算　法　图　论

云南大学数学系

李 建 平

2018年9月

第四章 欧拉问题和哈密尔顿问题

4.1 欧拉问题(Euler Problem)

1736年瑞士科学家欧拉发表了关于图论方面的第一篇科学论文，解决了著名的哥尼斯堡七座桥问题。德国的哥尼斯堡城有一条普雷格尔河，河中有两个岛屿，河的两岸和岛屿之间有七座桥相互连接，如图4.1所示。

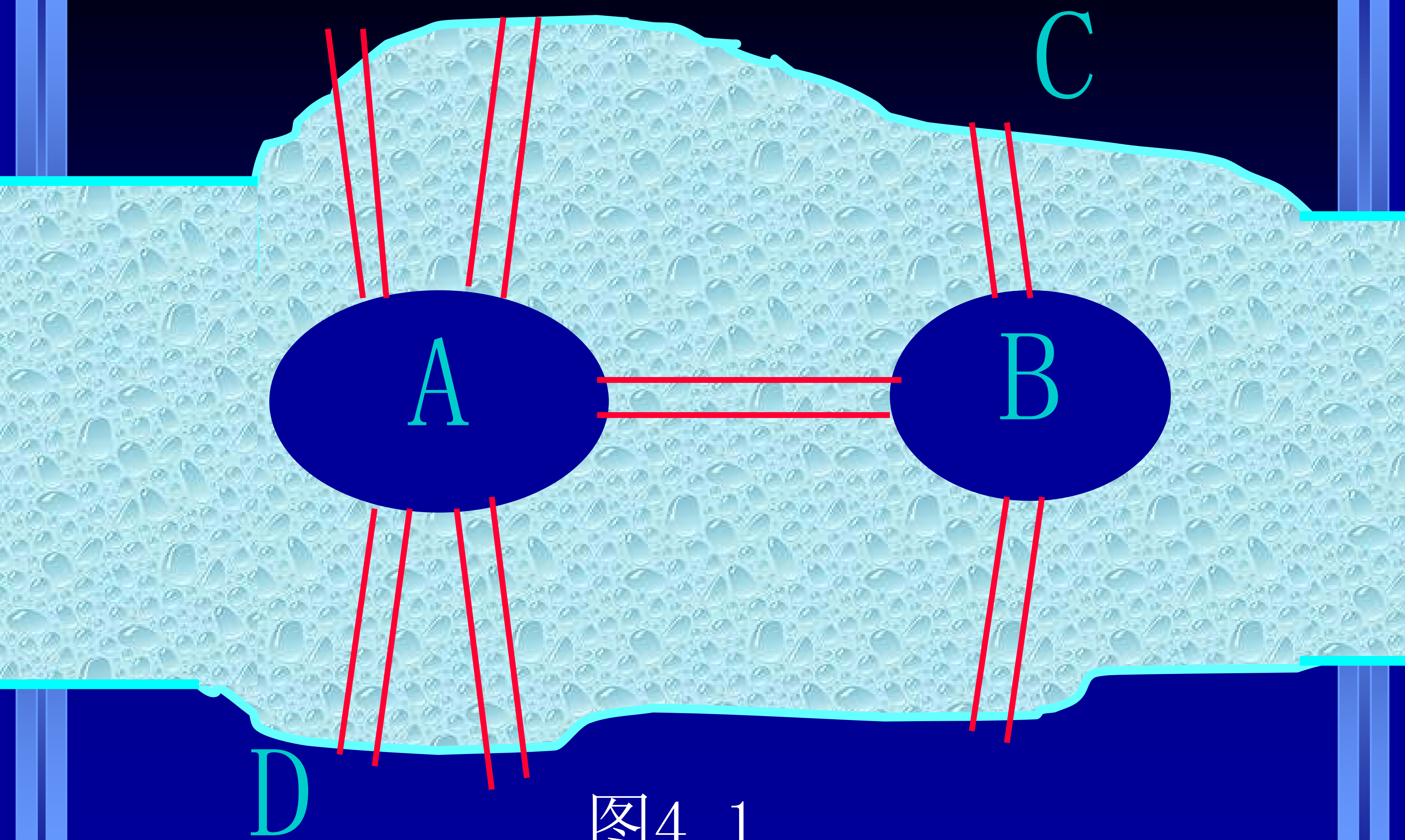


图4.1

当地的居民热衷于这样一个问题，一个漫步者如何能够走过这七座桥，并且每座桥只能走过一次，最终回到原出发地。尽管试验者很多，但是都没有成功。

为了寻找答案，欧拉1736年将这个问题抽象成图4.2所示图形的一笔画问题，即能否从某一点开始不重复地一笔画出这个图形，最终回到原点。欧拉在他的论文中证明了这是不可能的，因为这个图形中每一个顶点都与奇数条边相连接，不可能将它一笔画出，这就是古典图论中的第一个著名问题。

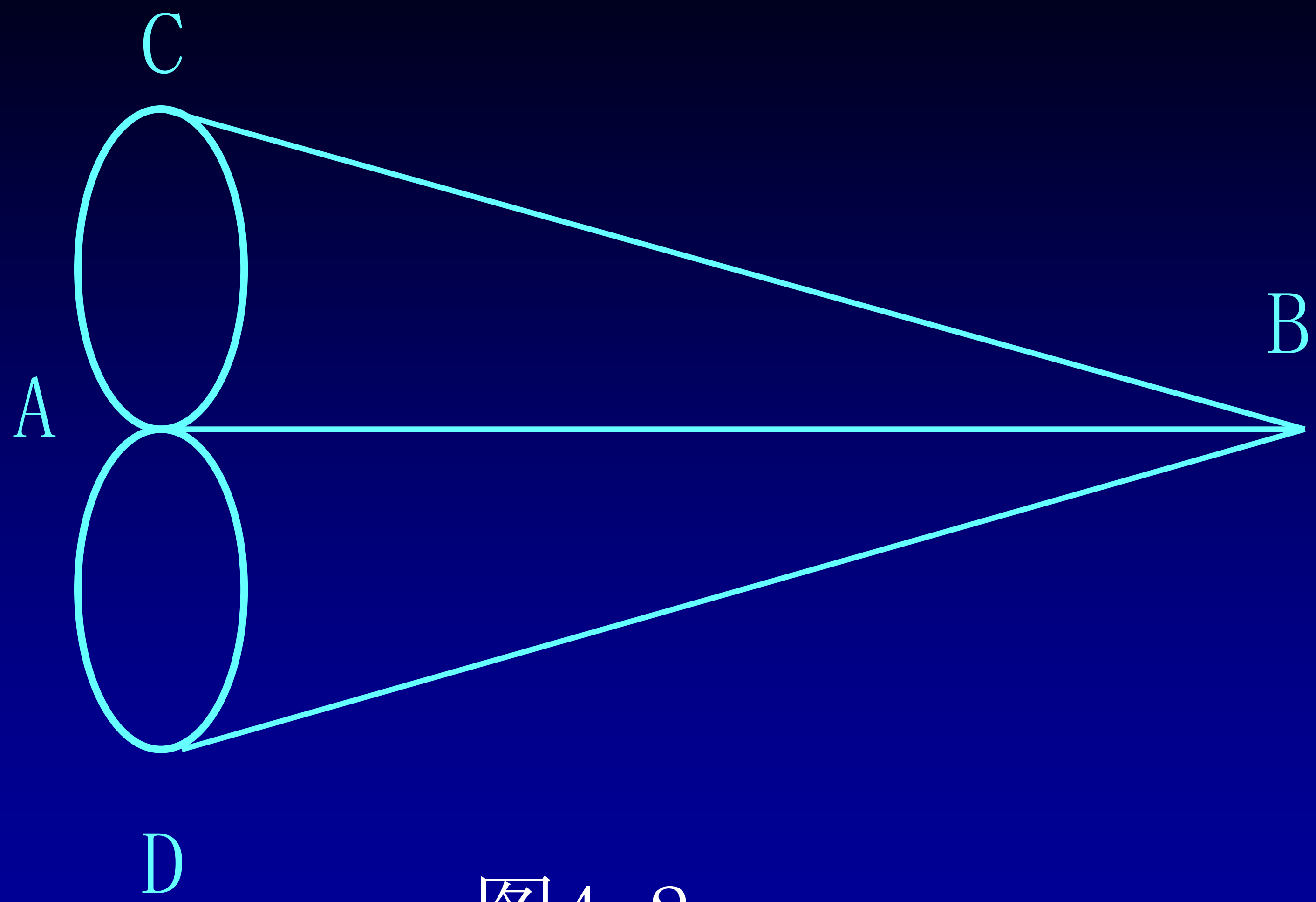


图4.2

定义4.1（欧拉回路）设有一个连通图G=（V，E），并且$\mu(C)$ 是G中存在一条回路，$\mu(C)$称为图G的欧拉回路，如果$\mu(C)$经过(包含)图G中的每条边，并且仅包含一次。此时，也称图G是欧拉图。

问题：给定一个连通图G=（V，E），如何判断G是一个欧拉图?

定理4.1(Euler定理) 设G=（V，E）是连通图，则G是欧拉图iff图G中不含有次为奇数的顶点。

Fleury 算法

用 $\mu_k = v_{i0} v_{i1} v_{i2} \cdots v_{ik}$ 表示在第k步得到的一条链（其中有的顶点可能相同），记 $G_k = G[E - E(\mu_k)]$（初始时，取 $\mu_0 = v_0$）。按下面方式进行第k+1步：在 G_k 中选一条与 v_{ik} 相关联的边 $v_{ik} v_{ik+1}$，使得 $v_{ik} v_{ik+1}$ 不是割边，除非此时 $d_{G_k}(v_{ik}) = 1$，令 $\mu_{k+1} = \mu_k \circ v_{ik} v_{ik+1}$，取 $G_{k+1} = G\left[E - E\left(\mu_{k+1}\right)\right]$，重复上述过程，直到无边可选为止.

定义4.2（一笔划问题）：给定一个图G，能否找到一条路（链）$\mu(P)$，使得该图中的每条边恰好在$\mu(P)$中出现一次．如果图G满足上述要求，称G是M图．

问题：如何判定一个图G是M图？

定理4.2 设G是一个连通图，则G是M图iff图G中奇次的顶点的个数≤2.

定义4.3（有向欧拉回路）设有一个强连通有向图D=（V，A），并且 $\mu(C)$ 是D中存在一条有向回路，称 $\mu(C)$ 为图D的有向欧拉回路，如果 $\mu(C)$ 经过(包含)图D中的每条弧，并且仅包含一次。此时，也称图D是有向欧拉图。

问题：给定一个强连通有向图D=（V，A），如何判断D是一个有向欧拉图？

定理4.3(Euler定理) 设D=（V，A）是强连通有向图，则D是有向欧拉图iff图D中每个顶点的出度等于入度，$d^-(u)=d^+(u), u\in V$。

4.2 中国邮递员问题(Chinese Postman Problem)

定义4.4（中国邮递员问题）设G=(V,E;w)是赋权图，$w: E \to R^+$ ，能否在图G中寻找一条回路 $\mu(C)$，使得G的每一条边在 $\mu(C)$ 中至少出现一次，并且使得 $w(\mu)=\sum_{e\in E(\mu)} w(e)$ 达到最小，称该问题是中国邮递员问题（CPP）。

中国邮递员问题也叙述为图论问题：设G=(V,E;w)是赋权图，寻找 $E_1 \subseteq E$ ，使得G∪E_1是欧拉图，其目标是使得$w(E_1)=\Sigma_{e\in E_1} w(e)$ 达到最小。

称上述达到最小的E_1为CPP问题的最优集。

当图G是欧拉图时，则利用 *Fleury* 算法能够找到一条欧拉回路（这也是最优的回路）。

定理4.4（管梅谷，1960）设G=（V，E;w)是一个赋权连通图，则E_1是最优集iff对于每个简单圈C，均有

$$\sum_{e\in E_1\cap E(C)} w(e) \le \sum_{e\in E(C)-E_1} w(e)$$

当图G不是欧拉图，利用Edmonds算法求解:

1 在G中找到的所有2k个奇数次顶点,$v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{i2k}$

2 在G中寻找这个顶点之间的最短路及路径，构造一个图$H=(V_H, E_H; w')$，这里 $V_H=\{v_{i_1}, \cdots v_{i_{2k}}\}$,

$E_H=\{v_{ij}v_{il} \mid v_{ij}, v_{il} \in V_H\}$, $w(v_{i_j}, v_{i_l})$ 定义为G中v_{i_j} 与 v_{i_l} 之间的最短路长度。

3 在图H中寻找最小的完美匹配M。

4 利用M中的每个元素 $\left(v_{i_j},v_{i_l}\right)$对应于图G中的最短路 $P\left(v_{i_j},v_{i_l}\right)$，把相应的所有最短路 $\{P(v_{i_j},v_{i_l})\}$叠加到图G上，即把最短路上的边使用两次，得到一个图G*（此时G*就是一个欧拉图）。

5 再利用 *Fleury* 算法在欧拉图G*上，所得到的欧拉回路就是中国邮递员问题的最回路，即最优解。

定理4.5 Edmonds算法能够得到CPP的最优解

问题　（限制性中国邮递员问题）设G=(V,E;w)是一个赋权图，$w: E \to R^{+}$，$E' \subseteq E$ 能否在图G中寻找一条回路C，使得G的每一条边在C中至少出现1次，经过 E' 中的边恰好1次（$E-E'$ 中的边至多出现2次），目标是使得 $w(C)=\sum_{e\in E(C)} w(e)$ 达到最小，称该问题是限制性中国邮递员问题(CCPP)，这里，如果边e在圈C中出现k次，则在圈C中计算k次w(e)。

（注：在最优解中，每条边至多出现2次）

思考：对限制性中国邮递员问题如何进行求解？

定义4.5（有向中国邮递员问题）设D=(V,A;w)是赋权有向图，$w: A \to R^{+}$，能否在有向图D中寻找一条有向回路$\mu(C)$，使得D的每一条弧在$\mu(C)$中至少出现一次，并且使得 $w(\mu)=\sum_{e\in\mu} w(e)$ 达到最小，称该问题是有向中国邮递员问题(DCPP)。

有向中国邮递员问题也叙述为图论问题：设D=(V,A;w)是有向赋权图，寻找 $A_1 \subseteq A$，使得D∪A_1是有向欧拉图，其目标是使得 $w(A_1)=\Sigma_{e\in A_1} w(e)$ 达到最小。

注意到有向连通图不一定存在有向邮路

例图：

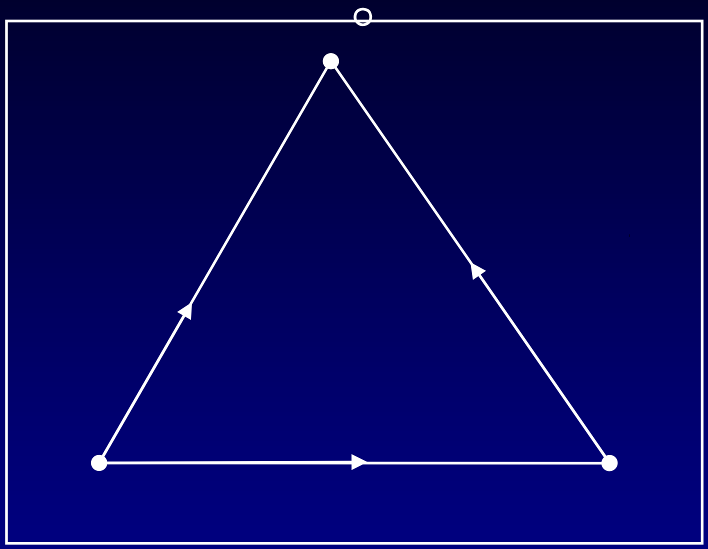


图4.3 不存在有向邮路的例子

我们总是假设所讨论的赋权有向图是强连通的。如果讨论的图是有向欧拉图，则该图的有向欧拉回路就是最优有向邮路。

当强连通有向图不是有向欧拉图，其算法为：

Algorithm: Constrained-CPP

Begin

(1) 设 $D=(V,A;w)$ **为强连通赋权有向图，对**$\forall v_i \in V$**，计算** $\sigma_i = d^-(v_i) - d^+(v_i)$**。若所有**$\sigma_i = 0$**，令** $D' = D$**，转第(2)步，否则转第(3)步。**

(2) 求出 D'**的有向欧拉回路C，则C是D的最优有向回路，结束。**

(3) 构造集合 $S=\{v_i \mid \sigma(v_i)>0\}$ **和** $T=\{v_j \mid \sigma(v_j)<0\}$**，并求出D中从** $\forall v_i \in S$**到**$\forall v_j \in T$**的最短路及长度。**

(4)构造赋权网络N=(V^*,A^*;b^*,c^*)，这里

$V^*=\{s,t\}\cup S\cup T$， $A^*=\{(s,x)|x\in S\}$

$\cup\{(y,t)|y\in T\}\cup\{(x,y)|x\in S,y\in T\}$

对 $x\in S$ 和 $y\in T$ ，用 $c^*(x,y)$ 表示在D中从x到y的最短路长度，其余弧的费用为0，容量全为+∞。

(5) 求出N中，求流量值为 $\sum_{v_i\in S}\sigma_i$ 最小费用整数流f。

(6) 取 $M=\{(x,y)_1,\ldots,(x,y)_{f(x,y)}\,|\,f(x,y)\geq 1\}$

(7) 找出M中每条弧(x,y)对应网络N中的从x到y的最短路。把这些最短路上的每条弧添加到有向图D中，得到有向欧拉图 D'，转第2步。

End

定理4.6 Edmonds-Johnson算法能够得到有向中国邮递员问题(DCPP)的最优解。

也可以把构造网络的步骤由LP表示:

$$Min\ Z=\sum_{u\in S}\sum_{v\in T}c_{uv}x_{uv}$$

$$\begin{cases}\sum_{u\in S}x_{uv}=\sigma(u), & u\in S\\ \sum_{v\in T}x_{uv}=-\sigma(v), & v\in T\\ x_{uv}\geq 0, & u\in S, v\in T\end{cases}$$

问题（限制性有向中国邮递员问题）设 D=(V,A; w ; u)是赋权有向图，这里w:A→R^+和 u:A→Z^+，能否在有向图D中寻找一条有向回路C，使得D的每一条弧e在回路C中至少出现1次，至多出现u(e)次，目标是使得 $w(C)=\sum_{e\in C} w(e)$ 达到最小，这里，如果边e在圈C中出现k次，则在圈C中计算k次w(e)。

思考：对限制性有向中国邮递员问题如何进行求解？

4.3乡村邮递员问题(Rural Postman Problem)

问题4.8（乡村邮递员问题）设G=(V,E;w)是赋权图，$w:E\to R^+$，$E'\subseteq E$，能否在图G中寻找一条回路C，使得C经过 E' 中的每一条边至少出现一次，目标是使得 $w(C)=\sum_{e\in E(C)}w(e)$ 达到最小，称该问题是乡村邮递员问题(RPP)，这里，如果 E' 中的边e在圈C中出现k次，则在圈C中计算k次w(e)。

这里，当诱导子图 $G[E']$ 是连通图时，我们能够设计多项式时间算法来求解乡村邮递员问题。当 $G[E']$ 不是连通图时，该问题是NP-完备的。

问题4.9（有向乡村邮递员问题）设D=(V,A;w)是赋权有向图，$w: A \to R^{+}$，$A' \subseteq A$，能否在有向图D中寻找一条回路C，使得C经过A'中的每一条弧至少出现一次，目标是使得$w(C)=\sum_{e\in A'(C)} w(e)$达到最小，称该问题是有向乡村邮递员问题(DRPP)，这里，如果A'中的弧e在圈C中出现k次，则在圈C中计算k次w(e)。

这里，当诱导子图$D[A']$是连通图时，我们能够设计多项式时间算法来求解有向乡村邮递员问题。当$D[A']$不是连通图时，该问题是NP-完备的。

4.4 哈密尔顿问题 （Hamilton Problem）

定义4.6 设G=（V，E）是一个图，C是G中一个圈，称C是G的一个Hamilton圈，如果C包含G中的所有顶点。此时，G也称为哈密尔顿图（Hamilton图）.

问题：给定一个图G，能否判定G包含一个Hamilton圈？

定理4.7 若G 是Hamilton图，则对每个非空真子集S包含于V，均有w(G-S) ≤|S|，这里w(G-S)为G-S的连通分支数目。

证明：因为G是Hamilton图，则G存在一个Hamilton圈C，则C就是G的一个支撑子图，于是有

$$w\left(G-S\right)\leq w(C-S)\leq |S|$$

定义4.7 设G=(V,E)为一个图，t为一个正整数，如果对V的任意非空真子集S，均有$t \cdot w(G-S) \le |S|$，称G是t-坚韧的(t-tough)，满足式子$t \cdot w(G-S) \le |S|$的最大正整数t称为图G的坚韧度(toughness)，并记为t(G).

Chvatal猜想：设G=(V,E)是t-坚韧图，当$t(G) \geqslant 2$，则图G是Hamilton图。

问题：设G=(V,E)为一个图，如何计算G的坚韧度t(G)？

定理4.8 （Ore定理）设G是一个n阶图，对于任意不相邻的顶点u, v, 均有 $d(u)+d(v)\geq n$ ，则G是Hamilton图.

证明：（反证法）假设G不存在Hamilton圈，在G中选取一条最长的路 $P=v_1v_2,\cdots v_n$ （由定理条件得知G是连通图, 从而可以假设路P包含n个顶点）.

构造两集合 $S=\{v_i \mid v_1v_{i+1}\in E(G)\}$

$$T=\{v_i \mid v_iv_n\in E(G)\}$$

不妨设 $v_1v_n \notin E(G)$ ，有 $d(v_1)=|S|$ 和 $d(v_n)=|T|$，进而

$$n \le d(v_1)+d(v_n)=|S|+|T|=|S\bigcup T|+|S\bigcap T|$$

$$\le |V(G)-\{v_n\}|+|S\bigcap T| \le n-1+|S\bigcap T|$$

说明 $|S\bigcap T| \ge 1$ ，于是 $\exists v_j \in S\bigcap T$ ，说明 $v_1v_{j+1}\in E(G)$ ，$v_jv_n \in E(G)$ ，容易构造图G的Hamilton圈。

定理4.8’（Ore定理）设G是一个n阶图，对于不相邻的顶点u, v, 均有 $d(u)+d(v)\ge n$ ，则G是Hamilton图iff G∪{uv}是Hamilton图.

定义4.8（闭包）设G是一个图，当 $uv \notin E(G)$，只要 $d(u)+d(v) \ge n$ ，在图G中增加一边uv，得到图G_1=G∪{uv}，对于G_1中任何两个不相邻顶点u_1，v_1，只要 $d_{G_1}(u_1)+d_{G_1}(v_1) \ge n$，在图$G_1$中增加一边$u_1v_1$，得到图$G_2$=$G_1$∪{$u_1v_1$}，……，这样构造下去，使得对于任何两个不相邻顶点$u_k, v_k \in V$，都有 $d_{G_k}(u_k)+d_{G_k}(v_k) < n$，称$G_k$为G的n-闭包，记为C(G).

定理4.9　设G是一个图，则G是Hamilton图iff C(G)是Hamilton图.

推论4.1　设G是一个图，如果C（G）是完全图，则G是Hamilton图.

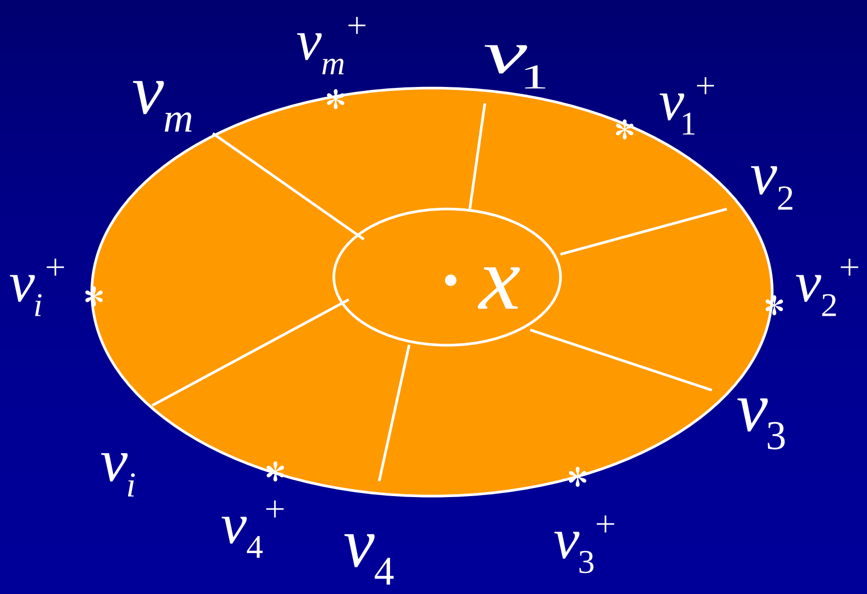
问题:若图G是满足Ore定理的条件，则G是Hamilton图，如何找到G的Hamilton圈？

定理4.10设G是一个图, $\alpha(G)=\max\{|I| \mid I\text{是独立集}\}$ 是G的最大独立数，$k(G)$ 是G的连通度. 如果 $\alpha(G) \le k(G)$,则G是Hamilton图.

证明:当$k(G)=1$时,则$\alpha(G)=1$,说明G是完全图,不考虑此情形.

考虑当$k(G)\geq 2$时, 假设G不是Hamilton图,

则因G是2-连通图,于是G有最长圈C.



构造集合 $I=\left\{v_1^+,v_2^+,v_3^+\cdots v_m^+,x\right\}$

可知I是一个独立集,且有

$$\alpha(G)\ge|I|=m+1\ge\kappa(G)+1$$

矛盾。

定义4.9 设G是一个图，称G是可迹图（traceable graph），如果G存在一条路P包含G的所有顶点，也称P是Hamilton路.

从定义可知，若G是Hamilton图，则G是可迹图

定义4.10 设G是一个图，称G是Hamilton-连通的，如果对于$\forall u, v \in V(G)$，都存在以u, v为两个端点的Hamilton路.

定义4.11设G是一个图，称G是齐次可迹的，(homogenously traceable graph)如果对于任意顶点u，都存在以u为（一个）端点的Hamilton路.

易知，H-连通图→H-图→齐次可迹图→可迹图

4.5 货郎问题(Traveling salesman problem)

定义4.12设G=(V,E;w)是一个赋权图，$w:E \to R^{+}$ 在G中寻找一条闭回路C，使C经过每个顶点至少一次，并且使得 $w(C)=\sum_{e\in E(C)} w(e)$ 达到最小，这里W(C)称为闭回路C的权重.该问题称为货郎问题(TSP)

问题:如何求赋权图G的货郎问题（TSP）？

定义4.13 设G=(V,E;w)是一个赋权图，称图G满足三角不等式，如果对任意三个顶点u，v，s，有满足性质

$$w(u,s) \le w(u,v) + w(v,s)$$

当图G满足三角不等式时，则G一定是一个完全图。此时的TSP问题称为△-TSP问题。

当图G满足三角不等式时，在图G上解相应的TSP仍然是NP-完备性问题.

定理4.11设G=(V,E;w)是一个赋权图，不存在多项式算法来求得G上TSP问题的可行解，该问题可以由Hamilton问题转换而来。

定理4.12设G=(V,E;w)是一个赋权图，并且满足三角不等式性质，不存在多项式算法来求得G上△-TSP问题最优解，该问题可以由Hamilton问题转换而来；但是存在多项式算法来求得G上△-TSP问题较好的可行解，近似值为2或3/2。