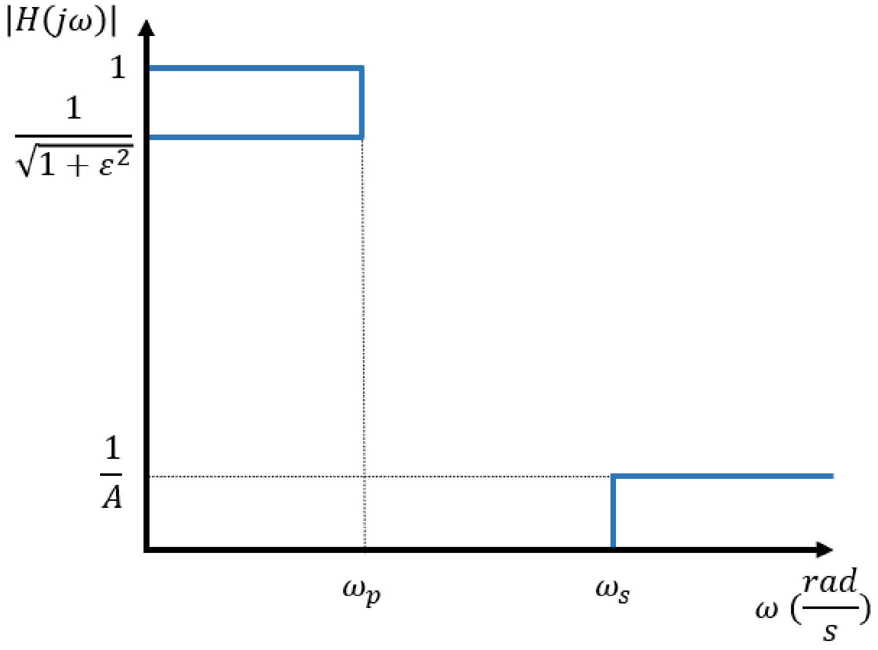
Annexe : Dimensionnement d'un filtre analogique de type Butterworth

L'approximation de Butterworth est une approximation analytique permettant de rechercher une fonction de transfert, rationnelle en p, de manière à s'inscrire dans un gabarit imposé. La solution proposée par Butterworth consiste à caractériser le filtre par un module de la réponse en fréquence de la forme : $|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$



Les choix de l'ordre n minimum et de la fréquence de coupure dépendent des spécifications du gabarit ; en particulier de la tolérance ε en bande passante et de l'atténuation 1/A en bande d'arrêt (voir figure 1). On obtient alors les contraintes suivantes sous forme d'un système d'équations vous permettant d'obtenir n et Ω_c à partir du cahier des charges du filtre (A, ε et Ω_p):

$$\begin{cases} |H(j\omega)|_{\omega=\omega_p} \geq \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \\ |H(j\omega)|_{\omega=\omega_s} \leq \frac{1}{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2n} \leq \varepsilon^2 \\ \left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2n} \geq A^2 - 1 \end{cases}$$

L'approximation de Butterworth fournit le module de la réponse en fréquence $|H(j\omega)|$.

La fonction de transfert normalisée H(p) du filtre s'obtient alors de la manière suivante :

$$|H(j\omega)| * |H(-j\omega)| = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}} \Rightarrow |H(p)| * |H(-p)| = \frac{1}{1+\left(\frac{-jp}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

Les pôles de la fonction de transfert normalisée ($\omega_c = 1$) sont les valeurs p_k qui annulent le dénominateur, c'est-à-dire :

$$1 + (-j\tilde{p})^{2n} = 0 \;\; => \;\; \widetilde{p_k} = je^{j\frac{\pi}{2n}(2k-1)} \qquad\qquad k = 1, \ldots 2n$$

Pour obtenir un système stable, on choisit parmi les 2n pôles obtenus, les n pôles dont la partie réelle est négative. La fonction de transfert normalisée peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\widetilde{H} = \frac{1}{(p - \widetilde{p_1})(p - \widetilde{p_2})(p - \widetilde{p_3})(p - \widetilde{p_4})}$$

La fonction de transfert non normalisée est ensuite obtenue au moyen de la transformation en fréquence :

$$H(p) = \widetilde{H}(\frac{p}{\omega_c})^{1}.$$

[1] Rappelez-vous l'effet de diviser les abscisses d'une fonction par une constante. Par exemple : f2(x) = f(x/3)).