6 Fourier-Transformation

Markus Lippitz
13. Mai 2022

Ziele Sie können für typische ein-dimensionale Funktionen die Fourier-Transformierte intuitiv *vorhersagen*.

- von der Fourier-Reihe zur Fourier-Transformation
- FT typischer Funktionen
- Produkt und Faltung von Funktionen

weitere Aufgaben

- Synthetisieren sie eine Dreieck- / Rechteck-Funktion ‚von Hand'

Literatur Butz Kap. 1 & 2, Saleh/Teich Anhang A, Hecht Kap.11, Horowitz / Hill, Kap. 15.18

Überblick

An vielen Stellen in der Physik ist es sinnvoll und hilfreich, einen intuitiven Zugang zur Fourier-Transformation zu haben. Im Endeffekt muss man in der Experimentalphysik nur selten eine Fourier-Transformation wirklich ausrechnen. Sehr oft reicht es, ein paar oft vorkommende Fourier-Paare zu kennen und diese mit einfachen Regeln zu kombinieren. Dies möchte ich hier kurz vorstellen. Eine sehr schöne und viel detailliertere Darstellung findet sich in **Butz: Fourier-Transformation für Fußgänger**. Ich folge hier seiner Notation.

Bevor wir zu den Fourier-Paaren kommen, müssen allerdings doch erst ein paar Grundlagen gelegt werden.

Fourier-Reihen: eine periodische Funktion und deren Fourier-Koeffizienten

Wir betrachten hier alles erst einmal eindimensional im Zeit- bzw. Frequenzraum mit den Variablen t und $\omega = 2\pi\nu$. Die Funktion $f(t)$ sei periodisch in der Zeit mit der Periodendauer T, also $f(t) = f(t+T)$ Dann kann man diese als Fourier-Reihe schreiben

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \, e^{i\,\omega_k\,t}$$

mit $\omega_k = \frac{2\pi\,k}{T}$ und den Fourier-Koeffizienten

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \; e^{-i\,\omega_k\,t} \, dt$$

Man beachte das negative Vorzeichen in der Exponentialfunktion im Gegensatz zur Gleichung davor. Für reellwertige Funktionen $f(t)$ sind 'gegenüberliegende' C_k konjugiert-komplex, also $C_k = C^{\star}_{-k}$. Für $k < 0$ sind die Frequenzen ω_k negativ, was aber kein Problem darstellt. Der nullte Koeffizient C_0 ist also gerade der zeitliche Mittelwert der Funktion $f(t)$.

Eine beliebige Funktion und deren Fourier-Transformierte

Nun heben wir die Einschränkung auf periodische Funktionen $f(t)$ auf, indem wir die Periodendauer T gegen unendlich gehen lassen. Dadurch wird aus der Summe ein Integral und die diskreten ω_k werden kontinuierlich. Damit wird

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega\, t}\, dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{+i\omega\, t}\, d\omega \end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist dabei die Hintransformation (minus-Zeichen im Exponenten), die zweite die Rücktransformation (plus-Zeichen im Exponenten). Die Symmetrie wird durch das 2π gebrochen. Dies ist aber notwendig, wenn man weiterhin $F(\omega = 0)$ als Mittelwert behalten will. Alternativ könnte man das alles mit ν statt ω formulieren, hätte dann aber an viel mehr Stellen ein 2π, wenn auch nicht vor dem Integral.

Nebenbemerkung: Delta-Funktion

Die Delta-Funktion kann geschrieben werden als

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0} f_a(x) \quad \text{mit} \quad f_a(x) = \begin{cases} a & \text{falls } |x| < \frac{1}{2a} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

oder als

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i\,x\,y}\, dy$$

Eine wichtige Eigenschaft ist, dass die delta-Funktion einen Wert selektiert, also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, f(x)\, dx = f(0)$$

Wichtige Fourier-Paare

Es ist sehr oft ausreichend, die folgenden Paare von Funktionen und deren Fourier-Transformierten zu kennen. Ich schreibe sie hier, Butz folgend, als Paare in t und ω (nicht $\nu = \omega/(2\pi)$). Genauso hätte man auch Paare in x und k schreiben können. Wichtig ist dabei die Frage, ob ein 2π in der Exponentialfunktion der ebenen Welle auftaucht oder nicht. Also

$$e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad e^{ikx} \quad \text{, aber} \quad e^{i2\pi\nu t}$$

Weiterhin folge ich hier der oben gemachten Konvention zu asymmetrischen Verteilung der 2π zwischen Hin- und Rück-Transformation. Wenn man die anders verteilt, dann ändern sich natürlich auch die Vorfaktoren. Eine gute Übersicht über noch viel mehr Fourier-Paare in diversen '2π'-Konventionen findet sich in der englischen Wikipedia unter 'Fourier transform'. In deren Nomenklatur ist die hier benutzte Konvention von Butz 'non-unitary, angular frequency'.

Konstante und Delta-Funktion

Aus $f(t) = a$ wird $F(\omega) = a\,2\pi\,\delta(\omega)$ und aus $f(t) = a\,\delta(t)$ wird $F(\omega) = a$. Das ist wieder das asymmetrische 2π.

Rechteck und sinc

Aus der Rechteckfunktion der Breite b wird ein sinc, der sinus cardinalis. Also aus

$$f(t) = \mathrm{rect}_b(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |t| < b/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wird

$$F(\omega) = b\,\frac{\sin \omega b/2}{\omega b/2} = b\,\mathrm{sinc}(\omega b/2)$$

Gauss

Die Gauss-Funktion bleibt unter Fourier-Transformation erhalten. Ihre Breite geht in den reziproken Wert über. Also aus einer Gauss-Funktion der Fläche Eins

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}$$

wird

$$F(\omega) = e^{-\frac{1}{2}(\sigma\,\omega)^2}$$

(beidseitiger) Exponentialzerfall und Lorentz-Kurve

Aus einer sowohl zu positiven als auch zu negativen Zeiten exponentiell abfallenden Kurve

$$f(t) = e^{-|t|/\tau}$$

wird die Lorentz-Kurve

$$F(\omega) = \frac{2\tau}{1+\omega^2\,\tau^2}$$

Einseitiger Exponentialzerfall

Als Nebenbemerkung hier der einseitige Exponentialzerfall, also

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{für} \quad t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der wird zu

$$F(\omega) = \frac{1}{\lambda + i\,\omega}$$

ist also komplexwertig. Sein Betrags-Quadrat ist wieder eine Lorentz-Funktion

$$|F(\omega)|^2 = \frac{1}{\lambda^2+\omega^2}$$

und die Phase ist $\phi = -\omega/\lambda$.

Eindimensionales Punktgitter

Eine äquidistante Kette von Punkten bzw. Delta-Funktionen geht bei Fourier-Transformation wieder in eine solche über. Die Abstände nehmen dabei den reziproken Wert an. Also aus

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - \Delta t\, n)$$

wird

$$F(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{\Delta t}\right)$$

Sätze und Eigenschaften der Fourier-Transformation

Neben den Fourier-Paaren braucht man noch ein paar Eigenschaften der Fourier-Transformation. Im Folgende seien $f(t)$ und $F(\omega)$ Fourier-konjugierte und ebenso g und G.

Linearität

Die Fourier-Transformation ist linear

$$a\, f(t) + b\, g(t) \quad \leftrightarrow \quad a\, F(\omega) + b\, G(\omega)$$

Verschiebung

Eine Verschiebung in der Zeit bedeutet eine Modulation in der Frequenz und andersherum

$$\begin{aligned} f(t-a) \quad &\leftrightarrow \quad F(\omega)\, e^{-i\omega a} \\ f(t)\ e^{-i\omega_0 t} \quad &\leftrightarrow \quad F(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

Skalierung

$$f(a\,t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{|a|}\,F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Faltung und Multiplikation

Die Faltung geht in ein Produkt über, und andersherum.

$$f(t) \otimes g(t) = \int f(\zeta)g(t-\zeta)d\zeta \quad \leftrightarrow \quad F(\omega)\,G(\omega)$$

und

$$f(t)\,g(t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\,F(\omega) \otimes G(\omega)$$

Parsevals Theorem

Die Gesamt-Leistung ist im Zeit- wie im Frequenzraum die gleiche

$$\int |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int |F(\omega)|^2\,d\omega$$

Zeitliche Ableitungen

$$\frac{d\,f(t)}{dt} \quad \leftrightarrow \quad i\omega\,F(\omega)$$

Beispiel: Beugung am Doppelspalt

Als Beispiel betrachten wir die Fourier-Transformierte eines Doppelspalts, die gerade sein Beugungsbild beschreibt. Die Spalten haben eine Breite b und einem Mitten-Abstand d. Damit wird der Spalt beschrieben durch eine Faltung der Rechteck-Funktion mit zwei Delta-Funktionen im Abstand d

$$f(x) = \mathrm{rect}_b(x) \,\otimes\, \left(\delta(x - d/2) + \delta(x + d/2)\right)$$

Die Fourier-Transformierte der Rechteck-Funktion ist der sinc, die der delta-Funktionen eine Konstante. Die Verschiebung im Ort bewirkt allerdings eine Modulation im k-Raum. Aus der Summe der beiden Delta-Funktionen wird also

$$\mathcal{FT}\left\{\delta(x - d/2) + \delta(x + d/2)\right\} = e^{-ikd/2} + e^{+ikd/2} = 2\cos(kd/2)$$

Die Faltung mit der Rechteck-Funktion geht über in eine Multiplikation mit dem sinc. Zusammen erhalten wir somit

$$\mathcal{FT}\left\{f(x)\right\} = b\frac{\sin(kb/2)}{kb/2}\, 2\cos(kd/2) = \frac{4}{k}\sin(kb/2)\,\cos(kd/2)$$

Die Intensität in Richtung k ist dann das Betragsquadrat davon.

Selbstkontrolle

Zeitliche Verschiebung

- Skizzieren Sie Amplitude und Phase der FT eines zeitlichen Rechteckpulses, der um die zeitliche Null zentriert ist!
- Was ändert sich, wenn man den Puls zu positiven Zeiten verschiebt?

Pulsfolge

Sie fragen sich, wie die Fourier-Transformierte (Betragsquadrat) einer unendlichen Folge von Rechteck-Pulsen aussieht und fangen an, danach im Internet zu suchen. Ihre Kommilitonin entgegnet, das „sehe“ man doch sofort.

- Skizzieren Sie sich die Fourier-Transformierte.
- Erklären Sie wieso man das direkt herleiten könnte oder „sehen“ solle.

Lichtpuls

Stellen Sie sich einen „Lichtpuls“ vor als mathematische Konstruktion aus einer unendlich langen Cosinus-Schwingung, die der Lichtfrequenz entspricht. Den „Puls“ erhält man daraus, indem man die Welle mit einer zeitlich begrenzten Gausspuls-Einhüllenden (z.B. Halbwertsbreite von 10 Lichtschwingungen) multipliziert.

- Skizzieren Sie die Konstruktion der Fouriertransformation im Spektralbereich

Zweidimensionale Fourier-Transformation

Wir können die Definition der Fourier-Transformation auf zwei und mehr Dimensionen erweitern. Die konjugierten Variablen sind (x, y) und (k_x, k_y), anstelle von t und ω. Der Wellenvektor $k_i = 2\pi/\lambda_i$ enthält den Faktor von 2π wie in der Kreisfrequenz ω. Wir definieren

$$\begin{aligned} F(k_x, k_y) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, e^{-i(k_x\, x + k_y\, y)}\, dx\, dy \\ f(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} F(k_x, k_y)\; e^{+i(k_x\, x + k_y\, y)}\, dk_x\, dk_y \quad . \end{aligned}$$

Wenn wir die Funktion $f(x, y)$ in ein Produkt von eindimensionalen Funktionen zerlegen können, dann ist die Fourier-Transformation einfach das Produkt der einzelnen Fourier-Transformationen

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y) \quad \leftrightarrow \quad F(k_x, k_y) = G(k_x) \cdot H(k_y) \quad .$$

Ein Rechteck der Größe $a \times b$ wird in ein Produkt von Sinc-Funktionen umgewandelt

$$\begin{aligned} (x, y) &= \mathrm{rect}_a(x) \cdot \mathrm{rect}_b(y) \\ \leftrightarrow \quad F(k_x, k_y) &= ab\, \mathrm{sinc}(k_x a/2)\, \mathrm{sinc}(k_y b/2) \quad . \end{aligned}$$

Ein Spezialfall davon ist die rotationssymmetrische zweidimensionale Gaußsche Funktion

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad \leftrightarrow \quad F(k_x, k_y) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}(k_x^2+k_y^2)} \quad .$$

Eine wichtige Funktion kann nicht in ein Produkt eindimensionaler Funktionen zerlegt werden: eine Scheibe mit dem Radius a

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x^2 + y^2 < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wird transformiert in

$$F(k_x, k_y) = a\, \frac{J_1(\pi\, a\, \rho)}{\rho} \quad \text{width} \quad \rho = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

und der (zylindrischen) Besselfunktion erster Art $J_1(x)$

$$J_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\tau - x \sin \tau) \, d\tau \quad ,$$

die das zylindrische Analogon einer Sinc-Funktion ist.

```
using PlutoUI
```

Inhalt


```
TableOfContents(title="Inhalt")
```