

云南大学数学与统计学院

《算法图论实验》上机实践报告

课程名称：算法图论实验	年级：2015 级	上机实践成绩：
指导教师：李建平	姓名：刘鹏	专业：信息与计算科学
上机实践名称：有向中国邮递员问题	学号：20151910042	上机实践日期：2018-11-28
上机实践编号：7	组号：	

一、实验目的

1. 了解一般“中国邮递员问题”及其算法；
2. 了解“有向中国邮递员问题”及其算法。

二、实验内容

1. 写出求最短路的最小插点问题的动态规划算法；
2. 用 C 语言实现上述算法。

三、实验平台

Windows 10 Pro 1803;

MacOS Mojave。

四、算法设计

4.1 前期知识

中国邮递员问题起源于实际需求。比之更早的一个问题是“戈尼斯堡七桥问题”，该问题由欧拉解决。给定一个图 $G = (V, E)$ ，如果存在一条简单链过图 G 的每条边一次并且仅仅一次，那么这个链称为欧拉链（Eulerian Chain）；如果存在一个简单圈过图 G 的每条边一次并且仅仅一次，那么这个圈称为欧拉圈（Eulerian Cycle）；若图 G 有欧拉圈，则称图 G 为欧拉图（Eulerian Graph）。

定理 7.1（Euler 定理） 设图 G 是连通图，且边数 $\|G\| > 0$ ，则 G 是欧拉图，当且仅当 G 不含奇点。

证明

（1） G 是欧拉图 $\Rightarrow G$ 不含奇点

很显然，如果 G 是欧拉图，那么 G 本身就是一个欧拉圈。很显然，圈不含奇点。

（2） G 不含奇点 $\Rightarrow G$ 是欧拉图

假设 G 是联通图，边数 $\|G\| > 0$ ，且 G 不含奇点，但是同时它不是欧拉图。由图连通、 $\|G\| > 0$ 以及都是偶数点可知，图的最小度 $\delta(G) \geq 2$ 。所以图 G 含有圈（也可以这么认为：树是最简单的连通图，最小度为1，往树上随便加一条原先不存在的边，都会产生圈）。假设 C 是 G 中含有边数最多的简单圈，因为假设 G 不是欧拉图，所以根据假设可知： $G - E(C)$ 含有一个边数大于零的分图 H ；

从一个全是偶数点的图中去掉一个圈之后，剩余的图中所有的点的度仍旧是偶数。于是 H 是

含圈的，记 H 中的最大圈为 C' ；

现断言： $V(C) \cap V(C') \neq \emptyset$ 。该断言可以解释如下：

所谓的中国邮递员问题，指的是一个邮递员每次送邮件，要走遍他负责的投递范围的所有街道，完成任务之后，他应该按照什么样的路线走才可以使得走的总路程最短？把这个问题抽象成图论问题，就是给当一个图 $G = (V, E)$ ，每个边 e 上有非负权值 $w(e)$ ，要求出 G 的一个（未必是简单的）圈 C ，使得过每个边至少一次，并且使得圈 C 的总权重 $w(C) = \sum_{e \in E(C)} w(e)$ 最小。

可以这样思考：加入连通图 G 不含奇点，那么这个图中有欧拉圈 C ，即这是个欧拉图，所含的欧拉圈就是所要求的最佳邮递路线。如果连通图 G 含有奇点，那么所求的圈必然过某条边多于一次，若在边 $e = v_i v_j$ 上通过了 k 次，我们就在 v_i 与 v_j 之间添加 $k - 1$ 条新的边，并且令新添加的边的权重等于原来的边。对圈 C 上每个这样的边都进行如此的操作，将得到的扩充之后的图 G 命名为 G^* ，那么 C 就是多重图 G^* 中的欧拉圈。这时得到一个很显然的事实： $w(C)$ 是由所有添加边的总权重所决定的。

如果边上的添加边数目不止一条，那么从中删除偶数条添加边，得到的图仍旧是欧拉图，且这个删减后的图的欧拉圈的权重不会变大。因此可以假设每个边上至多有一条添加边。于是，中国邮递员问题又被归结为如下的图论问题：给定连通图 $G = (V, E)$ ，每个边 e 上有非负权 $w(e)$ ，求 $E_1 \subseteq E$ ，满足条件：在 G 中，在 E_1 的每个边上添加一个重边，使得这样得到的图无奇点。称 E_1 为可行集（feasible set），并使得 $w(E_1)$ 达到最小。

可行集 E_1 是最优集，当且仅当对 G 的每个初等圈 C ，都有

$$\sum_{e \in E_1 \cap E(C)} w(e) \leq \sum_{e \in E(C) \setminus E_1} w(e)$$

这个事实是指任意简单圈，其包含的添加边的权重之和小于等于原先就存在的边的权重之和。这个定理是奇偶点图上作业法的核心思想来源，下面简单地证明一下。

Proof:

必要性：设可行集 E_1 是最优集，但这时存在一个初等圈 C ，使得

$$\sum_{e \in E_1 \cap E(C)} w(e) > \sum_{e \in E(C) \setminus E_1} w(e)$$

这个不等式认为，存在一个圈，圈的边与最优集的交，比圈排除最优集中所有边的剩余还要更大。根据这个假设，可以令 $E_2 = E_1 \oplus E(C)$ ，也就是将初等圈 C 中的添加边都舍弃，然后在没有添加过边的相邻点之间都加上点对。这样一来，不会改变整个图中的点都是偶度点的事实（因为两点之间顶多有一个添加边，所以这个操作仅仅会改变这个圈，对于圈外的点不影响奇偶度；对于圈内的点，要么两边的边都是添加边，要么一端是添加边但是另一端不是，在这种情况下进行如上操作，两边都是添加边的把这两个添加边都去掉，该点在原图中的奇偶度不变，另外的只有一端是添加边的，只是左右边由“原始边-添加边”变成了“添加边-原始边”或相反，这也不改变这个点的奇偶度），于是， E_2 也是一个可行解，且 $w(E_2) < w(E_1)$ ，这与 E_1 是最优的相矛盾。

充分性：只需证明，当存在两个不同的最优集 E_1 与 E_2 时，只需证明两者的权重是相等的。对每个点 v ，其关联边在 E_1 与 E_2 中的数目是同奇偶的（否则该点在 E_1 与 E_2 的分

别作用下度不同)。所以 $G[E_1 \oplus E_2]$ 不含奇点, 进而 $G[E_1 \oplus E_2]$ 可以剖分为若干个子集, 使得每个子集都是初等圈, 并设 C_1, C_2, \dots, C_k 是所有这样的圈, 于是由最优条件, 任意的 i 都有

$$\sum_{e \in E_1 \cap E(C_i)} w(e) \leq \sum_{e \in E(C_i) \setminus E_1} w(e) = \sum_{e \in E_2 \cap E(C_i)} w(e)$$

反过来就有

$$\sum_{e \in E_2 \cap E(C_i)} w(e) \leq \sum_{e \in E(C_i) \setminus E_2} w(e) = \sum_{e \in E_1 \cap E(C_i)} w(e)$$

所以

$$\sum_{e \in E_1 \cap E(C_i)} w(e) = \sum_{e \in E_2 \cap E(C_i)} w(e)$$

综上所述, 充要性得证。

□

4.2 奇偶点图上作业法

山东师范学院的管梅谷教授提出的邮递员最优化投递路线问题, 可以由管教授的奇偶点图上作业法^[1]来解决。此算法调用了FLEURY算法、两点之间求最短路的PATH算法。

Algorithm 奇偶点图上作业法求解中国邮递员问题, 记此算法为POSTMAN-ROUTE

Input $G = (V, E)$, 允许这个图为任意的图

Output 图 G 的一个圈 C , 记 $C = \text{POSTMAN-ROUTE}(G)$

Begin // 计数并存储奇度点

list $L = \emptyset$

Step 1 **for each** vertex $v \in V$:

if $d_G(v) \bmod 2 == 1$:

$L.\text{append}(v)$

Step 2 **if** $|L| == 0$:

$C = \text{FLEURY}(G)$

goto End

else:

for $i = 1$ **through** $|L| - 1$:

for each edge $e \in \text{PATH}(L.\text{get}(i), L.\text{get}(i + 1))$:

edge $temp = e$

$temp.\text{color} = \text{Black}$

$G.\text{addEdge}(temp)$

$E_1 = \emptyset$

```

for each vertex  $v \in V$ :
    flag = 0
    for each vertex  $u \in V \setminus \{v\}$ :
        for each edge  $e \in E(u, v)$ :
            if  $e.\text{color} == \text{Black}$  and flag == 0:
                flag = 1
                 $E_1.\text{append}(e)$ 
            else if  $e.\text{color} == \text{Black}$ :
                 $G.\text{deleteEdge}(e)$ 

```

Step 3

// 圈的对称差

```

for each vertex  $v \in V$ :
    for each vertex  $u \in V \setminus v$ :
         $C = G[(u, v)] \cup \text{PATH}(G - E(u, v); u, v)$ 
        if IS-CYCLE( $C$ ) == True:
             $in = 0$ 
             $out = 0$ 
            for each edge  $e \in E_1 \cap E(C)$ :
                 $in = in + w(e)$ 
            for each edge  $e \in E(C) \setminus E_1$ :
                 $out = out + w(e)$ 
            if  $in \geq out$ :
                 $E_1 = E_1 \oplus E(C)$ 
 $C = \text{FLEURY}(G)$ 

```

End

这个算法的两个核心问题：如何证明最优化条件，如何找出所有的圈。第一个问题的证明已经给出，但是第二个问题需要设计算法。由于这里找的是简单圈，所以考虑某个点 v 的反圈 $\Phi_G(v)$ ，从 $\Phi_G(v)$ 中任取一个点 u ，在 $G[E - \{(u, v)\}]$ 中寻找从 u 到的路，这条路 P 如果找到，那么 $G[P \cup \{(u, v)\}]$ 就是一个简单圈。通过循环，可以找到所有的圈，然后挨个验证即可。

五、 程序代码

六、 参考文献

[1] 管梅谷. 奇偶点图上作业法 [J]. 数学学报, 1960, 03): 263-6.

[2]