9 Rauschen

Markus Lippitz
2. Juni 2022

Ziel Sie können den Ursprung von Rauschquellen in optischen Messungen *identifizieren*.

- Rauschen-Spektren: 1/f, weiß
- Physikalischer Ursprung von Rauschen: Schrot, thermisch
- Leistungsabhängigkeit
- Maße für Signalamplituden: pp, RMS, Leistung

Literatur Horowitz / Hill, Kap. 7.18–21, Müller: Rauschen,

Überblick

Rauschen beschreibt die zeitliche Fluktuation einer Messgröße um ihren Mittelwert. Hier werden wir verschiedene Aspekte des Verlaufs im Zeit- und Frequenzraum sowie des physikalischen Ursprungs betrachten. Rauschen wird in verschiedenen Büchern zur Elektronik am Rande betrachtet (beispielsweise Horowitz / Hill: Art of Electronics). Details finden sich in R. Müller: Rauschen (Springer Verlag) und A. Blum: Elektronisches Rauschen (Teubner Verlag).

Beschreibung im Zeitbereich

Eine Größe $A(t)$ schwankt um ihren zeitlichen Mittelwert $\langle A \rangle$, also $A(t) = \langle A \rangle + a(t)$. Zur Beschreibung von a bzw. A werden die Methoden zur Beschreibung von Zufallsvariablen benutzt, wie beispielsweise in Stahel: Statistischer Datenanalyse dargestellt. Nur auf wenige soll hier gesondert eingegangen werden.

Schwankungsquadrat (root mean square value)

Die Standard-Abweichung $\sigma = \sqrt{\langle a(t)^2 \rangle}$, also die Wurzel aus dem Mittelwert der quadratischen Abweichung, ist ein gutes Maß für die Amplitude des Rauschens und wird im Englischen 'root mean square (rms) value' genannt.

Oft muss die Amplitude von Rauschen mit der eines bekannten Signals verglichen werden. Der rms-Wert einer Sinus-Oszillation $a \sin(\omega t)$ ist $a/\sqrt{2}$, der eines Rechteck-Signals der Amplitude $\pm a$ ist a. Oft wird die Amplitude des Signals auch als Spitze-Spitze-Wert (peak-peak) angegeben, der bei dieser Definition jeweils $2a$ ist.

```
using StatsBase
```

```
0.7071172086077443
```

```
let
    x = (0:0.001:2pi)
    y = sin.(x)
    std(y)
end
```

```
1.0002498438514935
```

```
let
    x = (0:0.001:2)
    y = [if (xi > 1)  1 else -1 end for xi in x]
    std(y)
end
```

Zufällige Folge von Impulsen

Oft findet man Signale, die aus einer zufälligen Folge von identischen Impulsen bestehen. Jeder Impuls hat den zeitlichen Verlauf $g(\tau)$. Das Gesamt-Signal ist dann

$$A(t) = \sum_i g(t - t_i) = g(\tau) \otimes \sum_i \delta(t - t_i)$$

wobei t_i die Ankunftszeit des i-ten Pulses ist. Dies lässt sich auch schreiben als Faltung der Impulsform in einer Sequenz von Delta-Pulsen.

In einem Zeitintervall der Länge T seien $n = zT$ Pulse zu finden. z ist also die zeitliche Impulsdichte. Diese Zahl n folgt einer Poisson-Verteilung, wie wir sie für solche Zählungen von seltenen Ereignissen erwarten. Damit kennen wir die Varianz der Impulsdichte, die in der Poisson-Verteilung dem Erwartungswert entspricht. Für das Quadrat des rms-Werts gilt damit

$$\sigma^2 = n \left\langle g(\tau)^2 \right\rangle = z \int g(\tau)^2 \, d\tau \quad .$$

```
(0.0014979, 0.0015)
```

```
let
    L = 10000;  # length of time trace
    n = 15;  # number of events

    x = zeros(L)  # empty trace
    t_i = Int16.(round.(rand(n) .* L))  # random arrival times of events
    x[ t_i] .= 1  # here g(tau) = delta(tau- t_i)

    (var(x), n ./ L) # compare sigma^2 with n <g>
end
```

Selbsttest

Ändern Sie $g(\tau)$ in diesem Beispiel und erklären sie das Ergebnis.

Beschreibung im Frequenzbereich

Parsevals Theorem verknüpft das Betrags-Quadrat, also die Leistung, eines Signals im Zeitraum mit dem im Frequenzraum (Butz, eq. 2.53)

$$\int |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int |F(\omega)|^2 d\omega$$

wobei f und F Fourier-Transformierte voneinander sind. Das Betrags-Quadrat der Fourier-Transformierten von $a(t)$ wird spektrale Leistungsdichte des Rauschens $W(f)$ genannt. Es gilt (Müller, eq. 2.1)

$$\int_{f>0} W(f)\, df = \left\langle a(t)^2 \right\rangle$$

Der Unterschied zwischen a und A liefert nur einen zeitliche konstanten Wert und damit einen Beitrag bei $f = 0$, also

$$\int_{f \geq 0} W(f)\, df = \left\langle A(t)^2 \right\rangle \quad .$$

Sehr oft interessiert Rauschen nur in einem schmalen Frequenzintervall der Breite B, in dem es quasi konstant ist:

$$\int_{f \in B} W(f)\, df = W(f_0)\, B = \left\langle a(t)^2 \right\rangle|_B \quad .$$

Einheiten

Wenn die Messgröße A die Einheit V oder W hat, so ist dies ebenfalls die Einheit von a und der Standard-Abweichung σ. Die spektrale Leistungsdichte $W(f)$ hat dann aber die Einheit V^2/Hz bzw. W^2/Hz. Eine zur Standard-Abweichung analoge Größe $\sigma_B = \sqrt{W(f_0)\, B}$ hat dann damit die Einheit $V/\sqrt{Hz}$ bzw. $W/\sqrt{Hz}$. Diese etwas ungewöhnliche Einheit $\sqrt{Hz}$ hat die gleiche Wurzel, die auch bei der Reduktion des Fehlers durch mehrfaches Messen auftaucht: Wenn man N Messungen macht, dann reduziert sich der Fehler des Mittelwerts nur um $\sqrt{N}$. Für N Messungen benötigt man N mal länger, also ist die Bandbreite der Messung um den Faktor N kleiner.

Zufällige Folge von Impulsen

Auf die Überlegungen im Zeitraum aufbauend kann man vom Einzel-Puls im Zeitraum $g(\tau)$ zu seiner Fourier-Transformierten $G(f)$ übergehen. Damit ergibt sich für die Leistungsdichte

$$W(f) = 2\, z\, |G(f)|^2$$

Der Faktor 2 rührt daher, dass die Integrale über W auf positive Frequenzen beschränkt sind.

Thermisches Rauschen

Die Elektronen in einem Leiter besitzen thermische Energie in Form von kinetischer Energie

$$\frac{1}{2}\, m\, v_x^2 = \frac{1}{2}\, kT \quad .$$

Dadurch fluktuiert die Potentialdifferenz zwischen zwei beliebigen Flächen des Leiters. Man kann zeigen (Müller, Kap. 3), dass für das Schwankungsquadrat der Spannung U im Frequenzintervall B gilt

$$\left\langle u(t)^2 \right\rangle|_B = 4\, kT\, R\, B$$

wobei R den Widerstand des Leiter-Stücks bezeichnet. Der Mittelwert von U ist natürlich Null, aber die Größe des Rauschens hängt von der Temperatur und dem Widerstand ab. Die spektrale Rausch-Leistungsdichte ist von der Frequenz unabhängig (weiß) bis hin zu Frequenzen, die durch die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen der Elektronen gegeben sind ($\tau \approx 10$ fs bzw. $f \approx 100$ THz). Das Einzel-Ereignis 'Elektron tritt durch Fläche' ist so kurz, dass seine Fourier-Transformierte sehr breit ist.

Schrotrauschen

Elektrischer Strom besteht aus einer Vielzahl einzelner Elektronen, ein Lichtstrahl aus vielen einzelnen Photonen. Es gibt allerdings nur ganze Elektronen und Photonen. Durch diese 'Körnigkeit' entsteht Rauschen im elektrischen Strom bzw. in der Lichtleistung.

Im Zeitintervall T passieren n Elektronen der Ladung e eine Querschnittsfläche. Dies ergibt den Strom $I = n\,e/T$. Beim Zählen von seltenen Ereignissen erwarten wir eine Poisson-Verteilung. Das Schwankungsquadrat der Anzahl n ist damit ebenfalls n. Für de Strom gilt damit

$$\langle i^2 \rangle|_B = \left(\frac{\sqrt{n}\,e}{T} \right)^2 = \frac{I\,e}{T} = 2I\,e\,B$$

wobei eine sampling Zeit von T zu einer Nyqusit-Frequenz $B = 1/(2T)$ führt. Diese Herleitung gilt für jedes Frequenz-Intervall der Breite B, nicht nur für das hier benutzte Intervall $[0, B]$.

Analog gilt für das Rauschen p eines Lichtstrahls der Leistung P bestehend aus Photonen der Energie $h\nu$

$$\langle p^2 \rangle|_B = 2P\,h\nu\,B$$

Auch Schrotrauschen ist spektral flach bis zur Grenzfrequenz, die durch die zeitliche Form des Einzel-Ereignisses bestimmt ist. Diese Grenze wird nur in wirklich sehr besonderen Ausnahmen erreicht.

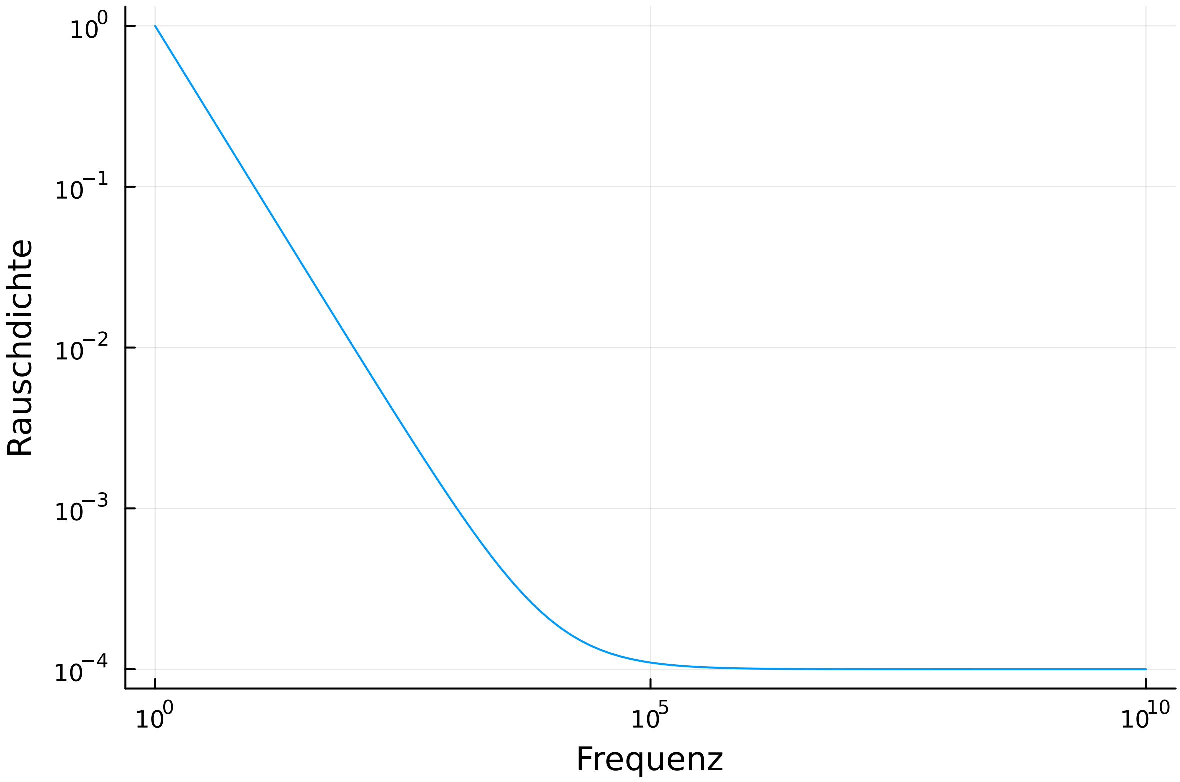
Schrotrauschen ist ein Poisson-artiger Prozess. Darum skaliert die Rausch-Amplitude wie die Wurzel der Leistung bzw. des Stromes. Für große Leistungen / Ströme wird der relative Anteil des Rauschens also geringer.

1/f-Rauschen

1/f-Rauschen (engl. auch 'flicker noise') ist ein Sammelbegriff für verschiedene physikalische Rauschquellen, die alle zu einer Frequenzabhängigkeit der Form $1/f$ führen. Dieses Rauschen ist so weit verbreitet, dass der genaue physikalische Ursprung selten interessiert. Es gibt Modelle für verschiedene Prozesse, die zu 1/f-Rauschen führen (siehe zB. Müller). Kein Modell kann aber jede Quelle erklären.

Bisher haben wir Elementarereignisse betrachtet, wie sehr kurz sind. Dadurch ist die betrachtete Frequenz immer kleiner als die Grenzfrequenz, die sich aus dem Einzelpuls ergibt. Dies führte zu weißem (flachem) Rauschen. Wenn die Elementarereignisse viel langsamer als die Beobachtungszeit sind, dann fällt die spektrale Leistungsdichte $W(f)$ wie $1/f^2$. In einem Übergangsbereich, wenn die Dauer der Elementarereignisse in etwa der Beobachtungszeit entspricht, ergibt sich $W(f) \propto 1/f$. Es gibt nun häufig Situationen, in denen die Dauer der Elementarereignisse über ein sehr breites Zeitintervall verteilt ist. Ein Beispiel ist das Ereignis 'Elektron wird aus Fallenzustand in Halbleiter angeregt'. Damit erhält man also für quasi alle Beobachtungszeiten die Situation, dass $W(f) \propto 1/f$ ist. Ähnliche Argumente lassen sich für andere physikalische Prozesse finden.

1/f-Rauschen ist also immer vorhanden. Die Frage ist die nach seiner Stärke relativ zu den auch immer vorhandenen anderen, spektral flachen Prozessen. Unterhalb einer bestimmten Grenzfrequenz wird das Rausch-Spektrum also durch $1/f$-Prozesse dominiert, oberhalb durch Schrotrauschen und thermisches Rauschen.




```
let
    f = 10 .^ (0:0.1:10);
    W_1 = 1 ./ f
    W_2 = 1e-4;
    plot(f, W_1 .+ W_2, xaxis =:log, yaxis=:log, legend=false, xlabel="Frequenz",
    ylabel="Rauschdichte")
end
```

Selbsttest

Erzeugen Sie eine Sequenz von ca. 10 000 Zufallszahlen, deren Rauschdichte sowohl einen $1/f$ als auch einen konstanten Anteil hat.

Leistungsabhängigkeit

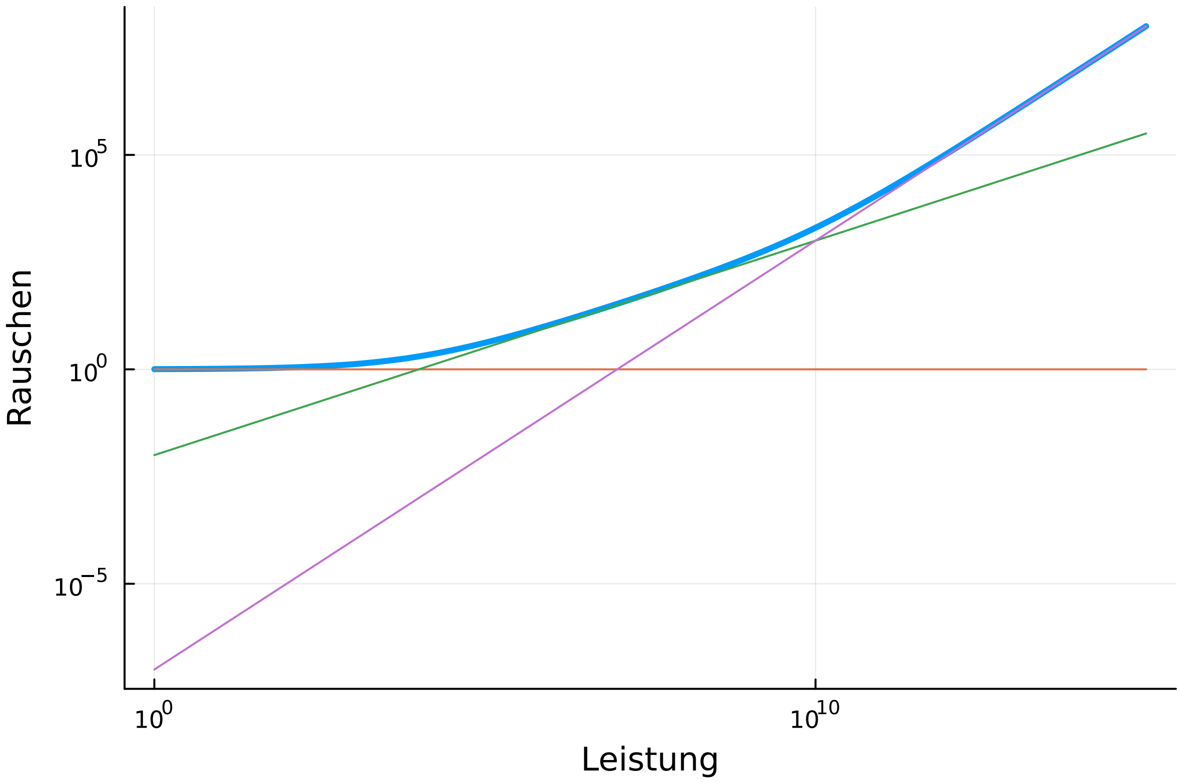
Wie skalieren die einzelnen Rausch-Prozesse mit dem Mittelwert der beobachteten Größe? Welche Form hat also $f(x)$ in

$$\sqrt{\langle a^2 \rangle |_B} = f\left(\langle A \rangle\right) \quad .$$

Thermisches Rauschen hängt nicht vom Strom durch den Leiter ab. Wir hatten es für einen Strom-freien Leiter 'hergeleitet'. In diesem Fall ist also $f(x)$ =const.

Schrotrauschen ist ein Poisson-Prozess. Die Standard-Abweichung entspricht der Wurzel aus dem Erwartungswert, also $f(x) = \sqrt{x}$.

Bei $1/f$-Rauschen können wir uns eine Quelle vorstellen, deren Amplitude durch Abschwächen eines Ausgangswerts eingestellt wird. Damit ändert sich aber die Amplitude der Quelle und die Amplitude des Rauschens der Quelle im gleichen Maße, also $f(x) = x \cdot$ const. Es ist eine Besonderheit von Schrot-artigen Prozessen, dass dies für diese *nicht* gilt.




```
let
    P = 10 .^ (0:0.1:15);
    W_1 = 1
    W_2 = 1e-2 .* sqrt.(P)
    W_3 = 1e-7 .* P
    plot(P, W_1 .+ W_2 .+ W_3, xaxis =:log, yaxis=:log, legend=false,
    xlabel="Leistung", ylabel="Rauschen", linewidth=3)
    plot!(P, W_1 .+ zeros(size(P)))
    plot!(P, W_2)
    plot!(P, W_3)
end
```

Selbsttest

- Skizzieren Sie die Frequenzabhängigkeit der Rauschdichte an charakteristischen Punkten in obigem Diagramm.
- Erzeugen Sie mehrere, 'leistungsabhängige' Sequenzen von Zufallszahlen für diese Punkte.

Aufgabe: Oszilloskop

Berechnen Sie die effektive thermische Rauschspannung in einem 50 Ω Widerstand bei ca 17 °C (290 K) bei einer Messbandbreite von 20 MHz.

Mit welchem Signal-zu-Rausch-Verhältnis wird dann eine Sinus-Oszillation von 1 μV Amplitude gemessen?

```
using PlutoUI
```

Inhalt


```julia
TableOfContents(title="Inhalt")
```

```julia
using Plots
```