12 Homodyn- und Heterodyn-Detektion

Markus Lippitz
29. Juni 2022

Ziele: Sie können *erklären*, wann und wie ein Interferometer hilft, rauscharm zu messen

- homodyne und heterodyne Detektion in der Nachrichtentechnik
- homodyne und heterodyne Detektion in der Optik
- Schrotrauschen in Interferometern

Literatur: Horowitz/Hill Kap. 13.14–20

Nachrichtentechnik

Wir beginnen mit einem Exkurs in die Nachrichtentechnik, die die benutzen Vokabeln geprägt hat. Wie können wir Information, beispielsweise ein Radio-Programm, über eine längere Distanz übertragen?

Im Folgenden meint 'Signal' dieses Radio-Programm, also eine zeitlich variable Amplitude $a(t)$, deren Bandbreite begrenzt ist, weil Sprache oder Musik nur in einem gewissen Frequenzintervall stattfindet (ca. 100 Hz bis 5 KHz). Dieses Signal wird über einen 'Kanal' übertragen. Das kann optisch in einer Glasfaser oder als Radiosignal geschehen. Dazu wird das Signal auf einen 'Träger' aufmoduliert. Die Lichtwelle (bei 300 THz) oder die Radiowelle (bei 100 kHz bis 100 MHz) transportiert ja an sich keine Information. Erst durch Ändern ihrer Amplitude oder Frequenz wird Information übertragen.

Durch die Modulation wird das Frequenzspektrum des Trägers breiter, in erster Näherung um $\pm$ die Bandbreite des Signals. Verschiedene Träger-Frequenzen müssen also passenden Abstand einhalten, damit die Signale sich nicht gegenseitig beeinflussen.

Amplitudenmodulation

Die einfachste Methode ist die Amplitudenmodulation. Man ändert die Amplitude einer Radiowelle oder die Helligkeit eines Laserstrahls proportional zu zum Signal $a(t)$. Dabei muss man berücksichtigen, dass $a(t)$ negativ werden könnte, zählt also einen passende offset o hinzu. Damit erhalten wir für für die ausgesandt Wellenform $w(t)$

$$w(t) = [o + a(t)]\ \cos(\omega_c\, t)$$

mit der Träger-Kreisfrequenz ω_c. Das Spektrum $W(\omega)$ besteht als aus dem des Signals $A(\omega)$ symmetrisch über- und unterhalb der Trägerfrequenz ω_c.

Die Erzeugung eines solchen amplitudenmodulierten Wellenform ist technisch einfach. Man kann beispielsweise den Verstärkungsfaktor bzw. die Versorgungsspannung eines Verstärkers modulieren.

Demodulation

Um das Signal aus einer amplituden-modulierten Wellenform wiederzugewinnen, muss man zunächst die empfangene Wellenform verstärken. Dies geschieht also bei der Trägerfrequenz ω_c und in einem gewissen Frequenzintervall darum herum. Wenn diese Verstärker-Bandbreite gerade der Signal-Bandbreite entspricht, dann wären alle anderen Kanäle unterdrückt und man hätte $w(t)$ wiedergewonnen. Gleichrichten und Tiefpass-filtern liefert dann $o + a(t)$. Hochpass-Filtern entfernt o und man behält $a(t)$.

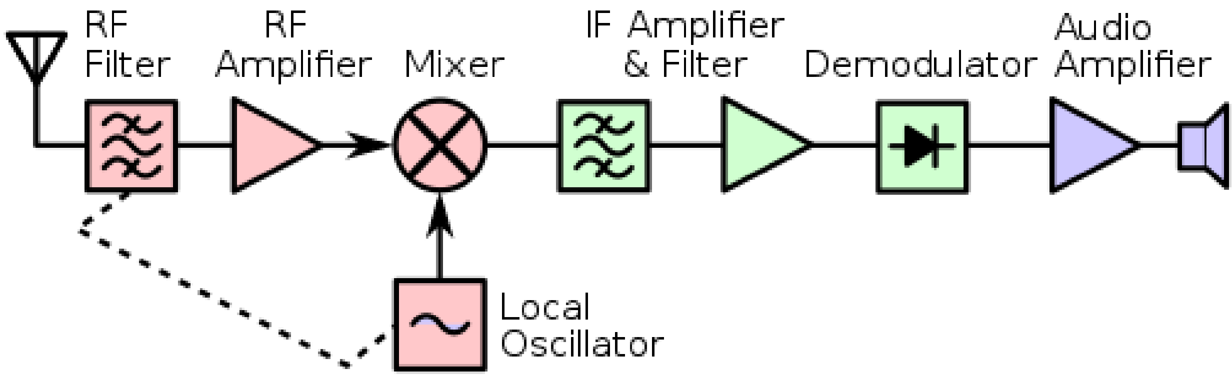
Leider erfordert dies im Radio-Empfänger einen genau abstimmbaren Verstärker bzw. eigentlich eine Kette von Verstärkern, die für jeden Kanal, jeden Sender neu abgestimmt werden müssten. Das ist technisch schwierig.

Heterodyne Detektion (historisch)

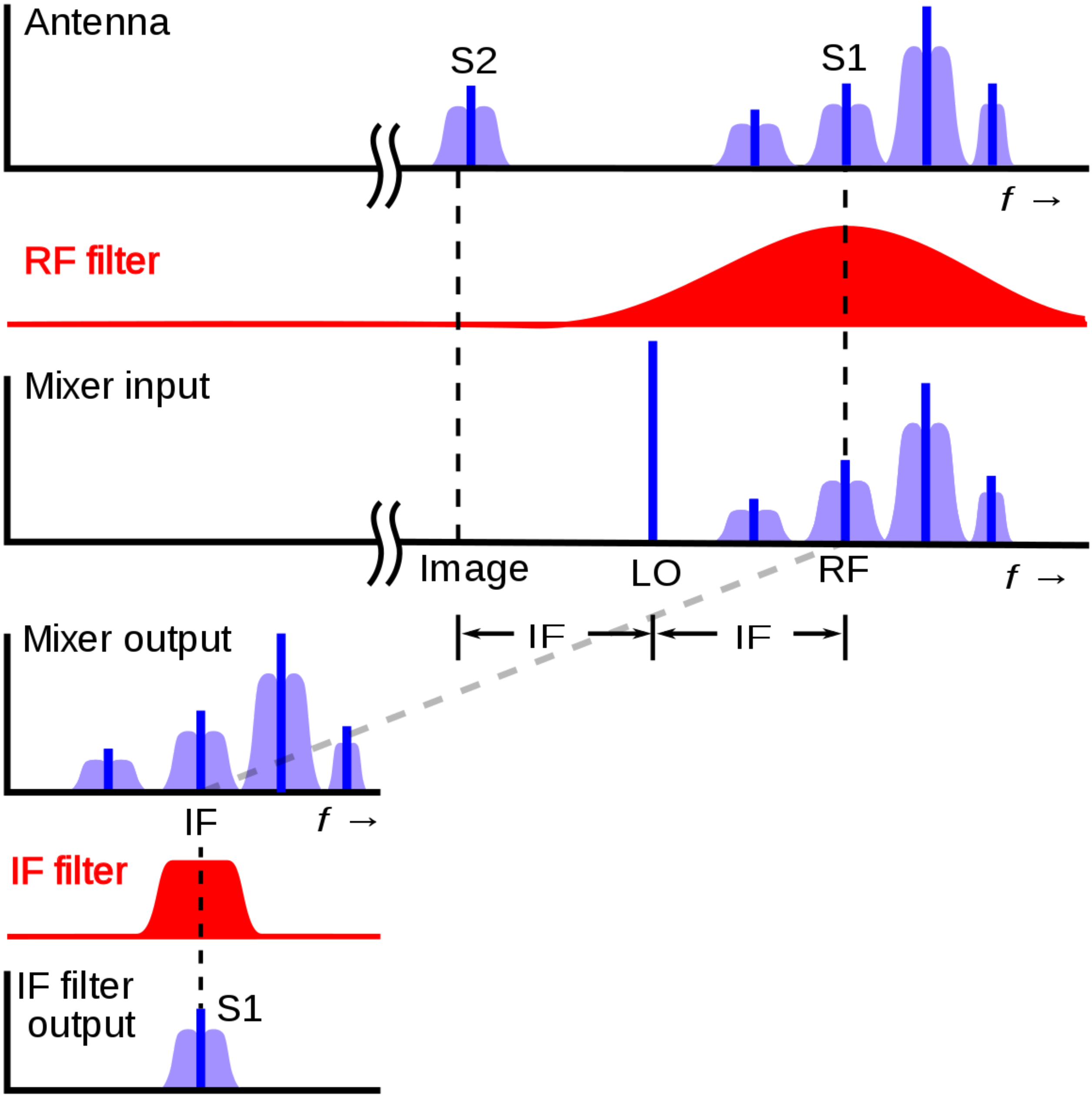
Die Idee der Heterodyn-Detektion geht zurück auf dem Empfang von Morse-Code und entstand um 1905. Wenn nicht ein Träger amplitudenmoduliert wurde, sondern zwei nahe benachbarte Träger-Frequenzen, dann kann man diese beiden Frequenz im Empfänger miteinander mischen. Bei passender Wahl ist die Differenzfrequenz im hörbaren Frequenzbereich (z.B. bei 3 kHz).

Super-Heterodyne Detektion

Der heutzutage quasi immer verwendete Superheterodyn-Empfänger verwendet einen lokalen Oszillator bei ω_{LO} statt der zweiten Trägerfrequenz. Und der Frequenzunterschied $\omega_{IF} = \omega_c - \omega_{LO}$ ist *supersonic*, also deutlich höher als hörbar. Dei Vorsilbe *super* lässt man aber gerne weg.



Blockdiagramm eines typischen Superheterodyn-Empfängers. Rot sind die Teile, die das eingehende Hochfrequenzsignal (HF) verarbeiten; grün sind die Teile, die auf der Zwischenfrequenz (ZF) arbeiten, während die blauen Teile auf der Modulationsfrequenz (Audio) arbeiten. Aus [wikipedia]



Funktionsweise eines Superheterodyn-Empfängers. Aus wikipedia

Die Antenne empfängt das gesamte Frequenzspektrum, das durch eine RF-Filter zunächst nur grob vorgefiltert wird. Der lokale Oszillator ist um die Frequenz ω_{if} gegenüber der gewünschten Trägerfrequenz ω_{S1} verstimmt. Nach dem Mischen (und grober Tiefpass-Filterung) bleiben nur wenige Kanäle übrig. Der schmalbandige IF-Filter behält dann nur noch den einen Kanal. Dieser kann dann wie gewöhnlich demoduliert werden.

Der Vorteil ist, dass der schmalbandige Filter bei IF bei einer technisch angenehmen Frequenz betrieben werden kann. Bei hohen Radiofrequenzen sind Filter etc. technisch viel aufwändiger. Und nur der grobe RF-Filter muss an den Kanal angepasst werden. Der selektive IF-Filter bleibt konstant.

Homodyne Detektion

Ein Nachteil der Superheterodyn-Technik ist der Zwischenschritt über die IF-Frequenz. Man hat versucht, das konzeptionell einfacher zu bauen, indem man gleich auf die Frequenz Null herunter mischt. Das ist die homodyne Detektion bzw. der Direktmischempfänger und sehr ähnlich dem Lock-In-Verstärker. Schaltungstechnisch hat sich das nicht durchgesetzt, aber in moderner Digitaltechnik wird dies oft implementiert, beispielsweise in *software defined radio* (SDR).

Frequenzmodulation

Neben der Amplitudenmodulation (AM) ist die Frequenzmodulation (FM) eigentlich bedeutsamer. Das Signal $a(t)$ wird auf die Frequenz der Trägerwelle moduliert. Die gesendete Wellenform ist also

$$w_{FM}(t) = \cos\left(\omega_c t + \omega_\Delta \int_0^t a(\tau) d\tau\right)$$

bzw. analog die Phasenmodulation (PM)

$$w_{PM}(t) = \cos\left(\omega_c t + \omega_\Delta\, a(t)\right)$$

Lassen Sie uns annehmen, dass das Signal nur aus einem Ton bei ω_m besteht, also $a(t) = \cos \omega_m t$. Dann wird das Integral $\sin(\omega_m t)/\omega_m$ und somit

$$w_{FM}(t) = \cos\left(\omega_c t + \frac{\omega_\Delta}{\omega_m}\sin(\omega_m t)\right)$$

Den Term

$$h = \frac{\omega_\Delta}{\omega_m}$$

nennt man **Modulations-Index**. Die Amplitude der einzelnen Frequenz-Komponenten folgt damit Bessel-Funktionen $J_k(h)$

$$w_{FM}(t) = \cos\left(\omega_c t + h\ \sin(\omega_m t)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(h)\ \cos(\left[\omega_c + k\omega_m\right] t)$$

Die Anzahl der **Seitenbänder** bei $k \neq 0$ entspricht ungefähr dem Wert des Modulations-Indexes h.

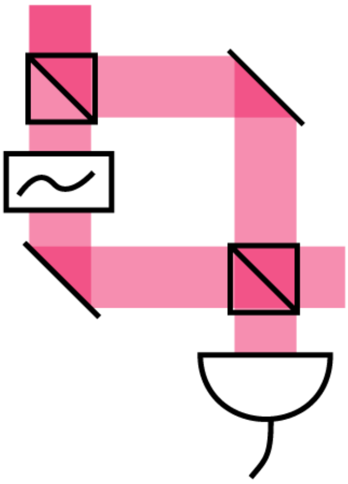
Zur Detektion eignet sich auch ein Superheterodyn-Detektor. Der Verstärker im IF-Bereich wird so ausgelegt, dass er sättigt, also immer die gleiche Amplitude liefert, egal wie stark das Eingangssignal war. Danach braucht es noch einen Detektor, der die instantane Frequenz bestimmt, beispielsweise eine *phase locked loop* (PLL).

Optische Signale

Radiowellen und Licht sind beides elektromagnetische Wellen, nur in verschiedenem Frequenzbereich. Die Konzepte der Nachrichtentechnik lassen sich deswegen zumindest teilweise übertragen.

Optische Homodyn-Detektion

Man kan ein Interferometer als Variante der Homodyn-Detektion betrachten.



Interferometer. Aus wikipedia

Im Unterschied zu Nachrichtentechnik müssen lokaler Oszillator und Trägerwelle von gleichen Laser abgeleitet werden, damit sie phasenstabil genug sind. Die Trennung geschieht im ersten Strahlteiler. Im Signal-Arm (hier senkrecht) bewirkt das Experiment dann eine Amplituden- oder Frequenzmodulation des Trägers. Am zweiten Strahlteiler werden beide Arme wieder überlagert. Die Photodiode liefert einen Strom proportional zum Quadrat der Gesamt-Feldstärke und dient somit gleichzeitig als Mischer und auch Tiefpass-Filter, weil die doppelte optische Frequenz jenseits der elektrischen Bandbreite liegt.

Amplitudenmodulation

Wenn das Experiment eine Amplitudenmodulation $a(t)$ bewirkt, dann ist das Lichtfeld nach dem Experiment

$$E_S(t) = E_0 \left[1 + a(t)\right] e^{i\omega_0 t}$$

und der lokale Oszillator

$$E_{LO}(t) = E_{LO}\ e^{i\omega_0 t + \Delta\phi}$$

Der Photostrom ist damit

$$I(t) \propto \left|E_S(t) + E_{LO}(t)\right|^2$$

Betrachten wir zunächst den Fall ohne lokalen Oszillator, also $E_{LO} = 0$. Dann ist

$$I(t) \propto |E_0|^2[1+a][1+a^\star] = |E_0|^2\left[1+2\Re\{a(t)\}+|a(t)|^2\right] \approx |E_0|^2\left[1+2\Re\{a(t)\}\right]$$

Wir sind ja nur an kleinen Signalen, also $a(t) \ll 1$ interessiert.

Mit lokalen Oszillator wird dies zu

$$I(t) \propto \left|E_0[1+a(t)]+E_{LO}e^{i\Delta\phi}\right|^2$$

Interessant ist der Fall von einem sehr starken lokalen Oszillator, also $E_{LO} \gg E_0$. Damit wird

$$I(t) \approx |E_{LO}|^2\left[1+2\Re\{a(t)\,e^{-i\Delta\phi}\}\right]$$

Der Effekt des lokalen Oszillators ist also zum Einen, die Signal-Amplitude zu erhöhen ohne mehr Lichtleistung durch das Experiment schicken zu müssen, falls die Probe beispielsweise nur eine gewisse Intensität toleriert. Zum Anderen kommt $\Delta\phi$ also Freiheitsgrad hinzu. Man kann somit also nicht nur den Realteil von $a(t)$ detektieren, sondern auch den Imaginärteil bze. eine durch die Probe hervorgerufene Phasenverschiebung.

Im Prinzip kann man aber auch schon die '1' in obigen Gleichungen als lokalen Oszillator verstehen. Quasi alle optischen Messungen beinhalten immer auch Licht, dass nicht durch das Experiment tangiert wurde, eben den '1'-Term. Dieses Licht interferiert immer am Detektor mit dem '$a(t)$'-Term, so dass immer eine homodyne Detektion vorliegt, solange man nicht besondere Vorkehrungen trifft.

> Sie wollen ein kleines SIgnal $a(t)$ detektieren, dass sie zwischen $a = 0$ und $a = a_0$ schalten können. Untersuchen Sie den Einfluss verschiedener Rausch-Quellen auf das SNR, und ob daran interferometrische Detektion etwas ändert / ändert kann.

Bsp. zu Optische Heterodyn-Detektion

Manchmal möchte man die Amplitude und Phase einer Frequenzkomponente im Lichtfeld bestimmen, die um eine RF-Frequenz gegenüber der Trägerwelle verschoben ist. Als Beispiel diskutiere ich hier ein Experiment zum optischen Vier-Wellen-Mischen

Wolfgang Langbein and Brian Patton: *Heterodyne spectral interferometry for multidimensional nonlinear spectroscopy of individual quantum systems.* Opt. Lett. 31, 1151-1153 (2006)

Vier-Wellen-Mischen

Vier-Wellen-Mischen ist ein nichtlinearer optischer Effekt, bei dem drei optische Wellen eine neue, vierte Welle erzeugen, zu dieser gemischt werden. Ausgangspunkt ist dabei eine nichtlineare optische Polarisation dritter Ordnung

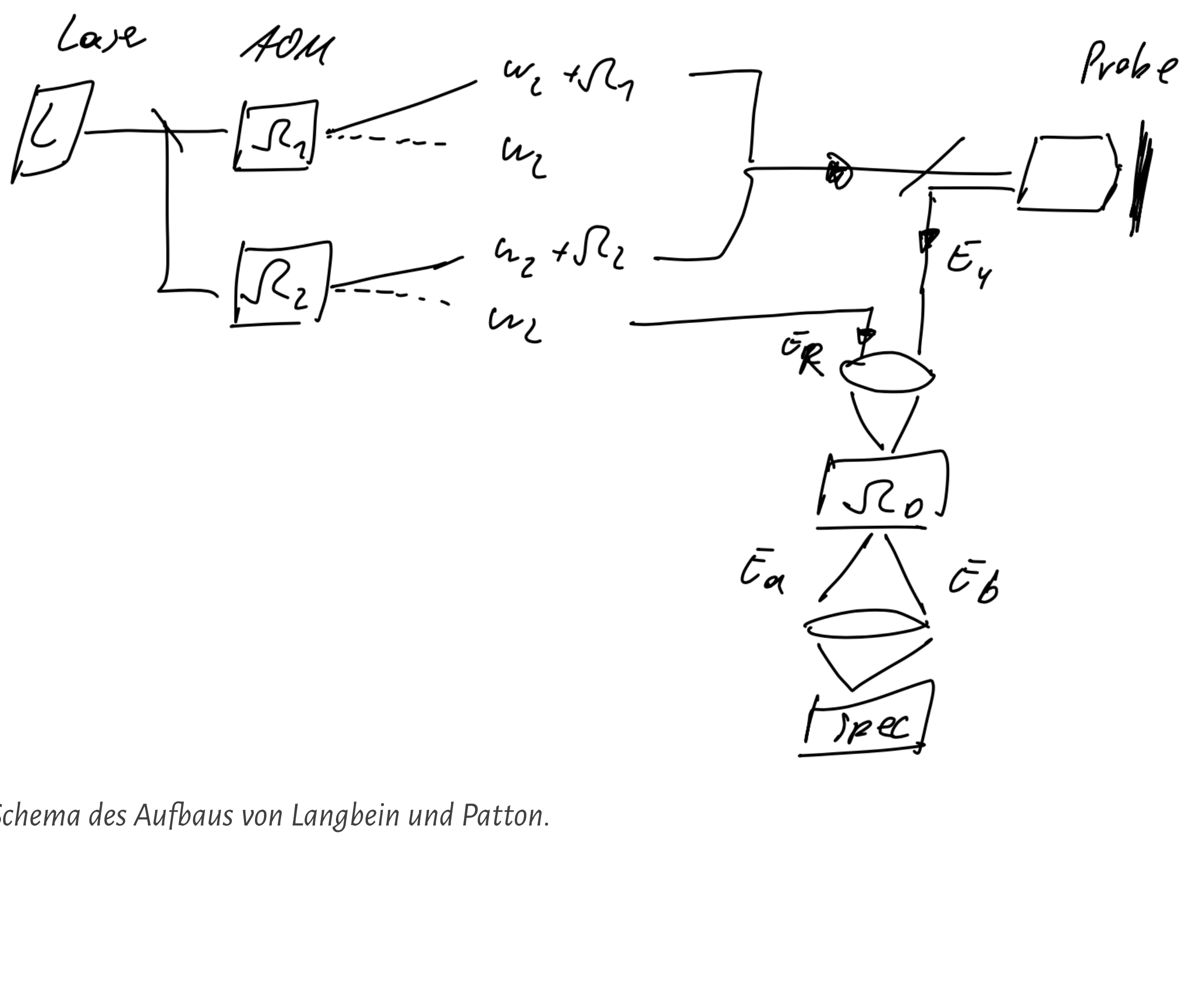
$$P^{(3)} = \chi^{(3)}\, E_1(t)\, E_2(t)\, E_3(t)$$

Jedes der 3 Felder E_i kann eine eigener Frequenz ω_i haben. Die nichtlinear e Polarisation $P^{(3)}$ strahlt ein viertes Feld ab, dessen Frequenz die Summe der einzelnen Frequenzen ist. Da

$$2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$$

tauchen sowohl positive als auch negative Frequenzen auf. Im Prinzip gibt es also $2^3 = 8$ Mischprodukte, die unterschiedlichen physikalischen Ursprung haben. In diesen Artikel ist man an dem mit den Vorzeichen $(-++)$ interessiert. Weiterhin wählt das Experiment $E_2 = E_3$. Die zu analysierenden Frequenz ist also

$$\omega_4 = -\omega_1 + 2\omega_2$$



Schema des Aufbaus von Langbein und Patton.

AOM als Frequenz-Schieber

Im Experiment bestehen die Felder E_i aus Laserpulsen, und deren zeitliche Reihenfolge ist relevant. Dazu wird ein Laserstrahl in 2 Teile aufgeteilt und jeder Teil durch einen *Akusto-Optischen Modulator* (AOM) geschickt. Hier wird der Strahl an einem Ultraschall-Gitter gebeugt. Dabei wird jede Beugungsordnung $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ um k mal die Ultraschallfrequenz Ω frequenzverschoben (sonst würde die Energieerhaltung nicht zusammen mit der Impulserhaltung gelten). Damit ist also

$$\omega_k = \omega_{laser} + k\Omega$$

Die einzelnen ω_i von oben basieren also alle auf dem gleichen ω_{laser}, sind jedoch in zwei verschiedenen AOM um zwei verschiedene Ω_{AOM} verschoben.

Heterodyn-Detektion

Das Mischprodukt ω_4 liegt wieder in der Nähe von ω_{laser} (so ist der Prozess ausgewählt). Wo genau hängt aber von den Ω_{AOM} ab. Jetzt kommt die Heterodyn-Detektion zum Einsatz. An einem dritten AOM bei der Frequenz Ω_D treffen sich der Strahl E_4 von der Probe und ein Referenz-Strahl E_R direkt vom Laser. Der Winkel zwischen den beiden Strahl entspricht gerade dem Beugungswinkel. Die Ordnung +1 von E_4 geht also in die gleiche Richtung wie die Nullte Ordnung von E_R bzw. die Ordnung -1 von E_R überlagert sich mit E_4. Insgesamt bekommt mal also

$$E_a = E_R + E_4 e^{i\Omega_D t} \quad \textbf{und} \quad E_b = E_R e^{-i\Omega_D t} + E_4$$

Das Spektrometer misst Intensitäten, also z.B.

$$I_a \propto |E_a|^2 = |E_R|^2 + |E_4|^2 + 2\Re\left\{E_R^\star \, E_4 \, e^{i\Omega_D t}\right\}$$

und mittelt diese über die Integrationszeit. Der dritte Term oszilliert in t und mittelt sich so weg, wenn nicht gerade alle Frequenzen sich gegenseitig aufheben, also gerade $\omega_4 = \omega_{laser} - \Omega_D$. Wenn man dann noch $I_a - I_b$ betrachtet, dann heben sich die konstanten ersten beiden Terme gerade weg.

So ist man in der Lage, Amplitude und Phase von E_4 (und damit von dem gewählten $P^{(3)}$)) zu detektieren. Das Spektrometer sorgt dafür, dass man nicht nur die Gesamtintensität, sondern auch noch deren spektralen Verlauf kennt. Im dem Artikel wird so die Kopplung zwischen verschiedenen Zuständen eines Quantenpunkts untersucht.

```julia
using PlutoUI
```

Inhalt

Nachrichtentechnik
- Amplitudenmodulation
- Demodulation
- Heterodyne Detektion (historisch)
- Super-Heterodyne Detektion
- Homodyne Detektion
- Frequenzmodulation

Optische Signale
- Optische Homodyn-Detektion
  - Amplitudenmodulation
- Bsp. zu Optische Heterodyn-Detektion
  - Vier-Wellen-Mischen
  - AOM als Frequenz-Schieber
  - Heterodyn-Detektion

```julia
TableOfContents(title="Inhalt")
```

```julia
aside(x) = PlutoUI.ExperimentalLayout.aside(x);
```