

云南大学数学与统计学院

《算法图论实验》上机实践报告

课程名称：算法图论实验	年级：2015 级	上机实践成绩：
指导教师：李建平	姓名：刘鹏	专业：信息与计算科学
上机实践名称：有向图的弧连通度	学号：20151910042	上机实践日期：2018-11-31
上机实践编号：6	组号：	

一、实验目的

1. 了解图的点连通度和弧连通度的定义；
2. 了解 Menger 定理的描述以及证明。

二、实验内容

1. 写出求图的弧连通度的算法；
2. 用 C 语言实现上述算法。

三、实验平台

Windows 10 Pro 1803;

MacOS Mojave。

四、算法设计

4.1 预备知识

为了刻画图的连通程度，引入图的连通度的概念。设连通图 G 不是完全图，如果 $V_1 \subset V$ ，使得 $G - V_1$ 是不连通的，则称 V_1 是图 G 的**点截集**（vertex-cut）。如果 $|V_1| = k$ ，也称之为 k -点截集。给定图 G 的两个顶点 u 和 v ，假如点截集 V_1 使得顶点 u 和 v 彼此不可到达，那么称点截集 V_1 是图 G 中**分离 u, v 的点截集**（vertex-cut separating u and v ）。

定义图 G 的点连通度（vertex-connectivity），记为 $\kappa(G)$ ，

$$\kappa(G) \begin{cases} \min\{|V_1| \mid V_1 \text{ is vertex cut}\}, & \text{if } G \neq K_n \\ n - 1, & \text{if } G = K_n \end{cases}$$

对于非负整数 k ，若 $\kappa(G) \geq k$ ，则称 G 是 k -点连通图（ k -vertex-connected Graph），简称 k -连通图。

类似地可以定义边截集。给定连通图 G ，如果 $E_1 \subset E$ ，使得 $G - E_1$ 是不连通的，则称 E_1 是图 G 的**边截集**（edge-cut）。如果 $|E_1| = k$ ，也称之为 k -边截集。类似地定义**分离 u, v 的边截集**（edge-cut separating u and v ）。定义图 G 的边连通度（edge-connectivity），记为 $\lambda(G)$ ，

$$\lambda(G) \begin{cases} \min\{|E_1| \mid E_1 \text{ is edge cut}\}, & \text{if } G \neq K_1 \\ 0, & \text{if } G = K_1 \end{cases}$$

设 $G = (V, E)$ 是一个图， X 和 Y 是 V 的任意两个非空真子集。给定一个链，如果它的两个端点分别属于 X 和 Y ，而且链上的其他点都不属于 $X \cup Y$ ，则称这个链是 (X, Y) -**链**（ (X, Y) -chain）。特别地，若 $v \in X \cap Y$ ，则 v 本身就是一个 (X, Y) -链。若 $Z \subset V$ ，且任何一个 (X, Y) -链都与 Z 相交，则称 Z 是一个 (X, Y) -**分离**

集 $((X, Y)\text{-separator})$ ， X 与 Y 也是 (X, Y) -分离集。

Menger 定理 X 和 Y 是 V 的任意两个子集，则 G 中存在 k ($k \in \mathbb{Z}^+$)个互不相交的 (X, Y) -链，当且仅当每个 (X, Y) -分离集至少包含 k 个点。

Menger 推论 1 设 $x, y \in V(G)$ ， $xy \notin E$ ，则 G 中存在 k ($k \in \mathbb{Z}^+$)个互不相交的 (x, y) -链，当且仅当 G 中的每个分离 x, y 的点截集至少包含 k 个点。

Menger 推论 2 设 $x, y \in V(G)$ ， $xy \notin E$ ，则 G 中存在 k ($k \in \mathbb{Z}^+$)个边不相交的 (x, y) -链，当且仅当 G 中的每个分离 x, y 的边截集至少包含 k 条边。

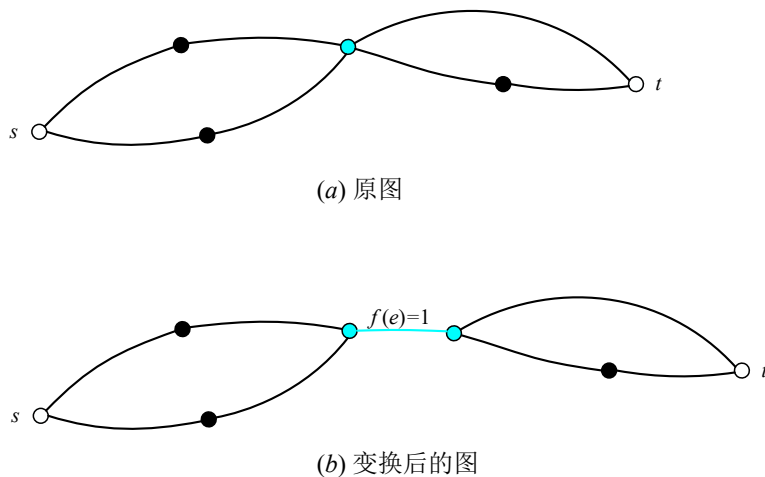
(该推论的证明比较有启发性，可以利用图 G 的线图 $L(G)$ 来证明，线图必然满足 Menger 定理，所以根据这个观察结果，直接证明本推论。)

关于点的 Menger 型极大极小定理 设 x, y 是 G 的两个不相邻的点，则内点不相交的 (x, y) -链的最大个数等于局部点连通度 $\kappa(x, y)$ 。

关于边的 Menger 型极大极小定理 设 x, y 是 G 的两个不相邻的点，则内边不相交的 (x, y) -链的最大个数等于局部边连通度 $\lambda(x, y)$ 。

4.2 算法解析

有了 Menger 定理的铺垫，就可以很顺利地写出求图的点连通度的算法，其核心思想是网络流算法。因为有点不相交这个限制条件，所以不能单纯地讲所有边的容量设置为 1。这直接导致了网络流算法中出现了节点的流量限制，但是 Edmonds-Karp 算法中并没有对于节点进行限制，所以需要原图进行一定的变换。 (s, t) -链集合如图(a)所示，对于其中的蓝色节点 v 来说， $d_G(v)$ 一定是偶数，可以将之拆分为两个节点，中间加一个边，且该边的容量设置为1，这样就可以解除节点容量限制，直接在原图中进行网络最大流算法。(a)图是原先的，(b)图是经过变换之后的图。这样就可以解决点连通度的求解问题。对于边连通度问题而言要简单一点，直接在原图上采取网络流算法即可，通过遍历所有的点对，找出最小值即可。



4.3 求有向图的弧连通度的算法

假设已经有 Edmonds-Karp 算法，可以用来求解有向图 D 的顶点 s 与 t 之间的最大网络流 f ，且记这个形式为 $f = \text{MAXFLOW}(D; s, t)$ ，这个算法是下面这个算法的子算法。

Algorithm 求有图的弧连通度，记此算法为AC

Input 连通的有向图 $D = (V, A)$

Output 图 D 的一个弧连通度 C ，记 $C = AC(D)$
Begin

Step 1 // 初始化一个空的列表
 $L = \emptyset$

Step 2 // 初始化弧的容量
 for each edge $e \in A$:
 $e.\text{capacity} = 1$

Step 3 // 寻找任意有序点对之间的最大流量
 for each vertex $v_1 \in A$:
 for each vertex $v_2 \in A$ **and** $v_2 \neq v_1$:
 $L.\text{append}(\text{MAXFLOW}(D; v_1, v_2))$

Step 4 $C = \text{MIN}(L)$
 output C

End

五、 程序代码

六、 参考文献

- [1] 林锐. 高质量 C++/C 编程指南 [M]. 1.0 ed., 2001.
- [2]