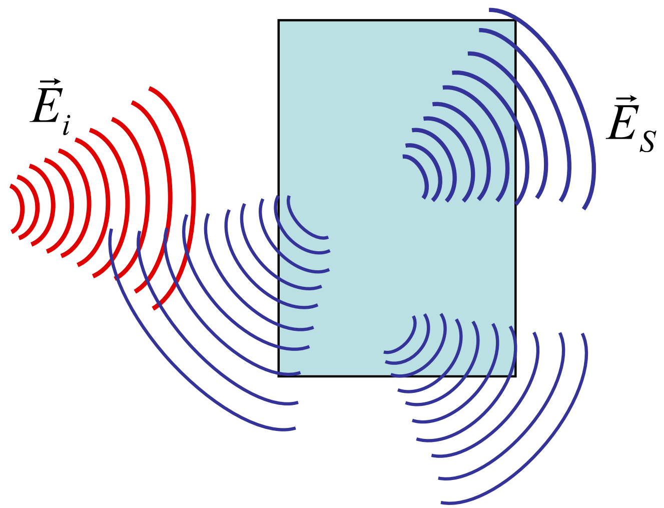
ULB

8. Réflexion, transmission et diffraction



En tout point, à l'intérieur comme à l'extérieur du matériau:

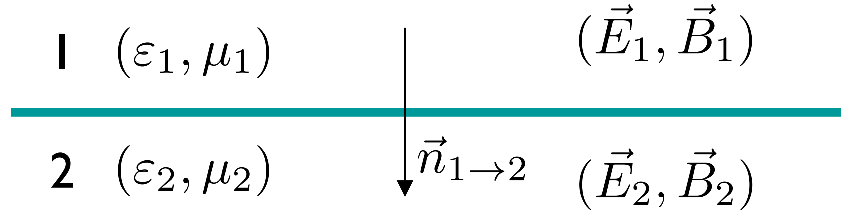
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_i(\vec{r},t) + \vec{E}_s(\vec{r},t)$$

Champ « incident » ou « appliqué »

Champ dû aux charges internes (« scattered field »)

Ces champs doivent être sommés dans le vide (y compris dans le matériau)

Soit une interface séparant deux milieux:



Les champs sont des fonctions de l'espace et du temps: $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$

$\vec{B} = \vec{B}(x, y, z, t)$

Comme toute fonction ils peuvent être continus ou discontinus en un point

Conditions de saut des champs:

$$\vec{n}_{1\rightarrow 2} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$
$$\vec{n}_{1\rightarrow 2} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$\Rightarrow$ Composantes continues des champs:
Composante tangentielle de $\vec{E}$
Composante normale de $\vec{B}$

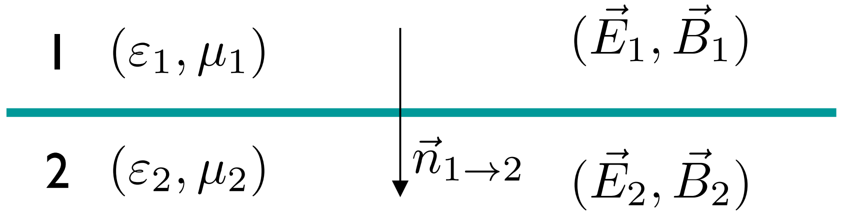
$$\vec{n}_{1\rightarrow 2} \cdot (\varepsilon_2 \vec{E}_2 - \varepsilon_1 \vec{E}_1) = \rho_S$$

$\longrightarrow$ Densité superficielle de charges libres

$$\vec{n}_{1\rightarrow 2} \times \left(\frac{\vec{B}_2}{\mu_2} - \frac{\vec{B}_1}{\mu_1} \right) = \vec{J}_S$$

$\longrightarrow$ Densité superficielle de courant (de charges libres)

Soit une interface séparant deux milieux:



On ne considère pas les matériaux magnétiques

$$\vec{n}_{1\to 2} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \;=\; 0 \qquad \vec{n}_{1\to 2} \cdot (\varepsilon_2 \vec{E}_2 - \varepsilon_1 \vec{E}_1) \;=\; \rho_S$$

$$\vec{n}_{1\to 2} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \;=\; 0 \qquad \vec{n}_{1\to 2} \times \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) \;=\; \mu_0 \vec{J}_S$$

Cas 1: interface entre deux diélectriques: $\rho_S = 0 \qquad \vec{J}_S = 0$

$$\vec{n}_{1\to 2} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \;=\; 0 \qquad \vec{n}_{1\to 2} \cdot (\varepsilon_2 \vec{E}_2 - \varepsilon_1 \vec{E}_1) \;=\; 0$$

$$\vec{n}_{1\to 2} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \;=\; 0 \qquad \vec{n}_{1\to 2} \times \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) \;=\; 0$$

Soit une interface séparant deux milieux:

1 (ε_1, μ_1) $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$

2 (ε_2, μ_2) $\vec{n}_{1\to 2}$ $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$

Cas 2: surface conductrice: $\rho_S \neq 0$ $\vec{J}_S = 0$ (cf profondeur de peau > 0)

Cas 3: surface parfaitement conductrice: $\sigma \to \infty$ $\rho_S \neq 0$ $\vec{J}_S \neq 0$

Dans le conducteur parfait: $\vec{E} = \vec{B} = 0$

Supposons le milieu 2 parfaitement conducteur:

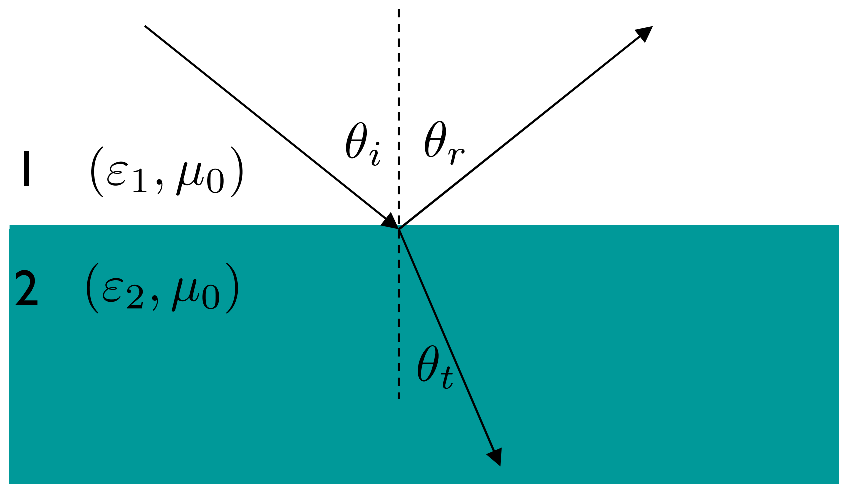
$$\vec{n}_{1\to 2} \times (\cancel{\vec{E}_2} - \vec{E}_1) = 0 \Rightarrow \vec{n}_{1\to 2} \times \vec{E}_1 = 0$$

⇒ La composante tangentielle du champ électrique est nulle sur la surface

Sur un conducteur parfait il peut exister un courant superficiel en l'absence de champ électrique tangent à la surface !

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}$$

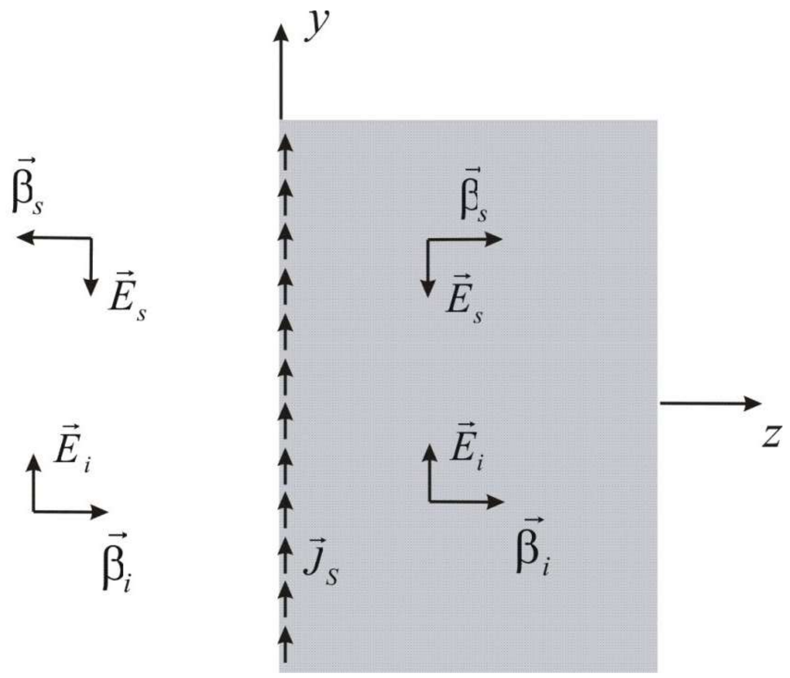
Soit une interface séparant deux diélectriques sans pertes:



Lois de Snell:

$$\theta_i = \theta_r$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}\,\sin\theta_i = \sqrt{\varepsilon_2}\,\sin\theta_t \Rightarrow \beta_1\,\sin\theta_i = \beta_2\,\sin\theta_t$$



$$\underline{\vec{E}}_i = E_i \, e^{-j\beta z} \, \vec{1}_y$$

$$\underline{\vec{B}}_i = -\frac{E_i}{c} \, e^{-j\beta z} \, \vec{1}_x = -B_i e^{-j\beta z} \, \vec{1}_x$$

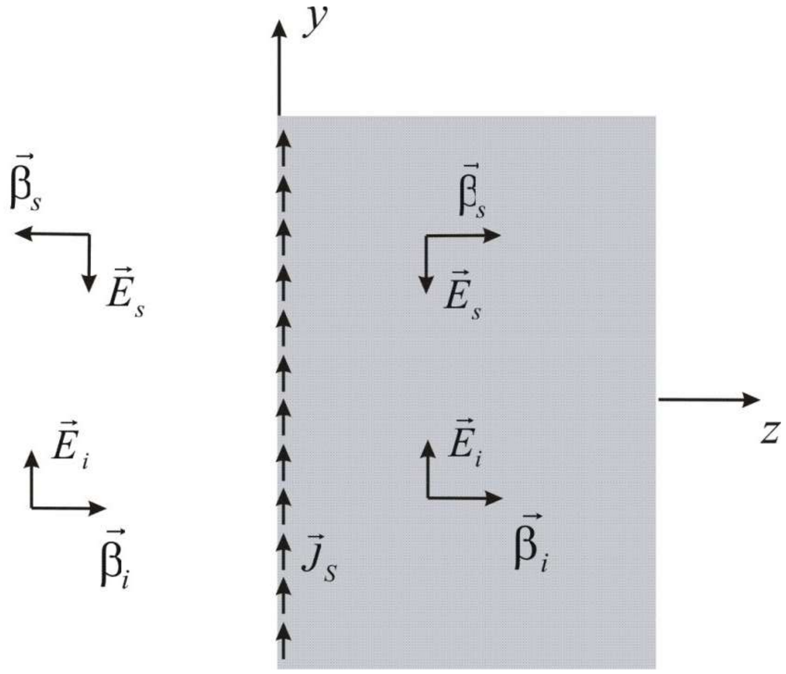
$\underline{\vec{E}}_i \times \underline{\vec{B}}_i$ Selon la direction de propagation

Soit une onde plane incidente de champs $\left(\underline{\vec{E}}_i, \underline{\vec{B}}_i\right)$

Cette onde induit un courant superficiel de densité $\underline{J}_S \, \vec{1}_y$

➡ Champs rayonnés par ce courant: $\left(\underline{\vec{E}}_s, \underline{\vec{B}}_s\right)$

A gauche du matériau, ces champs forment l'onde réfléchie



Cherchons la densité de courant superficiel induite

En tout point du matériau: $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_i + \underline{\vec{E}}_s = 0$

Ondes émises par une nappe de courant uniforme:
$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}}_s &= -\frac{1}{2}\, c\, \mu_0\, \underline{J}_S\, e^{-j\beta z}\, \vec{1}_y \qquad z > 0 \\ &= -\frac{1}{2}\, c\, \mu_0\, \underline{J}_S\, e^{j\beta z}\, \vec{1}_y \qquad z < 0\end{aligned}$$

En tout point du matériau: $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_i + \underline{\vec{E}}_s = 0$

$$\underline{\vec{E}}_i = E_i \, e^{-j\beta z} \, \vec{1}_y$$

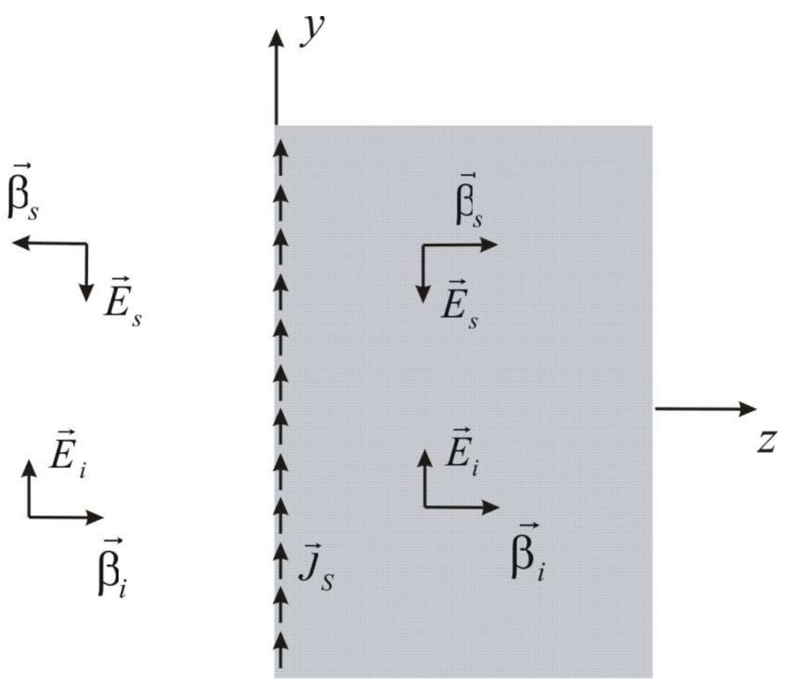
$$\underline{\vec{E}}_s = -\frac{1}{2} \, c \, \mu_0 \, \underline{J}_S \, e^{-j\beta z} \, \vec{1}_y$$

⇒ $$\underline{J}_S = \frac{2E_i}{c\mu_0} = \frac{2E_i}{Z_0}$$

Ondes émises par une nappe de courant uniforme:

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}}_s &= -\frac{1}{2} \, c \, \mu_0 \, \underline{J}_S \, e^{-j\beta z} \, \vec{1}_y \qquad & z > 0 \\ &= -\frac{1}{2} \, c \, \mu_0 \, \underline{J}_S \, e^{j\beta z} \, \vec{1}_y \qquad & z < 0 \end{aligned}$$

⇒ Onde réfléchie de champ électrique $-E_i \, e^{j\beta z} \, \vec{1}_y$

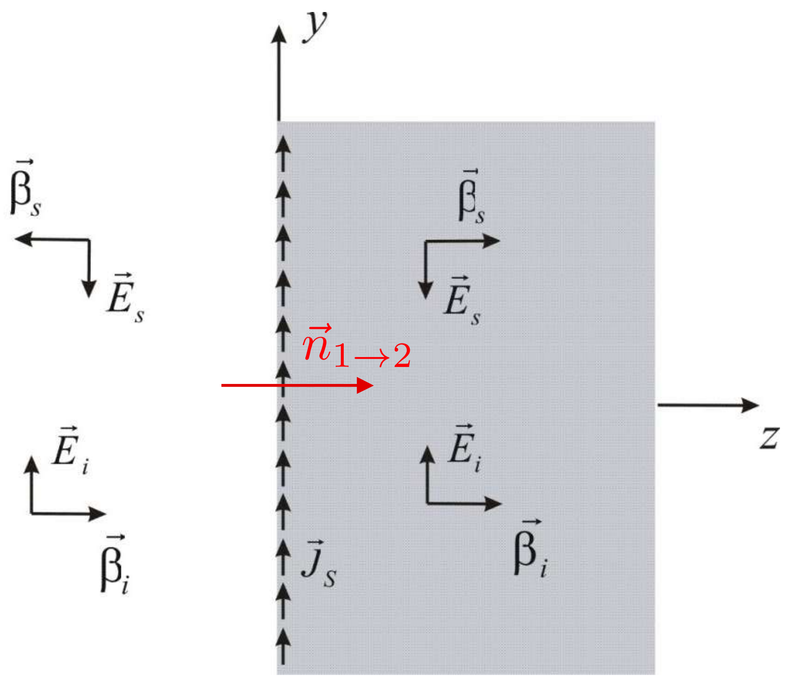


$$\underline{\vec{E}}_i = E_i\, e^{-j\beta z}\, \vec{1}_y$$

$$\underline{\vec{B}}_i = -\frac{E_i}{c}\, e^{-j\beta z}\, \vec{1}_x = -B_i e^{-j\beta z}\, \vec{1}_x$$

A gauche du matériau: $\underline{\vec{E}}_s = -E_i\, e^{j\beta z}\, \vec{1}_y$

Onde plane ➡ $\underline{\vec{B}}_s = -\frac{E_i}{c}\, e^{j\beta z}\, \vec{1}_x = -B_i\, e^{j\beta z}\, \vec{1}_x$



A gauche du matériau:

$$\underline{\vec{B}}_i = -\frac{E_i}{c}\, e^{-j\beta z}\, \vec{1}_x = -B_i e^{-j\beta z}\, \vec{1}_x$$

$$\underline{\vec{B}}_s = -\frac{E_i}{c}\, e^{j\beta z}\, \vec{1}_x = -B_i\, e^{j\beta z}\, \vec{1}_x$$

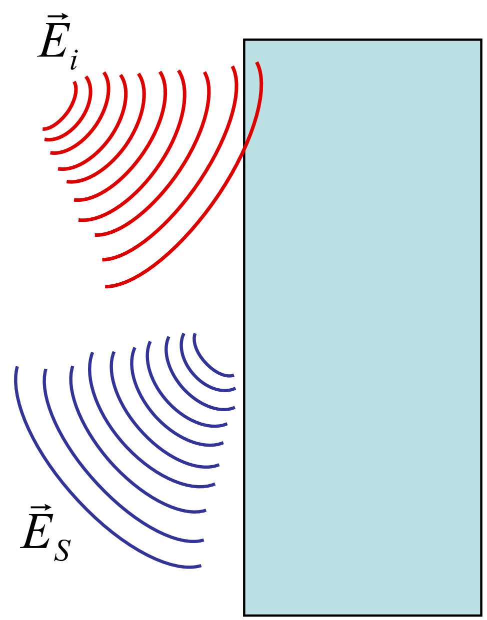
$$\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_i + \underline{\vec{B}}_s = -2B_i \cos\beta z\, \vec{1}_x$$

Sur la surface du conducteur en $z = 0$: $\underline{\vec{B}} = -2B_i\vec{1}_x = 2\underline{\vec{B}}_i(z=0)$

$$\vec{n}_{1\to 2} \times \left(\cancel{\underline{\vec{B}}_2} - \underline{\vec{B}}_1\right) = \mu_0 \underline{\vec{J}}_S \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_{1\to 2} \times \left(-2\underline{\vec{B}}_i\right) = \mu_0 \underline{\vec{J}}_S$$

$$\boxed{\underline{\vec{J}}_S = \frac{2}{\mu_0}\left(\underline{\vec{B}}_i \times \vec{n}_{1\to 2}\right) = \frac{1}{\mu_0}\left(\underline{\vec{B}}(z=0) \times \vec{n}_{1\to 2}\right)}$$

Cas général



Étapes de calcul:

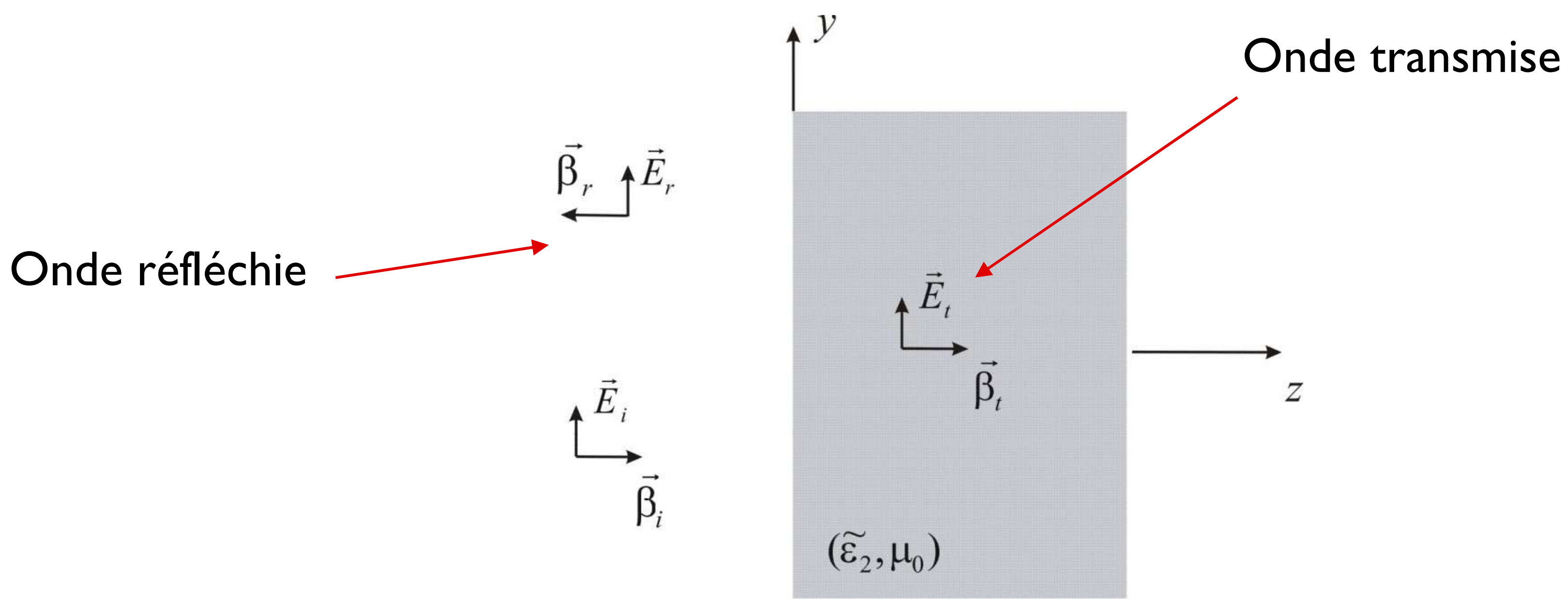
1) Déterminer les sources induites dans le volume du matériau
   (dépend du champs électrique total dans le matériau !)
2) Calculer les champs rayonnés par ces sources
3) En déduire le champ total en tout point

itératif !

➡ Il faut recourir aux conditions de saut des champs

Réflexion et transmission

Incidence normale sur un milieu dissipatif

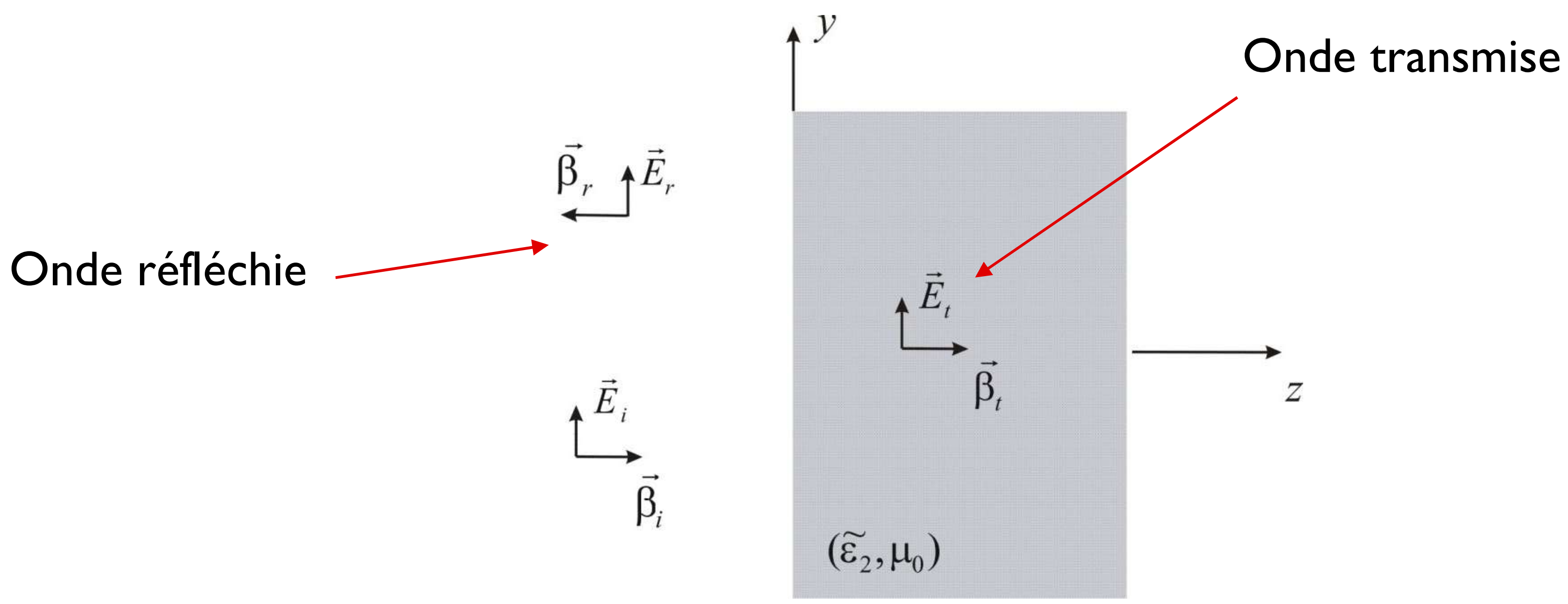


Onde incidente: $\vec{\underline{E}}_i = E_i\, e^{-j\beta z}\, \vec{1}_y$

$$\vec{\underline{B}}_i = -\frac{E_i}{c} e^{-j\beta z}\, \vec{1}_x = -\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} E_i\, e^{-j\beta z}\, \vec{1}_x$$

Onde réfléchie: $\vec{\underline{E}}_r = E_r\, e^{j\beta z}\, \vec{1}_y$

$$\vec{\underline{B}}_r = \frac{E_r}{c} e^{j\beta z}\, \vec{1}_x = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} E_r\, e^{j\beta z}\, \vec{1}_x$$



Onde transmise: $\underline{\vec{E}}_t = E_t\, e^{-\gamma_2 z}\, \vec{1}_y$

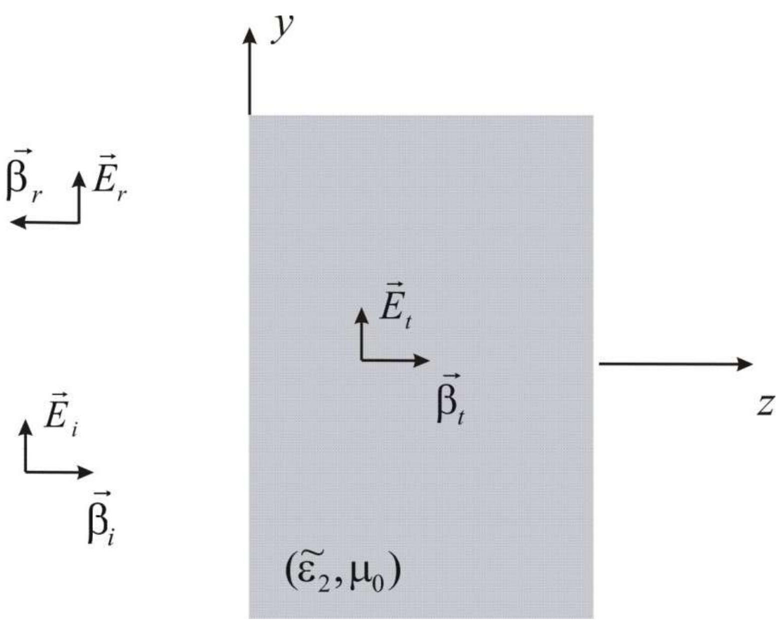
$$\underline{\vec{B}}_t = -\sqrt{\tilde{\varepsilon}_2 \mu_0}\, E_t\, e^{-\gamma_2 z}\, \vec{1}_x$$

Linéarité: $E_r = \Gamma\, E_i$ $\quad\Gamma$ est le coefficient de réflexion (complexe !)

$E_t = T\, E_i$ $\quad T$ est le coefficient de transmission (complexe !)

Réflexion et transmission

Incidence normale sur un milieu dissipatif



$$\underline{\vec{E}}_i = E_i\, e^{-j\beta z}\, \vec{1}_y$$

$$\underline{\vec{B}}_i = -\frac{E_i}{c} e^{-j\beta z}\, \vec{1}_x = -\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} E_i\, e^{-j\beta z}\, \vec{1}_x$$

$$\underline{\vec{E}}_r = \Gamma E_i\, e^{j\beta z}\, \vec{1}_y$$

$$\underline{\vec{B}}_r = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, \Gamma E_i\, e^{j\beta z}\, \vec{1}_x$$

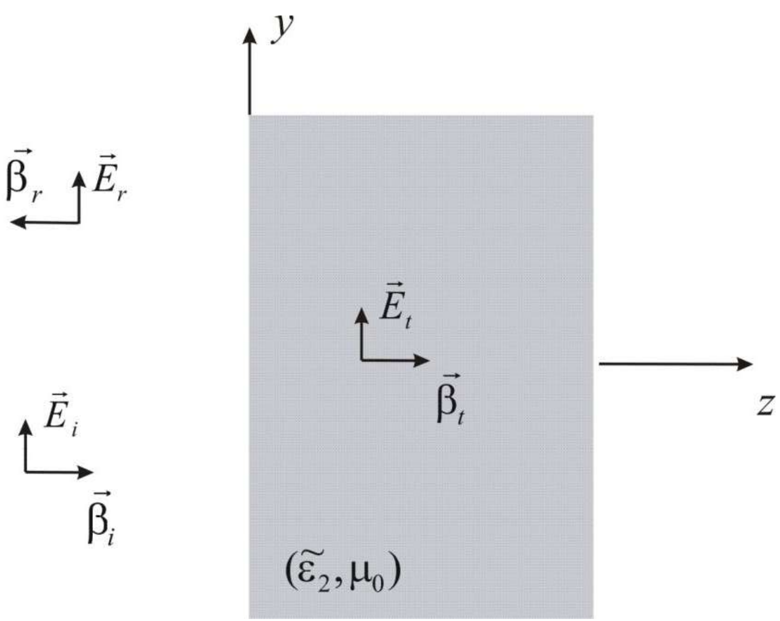
$$\underline{\vec{E}}_t = T E_i\, e^{-\gamma_2 z}\, \vec{1}_y$$

$$\underline{\vec{B}}_t = -\sqrt{\tilde{\varepsilon}_2 \mu_0}\, T E_i\, e^{-\gamma_2 z}\, \vec{1}_x$$

$$\vec{n}_{1\to 2} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{1}_z \times \left[T E_i - \left(E_i + \Gamma E_i\right)\right] \vec{1}_y = 0$$

$$\Rightarrow \quad T E_i = E_i + \Gamma E_i \quad \Rightarrow \quad T = 1 + \Gamma$$

$$\vec{n}_{1\to 2} \times \left(\frac{\vec{B}_2}{\mu_2} - \frac{\vec{B}_1}{\mu_1}\right) = \cancel{\vec{J}_S} \quad \Rightarrow \quad \vec{1}_z \times \left[-\frac{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_2 \mu_0}}{\mu_0} T E_i - \left(-\frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\mu_0} E_i + \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\mu_0} \Gamma E_i\right)\right] \vec{1}_x = 0$$



$$\underline{\vec{E}}_i = E_i\, e^{-j\beta z}\, \vec{1}_y$$

$$\underline{\vec{B}}_i = -\frac{E_i}{c} e^{-j\beta z}\, \vec{1}_x = -\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} E_i\, e^{-j\beta z}\, \vec{1}_x$$

$$\underline{\vec{E}}_r = \Gamma E_i\, e^{j\beta z}\, \vec{1}_y$$

$$\underline{\vec{B}}_r = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, \Gamma E_i\, e^{j\beta z}\, \vec{1}_x$$

$$\underline{\vec{E}}_t = T E_i\, e^{-\gamma_2 z}\, \vec{1}_y$$

$$\underline{\vec{B}}_t = -\sqrt{\tilde{\varepsilon}_2 \mu_0}\, T E_i\, e^{-\gamma_2 z}\, \vec{1}_x$$

$$\vec{n}_{1\to 2} \times \left(\frac{\vec{B}_2}{\mu_2} - \frac{\vec{B}_1}{\mu_1} \right) = \cancel{\vec{J}_S} \quad \Rightarrow \quad \vec{1}_z \times \left[-\underbrace{\frac{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_2 \mu_0}}{\mu_0}}_{1/Z_2} T E_i - \left(-\underbrace{\frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\mu_0}}_{1/Z_0} E_i + \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\mu_0} \Gamma E_i \right) \right] \vec{1}_x = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{Z_2} T E_i - \left(-\frac{1}{Z_0} E_i + \frac{1}{Z_0} \Gamma E_i \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{Z_2} T = \frac{1}{Z_0} - \frac{1}{Z_0} \Gamma$$

$$\begin{cases} T = 1 + \Gamma \\ \dfrac{1}{Z_2} T = \dfrac{1}{Z_0} - \dfrac{1}{Z_0}\Gamma \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \Gamma &= \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} \\ T &= \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_0} \end{aligned}}$$

Milieu bon conducteur $\gamma_2 = \alpha + j\beta$ $\alpha = \beta \approx \sqrt{\dfrac{\sigma_2 \omega \mu_0}{2}} = \dfrac{1}{\delta}$

$$\Rightarrow \gamma_2 = \frac{1+j}{\delta}$$

$\Rightarrow$ $\underline{\vec{E}}_t = T E_i e^{-\gamma_2 z} \vec{1}_y = T E_i e^{-jz/\delta} e^{-z/\delta} \vec{1}_y$

$\Rightarrow$ $\underline{\vec{J}} = \sigma_2 \underline{\vec{E}}_t = \sigma_2 T E_i e^{-jz/\delta} e^{-z/\delta} \vec{1}_y$ = densité de courant produisant l'onde réfléchie !

$\Rightarrow$ Courant quasi superficiel

Exemple: réflexion sur du Cuivre

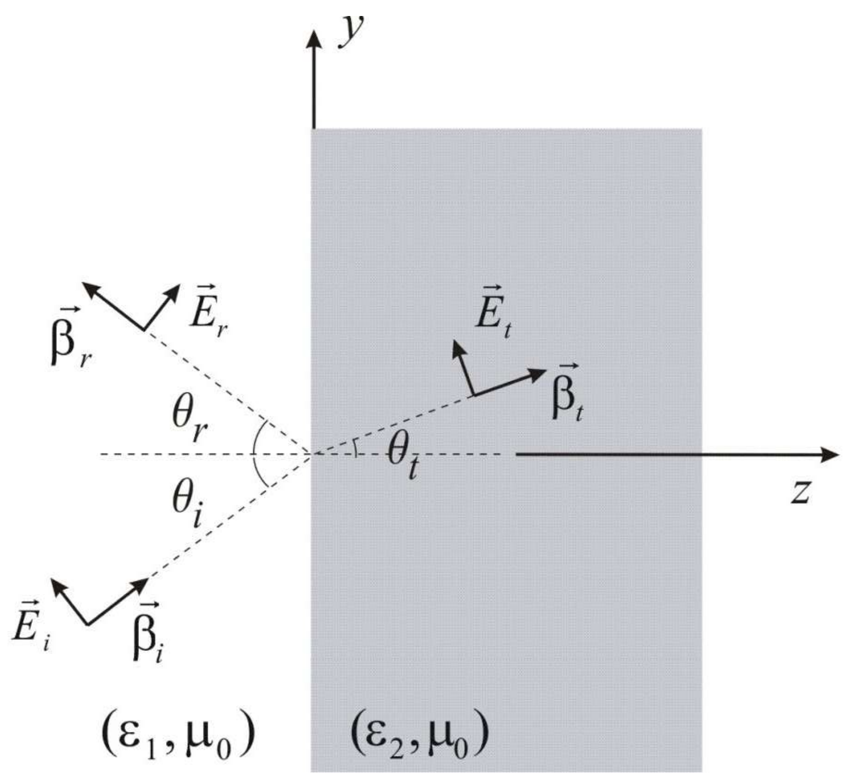
$$\tilde{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 - j\frac{\sigma_2}{\omega}$$

$$Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\tilde{\varepsilon}_2}}$$

➡ $Z_2 = 8{,}25\ 10^{-3}\,(1+j) \quad [\Omega]$

➡ $|\Gamma| = \left|\frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}\right| = 0{,}9999562$

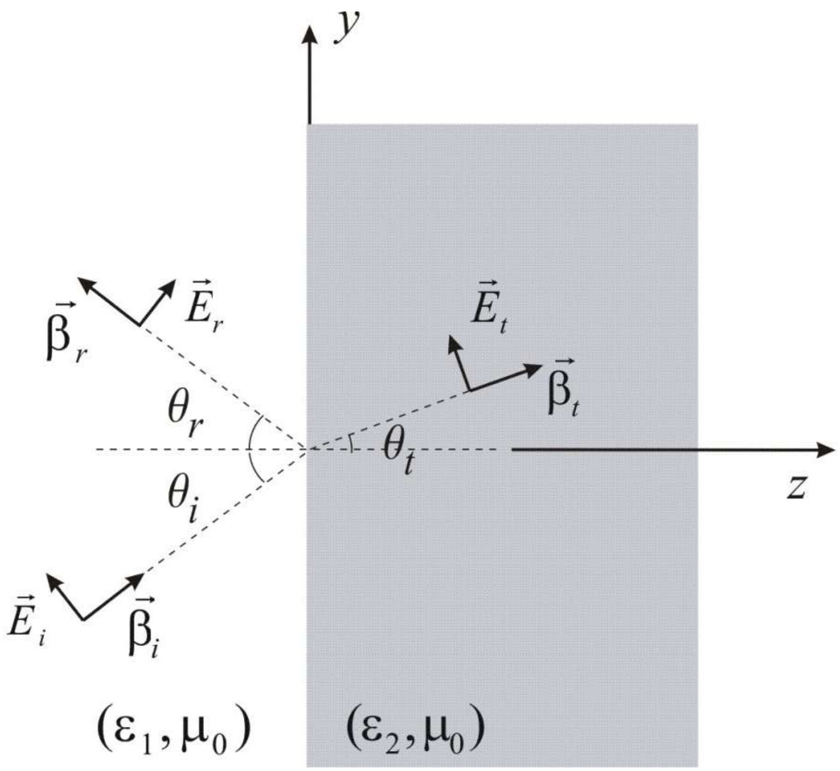
Matériau	ε_r	σ [S/m]
Cuivre	1	$5{,}8\ 10^7$
Eau de mer	81	4
Sol	3 – 5	0,1
Béton	6	0,01
Tissu cérébral	43	1,3



Cas de la « polarisation parallèle »: champ électrique dans le plan d'incidence

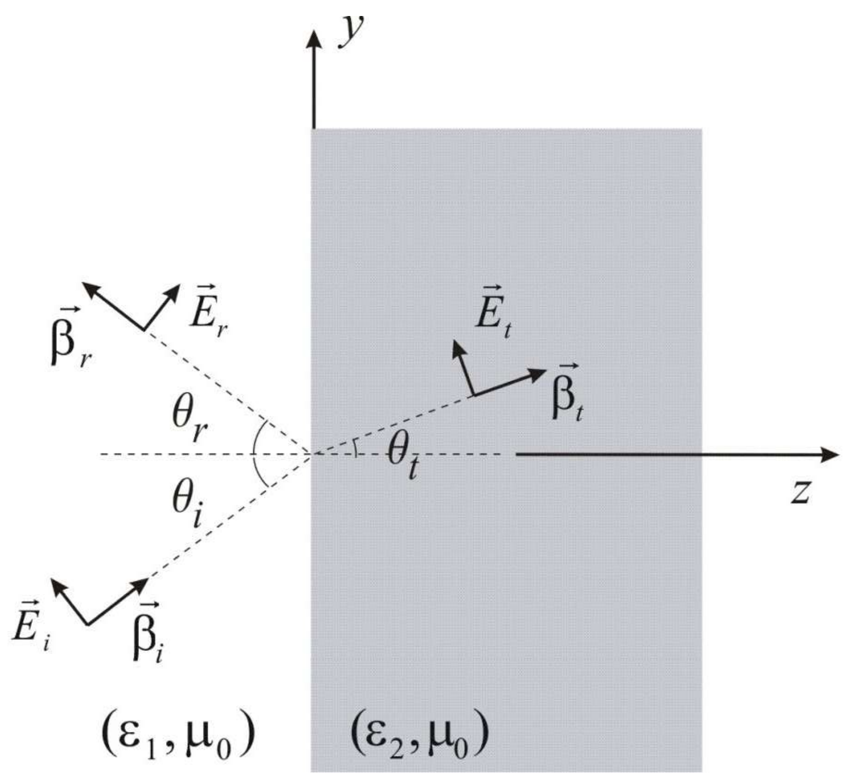
$$\vec{\beta}_i = \beta_1(\sin\theta_i \vec{1}_y + \cos\theta_i \vec{1}_z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{\vec{E}}_i = \vec{E}_i e^{-j\vec{\beta}_i\cdot\vec{r}} = \vec{E}_i e^{-j\beta_1(y\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} = E_i(\cos\theta_i \vec{1}_y - \sin\theta_i \vec{1}_z)e^{-j\beta_1(y\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \\ \underline{\vec{B}}_i = \vec{B}_i e^{-j\vec{\beta}_i\cdot\vec{r}} = -\sqrt{\varepsilon_1\mu_0} E_i e^{-j\beta_1(y\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \vec{1}_x \end{cases}$$



$$\vec{\beta}_r = \beta_1(\sin\theta_r \vec{1}_y - \cos\theta_r \vec{1}_z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{\vec{E}}_r = \vec{E}_r e^{-j\vec{\beta}_r\cdot\vec{r}} = \Gamma_\parallel E_i(\cos\theta_r \vec{1}_y + \sin\theta_r \vec{1}_z)e^{-j\beta_1(y\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \\ \underline{\vec{B}}_r = \vec{B}_r e^{-j\vec{\beta}_r\cdot\vec{r}} = \Gamma_\parallel \sqrt{\varepsilon_1\mu_0} E_i e^{-j\beta_1(y\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \vec{1}_x \end{cases}$$



$$\vec{\beta}_t = \beta_2(\sin\theta_t\,\vec{1}_y + \cos\theta_t\,\vec{1}_z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{\vec{E}}_t = \vec{E}_t\, e^{-j\vec{\beta}_t\cdot\vec{r}} = T_{\parallel}\, E_i(\cos\theta_t\,\vec{1}_y - \sin\theta_t\,\vec{1}_z)e^{-j\beta_2(y\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \\ \underline{\vec{B}}_t = \vec{B}_t\, e^{-j\vec{\beta}_t\cdot\vec{r}} = -T_{\parallel}\,\sqrt{\varepsilon_2\mu_0}E_i\, e^{-j\beta_2(y\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}\,\vec{1}_x \end{cases}$$

$$\underline{\vec{E}}_i = E_i(\cos\theta_i \vec{1}_y - \sin\theta_i \vec{1}_z)e^{-j\beta_1(y\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

$$\underline{\vec{B}}_i = -\sqrt{\varepsilon_1\mu_0}E_i\, e^{-j\beta_1(y\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}\vec{1}_x$$

$$\underline{\vec{E}}_r = \Gamma_\parallel\, E_i(\cos\theta_i \vec{1}_y + \sin\theta_i \vec{1}_z)e^{-j\beta_1(y\sin\theta_i - z\cos\theta_i)}$$

$$\underline{\vec{B}}_r = \Gamma_\parallel\, \sqrt{\varepsilon_1\mu_0}E_i\, e^{-j\beta_1(y\sin\theta_i - z\cos\theta_i)}\vec{1}_x$$

$$\boxed{\theta_i = \theta_r}$$

$$\underline{\vec{E}}_t = T_\parallel\, E_i(\cos\theta_t \vec{1}_y - \sin\theta_t \vec{1}_z)e^{-j\beta_2(y\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

$$\underline{\vec{B}}_t = -T_\parallel\, \sqrt{\varepsilon_2\mu_0}E_i\, e^{-j\beta_2(y\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}\vec{1}_x$$

Sur l'interface $z = 0$

$$\underline{\vec{E}}_i = E_i(\cos\theta_i \vec{1}_y - \sin\theta_i \vec{1}_z)e^{-j\beta_1 y\sin\theta_i}$$

$$\underline{\vec{B}}_i = -\sqrt{\varepsilon_1\mu_0}E_i\, e^{-j\beta_1 y\sin\theta_i}\vec{1}_x$$

$$\underline{\vec{E}}_r = \Gamma_\parallel\, E_i(\cos\theta_i \vec{1}_y + \sin\theta_i \vec{1}_z)e^{-j\beta_1 y\sin\theta_i}$$

$$\underline{\vec{B}}_r = \Gamma_\parallel\, \sqrt{\varepsilon_1\mu_0}E_i\, e^{-j\beta_1 y\sin\theta_i}\vec{1}_x$$

$$\underline{\vec{E}}_t = T_\parallel\, E_i(\cos\theta_t \vec{1}_y - \sin\theta_t \vec{1}_z)e^{-j\beta_2 y\sin\theta_t}$$

$$\underline{\vec{B}}_t = -T_\parallel\, \sqrt{\varepsilon_2\mu_0}E_i\, e^{-j\beta_2 y\sin\theta_t}\vec{1}_x$$

$$\beta_1 \sin\theta_i = \beta_2 \sin\theta_t$$

Sur l'interface $z = 0$

$$\underline{\vec{E}}_i = E_i(\cos\theta_i \,\vec{1}_y - \sin\theta_i \,\vec{1}_z)e^{-j\beta_1 y \sin\theta_i}$$

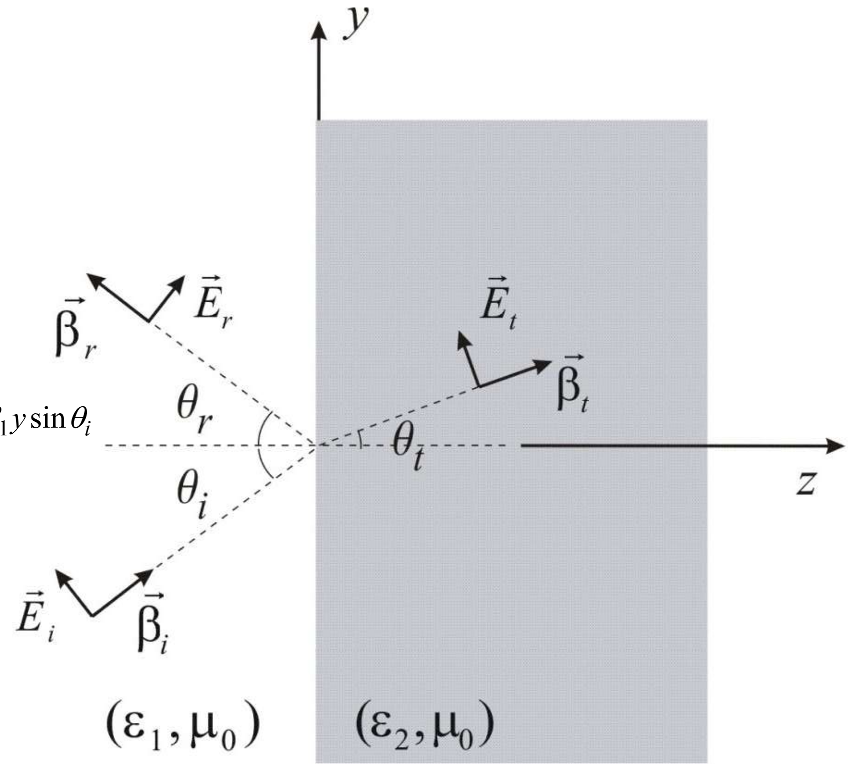
$$\underline{\vec{B}}_i = -\sqrt{\varepsilon_1\mu_0} E_i \, e^{-j\beta_1 y \sin\theta_i} \,\vec{1}_x$$

$$\underline{\vec{E}}_r = \Gamma_\parallel \, E_i(\cos\theta_i \,\vec{1}_y + \sin\theta_i \,\vec{1}_z)e^{-j\beta_1 y \sin\theta_i}$$

$$\underline{\vec{B}}_r = \Gamma_\parallel \, \sqrt{\varepsilon_1\mu_0} E_i \, e^{-j\beta_1 y \sin\theta_i} \,\vec{1}_x$$

$$\underline{\vec{E}}_t = T_\parallel \, E_i(\cos\theta_t \,\vec{1}_y - \sin\theta_t \,\vec{1}_z)e^{-j\beta_1 y \sin\theta_i}$$

$$\underline{\vec{B}}_t = -T_\parallel \, \sqrt{\varepsilon_2\mu_0} E_i \, e^{-j\beta_1 y \sin\theta_i} \,\vec{1}_x$$



$$\vec{n}_{1\to 2} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0$$

$$E_i \cos\theta_i \, e^{-j\beta_1 y \sin\theta_i} + \Gamma_\parallel \, E_i \cos\theta_i e^{-j\beta_1 y \sin\theta_i} = T_\parallel \, E_i \cos\theta_t e^{-j\beta_1 y \sin\theta_i}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta_i + \Gamma_\parallel \, \cos\theta_i = T_\parallel \, \cos\theta_t$$

$$\beta_1 \sin\theta_i = \beta_2 \sin\theta_t$$

Sur l'interface $z = 0$

$$\underline{\vec{E}}_i = E_i(\cos\theta_i \vec{1}_y - \sin\theta_i \vec{1}_z)e^{-j\beta_1 y \sin\theta_i}$$

$$\underline{\vec{B}}_i = -\sqrt{\varepsilon_1\mu_0} E_i\, e^{-j\beta_1 y \sin\theta_i}\, \vec{1}_x$$

$$\underline{\vec{E}}_r = \Gamma_\parallel\; E_i(\cos\theta_i \vec{1}_y + \sin\theta_i \vec{1}_z)e^{-j\beta_1 y \sin\theta_i}$$

$$\underline{\vec{B}}_r = \Gamma_\parallel\; \sqrt{\varepsilon_1\mu_0} E_i\, e^{-j\beta_1 y \sin\theta_i}\, \vec{1}_x$$

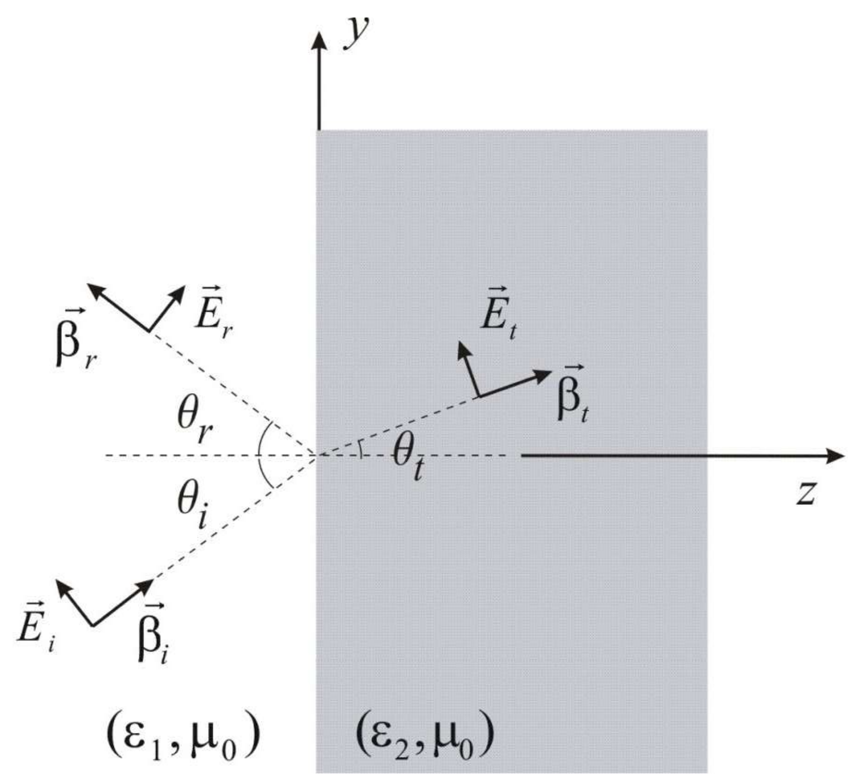
$$\underline{\vec{E}}_t = T_\parallel\; E_i(\cos\theta_t \vec{1}_y - \sin\theta_t \vec{1}_z)e^{-j\beta_1 y \sin\theta_i}$$

$$\underline{\vec{B}}_t = -T_\parallel\; \sqrt{\varepsilon_2\mu_0} E_i\, e^{-j\beta_1 y \sin\theta_i}\, \vec{1}_x$$

$$\vec{n}_{1\to 2} \times \left(\frac{\vec{B}_2}{\mu_2} - \frac{\vec{B}_1}{\mu_1}\right) = \cancel{\vec{J}_S}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_0}}{\mu_0} E_i + \Gamma_\parallel \frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_0}}{\mu_0} E_i = -T_\parallel \frac{\sqrt{\varepsilon_2\mu_0}}{\mu_0} E_i$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{Z_1} + \frac{\Gamma_\parallel}{Z_1} = -\frac{T_\parallel}{Z_2}$$

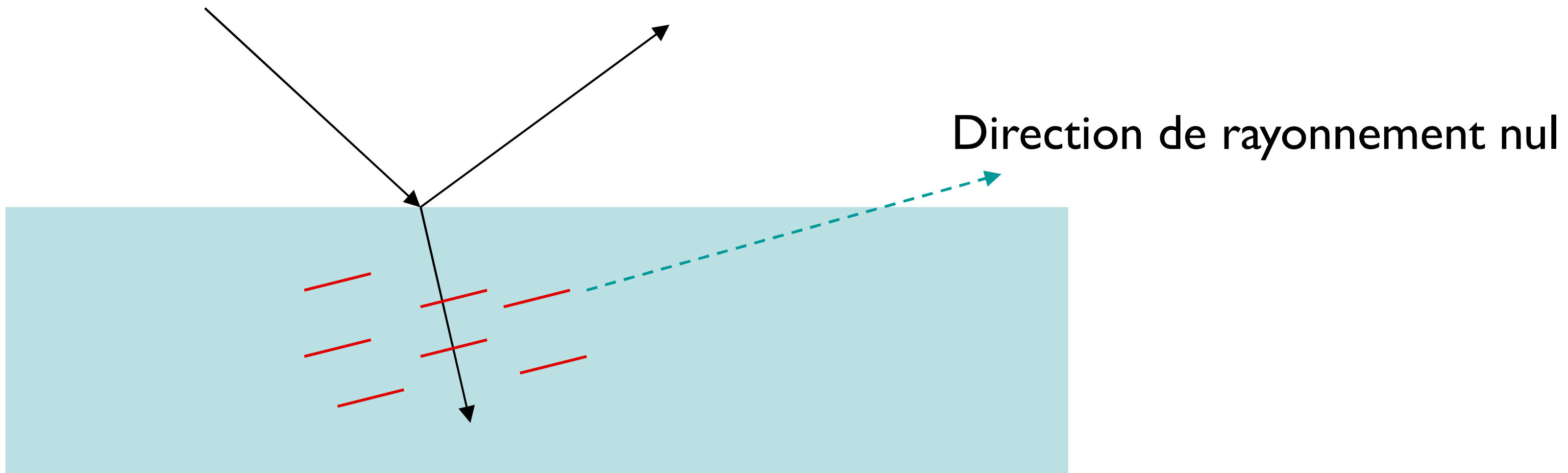


$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta_i + \Gamma_\parallel \cos\theta_i = T_\parallel \cos\theta_t \\ -\dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{\Gamma_\parallel}{Z_1} = -\dfrac{T_\parallel}{Z_2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \Gamma_\parallel &= \frac{Z_2\cos\theta_t - Z_1\cos\theta_i}{Z_2\cos\theta_t + Z_1\cos\theta_i} \\ T_\parallel &= \frac{2Z_2\cos\theta_i}{Z_2\cos\theta_t + Z_1\cos\theta_i} \end{aligned}}$$

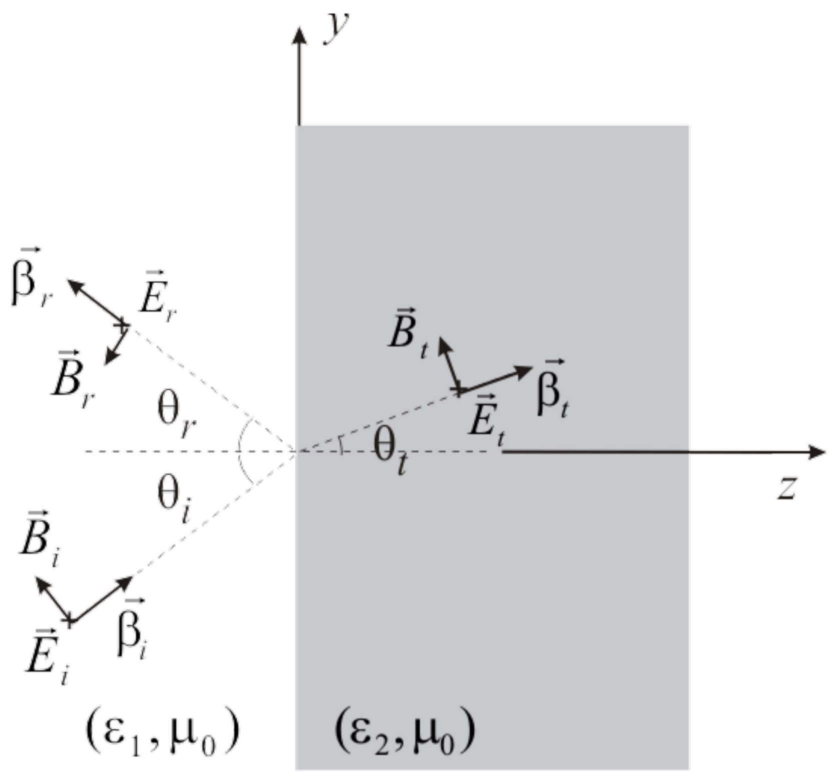
$$\beta_1 \sin\theta_i = \beta_2 \sin\theta_t$$

$\Rightarrow$ Lorsque $\cos\theta_i = \dfrac{Z_2}{Z_1}\cos\theta_t$ l'onde réfléchie est nulle !

= angle de Brewster



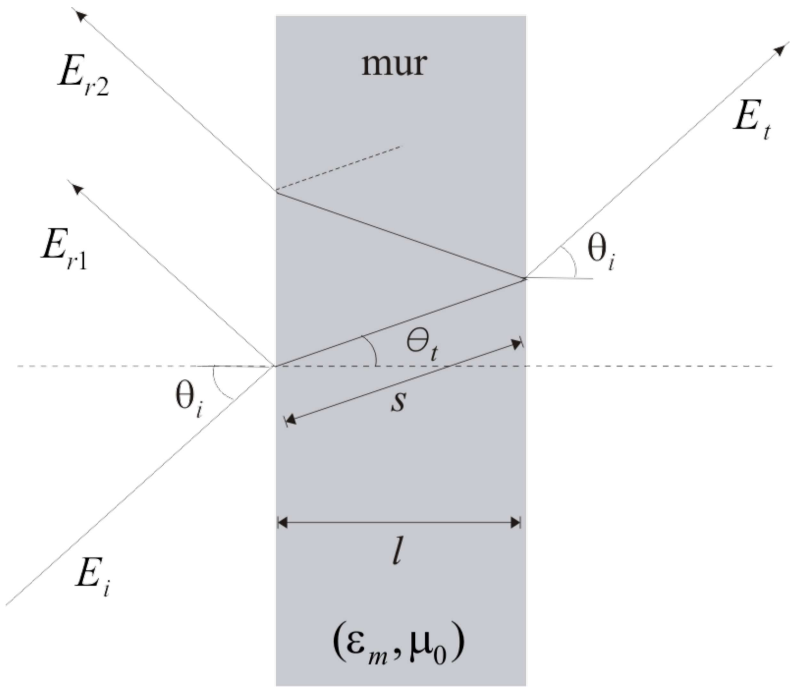
polarisation perpendiculaire



Exercice..

$$\Gamma_\perp = \frac{Z_2 \cos\theta_i - Z_1 \cos\theta_t}{Z_2 \cos\theta_i + Z_1 \cos\theta_t}$$

$$T_\perp = \frac{2 Z_2 \cos\theta_i}{Z_2 \cos\theta_i + Z_1 \cos\theta_t}$$

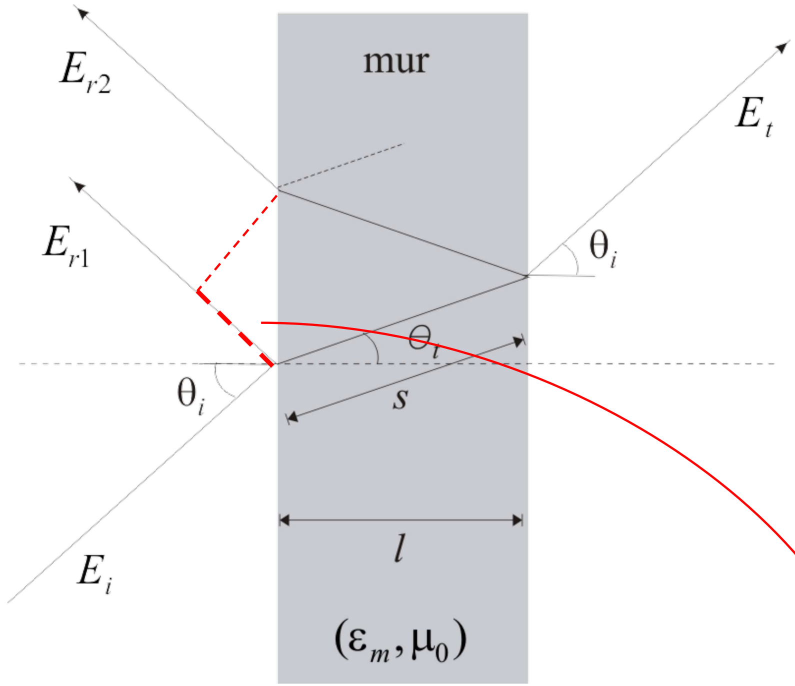


Réflexion

$$E_{r1} = \Gamma_{\perp}(\theta_i)\, E_i$$

$$\Gamma_\perp = \frac{Z_2\cos\theta_i - Z_1\cos\theta_t}{Z_2\cos\theta_i + Z_1\cos\theta_t}$$

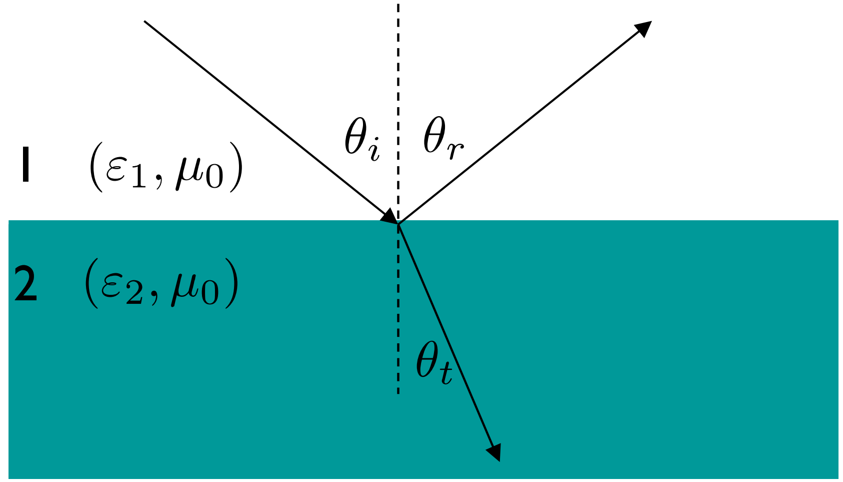
$$T_\perp = \frac{2Z_2\cos\theta_i}{Z_2\cos\theta_i + Z_1\cos\theta_t}$$



$$E_{r2} = \underbrace{\left(1+\Gamma_\perp(\theta_i)\right)}_{T_\perp(\theta_i)} e^{-j\beta_m s} \underbrace{\left(-\Gamma_\perp(\theta_i)\right)}_{\Gamma'_\perp(\theta_t)} e^{-j\beta_m s} \underbrace{\left(1-\Gamma_\perp(\theta_i)\right)}_{T'_\perp} e^{j\beta 2s\sin\theta_t\sin\theta_i} E_i$$

Et ainsi de suite pour toutes les réflexions..

Expression: voir syllabus et TP

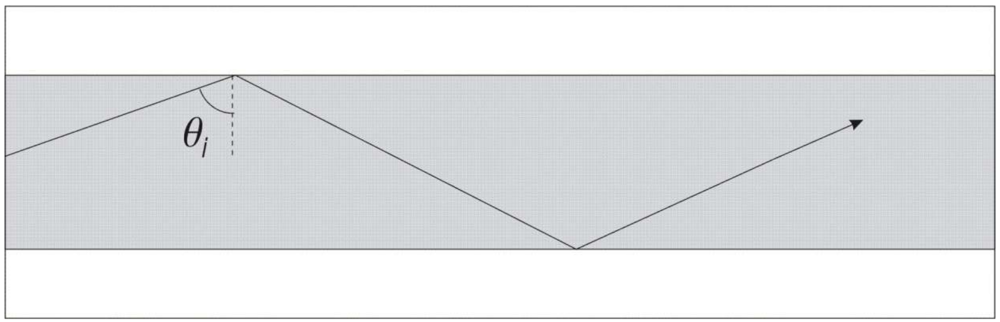


Loi de Snell: $\sin\theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin\theta_i$

Si $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ il existe un angle d'incidence à partir duquel le membre de droite est supérieur à l'unité -> ??

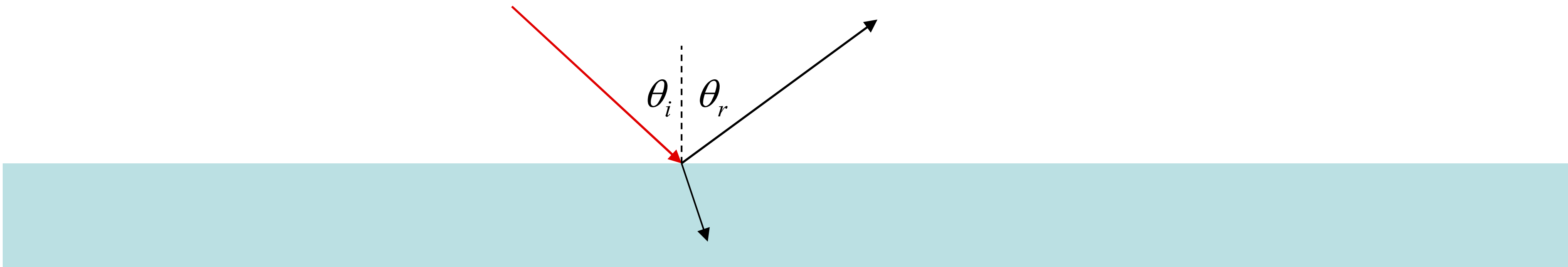
$$\sin\theta_{ic} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

On montre que dans ce cas toute l'énergie incidente est réfléchie: il y a réflexion totale

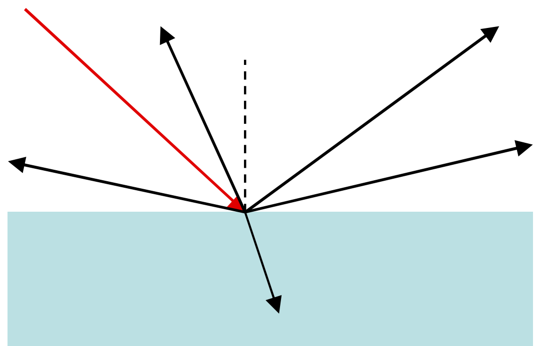


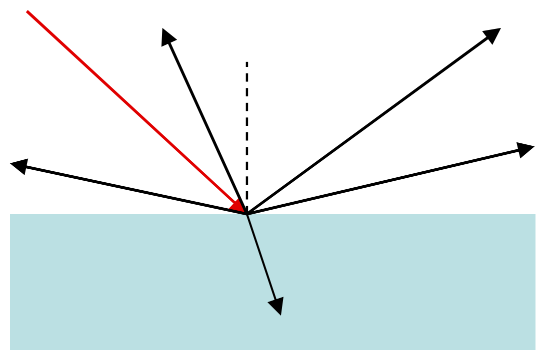
Si une onde est incidente sur une interface plane infinie, elle est réfléchie dans la direction imposée par la Loi de Snell

$$\theta_i = \theta_r$$



Si une onde est incidente sur une interface plane finie, elle est diffractée dans toutes les directions





Comment calculer ces ondes diffractées ?

Même principe:
1. Déterminer les courants induits
2. En déduire les champs rayonnés par ces courants

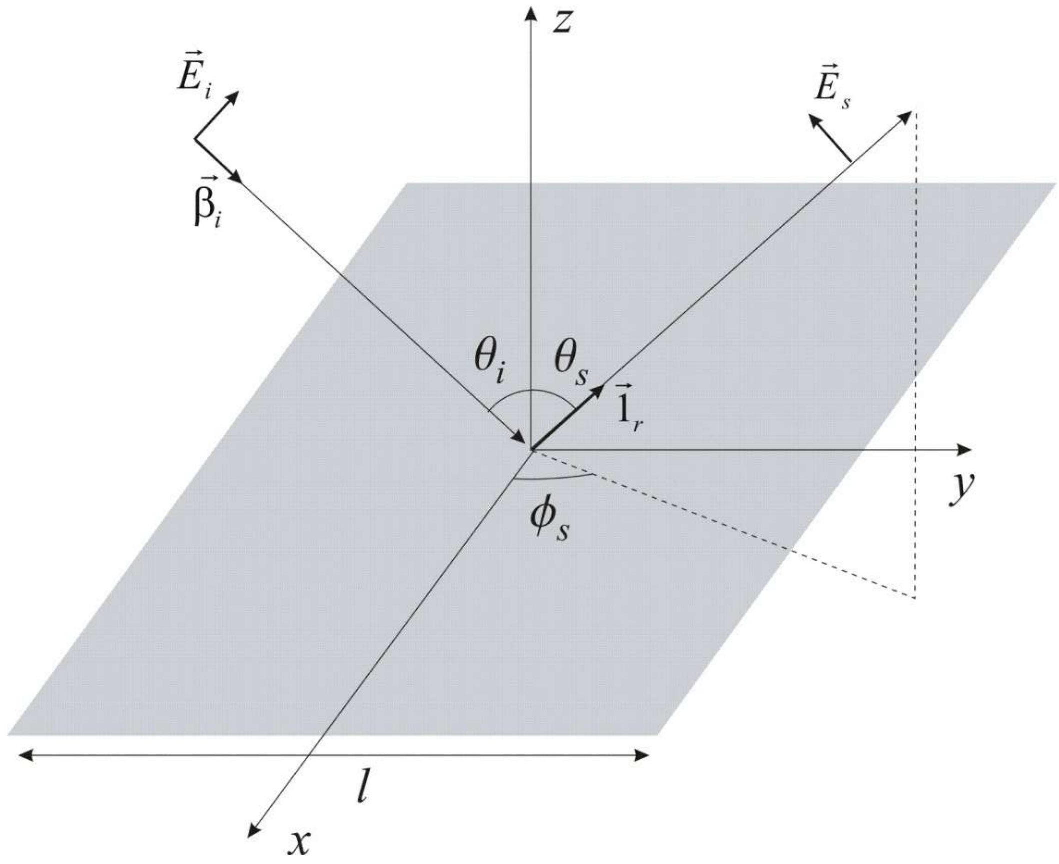
Ce n'est possible exactement que pour certains obstacles idéalisés

Nous allons calculer la diffraction par une plaque parfaitement conductrice dans l'approximation de l'optique physique: le courant induit en chaque point de l'obstacle est identique à celui qui serait induit sur un plan infini parfaitement conducteur

$$\underline{\vec{J}}_S = \frac{2}{\mu_0}\left(\underline{\vec{B}}_i \times \vec{n}_{1\to 2}\right) = \frac{1}{\mu_0}\left(\underline{\vec{B}}(z=0) \times \vec{n}_{1\to 2}\right)$$

$$\underline{\vec{E}}_i = \vec{E}_i \, e^{-j\vec{\beta}_i \cdot \vec{r}}$$
$$\underline{\vec{B}}_i = \vec{B}_i \, e^{-j\vec{\beta}_i \cdot \vec{r}}$$

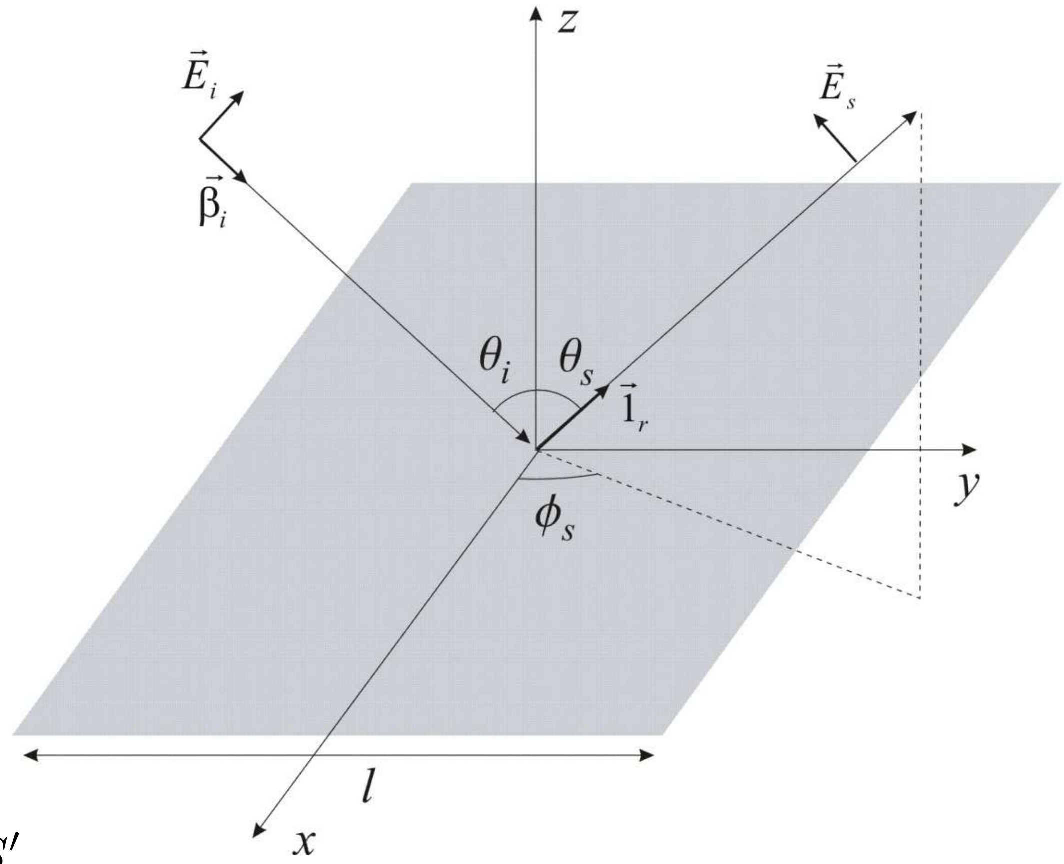
$$\vec{\beta}_i = \beta(\sin\theta_i \vec{1}_y - \cos\theta_i \vec{1}_z)$$
$$\vec{r} = x\vec{1}_x + y\vec{1}_y + z\vec{1}_z$$
$$\Rightarrow \quad \vec{\beta}_i \cdot \vec{r} = \beta(y\sin\theta_i - z\cos\theta_i)$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{\vec{E}}_i = E_i\,(\cos\theta_i\,\vec{1}_y + \sin\theta_i\,\vec{1}_z)\, e^{-j\beta(y\sin\theta_i - z\cos\theta_i)} \\ \underline{\vec{B}}_i = \dfrac{E_i}{c}\, e^{-j\beta(y\sin\theta_i - z\cos\theta_i)}\,\vec{1}_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\vec{J}}_S = \frac{2}{\mu_0}\underline{\vec{B}}_i(z=0) \times (-\vec{1}_z) = \frac{2\,E_i}{c\mu_0}\, e^{-j\beta\, y\sin\theta_i}\,\vec{1}_y = \frac{2\,E_i}{Z_0}\, e^{-j\beta\, y\sin\theta_i}\,\vec{1}_y$$

Calculons le champ électrique diffracté dans la direction (θ_s, ϕ_s)



$$\vec{A}^{\circ}(\theta_s, \phi_s) = \int_S \underline{\vec{J}}_S(\vec{r}\,') \, e^{j\beta\,(\vec{r}\,' \cdot \vec{1}_r)} \, dS'$$

$$\vec{1}_r = \cos\theta_s \, \vec{1}_z + \sin\theta_s \cos\phi_s \, \vec{1}_x + \sin\theta_s \sin\phi_s \, \vec{1}_y$$

$$\vec{r}\,' = x' \, \vec{1}_x + y' \, \vec{1}_y$$

$$\Rightarrow \vec{r}\,' \cdot \vec{1}_r = x' \sin\theta_s \cos\phi_s + y' \sin\theta_s \sin\phi_s$$

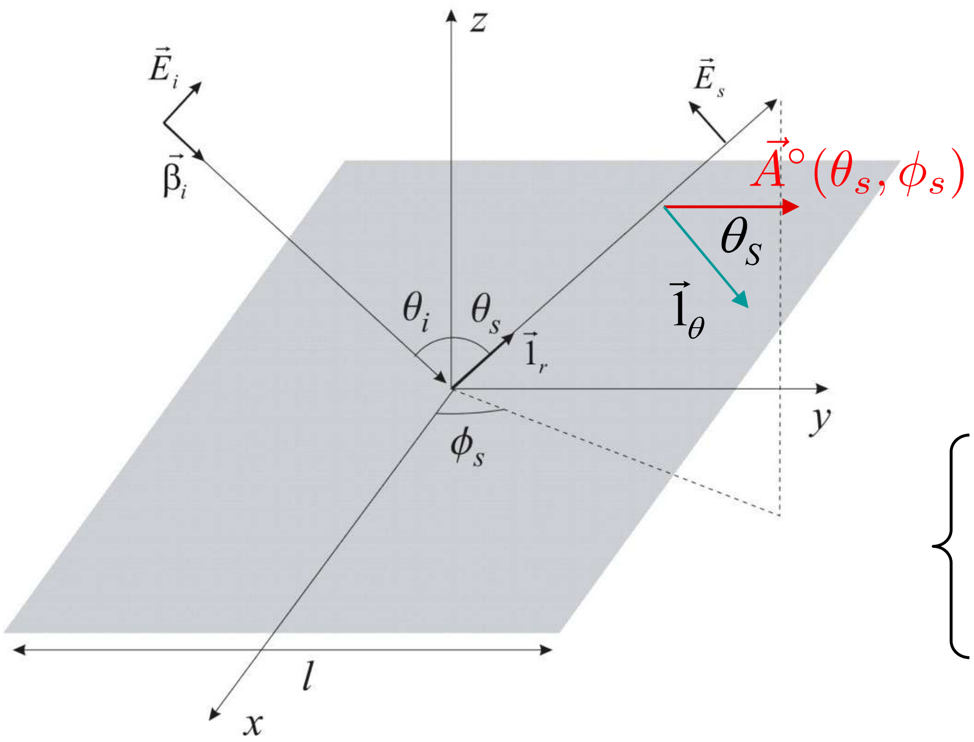
$$\vec{A}^\circ(\theta_s,\phi_s) = \int_S \underline{\vec{J}}_S(\vec{r}\,')\, e^{j\beta\,(\vec{r}\,'\cdot\vec{1}_r)}\, dS' \qquad \underline{\vec{J}}_S = \frac{2\,E_i}{Z_0}\, e^{-j\beta\, y \sin\theta_i}\, \vec{1}_y$$

$$\vec{r}\,' \cdot \vec{1}_r = x' \sin\theta_s \cos\phi_s + y' \sin\theta_s \sin\phi_s$$

$$\begin{aligned}
A_y^\circ(\theta_s,\phi_s) &= \frac{2E_i}{Z_0} \int_{-l/2}^{l/2}\int_{-l/2}^{l/2} e^{-j\beta y' \sin\theta_i}\, e^{j\beta x' \sin\theta_s\cos\phi_s}\, e^{j\beta y' \sin\theta_s \sin\phi_s}\, dx'\,dy' \\
&= \frac{2E_i}{Z_0} \int_{-l/2}^{l/2} e^{j\beta x' \sin\theta_s \cos\phi_s}\, dx' \int_{-l/2}^{l/2} e^{j\beta y'(\sin\theta_s\sin\phi_s - \sin\theta_i)}\, dy' \\
&= \frac{2E_i}{Z_0}\, l^2\, \frac{\sin\left(\frac{\beta l}{2}\, \sin\theta_s\cos\phi_s\right)}{\frac{\beta l}{2}\, \sin\theta_s\cos\phi_s}\, \frac{\sin\left(\frac{\beta l}{2}\,(\sin\theta_s\sin\phi_s - \sin\theta_i)\right)}{\frac{\beta l}{2}\,(\sin\theta_s\sin\phi_s - \sin\theta_i)}
\end{aligned}$$

Dans le plan *yz*: $\phi_s = \pi/2$ ➡ $A_y^\circ = \dfrac{2E_i}{Z_0}\, l^2\, \dfrac{\sin\left(\frac{\beta l}{2}\,(\sin\theta_s - \sin\theta_i)\right)}{\frac{\beta l}{2}\,(\sin\theta_s - \sin\theta_i)}$

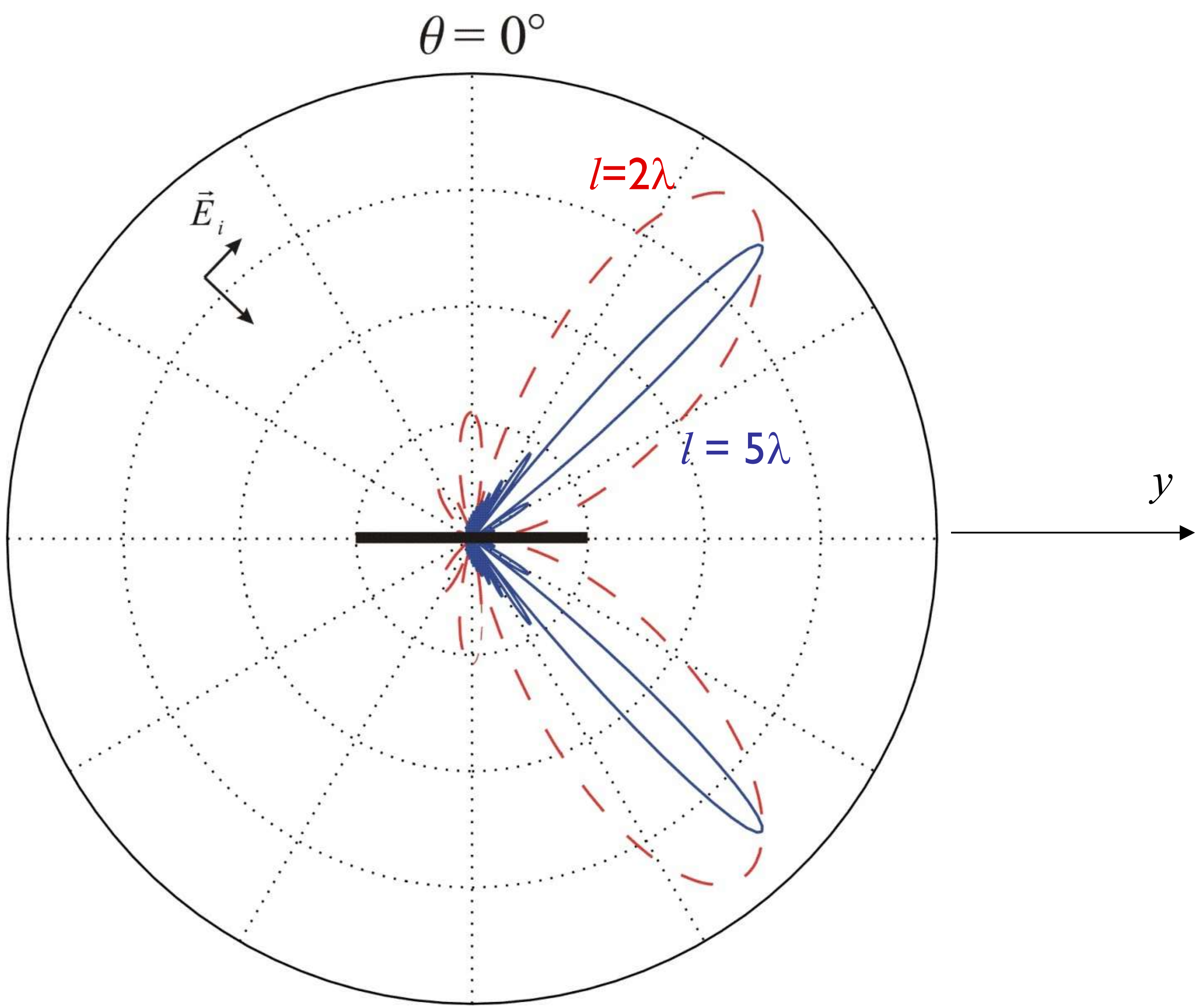
Dans le plan *yz*: $\phi_s = \pi/2$ $\Rightarrow$ $A_y^\circ = \dfrac{2E_i}{Z_0}\, l^2 \, \dfrac{\sin\left(\frac{\beta l}{2}\left(\sin\theta_s - \sin\theta_i\right)\right)}{\frac{\beta l}{2}\left(\sin\theta_s - \sin\theta_i\right)}$



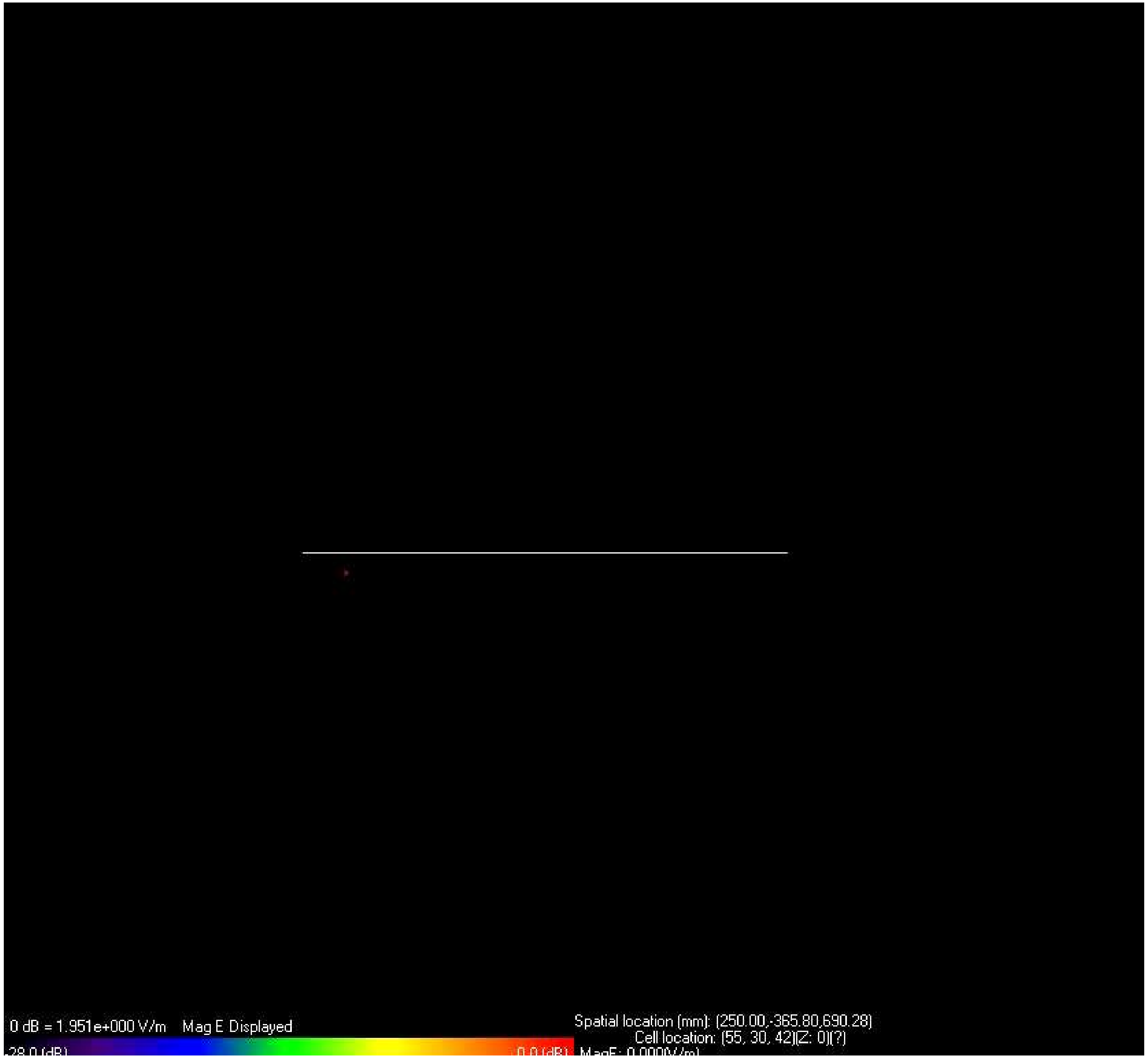
Pour $y>0$:

$$\begin{cases} A_\theta^\circ = \dfrac{2E_i}{Z_0}\, l^2 \, \dfrac{\sin\left(\frac{\beta l}{2}\left(\sin\theta_s - \sin\theta_i\right)\right)}{\frac{\beta l}{2}\left(\sin\theta_s - \sin\theta_i\right)} \cos\theta_s \\ A_\phi^\circ = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{E}_{s\theta} = -j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} A_\theta^\circ = -j\omega \frac{E_i}{2\pi c}\, l^2 \cos\theta_s \frac{\sin\left(\frac{\beta l}{2}\left(\sin\theta_s - \sin\theta_i\right)\right)}{\frac{\beta l}{2}\left(\sin\theta_s - \sin\theta_i\right)} \frac{e^{-j\beta r}}{r}$$

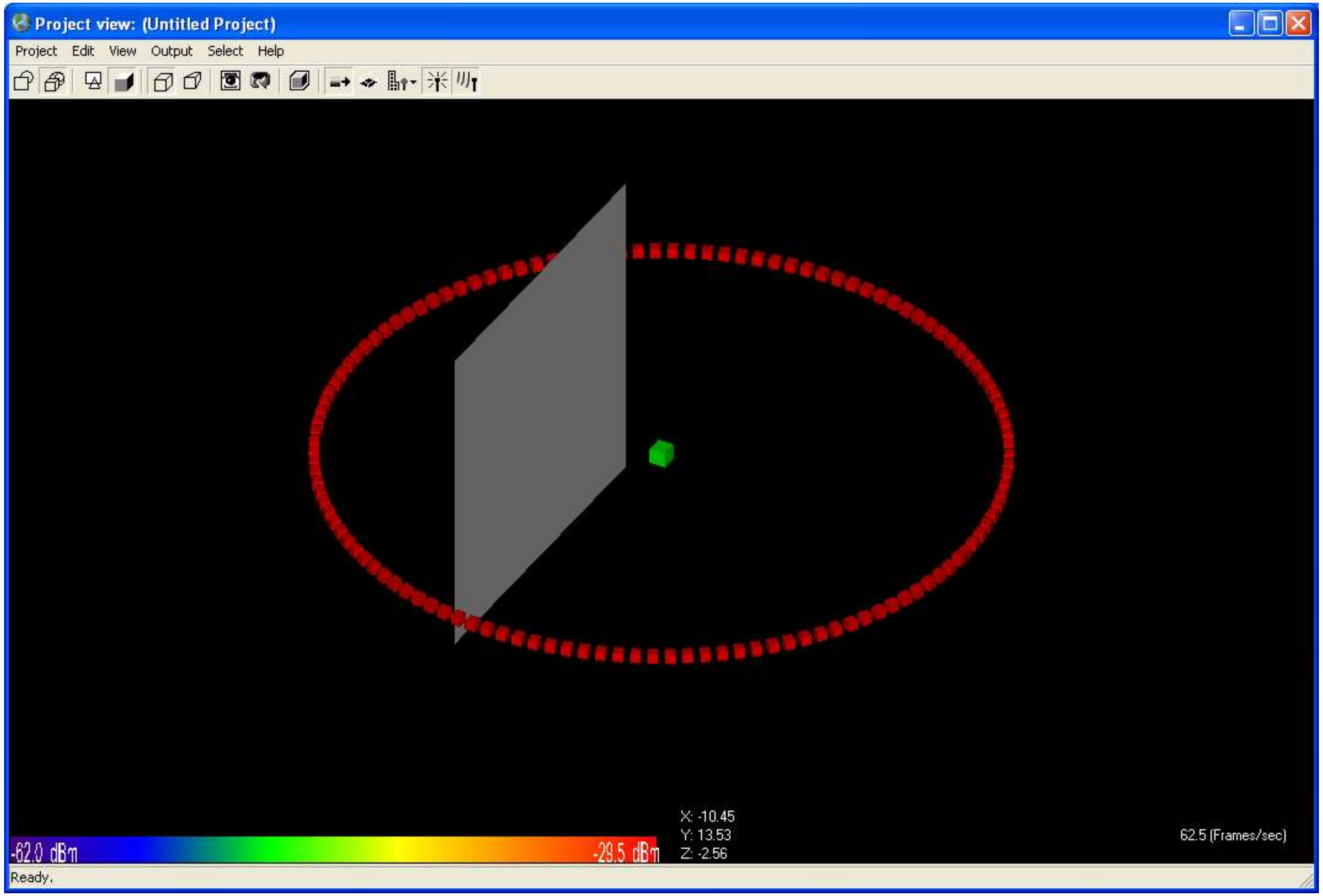

$\theta = 0°$
$\vec{E}_i$
l=2λ
l = 5λ
y

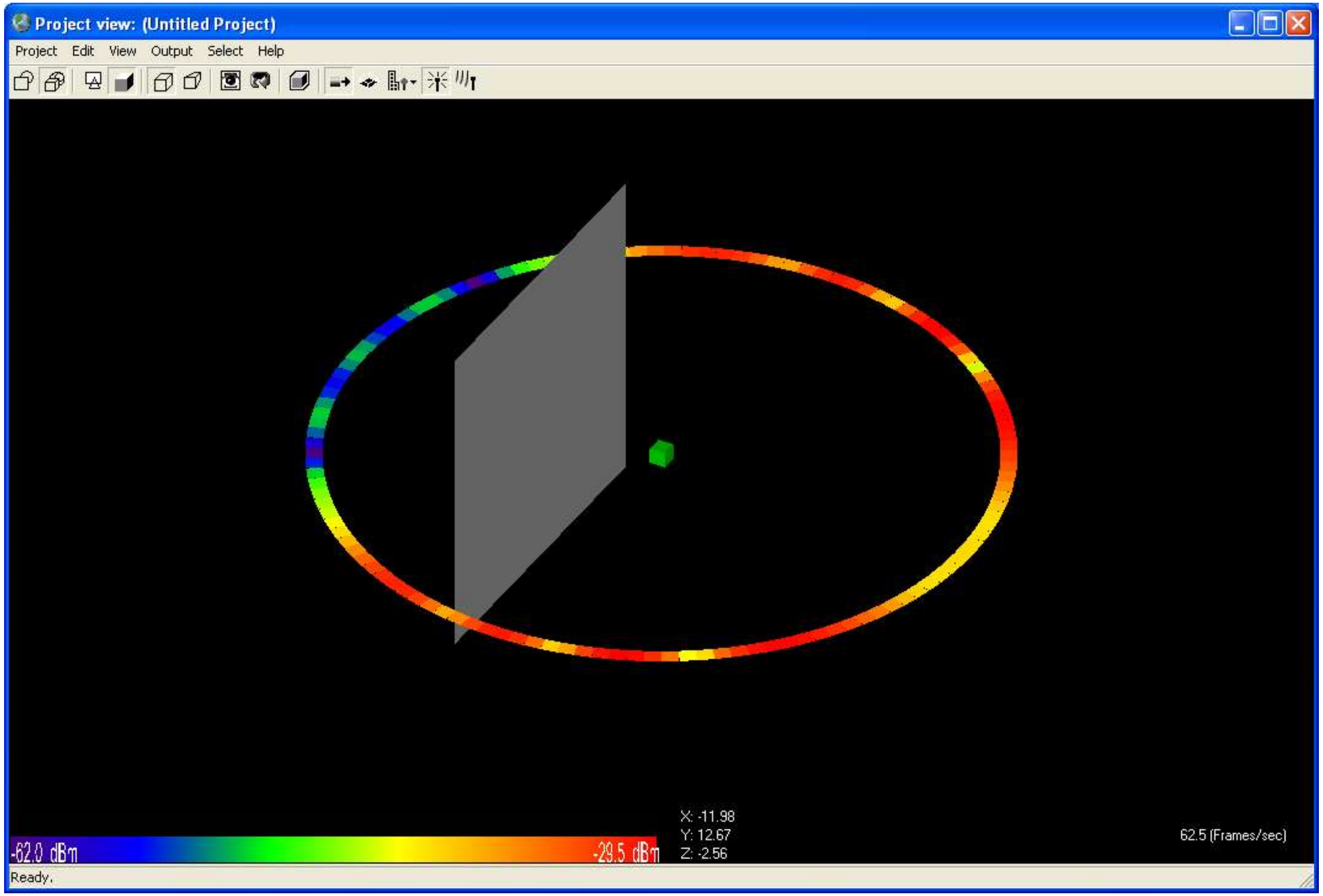
Diffraction
Plaque parfaitement conductrice



Diffraction

Plaque parfaitement conductrice

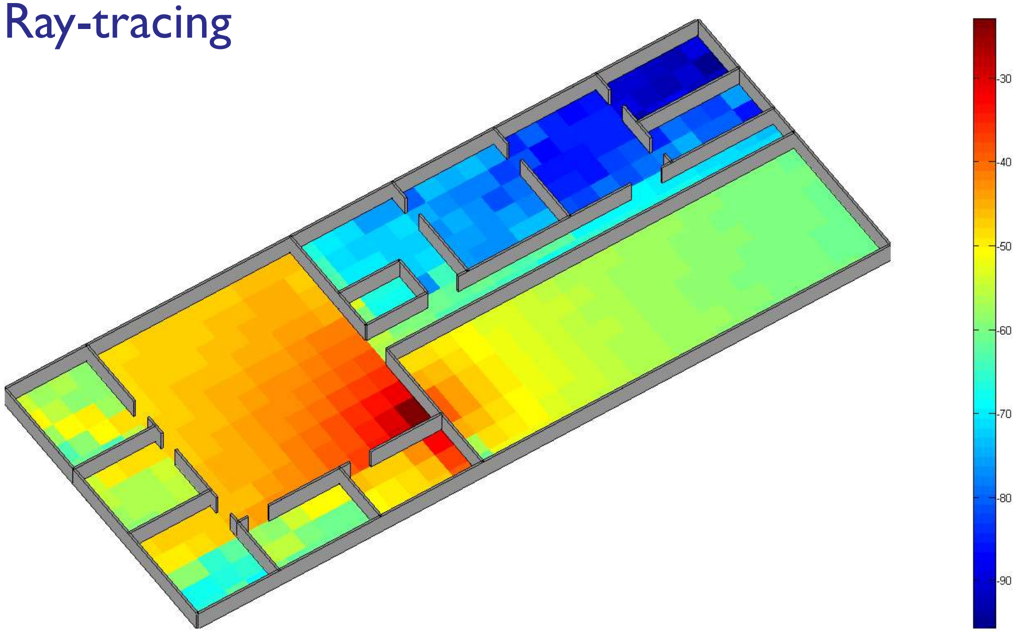


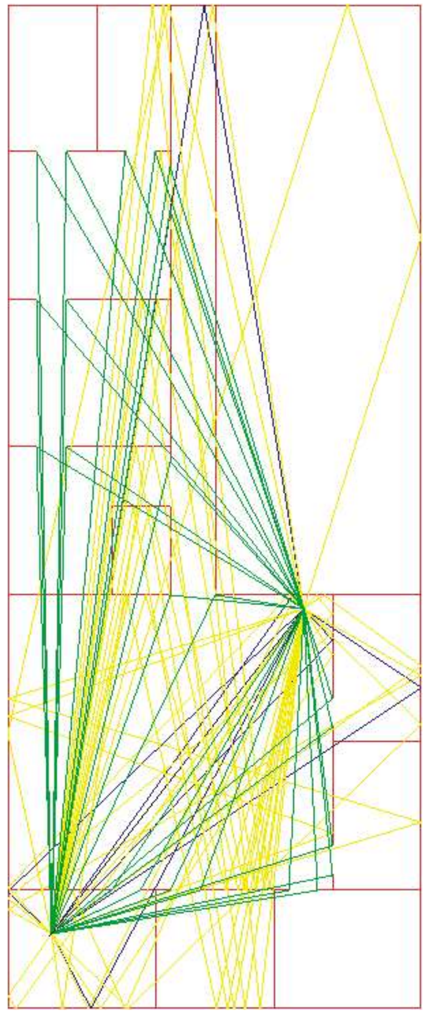

Project view: (Untitled Project)
Project Edit View Output Select Help
X: -11.98
Y: 12.67
Z: -2.56
62.5 (Frames/sec)
-62.0 dBm
-29.5 dBm
Ready.

Où en serons-nous en.. juin

Question: Comment fonctionne votre WiFi ?

➡ Ray-tracing





Composantes
mutli-trajets
(supposées localement planes)

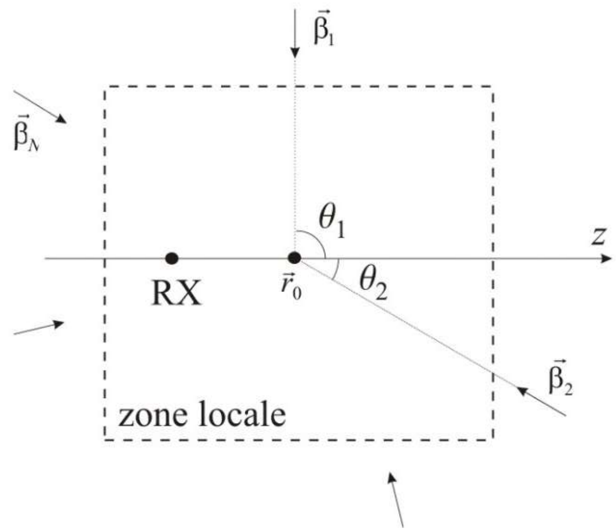
Ray tracing

Tension induite:

$$\underline{V}_{oc}(\vec{r}) = -\sum_{n=1}^{N} \vec{h}_e^{RX}(\theta_n, \phi_n) \cdot \underline{\vec{E}}_n(\vec{r})$$

Hauteur équivalente du récepteur

Champ électrique de l'onde n

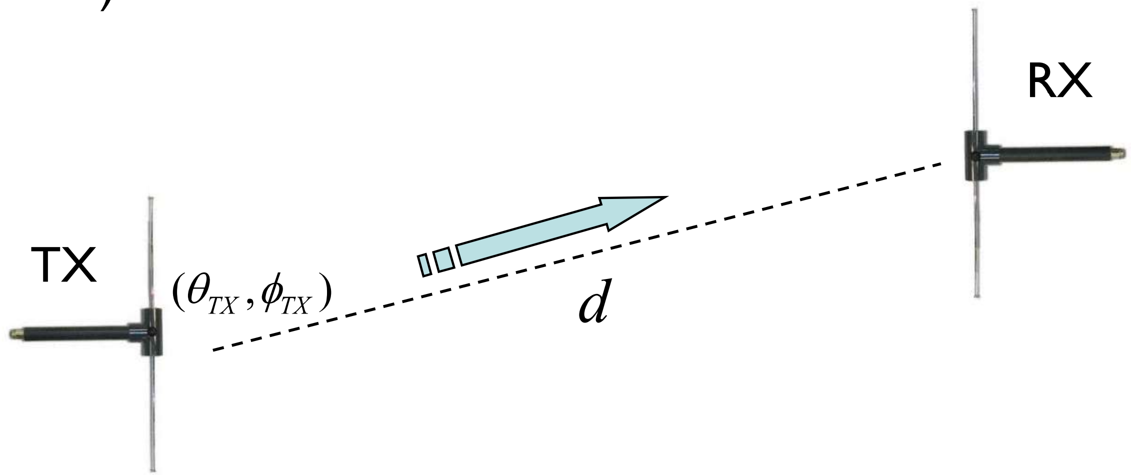


Hypothèses simplifictarices:

- Propagation dans un plan (horizontal ou vertical).
- Champ électrique polarisé perpendiculairement à ce plan. Soit $\underline{E}$ la composante unique du champ électrique.
- Les obstacles sont supposés normaux au plan de propagation.
- Nous utiliserons l'approximation de l'optique géométrique pour calculer les ondes réfléchies et transmises.
- La diffraction est négligée (approximation valable à haute fréquence, au-delà de 10GHz).

Onde directe

Pas interaction avec les obstacles (sauf éventuellement transmission au travers d'obstacles)



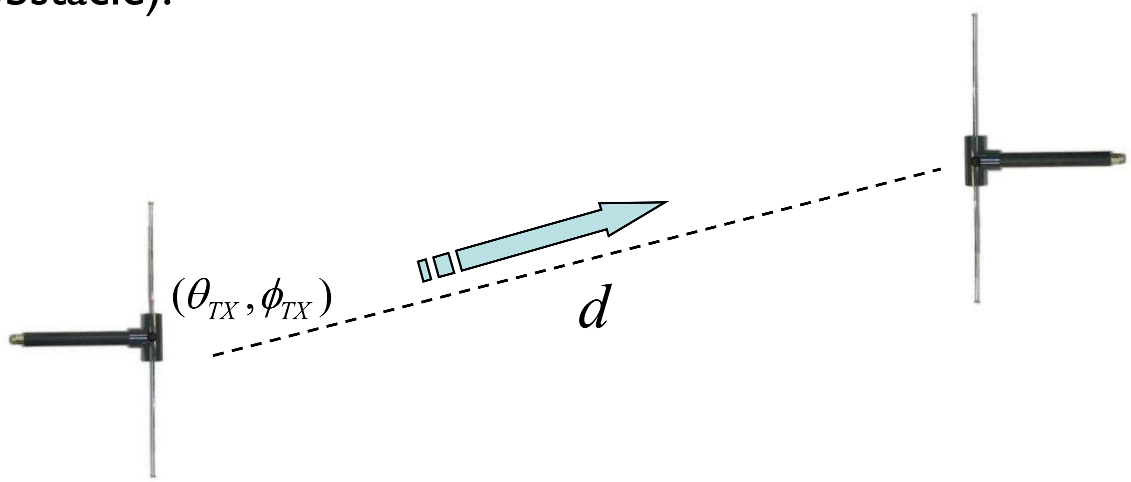
$$\underline{E} = E_0(\theta_{TX}, \phi_{TX}) \frac{e^{-j\beta d}}{d}$$

où d est la distance émetteur-récepteur et

$$E_0(\theta_{TX}, \phi_{TX}) = -j\omega I_a \frac{\mu_0}{4\pi} h_{e\perp}^{TX}(\theta_{TX}, \phi_{TX})$$

Onde directe

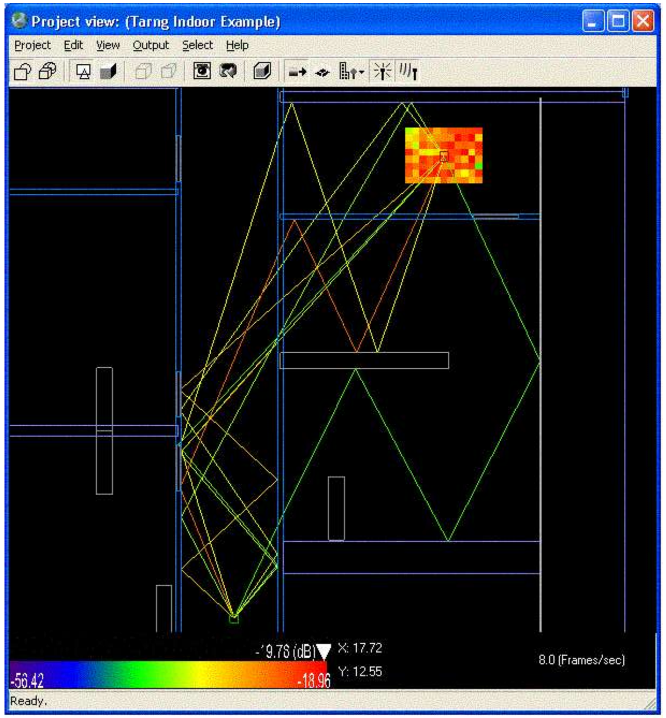
Pas interaction avec les obstacles (éventuellement transmission au travers d'un obstacle):



$$\underline{E} = E_0(\theta_{TX},\phi_{TX})\,\frac{e^{-j\beta d}}{d}$$

Si la hauteur équivalente de l'antenne d'émission n'est pas connue, on peut connaître $|E_0|$, mais non sa phase:

$$\Rightarrow\ |E_0(\theta_{TX},\phi_{TX})| = \sqrt{60\,G_{TX}(\theta_{TX},\phi_{TX})\,P_{TX}}$$



Composante multi-trajet n

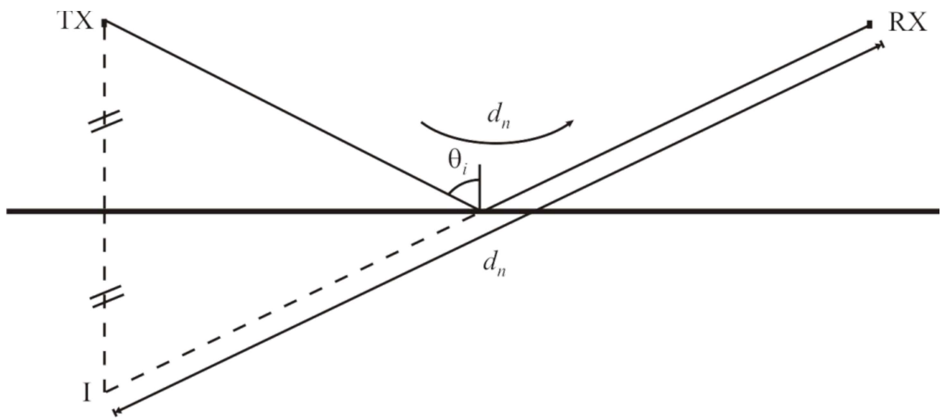
$$\underline{E}_n = \underbrace{\Gamma_1 \Gamma_2 \ldots}_{\text{Réflexions}} \underbrace{T_1 T_2 \ldots}_{\text{Transmissions}} E_0(\theta_{TXn}, \phi_{TXn}) \frac{e^{-j\beta d_n}}{d_n}$$

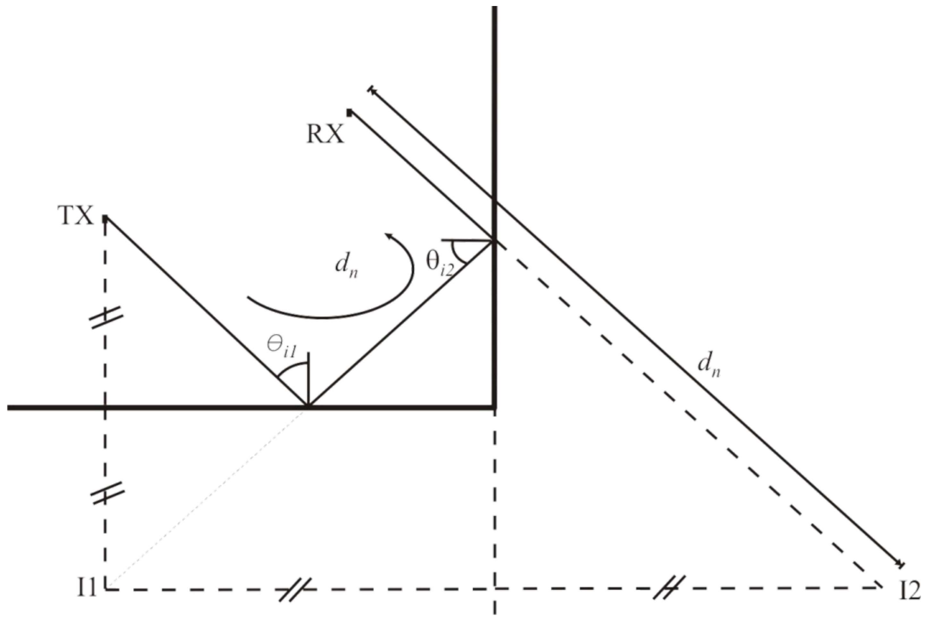
où d_n est la distance totale parcourue et

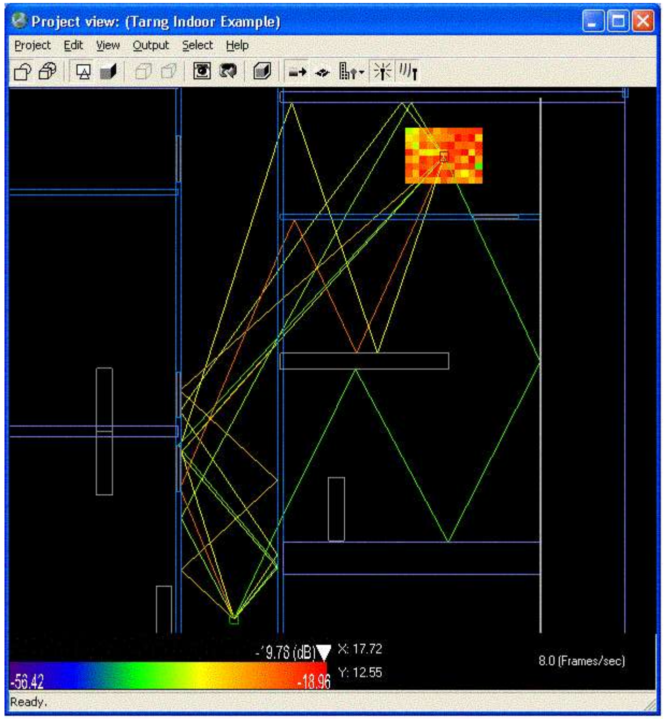
$$E_0(\theta_{TXn}, \phi_{TXn}) = -j\omega I_a \frac{\mu_0}{4\pi} h_{e\perp}^{TX}(\theta_{TXn}, \phi_{TXn})$$

Comment calculer la trajectoire des composantes multi-trajets ?

Méthode des images







$$\underline{V}_{oc}(\vec{r}) = -\sum_{n=1}^{N} \vec{h}_e^{RX}(\theta_n, \phi_n) \cdot \underline{\vec{E}}_n(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \quad P_{RX} = \frac{1}{8R_a} \left| \sum_{n=1}^{N} \vec{h}_e^{RX}(\theta_n, \phi_n) \cdot \underline{\vec{E}}_n(\vec{r}) \right|^2$$

En moyenne, dans une *zone locale*

$$\boxed{< P_{RX} >= \frac{1}{8R_a} \sum_{n=1}^{N} \left| \vec{h}_e^{RX}(\theta_n, \phi_n) \cdot \underline{\vec{E}}_n(\vec{r}) \right|^2}$$