

算 法 图 论

云南大学数学系

李 建 平

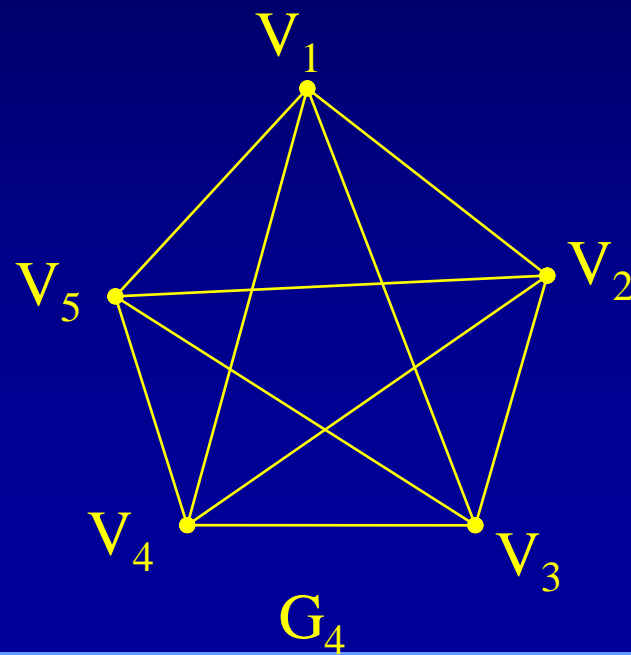
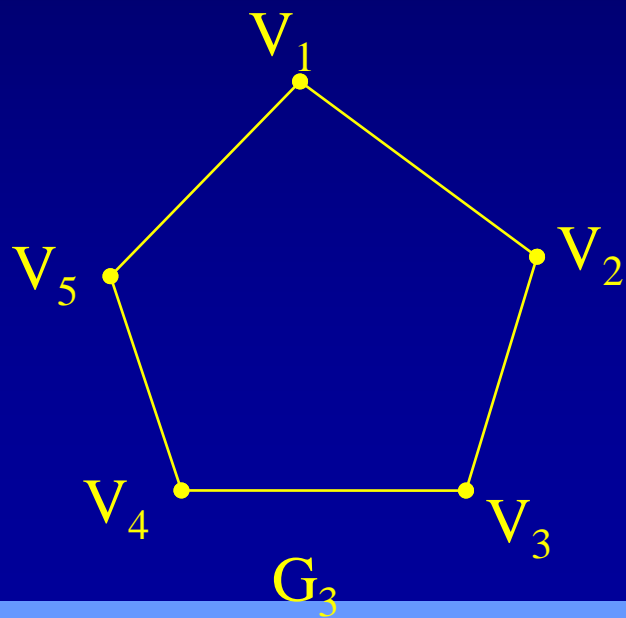
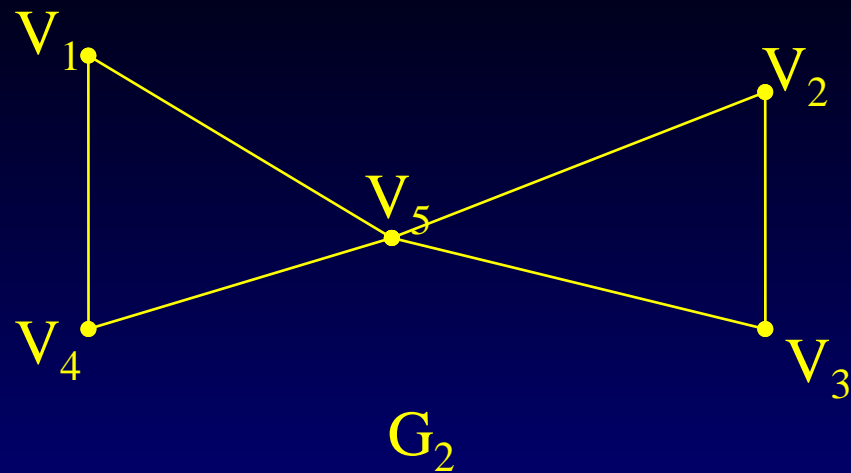
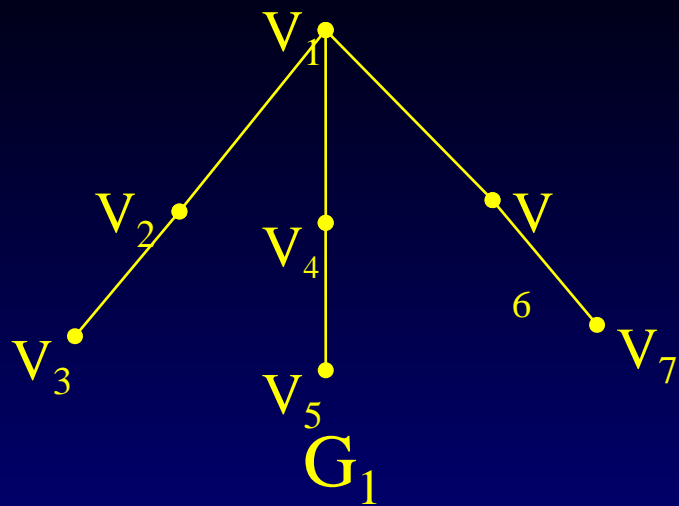
2018年9月

第三章 图的连通性

3.1 连通性(connectivity)

在介绍本章的一些基本概念之前,我们先看一些例子.

例 下面各个连通图中,至少删除多少个顶点后,所得到的诱导子图成为不连通图?
至少删除多少条边后,所得到的诱导子图成为不连通图?



定义3.1 设 $G=(V,E)$ 是一个图, $V' \subset V$, 称 V' 为 G 的一个点割集 (点截集), 如果 $G-V'$ 是不连通的或者 $G-V'$ 为单点集图。进一步, 当 $|V'|=k$ 时, 称 V' 为 G 的 k 点割集。

定义3.2 设 $G=(V,E)$ 是一个图, 称 G 的点连通度为 k , 如果 G 不存在点数是 $k-1$ 的点割集, k 是满足条件的最小正整数, 记 G 的点连通度为 $\kappa(G)$ 。

特别地, n 阶完全图的点连通度为 $n-1$ 。
如果 C 为 G 的点割集, 且 $|C|=1$, i.e. $C=\{v\}$, 称 v 为 G 的一个割点。

定义3.3 设 G 是一个图, k 是正整数, 称 G 是 k 点连通的, 如果 $\kappa(G) \geq k$ 。

如果 G 是 k -连通图, 则 G 也是 $(k-1)$ -连通图 ($k \geq 2$)。一个非完全图的连通图是 k -连通的当且仅当它的每个割集至少含有 k 个点。

定义3.4 设 $G=(V,E)$ 是一个图, $E' \subset E$, 称 E' 为 G 的一个边割集(边截集), 如果 $G-E'$ 是不连通的。进一步, 当 $|E'|=k$ 时, 称 E' 为 G 的 k -边割集。

定义3.5 设 $G=(V,E)$ 是一个图, 称 G 的边连通度为 k , 如果 G 不存在边数是 $k-1$ 的边割集, k 是满足上述条件的最小正整数, 记 G 的边连通度为 $\kappa'(G)$ 或 $\lambda(G)$ 。

定义3.6 设 G 是一个图, k 是正整数, 称 G 是 k -边连通的, 如果 $\kappa'(G) \geq k$ 。

设 $G=(V,E)$ 为一个图, 如果 E' 是 G 的边割集, 且 $|E'|=1$, i.e., $E'=\{e\}$, 则称 e 为 G 的一条割边。

定理3.1 设 $G=(V,E)$ 是一个图, 有

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$$

其中 $\delta(G) = \min\{d(v) | v \in V\}$ 。

证明: 设 v 是 G 中度最小的顶点, 即 $d(v) = \delta(G)$ 。
显然, v 是图 $G - \Phi(v)$ 的一个孤立点, 于是
有 $\kappa'(G - \Phi(v)) = 1$

下证 $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$

设 E' 是 G 的最小边割集, 即 $|E'| = \kappa'(G)$, 记

$$G - E' = G_1 \cup G_2$$

构造点集

$$V' = \{v \in V(G_1) \cap V(E')\} \text{ 和 } V'' = \{v \in V(G_2) \cap V(E')\}$$

则 V' 和 V'' 都是 G 的点割集, 设 $V^* = \min\{|V'|, |V''|\}$,
则

$$\kappa(G) \leq |V^*| \leq \kappa'(G) \leq ()$$

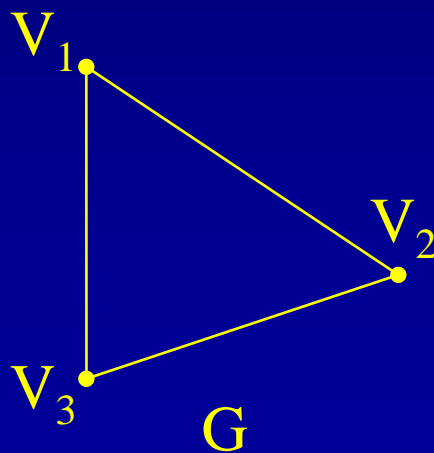
得证。

问题: 给定一个图 G , 如何求得 G 的点连通度和边连通度?

3.2 块 (block)

定义3.7 设 $G=(V, E)$ 为一个连通图, 称图 G 是一个块, 如果 G 不含有任何割点.

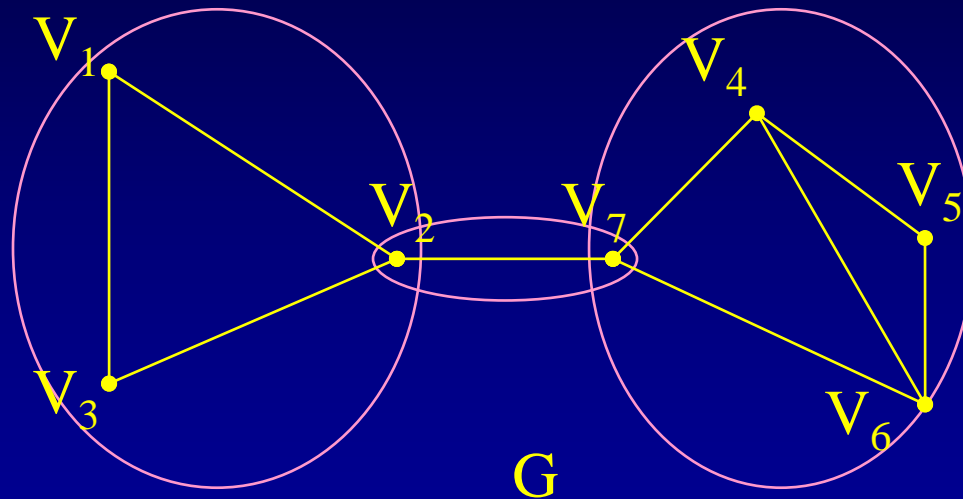
例如 下列图 G 是一个块.



一般地, 如果一个块的顶点数 (即 $|V| \geq 3$), 则它是2-连通图。

定义3.8: 设 $G=(V, E)$ 为一个图, B 是 G 的一个子图, 称 B 是 G 的一个块, 如果 B 是 G 的一个连通子图, 并且 B 作为子图不含有割点, 使得 B 中的顶点数达到最大 (极大), 即 B 是 G 的一个极大连通子图且不含有任何割点.

下列图G中含有3个块



图G作为块，具有如下一些性质：

1. 一条边是一个块当且仅当它是一条割边
2. 树的每一条边是树的一个块
3. 一个圈中的每一条边都不是该圈的一个块

命题：一个连通图中的两个块最多只有一个交点（反证法）。

定理3.2 下面命题是等价的:

1. G 是2-连通图;
2. G 是一个块;
3. G 中的任何两个顶点均在一个圈上;
4. G 中的任何一个顶点和任何一条边均在一个圈上;
5. G 中的任何两条边均在一个圈上。

注:该定理只是适用在2-连通图中,不能推广到 k -连通图的情形. 例如一个含有 k 个顶点的圈它是2-连通,不是 k -连通的.

定理3.3 设 $G=(V, E)$ 是一个图
($|V| \geq 3$)，下面的条件是等价的。

1. G 是2-连通图；
2. G 不含有割点；
3. G 中任意两个点都至少有两条内部点不交的路；
4. $\delta(G) \geq 2$ ， G 中任何两条边在同一个圈上。

定义3.9 设 $G = (V, E)$ 为一个图, $s, t \in V$ 为 G 中的两个点, P, Q 为 G 中连结点 s 与 t 的两条路, 称 P, Q 为 G 中两条内部(点)不交的路, 如果 $(P - \{s, t\}) \cap (Q - \{s, t\}) = \Phi$, i. e., 路 P, Q 除了 s 与 t 点以外, 没有其它的公共顶点。

定义3.10 设 $G = (V, E)$ 为一个图, $s, t \in V$ 为 G 中的两个点, P, Q 为 G 中连结 s 与 t 的两条路, 称 P, Q 为 G 中两条内部边不交的路, 如果 $E(P) \cap E(Q) = \Phi$, i. e., 路 P, Q 无公共边。

若 P 与 Q 是两条内部点不交的路, 则 P 与 Q 是两条内部边不交的路。

定理3.4 (Whitney) : 一个至少含有3个顶点的图 $G = (V, E)$ 是2-连通的 当且仅当 (if and only if, iff) 对图 G 中任意的两个顶点 u 、 v , 图 G 中至少存在两条内部点不交的路。

证明：（充分性）已知对于图 G 中任意的两个点 u, v 至少存在两条内部点不交的路。如果删除除 v 外的任何一个顶点，都不能分离 u 和 v 。这是因为对于每对 u, v 由已知条件可知，删除任何一个顶点后，图 G 仍然保持连通，故 G 是2-连通的。

（必要性）假设图 G 是2-连通图。任意的两个点 u, v ，我们对 u 到 v 的距离 $d(u, v)$ 用数学归纳法证明 u, v 在图 G 中都有两条内部点不交的路。

①当 $d(u, v)=1$ 时，因为 $k'(G) \geq k(G) \geq 2$ ，所以 $G-uv$ 是连通的，在图 $G-uv$ 中有一条 $u-v$ 的路，故 u, v 两个点在图 G 中有两条路：边 uv 与 $G-uv$ 中的 $u-v$ 路是内部点不交的路。

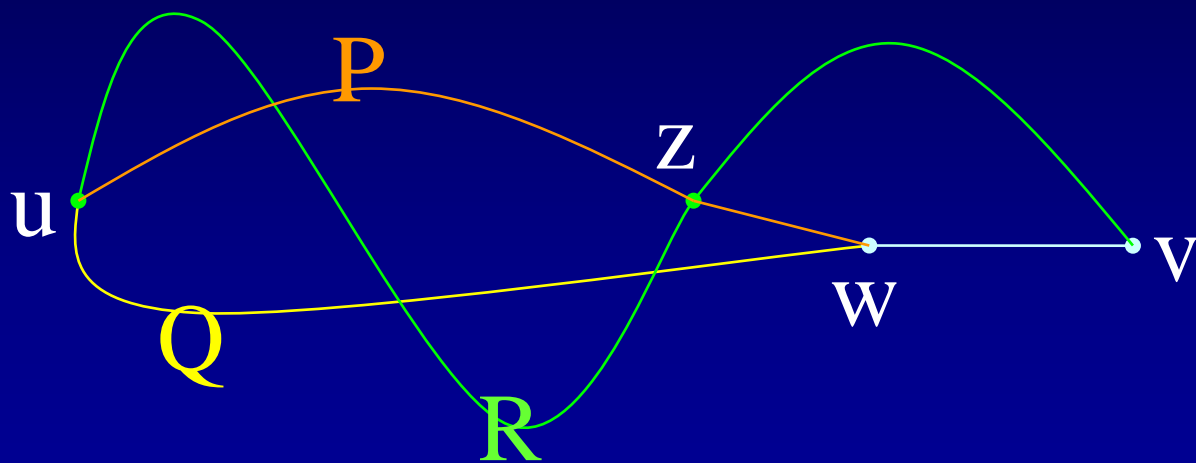
②假设 $d(u, v) = k-1$ 时, 结论成立, 这里 $k \geq 2$, 不妨设 $d(u, v) = k$, w 是 $u-v$ 的最短路上最靠近 v 的第一个点, 则有 $d(u, w) = k-1$, 由归纳假设则在 G 中有两条内部点不交的 $u-w$ 的路, 分别设为 P 与 Q 。

如果 $v \in V(P) \cup V(Q)$, 则结论成立。

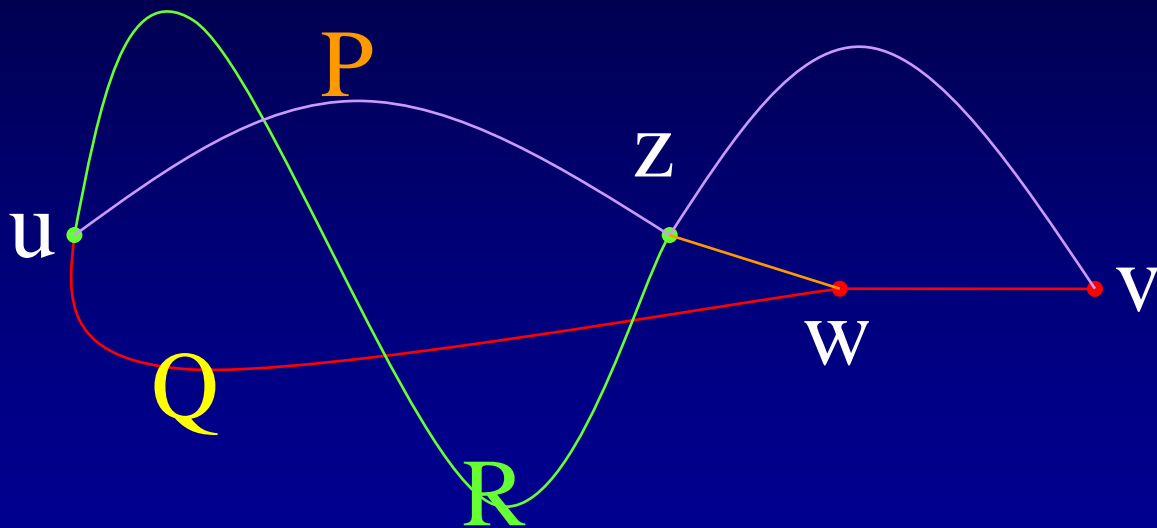
如果 $v \notin V(P) \cup V(Q)$, 因为 G 是2-连通图, $G-w$ 也是连通图且 $G-w$ 中有一条 $u-v$ 的路 R 。

- i 若 R 与 P 、 Q 不相交, 则结论成立。
- ii 若 R 与 P 、 Q 相交, 设 z 为 R 上最靠近 v 点且 $\in P \cup Q$ 。不妨设 $z \in P$ (否则设 $z \in Q$), 则我们可以得到两条内部点不交的 $u-v$ 路:

一条是在P上取u-z的路并上在R上取z-v的路；
另外一条是 $Q \cup wv$ 。如下图所示：



$u-v$ 的两条内部点不交的路为：用不同的颜色：
红色和紫色表示。



3.3 Menger型定理

问题：设有图 $G=(V,E)$ ， k 是正整数，如何判定 G 是 k -连通的（或 G 是 k -边连通的）？

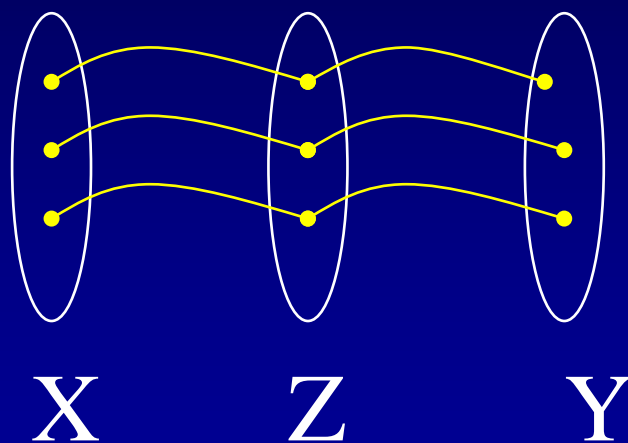
定义3.11 设 $G=(V, E)$ 是一个图，图 G 中两个顶点集 $X, Y \subseteq V$ ， P 是连结顶点 x, y 的一条路，其中 $x \in X, y \in Y$ ，如果路 P 的其它顶点均不属于 $X \cup Y$ ，称 P 是一条 X - Y 的路。特别地：当 $z \in X \cap Y$ ，则 z 自身就是一条 X - Y 的路（该路的长度为0）。

定义3.12 设 $X, Y, Z \subseteq V$ ，称 Z 为 X - Y 的分离集，如果任何一条 X - Y 的路均与 Z 相交。特别地： X （或 Y ）就是一个 X - Y 的分离集。

定义3.13 设 $G=(V, E)$ 为一个图, $s, t \in V$ 为图 G 中的两个点, P_i ($i=1, 2, \dots, k$) 为 G 中连结 s 与 t 的 k 条路, 称 P_i ($i=1, 2, \dots, k$) 为 G 中从 s 到 t 的 k 条内部点不交的路, 如果 $(P_i - \{s, t\}) \cap (P_j - \{s, t\}) = \Phi$, ($i \neq j, i, j=1, \dots, k$), i. e., 这 k 条路 P_1, \dots, P_k 中, 除了两个点 s, t 外, 路 P_1, \dots, P_k 均为无其它公共顶点。

定义3.14 设 $G=(V, E)$ 为一个图, P, Q 为图 G 中的两条路, 称 P, Q 为点不交的路, 如果 $P \cap Q = \Phi$.

定理3.5 (Menger定理) 设 $G = (V, E)$ 为一个图, k 是一个正整数, 对于图 G 中任意的两个点集 $X, Y \subseteq V$, 在 G 中存在 k 条点不交的 X - Y 的路 iff G 中每个 X - Y 的分离集至少包含 k 个顶点。



分离集 Z 中至少含有 k 个点。

证明: (必要性) 如果图 G 中任意的两个点集 $X, Y \subseteq V$, 在 G 中存在 k 条点不交的 X - Y 的路, 图 G 中任何 X - Y 的分离集必包含有每一条 X - Y 的路上至少一个点, 所以, 每个 X - Y 的分离集至少包含 k 个点。

(充分性) 不妨设 G 中存在 k 个点的 X - Y 分离集, 但不包含 $k-1$ 个点的 X - Y 分离集。

对 $\lambda(G) = |V(G)| + |E(G)|$ 采用数学归纳法。

① 存在一个 X - Y 分离集 Z , 使 $|Z|=k$ 且 $Z \neq Y, Z \neq X$ 。
令 G_{xz} (G_{yz}) 是由所有 X - Z 的路 (Y - Z 的路) 上的点生成的子图。因 Z 是一个 X - Y 分离集, 则

$$V(G_{xz}) \cap V(G_{yz}) \subseteq Z。$$

因 Z 是点数最小的 X - Y 分离集, 且 $Z \neq Y$, 于是存 $v \in Y - Z$, 且 $v \notin G_{xz}$, 所以 $\lambda(G_{xz}) < \lambda(G)$ 。此外, 因为 G_{xz} 中的 X - Z 分离集也是 G 中 X - Y 分离集, 所以 G_{xz} 中的每个分离集的点数 $\geq k$, 由归纳假设, 在 G_{xz} 中存在 k 条点不交的 X - Z 的路。同理, G_{yz} 中存在 k 条点不交的 Y - Z 的路。又因为 $|Z|=k$, 于是 G 中存在 k 条点不交的 X - Y 的路 (见构造图示)。

②每个包含 k 个点的 X - Y 分离集或者与 X 重合, 或者与 Y 重合。

不妨设, 某个分离集与 X 重合, 则 $|X|=k$, 若 $X \subseteq Y$, 则结论成立。

若 $X \not\subseteq Y$, 则存在 $x \in X - Y$ 。因 $X - \{x\}$ 不是分离集, 则存在一条边 xy , 使 $y \notin X$, 令 $G' = G - \{xy\}$, 则 $\lambda(G') < \lambda(G)$ 。

若 G' 的每个 X - Y 分离集至少有 k 个点, 由归纳假设结论成立。

若 G' 中包含 $k-1$ 个点 X - Y 的分离集 Z , 则 $Z \cup \{x\}$ ($Z \cup \{y\}$)是 G 中 X - Y 的分离集。因 G 中不含 $k-1$ 个点分离集, 则 $|Z \cup \{x\}| = |Z \cup \{y\}| = k$. 根据情况②的假设, 必有 $Z \cup \{x\} = X$ 和 $Z \cup \{y\} = Y$ 。于是 Z 中的每一个点是 X - Y 路, 加上边 xy 就得到 G 中 k 条点不交的 X - Y 路。

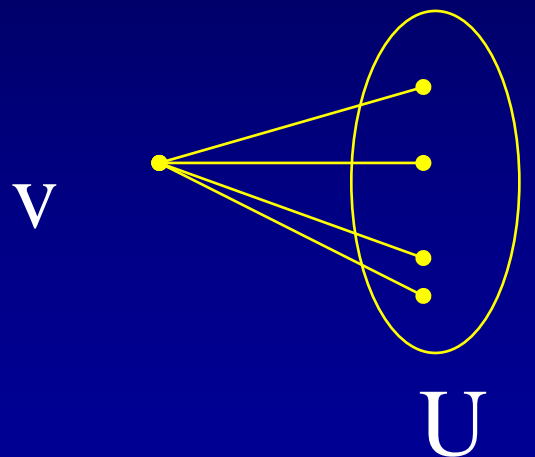
证毕

定理3.6 (Menger定理) 设 $G = (V, E)$ 为一个图, k 是正整数, 图 G 是 k -连通的iff 对于 G 中任意两点 $u, v \in V$, 在 G 中存在 k 条内部点不交的路。

定理3.7 (Menger定理) 设 $G = (V, E)$ 为一个图, k 是正整数, 图 G 是 k -边连通的iff 对于 G 中任意两点 $u, v \in V$, 在 G 中存在 k 条内部边不交的路。

扇 (Fan)

定义3.14 设 $G = (V, E)$ 为一个图，点集 $U \subset V$ ， $v \in V - U$ ，所谓 v - U 扇是指存在 $|U|$ 条 v - u (任意 $u \in U$) 路的集合，使得任何两条路仅有一个公共顶点 v 。



v - U 扇

定理3.8 设 $G = (V, E)$ 为一个图, 则 G 是 k -连通图 iff 对于任何 k 个点的集合 $U \subset V$ 及 $v \in V - U$, 总存在 $v-U$ 扇。

引理3.9 如果 G 是一个 k -连通图, 在图 G 中增加一个新的点 y 及与 y 相邻的 k 条边后得到一个新图 G' , 则图 G' 是 k -连通的

定理3.8的证明: (必要性) G 是 k -连通图, 在 G 中任意取一个点 $v \in V$, 及含有 k 个点的点集 U , 且 $v \notin U$ 。在原图 G 上构造一个新图 G' : 即在图 G 中增加一个新点 y , 并增加 k 条边使得 y 与 U 中的每一个点都有一条边相邻

则新图 G' 仍是 k -连通图。因此, $v-y$ 有 k 条内部点不交的路, 删除所增加的 y 点和 k 条与 y 相邻的边, 得到一个 $v-U$ 的扇。

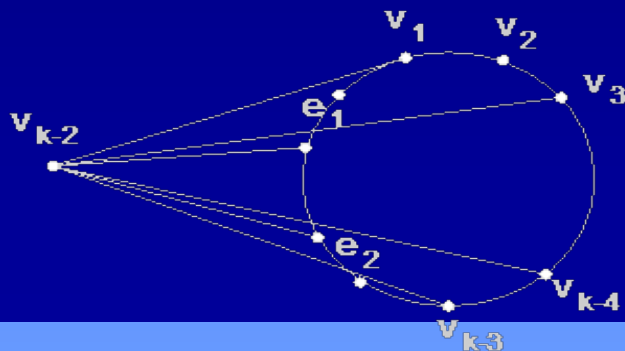
(充分性) 由条件知, 在 G 中任意取一个点 $v \in V$, 及含有 k 个点的点集 U , 且 $v \notin U$, 都有 $v-U$ 的扇, 所以 $\delta(G) \geq k$ 。在图 G 中, 任取 w 点及 $N(w)$, 且 $|N(w)| = k$, 由已知条件, 任意取 $z \notin N(w) \cup \{w\}$, 则形成 $z-N(w)$ 扇, 故存在 $w-z$ 的 k 条内部点不交的路, 再由 w 与 z 的任意性, 知 G 是 k -连通图。

定理3.10 若图 G 是 k -连通图, 则 G 中任何两条边 e_1, e_2 及任何 $k-2$ 个点 v_1, v_2, \dots, v_{k-2} 一定在一个圈上。

证明: 对 k 用归纳法

当 $k=2$ 时, G 是2-连通图, 由Menger定理(或定理3.3)可得证。

当 $k \geq 3$ 时, 不妨设这 $k-2$ 个点不是 e_1, e_2 的端点。因 G 是 k -连通的, 则 $G-v$ 是 $(k-1)$ -连通的。于是存在圈 μ 包含 e_1, e_2 及 $k-3$ 个点 v_1, v_2, \dots, v_{k-3} 。利用定理3.8的结论存在一个 $v_{k-2}-\mu$ 扇。如图所示:



在上图中容易找到一个圈包含 e_1, e_2 及 v_1, v_2, \dots, v_{k-2} 。

定理3.11 设 $G=(V, E)$ 是 k -连通图，对于任意 k 个点 v_1, v_2, \dots, v_k ，存在一个圈包含这 k 个点。

可以利用上面定理证明过程中找圈的方法来证明此定理。

3.4 网络流理论及其应用

网络流理论包含很多有效的算法，如最大流算法等，并有很多的实际应用。这里，利用定理6-7与最大流算法，来解决如何判断一个图是 k -连通图或是 k -边连通图的问题。

3.4.1 最大流问题

定义3.15 设有一个网络（有向图） $N=(V, A; c; s, t)$ ，其中 $c: A \rightarrow \mathbb{R}^+$ ，对于任意的 $e \in A$ ，有一个常数 $c(e)$ （称为弧 e 的容量），且网络中有一个发点（source vertex） s ，一个收点（sink vertex） t ，即 $s, t \in V$ 。如果存在一

个函数 $f: A \rightarrow R^+$, 满足以下条件:

①网络中任意一条弧 $e \in A$, 有 $0 \leq f(e) \leq c(e)$

②对于网络中任何除 s, t 以外的节点 $u \in V - \{s, t\}$, 有:

$$\sum_{v: (u, v) \in A} f(u, v) = \sum_{v': (v', u) \in A} f(v', u)。$$

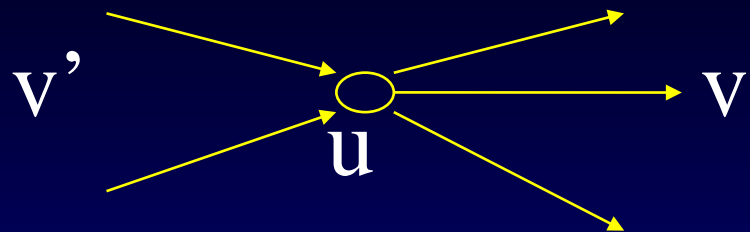
称 f 是 N 中从 s 到 t 的一个可行流 (feasible flow), 并称点 u 为平衡点。

如果 f 是可行流, 记:

$$v(f) = \sum_{u: (s, u) \in A} f(s, u) - \sum_{v: (v, s) \in A} f(v, s),$$

称 $v(f)$ 为流 f 从 s 点到 t 点的流量 (值)。

易知, $f \equiv 0$ 是一个可行流 (零流)。

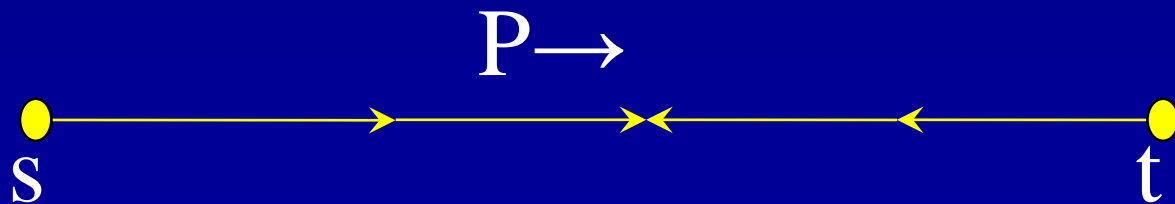


$$\sum_{v:(u,v) \in A} f(u,v) = \sum_{v':(v',u) \in A} f(v',u)$$

流的平衡点示意图

最大流问题：设有网络 $N = (V, A; c; s, t)$ ，如何求 N 上的一个（可行）流 f ，使 $v(f)$ 达到最大？或者使得 $v(f) = k$, k 为给定的正整数。

设 P 是网络 N 的基础图中从 s 到 t 的路，它对应于 N 中的点弧交错序列，规定路 P 的方向是从 s 到 t 的方向。若一条弧 $e \in A$ ，在 P 上出现的方向如果与 P 的方向相同，称 e 为正向弧（ P^+ ），否则称 e 为反向弧（ P^- ）。



具有顶点和弧容量限制的最大流问题

定义3.16 设有网络 $N = (V, A; c, c'; s, t)$, 这里 $c: A \rightarrow R^+$, $c': V \rightarrow R^+$, 如果存在 $f: A \rightarrow R^+$ 满足:

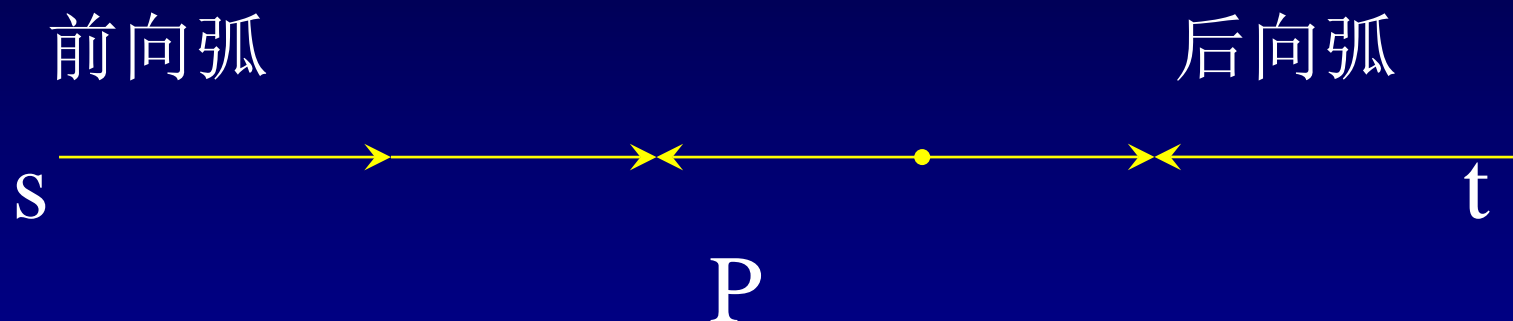
$$0 \leq f(a) \leq c(a) \quad \forall a \in A$$

$$\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{a \in A} c(a)$$

$$0 \leq f(a) \leq c(a) \quad \forall a \in A$$

称 f 为一个 (可行) 流。

定义：设有网络 $N = (V, A; c; s, t)$ ， f 是 N 上的一个 $s \rightarrow t$ 的流。 P 是 N 的基础图中 s 到 t 的路，称 P 是 N 中从 s 到 t 的增广路。如果：



- ①对于路 P 上任意的正向弧 $e \in P^+$ ，有 $f(e) < c(e)$
- ②对于路 P 上任意的正向弧 $e' \in P^-$ ，有 $f(e') > 0$

定理3.12 设 $N = (V, A; c; s, t)$ 为一个网络， f 是 N 上的一个流，则 f 是 N 中从 s 到 t 的最大流 iff 网络 N 中不存在关于流 f 的增广路。

利用反圈法来寻找增广路 (Ford—Fulkerson)

①初值: $X^{(0)} = \{s\}$, $f(e) = 0$

②选弧条件:

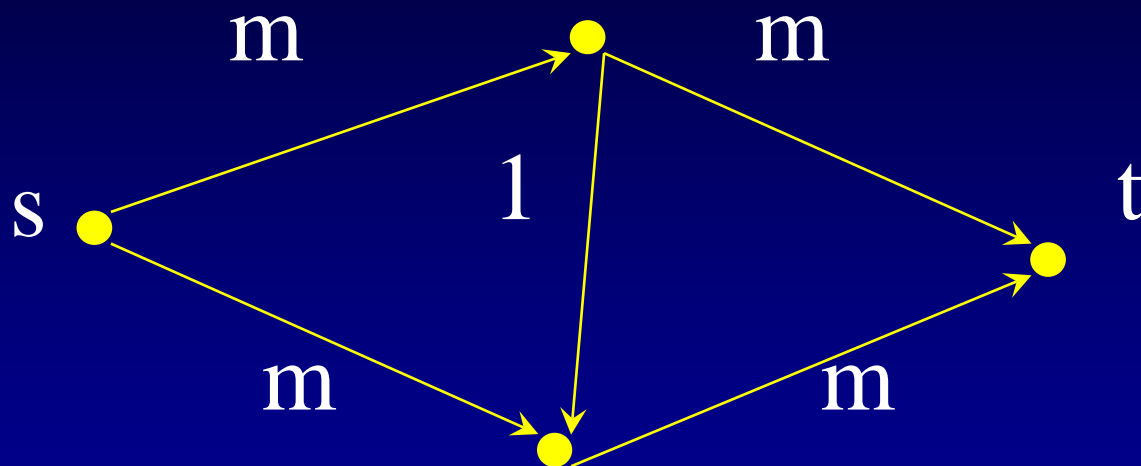
选边 $e = (u, v) \in \phi^+(X^{(k)})$, 有 $f(u, v) < c(u, v)$;

选边 $e' = (u', v') \in \phi^-(X^{(k)})$, 有 $f(u', v') > 0$

③终止条件:

当 $t \in X^{(k)}$ 时, 找到一条或多条增广路; 当 $t \notin X^{(k)}$ 且在 $\phi^+(X^{(k)})$ 或 $\phi^-(X^{(k)})$ 中无弧可选, 此时, f 已为最大流。

但是Ford—Fulkerson算法不是一个“好算法”，我们可以看下面一个例子。



Edmonds和Karp在找增广路的过程中增加限制条件：寻找弧数最小的增广路（最短增广路）

定理3.13 设 $N = (V, A; c; s, t)$ 为一个网络，利用Ford-Fulkerson算法或Edmonds-Karp算法能够求得 N 上的最大流；并且，当容量函数 c 是整数函数时，能够求得 N 上的整数最大流。

3.4.2 最大流算法的应用

应用1 设 $D = (V, A)$ 为一个有向图， s, t 为 D 中固定顶点， k 是固定正整数，如何在 D 中求出从 s 到 t 的 k 条内部弧不交的有向路？

构造网络 $N = (V, A; c; s, t)$ ，对任意的弧 e ，取 $c(e)=1$ ，利用Ford-Fulkerson算法或Edmonds-Karp算法能够求得 N 上流量值为 k 的流 f （如果最大流的流值至少为 k ）；由定理3.13保证流 f 是整数流。

注意到所有弧 e 满足 $c(e)=1$ ，说明 $f(e)=0,1$ ，于是把满足 $f(e)=1$ 的弧 e 取出，构成集合 A^* ，进而就得到从 s 到 t 的 k 条内部弧不交的有向路。

应用2 设 $G = (V, E)$ 为一个无向图， s, t 为 G 中固定顶点， k 是固定正整数，如何在 G 中求出从 s 到 t 的 k 条内部边不交的无向路？

构造一个有向图 $D = (V, A)$ ，对 G 中的每一条边 e ，在 D 中构造两条弧 e' 和 e'' ，并取每条弧的容量为1，利用Edmonds-Karp算法能够求得 N 上流量值为 k 的流 f （如果最大流的流值至少为 k ）；由定理3.13保证流 f 是整数流。

注意到所有弧 e 满足 $c(e) = 1$ ，说明 $f(e) = 0, 1$ ，于是把满足 $f(e) = 1$ 的弧 e 取出，构成集合 A^* ，进而就得到从 s 到 t 的 k 条内部弧不交的有向路，把集合 A^* 中的弧对应到 E 中的边，就得到 G 中从 s 到 t 的 k 条内部边不交的无向路。

应用3 如何判断一个图是 k -边连通图？

利用定理3.7: (Menger定理) 设 $G = (V, E)$ 为一个图, k 是正整数, 图 G 是 k -边连通的iff 对于 G 中任意两点 $u, v \in V$, 在 G 中存在 k 条内部边不交的路。

对图 G 中任意两个定点 s 和 t , 利用应用2中的方法, 如果都存在 k 条内部边不交的路, 则 G 是 k -边连通图; 否则 G 不是 k -边连通图。

应用4 设 $D = (V, A)$ 为一个有向图, s, t 为 D 中固定顶点, k 是固定正整数, 如何在 D 中求出从 s 到 t 的 k 条内部点不交的有向路?

方法1: 可以构造网络 N , 使得网络 N 的顶点与弧全具有单位1的容量限制, 然后修改Ford-Fulkerson算法或Edmonds-Karp算法能够求得 N 上流量值为 k 的流 f (如果最大流的流值至少为 k) ; 由定理3.13保证流 f 是整数流。

注意到所有顶点与弧全具有单位1的容量限制, 说明 $f(e) = 0, 1$, 于是把满足 $f(e) = 1$ 的弧 e 取出, 构成集合 A^* , 进而就得到从 s 到 t 的 k 条内部点不交的有向路。

方法2: 可以构造网络 N , 把原来有向图 D 中的每个定点 v 对应到 N 中的两个顶点 v' , v'' , 并构造一条弧 (v', v'') , 对于原来有向图 D 中的每个定点 v , 如果有弧 (u, v) , 在 N 中构造弧 (u'', v') , 如果有弧 (v, u) , 在 N 中构造弧 (v'', u') , 使得网络 N 的弧全具有单位1的容量限制, 然后利用Ford-Fulkerson算法或Edmonds-Karp算法能够求得 N 上流量值为 k 的流 f (如果最大流的流值至少为 k); 由定理3.13保证流 f 是整数流。

注意到所有弧全具有单位1的容量限制, 说明 $f(e) = 0, 1$, 于是把满足 $f(e) = 1$ 的弧 e 取出, 构成集合 A^* , 再对应到原来有向图 D 中的有向路, 进而就得到从 s 到 t 的 k 条内部点不交的有向路。

应用5 设 $G = (V, E)$ 为一个无向图， s, t 为 G 中固定顶点， k 是固定正整数，如何在 G 中求出从 s 到 t 的 k 条内部点不交的无向路？

构造一个有向图 $D = (V, A)$ ，对 G 中的每一条边 e ，在 D 中构造两条弧 e' 和 e'' ，并取每个顶点和每条弧的容量为1，利用Edmonds-Karp算法能够求得 N 上流量值为 k 的流 f （如果最大流的流值至少为 k ）；由定理3.13保证流 f 是整数流。

利用应用4的方法，就得到 G 中从 s 到 t 的 k 条内部点不交的无向路。

应用6 如何判断一个图是 k -点连通图？

利用定理3.6: (Menger定理) 设 $G = (V, E)$ 为一个图, k 是正整数, 图 G 是 k -点连通的iff 对于 G 中任意两点 $u, v \in V$, 在 G 中存在 k 条内部点不交的路。

对图 G 中任意两个定点 s 和 t , 利用应用5中的方法, 如果都存在 k 条内部点不交的路, 则 G 是 k -点连通图; 否则 G 不是 k -点连通图。