

# 数学建模中的类比方法

张永凤 付夕联

(山东工程学院, 淄博 255012)

**摘要** 本文通过实例论述了类比方法在数学建模中的作用

**关键词** 类比 数学建模 经典模型 创造性

类比是某种类型的相似性, 相似是人们对两个事物表面的、外在的表现进行比较的结果。如设计飞机时, 要考虑使乘客在飞机出事时不易折伤颅骨, 用蛋壳在各种情况下被敲碎的情形进行研究, 即把颅骨问题类比为蛋壳问题, 因从机械结构方面, 人脑与鸡蛋大致类似, 两者都有硬脆的外壳和浆液的内含物。而数学建模的过程就是把实际问题通过抽象分析用数学语言、数学概念和数学符号表述成数学问题, 表述成什么样的数学问题, 取决于思考者解决问题的意图, 一般在具体分析实际问题的各个因素的基础上, 通过联想、归纳对各因素进行比较, 与已知模型比较, 把未知关系化为已知关系, 在不同的对象或完全不相关的对象中认出同样的或相似的关系, 寻找解决问题的关键和与之类比的数学方法, 建立起解决问题的模型。在这一过程中, 由于建模的复杂性, 使建模中的类比是含糊的和不确定的, 同时带有创造性。

## 一、与某一数学分支类比

有些比较简单的问题, 各个因素之间的关系比较明确, 可直接和与之相关的数学问题类比。一般的建模问题是非常复杂的, 需要运筹学、常微分方程、概率统计以及专业知识和计算机的辅助作用。数学模型与现实原型的关系是一种反映与被反映的关系, 模型的构造或提出必须经过对现实原型扬弃次要环节的过程, 需要在分析问题的各个关系的基础上, 基于对某一数学分支的熟悉程度, 在适合模型需要的前提下, 通过假设简化或对问题的不同要求进行类比。如存贮问题的模型: 若需求量恒定, 只考虑订货时需付的一次性订货费和货物的贮存费, 可用微分法建立一个静态优化模型; 若需求量是随机变量(如商店里商品的销售量是随机的), 需要建立随机的存贮模型; 若考虑的是生产—存贮问题, 就是一个非线性规划问题的模型; 若是易起化学反应的几种物品的存贮, 需要利用图论的有关知识进行解决。因此, 针对问题的不同要求合理的来使用类比方法。

对于同一问题, 假设条件不同可与不同的数学分支类比。如机场用“先到先服务”的原则分配飞机起飞的跑道, 在一定的信息下, 开发和分析一种能使乘客和航空公司双方满意的数学模型(即飞机排队问题, 89 年美国数学建模竞赛题), 从分配原则看应该是一个排队论问题, 可以建立统计模拟模型。若给出如下的假设

设变量  $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 架飞机被指定在第 } j \text{ 个小时段窗口上起飞,} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$

安排方案矩阵

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x_{ij} = 1, \quad x_{ij} = 1, \quad x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1$$

$C_{ij}$  表示第  $i$  驾飞机从第  $j$  个小时时间段上起飞时所需一切费用之和, 以全部飞机安排的总费用为目标函数

$$Z = \sum_{i,j} C_{ij} x_{ij}$$

然后建立一个整数规划数学模型, 使一个似乎与规划无关的问题转化为大家熟悉的规划问题来求解

对于一个因素多、关系复杂的问题, 有时分成几部分, 从整体上类比, 某一部分类比, 最后再综合起来建立解决问题的模型。如沿海地区由风暴引起的电力中断后的修复问题 (即应急电力修复系统, 美国 92 年数模竞赛题), 这个问题需要考虑立即修复的紧急申请, 还要考虑使参加修复的作业队加班时间最少, 使作业队在途中时间最少, 无论何时使等待修复的人数最少等。在制订计划和决策过程中, 由于包含的因素多, 无法从问题本身直接类比, 联想到解决问题的某一数学分支, 于是把各个因素分开讨论, 根据各因素与某一学科的相似性进行类比。如通过图论中最小生成树找修复过程中两点间的最小距离, 通过大规模规划问题的关键路线法解决修复系统所需要的优先排序问题, 用排队论讨论一个系统或一个单位要求修复的预期等待时间等, 然后综合各个方面, 分类计算建立解决问题的模型。

## 二、与经典模型作类比

现实生活中, 人们对所研究的对象愈陌生就愈想拿熟悉的东西作类比。如麦克斯韦把电磁现象与不可压缩的液体对比, 因为二者在数量规则上相似。许多在质上虽不同的现象, 只要它们服从相似的数量规律, 可以运用类比方法来研究。随着数学在自然科学、社会科学等领域的广泛应用, 前人建立了一些日趋完善的经典模型。如人口模型、存贮模型、经济增长模型、交通流等, 这些模型不仅能解决某一方面的问题, 且具有一般性。建模时可根据问题的要求, 考虑是否与某一经典模型满足相似的规律, 通过假设类比联想寻找二者之间的相似关系, 建立联系, 从而减少模型分析的时间, 抓住主要矛盾, 类比成功后, 再根据具体要求, 作进一步修改、完善。如预报人口增长的指数模型和阻滞增长模型是经典模型, 有些问题如传染病问题、捕鱼问题, 在一定条件下, 服从于人口增长规律, 解决这些问题时, 首先, 通过类比建立各自的初步模型, 再根据捕鱼、传染病各自具有的特性, 建立新的模型。以传染病问题为例, 传染病受传播途径、传染病类型、卫生水平等各因素的影响, 比较复杂, 如何解决这一问题, 首先, 根据传染病的传染和人口增长的相似性进行假设简化, 不考虑疾病传染期间所考察地区人口的生死、迁移和治愈状况, 把人群分为易感染者和已感染者, 只考虑健康者受感染变为病人, 这样与人口的阻滞增长模型满足类似的规律。建立模型后, 在模型分析过程中发现, 该模型虽然能预报传染病传染高潮的到来, 但随着时间的推移, 健康者全部变为病人, 显然是不符合实际情况, 于是修改模型, 讨论病人可以治愈的情况, 寻找到解决问题的思路, 使模型一步步完善。

另外, 模型建立以后, 有些模型求解过程比较复杂, 也需要与某一算法进行类比, 而且模型求解以后, 还要考虑模型的实用价值, 即检验模型是否与实际问题的相符, 这一过程也是一个所建模型与现实问题的类比, 这种类比含义比较明确, 最简单的是模型与图形的类比, 用图形的性质来说明模型的事实。

### 三、建模中类比的创造性

由上述分析发现, 建模中正确运用类比, 需注意相似性在现象与本质上的矛盾, 要从多方面、多层次对问题进行分析、比较, 作出假设简化。合理的假设、简化带有一定的创造性, 这种创造性是主观能动性的体现, 表现为对类比对象的能动选择, 即对世界统一性原理的追求, 作为对问题的假设简化, 其实质是在自觉或不自觉的追求世界的多样统一性。因此, 建模中的类比所依据的相似性体现出一种统一美, 表现为形式上的对应性、一致性、协调性; 另外, 对个别属性的发现, 有时可以通过类比直接由已知知识推出, 有时很难, 需要对两个现象反复比较, 并通过作出某些辅助假设或近似条件而间接得到。这也是创造性的一种体现。这种创造性是与经验、想象力、洞察判断力以及联想、直觉、灵感分不开的。

### 参 考 文 献

- [1] 姜启源 数学模型 高等教育出版社, 1993
- [2] 叶其孝 数学建模教育与国际数学建模竞赛 工科数学编辑出版, 1994