云南大学数学与统计学院
《算法图论实验》上机实践报告

课程名称：算法图论实验	年级：2015 级	上机实践成绩：
指导教师：李建平	姓名：刘鹏	专业：信息与计算科学
上机实践名称：中国邮递员问题	学号：20151910042	上机实践日期：2018-12-31
上机实践编号：7	组号：	

一、 实验目的

1. 了解一般“中国邮递员问题”及其算法；
2. 了解“有向中国邮递员问题”及其算法。

二、 实验内容

1. 写出求最短路的最小插点问题的动态规划算法；
2. 用 C 语言实现上述算法。

三、 实验平台

Windows 10 Pro 1803；

MacOS Mojave。

四、 算法设计

4.1 前期知识

中国邮递员问题起源于实际需求。比之更早的一个问题是“戈尼斯堡七桥问题”，该问题由欧拉解决。给定一个图$G=(V,\ E)$，如果存在一条简单链过图G的每条边一次并且仅仅一次，那么这个链称为欧拉链（Eulerian Chain）；如果存在一个简单圈过图G的每条边一次并且仅仅一次，那么这个圈称为欧拉圈（Eulerian Cycle）；若图G有欧拉圈，则称图G为欧拉图（Eulerian Graph）。

定理 7.1 （Euler 定理） 设图G是连通图，且边数$\|G\|>0$，则G是欧拉图，当且仅当G不含奇点[1]。

证明

(1) G是欧拉图$\Rightarrow$ G不含奇点

很显然，如果G是欧拉图，那么G本身就是一个欧拉圈。很显然，圈不含奇点。

(2) G不含奇点$\Rightarrow$ G是欧拉图

假设G是连通图，边数$\|G\|>0$，且G不含奇点，但是同时它不是欧拉图，同时假设G是所有这种图中含边最少的一个。由图连通、$\|G\|>0$以及都是偶数点可知，图的最小度$\delta(G)\geq 2$。所以图G含有圈（也可以这么认为：树是最简单的连通图，最小度为1，往树上随便加一条原先不存在的边，都会产生圈）。假设C是G中含有边数最多的简单圈，因为假设G不是欧拉图，所以根据假设可知：$G-E(C)$含有一个边数大于零的连通分图H，且所有点的度均为偶数，由于$\|H\|<\|G\|$，所以H必须含有欧拉圈，

否则就与G是所有这种图中含边最少的一个相矛盾；现断言：$V(C) \cap V(C') \neq \emptyset$。该断言可以解释如下：如果交为空，那么依此类推，其余连通分图也含欧拉圈，且$V(C)$与他们的交也为空，于是这些圈之间彼此点不交，这导致G不是连通图，显然不可能，所以交非空。如此，可以通过走 8 字的方式构造一个比C边数还多的圈，这与C含边最多矛盾，于是这种图不存在，所以G是欧拉图。证毕。 □

所谓的中国邮递员问题，指的是一个邮递员每次送邮件，要走遍他负责的投递范围的所有街道，完成任务之后，他应该按照什么样的路线走才可以使得走的总路程最短？把这个问题抽象成图论问题，就是给当一个图$G=(V,\,E)$，每个边e上有非负权值$w(e)$，要求出G的一个（未必是简单的）圈C，使得过每个边至少一次，并且使得圈C的总权重$w(C)=\sum_{e\in E(C)} w(e)$最小。

可以这样思考：加入连通图G不含奇点，那么这个图中有欧拉圈C，即这是个欧拉图，所含的欧拉圈就是所要求的最佳邮递路线。如果连通图G含有奇点，那么所求的圈必然过某条边多于一次，若在边$e=v_iv_j$上通过了k次，我们就在v_i与v_j之间添加$k-1$条新的边，并且令新添加的边的权重等于原来的边。对圈C上每个这样的边都进行如此的操作，将得到的扩充之后的图G命名为G^*，那么C就是多重图G^*中的欧拉圈。这时得到一个很显然的事实：$w(C)$是由所有添加边的总权重所决定的。

如果边上的添加边数目不止一条，那么从中删除偶数条添加边，得到的图仍旧是欧拉图，且这个删减后的图的欧拉圈的权重不会变大。因此可以假设每个边上至多有一条添加边。于是，中国邮递员问题又被归结为如下的图论问题：给定连通图$G=(V,\,E)$，每个边e上有非负权$w(e)$，求$E_1\subseteq E$，满足条件：在G中，在E_1的每个边上添加一个重边，使得这样得到的图无奇点。称E_1为可行集（feasible set），并使得$w(E_1)$达到最小。

可行集E_1是最优集，当且仅当对G的每个初等圈C，都有

$$\sum_{e\in E_1\cap E(C)} w(e) \leq \sum_{e\in E(C)\setminus E_1} w(e)$$

这个事实是指任意简单圈，其包含的添加边的权重之和小于等于原先就存在的边的权重之和。这个定理是奇偶点图上作业法[2]的核心思想来源，下面简单地证明一下。

Proof:
必要性：设可行集E_1是最优集，但这时存在一个初等圈C，使得

$$\sum_{e\in E_1\cap E(C)} w(e) > \sum_{e\in E(C)\setminus E_1} w(e)$$

这个不等式认为，存在一个圈，圈的边与最优集的交，比圈排除最优集中所有边的剩余还要更大。根据这个假设，可以令$E_2=E_1\oplus E(C)$，也就是将初等圈C中的添加边都舍弃，然后在没有添加过边的相邻点之间都加上点对。这样一来，不会改变整个图中的点都是偶度点的事实（因为两点之间顶多有一个添加边，所以这个操作仅仅会改变这个圈，对于圈外的点不影响奇偶度；对于圈内的点，要么两边的边都是添加边，要么一端是添加边但是另一端不是，在这种情况下进行进行如上操作，两边都是添加边的把这两个添加边都去掉，该点在原图中的奇偶度不变，另外的只有一端是添加边的，只是左右边由“原始边-添加边”变成了“添加边-原始边”或相反，这也不改变这个点的奇偶度），于是，E_2也是一个可行解，且$w(E_2)<w(E_1)$，这与E_1是最优的相矛盾。

充分性： 只需证明，当存在两个不同的最优集E_1与E_2时，只需证明两者的权重是相等的。对每个点v，其关联边在E_1与E_2中的数目是同奇偶的（否则该点在E_1与E_2的分别作用下度不同）。所以$G[E_1 \oplus E_2]$不含奇点，进而$G[E_1 \oplus E_2]$可以剖分为若干个子集，使得每个子集都是初等圈，并设C_1，C_2，…，C_k是所有这样的圈，于是由最优条件，任意的i都有

$$\sum_{e \in E_1 \cap E(C_i)} w(e) \leq \sum_{e \in E(C_i) \setminus E_1} w(e) = \sum_{e \in E_2 \cap E(C_i)} w(e)$$

反过来就有

$$\sum_{e \in E_2 \cap E(C_i)} w(e) \leq \sum_{e \in E(C_i) \setminus E_2} w(e) = \sum_{e \in E_1 \cap E(C_i)} w(e)$$

所以

$$\sum_{e \in E_1 \cap E(C_i)} w(e) = \sum_{e \in E_2 \cap E(C_i)} w(e)$$

综上所述，充要性得证。

□

4.2 奇偶点图上作业法

山东师范学院的管梅谷教授提出的邮递员最优化投递路线问题，可以由管教授的奇偶点图上作业法来解决。此算法调用了FLEURY算法、两点之间求最短路的PATH算法。

Algorithm 奇偶点图上作业法求解中国邮递员问题，记此算法为POSTMAN-ROUTE

Input $G = (V, E)$，允许这个图为任意的图

Output 图G的一个圈C，记$C = \text{POSTMAN-ROUTE}(G)$

```
Begin     // 计数并存储奇度点
          list L = ∅
Step 1    for each vertex v ∈ V:
              if d_G(v) mod 2 == 1:
                  L.append(v)
Step 2    if |L| == 0:
              C = FLEURY(G)
              goto End
          else:
              for i = 1 through |L| − 1:
                  for each edge e ∈ PATH(L.get(i), L.get(i + 1)):
                      edge temp = e
```

$temp.\mathbf{color} = \mathbf{Black}$

$G.\mathbf{addEdge}(temp)$

$E_1 = \emptyset$

for each vertex $v \in V$:

flag $= 0$

for each vertex $u \in V\setminus$***错误!未定义书签。***:

for each edge $e \in E(u,\ v)$:

if $e.\mathbf{color} == \mathbf{Black}$ **and** flag $== 0$:

flag $= 1$

$E_1.\mathbf{append}(e)$

else if $e.\mathbf{color} == \mathbf{Black}$:

$G.\mathbf{deleteEdge}(e)$

Step 3

// 圈的对称差

for each vertex $v \in V$:

for each vertex $u \in V\setminus v$:

$C = G[(u,\ v)] \cup \mathrm{PATH}(G - E(u,\ v);\ u,\ v)$

if IS-CYCLE$(C) == \mathbf{True}$:

$in = 0$

$out = 0$

for each edge $e \in E_1 \cap E(C)$:

$in = in + w(e)$

for each edge $e \in E(C)\setminus E_1$:

$out = out + w(e)$

if $in \geq out$:

$E_1 = E_1 \oplus E(C)$

$C = \mathrm{FLEURY}(G)$

End

这个算法的两个核心问题：如何证明最优化条件，如何找出所有的圈。第一个问题的证明已经给出，但是第二个问题需要设计算法。由于这里找的是简单圈，所以考虑某个点v的反圈$\mathbf{\Phi}_G(v)$，从$\mathbf{\Phi}_G(v)$中任取一个点u，在$G[E-\{(u,\ v)\}]$中寻找从u到的路，这条路P如果找到，那么$G[P\cup\{(u,\ v)\}]$就是一个简单圈。通过循环，可以找到所有的圈，然后挨个验证即可。

五、 程序代码

六、 参考文献

[1] 田丰, 张运清. 图与网络流理论 [M]. 2nd ed. 北京：科学出版社, 2015.

[2] 管梅谷. 奇偶点图上作业法 [J]. 数学学报, 1960, 03): 263-6.