

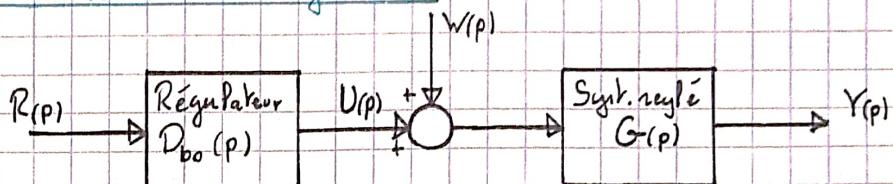
### - Suivi de trajectoire:

Faire en sorte que la grandeur réglée suive une consigne non constante  
exemple: robot qui suit un chemin donné

$$\Rightarrow Y(p) = R(p)$$

### - Comment assurer un bon suivi de trajectoire:

- Boucle ouverte:



La sortie pour la BO est:  $Y_{bo}(p) = D_{bo}(p) G(p) R(p) + G(p) W(p)$

En considérant qu'il n'y a pas de perturbations, la grandeur réglée suit la référence si  $D_{bo}(p) G(p) = 1$

Soient  $G(p) = \frac{b(p)}{a(p)}$  et  $D_{bo}(p) = \frac{c(p)}{d(p)}$  des fonctions rationnelles,

De suivre est parfait si on choisit  $\frac{c(p)}{d(p)} = \frac{a(p)}{b(p)}$ .

$$\Rightarrow \frac{b(p) c(p)}{a(p) d(p)} = 1$$

Conditions de stabilité: les racines de  $a(p)$  et  $b(p)$  sont à partie réelle négative

De plus,  $G(p)$  et  $D_{bo}(p)$  doivent être propres ( $\deg a \geq \deg b$ )

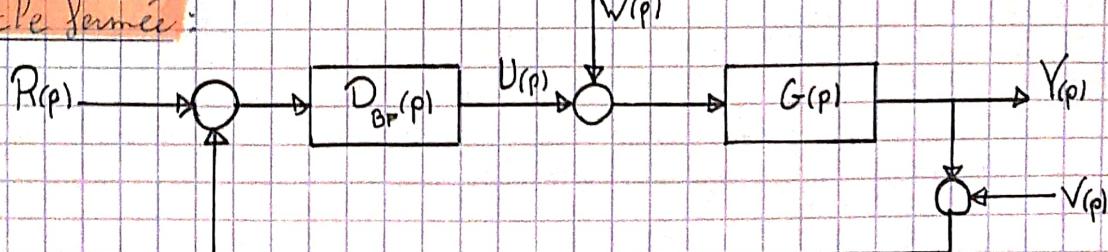
$$\Rightarrow vu que \frac{c(p)}{d(p)} = \frac{a(p)}{b(p)} \text{ on considère l'inverse approché } \frac{c(p)}{d(p)} = \frac{a(p)}{b(p)} \underbrace{(p-p_1)\dots}_{\text{pôles rapides}}$$

Limitations de l'actionneur (évitement saturation):

$$u_{min} \leq u(t) \leq u_{max}$$

Sensibilité aux erreurs de modélisation: éviter de simplifier un pôle légèrement à gauche de l'axe imaginaire.

- Boucle fermée:



En comparant la sortie à la référence, on trouve:

$$Y(p) = (R(p) + V(p)) D_{bf}(p) G(p) \Leftrightarrow Y(p) = \frac{G(p) D_{bf}(p)}{1 + G(p) D_{bf}(p)} R(p)$$

$$\text{L'erreur de négligage est } E_{BF} = R - Y = \frac{1}{1 + G(p) D_{BF}(p)} R(p)$$

En considérant une consigne constante, on peut calculer l'erreur statique.

$$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p E_{BF}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{1 + G(p) D_{BF}(p)} \frac{1}{p} = \frac{1}{1 + G(0) D_{BF}}$$

Et pour une consigne sinusoidale  $r(t) = A_r \sin(\omega_0 t)$ , on a une erreur :

$$e(t) = A_e \sin(\omega_0 t + \phi(\omega_0)) \text{ où } A_e = \sqrt{\frac{1}{1 + G(j\omega_0) D(j\omega_0)}} A_r$$

On veut donc que le module de  $D_{BF}(j\omega)$  soit le plus grand possible dans la plage de fréquences où se produisent les variations de consigne.

$$D_{BF} \rightarrow \infty \Rightarrow E_{BF} \rightarrow 0$$

- Comment garantir une erreur statique nulle pour une référence polynomiale de degré 1 :

Référence polynomiale de degré  $k \Rightarrow r(t) = \frac{E^k}{k!} t^k$  et  $R(p) = \frac{1}{p^{k+1}}$

donc  $k=1 \Rightarrow$  référence en rampe  $r(t) = E_2 t(t)$  et  $R(p) = \frac{1}{p^2}$

Vis-à-vis de la référence  $\Rightarrow$  on considère  $W=V=0$ , on a donc une erreur :

$$E = \frac{1}{1 + G D_{BF}} R = S R \text{ où } S \text{ est la fonction de sensibilité}$$

TVF  
BF stable

L'erreur statique n'est  $e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p E(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \frac{1}{1 + G(p) D(p)}$

Pour que  $e_s = 0$ , on ajoute 2 pôles à l'origine dans la chaîne directe.

$$\text{On a alors : } G(p) D_{BF}(p) = \frac{G(p) D_{BF0}(p)}{p^2}$$

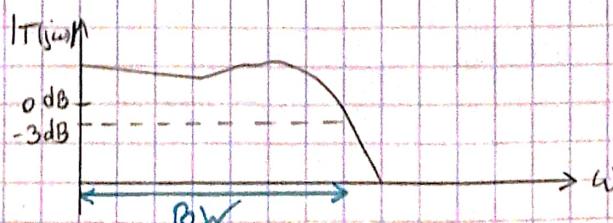
$$\Rightarrow e_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{G(p) D_{BF0}(p)}{p^2}} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p + \frac{G(p) D_{BF0}(p)}{p}} = 0$$

NB : -  $D_{BF0}(p) G(p) \neq 0$

- ajouter trop de pôles déstabilise la boucle fermée à cause du déphasage

- Quel concept utilise-t-on pour caractériser la plage de fréquences dans laquelle un bon suivi de trajectoire est obtenu en BF :

On utilise le concept de bande passeuse, soit la plage de fréquences pour laquelle le gain de la fonction de transfert de la BF est supérieur à  $-3 \text{ dB}$ .

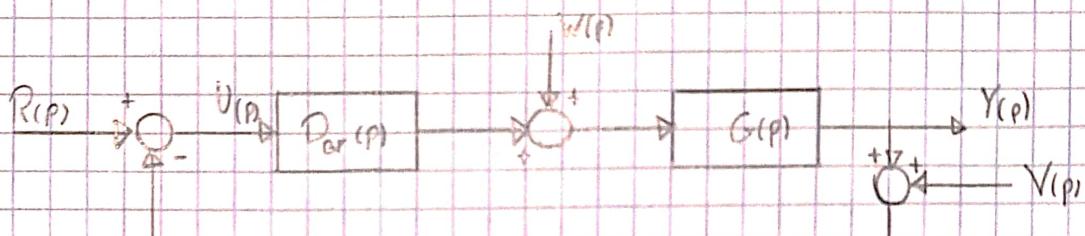


- Réjection de perturbation:

La réjection de perturbation est ce qui caractérise la régulation de maintien : réduire les perturbations afin de s'assurer que la grandeur réglée reste à la référence constante.

- Comment assurer une bonne réjection d'une perturbation à l'entrée du système régulé?

NB: BO  $\rightarrow$  régulateur n'a pas d'effet sur la perturbation.



$$\text{L'erreur de négligage est } E_{bf} = R - Y_H = \frac{1}{1 + GD_{bf}} R - \underbrace{\frac{G}{1 + GD_{bf}}}_{\text{contribution de la perturbation}} W + \frac{GD_{bf}}{1 + GD_{bf}} V$$

Pour s'assurer d'une bonne réjection de perturbation il faut que  $D_{bf}$  soit le plus grand possible afin que la contribution de la perturbation à l'erreur de négligage tende vers 0.

- Comment garantir une erreur statique nulle vis-à-vis d'une perturbation polynomiale de degré 2?

$$\text{On considère } R = V = 0 \Rightarrow E_{bf} = -\frac{G}{1 + GD_{bf}} W$$

Perturbation polynomiale de degré 2  $\Rightarrow w(t) = \frac{t^2}{2} \delta(t) \Rightarrow W(p) = \frac{1}{p^3}$

$$\text{Erreur statique: } e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p E(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{-G(p)}{1 + G(p) D_{bf}(p)} \frac{1}{p^3}$$

Pour s'assurer que  $e_s = 0$ , on ajoute 3 pôles à l'origine en amont de la perturbation :

$$G(p) D_{bf}(p) = G(p) \frac{D_{bf0}(p)}{p^3} \Rightarrow e_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{-G(p)}{1 + G(p) D_{bf0}(p)} \frac{1}{p^3}$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-G(p)}{p^2 + G(p) D_{bf0}(p)} = 0$$

Cela revient à appliquer le principe du modèle interne, qui dit que une CNS pour avoir  $e_s = 0$  est que si la perturbation a une transformée de Laplace de forme  $W(p) = \frac{1}{p^{k+1}}$  alors la fonction de transfert du régulateur doit contenir  $\frac{1}{p^{k+1}}$ .

- Pourquoi la plage de fréquences où l'on peut assurer la réjection de perturbation est-elle limitée ?

En observant l'erreur de réglage:

$$E_{bf} = \frac{1}{1+GD_{bf}} R - \frac{G}{1+GD_{bf}} W + \frac{GD_{bf}}{1+GD_{bf}} Y$$

on voit que pour réduire la contribution des perturbations à l'erreur de réglage, il faut que  $|D_{bf}|$  soit élevé.

Pour réduire la contribution du bruit de mesure à l'erreur de réglage, il faut que  $|D_{bf}|$  soit faible.

$$\lim_{D_{bf} \rightarrow \infty} \frac{G}{1+GD_{bf}} = 0 \text{ mais } \lim_{D_{bf} \rightarrow \infty} \frac{GD_{bf}}{1+GD_{bf}} = 1$$

Donc, les perturbations sont importantes aux basses fréquences et les bruits de mesure sont importants aux hautes fréquences.

$\Rightarrow$  il faut une fonction de transfert du régulateur  $D_{bf}$  dont le module est important aux basses fréquences mais faible aux hautes fréquences

On ne peut donc pas assurer parfaitement la réjection

Soit un système décrit par la représentation en variables d'état:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

- Stabilité interne:  $y(t) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

Un système est asymptotiquement stable si pour une entrée nulle l'état tend vers zéro quand t tend vers l'infini, quel que soit son état initial.

$\Rightarrow$  toute entrée bornée donne une sortie et des grandeurs d'état bornées

CNS de stabilité interne: - SLP décrit par un modèle en variables d'état:

Toutes les valeurs propres de la matrice du système A ont une partie réelle négative

- Système décrit par une fraction rationnelle propre

Tous les pôles de la fonction de transfert ayant simplification pôles réels ont une partie réelle négative

On a  $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , pour calculer les valeurs propres, on calcule:

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (\alpha - \lambda)(-1 - \lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = \alpha \end{cases} \text{ sont les valeurs propres}$$

Le système est asymptotiquement stable si  $\alpha < 0$

- Fonction de transfert du système:

Pour des CI nulles:  $x(0) = 0$

Transformées de Laplace unipolaires:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{Laplace}} \begin{cases} pX_1(p) = \alpha X_1(p) + \beta X_2(p) + U(p) \\ pX_2(p) = -X_2(p) + U(p) \\ Y(p) = X_2(p) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{U(p)}{p+1} \Leftrightarrow H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p+1}$$

NB: on aurait pu utiliser  $H(p) = C(pI_m - A)^{-1}B + D$

- Système observable ? Si non, quelle est la valeur propre inobservable ?

a)  $m=2 \Rightarrow$  matrice d'observabilité  $G = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$   
Nombre de variables d'état

$$\text{or } y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \text{ et } CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang } G = 1$$

Or un SLP est observable si  $\text{rang } G = m \Rightarrow$  le système n'est pas observable

Il n'est donc pas possible de reconstruire  $x(t), t \geq 0$  à partir des tracés d'entrée et de sortie.

b) Pour déterminer la valeur propre inobservable on effectue la transformation de similarité mettant en évidence les parties inobservables.

On trouve la forme modale en utilisant la matrice des vecteurs propres de A que l'on calcule :

$$\begin{aligned} -\lambda_1 = -1: A\varphi = \lambda_1 \varphi &\Leftrightarrow (A - \lambda_1 I_2) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha+1 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + \frac{\beta}{\alpha+1} v_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\lambda_2 = \alpha: A\psi = \lambda_2 \psi &\Leftrightarrow (A - \lambda_2 I_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } L = \begin{pmatrix} -\beta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Cd = CL = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\beta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1 \ 0)$$

Le coef.  $(Cd_2)$  étant nul, il s'agit de la valeur propre  $\lambda_2 = \alpha$  qui est inobservable.

Modèle dynamique décrivant l'évolution du niveau de liquide  $h(t)$  dans un réservoir :

$$Sh(t) = q_{in}(t) - c\sqrt{h(t)}$$

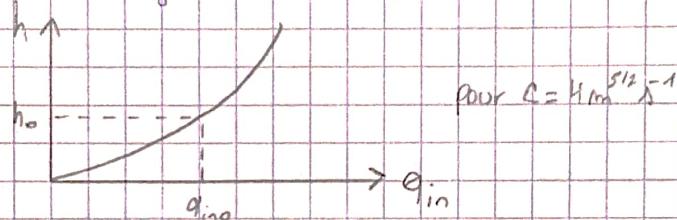
où  $q_{in}$  est le débit volumique d'entrée,  $S$  est la section droite du réservoir et  $c$  est une constante dépendant de la forme de l'orifice de sortie et de la densité du fluide.

- Déterminer l'ensemble des états d'équilibre de ce système :

Etat d'équilibre : solution stationnaire de l'EDO, indépendante du temps

$$\Rightarrow \text{on impose } \frac{dh}{dt} = 0 \Rightarrow h = \left(\frac{q_{in}}{c}\right)^2$$

On effectue donc la caractéristique statique qui permet de connaître l'état d'équilibre en fonction de l'entrée constante.



- Linéarisation autour d'un état d'équilibre :

On voit que la caractéristique statique n'est pas linéaire, on cherche donc à linéariser autour d'un point de fonctionnement  $(q_{ino}, h_0)$  en considérant que l'on a des petites variations autour de cet état d'équilibre :

$$\begin{cases} h(t) = \tilde{h}(t) + h_0 \\ q_{in}(t) = \tilde{q}_{in}(t) + q_{ino} \end{cases} \quad \text{avec } \tilde{h}(t) \text{ et } \tilde{q}_{in}(t) \text{ les écarts par rapport à l'état d'éq.}$$

On linéarise ensuite la racine carée avec un dév. en série de Taylor au voisinage de  $h_0$ :

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_0} + \frac{1}{2\sqrt{h_0}}(h-h_0) + \mathcal{O}((h-h_0)^2)$$

On substitue ces expressions dans l'éq. non-linéaire :

$$S \frac{d(\tilde{h}(t)+h_0)}{dt} + c\sqrt{h_0} + \frac{c}{2\sqrt{h_0}} \tilde{h}(t) = q_{ino} + \tilde{q}_{in}(t)$$

$$\text{or } \frac{d}{dt} h_0 = 0 \text{ et } q_{ino} = c\sqrt{h_0}$$

$$\Rightarrow \text{Modèle linéarisé : } S \frac{d\tilde{h}(t)}{dt} + \frac{c}{2\sqrt{h_0}} \tilde{h}(t) = \tilde{q}_{in}(t)$$

$$- \text{Fonction de transfert: } S(p) \tilde{H}(p) + \frac{C}{2S\sqrt{h_0}} \tilde{H}(p) = Q_{in}(p)$$

$$H(p) = \frac{\tilde{H}(p)}{Q_{in}(p)} = \frac{1/S}{p + C/(2S\sqrt{h_0})}$$

$$\text{Réponse indicelle} \Rightarrow q_{in}(t) = d(t) \Rightarrow S(p) = H(p) Q_{in}(p) = \frac{1}{p} \frac{1/S}{p + C/(2S\sqrt{h_0})}$$

$$\text{Décomposition: } S(p) = \frac{A}{Sp} + \frac{B}{S(p + \frac{C}{2S\sqrt{h_0}})} \rightarrow A = \frac{2S\sqrt{h_0}}{C} = -B$$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{2\sqrt{h_0}}{Cp} - \frac{2\sqrt{h_0}}{C(p + \frac{C}{2S\sqrt{h_0}})} = \frac{2\sqrt{h_0}}{C} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{C}{2S\sqrt{h_0}}} \right)$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{2\sqrt{h_0}}{C} \left( 1 - e^{-\frac{C}{2S\sqrt{h_0}}t} \right) d(t)$$

$$\text{IP l'agit d'un système du 1er ordre} \Rightarrow s(t) = A_0 (1 - e^{-\sigma t}) d(t)$$

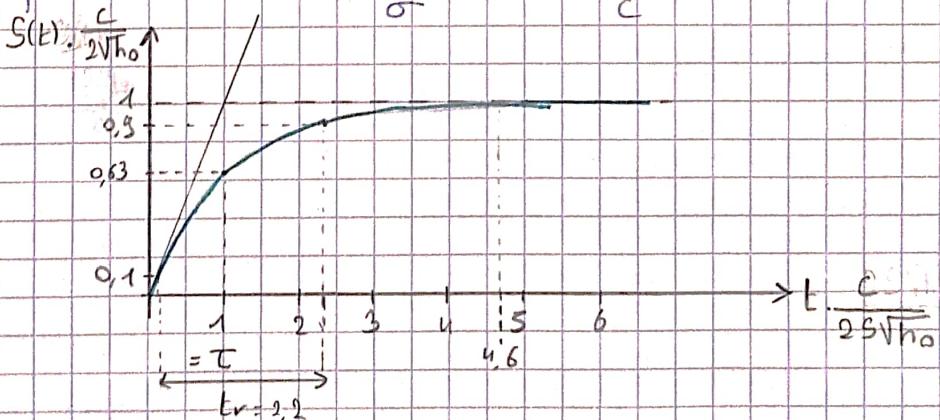
$$\text{avec } A_0 = \frac{2\sqrt{h_0}}{C} \text{ et } \sigma = \frac{C}{2S\sqrt{h_0}} \Rightarrow T = \frac{1}{\sigma} = \frac{2S\sqrt{h_0}}{C}$$

$$\hookrightarrow \text{Perle à l'origine: } \left. \frac{ds(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = h(0^+) = \left( \frac{2\sqrt{h_0}}{C} \frac{C}{2S\sqrt{h_0}} e^{-\frac{C}{2S\sqrt{h_0}}t} \right) \Big|_{t=0^+} = \frac{1}{S}$$

$$\hookrightarrow \text{Gain statique: } S = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \frac{2\sqrt{h_0}}{C}$$

$$\hookrightarrow \text{Temps d'établissement: } t_s = \frac{4,6}{\sigma} = 4,6 \cdot \frac{2S\sqrt{h_0}}{C}$$

$$\hookrightarrow \text{Temps de montée: } t_r = \frac{2,2}{\sigma} = 2,2 \cdot \frac{2S\sqrt{h_0}}{C}$$



Réacteur chimique continu :

$$\frac{dT(t)}{dt} = a_{11} T(t) + a_{12} C_A(t) + b T_e(t)$$

$$\frac{dC_A(t)}{dt} = a_{21} T(t) + a_{22} C_A(t)$$

$$Y(t) = T(t)$$

$$a_{11} = 4, a_{12} = 2, a_{21} = -2, a_{22} = -2, b = 1$$

$\rightarrow T(t)$  = écarts de température du mélange

$\rightarrow C_A(t)$  = écarts de concentration volumique de A

$\rightarrow T_e(t)$  = écarts de température du lq. de refroidissement

- Stabilité intrinsèque:

$$\begin{pmatrix} \dot{T}(t) \\ \dot{C}_A(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} T(t) \\ C_A(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_B T_e(t)$$

Le système est asymptotiquement stable si les valeurs propres de A ont à partie réelle nulle négative

$\Rightarrow$  toute orbite bornée donne une limite et des grandeurs d'état bornées.

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-2-\lambda) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -8 + 2\lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (-4) = 20 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 1+\sqrt{5} > 0 \\ 1-\sqrt{5} < 0 \end{cases}$$

Une des valeurs propres a à partie réelle positive  $\Rightarrow$  le système réglé est asymptotiquement instable.

- Fonction de transfert:

Pour des CI nulles :  $T(0) = 0, C_A(0) = 0$

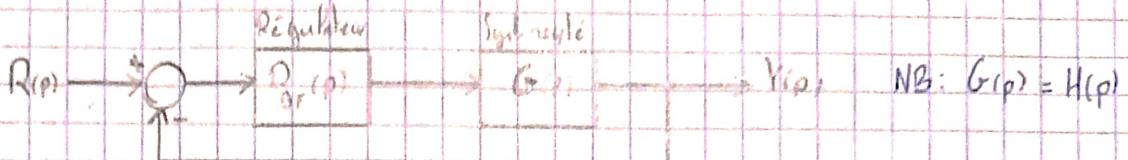
Transfertées de Laplace unilateralées :

$$\left\{ \begin{array}{l} pT(p) = 4T(p) + 2C_A(p) + T_e(p) \\ pC_A(p) = -2T(p) - 2C_A(p) \\ Y(p) = T(p) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_A(p) = \frac{-2}{(p+2)} T(p) \\ T(p) = \frac{p+2}{p^2 - 2p - 4} T_e(p) \\ Y(p) = T(p) \end{array} \right.$$

$$\text{Et } H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{T(p)}{T_e(p)} = \frac{p+2}{(p-1+\sqrt{5})(p-1-\sqrt{5})}$$

$\rightarrow$  pôles de  $H(p)$  caractéristiques aux VP de A car pas de amplification

## - Régulateur proportionnel et lieu d'Evans:



Is Régulateur proportionnel  $\Rightarrow D_{BF}(p) = k_p p$

$$\Rightarrow \text{Fonction de transfert de la boucle fermée: } T_{bf}(p) = \frac{k_p H(p)}{1 + k_p H(p)}$$

On considère l'équation caractéristique de la boucle fermée qui nous permet d'obtenir les pôles de la boucle fermée en fonction de  $k = k_p$ :

$$1 + D_{bf}(p)G(p) = 1 + k L(p) = 0 \quad \text{ou} \quad k = \frac{1}{L(p)}$$

$$L(p) = \frac{b(p)}{a(p)} = H(p) = \frac{p+2}{(p-1-\sqrt{5})(p-1+\sqrt{5})}$$

$$\Rightarrow 1 + k \frac{p+2}{(p-1-\sqrt{5})(p-1+\sqrt{5})} = 0 \Leftrightarrow a(p) + k b(p) = p^2 - 2p - 4 + k(p+2) = 0 \\ \Leftrightarrow p^2 + (k-2)p + 2k-4 = 0$$

On voit que pour  $k=0$  on a: 2 pôles en  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=3,24$  et  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-1,24$

$k=2$  on a: 2 pôles confondus en 0

On a un zéro en  $p=-2$ .  $\Rightarrow m=2$  et  $m=1$

1) **Branches:** 1 branche reliant un pôle au zéro  
1 branche reliant un pôle à un zéro de l'infini

car  $k=0 \Rightarrow a(p)=0 \Rightarrow$  pôles  
 $k \rightarrow \infty \Rightarrow L(p) = -\frac{1}{k} = 0 \Rightarrow b(p)=0$  ou  $p \rightarrow \infty$

2) **CÉ sur l'axe réel:**  $]-\infty, -2] \cup [1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5}]$  ∈ lieu d'Evans

3) **Asymptotes:** 1 asymptote  $\Rightarrow D=0,1,\dots,m-m-1=0$

$$\Rightarrow \Phi_0 = -180^\circ \Rightarrow \text{axe horizontal}$$

4) **Points où le lieu quitte l'axe réel:**  $\frac{dk}{dp}=0$  ou  $k=-1 = \frac{p^2-2p-4}{L(p)} = \frac{p^2-2p-4}{p+2}$

$$\Leftrightarrow \frac{dk}{dp} = \frac{(2p-2)(p+2)-(p^2-2p-4)}{(p+2)^2} = \frac{p^2+4p}{(p+2)^2} = 0 \Leftrightarrow p(p+4)=0 \\ \Leftrightarrow p = \begin{cases} 0 \\ -4 \end{cases}$$

Les points appartiennent bien au lieu d'Evans

5) **Point où le lieu à l'axe imaginaire**

$$\Leftrightarrow \text{Avec axe imaginaire} \Rightarrow p=j\omega \text{ car } \sigma=0 \Rightarrow -\omega^2 + (k-2)j\omega + 2k-4=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2k-4-\omega^2=0 \\ (k-2)\omega=0 \end{cases} \Rightarrow k=2$$

On peut également utiliser la table de Routh

$2$	$p^2$	$1$	$2k-4$
$1$	$p$	$k-2$	
$0$	$p^0$	$2k-4$	

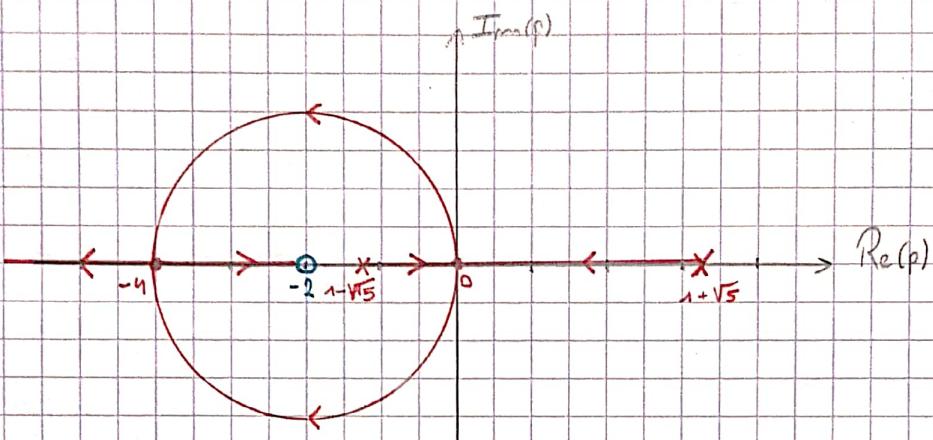
Stable asymptotiquement si les 3 éléments de la 1ère colonne sont  $> 0$

$$\Leftrightarrow k > 2$$

Instabilité en  $k=2 \Rightarrow$  2 lignes nulles

Ligne 2 nulle  $\Rightarrow$  racines de  $p^2 + 0 = 0 =$  pôles sur l'axe imaginaire  $\Rightarrow$  pôle double en  $p=0$

b) Angle de départ et d'arrivée: Les points où le lieu quitte l'axe réel ne correspondent pas aux pôles



- Valeur de  $k_p$  qui fournit une tolérance via-à-vis d'une diminution de gain d'un facteur  $\frac{1}{2}$

Système stable si  $k > 2$

La marge de gain est le facteur maximal par lequel on peut modifier le gain sans pertir la stabilité

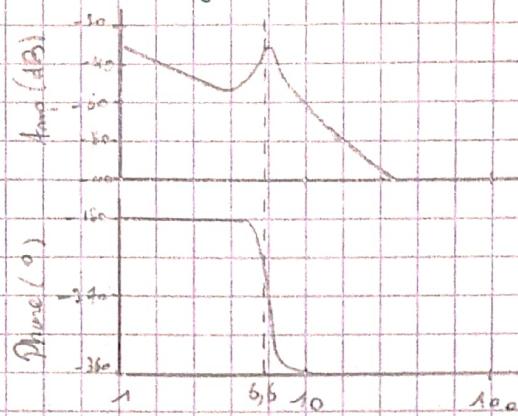
$$\text{Dans ce cas-ci, } MG = 20 \log_{10} \left( \frac{2}{k_p} \right) = 20 \log_{10} \left( \frac{1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow k_p = 4$$

Satellite avec actionneurs et capteurs colocalisés. Orientation  $\theta$  négligée par un mètre de commande  $u$ .

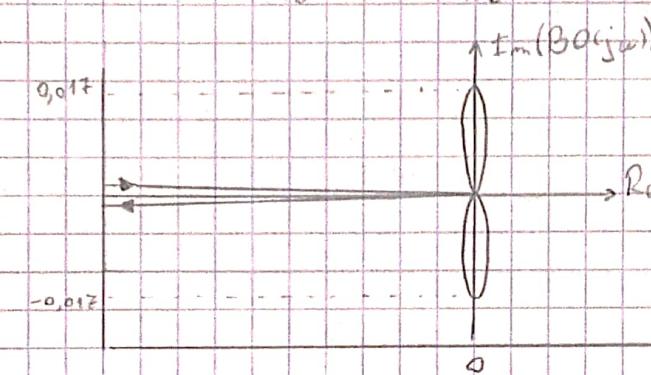
1) Courbes de Bode et de Nyquist de la BO avec un régulateur proportionnel de gain  $h_{prop} = 1$  et un capteur supposé parfait ( $H(s) = 1$ )

Bode:



$w$  (rad/s) Fig 2.

Nyquist:

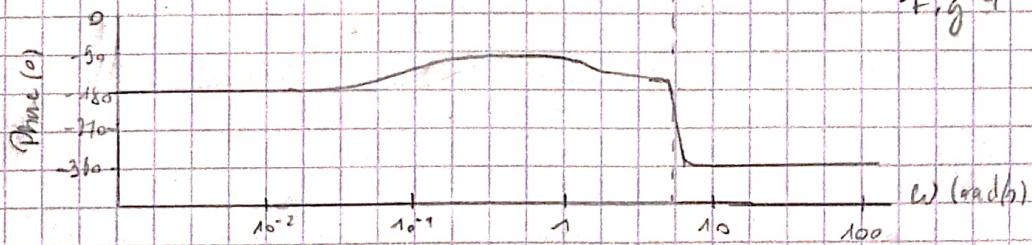


$w$  (rad/s) Fig 3

2) Courbes de Bode de la BO avec un régulateur  $D(p) = h_p \frac{(p+0.3)^2}{(p+0.5)^2}$  où  $h_p = 1$  et  $H(s) = 1$



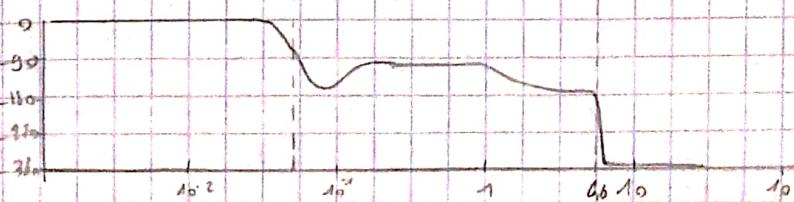
Fig 4



3) Courbes de Bode de la BF à rétroaction unitaire avec un régulateur  $D(p) = h_p \frac{(p+0.3)^2}{(p+0.5)^2}$  où  $h_p = 1$



Fig 5



- Le système négé possède-t-il des pôles à l'origine. Si oui, combien ?

Boucle ouverte avec  $b_p = 1$  et  $H(p) = 1 \Rightarrow B_0(p) = G(p)$

Aux basses fréquences : perte =  $-40 \text{ dB/dec}$   
phase =  $-180^\circ$

$$\Rightarrow 20 \log |A_0(j\omega)|^k = 20 \log |A_0| + 20k \log \omega \text{ où } k = -2$$

$\Rightarrow$  2 pôles à l'origine

N'oublie : ~~lorsqu'il y a un zéro, il y a deux pôles conjugués~~



- Combien de pôles et/ou zéros le système négé possède-t-il en plus des pôles à l'origine ?

Le pic de résonance et le saut de phase de  $-180^\circ$  à  $-360^\circ$  indique que la fonction de transfert du système négé possède un facteur du 2<sup>e</sup> ordre au dénominateur.

$$G(p) = \frac{1}{p^2 \left( \frac{p^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{p}{\omega_n} + 1 \right)} \text{ avec } \omega_n \approx 6,6 \text{ rad/s}$$

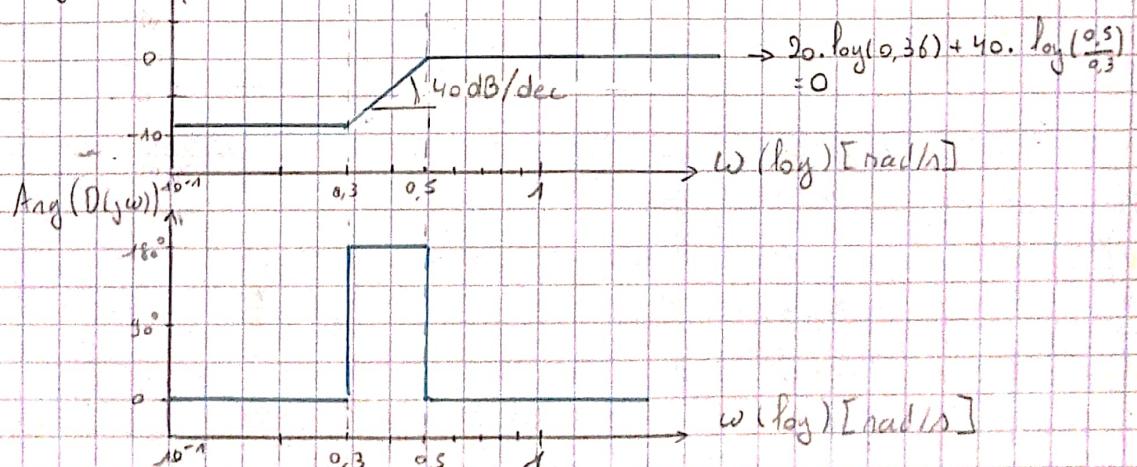
Cela correspond donc à 2 pôles complexes conjugués à partie réelle négative (can saut de  $-180^\circ$ )

- Tracé asymptotique de la courbe de Bode de  $D(p) = b_p \frac{(p+0,3)^2}{(p+0,5)^2}$

$$D(p) = \frac{(p+0,3)^2}{(p+0,5)^2} = \frac{(0,3)^2}{(0,5)} \cdot \frac{\left(\frac{p}{0,3} + 1\right)^2}{\left(\frac{p}{0,5} + 1\right)^2} \Rightarrow A_0 = \frac{9}{25} = 0,36 \rightarrow 20 \log(A_0) = -8,87$$

1 zéro double en  $p = -0,3 \Rightarrow$  perte =  $+40 \text{ dB/dec}$  en  $\omega = 0,3$   
phase =  $+180^\circ$

1 pôle double en  $p = -0,5 \Rightarrow$  perte =  $-40 \text{ dB/dec}$  en  $\omega = 0,5$   
phase =  $-180^\circ$



- Quel régulateur proportionnel fournit la plus grande marge de phase

Marge de phase : retard de phase que l'on peut ajouter dans la boucle sans perdre la stabilité

Is Régulateur proportionnel : - Nyquist:  $\omega = \omega_c$   $\rightarrow MP \approx \text{atan}(\frac{0,001}{\omega}) \approx 0^\circ$

$$k_{\text{prop}} = 1$$

Is angle de la rotation qui amène le point de courbure en  $(-1,0)$

- Bode:  $MP = 180^\circ + \text{arg}(D(j\omega_c)G(j\omega_c))$

$\omega_c$  = pulsation de coupure  $\rightarrow$  pulsation pour laquelle le module vaut  $-3 \text{ dB}$   $\Rightarrow$  asymptote nulle

$$\omega_c < 1 \Rightarrow MP = 180^\circ - 180^\circ = 0 \rightarrow \omega_c \text{ basses fréquences}$$

Is Régulateur  $D(p) = k_p \frac{(p+0,3)^2}{(p+0,5)^2}$  - Figure 4  $\rightarrow$  courbe de Bode de la BO

$$k_p = 1$$

$$\omega_c \approx 0,05 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow MP = 180^\circ + \text{arg}(D(j\omega_c)G(j\omega_c)) = 180 - 165 = 15^\circ$$

Faire varier la valeur des coefficients  $k_{\text{prop}}$  et  $k_p$  permet d'augmenter ou diminuer le gain du régulateur et ainsi déplacer la valeur de la fréquence de coupure.

On voit sur le graphe de phase du régulateur proportionnel que la marge de phase maximale est nulle

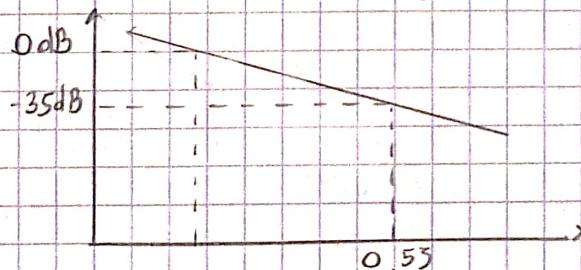
$$MP_{\text{max}} = 0$$

Par contre pour le deuxième régulateur, on voit sur la figure 4 qu'il est possible d'avoir une marge de phase maximale pour  $\omega_c \rightarrow 0,55 \text{ rad/s}$

Dans ce cas-là  $MP_{\text{max}} \approx 65,25^\circ$

Il faut translater la courbe de  $35 \text{ dB}$  pour que  $\omega_c \approx 0,55 \text{ rad/s}$

On a donc  $35 \text{ dB} = 20 \log(k_p) \Leftrightarrow k_p = 10^{\frac{35}{20}} = 56,23$



$$D(p) = b_p \frac{(p+0,3)^2}{(p+0,5)^2} \text{ avec } b_p = 1, H(p) = 1$$

- Quelle plage de fréquences assure un bon suivi du signal de référence?

Sait la fonction de transfert de la boucle fermée entre  $R(p)$  et  $Y(p)$ :

$$T(p) = \frac{D(p) G(p)}{1 + D(p) G(p)} = \frac{Y(p)}{R(p)}$$

Le suivi de trajectoire est bon si  $|T(p)| \geq 1$  car dans ce cas:  $|Y(p)| \approx |R(p)|$  soit si  $|D(p) G(p)|$  est assez élevé.

On considère que  $|T(p)|$  doit être supérieur à 0,707

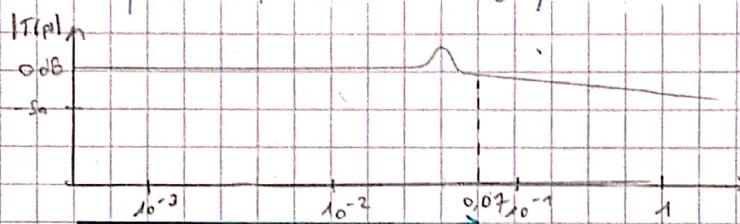


Fig. 5

On trouve graphiquement  $\omega_{BP} \approx 0,07 \text{ rad/s} \Rightarrow BW = [0; 0,07 \text{ rad/s}]$

- Schéma fonctionnel avec le plus faible nombre d'intégrateurs:

Vu que  $D(p)$  n'est pas strictement propre il faut isoler le terme d'action directe.

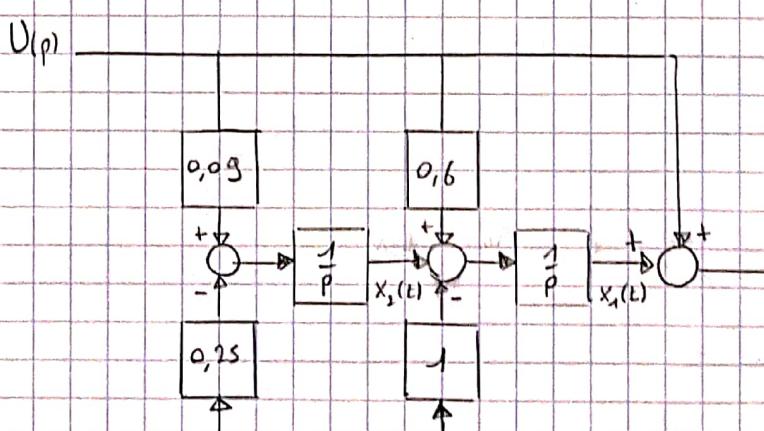
$$\cancel{\text{pas nécessaire pour la stabilité}}$$

$$D(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = b_p \frac{p^2 + 0,6p + 0,09}{p^2 + p + 0,25} = 1 + \frac{(0,6-1)p + (0,09-0,08)}{p^2 + p + 0,25} = 1 + \frac{-0,4p - 0,16}{p^2 + p + 0,25}$$

$$b_p \underbrace{\frac{a_1 b_0}{a_2}}_{D_{sp}(p)}$$

On a donc  $Y(p) = b_p U(p) + D_{sp}(p) D(p)$

$$\Leftrightarrow Y(p) = U(p) + \frac{0,6U(p)}{p} + \frac{0,09U(p)}{p^2} - \frac{Y(p)}{p} - \frac{0,25Y(p)}{p^2}$$



$\rightarrow$  Pas réalisable car  $H(p)$  pas strictement propre

$\rightarrow$  Utiliser  $H_{sp}(p)$   
Voir page 7-3

### - Modèle en variables d'état:

$$\text{On a } D_{SP}(p) = \frac{b_1 p + b_2}{p^2 + a_1 p + a_2} = \frac{-0,4p - 0,16}{p^2 + p + 0,25}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -0,25 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -0,4 \\ -0,16 \end{pmatrix}$$

Le modèle en variable d'état est donc:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -0,25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,4 \\ -0,16 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 0) + u(t) \end{cases}$$

car on a  $C = (1 \ 0)$  et  $D = b_0 = 1$

### - Équation de récurrence permettant la mise en œuvre du régulateur numériquement:

On prend comme hypothèses que la période d'échantillonage  $T_S$  est suffisamment petite pour que l'on puisse considérer le signal continu et on néglige la quantification.

Approximation par un régulateur discret en utilisant la règle du trapèze:

$$P \rightarrow \frac{2}{T_S} \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow D_d(z) = \frac{\left(\frac{2}{T_S} \frac{z-1}{z+1} + 0,3\right)^2}{\left(\frac{2}{T_S} \frac{z-1}{z+1} + 0,5\right)^2} = \frac{\left(\frac{(1+0,3T_S)}{T_S} z - (1-\frac{0,3}{T_S})\right)^2}{\left((1+0,5\frac{T_S}{2})z - (1-0,5T_S)\right)^2}$$

$$= \frac{\left(1+0,15T_S\right)^2 z^2 - 2\left(1 - \frac{0,03}{4} T_S^2\right)z + \left(1-0,15T_S\right)^2}{\left(1+0,25T_S\right)^2 z^2 - 2\left(1 - \frac{1}{16} T_S^2\right)z + \left(1-0,25T_S\right)^2}$$

$$= \frac{c_0 z^2 + c_1 z + c_2}{z^2 + d_1 z + d_2} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

où  $c_0 = \frac{\left(1+0,15T_S\right)^2}{\left(1+0,25T_S\right)^2}$ ,  $c_1 = -2\left(1 - \frac{0,03}{4} T_S^2\right)$ ,  $c_2 = \frac{\left(1-0,15T_S\right)^2}{\left(1+0,25T_S\right)^2}$

$$d_1 = \frac{-2\left(1-0,25T_S\right)}{\left(1+0,25T_S\right)}, \quad d_2 = \frac{\left(1-0,25T_S\right)^2}{\left(1+0,25T_S\right)^2}$$

On a donc la transformée en z de l'éq. récurrente:

$$z^2 U(z) = -d_1 z U(z) - d_2 U(z) + c_0 z^2 E(z) + c_1 z E(z) + c_2 E(z)$$

ce qui nous permet d'obtenir l'éq. récurrente:

$$U(k+2) = -d_1 u(k+1) - d_2 u(k) + c_0 e(k+2) + c_1 e(k+1) + c_2 e(k)$$

Vu que  $\omega_{BP} = 0,07 \text{ rad/s}$ , avec le fr. de Shamen-Nyquist on trouve:

$$T_S < \frac{2\pi}{\omega_{BP} \cdot 2} = 44,87 \Rightarrow \text{on prend } T_S = 20 \lambda$$

$$\Rightarrow C_0 = \frac{4}{3}, C_1 = \frac{4}{3}, C_2 = \frac{1}{3}, D_1 = \frac{4}{3}, D_2 = \frac{4}{3}$$

$$U(h+2) = \frac{1}{3} [-12U(h+1) - 4U(h) + 4C(h+2) + 4C(h+1) + C(h)]$$


---

Schéma fonctionnel avec  $H_{SP}(p)$ :

$$H_{SP}(p) = \frac{-0,4p - 0,16}{p^2 + p + 0,25}$$

$$\Leftrightarrow Y_{SP}(p) = H_{SP}(p) \cdot U(p)$$

$$\Leftrightarrow Y_{SP}(p) = -\frac{1}{p} Y_{SP}(p) - \frac{0,25}{p^2} Y_{SP}(p) \\ - \frac{0,4}{p} U(p) - \frac{0,16}{p^2} U(p)$$

