rightarrow x(y+3) = 2y-1 \Leftrightarrow xy+3x = 2y-1 \Leftrightarrow$$

$$2y - xy = 3x + 1 \Leftrightarrow y(2-x) = 3x+1 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{3x+1}{2-x}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2-x}$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$V_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

ok

$$b) (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{2\left(\frac{2x-1}{x+3}\right) - 1}{\left(\frac{2x-1}{x+3}\right) + 3} = \frac{4x-2-(x+3)}{\frac{2x-1+3(x+3)}{x+3}} =$$

$$\frac{4x-2-x-3}{x+3} = \frac{3x-5}{x+3}$$

$$\frac{2x-1+3x+9}{x+3} = \frac{5x+8}{x+3}$$

ok

varför inverterar?





$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sin(3x) + x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{3x + O(x^3) + x^2 - x} = \frac{0}{0} \quad \text{L'H}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} \rightarrow \text{När länkar tack!} = \frac{1}{2}$$

a) 0,5

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}^+} \frac{\ln(\sin 4x)}{x - \frac{\pi}{8}} = \frac{1}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}^+} e^{\frac{\ln(\sin 4x)}{x - \frac{\pi}{8}}} = e^t$$

$$t = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}^+} \frac{\ln(\sin 4x)}{x - \frac{\pi}{8}} = \frac{0}{0} \quad \text{L'H} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}^+} \frac{\frac{1}{\sin 4x} \cdot \cos 4x \cdot 4}{1}$$

b) 3

$$= 4 \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$e^t = e^0 = 1$$

du

Svar: 1



$$2x + y - \sqrt{2} \cos(xy) = \frac{\pi}{2}$$

Test att punkten finns på linjen.

$$VL = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1 - \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 1\right) = \frac{\pi}{2} + 1 - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{2} = HL$$

Punkten finns på linjen. Deriverar båda led:

$$2 + y' + \sqrt{2} \sin(xy) \cdot y = 1 \quad \text{der} \quad \left(\frac{\pi}{2}\right)' = 0$$

Sätter  $x = \frac{\pi}{4}$  och  $y = 1$  och löser för  $y'$ :

$$2 + y' + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) y' = 1 \Leftrightarrow 2y' = -1 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2}$$

Tangent linjens ekvation:

$$(y - 1) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow y = 1 - \frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}$$

$$\text{Svar: } y = \frac{8 + \pi - 4x}{8}$$

$$(xy)' = y + xy'$$





Funktionen är kontinuerlig (om man inte behöver  
lyfta pinnar :) om höger och vänster  
gränsvärdet antar samma värde som funktionen.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \ln x + \frac{a}{2}, & \text{för } x \leq 1 \\ \frac{\arctan(x-1)}{x^2-1}, & \text{för } x > 1 \end{cases}$$

För  $x > 1$ :  $f(x) = \frac{\arctan(x-1)}{x^2-1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\arctan(x-1)}{x^2-1} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{2x} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

För  $x \leq 1$  gäller då  $f(1) = \frac{1}{4}$

$$\ln 1 + \frac{a}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Kontroll att funktionen faktiskt är kontinuerlig.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x + \frac{a}{2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arctan(x-1)}{x^2-1} = f(1)$$

Funktionen är kontinuerlig när  $a = \frac{1}{2}$

Svar:  $a = \frac{1}{2}$



$$f(x) = \frac{x^3}{3-x^2} = \frac{x^3}{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

Två vertikala asymptoter i  $x = \pm\sqrt{3}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(3-x^2) + x^3 \cdot 2x}{(3-x^2)^2} = \frac{9x^2 - x^4}{(3-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x)(3+x)}{(3-x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-6x(x^4 + 6x^2 + 27)}{(3-x^2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 3$$

x	-3	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	3
f'	-	0	+	0	+
f	↘	↗	↗	↗	↘
f''			0		

Lokalt min i  $x = -3$ , terrasspunkt i  $x = 0$ ,

lokalt max i  $x = 3$  och inflexionspunkt i  $x = 0$ .

Konvex i intervallet  $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, 0)$

Konkav i intervallet  $(0, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

Finns också en sned asymptot med lutningen:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{3-x^2} / x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{3}{x^2} - 1} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{3-x^2} - (-1)x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x - x^2}{3-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x^2} - 1}{\frac{3}{x^2} - 1} = 0$$

Den sneda asymptoten är  $y = -x$





MAGAS1-0036-UBE

10

7

4,5

