

5 Messunsicherheit

Markus Lippitz

6. Mai 2022

Ziele Sie können verschiedene Arten von Messunsicherheiten *unterscheiden*, sowie den Formalismus ihrer Zusammenführung *erklären* und *anwenden*.

- Bayes Statistik und die Bedeutung von 'Wahrscheinlichkeit': Abzählen von Ereignissen oder Unwissen.
- Formalismus des 'Guide to the expression of uncertainty in measurement' (GUM)
- Kombination von Unsicherheiten, auch bekannt als Fehlerfortpflanzung

Literatur Stahel Kap. 4, Tschirk Kap. 2 & 7, Kirkup & Frenkel Kap.4–10, Schenk & Kremer Kap. EF.3

Fehler und Unsicherheiten

Es ist sinnvoll, zwischen Fehlern und Unsicherheiten zu unterscheiden. Fehler sollte man vermeiden. Unsicherheiten sind nie zu vermeiden, können aber reduziert werden.

Grobe Fehler sind beispielsweise offensichtliche Fehlbedienungen des Messgeräts und manifestieren sich durch eine deutliche Abweichung des gemessenen Werts vom erwarteten Messwert. Solche Fehler sollte man natürlich vermeiden. Falls sie doch auftreten und bemerkt werden, dann wiederholt man wahrscheinlich am einfachsten die Messung oder schließt zumindest diesen Messwert von der weiteren Analyse aus.

Systematische Fehler sind eine Umschreibung dafür, dass der Messprozess nicht ganz so einfach, so ideal ist, wie man zunächst denken könnte. Eine Waage zeigt einen von Null verschiedenen Wert an, auch wenn keine Masse aufgelegt ist. Ein Maßstab dehnt sich mit der Temperatur aus. Diese und ähnliche Komplikationen berücksichtigt man durch eine passende Erweiterung des Modells, das die Messung beschreibt. Danach sollten diese Fehler keine Rolle mehr spielen, falls doch, dann beschreiben systematische Fehler mangelndes Verständnis des Messprozesses und sind häufig erst im Rückblick zu erkennen. Gute Experimente zeichnen sich dadurch aus, dass systematische Fehler vollständig behandelt werden.

Unsicherheiten sind aber nie zu vermeiden. Sie können verschiedene Ursachen haben. Jede Waage zeigt das Gewicht nur mit einer endlichen Anzahl Stellen an, beispielsweise $m = 12.3\text{g}$. Das wahre Gewicht kann damit aber immer noch im Intervall $12.25\text{g} - 12.35\text{g}$ liegen. Wiederholte Messungen unter konstanten Bedingungen können abweichende, leicht schwankende Ergebnisse liefern. Dieses Rauschen ist ein Zeichen dafür, dass die Bedingungen technisch oder auch grundsätzlich nicht exakt kontrolliert werden können. Wieviel Atome in der nächsten Sekunde einen Alpha-Zerfall machen unterliegt nicht unserer Kontrolle.

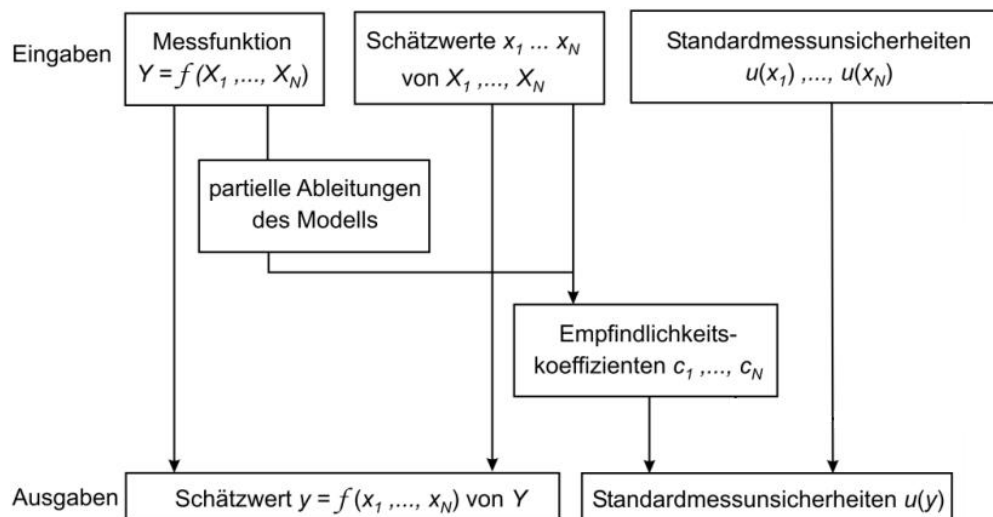
Wie beschreibt man nun solche Unsicherheiten? Welchen Einfluss haben Unsicherheiten der Messgrößen auf daraus berechnete Werte? Wie berücksichtigt man dabei Unsicherheiten, die man selbst bestimmt, und solche, die beispielsweise in Datenblättern dokumentiert sind? Person A entwickelt eine Waage und dokumentiert deren Unsicherheit. Person B benutzt diese Waage, um die Dichte von Ethanol zu messen, und dokumentiert die Unsicherheit in der Dichte. Person C benutzt diese gemessene Dichte (und deren Unsicherheit), um die Viskosität (und deren Unsicherheit) zu bestimmen. Unsicherheiten müssen also konsistent und vergleichbar dokumentiert werden, und es muss ein Verfahren geben, Unsicherheiten aus verschiedenen Quellen in eine Berechnung einfließen zu lassen.

Ein solches Verfahren wird im '**Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement**' (GUM) des Bureau International des Poids et Mesures beschrieben und ist Industriestandard in der Metrologie. Es standardisiert und modifiziert damit teilweise das, was in der Physik unter 'Fehlerrechnung' verstanden wurde. Ein wesentlicher Punkt ist, dass systematische Fehler gar nicht betrachtet werden (diese sind ja zu vermeiden) und Unsicherheiten nach dem Weg zu ihrer Bestimmung als Typ A (statistisch) und Typ B (Datenblatt) klassifiziert werden. Der wissenschaftsphilosophisch interessante Punkt ist die gleichberechtigte Behandlung und Zusammenfassung dieser beiden Typen Unsicherheiten. Unsicherheiten von Typ A benutzen den Wahrscheinlichkeitsbegriff der klassischen Statistik (frequentistisch, also durch Abzählen bestimmt). Typ B Unsicherheiten sind geprägt von dem Bayes'schen Wahrscheinlichkeitsbegriff, der den Grad unserer persönlichen Überzeugung, unseres Wissens beschreibt. Die meisten Wissenschaftler:innen lösen dieses Problem pragmatisch, ebenso wie der GUM, und ignorieren diesen Unterschied außerhalb philosophischer Diskussionen.

Folgende Quellen beschreiben GUM

- **JCGM 100:2008** Dokument 100 aus dem Jahr 2008 des Joint Committee for Guides in Metrology mit dem Titel 'Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement'. Dies ist der zentrale Text mit vielen Anhängen, allerdings nicht einfach zu lesen.
- **JCGM 104:2009** Dokument 104 aus dem Jahr 2009 des Joint Committee for Guides in Metrology mit dem Titel 'Evaluation of measurement data – An introduction to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" and related documents'. Von diesem Text gibt es auch eine deutsche Übersetzung. Diese Einführung ist etwas besser zu lesen als [JCGM 100:2008], aber immer noch sehr formal geschrieben.
- **Kirkup / Frenkel** Das Buch 'An Introduction to Uncertainty in Measurement using the GUM' von Les Kirkup und Bob Frenkel gibt auf ca. 200 Seiten eine sehr gut lesbare Einführung in dieses Thema. Hier werden auch alle Beziehungen hergeleitet, auf die in diesem Tutorial nur verwiesen wird. Auch zeigen die Autoren viele Beispiele.

Bestimmung der Messunsicherheit



Schema zur Bestimmung der Messunsicherheit nach GUM, aus JCGM104:2009, dt

Als erstes betrachten wir das Verfahren, mit dem nach GUM die Messunsicherheit eines Ergebnisses aus den Standard-Abweichungen der Eingangswerte berechnet wird. Dies ist sehr nahe an der traditionellen Fehlerrechnung. Die Abbildung zeigt ein Schema dieses Verfahrens. Dieses Verfahren wird dann in den folgenden Abschnitten durch Einführung des Überdeckungsintervalls und Verallgemeinerung auf andere Wahrscheinlichkeitsverteilungen als die Normalverteilung erweitert.

Messfunktion

Selten interessiert der gemessene Wert direkt, sondern verschiedene gemessene Werte sollen zu einem Ausgangswert verknüpft werden. Man bestimmt beispielsweise Masse und Geschwindigkeit, um daraus die kinetische Energie zu berechnen. Diesen Zusammenhang zwischen den Eingangswerten \mathbf{X}_i und dem Ausgangswert \mathbf{Y} beschreibt die Messfunktion $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$. Dabei bezeichnen große Buchstaben jeweils den 'wahren', idealen Wert, der nie gemessen sondern immer nur geschätzt werden kann. Die Messfunktion f beruht immer direkt auf den gemessenen Größen, nicht auf Zwischenergebnissen, da nur so berücksichtigt werden kann, wenn eine Messung an verschiedenen Stellen der Funktion eingeht, und so ihre Fehler korreliert sind. Auch umfasst die Messfunktion nicht nur den idealen, 'Lehrbuch-artigen' Zusammenhang zwischen Messgrößen und Ausgangswert, sondern auch alle Korrekturen, die notwendig sind, um systematische Fehler zu beseitigen. Im Beispiel der kinetischen Energie wäre dies also nicht

$$E = \frac{1}{2} m v^2 \quad (\text{kleine Buchstaben hier aus Gewohnheit})$$

sondern beispielsweise

$$E = \frac{1}{2} \alpha (m - m_0) \left(\frac{\beta (L - L_0)}{\gamma (t_1 - t_2)} \right)^2.$$

Dabei berücksichtigen die Faktoren α, β, γ die Abweichung in der Kalibration der Masse-, Länge- und Zeit-Messung, sowie m_0 und x_0 die Abweichung der Nullpunktslage.

Schätzwerte der Eingangswerte

Die 'wahren' Eingangswerte \mathbf{X}_i der Messfunktion kennt man nie. Man kann sich aber Schätzwerte \mathbf{x}_i dieser Werte beschaffen. Notfalls ist der Wert der einzigen Messung der Schätzwert \mathbf{x}_i . Wenn eine Messung mehrmals unter identischen Bedingungen wiederholt durchgeführt werden kann, dann ist der Mittelwert aus diesem Datensatz ein guter Schätzwert. Auch schriftliche Aufzeichnungen wie Datenblätter liefern Schätzwerte der Eingangswerte. Die oben genannten Faktoren α, β, γ zur Abweichung in der Kalibration werden wohl typischerweise mit dem Wert Eins geschätzt, falls nicht ein Gerät fehl-kalibriert ist.

Schätzwert des Ergebnisses

Den Schätzwert des Ergebnisses y erhält man, in dem man die Schätzwerte der Eingangswerte x_i in die Messfunktion einsetzt

$$y = f(x_1, \dots, x_n) \quad .$$

Der hier beschriebene Formalismus behandelt also nur ein Ergebnis pro Experiment. Wenn zwei oder mehr Ergebnisse aus einem gemeinsamen Datensatz gewonnen werden sollen, dann würde auch die Kovarianz dieser Ergebnisse interessieren. Dies ist ein fortgeschritteneres Thema, ebenso wie die hier nicht berücksichtigte Kovarianzen zwischen den Eingangswerten x_i .

Standard-Messunsicherheit der Eingangswerte

Die Standard-Messunsicherheit $u(x_i)$ eines Eingangswerte x_i ist die Standard-Abweichung seiner Wahrscheinlichkeitsverteilung. In den letzten Kapiteln hatten wir das mit σ_x bezeichnet. Man muss also durch Messen (Typ A) oder andere Quellen (Typ B) die Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmen und daraus dann die Standard-Abweichung.

Typ A: Wahrscheinlichkeitsverteilung messen

Unsicherheiten vom Typ A werden durch statistische Methoden ermittelt. Beispielsweise wird eine Messung wiederholt durchgeführt. Als Wert der Größe kann dann der Mittelwert dieser Messungen dienen, als Unsicherheit die Standardabweichung der Einzelmessung oder des Mittelwerts. Aufwändigere Auswerteverfahren sind denkbar, beispielsweise um eine darunter liegende Drift zu bereinigen oder eine Größe und deren Unsicherheit per Regression zu bestimmen. Zentral sind hier aber die statistischen Methoden, die Auswertung eines Datensatzes.

Wiederholte, unabhängige Messungen $x_{i,k}$ bei ansonsten konstanten Bedingungen liefern die Wahrscheinlichkeitsverteilung und somit $u(x_i)$

$$u(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{i,k} - \bar{x}_i)^2} \quad \text{mit} \quad \bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{i,k}$$

Ebenso liefert die lineare Regression oder andere Methoden der kleinsten Quadrate eine Standard-Abweichung und somit die Messunsicherheit.

Typ B: Wahrscheinlichkeitsverteilung aus anderen Quellen

Unsicherheiten vom Typ B sind nicht über statistische Methoden zugänglich. Beispiele sind die endliche Auflösung einer Waage oder die tabellierte Messunsicherheit eines Multimeters. In diesen Fällen bestimmt man die Spannung über einem Widerstand eben nicht mit 10 verschiedenen Multimetern und benutzt dann Statistik, um Aussagen zu treffen, sondern man benutzt aufgeschriebene, dokumentierte Angaben zur Unsicherheit. Diese Art Unsicherheit beschreibt nicht das Ergebnis von Abzähl-Prozessen, sondern unser Nicht-Wissen über den 'wahren' Wert. Natürlich liegt dieser aufgeschriebenen Unsicherheit ein Messprozess, eine Kalibration zu grunde, die aber nicht von uns, sondern vom Hersteller durchgeführt wurde. Das Erstellen des Datenblatts durch den Hersteller verwandelt also Typ A Unsicherheiten in Typ B Unsicherheiten. Das Ziel des GUM ist, dies so zu gestalten, dass beide Arten von Unsicherheiten später wieder miteinander verrechnet werden können.

Typische andere Quellen sind Datenblätter, Kalibrationsdokumente, aber auch Fachkenntnis. Aus diesen wird dann die Standard-Messunsicherheit berechnet.

Idealerweise ist die vollständige **Wahrscheinlichkeitsverteilung angegeben**, die der Hersteller eines Geräts sicherlich im Kalibrationsprozess einmal ermittelt hat. In diesem Fall berechnen wir die Standard-Messunsicherheit als Standard-Abweichung dieser Verteilung.

Das **Überdeckungsintervall** $[-a, a]$ (auch Konfidenzintervall) gibt einen Bereich an, in dem der 'wahre' Wert mit angegebener Wahrscheinlichkeit (meist 95%) zu finden ist (siehe letztes Kapitel). Hier ermitteln wir daraus die Standard-Messunsicherheit, indem wir eine Normalverteilung annehmen. Im Fall eines 95%-Intervalls (2σ) beträgt sie $u = a/2$.

Bei manchen Geräten, beispielsweise Multimetern, ist eine **Toleranz** in der Form $a = n \text{ digits} + x\%$ des Vollausschlags angegeben. Der 'wahre' Wert sollte also in einem Intervall der Breite $[-a, a]$ liegen. Solch eine rechteckige Verteilung hat die Standard-Abweichung $u = a/\sqrt{3}$.

Ablesen digitaler Anzeigen: Selbst wenn keine Toleranz angegeben ist, so gilt doch mindestens $a = 0.5$ digits, da keine Aussage über nicht dargestellte Stellen gemacht werden kann. Somit wird hier ebenfalls $u = a/\sqrt{3}$.

Fachkenntnis: Das Zählen einzelner Ereignisse, beispielsweise die Anzahl Photonen in einem Lichtstrahl, liefert oft eine Poisson-Verteilung. Bei einem Mittelwert von λ ist in diesem Fall die Standard-Messunsicherheit $u = \sqrt{\lambda}$.

Kombination von Typ A und Typ B

Man sollte auch prüfen, ob nicht beide Quellen A und B zur Messunsicherheit beitragen. Wenn beispielsweise die Standard-Abweichung aus mehreren Messungen nach Typ A bestimmt wird, jede Einzelmessung aber eine nicht zu vernachlässigende Messunsicherheit nach Typ B hat. In diesem Fall addieren sich die Varianzen. Für die Standard-Messunsicherheit gilt also

$$u_{\text{gesamt}} = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \quad .$$

Als Daumenregel kann man annehmen, dass dieser Fall relevant wird, wenn das Verhältnis der beiden Messunsicherheiten kleiner als drei ist.

Unsicherheit der Einzelmessung oder des Mittelwerts

An dieser Stelle können wir jetzt auch diskutieren, ob bei der Messunsicherheit nach Typ A eigentlich die Unsicherheit der Einzelmessung u_{einzel} oder die des Mittelwerts aus n Messungen, also $u_{\text{mittel}} = u_{\text{einzel}}/\sqrt{n}$, relevant ist.

Mit der Reduktion der Messunsicherheit über Mittelwertbildung muss man sehr vorsichtig sein. Sie verlangt, dass alle einzelnen Messungen unabhängig voneinander sind. Dies ist beispielsweise nicht mehr der Fall, wenn eine Drift die gesamte Messung überlagert, oder die einzelnen Messungen schneller erfolgte, als die Messbandbreite erlaubt. Selbst im idealen Fall reduziert die Mittelwertbildung zwar die Unsicherheit nach Typ A, aber nicht die nach Typ B, so dass irgendwann Typ B überwiegt.

Empfindlichkeits-Koeffizienten

Um den Einfluss der Messunsicherheit der Eingangswerte auf den Ausgangswert zu ermitteln, betrachtet man die partielle Ableitung der Messfunktion $Y = f(X_1, \dots, X_n)$ nach den 'wahren' Werten X_i an der Stelle des Schätzwerts der Eingangswerte x_i . Man entwickelt also f in einer Taylor-Reihe und bricht diese bereits nach dem ersten Glied ab. Man linearisiert also f in der Nähe der x_i . Die einzelnen Koeffizienten dieser Taylor-Reihe, die partiellen Ableitungen, werden in diesem Zusammenhang Empfindlichkeits-Koeffizienten genannt

$$c_i = \left. \frac{\partial f(X_1, \dots, X_n)}{\partial X_i} \right|_{X_1=x_1, \dots, X_n=x_n} .$$

Es ist hilfreich, die Größenordnung der Produkte aus Messunsicherheit $u(x_i)$ und Empfindlichkeits-Koeffizient c_i , also $|c_i|u(x_i)$, zu betrachten. Im idealen Fall sind diese alle von gleicher Größenordnung. Wenn nicht, dann lohnt es sich, Arbeit in den größten Term zu investieren. Entweder um dort die Messunsicherheit $u(x_i)$ zu reduzieren, oder das Messverfahren so zu ändern, dass sich f so ändert, dass $|c_i|$ kleiner wird. Der relative Beitrag von $|c_i|u(x_i)$, also

$$\frac{|c_i|u(x_i)}{\sum_k |c_k|u(x_k)}$$

wird Messunsicherheits-Budget genannt.

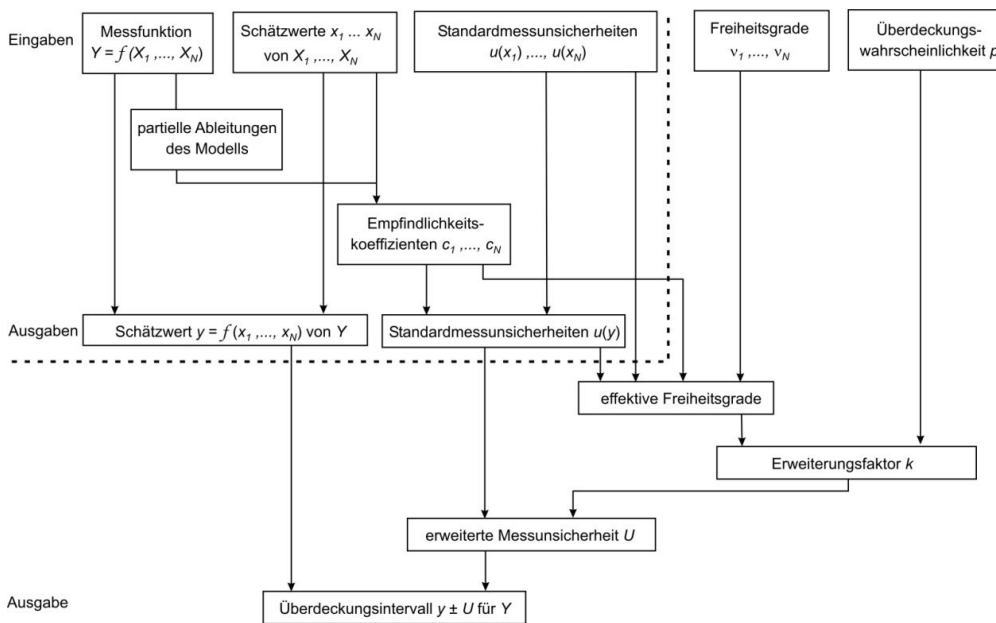
Standard-Messunsicherheit des Ergebnisses

Die Standard-Messunsicherheit des Ergebnisses ergibt sich analog der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung zu

$$u(y) = \sqrt{(c_1 u(x_1))^2 + \dots + (c_n u(x_n))^2} .$$

Überdeckungsintervall

Bis hier hin haben wir einen Schätzwert für den Ausgangswert y der Messung sowie für seine Standard-Messunsicherheit $u(y)$ ermittelt. Die Frage ist jetzt, welche Aussage wir über den 'wahren' Wert Y machen können. Das Ziel ist es, ein Intervall anzugeben, in dem der 'wahre' Wert Y mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit liegt. Dieses Intervall wird Überdeckungsintervall oder Konfidenzintervall genannt.



Schema zur Bestimmung des Überdeckungsintervalls nach GUM, aus JCGM104:2009, dt. Der linke obere Bereich wurde schon im vorangegangenen Abschnitt besprochen

Das Problem ist, dass wir insbesondere von der Messunsicherheit $u(y)$ nur einen Schätzwert haben. Dass y nur ein Schätzwert von Y ist, stellt kein Problem dar, denn wir kennen die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Abstandes $y - Y$. Diese Abstand ist normalverteilt

$$\frac{y - Y}{\sigma/\sqrt{n}} = \mathcal{N}(0, 1) \quad .$$

Dies setzt aber voraus, dass man den 'wahren' Wert der Standardabweichung σ kennt. n bezeichnet hier die Anzahl der Werte, aus denen y ermittelt wurde.

Falls statt dem 'wahren' Wert σ nur der Schätzwert $u(y)$ bekannt ist, dann folgt der normierte Abstand $y - Y$ einer Student'sche t-Verteilung, die im Grenzwert großer n in die Normalverteilung übergeht

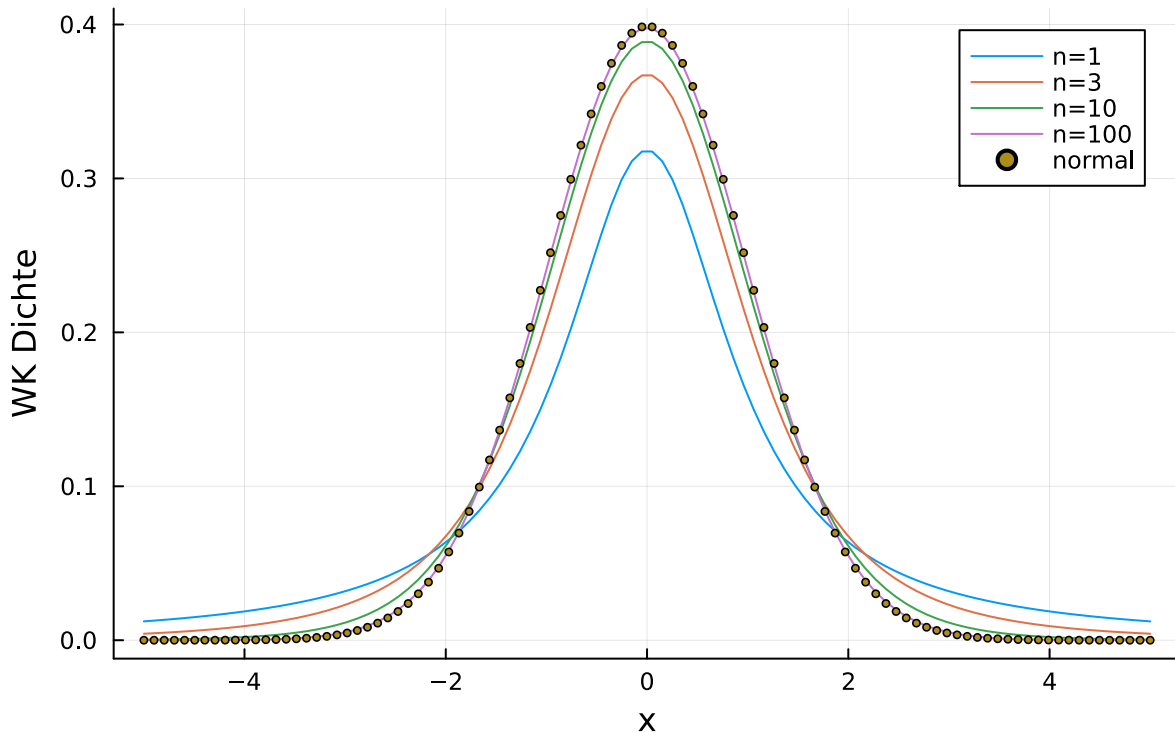
$$\frac{y - Y}{u(y)/\sqrt{n}} = t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1) \quad .$$

Die Student'sche t-Verteilung besitzt die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$t_n(x) = \alpha \left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-(n+1)/2}$$

wobei der Faktor α die Normierung sicherstellt. Für kleine n ist sie breiter als die Normalverteilung. Diese Verteilung wird es uns ermöglichen, ein Überdeckungsintervall anzugeben.

Student'sche t-Verteilung



```
1 let
2   x = range(-5, 5; length=100)
3   plot(x,pdf.(TDist(1),x), label="n=1")
4   plot!(x,pdf.(TDist(3),x), label="n=3")
5   plot!(x,pdf.(TDist(10),x), label="n=10")
6   plot!(x,pdf.(TDist(100),x), xlabel="x", ylabel="WK Dichte", label="n=100",
7         title="Student'sche t-Verteilung")
8   scatter!(x,pdf.(Normal(),x), label="normal", markersize=2)
9 end
```

```
1 using Distributions, Plots
```

Freiheitsgrade

Der Freiheitsgrad ν_i beschreibt die Anzahl an Einzelmessungen, die zu einem Schätzwert \mathbf{x}_i eines Eingangswerts \mathbf{X}_i beigetragen haben. Er ist ein Maß für das Vertrauen in die Schätzung der Standard-Messunsicherheit $u(\mathbf{x}_i)$.

Für Messunsicherheiten vom *Typ A* gilt

$$\nu_i = \langle \text{Anzahl Messungen} \rangle - \langle \text{Anzahl ermittelte Parameter} \rangle .$$

Wenn aus n Messungen der Schätzwert x_i als Mittelwert berechnet wurde, so ist $\nu_i = n - 1$. Damit ist $\nu_i = 0$, falls nur ein Wert gemessen wurde. Bei einer lineare Regression werden beispielsweise Steigung und Achsenabschnitt ermittelt, also zwei Parameter bestimmt. Wenn nun x_i aus der Steigung bestimmt wird, so ist $\nu_i = n - 2$, da die Information aus einer weiteren Messung schon für den Achsenabschnitt verwendet wurde.

Für Messunsicherheiten vom *Typ B* ist manchmal die mit dieser Unsicherheit verknüpften Anzahl an Freiheitsgraden ν ebenfalls tabelliert. Wenn das nicht der Fall ist, dann lässt sich Überlegungen zur Varianz der Varianz einer Normalverteilung folgende Beziehung herleiten

$$\nu_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)} \right)^{-2}$$

wobei $\Delta u(x_i)$ die Unsicherheit in der Unsicherheit des Eingangswerts x_i bezeichnet. $\Delta u(x_i)$ ergibt sich beispielsweise aus der Anzahl der dargestellten Stellen bei tabellierten $u(x_i)$. Oder man nimmt an, dass das bei einem Multimeter angegeben Toleranz-Intervall so groß ist, dass außerhalb liegende Werte praktisch unmöglich sind. In diesem Fall ist die die Unsicherheit exakt bekannt, damit $\Delta u(x_i) = 0$ und $\nu_i = \infty$. Dies stellt kein Problem dar.

Effektive Freiheitsgrade

Wir kennen nun die Freiheitsgrade ν_i der Eingangsgrößen. Wir benötigen aber die Freiheitsgrade der Ausgangsgröße bzw. ihrer Messunsicherheit, um den Faktor in der Student'schen t-Verteilung einzusetzen. Die **Welch-Satterthwaite-Gleichung** liefert eine Abschätzung für die effektive Anzahl an Freiheitsgraden ν_{eff} , die der Messunsicherheit $u(y)$ des Ausgangsgröße y zugeordnet werden kann:

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u(y)^4}{\sum_{i=1}^n \frac{c_i^4 u(x_i)^4}{\nu_i}} \ll \sum_{i=1}^n \nu_i .$$

Dabei wird ν_{eff} auf die nächste ganze Zahl abgerundet. Wenn eine Eingangsgröße x_k entweder eine große Standard-Messunsicherheit $c_k u(x_k)$ besitzt oder eine kleine Anzahl Freiheitsgrade ν_k oder beides, dann dominiert diese Größe die Anzahl der effektiven Freiheitsgrade $\nu_{\text{eff}} \approx \nu_k$.

Überdeckungswahrscheinlichkeit

Man muss sich für eine Wahrscheinlichkeit entscheiden, mit der der 'wahre' Wert in dem Überdeckungsintervall liegen soll. Typische Werte sind verknüpft mit den Integralen über die Normalverteilung innerhalb einer $\pm k \cdot \sigma$ Umgebung, oder gerundete Werte davon. Am häufigsten findet sich das 95% Intervall.

k	P	P	k
1	68.27	66	0.954
2	95.45	95	1.960
3	99.73	99	2.576

Wahrscheinlichkeit P in Prozent, bei einer Normalverteilung innerhalb einer $k\sigma$ Umgebung zu liegen. Das 95% Intervall mit $k = 1.96$ ist am weitesten verbreitet.

► [0.682689, 0.9545, 0.9973]

```
1 let
2   k = (1,2,3)
3   P = [cdf.(Normal(), s) - cdf.(Normal(), -s) for s in k]
4 end
```

► [0.954165, 1.95996, 2.57583]

```
1 let
2   p = (66, 95, 99)
3   k = [-quantile.(Normal(), (1 - q/100)/2) for q in p]
4 end
```

Erweiterungsfaktor

Der Erweiterungsfaktor k bestimmt die Grenzen des Überdeckungsintervalls, in dem der 'wahre' Wert mit der gewünschten Wahrscheinlichkeit zu finden ist. Das Intervall hat dann die Form $[y - k \cdot u(y), y + k \cdot u(y)]$. Der Wert von k ergibt sich aus dem Integral über die Student'sche t-Verteilung, so dass

$$\int_{-k}^{+k} t_{\nu}(x) dx = \text{gewünschte Wahrscheinlichkeit} \quad .$$

Diese Wert hängt natürlich von der Anzahl ν_{eff} der effektiven Freiheitsgrade ab, die in die Messung eingeflossen sind. Für sehr großes ν_{eff} nimmt k die bekannten Werte aus der Normalverteilung an. Hier ein paar Werte für k bei einem 95%-Intervall

```
► [12.7062, 4.30265, 3.18245, 2.77645, 2.57058, 2.22814, 2.08596, 1.95996]
```

```
1 let
2   nu = (1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 1e10)
3   p = 95
4   k = [-quantile(TDist(n), (1 - p/100)/2) for n in nu]
5 end
```

Erweiterte Messunsicherheit

Die erweiterte Messunsicherheit ist die Standard-Messunsicherheit $u(y)$ multipliziert mit dem Erweiterungsfaktor $kU = k \cdot u(y)$.

Überdeckungsintervall

Das Überdeckungsintervall beträgt $[y \pm U] = [y - k \cdot u(y), y + k \cdot u(y)]$. Der 'wahre' Werte Y liegt in diesem Intervall mit der oben festgelegten Wahrscheinlichkeit.

Andere

Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Monte-Carlo-Simulationen

coming soon ... see [MonteCarloMeasurements.jl](#)

[Uncertainty machine](#) des NIST

```
1 using PlutoUI
```

☰ Inhalt

Fehler und Unsicherheiten

Bestimmung der Messunsicherheit

- Messfunktion
- Schätzwerte der Eingangswerte
- Schätzwert des Ergebnisses
- Standard-Messunsicherheit der Eingangswerte
- Empfindlichkeits-Koeffizienten
- Standard-Messunsicherheit des Ergebnisses

Überdeckungsintervall

- Freiheitsgrade
- Effektive Freiheitsgrade
- Überdeckungswahrscheinlichkeit
- Erweiterungsfaktor
- Erweiterte Messunsicherheit
- Überdeckungsintervall

Andere Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Monte-Carlo-Simulationen

1 `TableOfContents(title="Inhalt")`