

# MATH-H-304 : Automatique

Jérôme Antoons

June 24, 2013

# Chapter 1

## Modèle dynamique

Un modèle dynamique est un modèle qui permet de caractériser la réponse d'un système en terme de temps de réponse, de l'importance de l'entrée sur la sortie, le retard, etc. Pour la modélisation, on peut soit se baser sur un ensemble de lois physique, soit se baser sur l'expérimentation. On peut aussi passer par une méthode hybride utilisant des lois physique connues, mais faisant appel à l'expérience pour déterminer certains paramètres.

Il y a deux types de modèle : les modèles temporels et les modèles fréquentiel. Il est toujours bon de savoir passer d'un modèle à l'autre.

On tentera dans ce chapitre de trouver des méthodes le permettant. On tentera également de déterminer des informations sur la structure de la fonction de transfert sur base de données expérimentale (réponse impulsionnelle ou indicielle). On essayera aussi de déterminer des modèles de comportement de systèmes non linéaires autour d'une certaine position d'équilibre.

### 1.1 Modèle dynamique - Modèle entrée-sortie

#### 1.1.1 Convolution et réponse indicielle

On considère un système linéaire et permanent causal (SLP). La réponse d'un tel système à une entrée  $u(t)$  est donnée par

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = h(t) * u(t) \quad (1.1)$$

qui est le produit de convolution entre l'entrée  $u(t)$  et la réponse impulsionnelle du SLP  $h(t)$ . On peut le prouver en montrant que  $y(t) = h(t)$  si  $u(t) = \delta(t)$  (impulsion de Dirac). La réponse impulsionnelle caractérise donc entièrement le système. Dans la cas d'un système causal, on aura  $h(t) = 0$  pour tout  $t < 0$ . Par le propriétés de la transformée de Laplace bilatéral (voir MATH-H-201), on aura alors

$$Y(p) = H(p)U(p) \quad (1.2)$$

où  $H(p)$  est appelée fonction de transfert du système ou transmittance isomorphe. Pour un système causal, la région de convergence de  $H(p)$  est le demi-plan droit à droite du pôle le plus à droite et

$$\mathcal{L}(h(t)) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-pt}dt \quad (1.3)$$

La réponse indicielle du système est la réponse à un échelon unitaire

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\nu(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau \quad (1.4)$$

Il s'agit donc de l'intégrale de la réponse impulsionnelle, i.e.

$$S(p) = \frac{H(p)}{p} \quad (1.5)$$

### 1.1.2 Transmittance isochrone et réponse harmonique

Lorsque l'axe imaginaire appartient à la région de convergence de  $H(p)$ , on peut définir la transmittance isochrone (ou réponse en fréquence) en remplaçant  $p$  par  $j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \quad (1.6)$$

Sur base de cette définition, on peut déterminer la réponse d'un système à une entrée sinusoïdale (voir MATH-H-201)

$$y(t) = A|H(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \gamma + \arg(H(j\omega_0))) \quad (1.7)$$

si l'entrée était  $u(t) = A \sin(\omega_0 t + \gamma)$ .

## 1.2 Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale

Ces théorèmes permettent de déterminer des informations sur la fonction de transfert d'un SLP sur base de sa réponse impulsionnelle ou indicielle. Le théorème de la valeur finale permet de déterminer le gain statique d'un système stable à partir de sa réponse indicielle (dans le cas d'intégrateur, on utilisera plutôt la réponse impulsionnelle, seule à converger). Le théorème de la valeur initiale quand à lui informe sur le degré relatif de la fonction de transfert d'un SLP à partir de sa réponse indicielle.

### 1.2.1 Théorème de la valeur finale

Soit  $Y(p) = G(p)e^{\alpha p}$ , une fonction de transfert qui prend la forme d'une fraction rationnelle dont le degré du dénominateur est supérieur ou égal à celui du numérateur (et éventuellement présent un certain temps mort). Si tous les pôles de  $pY(p)$  ont une partie réelle négative et si  $y(t)$  est une fonction nulle pour  $t < -\alpha$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) \quad (1.8)$$

Si on prend comme exemple la réponse indicielle d'un ampli-op

$$S(p) = \frac{A_0}{1 + RCp} \frac{1}{p} \quad (1.9)$$

on aura par le théorème

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = A_0 \quad (1.10)$$

qui est la réponse statique de l'ampli-op. Attention, si on avait une fonction de transfert de la forme  $Y(p) = \frac{3}{p(p-2)}$  par exemple : On aurait un pôle situé en  $p = 2$  qui ne possède pas une partie réelle négative. On ne peut donc pas appliquer le théorème dans ce cas-là. D'ailleurs, si on le fait, on finit par tomber sur une réponse incohérente.

### 1.2.2 Théorème de la valeur initiale

Soit  $Y(p)$  une fraction rationnelle avec le degré du numérateur inférieur ou égal au degré du dénominateur, alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pY(p) \quad (1.11)$$

Toujours pour notre ampli-op, on peut déterminer la pente de sa fonction de transfert en  $t = 0^+$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{A_0}{1 + RCp} = \frac{A_0}{RC} \quad (1.12)$$

On constate que la pente n'est pas nulle. Cela est dû au fait que le degré relatif de la fonction de transfert vaut un. Si il était supérieur, alors la pente serait nulle.

## 1.3 Modélisation interne et externe

### 1.3.1 Modélisation par une équadiff ou un système d'équadiff

La description interne du système se fait à l'aide d'un système d'EDO du premier ordre faisant intervenir les variables physique interne du système ou des grandeurs auxiliaire sans signification physique. C'est la description en variables d'état. La description externe se fait à l'aide d'EDO ne faisant intervenir que les grandeurs d'entrée et de sortie du système.

La forme générale d'un modèle en variable d'état pour un SLP est donnée par

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.13)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.14)$$

où  $x(t)$  est le vecteur d'état,  $u(t)$  le vecteur des entrées ou vecteur réglant,  $y(t)$  est le vecteur de sortie ou vecteur réglé,  $A$  est la matrice du système,  $B$  est la matrice d'entrée,  $C$  est la matrice de sortie et  $D$  est la matrice d'action directe.

On peut remarquer que la connaissance de  $x(t_0)$  permet de déterminer  $y(t)$  pour  $t > t_0$  si on connaît  $u(t)$  pour  $t > t_0$ .  $x(t_0)$  est donc l'information minimale à fournir pour pouvoir calculer l'évolution du système sans devoir se référer à la valeur de  $u(t)$  antérieur à  $t_0$ .

## Chapter 2

# Etudes des modèles en variable d'état

### 2.1 Concept de base

#### 2.1.1 Linéarisation

La forme générale pour un système non linéaire peut être donné par

$$\dot{X}(t) = f(X(t), U(t)) \quad (2.1)$$

$$Y(t) = g(X(t), U(t)) \quad (2.2)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonction de classe  $C^\infty$  par rapport à  $X$  et  $U$ . En un point d'équilibre, on aura

$$0 = f(X_0, U_0) \quad (2.3)$$

$$Y_0 = g(X_0, U_0) \quad (2.4)$$

On peut alors essayer de linéariser le système autour de ce point d'équilibre (en se soumettant à l'hypothèse des petit mouvement). Ainsi, on pourra la décrire par un modèle en variable d'état linéaire plus simple à manipuler. On aura donc

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.5)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.6)$$

où  $x(t) = X(t) - X_0$ ,  $u(t) = U(t) - U_0$  et  $y(t) = Y(t) - Y_0$ . Si on développe autour du point d'équilibre, on aura

$$\dot{X}(t) = f(X(t), U(t)) \quad (2.7)$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}(t) + \dot{X}_0 = f(x(t) + X_0, u(t) + U_0) = f(X_0, U_0) + \frac{\partial f}{\partial X}x(t) + \frac{\partial f}{\partial U}u(t) \quad (2.8)$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.9)$$

où on identifie  $A = \frac{\partial f}{\partial X}$  et  $B = \frac{\partial f}{\partial U}$ . On peut faire la même chose pour la deuxième ligne et on trouvera que  $C = \frac{\partial g}{\partial X}$  et  $D = \frac{\partial g}{\partial U}$ .

#### 2.1.2 Solutions des équations d'état dans la cas linéaire

Si on définit l'exponentielle matricielle par

$$\exp At = I_n + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^n \frac{t^n}{n!} + \dots \quad (2.10)$$

alors, on peut montrer que la solution de l'équation (2.5) est donné par

$$x(t) = \exp(At)x_0 + \int_0^t \exp(A(t - \tau))Bu(\tau)d\tau \quad (2.11)$$

On peut facilement démontrer ce résultat en l'introduisant dans l'équation.

### 2.1.3 Passage d'une fonction en variables d'état à une fonction de transfert

Par la définition de la transformée de Laplace unilatérale, on peut transformer directement les équation en variable d'état

$$pX(p) - x_0 = AX(p) + BU(p) \quad (2.12)$$

$$Y(p) = CX(p) + DU(p) \quad (2.13)$$

On peut réorganiser la première ligne pour obtenir

$$(pI_n - A)X(p) = x_0 - BU(p) \quad (2.14)$$

d'où

$$X(p) = (pI_n - A)^{-1}x_0 + (pI_n - A)^{-1}BU(p) \quad (2.15)$$

Et si on suppose la condition initiale nulle ( $x_0 = 0$ ) et qu'on remplace dans la deuxième équation, on trouve finalement

$$Y(p) = C(pI_n - A)^{-1}BU(p) + DU(p) \quad (2.16)$$

La fonction de transfert est donc donnée par

$$H(p) = \frac{C \text{Adj}(pI_n - A)B + D \det(pI_n - A)}{\det(pI_n - A)} \quad (2.17)$$

## 2.2 Passage d'une fonction de transfert à un modèle en variable d'état

Soit un fonction de transfert

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} \quad (2.18)$$

strictement propre, i.e. le degré du dénominateur est strictement supérieur à celui du numérateur. Pour passer à la description en variable d'état, on commence par écrire la lien entre  $Y(p)$  et  $U(p)$  (ici dans le cas d'un degré 3)

$$(p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3)Y(p) = (b_1p^2 + b_2p + b_3)U(p) \quad (2.19)$$

Ensuite, on divise par la puissance maximale de  $p$

$$Y(p) = -a_1 \frac{Y(p)}{p} - a_2 \frac{Y(p)}{p^2} - a_3 \frac{Y(p)}{p^3} + b_1 \frac{U(p)}{p} + b_2 \frac{U(p)}{p^2} + b_3 \frac{U(p)}{p^3} \quad (2.20)$$

et de là, on construit le schéma fonctionnel de la Figure 2.1. On peut alors déduire de ce schéma les équation en variables d'état suivantes

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.21)$$

$$y(t) = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

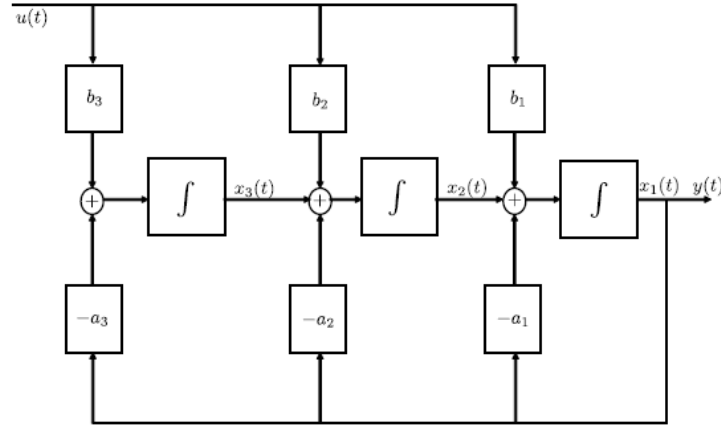


Figure 2.1: Schéma fonctionnel

### 2.2.1 Cas où le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur

Soit

$$H(p) = \frac{b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3} \quad (2.23)$$

Il faut dans ce cas revenir au cas strictement propre en isolant le terme d'action direct

$$H(p) = b_0 + \frac{(b_1 - b_0 a_1)p^2 + (b_2 - b_0 a_2)p + (b_3 - b_0 a_3)}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3} = b_0 + H_{sp}(p) \quad (2.24)$$

Dans ce cas, la relation entrée sortie est donnée par

$$Y(p) = b_0 U(p) + H_{sp}(p)U(p) \quad (2.25)$$

et avec la relation en variable d'état, on aura  $H_{sp}(p) = C(pI_n - A)^{-1}B$  et  $D = b_0$ .

## 2.3 Notion d'observabilité et de gouvernabilité

### 2.3.1 Détermination de l'état initial - Observabilité

Si on a un modèle en variable d'état associé à une EDO d'ordre  $n$

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots = b_1 u^{(n-1)}(t) + \dots \quad (2.26)$$

dont les conditions initiales sont caractérisées par

$$y(0) = y_0, \dot{y}(0) = y_0^1 \dots y^{(n-1)}(0) + y_0^{n-1} \quad (2.27)$$

on peut alors se demander comment faire pour déduire l'état initial correspondant à  $x(0)$ . Si le SLP est décrit par un modèle en variables d'état, on aura successivement

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.28)$$

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) + D\dot{u}(t) = CAx(t) + CBu(t) + D\dot{u}(t) \quad (2.29)$$

$$\ddot{y}(t) = CA\dot{x}(t) + CB\dot{u}(t) + D\ddot{u}(t) = CA^2x(t) + CABu(t) + CB\dot{u}(t) + D\ddot{u}(t) \quad (2.30)$$

Si on réécrit cela sous forma matricielle, on verra apparaître une matrice qui fait le lien entre les différentes dérivées de  $y(t)$  et  $x(t)$  d'une part et une deuxième matrice qui fait le lien entre les

dérivée de  $y(t)$  et les dérivées de  $u(t)$ . Pour ce qui est de la première, on lui donne le nom de matrice d'observabilité et on l'écrit

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

il s'agira d'une matrice  $n \times n$  dans le cas d'un système à une seule sortie. Si on note  $\mathcal{Y}(t)$  la matrice des dérivées de  $y(t)$  et qu'on suppose que  $u(t) = 0 \forall t$ , on a alors

$$\mathcal{Y}(t) = \mathcal{O}x(t) \quad (2.32)$$

On remarque alors que pour tout  $\mathcal{Y}(0)$ , il est possible de déterminer la valeur de  $x(0)$  ssi

$$\text{rang}(\mathcal{O}) = n \quad (2.33)$$

i.e. les ligne de  $\mathcal{O}$  sont linéairement indépendant et permettent donc d'engendrer n'importe quel vecteur  $\mathcal{Y}(0)$  dans  $\mathbb{R}$ . On détermine donc la condition nécessaire et suffisante d'observabilité: *Un SLP est observable ssi*

$$\text{rang}(\mathcal{O}) = n \quad (2.34)$$

### Remarque

L'entrée n'intervient pas dans les notion d'observabilité.

Une définition plus classique de l'observabilité est de dire qu'on peut construire de façon univoque l'état  $\{x(t); t > 0\}$  à partir du modèle  $\{A, B, C\}$  et des trajectoire de l'entrée et de la sortie.

### 2.3.2 Amener l'état à une valeur donnée - Gouvernabilité ou commandabilité

Par définition, un SLP est gouvernable s'il est possible d'amener l'état d'une valeur initial  $x(0) = x_0$  à une valeur final  $x(T) = x_1$  à l'aide d'une fonction  $u(t)$  pour  $0 \leq t \leq T$ , appropriée (typiquement une fonction continue par morceaux).

On peut réécrire la solution générale d'un système décrit par un modèle ne variable d'état sous la forme

$$q = x_1 - \exp(At)x_0 = \int_0^T \exp(A(T - \tau))Bu(\tau)d\tau \quad (2.35)$$

On peut alors supposer que la gouvernabilité du système dépendra d'une certaine matrice  $\mathcal{C}$  qu'on peut définir par

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{(n-1)}B] \quad (2.36)$$

On peut même supposer la condition nécessaire et suffisant suivante : *Un SLP est gouvernable ssi*

$$\text{rang}(\mathcal{C}) = n \quad (2.37)$$

### Démonstration de la CN

Si on suppose que le rang de  $\mathcal{C}$  est inférieur à  $n$ , i.e. qu'il existe un  $\gamma$  tel que

$$\gamma' \mathcal{C} = 0 \quad (2.38)$$

En reprenant l'expression (2.35) avec  $q = \gamma$ , on aura

$$\gamma' \gamma = \int_0^T \gamma' \exp(A(T - \tau))Bu(\tau)d\tau \quad (2.39)$$



Notons que

$$\gamma' \exp(A(T - \tau))B = \gamma'B + \gamma'AB + \dots = 0 \quad (2.40)$$

puisque  $\gamma'C = 0$  et les termes en puissance de  $A$  supérieur à  $n$  sont nuls par le théorème de Cayley-Hamilton. Il en reste que  $\gamma'\gamma = 0$  ou encore que  $\gamma = 0$  ce qui est une contradiction. On ne peut donc pas trouver de valeur  $u(t)$  qui mène à  $\gamma \neq 0$ . Le système est donc ingouvernable.

## 2.4 Changement de variables d'état

On considère un système décrit par un modèle en variable d'état pour lequel  $x(0) = x_0$ . On peut exercer un changement de variable d'état

$$x(t) = T\tilde{x}(t) \quad (2.41)$$

où  $T$  est une matrice carrée régulière (non singular en anglais). Par substitution dans les équations d'état, on a

$$T\dot{\tilde{x}}(t) = AT\tilde{x}(t) + Bu(t) \quad (2.42)$$

$$y(t) = CT\tilde{x}(t) + Du(t) \quad (2.43)$$

ou encore

$$\dot{\tilde{x}}(t) = T^{-1}AT\tilde{x}(t) + T^{-1}Bu(t) \quad (2.44)$$

$$y(t) = CT\tilde{x}(t) + Du(t) \quad (2.45)$$

où on aura comme condition initiale que

$$\tilde{x}(0) = Tx_0 = \tilde{x}_0 \quad (2.46)$$

On remarque donc le fait intéressant qu'à partir d'une représentation en variable d'état, on peut en déduire une infinité d'autre par transformation de similitude.

## 2.5 Réalisation minimale

### 2.5.1 Forme modale

On prend comme hypothèse que la matrice  $A$  possède des valeurs propres distinctes. La forme modale consiste à mettre cette matrice sous sa forme diagonal par le changement de variables

$$x(t) = Lx_d(t) \quad (2.47)$$

où  $L$  est la matrice formée de vecteurs propres de  $A$ . La forme modale des équation d'état est donc donnée par

$$\dot{x}_d(t) = L^{-1}ALx_d(t) + L^{-1}Bu(t) \quad (2.48)$$

$$y(t) = CLx_d(t) + Du(t) \quad (2.49)$$

On prendra l'habitude des notations suivantes

$$\Lambda = L^{-1}AL; \quad B_d = L^{-1}B \quad \text{et} \quad C_d = CL \quad (2.50)$$

On peut alors remarquer que dans la forme modale, la matrice de gouvernabilité sera donné par

$$C_d = L^{-1}C \quad (2.51)$$

n.b. attention aux ambiguïtés, la matrice de gouvernabilité se construit à partir de  $B$  et pas de  $C$ . On peut alors se rendre compte que

$$\text{rang}(C_d) = \text{rang}(C) \quad (2.52)$$

Ceci signifie que la gouvernabilité du système n'est pas affectée par une transformation de similitude. Par construction, on peut montrer que la matrice de gouvernabilité peut être exprimée par

$$C_d = \begin{pmatrix} b_{d1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{d2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{dn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

On remarque donc que la CNS de gouvernabilité sera remplie pour autant que tous les termes de  $B_d$  sont non-nuls. Par un raisonnement similaire, on peut montrer que tous les termes de  $C_d$  doivent être non-nuls pour remplir la CNS d'observabilité ainsi que le fait que l'observabilité n'est pas affectée par un changement de similitude.

### 2.5.2 Fonction de transfert

La fonction de transfert en forme modale est donnée par

$$H(p) = C_d(pI_n - \Lambda)^{-1}B_d = \sum_{i=1}^n \frac{c_{di}b_{di}}{p - \lambda_i} = C(pI_n - A)^{-1}B \quad (2.54)$$

On voit donc que si un des termes  $c_{di}$  ou  $b_{di}$  est nul, il y a une simplification entre le dénominateur et le numérateur de la fonction de transfert (une simplification pôle-zéro). On dit alors que  $H(p)$  n'est pas irréductible. De manière générale, on dira donc que : *Un système caractérisé par une fonction de transfert  $H(p)$  d'ordre  $n$  peut être décrit par un modèle en variable d'état d'ordre  $n$  gouvernable et observable ssi  $H(p)$  est irréductible.* En d'autres termes, si on détermine une réalisation d'ordre supérieur à  $n$  pour une fonction de transfert irréductible d'ordre  $n$ , cette réalisation sera inobservable et/ou ingouvernable. Elle aura le même comportement qu'une réalisation d'ordre  $n$  pour une condition initiale nulle, mais risque d'avoir un état ingouvernable et/ou inobservable instable.

### Illustration numérique de la simplification pôle-zéro

Prenons la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{(p-1)}{(p-1)(p+1)} \quad (2.55)$$

On peut la considérer comme la mise en série de deux blocs

$$H_1(p) = \frac{1}{p-1} \quad \text{et} \quad H_2(p) = \frac{p-1}{p+1} \quad (2.56)$$

Ils sont décrits par les équations en variables d'état suivantes

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + u_1(t) \\ y_1(t) = x_1(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{x}_2(t) = -x_2(t) - 2u_2(t) \\ y_2(t) = x_2(t) + u_2(t) \end{cases} \quad (2.57)$$

Si on les met en série, on aura  $u_2(t) = y_1(t)$  et donc

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (2.58)$$

$$y_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

Si on s'amuse à calculer la forme modale de ses expression, on pourra alors trouver que la variable d'état associé à la valeur propre  $\lambda = 1$  est inobservable. Cela peut poser un problème puisque comme on le verra plus tard, un pôle à valeur réelle positive mène à une instabilité. Il aurait donc été préférable de pouvoir l'observer.

## Chapter 3

# Analyse du modèle d'un SLP

### 3.1 Schéma fonctionnel

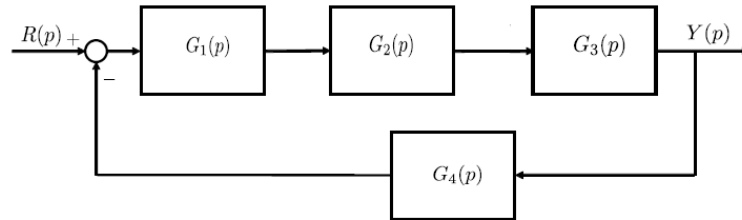


Figure 3.1: Schéma fonctionnel d'une boucle fermée

Souvent, les système peuvent être représenté par un ensemble de bloc qui n'interviennent entre eux que par leur entrée et leur sortie. On peut représenter ces systèmes par des schéma fonctionnel ou chaque bloc représente une fonction élémentaire. On peut exprimer les fonction de transfert de ce schéma élémentaire. Pour les deux bloc en série  $G_1$  et  $G_2$  de la Figure 3.1, on peut définir une fonction de transfert équivalente

$$F(p) = G_1(p)G_2(p) \quad (3.1)$$

On aurait aussi pu les connecter en parallèle. Dans ce cas, la fonction de transfert serait donnée par

$$T(p) = G_1(p) + G_2(p) \quad (3.2)$$

Le schéma de la Figure 3.1 représente en fait une boucle fermée à rétroaction négative. Pour une telle boucle, la fonction de transfert est donnée par

$$H(p) = \frac{F(p)G_3(p)}{1 + F(p)G_3(p)G_4(p)} \quad (3.3)$$

La règle de base pour déterminer la fonction de transfert d'un tel système est la suivante : *La fonction de transfert d'un système en rétroaction négative est donnée par la fonction de transfert de la chaîne directe divisé par la somme de 1 et de la fonction de transfert de la boucle ouverte.*

### 3.2 Influence de la position des pôles

#### 3.2.1 Notion de pôle et de zéro

On peut souvent écrire la fonction de transfert d'un SLP sous la forme d'une fraction rationnelle

$$H(p) = \frac{b(p)}{a(p)} \quad (3.4)$$

On suppose pour l'instant qu'il n'y a pas de facteur commun entre  $a(s)$  et  $b(s)$ . On dira alors que les pôles de  $H(p)$  sont les valeurs de  $p$  pour lesquelles  $a(p) = 0$  et les zéros sont les valeurs pour lesquelles  $b(p) = 0$ .

Par la transformée de Laplace inverse, on peut obtenir la réponse impulsionnelle du système. On peut donc faire un lien entre la position des pôles de la fonction de transfert et la réponse temporelle du système.

### 3.2.2 Système du premier ordre

La fonction de transfert d'un tel système est donnée par

$$H(p) = \frac{A_0\sigma}{p + \sigma} \quad (3.5)$$

où  $\sigma \in \mathbb{R}$  (par le théorème fondamental de l'algèbre, les zéros à partie imaginaire d'un polynôme apparaisse par paire et ne peuvent donc pas apparaître pour une fonction du premier degré). La réponse impulsionnelle est donc donnée par

$$h(t) = A_0\sigma e^{-\sigma t}\nu(t) \quad (3.6)$$

et la réponse indicielle par

$$s(t) = A_0(1 - e^{-\sigma t})\nu(t) \quad (3.7)$$

On voit donc que ce système est stable ssi  $\sigma > 0$  (puisque'il faut que l'exponentielle soit négative), i.e.  $p_1 = -\sigma$  est un pôle négatif. On définit également la constante de temps du système  $\tau = 1/\sigma$  comme la valeur de l'instant où la réponse impulsionnelle vaut  $1/e$  fois sa valeur initiale. Elle caractérise le taux de décroissance de la réponse impulsionnelle (et donc le taux de croissance de la réponse indicielle).

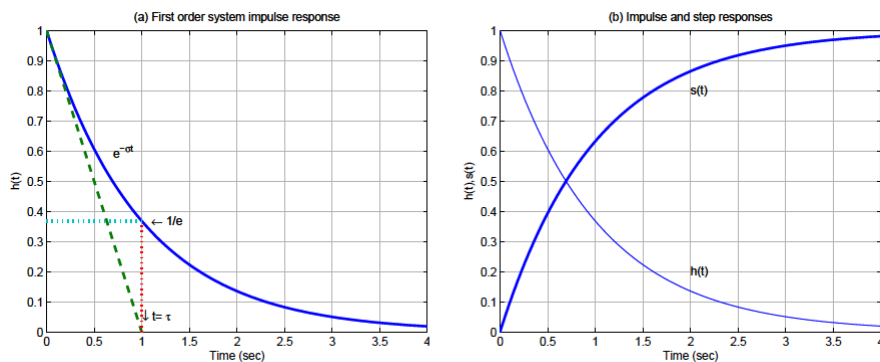


Figure 3.2: Réponse impulsionnelle et indicielle d'un système du premier ordre pour un gain statique  $A_0 = 1$

### 3.2.3 Pôles complexes conjugués - Système du deuxième ordre

Les pôles complexes conjugués ont comme forme générique

$$p = -\sigma \pm j\omega_d \quad (3.8)$$

Le dénominateur de la fonction de transfert associé à ces pôles est alors donné par

$$a(p) = (p + \sigma - j\omega_d)(p + \sigma + j\omega_d) = (p + \sigma)^2 + \omega_d^2 \quad (3.9)$$

La forme classique de la fonction de transfert est cependant donnée par

$$H(p) = A_0 \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2} \quad (3.10)$$

où on peut identifier

$$\sigma = \zeta\omega_n \text{ et } \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.11)$$

où  $\omega_n$  est la pulsation propre du système,  $\omega_d$  est la pulsation apparente (elle prend compte des éventuelle amortissement) et  $\zeta$  est le facteur d'amortissement (damping ratio en anglais) toujours compris entre 0 et 1. On peut remarquer qu'avec ce type de notation, le module des pôles est donnée par

$$|p_{1,2}| = \omega_n^2 \quad (3.12)$$

alors que la phase des pôles est donnée par

$$\theta = \arcsin(\zeta) \quad (3.13)$$

on peut donc facilement trouver la position des pôles dans le plan de Gauss. La réponse impul-

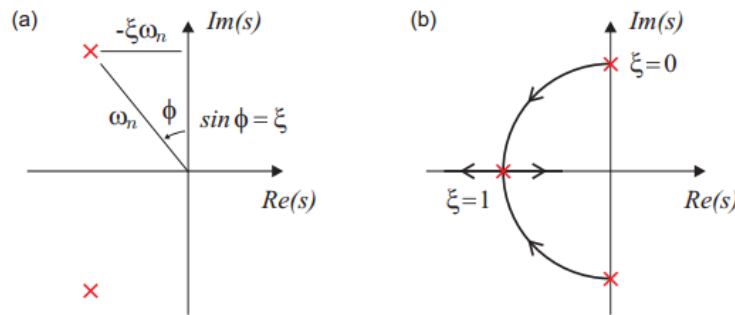


Figure 3.3: Position des pôles complexe conjugués dans le plan de Gauss

sionnelle d'un système du deuxième ordre avec pôle complexe conjugué est de la forme

$$h(t) = A_0 \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\sigma t} (\sin(\omega_d t)) \nu(t) \quad (3.14)$$

On peut le démontrer facilement. En effet, si on se souvient que

$$\mathcal{L}(e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t) \nu(t)) = \frac{\omega_d}{(p + \sigma)^2 + \omega_d^2} \quad (3.15)$$

on peut voir facilement (en se souvenant des propriétés de la transformée de Laplace) que

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{A_0 \omega_n^2}{(p + \sigma)^2 + \omega_d^2} \right) = \frac{A_0 \omega_n^2}{\omega_d} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t) \nu(t) \quad (3.16)$$

et par la définition de la pulsation apparente, on retrouve bien l'expression (3.14). En analysant cette expression, on remarque que l'effet de la partie imaginaire du pôle est essentiellement d'amener une oscillation dans le système. Si on avait des pôles purement complexes, il n'y aurait pas d'amortissement ( $\sigma = 0$  et donc  $\zeta = 0$ ). On aurait donc un système oscillant à la pulsation  $\omega_n$  entretenue. La valeur de la partie réelle des pôles complexe conjugués modifie donc l'enveloppe de la réponse. Comme on l'a dit plus tôt, il faut que la valeur de la partie réelle soit négative pour que le système soit stable (l'enveloppe est alors une exponentielle négative). Si la valeur de la partie réelle était positive, on aurait une enveloppe qui serait une exponentielle positive et donc un système dont l'oscillation augmente, i.e. un système instable. Tout ceci est résumé dans la Figure 3.4.

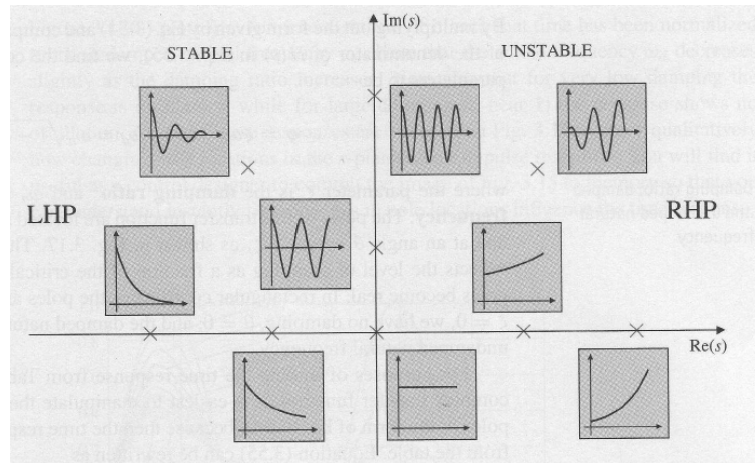


Figure 3.4: Allure de la réponse impulsionnelle du système en fonction de la position des pôles

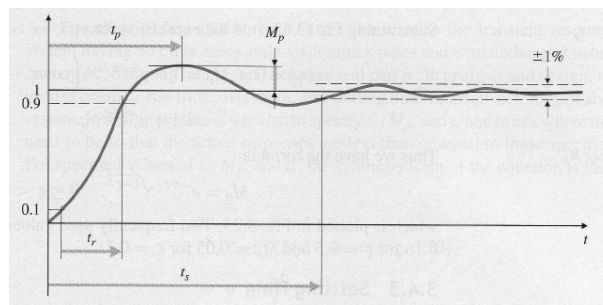


Figure 3.5: Spécifications temporelles

### 3.3 Spécifications temporelles

On définit plusieurs éléments permettant de décrire la réponse temporelle d'un système.

#### 3.3.1 Le temps de montée

Le temps de montée  $t_r$  d'un système est le temps mis pour que  $s(t)$  passe de 10% de sa valeur final à 90% de sa valeur final. Pour un système du deuxième ordre et en prenant  $\zeta = 0.5$  (pour obtenir la valeur moyenne du temps de montée), on trouve la valeur  $\omega_n t_r = 1.8$ . La valeur moyenne du temps de montée est donc donnée par

$$t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n} \quad (3.17)$$

Cette règle sera utilisée pour obtenir un ordre de grandeur du temps de montée, même pour des système d'ordre supérieur à deux et éventuellement avec des zéro.

#### 3.3.2 Dépassement indicielle et instant du dépassement maximum

Le maximum est atteint lorsque  $\dot{s}(t) = 0$ . Pour un système du deuxième ordre, on peut montrer que la réponse indicielle est donnée par

$$s(t) = A_0 \left( 1 - e^{-\sigma t} \left( \cos(\omega_d t) + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right) \right) \nu(t) \quad (3.18)$$

Donc, l'équation permettant de définir le dépassement indicielle et sa position est donnée par

$$A_0 \sigma e^{-\sigma t} \left( \cos(\omega_d t) + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right) - A_0 e^{-\sigma t} (-\omega_d \sin(\omega_d t) + \sigma \cos(\omega_d t)) = 0 \quad (3.19)$$

ou encore

$$A_0 e^{-\sigma t} \left( \frac{\sigma^2}{\omega_d} + \omega_d \right) \sin \omega_d t = 0 \quad (3.20)$$

De la, on voit facilement que l'instant du dépassement indicielle maximum est donné par (annulation du sinus)

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (3.21)$$

En substituant cette valeur dans l'expression de  $s(t)$ , on trouve

$$\frac{S(t_p)}{A_0} \equiv 1 + M_p = 1 - e^{-\sigma\pi/\omega_d} \left( \cos \pi + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \pi \right) = 1 + e^{-\sigma\pi/\omega_d} \quad (3.22)$$

D'où l'expression du dépassement indicielle

$$M_p = \exp \left( -\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \quad (3.23)$$

### 3.3.3 Temps d'établissement

Le temps d'établissement est le temps requis pour que la réponse indicielle ait presque atteint l'équilibre (ici, on prend un écart maximum de 1%). On peut essayer de l'évaluer à partir de l'expression alternative de la réponse indicielle

$$s(t) = A_0 \left( 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(\omega_d t - \beta) \right) \quad (3.24)$$

où  $\beta = \arctan(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})$ . On voit donc que la réponse est essentiellement dictée par l'exponentielle décroissante. On prendra donc la valeur  $t_s$  telle que

$$e^{-\sigma t_s} = e^{-\zeta\omega_n t_s} = 0.01 \quad (3.25)$$

On trouve finalement

$$t_s = \frac{4.6}{\zeta\omega_n} = \frac{4.6}{\sigma} \quad (3.26)$$

### 3.3.4 Cas particulier du système du premier ordre

Par similitude avec le cas du deuxième ordre, on peut trouver facilement que

$$t_s = \frac{4.6}{\sigma} \quad (3.27)$$

En effet, dans ce cas-ci aussi, c'est l'exponentielle décroissant qui régit le système. On peut aussi voir qu'aucun dépassement indicielle n'est possible ( $M_p = 0$ ) pour un tel système. La temps de montée quand à lui est donné par

$$t_r = \frac{\ln 0.9 - \ln 0.1}{\sigma} = \frac{2.2}{\sigma} \quad (3.28)$$

## 3.4 Effet de pôle et de zéro additionnels

### 3.4.1 Effet d'un zéro additionnel

Pour montrer l'effet d'un zéro additionnel, on peut prendre l'exemple numérique suivant

$$H_1(p) = \frac{2}{(p+1)(p+2)} = \frac{2}{p+1} - \frac{2}{p+2} \quad (3.29)$$

$$H_2(p) = \frac{2(p+1.1)}{1.1(p+1)(p+2)} = \frac{0.18}{p+1} + \frac{1.64}{p+1} \quad (3.30)$$



La seule différence entre les deux systèmes est la présence d'un zéro dans le deuxième système. On peut calculer les réponse impulsionnel des deux système

$$h_1(t) = (2e^{-t} - 2e^{-2t})\nu(t) \quad (3.31)$$

$$h_2(t) = (0.18e^{-t} + 1.64e^{-2t})\nu(t) \quad (3.32)$$

On voit donc que si la forme des exponentielle est déterminer par la position des pôles, la présence du zéro va quant à elle modifier la valeur des coefficient devant les exponentielles. On remarque en plus qu'un zéro proche d'un pôle (ici  $p = -1$ ), diminue la contribution de celui-ci sur le système.

Dans le cas d'une fonction du deuxième ordre, la fonction de transfert (à un zéro) prend la forme suivante

$$H(s) = \frac{(p/\alpha\zeta\omega_n) + 1}{(p/\omega_n)^2 + 2\zeta(p/\omega_n) + 1} \quad (3.33)$$

On a donc un zéro en  $p = -\alpha\sigma$ . On peut observer par simulation numérique que celui-ci est provoque une augmentation du dépassement indicielle d'autant plus important que  $\alpha$  est petit. On observe par ailleurs que le zéro n'a pas d'influence sur le temps d'établissement. On peut observer tout cela sur la Figure 3.6. On peut expliquer d'où vient cet effet du zéro additionnel.

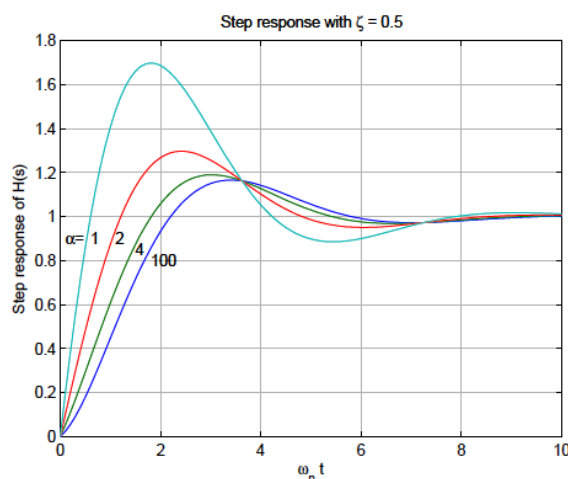


Figure 3.6: Influence du zéro sur la réponse temporelle

Pour simplifier, on prend le cas simple où  $\omega_n = 1$ . On peut alors écrire la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{\frac{p}{\alpha\zeta} + 1}{p^2 + 2\zeta p + 1} = \frac{1}{p^2 + 2\zeta p + 1} + \frac{1}{\alpha\zeta} \frac{p}{p^2 + 2\zeta p + 1} \quad (3.34)$$

On aura donc la réponse indicielle (donnée par la transformée de Laplace inverse)

$$s(t) = s_0(t) + \frac{1}{\alpha\zeta} \frac{ds_0(t)}{dt} = s_0(t) + s_d(t) \quad (3.35)$$

La réponse indicielle est donc la somme de la réponse indicielle du système sans zéro additionnelle et de sa dérivée multipliée par un facteur d'autant plus grand que  $\alpha$  est petit. On peut observer la forme d'une telle réponse sur la Figure 3.7. Celle-ci permet de mieux comprendre d'où sorte les affirmations qu'on a fait juste avant.

## 3.5 Stabilité

### 3.5.1 Définition

On se contente de définir la stabilité pour des SLP et dans le sens BIBO (bounded input bounded output). Par définition, la stabilité impose donc que toute entrée bornée donne une sortie bornée.

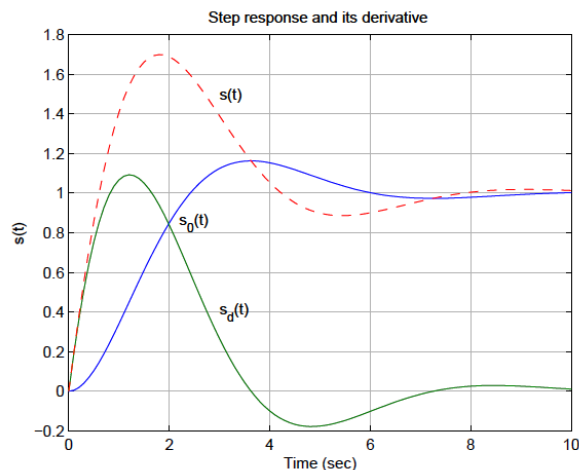


Figure 3.7: Effet d'un zéro additionnel sur la réponse d'un indicelle d'un système du deuxième ordre pour  $\alpha < 0$

On ne prend donc pas en compte ce qui se passe à l'intérieur du système. Mathématiquement, cela se traduit par

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (3.36)$$

Dans le cas d'un système décrit par une fonction de transfert qui prend la forme d'une fraction rationnelle propre, on peut définir la CNS suivante : *Tous les pôles de la fonction de transfert obtenu après les éventuelles simplification pôles-zéros doivent avoir une partie réelle négative pour que le système soit stable.*

La stabilité interne ou asymptotique impose quand à elle que pour une entrée nulle, la sortie doit tendre vers zéro lorsque le  $t \rightarrow \infty$ , quelque soit l'état initiale. Par conséquent, toute entrée bornées donnera une sortie et des grandeurs d'état bornée. Pour un système défini par une fonction de transfert qui prend la forme d'une fraction rationnelle propre, on définit la CNS : *Tous les pôles de la fonction de transfert obtenus AVANT toute simplification pôle-zéro doivent avoir une partie réelle négative.* Pour un système décrit par un modèle en variables d'état, la CNS devient : *Toutes les valeurs propres de  $A$  doivent être à partie réelle négative.* On peut montrer que ces deux CNS sont identique en se souvenant que le polynôme caractéristique de la matrice  $A$  ( $(pI - A)$ ) est le dénominateur de la fonction de transfert.

### 3.5.2 Critère de stabilité de Routh

Ce critère permet d'établir la stabilité interne d'un système à partir de son polynôme caractéristique sans devoir en calculer les racines. Il permet également d'évaluer l'intervalle de valeur pour un paramètre pour lequel le système est asymptotiquement stable.

La polynôme caractéristique est donné par

$$a(p) = \det(pI - A) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n \quad (3.37)$$

Sur base de ce polynôme, on peut construire la table de Routh. Les deux première sont prise

directement du polynôme caractéristique et les autres sont calculés par un pseudo-déterminant

$$\begin{array}{cccccc}
 n & p^n & 1 & a_2 & a_4 & \cdots \\
 n-1 & p^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
 n-2 & p^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
 n-3 & p^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 2 & p^2 & * & * & & \\
 1 & p & * & & & \\
 0 & p^0 & * & & & 
 \end{array}$$

Pour calculer les pseudo-déterminants, on utilise les deux lignes supérieures. Par exemple pour la troisième ligne de notre table

$$b_1 = -\frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix}}{a_1} \quad \text{et} \quad b_2 = -\frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{bmatrix}}{a_1} \quad (3.38)$$

Si jamais,  $a_1 = 0$  on le remplace par  $\epsilon$  et puis on étudie la valeur obtenue pour  $\epsilon \rightarrow 0$ . Si toute une ligne du tableau est nulle (le  $i^{\text{me}}$  par exemple), alors on construit un polynôme auxiliaire à partir de la ligne précédente ( $i+1$ )

$$a_1(p) = \beta_1 p^{i+1} + \beta_2 p^{i-1} + \beta_3 p^{i-3} + \dots \quad (3.39)$$

On substitue alors les coefficients de la ligne  $i$  (tous nuls) par les coefficients de la dérivée de  $a_1(p)$ .

La CNS de stabilité peut alors s'énoncer comme ceci : *Le système sera stable ssi les  $(n+1)$  éléments de la première colonne de la table de Routh sont tous positifs.* Le nombre de changement de signe dans cette première colonne correspond en fait au nombre de pôle dans le demi-plan droit.

## Chapter 4

# Modélisation à partir de données expérimentales

Le type de données expérimentale auxquelles on a accès le plus souvent sont :

- Les réponse transitoire : impulsionnelle ou indicielle
- Les réponse harmonique : Celles-ci requiert d'exciter le système avec un signal multi-sinusoïdal ou avec un ensemble de signal sinusoïdal de fréquence différentes
- Les réponse à une excitation aléatoire naturelle autour d'une position d'équilibre
- Les réponse à une excitation du type pseudo-aléatoire.

### 4.1 Approche graphique

#### 4.1.1 Modélisation à partir d'une réponse indicielle - Système stable non oscillant

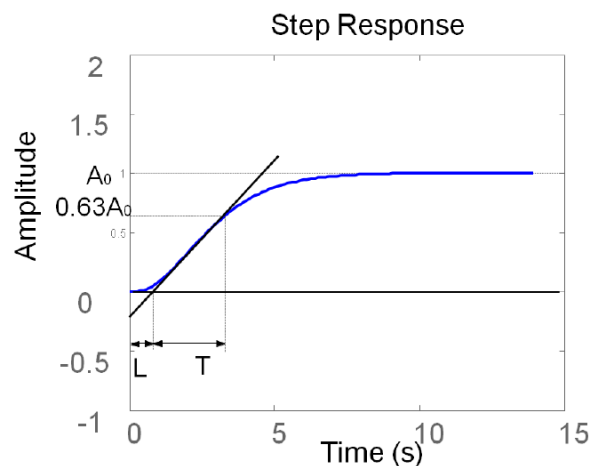


Figure 4.1: Réponse indicielle mesurée

Le relevée de la réponse indicielle se fait de la façon suivante : On part d'un système à l'équilibre caractérisé par l'entrée  $u_0$  et la sortie  $y_0$ . On provoque alors un changement rapide  $\Delta u$  de la grandeur réglante (un échelon). On fait cela pour différente amplitude de l'échelon afin de vérifier la linéarité. Le tracé de la répose indicielle se fait alors sur base de la formule

$$s_{mes}(t) = \frac{y_{mes}(t) - y_0}{\Delta u} \quad (4.1)$$

La fonction de transfert du système (supposé du premier ordre) est alors donné par la fonction

$$H(p) = \frac{A_0}{1 + pT} e^{-pL} \quad (4.2)$$

où les paramètres  $A_0, T$  et  $L$  sont déterminés à partir du graphe (voir Figure 4.1).

#### 4.1.2 Modélisation à partir de la réponse impulsionnelle - Système intégrateur

Si l'entrée est un échelon, le système intégrateur ne possède pas d'état d'équilibre en boucle ouverte. Par contre, on peut obtenir un état d'équilibre pour une réponse impulsionnelle. La procédure pour la mesure est la même sauf qu'on applique plus un échelon, mais une impulsion de Dirac de surface  $\tau$ . Le tracé se fait donc à l'aide de

$$h_{mes}(t) = \frac{y_{mes}(t) - y_0}{\tau} \quad (4.3)$$

Le graphe obtenu aura de nouveau l'allure de la Figure 4.1, mais la fonction de transfert associée est cette fois donnée par

$$H(p) = \frac{A_0}{p(1 + pT)} e^{-pL} \quad (4.4)$$

#### 4.1.3 Modélisation d'un système du deuxième ordre à partir de la réponse indicielle

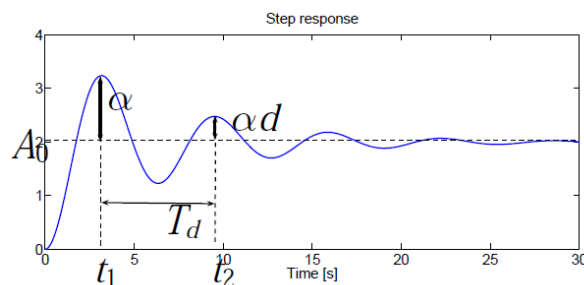


Figure 4.2: Réponse indicielle d'un système du deuxième ordre

Pour un système du deuxième ordre, la réponse indicielle aura plutôt l'allure montrée à la Figure 4.2 et la fonction de transfert est donnée par

$$H(p) = \frac{A_0 \omega_n^2}{p^2 + 2\zeta \omega_n p + \omega_n^2} \quad (4.5)$$

On peut facilement caractériser celle-ci à l'aide de la période apparente

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (4.6)$$

et du facteur de décroissance

$$d = \frac{e^{-\sigma t_2}}{e^{-\sigma t_1}} = \exp\left(-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) \quad (4.7)$$

On définit donc aisément les paramètres de la fonction de transfert

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{\ln d}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \omega_n = \frac{1\pi}{T_d \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (4.8)$$

## 4.2 Modèle d'ordre quelconque

On suppose que le modèle doit être de la forme

$$s(t) = s(\infty) + Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t} + Ce^{-\gamma t} + \dots \quad (4.9)$$

En supposant que  $\alpha$  correspond au pôle le plus lent (le plus proche de zéro), les autres pôles auront donc une influence négligeable par rapport à celui-là. En effet, on sait que la décroissance de la réponse indicielle est d'autant plus rapide que le pôle correspondant est loin de l'origine. Et donc, si on somme les réponses indicielles correspondant à plusieurs pôles différents, celle correspondant au pôle le plus proche aura plus d'influence que les autres (on le montre facilement à l'aide d'un petit graphique). Dans ce cas, on peut approcher notre modèle par

$$s(\infty) - s(t) \approx |A|e^{-\alpha t} \quad (4.10)$$

et donc

$$\log_{10}(s(\infty) - s(t)) \approx \log_{10} |A| - \alpha t \log_{10} e = \log_{10} |A| - 0.4343\alpha t \quad (4.11)$$

Il s'agit de l'équation d'une droite. Il est donc possible d'identifier expérimentalement les paramètres  $A$  et  $\alpha$  assez facilement. Puis on recommence en prenant

$$s(t) - [s(\infty) + Ae^{-\alpha t}] \approx Be^{-\beta t} \quad (4.12)$$

## Chapter 5

# Analyse d'une boucle fermée

### 5.1 Composants physiques aux fonctions de transfert

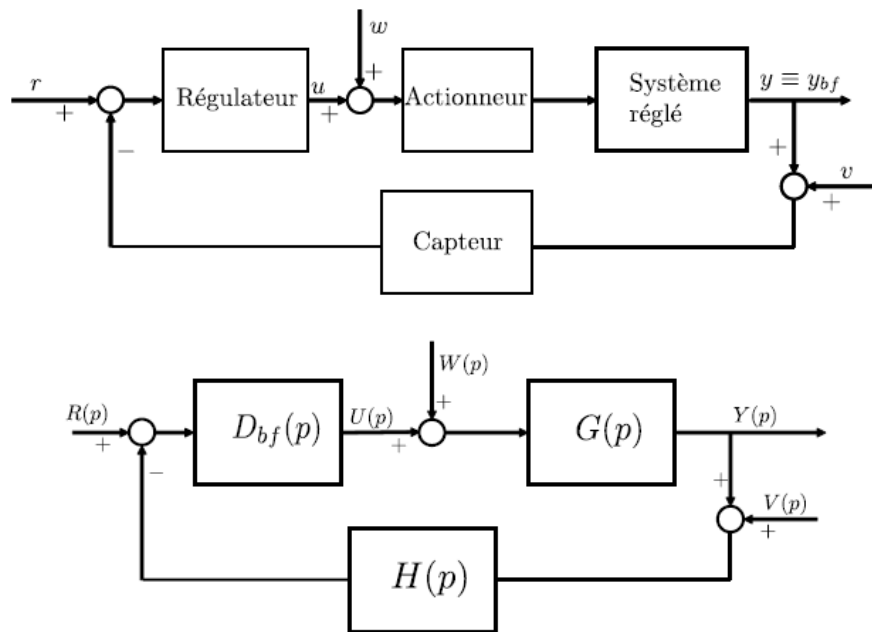


Figure 5.1: Schéma bloc d'une boucle fermée

Une boucle fermée (ou ouverte) contient différents éléments physiques qui peuvent être représentés mathématiquement par une fonction de transfert. Dans le cas de la Figure 5.1, la fonction  $G(p)$  comprend à la fois le modèle de l'actionneur et du système réglé. Souvent, l'actionneur a une réponse rapide par rapport à celle du système réglé et son modèle se ramène à une simple constante dans  $G(p)$ . L'actionneur peut être par exemple une vanne pour la régulation d'un niveau (le système réglé est alors le niveau) ou bien encore un moteur à courant continu pour l'actionnement d'un robot (dans ce cas-ci, la rapidité relative de l'actionneur et du système réglé est moins évidente, il faut prendre en compte les constantes de temps mécanique et électrique du système total).

Souvent, les capteurs ont une réponse rapide par rapport au système réglé. Le modèle du capteur se réduit alors à un simple gain  $A_{capt}$  qu'on considère même généralement unitaire. Si ce gain n'est pas unitaire, on peut l'inclure dans  $G(p)$  à condition de normaliser le signal de référence et la perturbation par ce gain

$$r \rightarrow \frac{r}{A_{capt}} \quad \text{et} \quad w \rightarrow \frac{w}{A_{capt}} \quad (5.1)$$

## 5.2 Equations de base de l'automatique

### 5.2.1 Boucle ouverte

LA boucle ouverte peut se représenter comme à la Figure 5.1, mais en ne prenant pas la rétroaction. L'expression de la sortie est dans ce cas donnée par

$$Y_{BO} = G(p)D_{BO}(p)R(p) + G(p)W(p) \quad (5.2)$$

on remarquera qu'on note dans ce cas  $D_{BO}$  et pas  $D_{BF}$  puisqu'il s'agit d'une boucle ouverte. L'erreur du système est donnée par la différence entre la référence et la sortie du système

$$\begin{aligned} E_{BO}(p) &= R(p) - Y_{BO}(p) = R(p) - [G(p)D_{BO}(p)R(p) + G(p)W(p)] \\ &= (I - G(p)D_{BO}(p))R(p) - G(p)W(p) \end{aligned} \quad (5.3)$$

### 5.2.2 Boucle fermée

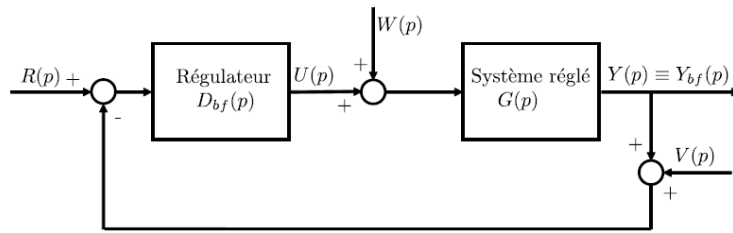


Figure 5.2: Boucle fermée où l'action du capteur est modéliser par un gain  $A_{capt} = 1$  n'apparaissant pas dans le schéma

Il y a trois entrée à prendre n compte : La référence  $R(p)$  qui doit être suivit par la sortie du système réglé  $Y_{BF}(p)$ , La perturbation  $W(p)$  qui doit être contrecarrer par la régulation et le bruit de mesure  $V(p)$  que le régulateur est supposé ignorer. Les équation générale de la boucle fermée sont donc données par

$$Y_{BF}(p) = \frac{GD_{BF}}{1 + GD_{BF}}R(p) + \frac{G}{1 + GD_{BF}}W(p) - \frac{GD_{BF}}{1 + GD_{BF}}V(p) \quad (5.4)$$

$$U(p) = \frac{D_{BF}}{1 + GD_{BF}}R(p) - \frac{GD_{BF}}{1 + GD_{BF}}w(p) - \frac{D_{BF}}{1 + GD_{BF}}V(p) \quad (5.5)$$

$$E(p) = \frac{1}{1 + GD_{BF}}R(p) - \frac{G}{1 + GD_{BF}}W(p) + \frac{GD_{BF}}{1 + GD_{BF}}V(p) \quad (5.6)$$

On note dans ce cas que la fonction de transfert (qui lie la référence et la sortie du système) est donnée par

$$T_{BF} = \frac{GD_{BF}}{1 + GD_{BF}} \quad (5.7)$$

## 5.3 Principaux objectifs

### 5.3.1 Stabilité

#### Boucle ouverte

Dans le cas d'une boucle ouverte,  $G(p)$  et  $D_{BO}(p)$  sont des fraction rationnelle propre

$$G(p) = \frac{b(p)}{a(p)} \text{ et } D_{BO}(p) = \frac{c(p)}{d(p)} \quad (5.8)$$

La CNS de stabilité est dans ce cas que les racines de  $a(p)$  et de  $d(p)$  ont toutes une partie réelle négative. On note aussi que les simplifications pôle-zéro dans le demi-plan droit sont interdites.



## Boucle fermée

L'équation caractéristique de la boucle fermée est définie comme

$$1 + G(p)D_{BF}(p) = 0 \quad (5.9)$$

Ce qui peut se réécrire

$$1 + \frac{b(p)c(p)}{a(p)d(p)} = 0 \Leftrightarrow a(p)d(p) + b(p)c(p) = 0 \quad (5.10)$$

Les pôles de la boucle fermée sont alors les racines de ce polynôme caractéristique. On voit donc qu'il y a moyen de stabiliser un système instable par un choix approprié de  $c(p)$  et  $d(p)$ . Attention qu'il reste interdit de simplifier les racines à partie réelle positive de  $a(p)$  avec des racines de  $c(p)$  et idem entre  $b(p)$  et  $d(p)$ .

### 5.3.2 Suivit de trajectoire

En principe, le suivi parfait de la trajectoire est possible en dimensionnant  $D_{BF}(p)$  de manière à avoir

$$\frac{b(p)c(p)}{a(p)d(p)} = 1 \quad (5.11)$$

Il faut toutefois émettre quelques restrictions. En effet, il faut que  $\frac{c(p)}{d(p)}$  soit propre. Il ne faut pas non plus oublier que les actionneurs ont des capacités limitées (i.e.  $u(t)$  saturé). Et enfin, il est préférable de ne pas faire de simplification des pôles qui sont légèrement à gauche de l'axe imaginaire.

En boucle fermée, l'erreur de réglage est donnée par

$$E_{BF}(p) = \frac{1}{1 + G(p)D_{BF}(p)} R(p) \quad (5.12)$$

et l'erreur statique (i.e. l'erreur vis-à-vis d'une consigne constante à transitoire évanouie) est donnée par

$$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{1 + G(0)D_{BF}(0)} \quad (5.13)$$

par le théorème de la valeur finale. Si maintenant la référence était une sinusoïde de pulsation  $\omega_0$  et d'amplitude  $A_r$ , alors l'erreur serait donnée par

$$e(t) = A_e \sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)) \quad (5.14)$$

où  $A_e = A_r |T_{BF}(j\omega_0)|$ .

### 5.3.3 Régulation de maintien

En boucle ouverte, le régulateur n'a pas d'effet sur la perturbation. On ne peut donc pas utiliser ce type de structure pour contrecarrer les perturbations. En boucle fermée, la contribution de la perturbation est donnée par

$$\frac{G(p)}{1 + G(p)D_{BF}(p)} W(p) \quad (5.15)$$

On se dit alors qu'il faut prendre un  $D_{BF}(p)$  aussi grand que possible pour diminuer l'effet de la perturbation. Mais si on observe la transmittance du bruit de mesure, on peut voir qu'un  $D_{BF}(p)$  grand entraîne alors un gain unitaire pour cette transmittance. Cela signifierait que le bruit de mesure ne serait pas atténué. Cependant, on peut remarquer que si les perturbations ont une influence plus grande aux basses fréquences, le bruit de mesure quant à eux est plus important en haute fréquence. On choisira alors une fonction de transfert du régulateur qui possède un module important aux basses fréquences et un module faible aux hautes fréquences.

### 5.3.4 Sensibilité

La fonction de transfert que l'on utilise pour concevoir le régulateur est  $G(p)$ , mais la fonction de transfert réelle du système réglé est  $G(p) + \Delta G(p)$ . Il y a donc une erreur relative  $\Delta G/G$ .

#### Boucle ouverte

En boucle ouverte, on aura

$$T_{BO} + \Delta T_{BO} = D_{BO}(G + \Delta G) = D_{BO}G + D_{BO}\Delta G = T_{BO} + D_{BO}\Delta G \quad (5.16)$$

On définit la sensibilité comme

$$\mathcal{S}_G^{T_{BO}} = \frac{\frac{\Delta T_{BO}}{T_{BO}}}{\frac{\Delta G}{G}} \quad (5.17)$$

Mais en substituant les valeurs pour la boucle ouverte on pouvait voir que

$$\frac{\Delta T_{BO}}{T_{BO}} = \frac{D_{BO}\Delta G}{D_{BO}G} = \frac{\Delta G}{G} \quad (5.18)$$

La sensibilité vaut donc 1 en boucle ouverte.

#### Boucle fermée

On aura cette fois que

$$\Delta T_{BF} = \frac{G_\Delta D_{BF}}{1 + G_\Delta D_{BF}} - \frac{G D_{BF}}{1 + G D_{BF}} \quad (5.19)$$

où  $G_\Delta = G + \Delta G$ . On peut alors montrer que la sensibilité est donnée par

$$\mathcal{S}_G^{T_{BF}} = \frac{1}{1 + G_\Delta D_{BF}} \approx \frac{1}{1 + G D_{BF}} \quad (5.20)$$

On voit donc que la sensibilité aux erreurs de modélisation est réduite par rapport à la boucle ouverte.

### 5.3.5 Régulateur à deux degrés de liberté et modèle de capteur

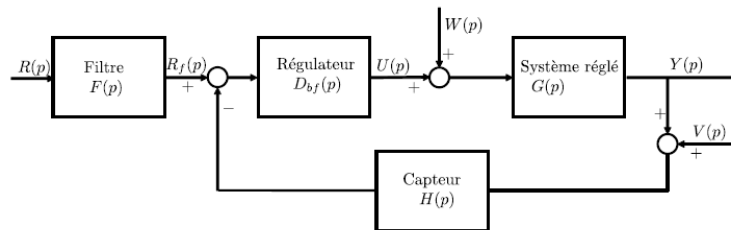


Figure 5.3: Régulateur à deux degrés de liberté

On a représenté un système en BF avec un régulateur à deux degrés de liberté à la Figure 5.3. Ce système contient un filtre  $F(p)$  et on y modélise le capteur à l'aide de la fonction de transfert  $H(p)$ . L'expression de la sortie est alors donnée par

$$Y_{BF}(p) = \frac{G D_{BF} F}{1 + G D_{BF} H} R(p) + \frac{G}{1 + G D_{BF} H} W(p) - \frac{H G D_{BF}}{1 + G D_{BF} H} V(p) \quad (5.21)$$

On remarque qu'alors la fonction de transfert de la référence n'est plus la même que celle du bruit de mesure (qui l'était au signe près). La sensibilité par rapport à  $G$  est donnée d'une façon similaire à la section précédente par

$$\mathcal{S}_G = \frac{1}{1 + GD_{BF}H} \quad (5.22)$$

et la sensibilité par rapport à  $H$  est donnée par

$$\mathcal{S}_H = -\frac{GD_{BF}H}{1 + GD_{BF}H} \quad (5.23)$$

Pour les fréquence où le gain de la boucle ouverte est grand,  $\mathcal{S}_H$  tend à devenir unitaire. On voit donc l'importance d'avoir un capteur dont la fonction de transfert ne varie pas au cours du temps (puisqu'une variation amène de l'imprécision sur la fonction de transfert du capteur qui a été définie à un moment précis).

## 5.4 Erreur statique vis-à-vis d'entrée polynomiales - Types d'un système

### 5.4.1 Référence et perturbation polynômiale

La forme classique pour une référence ou une perturbation polynômiale est

$$y(t) = \frac{t^k}{k!} \rightarrow Y(p) = \frac{1}{p^{k+1}} \quad (5.24)$$

où  $y(t)$  peut être  $w(t)$  ou  $r(t)$ . On dira alors d'un système (en boucle fermée) qu'il est de type  $k$  vis-à-vis du suivi de trajectoire s'il répond avec une erreur constante à une référence polynômiale de degré  $k$ . On dira qu'il est de degré  $k$  vis-à-vis de la réjection de perturbation s'il répond avec une erreur constante à une perturbation polynômiale de degré  $k$ .

### 5.4.2 Précision vis-à-vis de la référence

Si on considère que  $W = V = 0$ , alors l'erreur est donnée par

$$E = \frac{1}{1 + GD_{BF}} R(p) = \mathcal{S} R(p) \quad (5.25)$$

Par application du théorème de la valeur finale, on aura donc

$$e_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + G(p)D_{BF}(p)} R(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + G(p)D_{BF}(p)} \frac{1}{p^{k+1}} \quad (5.26)$$

Si la boucle ouverte ne contient pas de pôle à l'origine et qu'on prend une référence en échelon, on aura

$$e_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + GD_{BF}} \frac{1}{p} = \frac{1}{1 + G(0)D_{BF}(0)} \quad (5.27)$$

Le système est donc du type zéro vis-à-vis de la référence. Si maintenant il y a un pôle à l'origine dans la boucle ouverte, on peut alors le factoriser

$$G(p)D_{BF}(p) \equiv \frac{GD_{BF0}(p)}{p} \quad (5.28)$$

et donc l'erreur vis-à-vis de la référence est donnée par

$$e_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + GD_{BF0}/p} \frac{1}{p} = 0 \quad (5.29)$$

Le pôle à l'origine dans la boucle assure en fait l'erreur nulle vis-à-vis de l'échelon. Si on prenait cette fois une consigne en rampe

$$e_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + GD_{BF0}/p} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{p + GD_{BF0}} \frac{1}{p} = \frac{1}{GD_{BF0}(0)} \quad (5.30)$$

qui est une constante. Le système est donc d'ordre 2.

Si on prenait un système avec  $n$  pôle à l'origine, on peut de nouveau factoriser

$$G(p)D_{BF}(p) \equiv \frac{GD_{BF0}(p)}{p^n} \quad (5.31)$$

Et si on calcule l'erreur vis-à-vis d'une entrée polynomiale de degré  $k$ , on obtient

$$e_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + GD_{BF0}/p^n} \frac{1}{p^{k+1}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^n}{p^n + GD_{BF0}} \frac{1}{p^{k+1}} \quad (5.32)$$

On peut alors voir que si  $n > k$ , l'erreur statique sera nulle et que si  $n < k$  l'erreur statique sera infinie. L'erreur sera par contre constante si  $n = k$ . On a donc un système du degré  $n$  vis-à-vis de la référence.

Le type de système est une propriétés robuste qui n'est pas affecté par un changement de paramètre pour autant que la boucle fermée reste stable.

On peut maintenant se demander si on peut introduire autant de pôle intégrateur que l'on veut dans le système (pour annuler l'erreur). Il faut savoir qu'un intégrateur équivaut à un déphasage de  $-90^\circ$ . En effet, si on entre un signal  $u(t) = \sin(\omega_0 t)\nu(t)$  dans un intégrateur, on aura comme sortie

$$y(t) = \int_0^t \sin(\omega_0 \tau) d\tau = \frac{1}{\omega_0} (1 - \cos(\omega_0 t)) = \frac{1}{\omega_0} (1 + \sin(\omega_0 t + \pi/2)) \quad (5.33)$$

On verra plus loin que cela tend à déstabiliser le système. On prendra donc comme règle de n'introduire dans le système que le nombre strictement nécessaire de pôles intégrateur.

## Chapter 6

# Régulateur PID

Le régulateur PID agit par action proportionnelle (P), intégrale (I) et dérivée (D). L'action intégrale permet d'annuler l'erreur statique, mais elle dégrade généralement le transitoire. L'action dérivée permet alors d'améliorer ce transitoire par l'effet d'anticipation. La fonction de transfert générale d'un PID s'écrit

$$D_{BF}(p) = k_p + \frac{k_I}{p} + \frac{k_D p}{pT_f + 1} \quad (6.1)$$

Le pôle de filtrage est introduit notamment pour rendre la fonction de transfert propre (réalisable en pratique).

### 6.1 Action proportionnelle, intégrale et dérivée

#### 6.1.1 Régulateur proportionnel

La loi de réglage est donnée par

$$u(t) = k_p e(t) \quad (6.2)$$

et donc la fonction de transfert du P est donnée par

$$D_{BF} = \frac{U(p)}{E(p)} = k_p \quad (6.3)$$

où  $k_p$  est le gain proportionnel. Lorsque l'on a une rétroaction unitaire sur un système du premier ordre, l'effet du régulateur P est de pouvoir imposer la position du pôle de la boucle fermée. Pour un système du deuxième ordre, le régulateur P permet de modifier la pulsation propre du système, mais pas son facteur d'amortissement. Si le système est du type zéro (toujours pour le deuxième ordre), on peut voir que l'augmentation de  $k_p$  mène à une diminution de l'erreur statique.

#### 6.1.2 régulateur proportionnel et intégral

La loi de réglage est cette fois

$$u(t) = k_p e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (6.4)$$

et donc, la fonction de transfert du régulateur est donnée par

$$D_{BF}(p) = k_p + \frac{k_I}{p} \quad (6.5)$$

Si on analyse la réponse d'un système du premier ordre en boucle fermée avec régulateur PI, on aura

$$Y(p) = \frac{A_0}{p\tau + 1} (R(p) + W(p)) \quad \text{et} \quad U(p) = \left( k_p + \frac{k_I}{p} \right) (R(p) - Y(p)) \quad (6.6)$$

et donc

$$Y(p) = \frac{A_0(k_P p + k_I)}{\tau p^2 + (A_0 k_P + 1)p + A_0 k_I} R(p) + \frac{A_0 p}{\tau p^2 + (A_0 k_P + 1)p + A_0 k_I} W(p) \quad (6.7)$$

On voit donc qu'il est possible de dimensionner  $k_P$  et  $k_I$  de manière à obtenir les pôles complexes conjugué avec la pulsation naturelle et l'amortissement souhaité

$$\omega_n = \sqrt{A_0 k_I / \tau} \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{A_0 k_P + 1}{2\tau \omega_n} \quad (6.8)$$

En analysant l'expression de la sortie du système, on s'aperçoit que l'erreur statique est nulle vis-à-vis d'une perturbation et d'une référence constante grâce au zéro à l'origine dans la fonction de transfert entre  $W(p)$  et  $Y(p)$  et grâce au gain statique unitaire dans la fonction de transfert entre  $R(p)$  et  $Y(p)$ .

Pour un système du deuxième ordre, on aura

$$Y(p) = \frac{b}{p^2 + a_p + a_2} (U(p) + W(p)) \quad (6.9)$$

L'équation caractéristique du système est donc

$$1 + \frac{k_P p + k_I}{p} \frac{b}{p^2 + a_1 p + a_2} = 0 \quad (6.10)$$

soit

$$p^3 + a_1 p^2 + (a_2 + k_P b)p + b k_I = 0 \quad (6.11)$$

On peut donc intervenir sur deux coefficient de notre système, mais pas sur le troisième.

### 6.1.3 Régulateur proportionnel, intégral et dérivé

La loi de réglage est maintenant donnée par

$$u(t) = k_P e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau + k_D \frac{de(t)}{dt} \quad (6.12)$$

et donc la fonction de transfert est donnée par

$$D_{BF}(p) = k_P + \frac{k_I}{p} + k_D p \quad (6.13)$$

Ce type de régulateur donne une réponse brusque lors d'un changement de référence abrupte. C'est pourquoi il est parfois utile de placé l'action dérivé dans la rétroaction

$$u(t) = k_P e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau - k_D \frac{dy(t)}{dt} \quad (6.14)$$

Dans le cas où l'action porte sur  $e(t)$  pour une boucle fermée et un système du deuxième ordre, on aura à la sortie

$$Y(p) = \frac{b(p^2 k_D + p k_P + k_I)}{p^3 + (a_1 + b k_D)p^2 + (a_2 + b k_P)p + b k_I} R(p) + \frac{b p}{p^3 + (a_1 + b k_D)p^2 + (a_2 + b k_P)p + b k_I} W(p) \quad (6.15)$$

On voit donc que cette fois, on peut intervenir sur tous les paramètres de notre système, puisqu'on peut attribuer arbitrairement trois racines au dénominateur de la fonction de transfert par un choix approprié de  $k_P$ ,  $k_I$  et  $k_D$ .

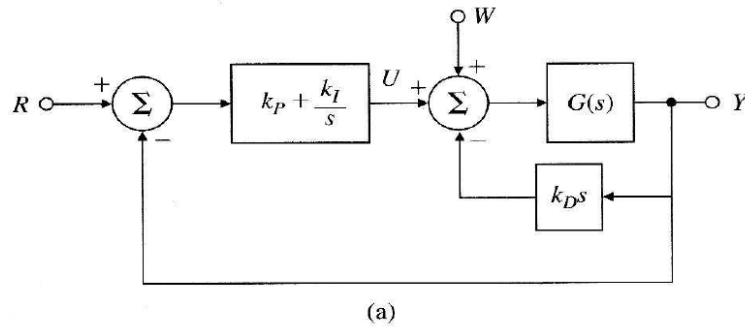


Figure 6.1: Système en BF avec régulateur PID à action dérivée en rétroaction

#### 6.1.4 Rôle du pôle de filtrage

Pour s'assurer que le régulateur soit réalisable, on introduit généralement un pôle de filtrage dans sa fonction de transfert qui devient alors

$$D_{BF}(p) = k_P + \frac{k_I}{p} + \frac{k_D p}{pT_f + 1} \quad (6.16)$$

Ce pôle permet en effet d'éviter l'amplification du bruit de mesure qui avait une contribution dans l'action dérivée.

## 6.2 Ajustement par la méthode de Ziegler-Nichols

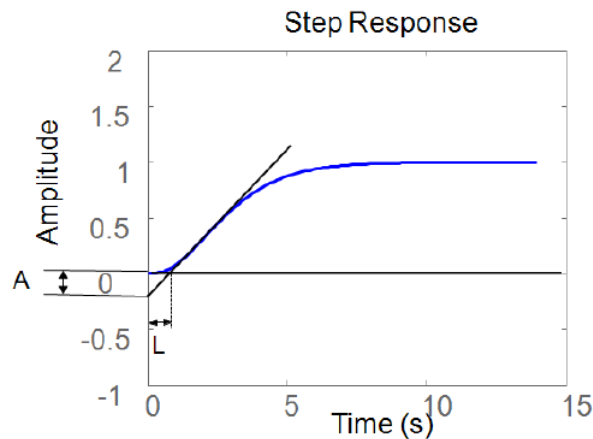


Figure 6.2: Intégrateur avec temps mort

On représente la réponse indicielle du système sur base d'un intégrateur avec temps mort comme à la Figure 6.2. Sa fonction de transfert est alors

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{Ae^{-pL}}{Lp} \quad (6.17)$$

On cherche à partir de là un ajustement des paramètres du régulateur qui permette d'obtenir une réponse avec un facteur de décroissance  $d$  de 0.25. Les règles d'ajustement des paramètres ont été calculées et sont données par

### Pour un régulateur proportionnel

$$k_P = 1/A \quad (6.18)$$

### Pour un régulateur PI

$$k_P = 0.9/A \quad (6.19)$$

$$T_I = 3L \quad (6.20)$$

### Pour un régulateur PID

$$k_P = 1.2/A \quad (6.21)$$

$$T_I = 2L \quad (6.22)$$

$$T_D = L/2 \quad (6.23)$$

où on a pris la représentation alternative du PID

$$D_{BF}(p) = k_P \left( 1 + \frac{1}{pT_I} + pT_D \right) \quad (6.24)$$

## 6.2.1 Méthode de la sensibilité ultime

Une autre méthode prémachée d'ajustement est la méthode de la sensibilité ultime. Elle consiste à placer le système en boucle fermée à rétroaction unitaire avec un régulateur proportionnel. On augmente alors le gain du régulateur progressivement jusqu'à ce qu'on observe une oscillation entretenue à la sortie. A ce stade là, on définit le gain ultime et la période ultime

$$K_u = k_P(\text{oscillant}) \text{ et } T_u = T(\text{oscillations}) \quad (6.25)$$

Sur base de ces mesures, on peut dimensionner notre régulateur

### Pour un proportionnel

$$k_P = 0.5K_u \quad (6.26)$$

### Pour un PI

$$k_P = 0.4K_u \quad (6.27)$$

$$T_I = 0.8T_u \quad (6.28)$$

### Pour une PID

$$k_P = 0.6K_u \quad (6.29)$$

$$T_I = 0.5T_u \quad (6.30)$$

$$T_D = 0.125T_u \quad (6.31)$$

## 6.3 Quand utiliser un régulateur PI ou un régulateur PID

### 6.3.1 Régulateur PI

L'action dérivée n'est pas fréquemment utilisée dans les procédés industriels. Le régulateur PI est donc approprié pour les systèmes réglés dont le transitoire est proche de celui d'un système du premier ordre. Il convient également pour les systèmes d'ordre supérieur lorsqu'il n'est pas nécessaire d'atteindre de performances élevées.



### 6.3.2 Régulateur PID

Ils sont appropriés pour les système réglé dont le comportement transitoire est proche de celui d'un système du deuxième ordre. L'intérêt de l'action dérivée apparait surtout quand les constante de temps sont significativement différent (p.ex. pour la régulation de température). Pour les système d'ordre supérieur à 2, l'action dérivée permet d'améliorer la rapidité de la réponse par rapport à celle d'un PI. L'amélioration du facteur d'amortissement permet également d'améliorer le gain proportionnel.

## Chapter 7

# Méthode du lieu d'Evans (Root Locus)

On a pu remarquer qu'il y avait un lien entre la réponse indicielle et les position des pôles du système du second ordre. On a également vu que la position des pôle changeait pour un système mis en rétroaction. Ceci nous incite donc à une conception des régulateur basé sur l'étude du lieu des pôles de la boucle fermée en fonction d'un paramètre de la boucle ouverte. C'est ce qu'on appelle la méthode des lieux d'Evans (root locu method en anglais). On utilise cette méthode lorsqu'un des paramètre du système n'est pas dimensionner (généralement le gain proportionnel). Le lieu d'Evans est en fait le lieu des pôle de la boucle fermée lorsque l'on fait varier la valeur de ce paramètre inconnu. On peut alors sur base de ce lieu, trouver un point (qui doit en faire partie) et qui correspond au caractéristique que l'on souhaite obtenir pour notre système. Sur base de la position de ce point, on peut alors trouver la valeur du paramètre inconnu et ainsi on a dimensionner le système.

### 7.1 Notation et équation caractéristique

La fonction de transfert d'une boucle fermée est donnée par

$$T(p) = \frac{D(p)G(p)}{1 + D(p)G(p)H(p)} \quad (7.1)$$

Le polynôme caractéristique est donc donnée par

$$1 + D(p)G(p)H(p) = 0 \quad (7.2)$$

On met alors celui-ci sous une forme polynômiale dépendant du paramètre  $K$  que l'on cherche à déterminer

$$a(p) + Kb(p) = 0 \quad (7.3)$$

où  $a(p)$  et  $b(p)$  sont deux polynôme. On peut encore le noter

$$1 + KL(p) = 0 \quad (7.4)$$

Mais c'est peut-être plus simple avec un exemple. On prendra ici un exemple générale qui n'est pas la nécessairement la représentation d'une boucle fermé pour qu'on puisse bien comprendre la factorisation de l'équation caractéristique. Si on a par exemple une fonction de transfert

$$H(p) = \frac{p^2 + 5p + 1}{p^3 + 3p^2 + 2Kp + 1} \quad (7.5)$$

L'équation caractéristique sera alors donnée par

$$p^3 + 3p^2 + 2Kp + 1 = 0 \quad (7.6)$$

où le paramètre  $K$  est l'inconnue qui devra être déterminé par la méthode du lieu d'Evans. On réécrit alors cette équation

$$p^3 + 3p^2 + 1 + K(2p) = 0 \quad (7.7)$$

ce qui peut se mettre sous la forme

$$1 + K \frac{2p}{p^3 + 3p^2 + 1} = 0 \quad (7.8)$$

Il est cependant nécessaire de faire en sorte que le polynôme  $L(p)$  soit monic. On l'écrira donc plutôt sous la forme  $L(p) = \frac{p}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)}$  et on définira le paramètre à déterminer comme  $K_{ev} = 2K$ . On aura alors comme équation caractéristique du lieu d'Evans

$$1 + K_{ev}L(p) = 0 \quad (7.9)$$

qui permet de déterminer le facteur  $K_{ev}$  et ensuite de déterminer le facteur qui nous intéresse, i.e.  $K$ .

## 7.2 Règle pour le tracé du lieu d'Evans

### 7.2.1 Définition

#### Définition 1

Le lieu d'Evans positif de  $L(p)$  est le lieu des racines de  $1 + KL(p)$  lorsque  $K$  varie de 0 à l'infini. Comme l'équation  $1 + KL(p) = 0$  est l'équation caractéristique de la boucle fermée, le lieu d'Evans positif est également le lieu des pôles de la boucle fermée pour des valeurs positive ou nulle de  $K$ .

#### Définition 2

Le lieu d'Evans positif de  $L(p)$  est le lieu des points du plan complexe où l'argument de  $L(p)$  vaut  $180^\circ$ .

En considérant qu'il y a  $n$  pôles  $p_i$  à la fonction  $L(p)$  et  $m$  zéros  $z_i$ , et en notant  $\theta_i = \arg(p_0 - p_i)$  et  $\phi_i = \arg(p_0 - z_i)$  où  $p_0$  est un point du lieu d'Evans. Alors, par la définition, il faut qu'il existe un entier  $l$  tel que

$$\sum_{i=1}^m \phi_i - \sum_{i=1}^n \theta_i = \pm 180^\circ (2l - 1) \quad (7.10)$$

#### Définition 3

Le lieu d'Evans négatif de  $L(p)$  est le lieu des racines de  $1 + KL(p)$  lorsque  $K$  varie de  $-\infty$  à zéro. C'est donc le lieu des pôles de la boucle fermée lorsque  $K$  prend des valeurs négatives ou nulles.

#### Définition 4

Le lieu d'Evans négatif de  $L(p)$  est le lieu des points du plan de Gauss où l'argument de  $L(p)$  vaut  $0^\circ$ . Et donc on doit avoir la relation

$$\sum_{i=1}^m \phi_i - \sum_{i=1}^n \theta_i = 360^\circ l \quad (7.11)$$

**Remarque importante**

Il faut noter la condition sur le module (déjà entrevu précédemment) qui dit que

$$|KL(p)| = 1 \quad (7.12)$$

Celle-ci permet de graduer le lieu en fonction de  $K$ .

Il est nécessaire d'utiliser les mêmes échelles sur l'axe des abscisse et des ordonnées pour représenter le lieu d'Evans (sinon les mesures d'angle et de distance ne respectent plus les définitions précédentes).

Dans la suite, quand on parle de lieu d'Evans sans plus de spécification, c'est qu'on parle de lieu positif.

**7.2.2 Exemple introductif**

Soit le système que l'on souhaite dimensionner caractériser par une fonction

$$KL(p) = \frac{K}{p(p+1)(p+2)} \quad (7.13)$$

Par définition du lieu d'Evans, on doit avoir

$$-\arg(p) - \arg(p+1) - \arg(p+2) = \pm 180^\circ(2l-1) \quad (7.14)$$

pour un  $K > 0$ . La condition sur le module nous dit elle que

$$|KL(p)| = \left| \frac{k}{p(p+1)(p+2)} \right| = 1 \quad (7.15)$$

On voit par (7.14) que l'axe réel positif ne peut pas faire partie du lieu puisque pour un point situé sur cet axe, on aura

$$\arg(p) = \arg(p+1) = \arg(p+2) = 0 \neq 180^\circ(2l-1) \quad (7.16)$$

Si on regarde la portion de l'axe réel dans l'intervalle  $] -1, 0[$ , on voit que pour un point  $p$  situé sur cet intervalle

$$-\arg(p) - \arg(p+1) - \arg(p+2) = -180^\circ \quad (7.17)$$

Cet intervalle fait donc bien partie du lieu d'Evans. En continuant ainsi, on voit que la partie de l'axe réel compris entre  $] -2, -1[$  ne fait pas partie du lieu et que la partie de l'axe pour  $] -\infty, -2[$  en fait partie.

Si on regarde les points où  $p$  est très éloigné de l'origine, on peut faire l'approximation

$$KL(p) \approx \frac{K}{p^3} \quad (7.18)$$

La condition sur l'argument devient alors

$$-3\arg(p) = \pm 180^\circ(2l-1) \quad (7.19)$$

ce qui donne trois directions possibles pour les asymptotes du lieu d'Evans

$$\theta = \frac{\pm 180^\circ}{3}(2l-1) \quad l = 0, 1, 2 \quad (7.20)$$

Les points où le lieu quitte l'axe réel sont des points où l'équation caractéristique possède un pôle multiple. On doit donc avoir en ces points

$$f(p) = a(p) + Kb(p) = 0 \quad (7.21)$$

$$f'(p) = a'(p) + Kb'(p) = 0 \quad (7.22)$$

où ' désigne dérivée par rapport à  $p$ . Par isolation du  $K$  et égalisation des deux équation, il résulte que

$$a(p)b'(p) - a'(p)b(p) = 0 \quad (7.23)$$

Ceci revient en fait à calculer les valeur pour lesquelles  $\frac{dK}{dp} = 0$ . En effet, si  $f(p) = 0$  alors  $K = -a(p)/b(p)$  et donc

$$\frac{dK}{dp} = -\frac{a'(p)b(p) - a(p)b'(p)}{b(p)^2} \quad (7.24)$$

Dans notre exemple, on trouve

$$p = -0.4226 \text{ et } -1.5774 \quad (7.25)$$

Mais seul le point  $p = -0.4226$  appartient au lieu. La condition sur le module permet alors de définir la valeur de  $K$  qui correspond à ce point

$$K = |p(p+1)(p+2)|_{p=-0.4226} = 0.384 \quad (7.26)$$

Par un calcul similaire, on trouve que la valeur de  $K$  correspondant à  $p = -1.5774$  est donné par  $K = -0.3849$  ce qui montre bien que ce point ne fait pas partie du lieu d'Evans positif.

Les points où le lieu intersecte l'axe imaginaire auront la forme  $p = j\omega$ . On peut alors effectuer le remplacement dans l'équation caractéristique et ainsi déterminer leur valeur ainsi que les valeurs de  $K$  qui y sont associer.

On voit que l'analyse du lieu d'Evans étape par étape pour en définir la forme peut prendre beaucoup de temps. C'est pourquoi on a émis toute une série de règle permettant de d'accélérer le tracer asymptotique du lieu d'Evans. Il est important à ce niveau-ci de préciser que le tracer exacte d'un lieu d'Evans ne se fait jamais à la main mais toujours à l'aide d'un logiciel tel Matlab. De plus dans la plupart des cas, le tracer asymptotique sera plus que suffisant pour avoir une bonne représentation. C'est pourquoi il est utile de savoir tracer le lieu d'Evans de façon asymptotique assez rapidement.

### 7.2.3 Règle 1 : Branches de lieu

*Les  $n$  branches du lieu partent des pôles de  $L(p)$ ,  $m$  d'entre elles se terminent sur les zéro de  $L(p)$  e les  $(n - m)$  restante se terminent aux zéros à l'infini de  $L(p)$ .*

On peut en faire un justification rapide. Si on regarde la polynôme caractéristique sous la forme

$$a(p) + Kb(p) = 0 \quad (7.27)$$

on voit que pour  $K = 0$  on a  $a(p) = 0$  ce qui correspond aux pôle de  $L(p)$ . Par contre pour  $K \rightarrow \infty$ ,  $b(p)$  est obliger de tendre vers zéro pour pouvoir vérifier l'équation caractéristique. On a donc les zéro de  $L(p)$ . On voit donc bien que le lieu va des pôle de  $L(p)$  jusqu'au zéro lorsque que  $K$  varie de zéro à l'infini.

### 7.2.4 Règle 2 : Condition d'existence sur l'axe réel

*Les points de l'axe réel appartenant au lieu d'Evans sont les points situé à gauche d'un nombre impaire de pôle et de zéros.*

Pour un point situé sur l'axe réel, la contribution  $\theta_1 + \theta_2$  de deux pôle complexe conjugué est nulle et de même pour la contribution de deux zéro. L'argument de  $L(p)$  sur l'axe réel est don déterminer uniquement par les pôles et les zéros sur l'axe. La règle précitée est donc parfaitement logique (comme on l'avait d'ailleurs vu dans l'exemple).

### 7.2.5 Règle 3 : Les asymptotes

Les  $n - m$  asymptotes ont un point d'intersection commun sur l'axe réel donné par

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \quad (7.28)$$

et font un angle

$$\phi_l = \frac{180^\circ(2l - 1)}{n - m} \quad \text{pour } l = 0, 1, \dots, n - m - 1 \quad (7.29)$$

La justification était déjà donnée dans l'exemple. Loin de l'origine, la contribution à l'argument de  $L(p)$  des  $n$  pôles est la même et pour  $m$  d'entre eux, elle est annulée par la contribution de  $m$  zéros. On peut la généraliser en disant que pour un point éloigné de l'origine, la contribution des  $n-m$  pôles qui ne sont pas contrebalancés par des zéros peut être approché par

$$KL(p) \approx \frac{K}{p^{n-m}} \quad (7.30)$$

ce qui nous donne bien les orientations prédéfinies.

### 7.2.6 Règle 4 : Point où le lieu quitte ou rejoint l'axe réel

On peut montrer que lorsque le segment de l'axe réel entre deux pôles appartient au lieu d'Evans, il existe au moins un point sur le segment où le lieu quitte l'axe réel. De façon similaire, si le segment de l'axe réel situé entre deux zéros appartient au lieu, il y a au moins un point où le lieu rejoint l'axe réel sur le segment. Si maintenant, il s'agit du segment entre un pôle et un zéro, il ne peut pas y avoir de point où le lieu quitte ou rejoint l'axe réel, mais il peut exister un point où le lieu quitte et rejoint à la fois l'axe réel. On a déjà démontré comment trouver la valeur de ces points dans l'exemple introductif.

### 7.2.7 Règle 5 : Point d'intersection avec l'axe imaginaire

Comme on l'avait dit dans l'exemple introductif, on peut trouver ces points en remplaçant  $p$  par  $j\omega$  dans l'équation du polynôme caractéristique.

### 7.2.8 Règle 6 : Angle de départ ou d'arrivée en des pôles ou des zéros complexes conjugués

Les angles de départ du lieu aux pôles complexes conjugués sont donnés par

$$\theta_{l,dep} = \sum_{i=1}^m \phi_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n \theta_i - 180^\circ \quad (7.31)$$

Les angles d'arrivée aux zéros sont quant à eux donnés par

$$\phi_{l,arr} = \sum_{i=1}^n \theta_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m \phi_i + 180^\circ \quad (7.32)$$

S'il s'agit d'un pôle de multiplicité  $q$ , on transforme la formule précédente pour obtenir

$$q\theta_{l,dep} = \sum_{i=1}^m \phi_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n \theta_i - 180^\circ(2l - 1) \quad l = 1, \dots, q \quad (7.33)$$

On peut évidemment faire de même pour les zéros.

### 7.2.9 Condition sur le module - Détermination du gain associé à une position des pôles

On peut exprimer la condition sur le module en terme de pôles et de zéros

$$K = \frac{1}{|L(p)|} = \frac{|p - p_1| \dots |p - p_n|}{|p - z_1| \dots |p - z_m|} \quad (7.34)$$

Pour fixer les idées, on prend l'exemple suivant

$$L(p) = \frac{p + 2}{p^2 + 2p + 3} \quad (7.35)$$

On peut alors chercher la valeur du gain  $K$  permettant d'avoir un système avec deux pôles complexe conjugué et un amortissement de  $\zeta = 0.7$ . Sur base des différentes règles qu'on a citées

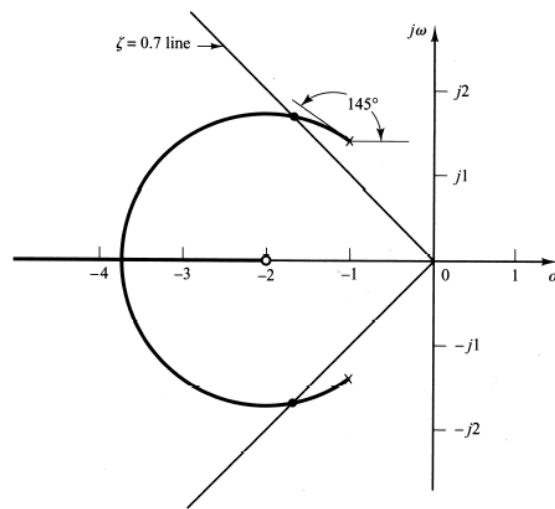


Figure 7.1: Lieu d'Evans de  $L(p) = \frac{p+2}{p^2+2p+3}$ .

précédemment, on peut dessiner le lieu d'Evans correspondant à  $L(p)$  (voir Figure 7.1). On trace ensuite notre exigence d'amortissement sur le graphe à l'aide des notions vues dans le chapitre précédent. On trouve alors que les points d'intersection entre le lieu et la droite répondant à notre exigence sont les points

$$p = -1.67 + j1.70 \quad (7.36)$$

Et en exprimant la condition sur le module en terme de pôles et de zéros, on trouve

$$K = \left| \frac{(p + 1 - j\sqrt{2})(p + 1 + j\sqrt{2})}{p + 2} \right|_{p=-1.67+j1.70} = 1.34 \quad (7.37)$$

### 7.2.10 Remarque

Un arc de cercle peut apparaître dans le lieu d'Evans, mais seulement sous certaines conditions. Il n'y a en fait que trois cas où un arc de cercle peut apparaître :

- Un pôle et deux zéros
- Deux pôles et deux zéros
- Deux pôles et un zéro

### 7.2.11 Règles pour le tracé du lieu d'Evans négatif

Les parties de l'axe réel appartenant au lieu d'Evans négatif sont les parties de l'axe situées à droite d'un nombre pair de pôle et de zéros. Cette différence avec la règle pour les lieux positifs vient de la différence de définition de lieu du point de vue argument (définition 4).

Les points d'intersection des asymptotes sur l'axe réel se calculent de la même manière que pour un lieu positif, mais par contre, les directions des asymptotes sont données par

$$\frac{l360^\circ}{n-m} \quad l = 0, 1, \dots, n-m-1 \quad (7.38)$$

Les angles d'arrivée en un pôle de multiplicité  $q$  seront donnés par

$$q\theta_{l,dep} = \sum_{i=1}^m \phi_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n \theta_i - l360^\circ \quad l = 1, \dots, q-1 \quad (7.39)$$

On peut faire des transformations similaires pour obtenir les angles de départ au zéro.

## 7.3 Exemple de lieu d'Evans : Régulation de l'altitude du satellite

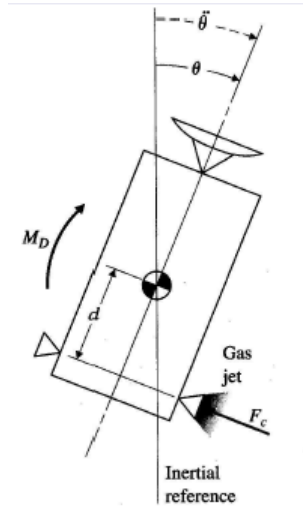


Figure 7.2: Satellite

On cherche à réguler l'altitude d'un satellite. Tout ce qui nous intéresse dans cet exemple est d'étudier le lieu d'Evans et l'effet des différents régulateurs. Pour modéliser le problème, on utilise le théorème du moment cinétique

$$J\ddot{\theta}(t) = dF_c(t)M_D(t) \quad (7.40)$$

On définit alors la fonction de transfert entre  $F_c(p)$  et  $\Theta(p)$

$$H(p) = \frac{d}{Jp^2} \quad (7.41)$$

On désire lui assouvir un régulateur proportionnel de gain  $k_P$ . On prendra donc comme paramètre de notre étude

$$K = k_P \frac{d}{J} \quad \text{et} \quad L(p) = \frac{1}{p^2} \quad (7.42)$$



On voit que pour une telle fonction  $L(p)$ , le lieu d'Evans est entièrement situé sur l'axe imaginaire, il n'est donc pas possible de trouver une solution non oscillante avec un régulateur proportionnel. On cherche alors à attirer le lieu dans le demi-plan gauche. Pour cela on rajoute une action dérivée à notre régulateur. On choisit de prendre  $k_P = k_D$  et donc notre équation caractéristique devient

$$1 + K \frac{1+p}{p^2} = 0 \quad (7.43)$$

On peut alors facilement tracer le lieux d'Evans du satellite et trouver le Figure 7.3. On voit

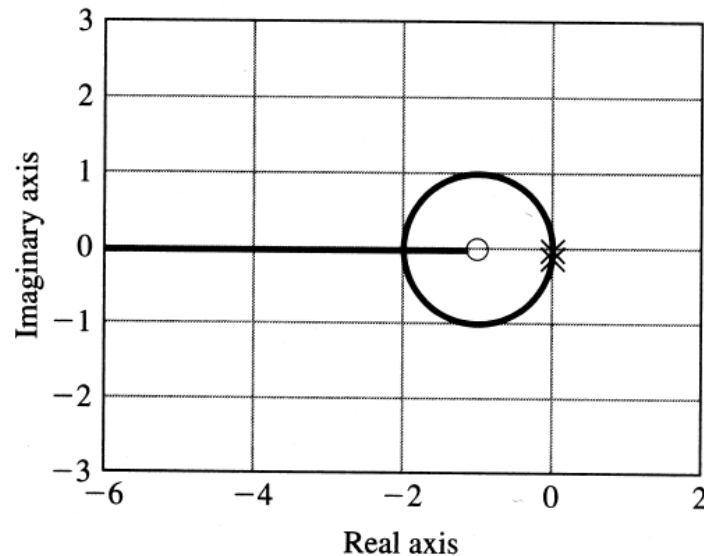


Figure 7.3: Lieux d'Evans du satellite avec régulateur PD

donc que l'addition d'un zéro dans le demi-plan gauche attire le lieu d'Evans vers la gauche.

Pour pouvoir faire une mise en oeuvre pratique du régulateur, il est cependant intéressant de rajouter un pôle de filtrage à l'action dérivée. Le régulateur aurait alors pour fonction de transfert

$$D(p) = \tilde{k} \frac{p + z_D}{p + p_D} \quad (7.44)$$

On va essayer de prendre un pôle éloigné pour ne pas trop influencer le système. On prend par exemple  $p_D = -12$ . On alors comme équation caractéristique

$$1 + K \frac{p + 1}{p^2(p + 12)} = 0 \quad (7.45)$$

Le lieu a cette fois trois branches : deux partant de zéro et une partant de -12. On peut le tracer (toujours aussi facilement) et trouver la Figure 7.4 gauche. On obtient alors un lieu très similaire au précédent (en tout cas proche de l'origine). On observe juste une légère distorsion du cercle du à la présence du pôle de filtrage. Si maintenant on rapproche le pôle de filtrage (on prend p.ex.  $p_D = 4$ ), la distorsion sera d'autant plus grande (comme montrer à la Figure 7.4 droite).

On note donc que l'effet d'un pôle additionnel se déplaçant à partir de la gauche est de pousser le lieu vers la droite lorsqu'il se rapproche du lieu initial (sans pôle additionnel).

## 7.4 Conception d'un correcteur dynamique

### 7.4.1 Considération générale

Le but des correcteur dynamique est de mettre en forme le lieu d'Evans par l'ajout de pôle et de zéro. Bien souvent, le but est d'obtenir une paires de pôle complexe conjugué qui caractérise la

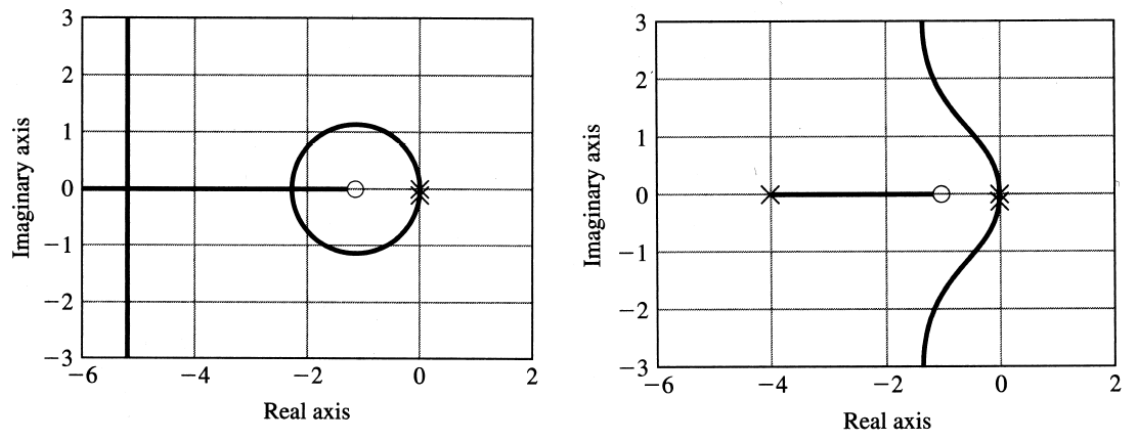


Figure 7.4: Lieu d'Evans du satellite avec régulateur PD et pôle de filtrage

dynamique souhaitée pour la boucle fermée.

Les correcteur les plus utilisés sont :

- Les correcteur à avance de phase qui approche un peut de la fonction d'un PD : il accélère la réponse en diminuant le temps de monté et le dépassement indicielle
- Les correcteur à retard de phase qui approche d'un PI : Il sont généralement utiliser pour améliorer la précision de la boucle fermé
- Les correcteur notch qui permettent d'assurer la stabilité pour une boucle fermée d'un système avec des pôle faiblement amortis

Les correcteur à avance et à retard de phase ont pour fonction de transfert

$$D(p) = k_c \frac{p + z_c}{p + p_c} \quad (7.46)$$

On voit alors que si  $z_c < p_c$ , on approche de la fonction d'un PD (l'effet dominant est l'effet du pôle ou du zéro le plus proche de l'origine, ici le zéro), il s'agit donc d'un correcteur à avance de phase. Par contre, si  $z_c > p_c$  il s'agira d'un correcteur à retard de phase.

#### 7.4.2 Effet de l'addition de pôle et de zéro dans le demi-plan gauche

Comme on l'a vu dans le cas du satellite, l'effet d'un pôle additionnel dans le demi-plan gauche est de repousser le lieu vers la droite.

On avait aussi vu que l'effet de l'ajout d'un zéro est d'attirer le lieu vers la gauche. Il tend donc pour un gain  $K$  donné à améliorer la marge de stabilité et à accélérer la réponse.

#### 7.4.3 Conception d'un régulateur à avance de phase

La marche à suivre pour la conception d'un régulateur à avance de phase est la suivante :

- On détermine la position souhaitée des pôles en fonction de spécification demandées
- On vérifie alors que ces spécification ne peuvent pas être atteint par modification du gain de la boucle (en gros, est-ce que ces pôles sont déjà sur le lieu d'Evans ou pas). Si ce n'est pas le cas, on détermine un correcteur à avance de phase qui tord le lieu d'Evans comme il faut pour obtenir les pôle de la boucle fermée souhaité (on définit don  $z_c$  et  $p_c$ )
- Pour finir, on déterminer  $k_c$  à l'aide de la condition sur le module.

Etant en manque de pratique, on peut trouver la deuxième étapes un peut obscure. Pour faire simple, la technique habituelle consiste à simplifier un des pôle (se trouvant à droite de la position souhaiter pour notre système) avec le zéro du correcteur. Ensuite, on détermine la position du pôle du correcteur de façon à ce que le pôle souhaité du système respecte la définition du lieu d'Evans point de vue argument (la définition 2).

#### 7.4.4 Conception d'un régulateur à retard de phase

On est dans le cas où le système possède une réponse transitoire offrant les caractéristique requises, mais dont les propriétés ne sont pas satisfaisante à l'état d'équilibre. Il faut donc pouvoir augmenter le gain de la boucle ouverte sans modifier de façon significative la réponse transitoire, i.e. il ne faut pas modifier le lieu d'Evans de façon significative au voisinage des pôles dominants. L'approche est donc de concevoir un correcteur dont la contribution angulaire est faible au voisinage des pôles dominants. On va donc placer les pôles et les zéro proche l'un de l'autre et proche de l'origine du plan complexe.

La marche à suivre générale est la suivante :

- Tracer le lieu d'Evans de  $G(p)$  et localiser les pôles dominant sur base des spécifications
- De là, on évalue la constante d'erreur statique d'intérêt pour le problème et on détermine par quel facteur il faut la multiplier pour remplir les spécification du problème
- On détermine alors  $z_C$  et  $p_C$  pour atteindre le gain du correcteur requis sans modifier de façon significative le lieu d'Evans au voisinage des pôles dominants
- En pour finir, on trace le lieu d'Evans obtenu avec en tenant compte du correcteur afin de pouvoir ajuster  $k_C$  au besoin.

#### 7.4.5 Correcteur à retard et à avance de phase

On appelle cela un Lead-lag compensator. Il s'agit en fait de la mise en série d'un correcteur à avance de phase et d'un correcteur à retard de phase. On utilise se type de correcteur lorsque l'on doit aussi bien améliorer la réponse en transitoire que la précision du système.

#### 7.4.6 Présence de mode oscillant peut amortis dans le système

Il y a deux moyen pour stabiliser ce type de mode. La première méthode est la stabilisation par le gain. Elle consiste à ajouter un correcteur à retard de phase. Il est alors possible de diminuer le gain suffisamment au hautes fréquence et en particulier à la fréquence de ce mode oscillant.

La deuxième méthode est la stabilisation par la phase. Elle consiste à ajouter un correcteur notch dans le système. Ce dernier à pour fonction de transfert

$$D_{notch}(p) = \frac{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2}{(p + \omega_0)^2} \quad (7.47)$$

On choisit alors  $\omega_0$  de telle sorte que les branche du lieu quitte les pôles oscillant en se déplaçant vers la gauche.

#### 7.4.7 Marge de gain

La marge de gain est le facteur maximum et/ou minimum par lequel on peut modifier le gain du système réglé sans perdre la stabilité de la boucle fermé.

On peut déterminer celle-ci à partir du lieu d'Evans. En effet, on peut calculer la valeur du gain  $K$  correspondant à un problème donné et on peut aussi calculer la valeur du gain  $K$  correspondant à une oscillation amortie (voir intersection du lieu et de l'axe imaginaire). On peut donc déterminer la marge de gain qui n'est rien d'autre que le rapport des deux gain.

## Chapter 8

# Méthode harmonique

Lorsque l'entrée d'un système caractérisé par une fonction de transfert  $H(p)$  est une sinusoïde  $u(t) = A_0 \sin(\omega_0 t)$ , on a vu que la sortie est donnée par

$$y(t) = A_0 |H(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg(H(j\omega_0))) \quad (8.1)$$

Il suffit donc de connaître le gain et l'argument de la fonction de transfert pour la fréquence de la sinusoïde pour connaître la sortie du système. Et c'est là que prend tout l'intérêt des courbes de Bode.

Le tracer des courbes de Bode consiste à porter dans un premier graphe le module de la transmittance isochrone exprimée en dB en fonction de  $\omega$  et dans un deuxième graphe, la phase de cette transmittance en fonction de  $\omega$ . Généralement, on les porte en fonction du logarithme de  $\omega$  pour pouvoir visualiser l'effet sur des gammes de fréquences plus importantes.

### 8.1 Tracer asymptotique des courbes de Bode

#### 8.1.1 Forme du modèle

Le modèle de fonction de transfert utilisé pour le tracer asymptotique des courbes de Bode est le suivant

$$H(p) = A_0 \frac{(pT_{z1} + 1) \dots (pT_{zm} + 1)}{(pT_{p1} + 1) \dots (pT_{pn} + 1)} \quad (8.2)$$

qu'il faut distinguer du modèle que l'on utilisait pour le tracer des lieux d'Evans. Lorsque l'on désire tracer asymptotiquement une courbe de Bode, il y a plusieurs cas (facteur) auxquels on peut être confronté. Ces différents facteurs sont :

- $A_0(j\omega)^k$ : qui peut correspondre à un pôle ou un zéro à l'origine en fonction du signe  $k$ .
- $(j\omega T + 1)^{\pm 1}$ : qui est un facteur du deuxième ordre. Il représente soit un pôle, soit un zéro situé autre part qu'à l'origine.
- Le facteur du deuxième ordre

$$\left[ \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + 1 \right]^{\pm 1} \quad (8.3)$$

Il correspond à des pôles ou à des zéros du deuxième ordre (qui peuvent donc être complexe conjugué).

### 8.1.2 Pôle ou zéro à l'origine

Pour un tel facteur, le gain est donné par

$$20 \log |A_0(j\omega)^k| = 20 \log |A_0| + 20k \log \omega \quad (8.4)$$

Il s'agit d'une droite de pente de 20 dB/dec. Elle est donc décroissante pour un pôle et croissante pour un zéro. De plus, on voit que sa pente est d'autant plus forte que le degré du pôle est fort. La phase quand à elle est donnée par

$$\arg(A_0(j\omega)^k) = \begin{cases} k90^\circ & \text{si } A_0 > 0 \\ -180 + k90^\circ & \text{si } A_0 < 0 \end{cases} \quad (8.5)$$

### 8.1.3 Facteur du premier ordre

Si le facteur se trouve au numérateur, il correspond à un zéro du premier ordre. Cela se traduit dans le tracer asymptotique par une augmentation de 20 dB/dec dans le graphe du gain et un déphasage de  $+90^\circ$  dans celui de la phase au point correspondant au pôle. On illustre cela à la Figure 8.1. Si maintenant, le facteur se trouve au dénominateur, on aurait un dans le tracer une

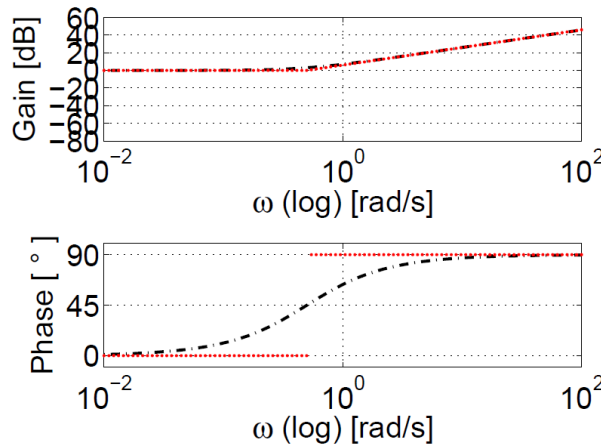


Figure 8.1: Courbe de Bode pour un zéro du premier ordre ne se trouvant pas à l'origine

diminution de 20 dB/dec dans le graphe du gain et un déphasage de  $-90^\circ$  dans celui de la phase.

### 8.1.4 Facteur du deuxième ordre

Dans le cas du facteur du deuxième ordre, comme on peut s'y attendre, on aura le même comportement que pour le facteur du premier ordre, mais multiplier par 2 puisque les pôles sont d'ordre deux (i.e. déphase de  $180^\circ$  au lieu de  $90^\circ$  et dégainage de 40 dB/dec au lieu de 20). Cependant, dans le cas de pôles complexes conjugués, on peut voir apparaître un pic de résonance à la position du pôle (comme illustré à la Figure 8.2). Sur base de la Figure 8.2, on voit qu'il faut prendre en compte l'effet du facteur d'amortissement dans notre discussion. Si on regarde la valeur de la fonction de transfert à la fréquence de résonance

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (8.6)$$

on verra que l'amplitude du pic de résonance est donnée par

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{1 - \zeta^2} \quad (8.7)$$

On peut observer le fait intéressant que pour un facteur d'amortissement  $\zeta = 0.707 (= \sqrt{2}/2)$ , on n'a pas de pic ( $M_r = 1$ ).

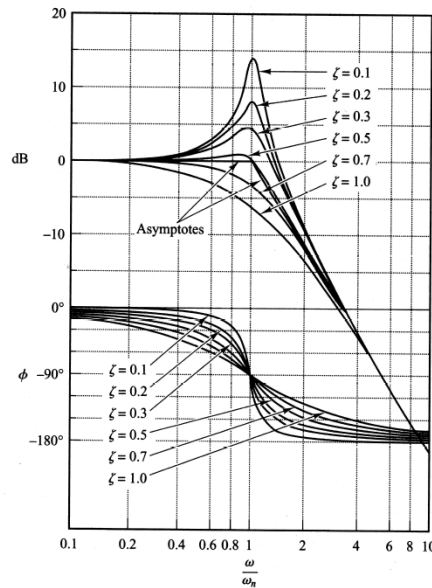


Figure 8.2: Effet du facteur d'amortissement

### 8.1.5 Système à déphasage non nominale

Si on prend deux fonction de transfert

$$H_1(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega T_1} \quad \text{et} \quad H_2(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T_1} \quad (8.8)$$

avec  $0 < T < T_1$ . On peut voir que les deux fonction ont le même module. Elle auront donc le même graphe de gain. Par contre, elle n'ont pas la même phase, en effet

$$\arg(H_1) = \arctan(\omega T) - \arctan(\omega T_1) \quad (8.9)$$

$$\arg(H_2) = -\arctan(\omega T) - \arctan(\omega T_1) \quad (8.10)$$

Cette différence de phase mène à un graphe des phase très différent pour les deux système

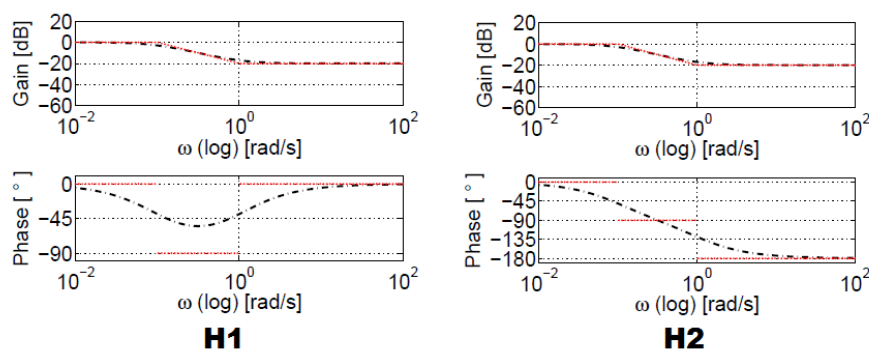


Figure 8.3: Courbe de Bode pour deux système de même gain mais de phase différente

(comme illustré dans la Figure 8.3).

### 8.1.6 Système instable

Pour un système instable, l'axe imaginaire ne fait pas partie de la région de convergence de la fonction de transfert. Il n'existe donc pas de transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle

du système. En conséquent, la réponse à une sinusoïde ne sera pas un sinusoïde puisque la réponse transitoire diverge. Dans ce cas, la courbe de Bode caractérise en fait la réponse à une sinusoïde lorsque le système réglé est stabilisé par un régulateur adéquat.

## 8.2 Stabilité d'une boucle fermée - Méthode harmonique

Les objectifs principaux des méthodes harmoniques sont de pouvoir déduire la stabilité d'une boucle fermée à partir de la réponse harmonique de la boucle ouverte et de pouvoir caractériser les marge de stabilité.

### 8.2.1 Principe de l'argument

On considère une fonction  $f$  analytique dans  $\mathcal{D}$ , domaine intérieur à un contour  $\mathcal{C}$  sauf au pôle de  $\mathcal{D}$ . En outre,  $f$  est analytique et non nulle sur  $\mathcal{C}$  (qui est un chemin admissible simple fermé orienté dans le sens positif). On note également  $\Gamma$  l'image de  $\mathcal{C}$  par la fonction  $f$ . Le principe de l'argument s'énonce alors comme-ci : *Le nombre  $N_E$  d'encerclement de l'origine par le chemin  $\Gamma$  est donné par*

$$N_E = Z - P \quad (8.11)$$

où  $Z$  et  $P$  sont respectivement le nombre de zéro et de pôle de  $f(p)$  à l'intérieur du chemin  $\mathcal{C}$  (multiplicité prise en compte). Pour pouvoir évaluer le nombre d'encerclement de façon simple, on peut tracer un demi-droite passant par l'origine et compter le nombre de croisement avec  $\Gamma$  en prenant bien en compte l'orientation du chemin.

### 8.2.2 Critère de stabilité de Nyquist

On part de la fonction de transfert de la boucle fermée

$$\frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{D(p)G(p)}{1 + D(p)G(p)H(p)} \quad (8.12)$$

On désire alors appliquée le principe de l'argument à la fonction caractéristique

$$f(p) = 1 + D(p)G(p)H(p) \quad (8.13)$$

Les zéro de  $f(p)$  sont alors les pôles de la boucle fermée alors que les pôle de  $f(p)$  sont les pôle de la boucle ouverte. On définit le contour de Nyquist comme le contour représenté sur la Figure 8.4. Si on définit par  $\Gamma$  l'image de ce contour par la fonction  $f(p)$ , on aura alors par application du principe de l'argument que le nombre d'encerclement de l'origine par  $\Gamma$  est la différence du nombre de pôles de la boucle fermée dans le demi plan droit et du nombre de pôles de la boucle ouverte dans le demi-plan droit

$$N_E = P_{BF} - P_{BO} \quad (8.14)$$

On peut également remarquer que le nombre d'encerclement de l'origine par  $\Gamma$  est égal au nombre d'encerclement du point  $(-1, 0)$  par la courbe  $\Gamma_{bo}$  (l'image de  $\mathcal{C}$  par  $f_{bo}(p) = D(p)G(p)H(p)$ ).  $\Gamma_{bo}$  est appelée la courbe de Nyquist complète. En cas de pôle imaginaire, il y a lieu de modifier le contour de Nyquist en introduisant des demi-cercles pour les exclure du contour. Le critère de Nyquist devient donc finalement

$$N_{(-1,0)} = P_{BF} - P_{BO} \quad (8.15)$$

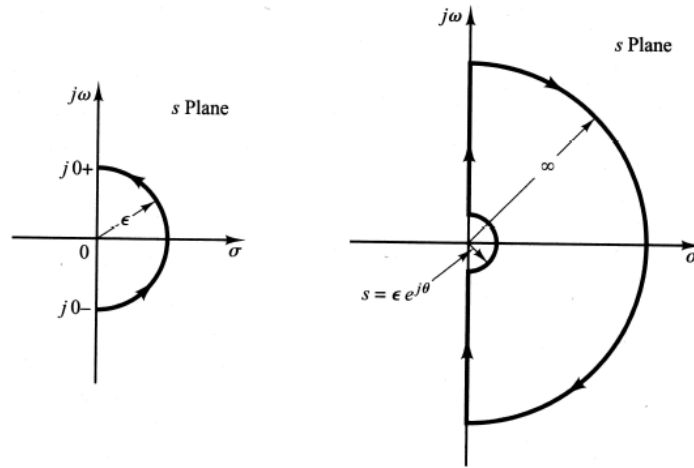


Figure 8.4: Contour de Nyquist

### 8.2.3 Esquisse de la courbe de Nyquist complète

#### Système du premier ordre

Un système du premier ordre est caractériser par la fonction bien connue qu'on peut réécrire de la façon suivante

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} + j \frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2} \quad (8.16)$$

Le tracé asymptotique du contour de Nyquist peut être approché à partir des courbe de Bode en représentant  $H(j\omega)$  en coordonnées polaires. On analyse les trois cas principaux

- $\omega = 0$  :  $|H(j0)| = 1$  et  $\arg(H(j0)) = 0$
- $\omega = 1/T$  :  $|H(j/T)| = 1/\sqrt{2}$  et  $\arg(H(j/T)) = -45^\circ$
- $\omega \rightarrow \infty$  :  $|H(j\omega)| \rightarrow 0$  et  $\arg(H(j\omega)) = -90^\circ$

On peut aussi noter la fonction de transfert de la façon suivante (en notant  $X$  la partie réelle et  $Y$  la partie imaginaire)

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad (8.17)$$

On a donc l'équation d'un cercle (représenté sur la Figure 8.5).

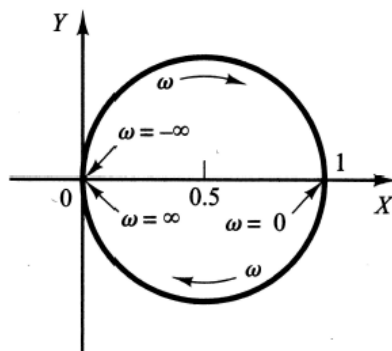


Figure 8.5: Courbe de Nyquist pour une système du premier ordre



## Système du deuxième ordre

La fonction de transfert d'un système du deuxième ordre peut se noter

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta j\frac{\omega}{\omega_n} + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (8.18)$$

Comme pour le système du premier ordre, on peut calculer quelque point caractéristique

- $\omega = 0$  :  $|H(j0)| = 1$  et  $\arg(H(j0)) = 0$
- $\omega = \omega_n$  :  $|h(j\omega_n)| = 1/(2\zeta)$  et  $\arg(H(j\omega_n)) = -90^\circ$
- $\omega \rightarrow \infty$  :  $|H(j\infty)| = 0$  et  $\arg(H(j\infty)) = -180^\circ$ .

Dans un cas sous-amortis ( $\zeta < 1$ ), le pic de résonance correspondra au point le plus éloigné de l'origine alors que pour un cas sur-amortis (il y a alors deux pôles réels) la courbe de Nyquist se rapproche d'un cercle lorsqu'un des pôles est nettement plus proche de l'origine que l'autre (voir la Figure 8.6).

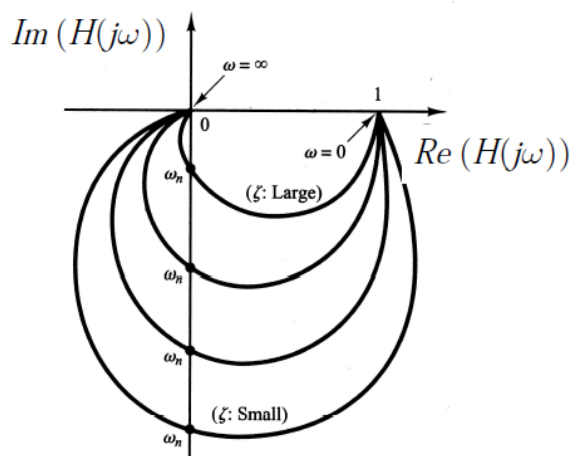


Figure 8.6: Courbe de Nyquist pour un système du deuxième ordre

## Système avec ou sans pôle à l'origine

Pour un système de type 0 vis-à-vis de la référence (i.e. pas de pôle à l'origine) le point de départ de la courbe de Nyquist se trouve sur l'axe réel positif ou négatif en fonction du signe de  $A_0$ .

Pour un système de type 1 vis-à-vis de la référence, on observe une asymptote verticale. En effet,  $\omega = 0$  correspond à un point dont la partie réelle est finie et la partie imaginaire vaut plus ou moins l'infinie en fonction du signe de  $A_0$ .

Ce dernier cas peut sembler un peu nébuleux (d'où ça sort ??). Pour mieux le comprendre, prenons un petit exemple. On prend comme fonction de transfert de la boucle ouverte suivante

$$D(p)G(p) = \frac{A_0}{p(pT + 1)} \quad (8.19)$$

Comme on a un pôle à l'origine, il faut intégrer un demi-cercle dans le contour de Nyquist pour pouvoir étudier le système. On prend un demi-cercle d'équation  $p = \epsilon e^{j\theta}$  avec  $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ . On a alors

$$D(\epsilon e^{j\theta})G(\epsilon e^{j\theta}) \approx \frac{A_0}{\epsilon e^{j\theta}} = \frac{A_0}{\epsilon} e^{-j\theta} \quad (8.20)$$

Ceci est en fait l'équation d'un demi-cercle de rayon infini (si  $\epsilon \rightarrow 0$ ) qui se referme dans le demi-plan droit. Ce qui explique pourquoi on observe la présence d'une asymptote (c'est elle qui nous amène sur le demi-cercle). On peut chercher cette asymptote (ici dans le cas  $A_0 = 1$  pour simplifier)

$$D(j\omega)G(j\omega) = \frac{-T}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} \quad (8.21)$$

On voit donc que quand  $\omega \rightarrow 0^+$ , on a  $X \rightarrow -T$  et  $Y \rightarrow -\infty$ . On a représenté l'exemple pour la fonction

$$F_{BO} = \frac{1}{p(p+2)} \quad (8.22)$$

à la Figure 8.7.

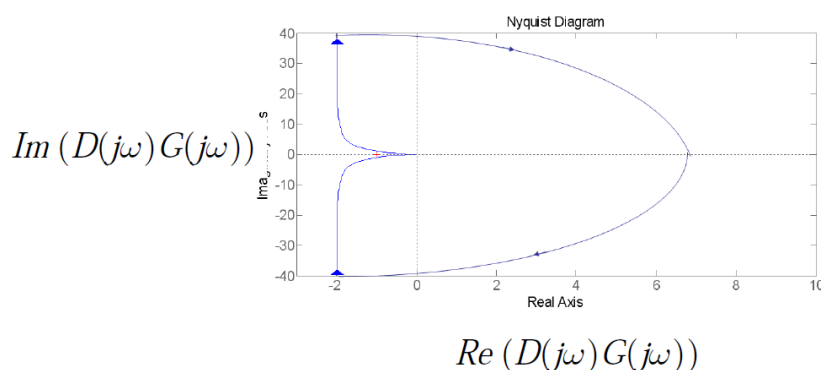


Figure 8.7: Courbe de Nyquist pour la fonction  $F_{BO} = \frac{1}{p(p+2)}$

#### 8.2.4 Intervalle de valeur du gain pour lequel la boucle fermée est stable

Le plus simple est de prendre un petit exemple simple. On prend un système réglé de fonction

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)^2} \quad (8.23)$$

et un régulateur proportionnel de gain  $k_P$ . Pour commencer, on prend un gain unitaire. On étudie les autres valeurs après. On fait alors la décomposition en partie réelle et imaginaire afin de pouvoir déterminer les asymptotes verticales et les points d'intersection avec l'axe réel

$$G(j\omega) = \frac{-2}{(\omega^2 + 1)^2} + j \frac{\omega^2 - 1}{\omega(\omega^2 + 1)^2} \quad (8.24)$$

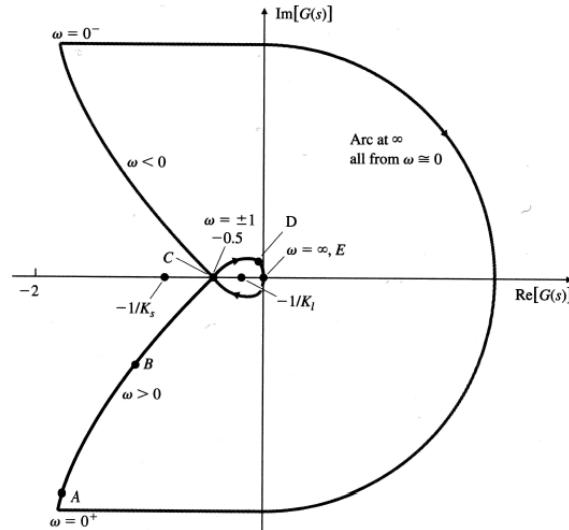
On trouve alors le point d'intersection sur l'axe réel

$$\omega = \pm 1 \quad \text{Re}(G(j\omega)) = -0.5 \quad (8.25)$$

et les asymptotes verticales

$$\text{Re}(G(j\omega)) = -2 \quad (8.26)$$

On a représenté la courbe de Nyquist du système à la Figure 8.8. On peut maintenant étudier les effets d'une modification du gain  $k_P$ . On remarque pour commencer qu'une modification de la valeur de  $k_P$  entraîne une homothétie de centre  $(0,0)$  et de rapport  $k_P$ . On se souvient que par le critère de Nyquist, le nombre d'encerclement du point  $(-1,0)$  par la courbe de Nyquist correspond à la différence entre le nombre de pôles non hurwitzien de la boucle fermée et du nombre de pôles non hurwitzien de la boucle ouverte (N.B. un pôle non hurwitzien est un pôle dans le demi-plan droit). Comme la boucle ouverte ne possédait pas de pôle non hurwitzien, le


 Figure 8.8: Courbe de Nyquist de la fonction  $G(p) = \frac{1}{p(p+1)^2}$ 

nombre d'encerclement représentera directement le nombre de pôle non hurwitzien de la boucle fermée.

On peut aussi remarquer que le nombre d'encerclement de  $(-1, 0)$  par  $k_P G(p)$  est égal au nombre d'encerclement de  $(-1/k_P, 0)$  par  $G(p)$ . On voit donc que si  $-1/k_P$  est dans l'intervalle  $] -0.5, 0[$ , il sera encercler deux fois par le contour. Il faut donc avoir  $k_P < 2$ . On voit aussi que si  $-1/k_P$  est compris dans l'intervalle  $]0, +\infty[$  il y aura un encerclement. Il faut donc  $k_P > 0$ . On a donc comme intervalle de valeur pour avoir une boucle fermée stable

$$k_P \in ]0, 2[ \quad (8.27)$$

### 8.2.5 Marge de stabilité

Les marges de stabilité permettent d'évaluer la tolérance de la boucle fermée vis-à-vis d'éventuelle erreur de modélisation. Elles font donc couvent parties des spécifications pour la conception d'un régulateur. Il existe trois types de marge de stabilité : les deux marge classique (marge de gain et marge de phase) et la marge vectorielle. On a déjà défini la marge de gain au chapitre précédent. La marge de phase quant à elle est le retard de phase que l'on peut ajouter dans la boucle sans créer d'instabilité.

#### Visualisation sur la courbe de Nyquist

Par les discussion de la section précédente, on comprend aisément que la marge de gain est le rapport d'homothétie qui amène la courbe de Nyquist à passer par le point  $(-1, 0)$ . Pour la marge de phase, il s'agira de l'angle de rotation qui amène le point de coupure de la courbe de Nyquist en  $(-1, 0)$ . N.B. Le point de coupure est le point pour lequel le module de la boucle ouverte vaut 1 (il correspond à la pulsation de coupure  $\omega_c$ ).

#### Visualisation sur la courbe de Bode

On peut visualiser la marge de gain et de phase sur la courbe de Bode la boucle ouverte. Par les discussion précédente, on peut trouver de façon logique que la marge de gain se calcul en un point d'argument  $-180^\circ$  (puisque sur l'axe réel négatif). On le mesure sur la courbe de Bode par

$$MG = -20 \log |D(j\omega_{180})G(j\omega_{180})| \quad (8.28)$$

où  $\omega_{180}$  est la pulsation pour laquelle la phase vaut  $-180^\circ$ . La marge de phase elle doit se mesurer à la fréquence de coupure. Elle est donc donnée par

$$MP = 180^\circ + \arg(D(j\omega_c)G(j\omega_c)) \quad (8.29)$$

On représente un exemple de marge de gain et de marge de phase calculer sur les courbes de

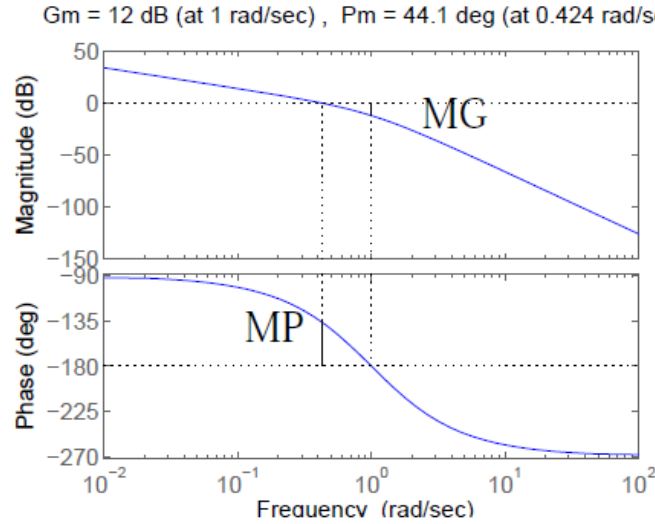


Figure 8.9: Marge de stabilité pour la boucle ouverte  $F_{BO}(p) = \frac{0.5}{p^3 + p^2 + p}$

Bode à le Figure 8.9.

### Marge de stabilité vectorielle

La marge de stabilité vectorielle est la plus courte distance euclidienne entre le point  $(-1, 0)$  et la courbe de Nyquist de la boucle ouverte.

### Lien entre marge de stabilité et facteur d'amortissement

Pour obtenir l'expression classique de la boucle fermé du deuxième degré, on peut prendre la boucle ouvert

$$D(p)G(p) = \frac{\omega_n^2}{p(p + 2\zeta\omega_n)} \quad (8.30)$$

Le calcul de la marge de phase donne alors

$$MP = 180^\circ + \arg(D(j\omega_c)G(j\omega_c)) = \arctan \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}} \quad (8.31)$$

On voit alors que pour une valeur  $\zeta \leq 0.6$  on aura approximativement  $\zeta \approx \frac{MP}{100^\circ}$ .

## 8.3 Conception des régulateur par la méthode harmonique

### 8.3.1 Théorème de Bode

Pour un système stable et à déphasage minimal (i.e. sans zéro dans le demi-plan droit), la phase de  $H(j\omega)$  et le gain de  $H(j\omega)$  sont lié de manière univoque par la relation

$$\arg(H(j\omega_0)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{dM}{du} \right) W(u) du \quad (8.32)$$

où  $M = \ln |H(j\omega)|$ ,  $u = \ln(\omega/\omega_0)$  et  $W(u) = \ln(\cot(|u|/2))$  est la fonction de pondération. N.B. qu'ici l'argument doit s'exprimer en radian sans quoi la relation n'est pas vérifiée. Dans une échelle bilogarithmique, on peut voir que  $\frac{dM}{du} \approx n$  qui est la pente de  $H(j\omega)$  et  $W(u) \approx \frac{\pi^2}{2} \delta(u)$ . La forme approchée du théorème de Bode est alors de dire

$$\arg(H(j\omega_0)) = n \times 90^\circ \quad (8.33)$$

### 8.3.2 Formulation des problème de régulation dans le domaine harmonique

On prend la fonction de transfert entre  $R(p)$  et  $Y(p)$

$$\mathcal{T}(p) = \frac{D(p)G(p)}{1 + D(p)G(p)} \quad (8.34)$$

On veut généralement que le module de celle-ci soit proche de 1 pour les basse fréquence (suivit de trajectoire) et très inférieur à 1 pour les haute fréquence (atténuation du bruit de mesure). il est intéressant à ce stade de définir une notion qui sera utile par la suite : la bande passante. Il s'agit d'intervalle de valeur de la pulsation pour lequel le gain est supérieur ou égal à -3dB. Sa borne supérieur est alors donnée par  $\omega_{BP}$  qui est la sortie pour laquelle la sortie est atténuée de -3dB.

Sur base de la connaissance de  $\omega_{BP}$  on peut définir un premier critère de choix de la fréquence coupure (qui tombe plus ou moins du ciel)

$$\omega_c \leq \omega_{BP} \leq 2\omega_c \quad (8.35)$$

Sur base des spécification de la BF, on peut passer aux spécifications de la BO. Premièrement, on fait en sorte que la pente de la BO soit approximativement égale à -1 autour de la fréquence de coupure (ce qui donne -20dB/dec dans le graphe de Bode). Cela permet d'obtenir une marge de phase raisonnable et donc une réponse suffisamment amortie.

D'une manière générale, les spécification pour une problème de régulation contiennent la bande passante de la BF, la marge de gain, la marge de phase, l'atténuation du bruit de mesure et le type de système en boucle fermée vis-à-vis de la référence et des bruits de mesure.

### 8.3.3 Correcteur à avance de phase

Dans les notation de ce chapitre-ci, on la note

$$D(p) = k_C \frac{1 + PT}{1 + pT\alpha} \quad \alpha < 1 \quad (8.36)$$

Avant de commencer, il faut déterminer l'avance de phase maximale  $\phi_{max}$ . celle-ci s'obtient en annulant la dérivée de l'argument par rapport à  $\omega$ . L'argument de la BO est donné par

$$\arg(D(j\omega)) = \arctan(\omega T) - \arctan(\alpha\omega T) \quad (8.37)$$

L'avance de phase maximale est donc donnée pour  $\omega_{max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$ . Elle est donc donnée par

$$\tan(\phi_{max}) = \frac{1 - \alpha}{2\sqrt{\alpha}} \quad (8.38)$$

Pour bien comprendre le principe de dimensionnement d'un tel correcteur, on prend l'exemple simple du moteur à courant continu dont la fonction de transfert est donnée par

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)} \quad (8.39)$$

Les spécification seront qu'on veut une erreur statique inférieure à 0.1 vis-à-vis d'une rampe unité et qu'on veut un dépassement indicielle inférieure à 25%. La première étape consiste à dimensionner  $k_C$  sur base de l'erreur statique souhaitée

$$e_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p + D(p) \frac{1}{p+1}} = \frac{1}{k_C} \quad (8.40)$$

Il nous reste donc la condition  $k_C \geq 10$ .

La deuxième étape est de faire la liaison entre le dépassement indicielle et la marge de phase (permet le positionnement du pôle et du zéro du correcteur). Il est possible de déterminer le lien

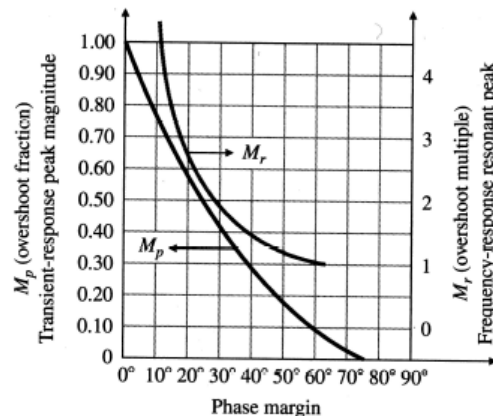


Figure 8.10: Lien entre marge de phase et dépassement indicielle

entre le dépassement indicielle et la marge de phase (sur base du lien entre la marge de phase et le facteur d'amortissement). On obtient alors le graphe de la Figure 8.10. Sur base de ce graphe, on voit qu'une MP de 45° donne une dépassement indicielle de 25%. Or, la marge de gain pour le système réglé par un régulateur proportionnel de gain  $k_C$  est de 20°. Pour obtenir les spécification voulues, il faut rajouter une avance de phase additionnelle de 25° à la fréquence de coupure. Il est cependant impossible de créer un déphasage sans modifier la fréquence de coupure si le gain est fixé. Il faut donc prendre une avance de phase supérieure à 25°. On fait le choix de prendre  $\phi_{max} = 40^\circ$  et donc  $1/\alpha = 5$ . On peut alors calculer que la nouvelle marge de phase est de 53°.

Pour récapituler, la démarche de conception des correcteur à avance de phase est la suivante :

- On déterminer  $k_C$  par une des méthodes suivantes selon les spécification :
  - Choisir  $k_C$  en fonction de l'erreur statique
  - Choisir  $k_C$  de façon à ce que  $\omega_c = \omega_{BP}/2$
- Evaluer les MP de la boucle fermée pour le gain  $k_C$  que l'on vient de calculer
- Sur base des spécification liée à  $M_p$  où à  $\zeta$ , déterminer la marge de phase requise et en déduire l'avance de phase requise.
- Déterminer enfin la valeur de  $\alpha$  sur base de cette dernière.
- Fixer  $\omega_{max} = \omega_c$ , i.e. faire en sorte d'avoir le zéro en  $1/T = \omega_{max}\sqrt{\alpha}$  et le pôle en  $1/T\alpha = \omega_{max}/\sqrt{\alpha}$ .
- Et finir par tracer les courbe de Bode du système dimensionner et vérifier que la marge de phase est bien respecter.

### 8.3.4 Régulateur à retard de phase

Il aura dans les notation de ce chapitre la fonction de transfert

$$D(p) = k_C \frac{1 + pT}{1 + pT\alpha} \quad \alpha > 1 \quad (8.41)$$

Les spécification dans ce cas-ci sont une marge de phase fixé et une constante d'erreur de position, de vitesse ou d'accélération spécifiée.

La méthode générale de conception de correcteur à retard de phase est la suivante

- Déterminer la valeur de  $k_C$  qui assure que la constante d'erreur ait la valeur souhaitée
- Tracer la courbe de Bode de  $k_C G(p)$  et évaluer la marge de phase.
- Choisir le pôle et le zéro du correcteur de manière à diminuer la pulsation de coupure et ainsi obtenir les spécification souhaitées.
- Valider la conception sur la base des courbes de Bode

## Chapter 9

# Introduction à la régulation numérique

L'avantage de la régulation numérique est d'avoir une dépendance moins grande entre la partie matérielle du régulateur et la loi de réglage. On peut donc développer les deux en parallèle et ainsi gagner du temps. Elle offre aussi une plus grande flexibilité puisqu'elle permet d'effectuer des modifications de la loi de réglage après la fin de la conception matérielle et qu'elle permet d'inclure des règles logiques et des opérations non linéaires.

La différence fondamentale est que dans le cas de la régulation numérique, le signal mesuré est échantillonné et quantifié par un convertisseur analogique/numérique. On remarque aussi que le signal réglant est obtenu par une conversion inverse (numérique/analogique), il est donc constant sur une période d'échantillonnage.

Il ne faudra pas oublier de tenir compte du replis spectral et de tout les autres problèmes introduits par la numérisation (problèmes étudiés dans le cours ELEC-H-302). On utilisera souvent un filtre anti-repliement.

La conversion A/N introduit deux problèmes : une diminution de la bande passante de la boucle fermée et un bruit de mesure supplémentaire (provenant de la quantification) d'autant plus important que le nombre de bits du convertisseur est faible.

On cherche donc au final à approcher un régulateur continu à l'aide d'un régulateur discret. La conception se fait donc sur base d'un modèle échantillonné du système réglé.

### 9.1 Approximation d'un régulateur continu par un régulateur discret

Dans cette section, on néglige la quantification et on fait l'hypothèse que la période d'échantillonnage est suffisamment faible pour que le signal réglant discret soit très proche du signal continu engendré par le régulateur analogique. Le problème équivalent (qui permet de passer de continu à discret) est de trouver une équation récurrente qui soit équivalente à l'équation différentielle du système continu.

Pour un régulateur continu PID, on avait

$$U(p) = (k_P + \frac{k_I}{p} + k_D p)E(p) = u_P + u_I + u_D \quad (9.1)$$

De façon discrète, on aura

**Action proportionnelle**

$$u_P(kT_s + T_s) = k_P e(kT_s + T_s) \quad (9.2)$$



### Action intégrale

$$u_I(kT_s + T_s) = u_I(kT_s) + \frac{T_s}{2}(e(kT_s + T_s) + e(kT_s)) \quad (9.3)$$

### Action dérivée

Il suffit d'inverser le rôle de  $u$  et  $e$  par rapport au cas précédent et donc

$$u_D(kT_s + T_s) = -u_D(kT_s) + 2\frac{k_D}{T_s}(e(kT_s + T_s) - e(kT_s)) \quad (9.4)$$

et finalement, on aura

$$u(kT_s + T_s) = u_P(kT_s + T_s) + u_I(kT_s + T_s) + u_D(kT_s + T_s) \quad (9.5)$$

#### 9.1.1 Introduction à la transformée en $Z$

La transformée en  $z$  est l'équivalent discret de la transformée de Laplace. On n'entre pas dans les détails ici. On précise juste qu'on peut voir  $z$  comme l'opérateur d'avance d'une période d'échantillonnage et  $z^{-1}$  comme l'opérateur de retard d'une période d'échantillonnage. On a alors

$$\mathcal{Z}(u(kT_s + T_s)) = zU(z) \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}(u(kT_s - T_s)) = z^{-1}U(z) \quad (9.6)$$

On peut l'appliquer à l'action d'intégration

$$zU_I(z) = U_I(z) + k_I \frac{T_s}{2}(zE(z) + E(z)) \rightarrow U_I(z) = k_I \frac{T_s}{2} \frac{z+1}{z-1} E(z) \quad (9.7)$$

On peut le faire de façon similaire pour les autres actions. On obtient ainsi la fonction de transfert discrète du régulateur PID

$$U(z) = \left( k_P + k_I \frac{T_s}{2} \frac{z+1}{z-1} + k_D \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \right) E(z) \quad (9.8)$$

#### 9.1.2 Règle du trapèze ou méthode de Tustin

La méthode est toute simple, on part de la fonction de transfert du régulateur et on applique le remplacement  $p \leftrightarrow \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$

$$D_d(z) = D_c \left( \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \right) \quad (9.9)$$

#### 9.1.3 Obtention de l'équation récurrente

On part de l'expression de la fonction de transfert discrète du régulateur

$$D(z) = \frac{c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n}{z^n + d_1 z^{n-1} + \dots + d_n} = \frac{U(z)}{E(z)} \quad (9.10)$$

de la, on peut déterminer la transformée en  $z$  de l'équation récurrente

$$z^n U(z) = -d_1 z^{n-1} U(z) - \dots - d_n U(z) + c_0 z^n E(z) + c_1 z^{n-1} E(z) + \dots + c_n E(z) \quad (9.11)$$

On divise alors par  $z$  et on obtient

$$U(z) = -d_1 z^{-1} U(z) - \dots - d_n z^{-n} U(z) + c_0 E(z) + \dots + c_n z^{-n} E(z) \quad (9.12)$$

dont on tire l'équation récurrente

$$u(k) = -d_1 u(k-1) - \dots - d_n u(k-n) + c_0 e(k) + c_1 e(k-1) + \dots + c_n e(k-n) \quad (9.13)$$