云南大学数学与统计学院
《算法图论实验》上机实践报告

课程名称：算法图论实验	**年级：**2015 级	**上机实践成绩：**
指导教师：李建平	**姓名：**刘鹏	**专业：**信息与计算科学
上机实践名称：有向图的弧连通度	**学号：**20151910042	**上机实践日期：**2019-01-01
上机实践编号：6	**组号：**	

一、 实验目的

1. 了解图的点连通度和弧连通度的定义；
2. 了解 Menger 定理的描述以及证明。

二、 实验内容

1. 写出求图的弧连通度的算法；
2. 用 C 语言实现上述算法。

三、 实验平台

Windows 10 Pro 1803；

MacOS Mojave。

四、 算法设计

4.1 预备知识

为了刻画图的连通程度，引入图的连通度的概念。设连通图G不是完全图，如果$V_1 \subset V$，使得$G - V_1$是不连通的，则称V_1是图G的**点截集**（vertex-cut）。如果$|V_1| = k$，也称之为k-点截集。给定图G的两个顶点u和v，假如点截集V_1使得顶点u和v彼此不可到达，那么称点截集V_1是图G中**分离**u, v**的点截集**（vertex-cut separating u and v）。

定义图G的点连通度（vertex-connectivity），记为$\kappa(G)$，

$$\kappa(G) \begin{cases} \mathbf{min}\{|V_1||V_1 \text{ is } \mathbf{vertex\ cut}\}, & \text{if } G \neq K_n \\ n-1, & \text{if } G = K_n \end{cases}$$

对于非负整数k，若$\kappa(G) \geq k$，则称G是k-点连通图（k-vertex-connected Graph），简称k-连通图。

类似地可以定义边截集。给定连通图G，如果$E_1 \subset E$，使得$G - E_1$是不连通的，则称E_1是图G的**边截集**（edge-cut）。如果$|E_1| = k$，也称之为k-边截集。类似地定义**分离**u, v**的边截集**（edge-cut separating u and v）。定义图G的边连通度（edge-connectivity），记为$\lambda(G)$，

$$\lambda(G) \begin{cases} \mathbf{min}\{|E_1||E_1 \text{ is } \mathbf{edge\ cut}\}, & \text{if } G \neq K_1 \\ 0, & \text{if } G = K_1 \end{cases}$$

设$G = (V,\ E)$是一个图，X和Y是V的任意两个非空真子集。给定一个链，如果它的两个端点分别属于X和Y，而且链上的其他点都不属于$X \cup Y$，则称这个链是$(X,\ Y)$-**链**（$(X,\ Y)$-chain）。特别地，若$v \in X \cap Y$，则v本身就是一个$(X,\ Y)$-链。若$Z \subset V$，且任何一个$(X,\ Y)$-链都与Z相交，则称Z是一个$(X,\ Y)$-**分离**

集（$(X,\ Y)$-separator），X与Y也是$(X,\ Y)$-分离集。

Menger 定理 X和Y是V的任意两个子集，则G中存在$k\ (k\in\mathbb{Z}^{+})$个点不交的$(X,\ Y)$-链，当且仅当每个$(X,\ Y)$-分离集至少包含k个点。

Menger 推论 1 设$x,\ y\in V(G)$，$xy\notin E$，则G中存在$k\ (k\in\mathbb{Z}^{+})$个点不交的$(x,\ y)$-链，当且仅当G中的每个分离$x,\ y$的点截集至少包含k个点。

Menger 推论 2 设$x,\ y\in V(G)$，$xy\notin E$，则G中存在$k\ (k\in\mathbb{Z}^{+})$个边不交的$(x,\ y)$-链，当且仅当G中的每个分离$x,\ y$的边截集至少包含k个边。

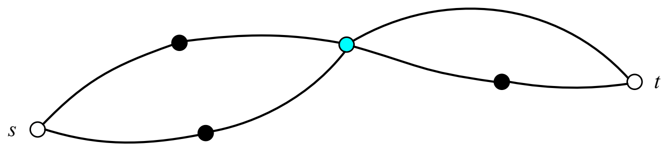
（**该推论的证明比较有启发性**，可以利用图G的线图$L(G)$来证明，线图必然满足 Menger 定理，所以根据这个观察结果，直接证明本推论。）

关于点的 Menger 型极大极小定理 设$x,\ y$是G的两个不相邻的点，则内点不交的$(x,\ y)$-链的最大个数等于局部点连通度$\kappa(x,\ y)$。

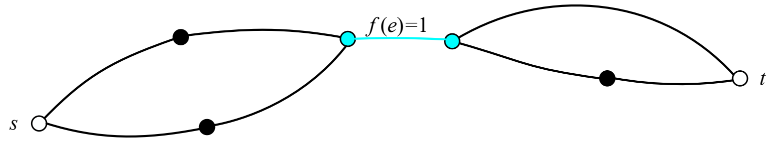
关于边的 Menger 型极大极小定理 设$x,\ y$是G的两个不相邻的点，则内边不交的$(x,\ y)$-链的最大个数等于局部点边通度$\lambda(x,\ y)$。

4.2 算法解析

有了 Menger 定理的铺垫，就可以很顺利地写出求图的点连通度的算法，其核心思想是网络流算法。因为有点不交这个限制条件，所以不能单纯地讲所有边的容量设置为 1。这直接导致了网络流算法中出现了节点的流量限制，但是 Edmonds-Karp 算法中并没有对于节点进行限制，所以需要对原图进行一定的变换。$(s,\ t)$-链集合如图(*a*)所示，对于其中的蓝色节点v来说，$d_G(v)$一定是偶数，可以将之拆分为两个节点，中间加一个边，且该边的容量设置为1，这样就可以解除节点容量限制，直接在原图中进行网络最大流算法。(*a*)图是原先的，(*b*)图是经过变换之后的图。这样就可以解决点连通度的求解问题。对于边连通度问题而言要简单一点，直接在原图上采取网络流算法即可，通过遍历所有的点对，找出最小值即可。



(*a*) 原图



(*b*) 变换后的图

4.3 求有向图的弧连通度的算法

假设已经有 Edmonds-Karp 算法，可以用来求解有向图D的顶点s与t之间的最大网络流f，且记这个形式为$f=\mathrm{MAXFLOW}(D;\ s,\ t)$，这个算法是下面这个算法的子算法。

Algorithm	求有图的弧连通度，记此算法为AC
Input	连通的有向图$D=(V,\ A)$

Output 图D的一个弧连通度C，记$C = \mathrm{AC}(D)$

Begin

Step 1 // 初始化一个空的列表

$L = \emptyset$

Step 2 // 初始化弧的容量

for each edge $e \in A$:

  $e.\mathbf{capacity} = 1$

Step 3 // 寻找任意有序点对之间的最大流量

for each vertex $v_1 \in A$:

  for each vertex $v_2 \in A$ **and** $v_2 \neq v_1$:

    $L.\mathrm{append}(\mathrm{MAXFLOW}(D;\ v_1,\ v_2))$

Step 4 $\mathrm{C} = \mathrm{MIN}(L)$

output C

End

五、 程序代码

源代码采用了开源社区写的图论算法库，这里仅仅展示我编写的一个核心文件 graph.cpp。

5.1 程序代码

```cpp
#include "graph.hpp"

// Operator overloads
std::ostream & operator<<(std::ostream &stream, const Graph &g)
{
    stream << "Number of vertices in graph: " << g.size() << std::endl;
    for (uint32_t i = 0; i < g.size(); ++i)
    {
        std::cout << "Vertex: " << i << " has neighbors: " << std::endl;
        for (auto &neighbor : g[i])
        {
            stream << neighbor << ", ";
        }
        stream << std::endl;
    }
    return stream;
}

template<typename Vec, typename VecType>
void fill1DVec(Vec & vec, VecType vt)
{
    vec.assign(vec.size(), vt);
}

template<typename Vec, typename VecType>
void fill2DVec(Vec & vec, VecType vt)
```

```
{
    for (auto & row : vec)
    {
        fill1DVec(row, vt);
    }
}

uint32_t EdgeConnectivityCalculator::bfs(uint32_t u, uint32_t v)
{
    uint32_t vertexCount = g_.size();
    std::queue<uint32_t> queue;
    queue.push(u);

    while (!queue.empty())
    {
        const uint32_t i = queue.front();
        queue.pop();
        for (uint32_t j = 0; j < g_[i].size(); ++j)
        {
            uint32_t neighbor = g_[i][j];
            uint32_t currentResidualCapacity = edgeCapacity_[i][j] - currentFlow_[i][j];
            if (path_[neighbor] == -1 && (currentResidualCapacity > 0))
            {
                path_[neighbor] = i;
                residualCapacity_[neighbor] = std::min(residualCapacity_[i], currentResidualCapacity);
                if (neighbor != v)
                {
                    queue.push(neighbor);
                }
                else
                {
                    return residualCapacity_[v];
                }
            }
        }
    }

    return 0;
}

uint32_t EdgeConnectivityCalculator::edmondsKarp(uint32_t source, uint32_t sink)
{
    clearData();
    uint32_t pathFlow = 0, maxFlow = 0;
    while (true)
    {
        fill1DVec(residualCapacity_, 0);
        fill1DVec(path_, -1);
        residualCapacity_[source] = std::numeric_limits<uint32_t>::max();
        path_[0] = -2;
        pathFlow = bfs(source, sink);
        if (pathFlow <= 0)
        {
            break;
        }
        maxFlow += pathFlow;
        uint32_t s = sink;
        while (s != source)
```

```cpp
        {
            uint32_t prev = path_[s];
            // Workaround, maybe we should use a matrix instead of a 2d list after all?
            uint32_t indexOfPrev = std::distance(g_[s].begin(), std::find(g_[s].begin(), g_[s].end(), prev));
            uint32_t indexOfS = std::distance(g_[prev].begin(), std::find(g_[prev].begin(), g_[prev].end(), s));
            currentFlow_[prev][indexOfS] += pathFlow;
            currentFlow_[s][indexOfPrev] -= pathFlow;
            s = prev;
        }
    }
    return maxFlow;
}

uint32_t EdgeConnectivityCalculator::findEdgeConnectivity()
{
        if (g_.size() < 1)
            return 0;
    uint32_t result = g_[0].size();
    for (uint32_t i = 1; i < g_.size(); i++)
    {
        result = std::min(result, edmondsKarp(0, i));
    }
    return result;
}

void EdgeConnectivityCalculator::clearData()
{
    fill2DVec(currentFlow_, 0);
    fill2DVec(edgeCapacity_, 1);
    fill1DVec(path_, -1);
    fill1DVec(residualCapacity_, 0);
    residualCapacity_[0] = std::numeric_limits<uint32_t>::max(); // not necessary here?
    path_[0] = -2; // so we can visit the first vertex in BFS
}

void EdgeConnectivityCalculator::initializeDataFromGraph(Graph & g)
{
    // Copy graph structure
    g_ = Graph(g);
    edgeCapacity_ = Graph(g);
    currentFlow_ = FlowVecType(g.size());
    for (uint32_t i = 0; i < currentFlow_.size(); i++)
    {
        currentFlow_[i].resize(g_[i].size(), 0);
    }
    residualCapacity_ = std::vector<uint32_t>(g.size());
    path_ = std::vector<int>(g.size());
    //clearData();
}

EdgeConnectivityCalculator::EdgeConnectivityCalculator()
{
}

uint32_t EdgeConnectivityCalculator::findEdgeConnectivity(Graph & g)
{
    initializeDataFromGraph(g);
    return findEdgeConnectivity();
```

```
}
```

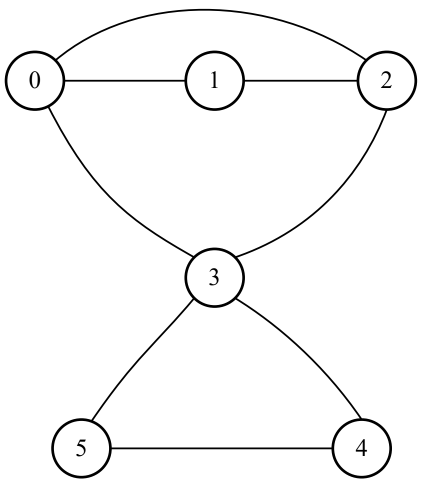
5.2 运行结果

```
06 — ~/Documents/GitHub/26. 算法图论 - Algorithm_of_Graph_Theory_Report/src/06 — -bash — 100×16

newton@newton-pc-4 ~/Documents/GitHub/26. 算法图论 - Algorithm_of_Graph_Theory_Report/src/06
$ make all
cd EdgeConnectivity && /Library/Developer/CommandLineTools/usr/bin/make
c++ -std=c++11 -MMD   -c -o graph.o graph.cpp
c++ -std=c++11 -MMD   -c -o graph_io.o graph_io.cpp
c++ -std=c++11 -MMD   -c -o main.o main.cpp
c++ -std=c++11 -MMD -o EdgeConnectivity graph.o graph_io.o main.o

newton@newton-pc-4 ~/Documents/GitHub/26. 算法图论 - Algorithm_of_Graph_Theory_Report/src/06
$ EdgeConnectivity/EdgeConnectivity test/1.in
2

newton@newton-pc-4 ~/Documents/GitHub/26. 算法图论 - Algorithm_of_Graph_Theory_Report/src/06
$
```

这里的图结构是用迭代器模式实现的邻接表。如下所示为 1.in 的文件内容

```
0,1,2,3
1,0,2
2,0,1,3
3,0,2,4,5
4,3,5
5,3,4
```

转化为图片为:



代码库[3]是里斯本大学的一位同学写的实验报告，他详细地分析了三个算法的性能，在实验中有所参考他的一些代码。

六、 参考文献

[1] **林锐**. 高质量 C++/C 编程指南 [M]. 1.0 ed., 2001.

[2] https://github.com/matrackif/EdgeConnectivityUsingFlow/tree/master/EdgeConnectivity

[3] https://github.com/miferrei/Edge-Connectivity-in-Graphs