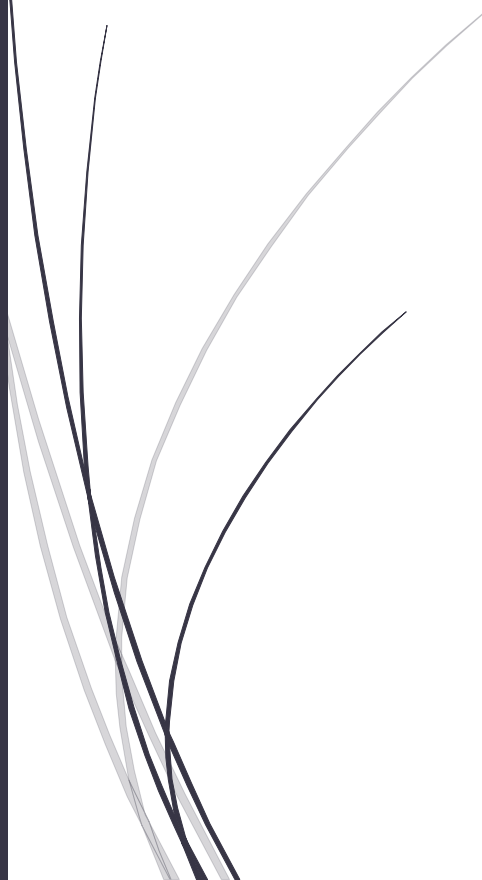




2013-2014

# Automatique

Caroline Descouvemont



	1
<b>1. INTRODUCTION ET MOTIVATION</b>	<b>5</b>
<b>1.1 INTRODUCTION ET TERMINOLOGIE</b>	<b>5</b>
1.1.1 RÉGULATION D'UNE HABITATION	5
1.1.2 POURQUOI UNE BOUCLE FERMÉE ?	6
1.1.2.1 Boucle ouvert	7
1.1.2.2 Boucle fermée	7
<b>2. MODÈLE DYNAMIQUE</b>	<b>8</b>
<b>2.1 INTRODUCTION</b>	<b>8</b>
<b>2.2 NOTIONS FONDAMENTALES : RAPPELS</b>	<b>8</b>
2.2.1 SYSTÈME LINÉAIRE PERMANENT ET CAUSAL	8
2.2.2 CONVOLUTION ET RÉPONSE IMPULSIONNELLE	8
2.2.3 FONCTION DE TRANSFERT OU TRANSMITTANCE ISOMORPHE	8
2.2.4 RÉPONSE INDICIELLE D'UN SLP	9
2.2.5 TRANSMITTANCE ISOCHRONE ET RÉPONSE HARMONIQUE	9
<b>2.3 THÉORÈMES DE LA VALEUR INITIALE ET DE LA VALEUR FINALE</b>	<b>9</b>
2.3.1 THÉORÈME DE LA VALEUR FINALE	9
2.3.2 THÉORÈME DE LA VALEUR INITIALE	9
<b>2.4 MODÉLISATION INTERNE ET EXTERNE</b>	<b>10</b>
2.4.1 EXEMPLE DU MOTEUR À COURANT CONTINU	10
2.4.1.1 Représentation en variables d'état (modèle interne)	10
2.4.1.2 Représentation externe	10
2.4.2 FORME GÉNÉRALE D'UN MODÈLE EN VARIABLES D'ÉTAT	11
2.4.3 CAS D'UN SYSTÈME NON LINÉAIRE	11
2.4.3.1 Exemple du réservoir	11
<b>3. ETUDE DES MODÈLES EN VARIABLES D'ÉTAT</b>	<b>14</b>
<b>3.1 DESCRIPTION EN VARIABLES D'ÉTAT</b>	<b>14</b>
3.1.1 MODÈLE LINÉARISÉ AUTOUR D'UN ÉTAT D'ÉQUILIBRE	14
3.1.2 PASSAGE D'UNE DESCRIPTION EN VARIABLES D'ÉTAT À UNE FONCTION DE TRANSFERT	15
3.1.3 PASSAGE D'UNE FONCTION DE TRANSFERT À UN MODÈLE EN VARIABLES D'ÉTAT	16
3.1.3.1 Cas où le degré du dénominateur est strictement supérieur au degré du numérateur	16
3.1.3.2 Cas où les degrés du dénominateur et du numérateur sont égaux	17
<b>3.2 NOTIONS D'OBSERVABILITÉ ET DE GOUVERNABILITÉ</b>	<b>18</b>
3.2.1 DÉTERMINATION DE L'ÉTAT INITIAL	18
3.2.2 AMENER L'ÉTAT À UNE VALEUR DONNÉE – GOUVERNABILITÉ	19
<b>3.3 RÉALISATION MINIMALE</b>	<b>20</b>
3.3.1 TRANSFORMATION DE SIMILITUDE	20
3.3.2 FORME MODALE	20
3.3.3 SIMPLIFICATION PÔLE-ZÉRO	22
<b>4. ANALYSE DU MODÈLE D'UN SLP</b>	<b>24</b>

<b>4.1 INFLUENCE DE LA POSITION DES PÔLES</b>	<b>24</b>
4.1.1 SYSTÈME DU PREMIER ORDRE	24
4.1.2 SYSTÈME DU SECOND ORDRE	26
<b>4.2 SPÉCIFICATIONS TEMPORELLES</b>	<b>27</b>
4.2.1 SYSTÈME DU SECOND ORDRE	27
4.2.1.1 Temps de montée	28
4.2.1.2 Dépassement indiciel	28
4.2.1.3 Temps d'établissement	29
4.2.1.4 Exploitation des résultats en conception de régulateur	29
4.2.2 SYSTÈME DU PREMIER ORDRE	29
<b>4.3 EFFETS DE ZÉROS ET PÔLES ADDITIONNELS</b>	<b>30</b>
4.3.1 EFFET D'UN ZÉRO	30
4.3.2 EFFET D'UN PÔLE	31
<b>4.4 STABILITÉ</b>	<b>32</b>
4.4.1 CRITÈRE DE ROUTH	33
 <b>5. MODÉLISATION À PARTIR DE DONNÉES EXPÉRIMENTALES</b>	 <b>34</b>
 5.1 EXEMPLE : SYSTÈME DE CHAUFFE	 34
5.2 APPROCHES GRAPHIQUES	35
5.2.1 SYSTÈME STABLE NON OSCILLANT	35
5.2.2 SYSTÈME STABLE OSCILLANT	35
 <b>6. ANALYSE D'UNE BOUCLE FERMÉE</b>	 <b>37</b>
 6.1 INTRODUCTION	 37
6.2 EQUATIONS DE BASE DE L'AUTOMATIQUE	38
6.2.1 BOUCLE OUVERTE	38
6.2.2 BOUCLE FERMÉE	38
6.3 PRINCIPAUX OBJECTIFS	38
6.3.1 LA STABILITÉ	38
6.3.1.1 Boucle ouverte	39
6.3.1.2 Boucle fermée	39
6.3.2 SUIVI DE TRAJECTOIRE	40
6.3.2.1 Boucle ouverte	40
6.3.2.2 Boucle fermée	40
6.3.3 RÉGULATION DE MAINTIEN	40
6.3.4 SENSIBILITÉ AUX ERREURS DE MODÉLISATION	41
6.3.4.1 Boucle ouverte	41
6.3.4.2 Boucle fermée	41
6.4 ERREUR STATIQUE VIS À VIS D'ENTRÉES POLYNOMIALES – TYPE D'UN SYSTÈME	42
6.4.1 TYPE D'UN SYSTÈME	42
6.4.2 PRÉCISION VIS-À-VIS DE LA RÉFÉRENCE	42
6.4.3 PRÉCISION VIS-À-VIS D'UNE PERTURBATION	43

## 7. RÉGULATEURS PID

45

### 7.1 INTRODUCTION

45

### 7.2 ACTIONS PROPORTIONNELLE, INTÉGRALE ET DÉRIVÉE

45

#### 7.2.1 RÉGULATEUR PROPORTIONNEL (P)

45

##### 7.2.1.1 Effet d'un régulateur proportionnel sur un système du premier ordre

45

##### 7.2.1.2 Effet d'un régulateur proportionnel sur un système du second ordre

46

#### 7.2.2 RÉGULATEUR À ACTIONS PROPORTIONNELLE ET INTÉGRALE (PI)

46

##### 7.2.2.1 Effet d'un régulateur PI sur un système du premier ordre

46

##### 7.2.2.2 Effet d'un régulateur PI sur un système du second ordre

47

#### 7.2.3 RÉGULATEUR À ACTIONS PROPORTIONNELLE, INTÉGRALE ET DÉRIVÉE (PID)

47

##### 7.2.3.1 Effet d'un régulateur PID sur un système du second ordre

47

##### 7.2.3.2 Rôle du pôle de filtrage

48

#### 7.2.4 ILLUSTRATIONS DES EFFETS PID

48

### 7.3 AJUSTEMENT PAR LES MÉTHODES DE ZIEGLER NICHOLS

49

#### 7.3.1 MÉTHODE BASÉE SUR LA RÉPONSE INDICIELLE

49

#### 7.3.2 MÉTHODE DE LA SENSIBILITÉ ULTIME

50

## 8. MÉTHODE DU LIEU D'EVANS

51

### 8.1 RÈGLES POUR LE TRACÉ DU LIEU D'EVANS

51

#### 8.1.1 NOTATIONS – EQUATION CARACTÉRISTIQUE

51

#### 8.1.2 DÉFINITIONS

51

#### 8.1.3 EXEMPLE : TRACÉ D'UN LIEU D'EVANS SIMPLE

52

##### 8.1.3.1 Lieu sur l'axe réel

53

##### 8.1.3.2 Asymptotes

53

##### 8.1.3.3 Points où le lieu quitte l'axe réel

54

##### 8.1.3.4 Intersections avec l'axe imaginaire

54

#### 8.1.4 RÈGLES GÉNÉRALES POUR LE TRACÉ DU LIEU D'EVANS

55

##### 8.1.4.1 Règle n°1 : détermination du nombre de branches

55

##### 8.1.4.2 Règle n°2 : conditions d'existence sur l'axe réel

55

##### 8.1.4.3 Règle n°3 : les asymptotes

55

##### 8.1.4.4 Règle n°4 : points où le lieu quitte ou rejoint l'axe réel

56

##### 8.1.4.5 Règle n°5 : points où le lieu intersecte l'axe imaginaire

56

##### 8.1.4.6 Boucle ouverte possédant des pôles complexes conjugués

57

##### 8.1.4.7 Règle n°6 : Angle de départ (d'arrivée) en des pôles (zéros) complexes conjugués

58

##### 8.1.4.8 Détermination du gain associé à une position des pôles

58

### 8.2 EXEMPLES DE LIEUX D'EVANS – VERS LA CONCEPTION DE CORRECTEURS

59

#### 8.2.1 RÉGULATION D'ATTITUDE D'UN SATELLITE

59

##### 8.2.1.1 Utilisation d'un régulateur P

59

##### 8.2.1.2 Utilisation d'un régulateur PD (idéal)

60

##### 8.2.1.3 Régulateur PD propre

61

### 8.3 CONCEPTION D'UN CORRECTEUR (RÉGULATEUR) DYNAMIQUE

62

#### 8.3.1 CONCEPTION D'UN RÉGULATEUR À AVANCE DE PHASE

62

#### 8.3.2 CONCEPTION D'UN RÉGULATEUR À RETARD DE PHASE

64

**9. MÉTHODES HARMONIQUES****9.1 RÉPONSE HARMONIQUE**

9.1.1 RÉPONSE D'UN SLP À UNE ENTRÉE SINUSOÏDALE

9.1.2 COURBES DE BODE

**9.2 TRACÉ ASYMPTOTIQUE DES COURBES DE BODE**9.2.1 FACTEUR  $A0(j\omega)k$ 9.2.2 FACTEUR DU PREMIER ORDRE  $(1 + j\omega T)$ 9.2.3 FACTEUR DU SECOND ORDRE  $(1 + 2\zeta j\omega n + j\omega n^2)$ 

9.2.4 LIEN ENTRE LE FACTEUR D'AMORTISSEMENT ET LE PIC DE RÉSONNANCE

9.2.5 SYSTÈME À DÉPHASAGE NON MINIMAL

9.2.6 EN RÉSUMÉ

**9.3 STABILITÉ D'UNE BOUCLE FERMÉE – MÉTHODES HARMONIQUES**

9.3.1 PRÉREQUIS : PRINCIPE DE L'ARGUMENT

9.3.2 CRITÈRE DE STABILITÉ DE NYQUIST

9.3.3 ESQUISSE DE LA COURBE DE NYQUIST COMPLÈTE

9.3.3.1 Système du premier ordre

9.3.3.2 Système du second ordre

9.3.3.3 Boucle ouverte avec ou sans pôle(s) à l'origine

9.3.3.4 Système de type 1

9.3.3.5 Système de type 2

9.3.4 INTERVALLE DE VALEURS DU GAIN POUR LEQUEL LA BOUCLE FERMÉE EST STABLE

9.3.5 MARGES DE STABILITÉ

9.3.6 LIEN ENTRE LA MARGE DE PHASE ET LE FACTEUR D'AMORTISSEMENT

**9.4 CONCEPTION D'UN RÉGULATEUR PAR LES MÉTHODES HARMONIQUES**

9.4.1 THÉORÈME DE BODE

9.4.2 FORMULATION DES PROBLÈMES DE RÉGULATION DANS LE DOMAINE HARMONIQUE

9.4.2.1 Spécifications

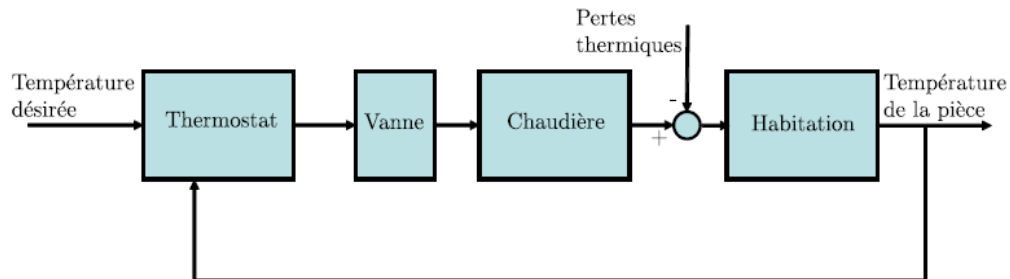
9.4.3 CORRECTEUR À AVANCE DE PHASE

9.4.4 CORRECTEUR À RETARD DE PHASE

# 1.INTRODUCTION ET MOTIVATION

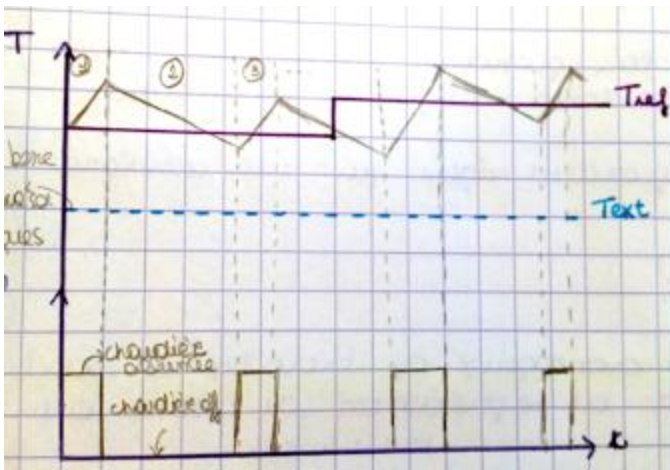
## 1.1 Introduction et terminologie

### 1.1.1 Régulation d'une habitation



L'objectif d'un système de régulation de la température d'une habitation est de faire en sorte que la température de la pièce atteigne une valeur de consigne désirée.

On peut représenter graphiquement la température de la pièce en fonction du temps :

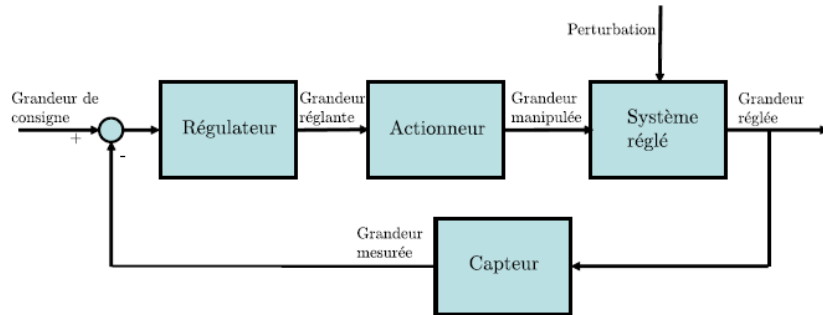


- 1) La chaudière est allumée, la température de la pièce augmente jusqu'à dépasser légèrement la température du thermostat.
- 2) La chaudière est alors éteinte et la T diminue jusqu'à descendre en dessous de la température du thermostat. On suppose la maison bien isolée donc le temps de refroidissement est plus grand que le temps de chauffe de la maison.
- 3) Le cycle se répète ... Lorsque l'on arrive au matin, la consigne est plus élevée et donc la chaudière fonctionne plus longtemps.

Cet exemple sert à formaliser les différents éléments d'une boucle fermée. On définit :

- Un **signal réglé** : grandeur que l'on souhaite régler afin qu'elle reste au voisinage d'une valeur fixée ou qu'elle suive un signal de référence spécifié. (*la température*)
- Un **signal réglant** : grandeur permettant d'agir sur le système afin que la grandeur réglée ait le comportement souhaité. (*signal qui entre dans l'actionneur, la chaudière*)
- Un **système réglé** : tout système dont on veut assurer la régulation. (*l'habitation*)
- Une **perturbation** : grandeur ou signal qui tend à écarter la grandeur réglée de la consigne. (*les pertes thermiques*)

On peut maintenant s'intéresser au schéma d'une boucle de régulation :



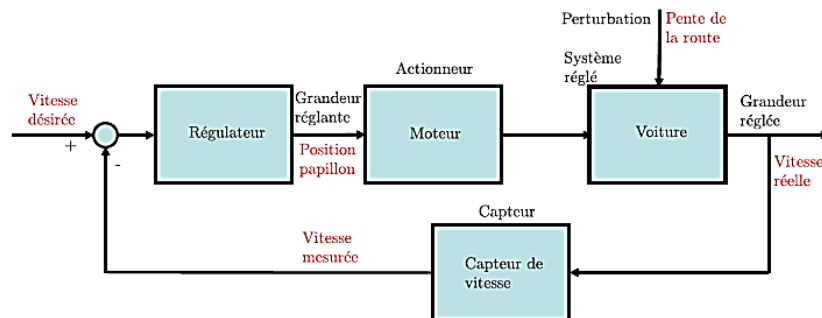
On définit :

- **Régulation par rétroaction** : méthode permettant de réduire l'écart entre la grandeur de consigne et la grandeur réglée en présence de perturbations, en ajustant la grandeur réglante sur base de cet écart.
- **Boucle fermée** : système dont l'entrée est le signal de référence et la sortie la grandeur réglée.
- **Régulation de maintien** : la grandeur réglée reste dans le voisinage d'une référence malgré les perturbations (réjection des perturbations).
- **Suivi de trajectoire** : la grandeur réglée suit une consigne non constante.

### 1.1.2 Pourquoi une boucle fermée ?

Pour illustrer les avantages que l'on a de travailler en boucle fermée, on va étudier l'exemple du cruise control d'une voiture.

Lorsque la voiture rencontre une pente, elle va régler automatiquement la position des papillons des gaz de



sorte à compenser l'effet de la pente et ainsi garder la même vitesse. Le système réglé est ma voiture, la grandeur réglée est la vitesse de la voiture. Cette vitesse est mesurée à l'aide d'un capteur et est comparée à la vitesse désirée. Le régulateur va alors engendrer un signal réglant, typiquement la position des papillons des gaz, de sorte que le moteur (actionneur) fournisse à la voiture la vitesse souhaitée. Les perturbations sont liées aux pentes de la route, les frottements, etc. ...

On modélise le cruise control très simplement (le modèle n'est pas du tout réaliste, mais le but est d'illustrer) :

$$y = 10 (u - 0,5w)$$

où

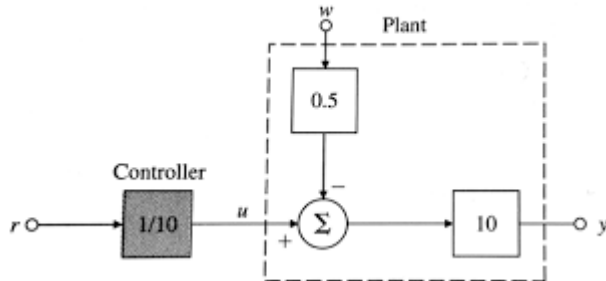
- $y$  est la vitesse de la voiture en  $km/h$  ;
- $u$  est l'angle du papillon des gaz en  $^{\circ}$  ;
- $w$  est la pente de la route en  $\%$ .

Voyons ce qu'il se passe en boucle ouverte, puis en boucle fermée.

### 1.1.2.1 Boucle ouverte

On veut imposer une référence  $r$  à notre système. On met un gain  $1/10$  entre notre référence et notre signal réglant.

Le schéma fonctionnel est le suivant :



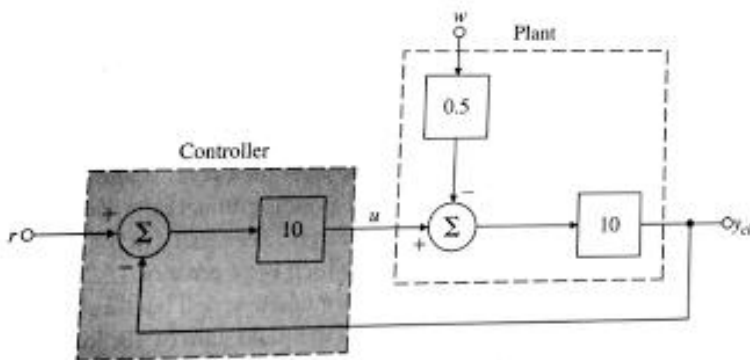
$$\begin{aligned}\Rightarrow u &= \frac{r}{10} \\ \Rightarrow y &= 10 \left( \frac{r}{10} - 0,5 w \right) = r - 5w \\ \Rightarrow e_{BO} &= r - y = 5w\end{aligned}$$

Si la pente de la route est nulle ( $w=0$ ), l'erreur est nulle. Par contre, si elle est non nulle, l'erreur sur la vitesse va croître et il n'y aura pas de compensation. **Une régulation en boucle ouverte est fortement sensible à une erreur de modélisation.**

### 1.1.2.2 Boucle fermée

On veut imposer une référence  $r$  à notre système. On met un gain  $10$  entre notre référence et notre signal réglant.

Le schéma fonctionnel est le suivant :



$$\begin{aligned}\Rightarrow u &= 10(r - y) \\ \Rightarrow y &= 100r - 100y - 5w \\ \Rightarrow y &= \frac{100r}{101} - \frac{5w}{101} \\ \Rightarrow e_{BF} &= \frac{r}{101} + \frac{5w}{101}\end{aligned}$$

L'erreur vis-à-vis de la perturbation est diminuée d'un facteur 101. **L'erreur sera faible tant que le produit du gain du régulateur par le gain du système réglé sera grand.** Néanmoins, le gain de la boucle fermée sera limité par la physique du problème et également par la stabilité du système (exemple du haut-parleur).

Lorsque l'on compare avec le cas précédent, on constate que la boucle fermée présente deux avantages sur la boucle ouverte :

- 1) **Réjection des perturbations** : les perturbations n'ont que peu d'effet, l'erreur reste petite même en présence de perturbations.
- 2) **Insensibilité aux erreurs de modélisation.**



## 2. MODÈLE DYNAMIQUE

### 2.1 Introduction

On peut modéliser la dynamique d'un système dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel.

Dans le domaine temporel, on utilisera des outils tels que la réponse impulsionnelle et la réponse indicielles, pour avoir des informations principalement sur le régime transitoire. Dans le domaine fréquentiel, on utilisera les transmittances isochrones et isomorphes du système pour caractériser le régime stationnaire.

### 2.2 Notions fondamentales : rappels

#### 2.2.1 Système linéaire permanent et causal

Un système est **linéaire** si lorsqu'on applique une combinaison de deux signaux à l'entrée, la sortie est la combinaison des réponses aux signaux individuels :

$$\left. \begin{array}{l} y_1(t) = \varphi(u_1(t)) \\ y_2(t) = \varphi(u_2(t)) \end{array} \right\} \Rightarrow a y_1(t) + b y_2(t) = \varphi(a u_1(t) + b u_2(t)) \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Un système est **permanent** si deux entrées identiques décalées d'un laps de temps  $\tau$  donnent des sorties identiques et décalées de  $\tau$ .

Un système est **causal** si la sortie à l'instant  $t$  ne dépend que de l'entrée à l'instant  $t$  et aux instants antérieurs.

#### 2.2.2 Convolution et réponse impulsionnelle

On a montré en analyse complexe que la réponse impulsionnelle suffit pour caractériser complètement le comportement entrée-sortie d'un SLP. La relation entrée-sortie est définie par la convolution entre la réponse impulsionnelle et le signal d'entrée :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau = h(t) * u(t).$$

La réponse impulsionnelle du système peut être vue comme la réponse à une impulsion de durée  $\varepsilon$  et de surface unitaire  $\delta_\varepsilon(t)$  (l'impulsion de Dirac),

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t).$$

Dans le cas d'un système causal, on a  $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$ .

#### 2.2.3 Fonction de transfert ou transmittance isomorphe

La transformée de Laplace bilatérale d'un produit de convolution est

$$Y(p) = H(p)U(p)$$

où  $H(p) = \mathcal{L}(h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-pt} dt$ .  $H(p)$  est la **fonction de transfert** ou encore **transmittance isomorphe** du système.

## 2.2.4 Réponse indicielle d'un SLP

La réponse indicielle est la réponse du système à la fonction d'Heaveside.

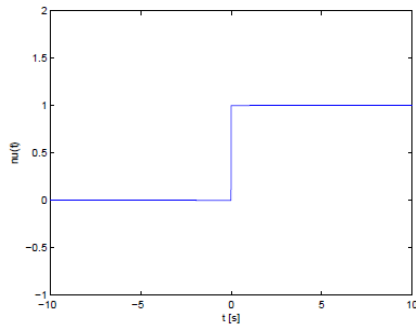


Figure: Fonction d'Heaveside

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau$$

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}(S(p)) \quad S(p) = \frac{H(p)}{p}$$

## 2.2.5 Transmittance isochrone et réponse harmonique

Lorsque l'axe imaginaire appartient à la région de convergence de  $H(p)$  (c'est-à-dire lorsque le SLP est stable), on définit la **transmittance isochrone** en substituant  $p$  par  $j\omega$  dans  $H(p)$  :

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}.$$

Pour une entrée sinusoïdale  $u(t) = A \sin(\omega_0 t)$  ( $\omega_0, A \in \mathbb{R}$ ), la sortie d'un SLP caractérisé par  $H(j\omega)$  est

$$y(t) = A |H(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg(H(j\omega_0))).$$

## 2.3 Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

Ces théorèmes permettent d'acquérir certaines informations sur la fonction de transfert à partir de la réponse impulsionnelle ou indicielle. En particulier, le théorème de la valeur finale va permettre de définir le gain statique d'un système stable à partir de sa réponse indicielle et le théorème de la valeur initiale donnera des informations sur le degré relatif de la fonction de transfert.

### 2.3.1 Théorème de la valeur finale

Soit  $Y(p) = G(p)e^{\alpha p}$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $G(p)$  est une fraction rationnelle dont le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur. Si tous les poles de  $pY(p)$  ont une partie réelle négative et si  $y(t)$  est une fonction nulle pour  $t < -\alpha$  telle que  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(p))$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p).$$

On définit le **gain statique** du système par

$$A_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p).$$

### 2.3.2 Théorème de la valeur initiale

Soit  $Y(p)$  une fonction rationnelle donc le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur. Soit  $y(t)$  la fonction causale telle que  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(p))$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pY(p).$$

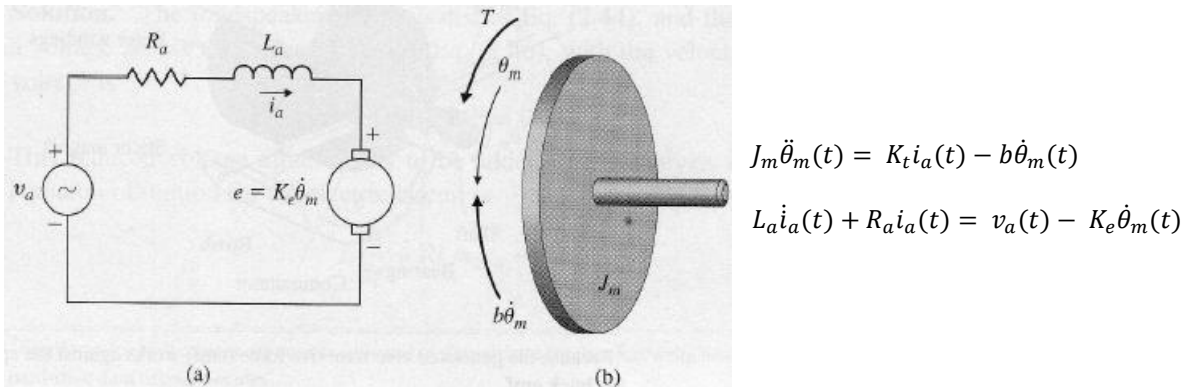
## 2.4 Modélisation interne et externe

Il y a deux types de modèles :

- **Interne** : système d'EDO faisant intervenir les variables physique internes au système ou des grandeurs auxiliaires sans signification physique → [Description en variables d'états](#).
- **Externe** : EDO faisant intervenir uniquement les grandeurs d'entrée (signal réglant et perturbations) et de sortie (signal réglé).

On va voir un exemple de modélisation d'un moteur à courant continu.

### 2.4.1 Exemple du moteur à courant continu



#### 2.4.1.1 Représentation en variables d'état (modèle interne)

Pour un modèle en variables d'état, on se ramène toujours à un système d'EDO du premier ordre. On doit donc s'arranger pour n'avoir que des dérivées premières. Pour ce faire, on introduit une variable auxiliaire  $\dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t)$ . L'équation du moment cinétique peut se réécrire :

$$J_m \dot{\omega}_m(t) + b \omega_m(t) = K_t i_a(t)$$

$$\Rightarrow \dot{\omega}_m(t) = -\frac{b}{J_m} \omega_m(t) + \frac{K_t}{J_m} i_a(t)$$

On peut regrouper nos EDO sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ \dot{i}_a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{J_m} & \frac{K_t}{J_m} \\ 0 & -\frac{K_e}{L_a} & \frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} v_a(t)$$

Le **vecteur d'état** est formé des trois variables dont on prend la dérivée. Dans ce cas-ci, on a trois variables d'état et pour la grandeur de sortie, on peut choisir de régler l'une ou l'autre de ces grandeurs.

#### 2.4.1.2 Représentation externe

On repart des deux équations de base du modèle et on prend la transformée de Laplace de chacune de ces équations pour trouver la fonction de transfert du système :

$$p(J_m p + b)\Theta_m(p) = K_t I_a(p)$$

$$(L_a p + R_a)I_a(p) = V_a(p) - K_e p \Theta_m(p)$$

La fonction de transfert est donc

$$\frac{\Theta_m(p)}{V_a(p)} = \frac{K_t}{p(J_m p + b)(L_a p + R_a) + K_t K_e p}.$$

On n'a plus d'information sur le courant ni la vitesse du moteur. Le système est modélisé par une entrée  $v_a(t)$  et une sortie  $\theta_m(t)$ .

On peut avoir une représentation externe sous forme d'équation différentielle. Il suffit de repasser dans le domaine temporel :

$$J_m \ddot{\theta}_m(t) + (J_m R_a + b L_a) \dot{\theta}_m(t) + (b R_a + K_t K_e) \theta_m(t) = K_t v_a(t)$$

## 2.4.2 Forme générale d'un modèle en variables d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}$$

Avec

- $x(t)$  : vecteur d'état ( $n \times 1$ )
- $u(t)$  : vecteur réglant ( $m \times 1$ )
- $y(t)$  : vecteur de sortie ou réglé ( $p \times 1$ )
- $A$  : matrice du système ( $n \times n$ )
- $B$  : matrice d'entrée ( $n \times m$ )
- $C$  : matrice de sortie ( $p \times n$ )
- $D$  : matrice d'action directe ( $p \times m$ )

La puissance du formalisme en variables d'état réside dans le fait qu'il a exactement la même forme qu'on ait un système à une ou plusieurs entrées/sorties.

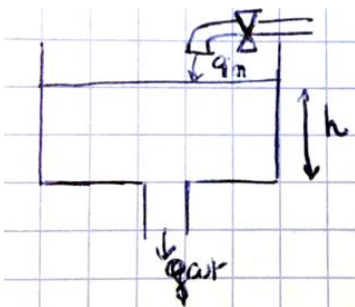
## 2.4.3 Cas d'un système non linéaire

La plupart des systèmes physiques ne sont pas linéaires. On va voir au travers d'un exemple comment traiter ces systèmes.

### 2.4.3.1 Exemple du réservoir

On va étudier un système non linéaire en considérant des petites perturbations autour d'un état d'équilibre. Lorsque l'on se situera autour de ce point d'équilibre, on pourra décrire le système comme un SLP.

On considère un réservoir dont le débit de sortie n'est pas réglé par une vanne, il va varier avec la hauteur  $h$  d'eau dans le réservoir :  $q_{out}(t) = c\sqrt{h(t)}$ .



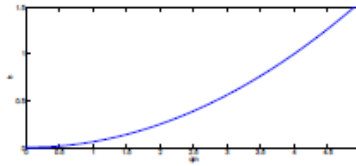
Bilan volumique :

$$S \frac{dh(t)}{dt} = q_{in}(t) - q_{out}(t) = q_{in}(t) - c\sqrt{h(t)}$$

On a bien une équation différentielle non linéaire.

Pour caractériser le fonctionnement du système, on introduit la notion **d'état d'équilibre**. Un état d'équilibre est une solution particulière de l'équation différentielle qui ne dépend pas du temps (pour lequel il n'y a plus de variation de  $h$ ). Cette solution est obtenue pour une entrée constante supposée appliquée depuis un temps infiniment long. En imposant  $\frac{dh(t)}{dt} = 0$ , on obtient  $h = (\frac{q_{in}}{c})^2$ , ce qui fournit, pour un niveau donné, le débit d'entrée à appliquer pour que ce niveau reste constant au cours du temps.

On peut représenter les différents états d'équilibre possibles sur la **caractéristique statique** du système. Comme le système est non linéaire, cette caractéristique n'est pas une droite.



**Figure:** Caractéristique statique pour  $c = 4m^{5/2}s^{-1}$

On va linéariser le problème autour d'un état d'équilibre  $h = h_0$ . L'entrée correspondante est  $q_{in0} = c\sqrt{h_0}$ .

On introduit les écarts aux grandeurs d'équilibre :

$$\begin{cases} \tilde{h}(t) = h(t) - h_0 \\ \tilde{q}_{in}(t) = q_{in}(t) - q_{in0} \end{cases}$$

On veut se débarrasser du terme non linéaire  $\sqrt{h(t)}$  et on va donc le développer en série de Taylor autour de  $h_0$  :

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_0} + \frac{1}{2\sqrt{h_0}} (h - h_0) + O((h - h_0)^2).$$

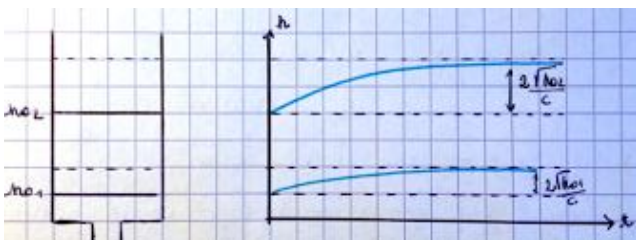
On substitue le résultat dans l'équation différentielle et on obtient

$$S \frac{d\tilde{h}(t)}{dt} + \frac{c}{2\sqrt{h_0}} \tilde{h}(t) = \tilde{q}_{in}(t)$$

Cette dernière équation est l'équation différentielle de notre modèle linéarisé. On peut calculer la fonction de transfert du modèle linéarisé :

$$H(p) = \frac{\tilde{H}(p)}{\tilde{Q}_{in}(p)} = \frac{1/S}{p + c/2S\sqrt{h_0}}$$

On voit que le paramètre  $h_0$  intervient dans l'équation différentielle. Cela implique qu'elle ne sera valable qu'aux alentours de  $h_0$ . Représentons la manière dont ce système réagit au voisinage de deux niveaux. On suppose que le signal d'entrée est  $v(t)$  et on considère deux niveaux  $h_{01}$  et  $h_{02}$ .



$$h(t) = \frac{1}{S} e^{-tc/2S\sqrt{h_0}} v(t)$$

On constate une évolution du gain statique avec l'état d'équilibre :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{H(p)}{p} = H(0) = \frac{2\sqrt{h_0}}{c}$$

Dans le domaine temporel, la constante de temps vaut  $\frac{2S\sqrt{h_0}}{c}$ . La réponse est d'autant plus lente que le niveau est élevé.

Le gain statique du système peut être déduit de la caractéristique statique. En effet, la tangente à la caractéristique en  $(q_{in0}, h_0)$  a pour équation :

$$h - h_0 = \frac{2\sqrt{h_0}}{c} (q_{in} - q_{in0})$$

Le gain statique est en fait la pente de tangente à la caractéristique statique au point de fonctionnement.

Ce système étant non linéaire, sa réponse est différente en fonction du point de fonctionnement non seulement au niveau statique (gain statique qui varie) mais également au niveau de la rapidité de la réponse. [Lorsqu'on linéarise un système, le choix des états d'équilibre aura une influence sur l'allure de la réponse.](#)

### 3. ETUDE DES MODÈLES EN VARIABLES D'ÉTAT

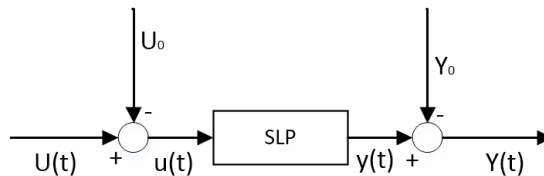
Dans ce chapitre, on formalise la linéarisation d'un système non linéaire sur base d'un modèle général d'un système décrit par ses équations d'états. Une fois le système linéarisé, on étudiera ses propriétés de manière à savoir comment le mettre en œuvre sous forme d'un circuit électronique.

#### 3.1 Description en variables d'état

La forme générale d'une description en variables d'état pour un système non linéaire est

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X(t), U(t)) \\ Y(t) = g(X(t), U(t)) \end{cases}$$

On utilisera ici les majuscules pour représenter les signaux temporels et les minuscules pour représenter les écarts à l'équilibre.



On définit les états d'équilibre par

$$\begin{cases} 0 = f(X_0, U_0) \\ Y_0 = g(X_0, U_0) \end{cases}$$

On suppose qu'on a résolu le problème et qu'on a des valeurs compatibles de  $X_0, Y_0, U_0$  qui caractérisent l'état d'équilibre que l'on veut étudier. On va maintenant s'intéresser aux petites variations autour de cet état d'équilibre.

##### 3.1.1 Modèle linéarisé autour d'un état d'équilibre

On va refaire l'opération de linéarisation que l'on a faite lors de l'exemple du chapitre précédent pour aboutir à un modèle en variables d'état qui a la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}$$

Avec

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t) - X_0 \\ y(t) &= Y(t) - Y_0 \end{aligned}$$

On fait l'exercice pour la première équation :

On sait que  $\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X(t), U(t)) \\ x(t) = X(t) - X_0 \end{cases}$  c'est-à-dire  $X(t) = x(t) + X_0$ , donc

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \dot{x}(t) + \dot{X}_0 = f(x(t) + X_0, u(t) + U_0) \\ &= f(X_0, U_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{(X_0, U_0)} x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial U} \right|_{(X_0, U_0)} u(t) \\ &= A x(t) + B u(t) \end{aligned}$$

On retrouve donc bien  $\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$  avec

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{(x_0, u_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial X_n} \end{bmatrix} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial U} \right|_{(x_0, u_0)}$$

Si on fait le même raisonnement pour la deuxième équation, on obtient

$$C = \left. \frac{\partial g}{\partial X} \right|_{(x_0, u_0)} \quad D = \left. \frac{\partial g}{\partial U} \right|_{(x_0, u_0)}$$

Il est intéressant d'étudier les solutions de nos équations différentielles linéaires (obtenues après linéarisation). Pour cela, on se donne une condition initiale. On est donc amené à résoudre un problème de Cauchy. Pour cela, on va introduire l'**exponentielle d'une matrice** comme étant définie par

$$\exp(A t) = I_n + A t + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^n \frac{t^n}{n!} + \dots$$

avec  $A \exp(A t) = \exp(A t) A$ . On peut alors montrer que la solution du problème

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

est donnée par

$$x(t) = \exp(A t) x_0 + \int_0^t \exp(A(t - \tau)) B u(\tau) d\tau.$$

### Démonstration

En effet, il suffit de redériver la solution :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \exp(A t) x_0 + B u(t) + \int_0^t A \exp(A(t - \tau)) B u(\tau) d\tau \\ &= A \left( \exp(A t) x_0 + \int_0^t \exp(A(t - \tau)) B u(\tau) d\tau \right) + B u(t) \\ &= A x(t) + B u(t) \end{aligned}$$

#### 3.1.2 Passage d'une description en variables d'état à une fonction de transfert

Le modèle en variables d'état est nécessaire pour savoir comment mettre en œuvre une fonction de transfert sous forme d'un circuit électronique. La fonction de transfert, elle, est importante pour caractériser le comportement entrée sortie du système. Il est donc important de savoir passer d'un modèle à l'autre.

On étudie ici l'opération qui permet de passer à la fonction de transfert.

On prend la transformée de Laplace unilatérale des équations d'état :

$$\begin{cases} p X(p) - x_0 = A X(p) + B U(p) \\ Y(p) = C X(p) + D U(p) \end{cases}$$



En réorganisant les termes, on obtient

$$\begin{cases} (pI_n - A) X(p) = x_0 + B U(p) \\ Y(p) = C X(p) + D U(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(p) = \frac{x_0 + B U(p)}{(pI_n - A)} \\ Y(p) = C X(p) + D U(p) \end{cases}$$

Pour des conditions initiales nulles, on obtient donc

$$H(p) = C(pI_n - A)^{-1}B + D = \frac{C \operatorname{adj}(pI_n - A)B + D \det(pI_n - A)}{\det(pI_n - A)}$$

On voit que les pôles de la fonction de transfert et les valeurs propres de A sont identiques pour autant qu'il n'y ait pas de simplification entre le numérateur et le dénominateur.

#### Exemple

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{x}_1 = -7x_1 - 12x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_1 + 2x_2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ &y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow H(p) &= C(pI_n - A)^{-1}B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p-7 & -12 \\ 1 & p \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}{p^2 + 7p + 12} \begin{bmatrix} p & / \\ 1 & / \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{p+2}{p^2 + 7p + 12} \end{aligned}$$

### 3.1.3 Passage d'une fonction de transfert à un modèle en variables d'état

On étudie l'opération inverse maintenant qui permet de passer de la fonction de transfert à un modèle en variables d'état.

#### 3.1.3.1 Cas où le degré du dénominateur est strictement supérieur au degré du numérateur

On considère une fonction de transfert dont le degré du dénominateur est strictement supérieur au degré du numérateur,

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{n_H(p)}{d_H(p)} \quad \begin{cases} n_H(p) = b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \dots + b_n \\ d_H(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n \end{cases}$$

On va voir comment procéder de manière générale mais pour illustrer on supposera que  $n = 3$  pour la simplicité.

La marche à suivre est la suivante :

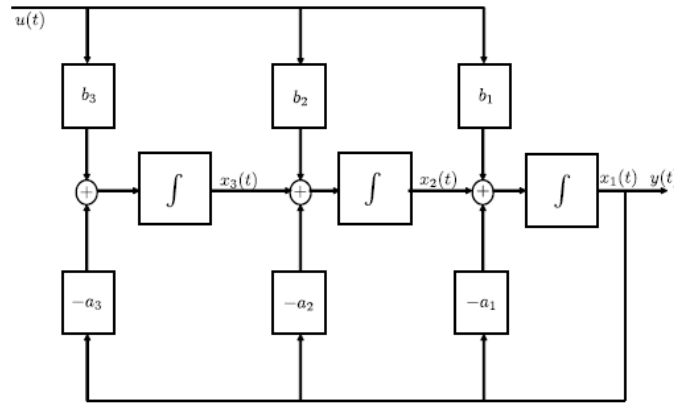
- 1) Écrire le lien entre  $Y(p)$  et  $U(p)$  sous la forme suivante (produits croisés) :

$$(p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3) Y(p) = (b_1 p^2 + b_2 p + b_3) U(p)$$

- 2) Diviser par la puissance maximale de  $p$  et réarranger les termes :

$$Y(p) = -a_1 \frac{Y(p)}{p} - a_2 \frac{Y(p)}{p^2} - a_3 \frac{Y(p)}{p^3} + b_1 \frac{U(p)}{p} + b_2 \frac{U(p)}{p^2} + b_3 \frac{U(p)}{p^3}$$

- 3) Construire le schéma fonctionnel et prendre pour variables d'état la sortie de chaque bloc intégrateur.



Il est important de garder à l'esprit que lorsque l'on multiplie par  $p$  on dérive et lorsque l'on divise par  $p$  on intègre.

On déduit du schéma fonctionnel :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -a_1 x_1(t) + x_2(t) + b_1 u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -a_2 x_1(t) + x_3(t) + b_2 u(t) \\ \dot{x}_3(t) = -a_3 x_1(t) + b_3 u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

On retrouve la forme standard d'un modèle en variables d'état avec

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0], \quad D = 0$$

Ici, on a trois intégrateurs (3 est l'ordre de la fonction de transfert). On vérifie que trois intégrateurs est le nombre minimal pour représenter une fonction de transfert.

### 3.1.3.2 Cas où les degrés du dénominateur et du numérateur sont égaux

Dans ce cas, on va se ramener au cas précédent en exprimant  $H(p)$  comme suit

$$H(p) = \frac{b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3} = b_0 + \frac{(b_1 - b_0 a_1) p^2 + (b_2 - b_0 a_2) p + (b_3 - b_0 a_3)}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}$$

Le terme constant est appelé le **terme d'action directe** parce que lorsque l'on fait un changement instantané sur l'entrée, il en résulte un changement instantané sur la sortie. Remarquons que cette action directe peut être obtenue par le théorème de la valeur initiale, il caractérise bien ce qu'il se passe initialement

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{H(p)}{p} = b_0.$$

On définit la fonction de transfert strictement propre

$$H_{sp}(p) = \frac{(b_1 - b_0 a_1) p^2 + (b_2 - b_0 a_2) p + (b_3 - b_0 a_3)}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3} \Rightarrow H(p) = b_0 + H_{sp}(p)$$

On peut trouver une représentation en variables d'état pour la fonction de transfert strictement propre  $H_{sp}(p)$  avec la méthode décrite précédemment. Par linéarité, on a

$$Y(p) = b_0 U(p) + H_{sp}(p)U(p)$$

On extrait le terme d'action directe et on trouve une représentation en variables d'état pour la partie strictement propre. On trouve alors

$$H_{sp}(p) = C(pI_n - A)^{-1}B, \quad D = b_0.$$

### 3.2 Notions d'observabilité et de gouvernabilité

#### 3.2.1 Détermination de l'état initial

Pour introduire la notion d'observabilité, on repart de la description du système sous la forme d'une équation différentielle d'ordre  $n$ . On va lui associer des conditions initiales. La question que l'on se pose est : comment déterminer ces conditions initiales ? C'est-à-dire, comment déterminer l'état initial associé à cette équation différentielle ?

Pour trouver l'état initial  $x(0)$  correspondant au problème

$$y^n(t) + a_1 y^{n-1}(t) + \dots + a_n y(t) = b_1 u^{n-1}(t) + \dots + b_n u(t) \quad CI \equiv \begin{cases} y(0) = y_0 \\ \dot{y}(0) = y_0^1 \\ \vdots \\ y^{n-1}(0) = y_0^{n-1} \end{cases}$$

On va dériver successivement l'équation de la sortie du modèle en variables d'état :

$$\begin{aligned} y(t) &= C x(t) + D u(t) \\ \dot{y}(t) &= C \dot{x}(t) + D \dot{u}(t) = C A x(t) + C B u(t) + D \dot{u}(t) \\ \ddot{y}(t) &= C \ddot{x}(t) + D \ddot{u}(t) = C A \dot{x}(t) + C B \dot{u}(t) + D \ddot{u}(t) = C A^2 x(t) + C A B u(t) + C B \dot{u}(t) + D \ddot{u}(t) \\ &\vdots \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ C A \\ \vdots \\ C A^{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & \dots & 0 \\ C B & D & 0 & \dots & 0 \\ C A B & C B & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ C A^{n-2} B & \dots & \dots & C B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \\ \vdots \\ u^{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer  $u(t) = 0$  et on obtient alors

$$\mathcal{Y}(t) = \mathcal{O}x(t)$$

où

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ C A \\ \vdots \\ C A^{n-1} \end{bmatrix}$$

est la **matrice d'observabilité** ( $n \times n$ ).

Pour tout  $\mathcal{Y}(0)$ , il est possible de déterminer une valeur de  $x(0)$  ssi  $\text{rang } \mathcal{O} = n$  (CNS). On ne doit pas pouvoir construire une combinaison de colonnes de la matrice qui soit nulle, les colonnes doivent être linéairement indépendantes.

On remarque qu'il n'y a pas d'intervention de l'entrée dans les questions d'observabilité. L'observabilité ne dépend que de  $\{A, C\}$  pour un SLP.

On définit l'**observabilité** par la possibilité de reconstruire de façon univoque l'état  $\{x(t), t \geq 0\}$  à partir du modèle  $\{A, B, C\}$  et des trajectoires l'entrée et de la sortie  $\{u(t), t \geq 0\}, \{y(t), t \geq 0\}$ .

Exemple – Moteur dont on mesure la vitesse ( $L_a = 0$ )

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m \\ \dot{\omega}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m \\ \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_a \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m \\ \omega_m \end{bmatrix} \end{cases}$$

La matrice d'observabilité vaut

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ C A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -K \end{bmatrix}$$

Le rang de la matrice vaut 1 et pas 2. Le système n'est pas observable, on ne peut pas reconstruire la position angulaire à partir d'une mesure de la vitesse angulaire. C'est logique puisque la position angulaire est l'intégrale de la vitesse angulaire et sera toujours définie à une constante près si on n'a pas de CI.

### 3.2.2 Amener l'état à une valeur donnée – gouvernabilité

Un SLP est **gouvernable** s'il est possible d'amener l'état d'une valeur initiale  $x(0) = x_0$  à une valeur finale  $x(T) = x_1$  à l'aide d'une fonction  $u(t), 0 \leq t \leq T$  continue par morceaux.

On veut qu'en un temps  $T$ , l'état passe de  $x_0$  à  $x_1$ . On repart de la solution générale de l'équation d'état :

$$x_1 = \exp(A T) x_0 + \int_0^T \exp(A(T - \tau)) B u(\tau) d\tau$$

$$\Leftrightarrow q = x_1 - \exp(A T) x_0 = \int_0^T \exp(A(T - \tau)) B u(\tau) d\tau$$

On cherche  $u(t)$  telle que cette intégrale soit bien égale à  $q$ . Pour atteindre cet objectif, on va démontrer le résultat suivant.

**CNS** – Un SLP est gouvernable ssi  $\text{rang } \mathcal{C} = n$  où  $\mathcal{C} = [B \quad A B \quad \dots \quad A^{n-1} B]$  est la matrice de gouvernabilité.

#### Démonstration

Supposons que  $\text{rang } \mathcal{C} < n$ , c'est-à-dire que les lignes sont linéairement dépendantes l'une de l'autre, ou encore que

$$\exists \gamma \neq 0; \gamma \mathcal{C} = 0.$$

On suppose  $q = \gamma$  et on doit trouver  $u(t), 0 \leq t \leq T$  telle que

$$\gamma' \gamma = \int_0^T \gamma' \exp(A(T - \tau)) B u(\tau) d\tau.$$

Comme

$$\exp(A(t - \tau)) = I + A(t - \tau) + \frac{A^2}{2!} (t - \tau)^2 + \dots$$

On a

$$\gamma' \exp(A(T - \tau)) B = \gamma' B + \gamma' A B (t - \tau) + \dots + \gamma' \frac{A^{n-1}}{(n-1)!} B (t - \tau)^{n-1} + \dots = 0$$

Car  $\gamma' C = 0$  par hypothèse et les termes en puissance de  $A$  supérieures ou égales à  $n$  sont nuls par le théorème de Cauchy Hamilton.

Il en résulte  $\gamma' \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$  ce qui est une contradiction. Donc, il n'existe pas de fonction  $u(t)$  qui mène à l'état souhaité, le système n'est pas gouvernable. Donc si  $\text{rang } C < n$ , le système n'est pas gouvernable. Si le système est gouvernable, c'est que  $\text{rang } C = n$ . CQFD

### 3.3 Réalisation minimale

On sait maintenant dire si un système est observable ou gouvernable. Pour un système non gouvernable ou non observable, on va s'intéresser maintenant à quelle partie du système n'est pas observable ou gouvernable.

Pour ce faire, on doit introduire ce qu'on appelle transformation de similitude.

#### 3.3.1 Transformation de similitude

A partir d'une représentation en variables d'état, on peut déduire une infinité d'autres représentations par transformation de similitude.

Soit un système décrit par le modèle en variables d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases} \quad x(0) = x_0$$

On effectue le changement de variables d'état  $x(t) = T \tilde{x}(t)$  avec  $T$  une matrice carré régulière (invertible). Par substitution dans les équations d'état, il vient

$$\begin{aligned} & \begin{cases} T \dot{\tilde{x}}(t) = A T \tilde{x}(t) + B u(t) \\ y(t) = C T \tilde{x}(t) + D u(t) \end{cases} \quad \tilde{x}(0) = T^{-1} x_0 = \tilde{x}_0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = T^{-1} A T \tilde{x}(t) + T^{-1} B u(t) \\ y(t) = C T \tilde{x}(t) + D u(t) \end{cases} \quad \tilde{x}(0) = T^{-1} x_0 = \tilde{x}_0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A} \tilde{x}(t) + \tilde{B} u(t) \\ y(t) = \tilde{C} \tilde{x}(t) + \tilde{D} u(t) \end{cases} \quad \tilde{x}(0) = T^{-1} x_0 = \tilde{x}_0 \end{aligned}$$

#### 3.3.2 Forme modale

Pour voir jusqu'à quel point on peut isoler une partie non observable / non gouvernable, on va utiliser une matrice  $T$  particulière.

On suppose que  $A$  possède des valeurs propres distinctes  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  et donc  $n$  vecteurs propres linéairement indépendants  $\{l_1, \dots, l_n\}$ .

On va effectuer le changement de variables qui [diagonalise la matrice A](#)

$$x(t) = L x_d(t)$$

Où  $L = [l_1 \dots l_n]$  est la matrice formée des vecteurs propres de  $A$ .

On obtient ainsi la **forme modale (diagonale)** des équations d'état :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_d(t) = L^{-1}A L x_d(t) + L^{-1}B u(t) \\ y(t) = C L x_d(t) + D u(t) \end{cases} \quad x_d(0) = L^{-1}x_0 = x_{d0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_d(t) = \Lambda x_d(t) + B_d u(t) \\ y(t) = C_d x_d(t) + D u(t) \end{cases} \quad x_d(0) = L^{-1}x_0 = x_{d0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_{di}(t) = \lambda_i x_{di}(t) + b_{di} u(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^n c_{di} x_{di}(t) + D u(t) \end{cases}$$

La matrice de gouvernabilité devient

$$\begin{aligned} C_d &= [B_d \quad \Lambda B_d \quad \cdots \quad \Lambda^{n-1} B_d] \\ &= [L^{-1}B \quad L^{-1}A L L^{-1}B \quad \cdots \quad (L^{-1}A L)^{n-1} L^{-1}B] \\ &= L^{-1}[B \quad AB \quad \cdots] \\ &= L^{-1}C \\ &= \begin{bmatrix} b_{d1} & \lambda_1 b_{d1} & \cdots & \lambda_1^{n-1} b_{d1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{dn} & \lambda_n b_{dn} & \cdots & \lambda_n^{n-1} b_{dn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On remarque que  $\text{rang } C_d = \text{rang } C$ , la gouvernabilité d'une réalisation n'est pas affectée par une transformation de similitude.

La matrice de gouvernabilité peut se réécrire

$$\begin{aligned} C_d &= \begin{bmatrix} b_{d1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & b_{d2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{dn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \det(C_d) &= \left( \prod_{i=1}^n b_{di} \right) \left( \prod_{i < j}^n (\lambda_i - \lambda_j) \right) \end{aligned}$$

Si on fait l'hypothèse que les valeurs propres sont distinctes, alors, si un des coefficients  $b_{di}$  est nul, la matrice ne sera pas de rang maximum et le système ne sera pas gouvernable. En effet, si  $b_{di} = 0$ , alors

$$\dot{x}_{di}(t) = \lambda_i x_{di}(t)$$

On voit que l'état  $i$  est indépendant de  $u(t)$  et donc il ne sera plus gouvernable. On a diagonalisé la matrice  $A$ , ce qui implique que chaque état est indépendant des autres et que donc l'état  $x_{di}(t)$  ne sera pas influencé par  $u(t)$  au travers d'un autre état.

On peut faire le même raisonnement pour la matrice d'observabilité. En calculant son déterminant, on remarque qu'elle ne sera pas de rang maximum si  $c_{di} = 0$ . Cela veut dire que l'état  $i$  n'est pas observable. En effet,

$$y(t) = \sum_{j=1}^n c_{dj} x_{dj}(t) + D u(t)$$

Où le terme  $c_{di} x_{di}(t) = 0$ . Donc, comme on a diagonalisé la matrice  $A$ , l'état  $i$  n'apparaît ni dans  $y(t)$  ni dans un autre état, on n'a aucune information sur cet état, il est non observable.

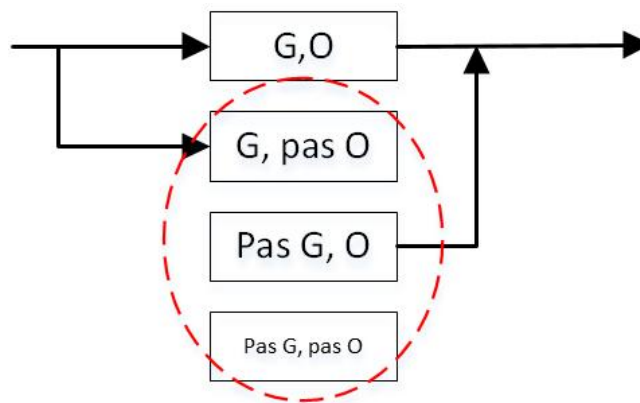
Nous allons maintenant voir qu'il est possible de détecter à partir de la fonction de transfert du système que la représentation en variables d'état est ingouvernable ou inobservable.

$$H(p) = C_d (pI - \Lambda)^{-1} B_d = \sum_{j=1}^n \frac{c_{dj} b_{dj}}{p - \lambda_j}$$

Et aussi

$$\begin{aligned} H(p) &= C L (pLL^{-1} - L^{-1}AL)^{-1} L^{-1}B \\ &= C L L^{-1} (pI - A)^{-1} L L^{-1}B \\ &= C (pI - A)^{-1} B \end{aligned}$$

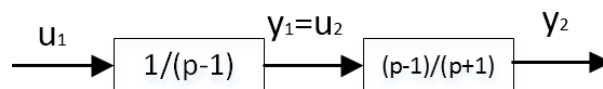
Ce qui signifie que le comportement entrée sortie du système est indépendant du choix des variables d'état. On remarque que si  $c_{di} = 0$  ou  $b_{di} = 0$ , il y aura une simplification entre le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert :  $H(p)$  ne sera pas irréductible. Cette simplification correspond à une perte d'observabilité ou de gouvernabilité en fonction de quel coefficient est nul. **Donc, de manière générale, un système caractérisé par une fonction de transfert  $H(p)$  d'ordre  $n$  peut être décrit par un modèle en variables d'état d'ordre  $n$  gouvernable et observable ssi  $H(p)$  est irréductible.**



Les cas entourés en rouge doivent être « sympas » sans quoi il faudra les rendre observables et gouvernables. C'est pour cela qu'on utilise des capteurs (O) et des actionneurs (G). Pour la conception d'un circuit, on part de  $H(p)$  et on arrive à un modèle en variables d'état. Si  $H(p)$  est d'ordre  $n$ , il faut  $n$  états. On obtient alors une réalisation minimale observable et gouvernable. Si on fait une représentation à plus de  $n$  états, il y aura d'office une partie non gouvernable ou non observable.

### 3.3.3 Simplification pôle-zéro

On va illustrer la simplification pôle-zéro. Il est important de bien comprendre quand on peut faire ces simplifications.



On considère la mise en série de deux systèmes  $H_1(p) = \frac{1}{p-1}$  et  $H_2(p) = \frac{p-1}{p+1}$ . D'un point de vue entrée sortie, le système est décrit par  $H(p) = \frac{1}{p+1}$  et est stable puisque le pôle est à partie réelle négative. Cependant, au niveau interne, on a quelques soucis ...

On va représenter  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$  par un modèle en variables d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + u_1(t) \\ y_1(t) = x_1(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2(t) = -x_2(t) - 2u_2(t) \\ y_2(t) = x_2(t) + u_2(t) \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1(t) \\ y_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

On peut donc déterminer les matrices de gouvernabilité et d'observabilité

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad o = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Le rang de la matrice  $c$  vaut 2 mais celui de la matrice  $o$  vaut 1. On remarque que le système n'est pas observable : logique car le dénominateur de  $H(p)$  était de 1 alors qu'on a deux variables d'état.

Truc pour retenir quand on a perte d'observabilité et quand on a perte de gouvernabilité :

Quand le zéro se trouve le plus près possible de la sortie, le système est non observable. Quand le zéro est le plus près possible de l'entrée, le système n'est pas gouvernable.

Au niveau interne,

$$x_1(t) = x_{10} e^t + e^t v(t) * u_1(t)$$

On voit que l'état 1 diverge mais cela ne se verra pas car l'état est inobservable. [Donc, lorsque l'on conçoit des régulateurs, si l'on est amené à faire des simplifications entre les numérateurs et les dénominateurs de fonctions de transfert en cascade, on peut le faire pour autant que ces simplifications correspondent à des singularités dans le demi plan gauche, de façon à ce que l'état inobservable/ingouvernable ne diverge pas.](#)



## 4. ANALYSE DU MODÈLE D'UN SLP

Le but de ce chapitre est de faire le lien entre certaines propriétés caractéristiques de la fonction de transfert et le comportement temporel du système en termes de réponses impulsionnelles et indicielles. On verra notamment l'influence de la position des pôles de la fonction de transfert sur les réponses temporelles et on s'intéressera à la notion de stabilité.

### 4.1 Influence de la position des pôles

#### 4.1.1 Système du premier ordre

La fonction de transfert d'un système du premier ordre peut être mise sous la forme

$$H(p) = \frac{A_0 \sigma}{p + \sigma}$$

Où  $-\sigma \in \mathbb{R}$  est le pôle.

Le gain statique du système est donné par  $H(0) = A_0$  (résulte du théorème de la valeur finale).

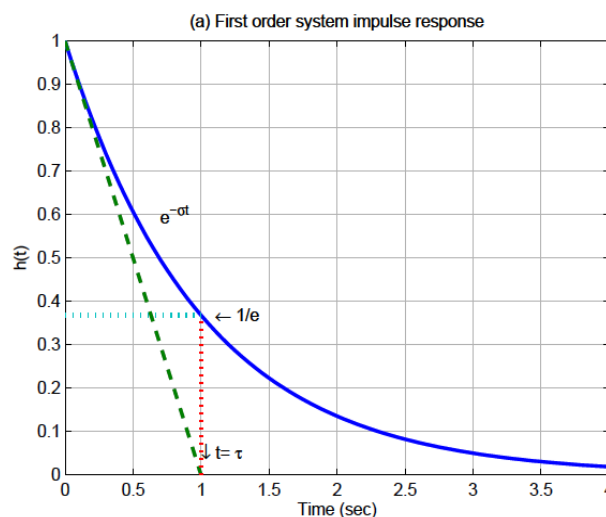
La réponse impulsionnelle du système est donnée par

$$h(t) = A_0 \sigma e^{-\sigma t} v(t)$$

et sa réponse indicielle est alors

$$s(t) = \int_0^t A_0 \sigma e^{-\sigma \tau} v(\tau) d\tau = A_0 (1 - e^{-\sigma t}) v(t).$$

On peut représenter la réponse impulsionnelle du système :



Il s'agit d'une exponentielle décroissante. La décroissance de l'exponentielle est liée à la position du pôle  $-\sigma$  de la fonction de transfert. On peut trouver la valeur de  $\sigma$  à partir de la réponse impulsionnelle de deux façons différentes :

- 1) On définit la constante de temps  $\tau = \frac{1}{\sigma}$  comme le temps après lequel la réponse impulsionnelle vaut  $1/e$  fois sa valeur initiale.

2) On peut également déterminer  $\sigma$  graphiquement.

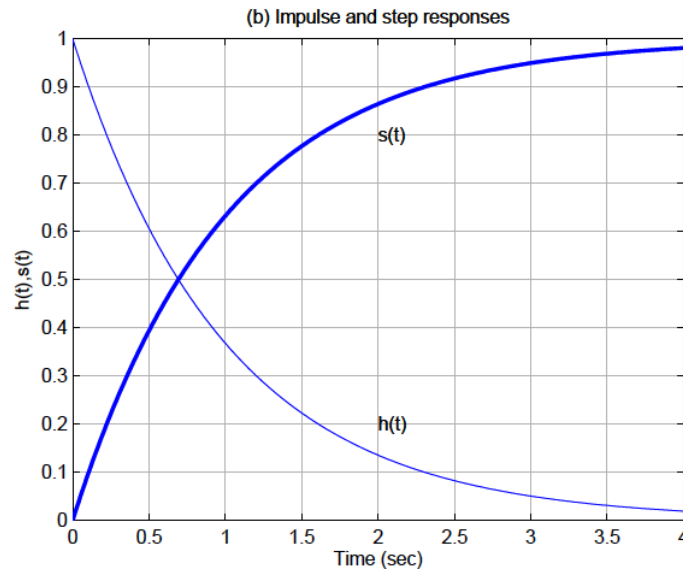
On trace la tangente à  $h(t)$  en  $t = 0$  et on trouve l'intersection de cette tangente avec  $h(t) = 0$  :

$$t_{gte} \equiv h(t) = A_0 \sigma - A_0 \sigma^2 t$$

Lorsque  $h(t) = 0$ , on a bien

$$t = \frac{1}{\sigma} = \tau$$

Le plus souvent, on travaille à partir de la réponse indicielle du système. Elle est représentée ci-dessous en gras :



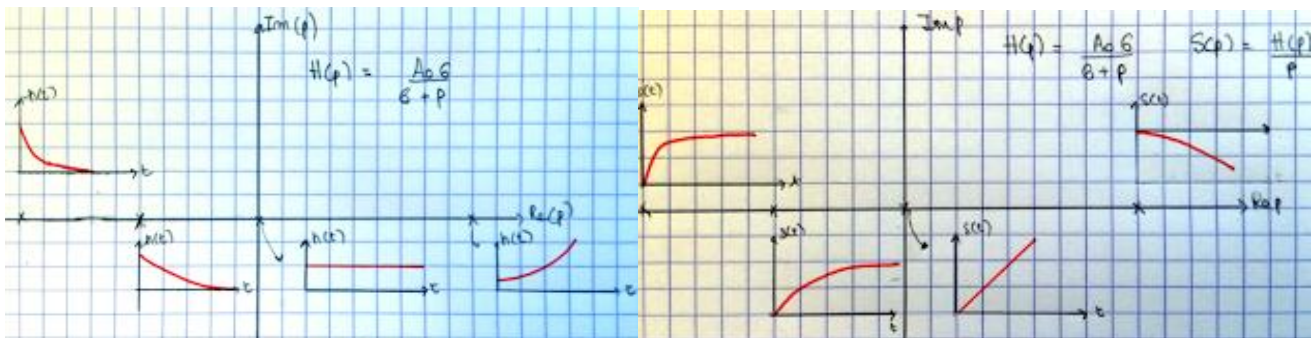
On peut également retrouver la valeur de la constante de temps en traçant la tangente en l'origine à la réponse indicielle et en calculer l'intersection avec  $s(t) = A_0$  :

$$t_{gte} \equiv s(t) = A_0 \sigma t$$

Lorsque  $s(t) = A_0$ , on a bien

$$t = \frac{1}{\sigma} = \tau$$

On constate que plus le pôle est éloigné de l'origine, plus le système va répondre rapidement.



Tout ce qu'on a vu jusqu'à présent est valable dans le cas où la fonction de transfert n'a qu'un seul pôle réel. Beaucoup de systèmes ne peuvent pas être représentés par un seul pôle. On va maintenant considérer un système du second d'ordre avec des pôles complexes conjugués.

#### 4.1.2 Système du second ordre

On note les deux pôles conjugués  $p_{1,2} = -\sigma \pm j \omega_d$ . Le dénominateur associé sera

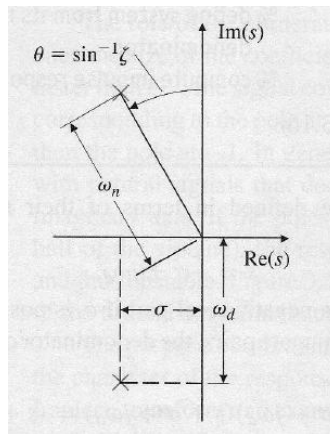
$$a(p) = (p + \sigma + j \omega_d)(p + \sigma - j \omega_d) = (p + \sigma)^2 + \omega_d^2.$$

La forme canonique d'une fonction de transfert d'un système du second ordre est

$$H(p) = \frac{A_0 \omega_n^2}{p^2 + 2\zeta \omega_n p + \omega_n^2}$$

Avec  $\sigma = \zeta \omega_n$  et  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ . On appelle le coefficient  $\omega_n$  pulsation naturelle du système,  $\omega_d$  la pulsation apparente du système et  $\zeta$  le facteur d'amortissement. **Pour deux pôles complexes conjugués, le facteur d'amortissement  $\zeta$  est d'office compris entre 0 et 1.**

Voyons quelles informations on peut avoir sur la réponse temporelle à partir de la position de ces pôles dans le plan complexe :



Le module de  $p_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  vaut  $\omega_n$ . Connaissant le module et la partie réelle, en utilisant les règles de trigonométrie, on trouve que

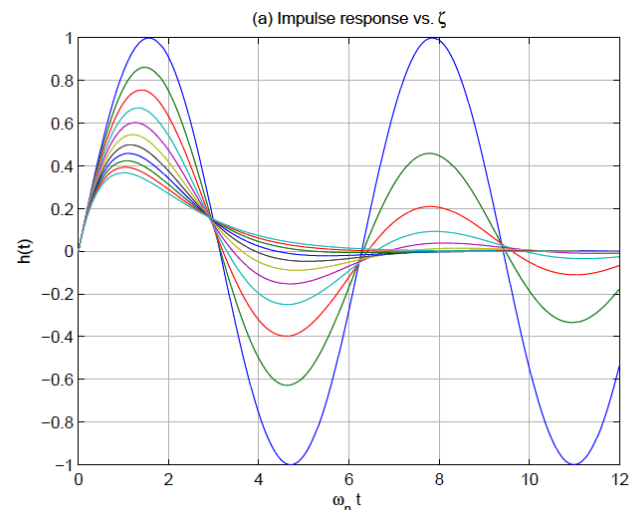
$$\theta = \sin^{-1} \zeta$$

Plus l'angle sera grand, plus on aura une réponse amortie. Plus nos pôles seront proches de l'axe imaginaire, moins la réponse sera amortie.

Intéressons-nous à la réponse impulsionnelle du système du second ordre. En utilisant les propriétés des transformées de Laplace, on obtient que

$$h(t) = \frac{A_0 \omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t) v(t)$$

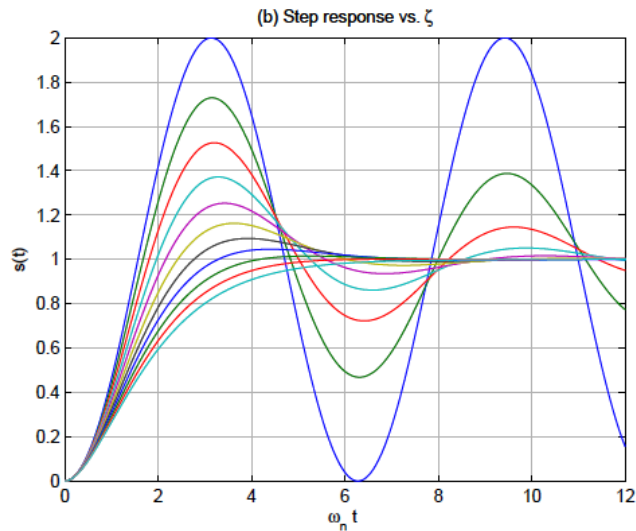
La réponse impulsionnelle est donc une sinusoïde avec une exponentielle décroissante. On la représente ci-contre pour plusieurs valeurs de  $\sigma$  en fonction de  $\omega_n t$ . Pour  $\sigma = 0$ , on n'a pas d'amortissement. Au fur et à mesure que  $\sigma$  augmente, on a réponse de plus en plus amortie. Les couleurs sont des accroissements successifs de  $\zeta$  de 0.1.



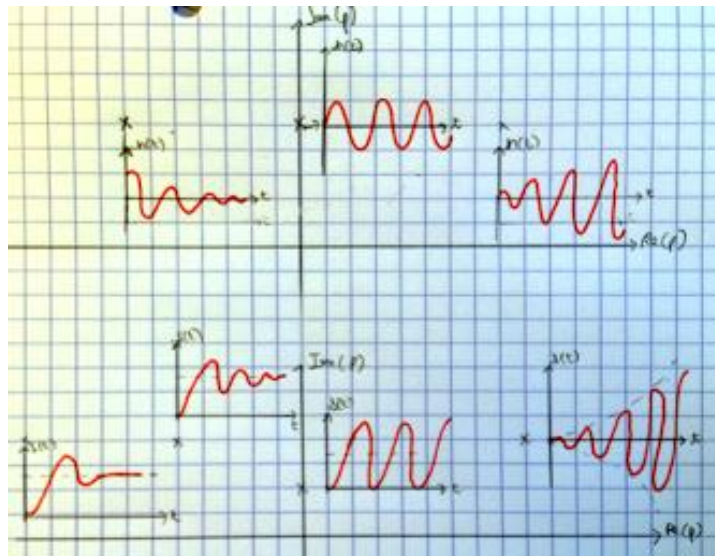
On peut déduire la réponse indicielle directement de la réponse impulsionnelle en l'intégrant. On a

$$s(t) = A_0 \left( 1 - e^{-\sigma t} \left( \cos(\omega_d t) + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right) \right) v(t).$$

On peut également la représenter :



On remarque ici que la pente en l'origine est nulle. On peut le vérifier en utilisant le théorème de la valeur initiale. On avait vu que si le degré relatif de la fonction de transfert est plus grand que 1, alors la pente à l'origine est nulle. Ici le degré relatif est de 2, donc si on applique le théorème de la valeur initiale sur la dérivée de réponse indicielle, on obtiendra bien 0.



## 4.2 Spécifications temporelles

### 4.2.1 Système du second ordre

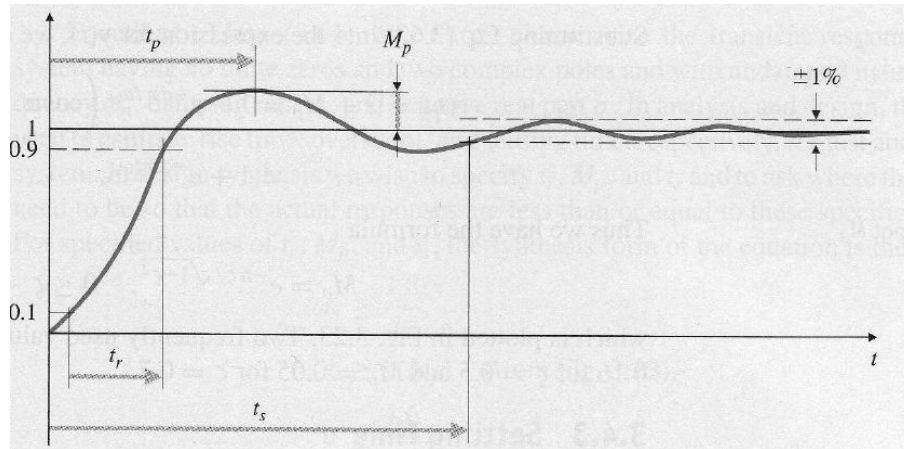
Les exigences que l'on a sur le système se font souvent au travers certaines spécifications sur la réponse indicielle.

On définit

- Le **temps de montée** : temps entre le moment où la réponse indicielle atteint 10% de sa valeur asymptotique et le moment où elle atteint 90% de sa valeur asymptotique.

- Le **temps d'établissement** : temps mis par le système pour la réponse indicielle se stabilise autour de  $\pm 1\%$  de sa valeur asymptotique
- Le **dépassement indiciel** : maximum de la réponse indicielle. Il est exprimé en % par rapport à la valeur asymptotique.

Ces notions sont illustrées sur le schéma suivant :



On va évaluer ces caractéristiques à la grosse louche le but est d'avoir une base pour la conception mais pas de valeurs extrêmement précises.

#### 4.2.1.1 Temps de montée

On a vu sur le graphe qui représente la réponse indicielle d'un système du second ordre que plus  $\zeta$  augmente pour  $\omega_n$  fixé, plus le temps de montée augmente. Pour évaluer le temps de montée, on va considérer le cas moyen  $\zeta = 0,5$ . A partir du graphe, on peut vérifier que le temps mis pour que  $s(t)$  passe de 10% à 90% de sa valeur asymptotique est obtenu pour

$$\omega_n t = 1,8 \Rightarrow t_r = \frac{1,8}{\omega_n}$$

Ce résultat est également utilisé pour des systèmes d'ordre supérieur.

#### 4.2.1.2 Dépassement indiciel

On doit évaluer le maximum de la réponse indicielle. Pour cela, il faut annuler sa dérivée, trouver le temps pour lequel on a le maximum, injecter cette valeur du temps dans la réponse indicielle et en déduire la valeur maximale de  $s(t)$ .

$$\dot{s}(t) = A_0 e^{-\sigma t} \left( \frac{\sigma^2}{\omega_d} + \omega_d \right) \sin(\omega_d t) = 0 \Rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

On trouve en substituant  $t_p$  pour  $t$  dans l'expression de  $s(t)$

$$\frac{s(t_p)}{A_0} \equiv 1 + M_p = 1 + e^{-\sigma\pi/\omega_d}$$

On en déduit l'expression du dépassement indiciel

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad 0 \leq \zeta < 1$$

Notons que lorsque  $\zeta = 1$ , on n'a plus de dépassement indiciel.

### 4.2.1.3 Temps d'établissement

La réponse indicielle d'un système du second ordre peut être écrite de façon alternative comme

$$s(t) = A_0 \left( 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\omega_d t - \beta) \right) \quad \text{avec} \quad \beta = \arctg\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right)$$

La durée du transitoire est essentiellement dictée par l'exponentielle décroissante. On définit le temps d'établissement par le temps  $t_s$  pour le quel

$$e^{-\sigma t_s} = e^{-\zeta \omega_n t_s} = 0.01 \quad \Rightarrow \quad t_s = \frac{4,6}{\zeta \omega_n} = \frac{4,6}{\sigma}$$

### 4.2.1.4 Exploitation des résultats en conception de régulateur

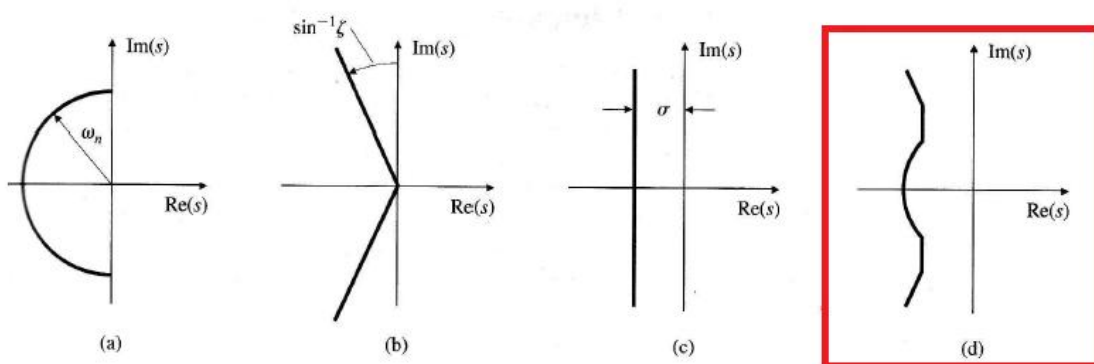
Pour  $t_r, M_p, t_s$  fixés, on a une certaine région du plan complexe pour les pôles du système du second ordre.

On a  $\omega_n \geq \frac{1,8}{t_r}$ . Donc plus  $\omega_n$  sera grand, plus loin de l'origine les pôles seront, plus la réponse sera rapide, plus le temps de montée sera faible.

Le dépassement indiciel est lié au facteur d'amortissement  $\zeta$  qui lui est directement lié à l'angle  $\theta$  que font les pôles avec l'axe imaginaire. Donc lorsque l'on impose l'angle, on a deux droites passant par l'origine.

Le temps d'établissement est lié à la partie réelle des pôles qui doit être suffisamment grande pour avoir un temps d'établissement petit.

Ces trois contraintes donnent lieu à la région du plan complexe suivante pour les pôles du système.



### 4.2.2 Système du premier ordre

Pour un système du premier ordre, le temps d'établissement est le même. Il n'y a pas de dépassement indiciel possible (les pôles sont réels,  $\zeta = 1$ ). Le temps de montée est défini par

$$t_r = \frac{2,2}{\sigma}$$

On va maintenant étudier l'effet de zéros et de pôles supplémentaires.

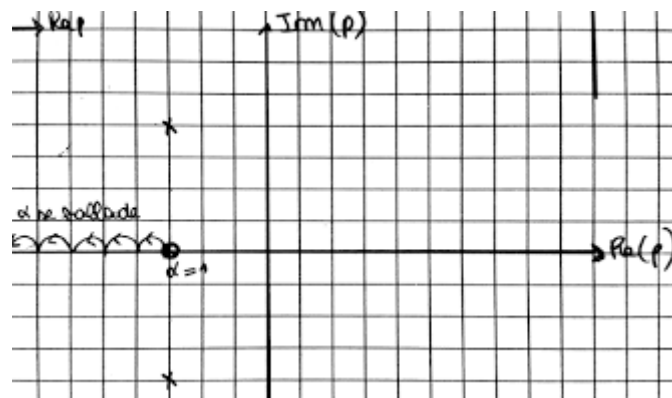
### 4.3 Effets de zéros et pôles additionnels

#### 4.3.1 Effet d'un zéro

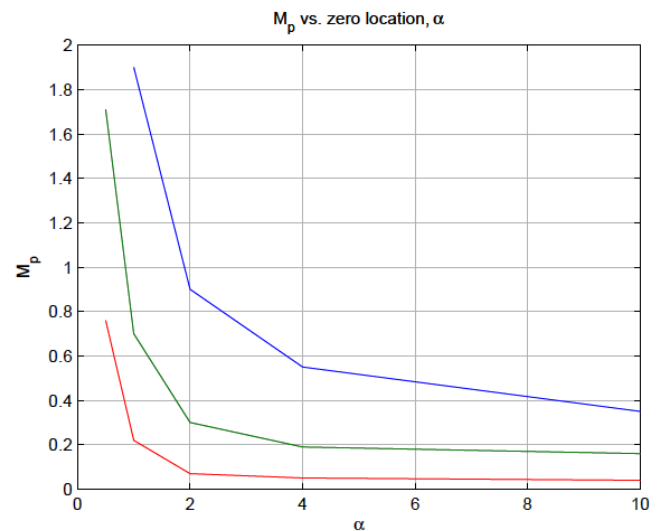
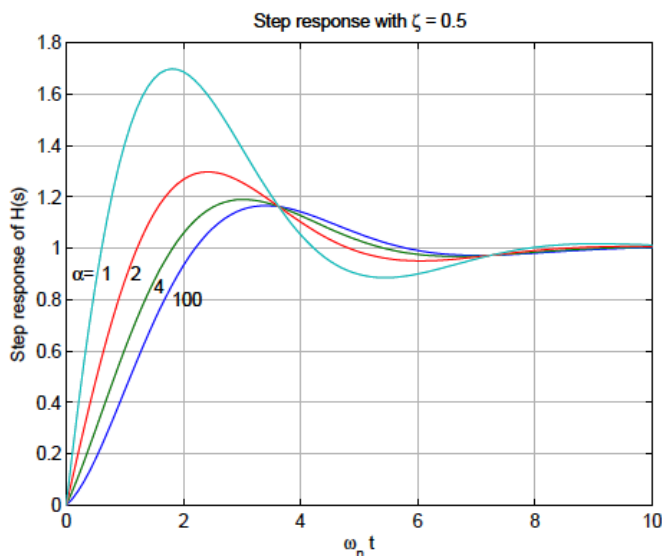
On considère une fonction de transfert d'un système du second ordre avec un zéro et deux pôles complexes conjugués de gain statique unitaire :

$$H(p) = \frac{\left(\frac{p}{\alpha\zeta\omega_n}\right) + 1}{\left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{p}{\omega_n}\right) + 1}$$

Le zéro est en  $p = -\alpha\zeta\omega_n = -\alpha\sigma$ . Il est proportionnel à la partie réelle du pôle. On peut représenter les pôles et le zéro dans le plan complexe :



Si  $\alpha = 1$  la partie réelle du zéro correspond à la partie réelle des pôles. Si  $\alpha < 1$ , on se rapproche de l'origine et si  $\alpha > 1$  le zéro s'éloigne de l'origine. On peut voir l'effet du zéro sur la réponse indicielle,



On voit que plus  $\alpha$  augmente, moins l'effet du zéro se manifeste (si on compare la courbe  $\alpha = 100$ , avec la courbe  $\zeta = 0,5$  du cas sans zéro, les deux courbes se superposent presque). Lorsque le zéro se rapproche des pôles, le dépassement indiciel devient de plus en plus important. Par contre, le zéro n'influence pas le temps d'établissement. Sur le graphe de droite, on représente le dépassement indiciel en fonction de  $\alpha$ . La courbe bleue correspond à  $\zeta = 0,3$ , la verte à  $\zeta = 0,5$  et la rouge à  $\zeta = 0,7$ . On voit que pour une valeur du facteur d'amortissement fixée, le dépassement indiciel devient important au fur et à mesure que  $\alpha$  diminue, c'est-à-dire



au fur et à mesure que la partie réelle du zéro se rapproche de la partie réelle des pôles. Comment expliquer cet effet ?

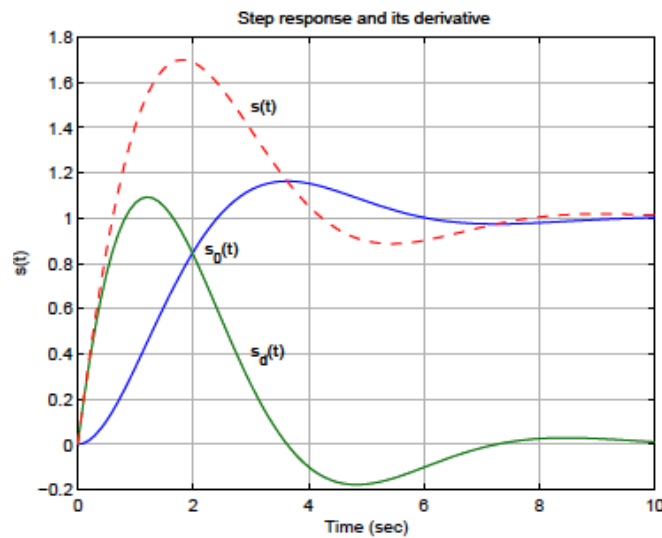
Pour simplifier, on supposera dans la suite  $\omega_n = 1$ . On peut réécrire la fonction de transfert comme suit :

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 2\zeta p + 1} + \frac{1}{\alpha\zeta} \frac{p}{p^2 + 2\zeta p + 1} = H_0(p) + \frac{pH_0(p)}{\alpha\zeta}$$

La fonction de transfert est donc une somme d'une fonction de transfert du second ordre sans zéro notée  $H_0(p)$  et du même terme multiplié par  $p$ . La réponse indicielle du système est donc

$$s(t) = s_0(t) + \frac{1}{\alpha\zeta} \frac{ds_0(t)}{dt} = s_0(t) + s_d(t)$$

Où  $s_0(t)$  est la réponse indicielle du système sans zéro et  $s_d(t)$  est le produit de la dérivée de  $s_0(t)$  et d'une constante liée au zéro.



La réponse indicielle du système total est la somme de la réponse indicielle du système sans zéro et de sa dérivée multipliée par un facteur inversement proportionnel à  $\alpha$ . Donc plus  $\alpha$  est petit plus le terme dérivé prend de l'importance dans la somme.

#### 4.3.2 Effet d'un pôle

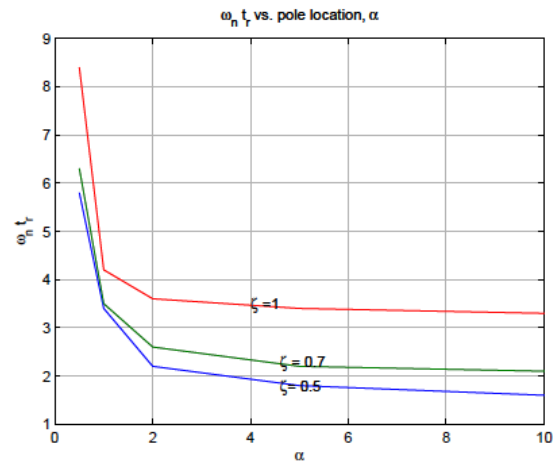
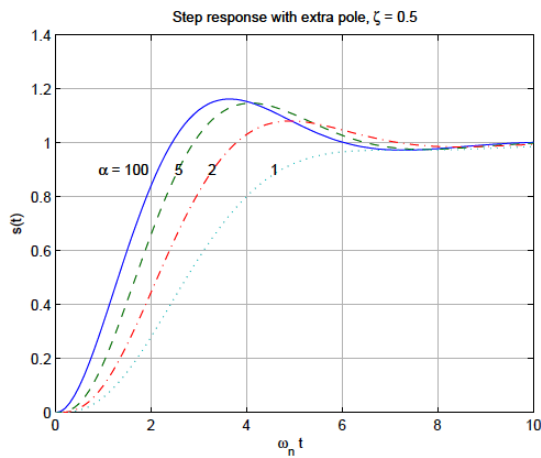
On considère un système avec un pôle additionnel décrit par la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{\alpha\zeta\omega_n} + 1\right) \left(\left(\frac{p}{\omega_n^2}\right) + 2\zeta\left(\frac{p}{\omega_n}\right) + 1\right)}$$

Le nouveau pôle se déplace sur l'axe réel. Son effet est de ralentir le système.



On le voit sur les graphes suivant :



Plus  $\alpha$  est petit, plus la réponse est ralentie. On a une augmentation significative du temps de montée si le pôle supplémentaire est dans un rapport inférieur à 4 de la partie réelle des pôles complexes conjugués.

#### 4.4 Stabilité

Une dernière exigence que l'on va introduire est la stabilité de la boucle fermée tant dans le comportement externe que dans le comportement interne. On se limitera ici au cas des SLP.

Un système est **stable au sens entrée bornée/ sortie bornée EBSB** si toute entrée bornée donne une sortie bornée. Une CNS de stabilité ESBS est que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

Une CNS de stabilité EBSB pour un système décrit par une fraction rationnelle propre est que tous les pôles de la fonction de transfert après les éventuelles simplifications pôle/zéro ont une partie réelle négative.

On doit également caractériser la stabilité interne du système. On dira que le système est **stable asymptotiquement** si pour une entrée nulle, l'état tend vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini, quel que soit l'état initial.

Une CNS de stabilité asymptotique pour un système décrit par une fraction rationnelle propre est que tous les pôles de la fonction de transfert avant toute simplification pôle/zéro ont une partie réelle négative.

Une CNS de stabilité interne pour un SLP décrit par un modèle en variables d'état est que toutes les valeurs propres de la matrice  $A$  soient à partie réelle négative. En effet, pour une entrée nulle, la solution générale calculée à partir du modèle en variables d'état devient

$$x(t) = \exp(A t) x_0$$

Pour que l'état tende vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini, il faut que l'argument de l'exponentiel soit négatif, c'est-à-dire que

$$\operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0.$$

Remarquons que le polynôme caractéristique de la matrice  $A$  est égal au dénominateur de la fonction de transfert avant toute simplification pôle zéro :

$$H(p) = C(pI - A)^{-1}B = \frac{C \operatorname{adj}(pI - A)B}{\det(pI - A)}$$

#### 4.4.1 Critère de Routh

Le critère de Routh permet d'évaluer la stabilité interne d'un système à partir de son polynôme caractéristique sans devoir en calculer les racines. Il est utile quand on a un paramètre et que du coup on ne sait plus procéder de manière numérique. Le polynôme en question est le polynôme caractéristique de la matrice  $A$  et on va le noter

$$a(p) = \det(pI - A) = p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

Une CN mais pas suffisante pour que ce polynôme d'ordre  $n$  ait toutes ses racines à partie réelle négative est que **tous les  $a_i > 0$** . Si on prend  $n = 2$ , la condition est nécessaire et suffisante.

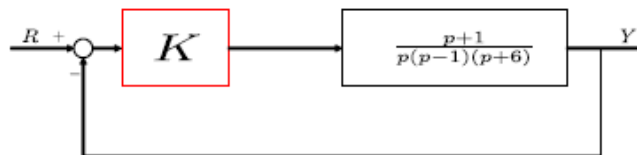
Pour construire la table de Routh, on construit la première ligne qui prend les coefficients des termes d'ordre  $n$ ,  $n - 2$ ,  $n - 4$ , ... et la ligne 2 qui reprend les coefficients des termes d'ordre  $n - 1$ ,  $n - 3$ ,  $n - 5$ , ... Les lignes suivantes sont à chaque fois calculées sur base des deux lignes précédentes.

On obtient alors

ligne	$n$	$p^n$	1	$a_2$	$a_4$	...
ligne	$n - 1$	$p^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	...
ligne	$n - 2$	$p^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	...
ligne	$n - 3$	$p^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
ligne	2	$p^2$	*	*		
ligne	1	$p$	*			
ligne	0	$p^0$	*			

Une CNS de stabilité asymptotiques est que les  $(n+1)$  éléments de la première colonne de la table de Routh soient tous positifs. Le nombre de changement de signe dans la première colonne correspond au nombre de pôle dans le demi-plan droit.

Exemple – Stabilité d'une boucle fermée avec régulateur proportionnel



$$H(p) = \frac{K(p+1)}{p^3 + 5p^2 + (K-6)p + K}$$

La table de Routh est

$p^3$	1	$K - 6$
$p^2$	5	$K$
$p^1$	$(4K - 30)/5$	
$p^0$	$K$	

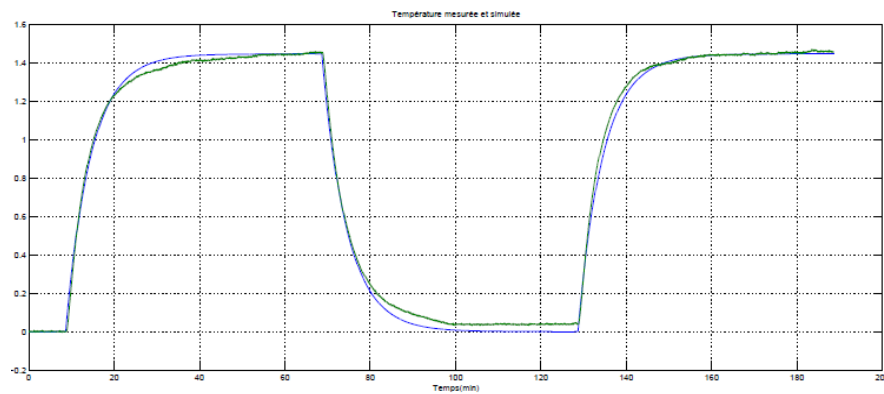
Conditions de stabilité :  $(4K - 30) > 0$  et  $K > 0$ , soit  $K > 7,5$

## 5. MODÉLISATION À PARTIR DE DONNÉES EXPÉRIMENTALES

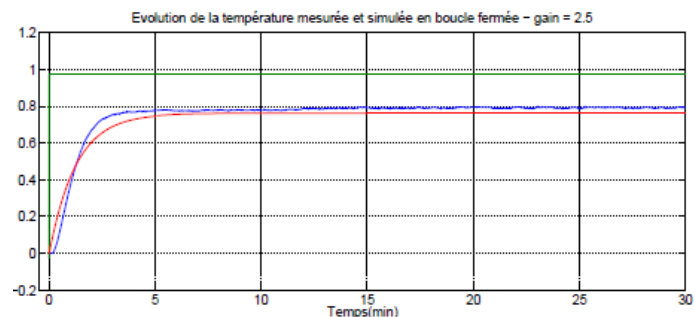
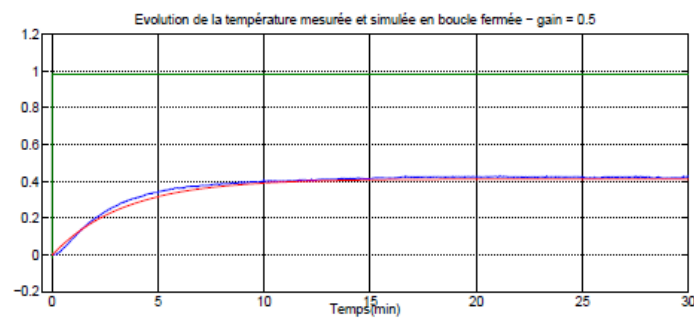
Dans les chapitres précédents, on a vu comment tirer des informations sur la réponse indicielle (ou impulsionnelle) à partir de la fonction de transfert. Ici, on fait le chemin inverse, on va, à partir de réponses indicielles mesurées, tenter de leur coller une fonction de transfert que décrit au mieux le système.

### 5.1 Exemple : système de chauffe

On considère un système de chauffe par résistance. La grandeur de commande est une tension que l'on peut faire varier pour augmenter les pertes par effet joule. La sortie du système est la température. On représente ici la réponse indicielle mesurée en BO (verte) et la réponse indicielle en BO (bleue) obtenue lorsqu'on attribue au système une fonction de transfert sur base des mesures, c'est-à-dire sur base de la courbe verte.



On remarque que l'on peut très bien approcher le comportement du système. On va voir maintenant si cette qualité suffit pour la conception d'un régulateur. On va fermer la boucle avec un régulateur proportionnel de gain  $K$ . On obtient les deux graphes suivant (le premier  $K = 0,5$  et le deuxième  $K = 2,5$ ). La courbe bleue est la réponse mesurée et la rouge la réponse simulée.



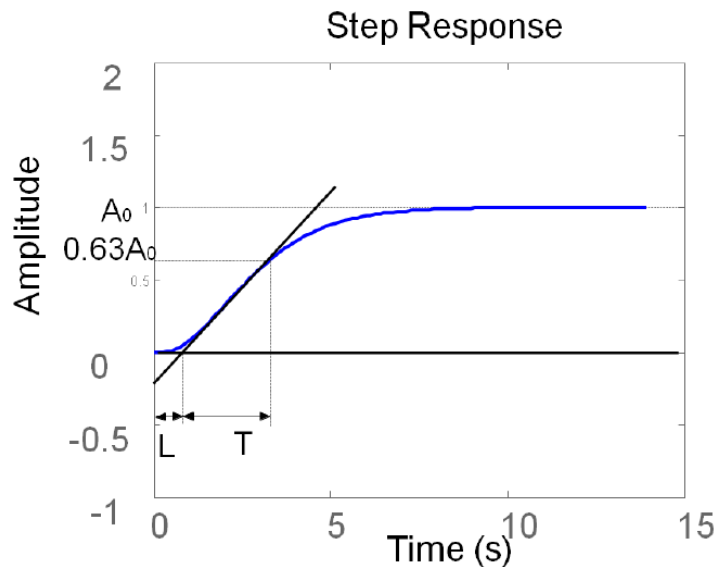
Pour des gains faibles, on a une bonne correspondance entre la simulation et la mesure. Par contre l'écart par rapport à la consigne est relativement important. Quand le gain augmente, cet écart diminue et on approche tout de même bien la réponse mesurée.

Si on regarde le gain  $K = 1000$ , on a un dépassement indiciel sur la réponse mesurée que l'on ne reproduit pas avec notre modèle du premier ordre. Donc, au plus on veut un modèle de qualité, au plus complexes seront les fonctions de transfert qui décrivent le système. Ici, il faudrait passer à un modèle du second ordre.

## 5.2 Approches graphiques

### 5.2.1 Système stable non oscillant

On considère un système non linéaire qu'on a linéarisé autour d'un point d'équilibre. Donc, lors de l'expérience pour relever la réponse indicielle, on doit se mettre autour de cet état d'équilibre. On applique un échelon d'entrée mais pas unitaire, l'amplitude ici dépend de la physique du problème. Si on considère le problème du réservoir d'eau étudié précédemment, on obtient la réponse indicielle normalisée (par l'amplitude de l'échelon d'entrée) :



Sur base de ce graphe, on peut essayer de déterminer la fonction de transfert qui décrit le système. La forme canonique de la fonction de transfert est

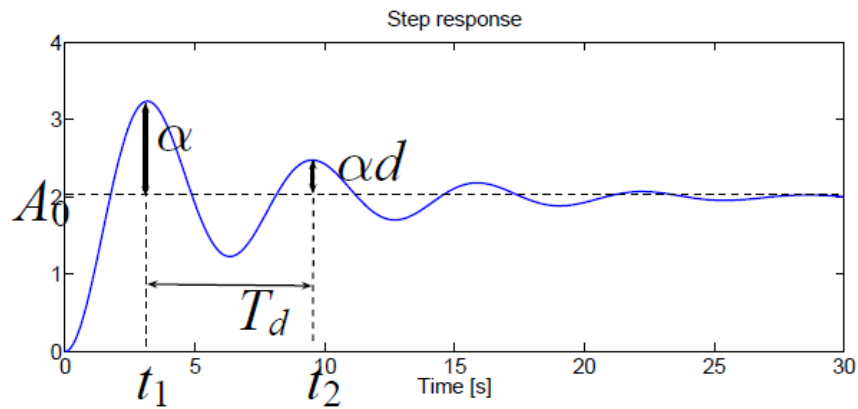
$$H(p) = \frac{A_0}{pT + 1} e^{-pL}$$

Où  $e^{-pL}$  est le temps mort. La réponse peut ne pas directement commencer en zéro mais être décalée dans le temps, on modélise ce décalage par le temps mort.

Pour trouver le gain statique  $A_0$ , on lit simplement la valeur asymptotique sur le graphe. Pour trouver  $L$  et  $T$ , on trace la tangente au point d'inflexion de la réponse indicielle. On prend alors l'intersection entre la tangente et l'axe des abscisses. La partie gauche donne une approximation du temps mort  $L$ . Pour trouver  $T$ , on va de l'intersection jusqu'au temps où la réponse a atteint 63% de sa valeur asymptotique.

### 5.2.2 Système stable oscillant

On se replace autour d'un état d'équilibre. Ici, le plus simple est de partir sur un modèle du second ordre (oscillations). On relève la réponse indicielle et à nouveau on tente d'en déduire des informations sur la fonction de transfert du système.



On peut, sur base du graphe, déterminer la période apparente des oscillations :

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

On évalue également le facteur de décroissance :

On sait que l'enveloppe est une exponentielle négative  $e^{-\sigma t}$ . Si on définit  $t_1$  et  $t_2$  sur le graphe, le facteur de décroissance est simplement donné par

$$d = \frac{e^{-\sigma t_2}}{e^{-\sigma t_1}}$$

On avait calculé lors du calcul du dépassement indiciel, les temps pour lesquels on avait des maxima. On avait vu qu'on avait une infinité de temps pour lesquels la dérivée s'annulait. Le premier maximum était en  $t = \frac{\pi}{\omega_d}$ , et le deuxième maximum en  $t = \frac{3\pi}{\omega_d}$ . En substituant ces valeurs dans l'expression de  $d$ , on obtient

$$d = e^{-\sigma \left( \frac{2\pi}{\omega_d} \right)} = e^{-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

De ces deux informations, on peut déduire le facteur d'amortissement et la pulsation naturelle du système :

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi / \ln d)^2}} \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T_d \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

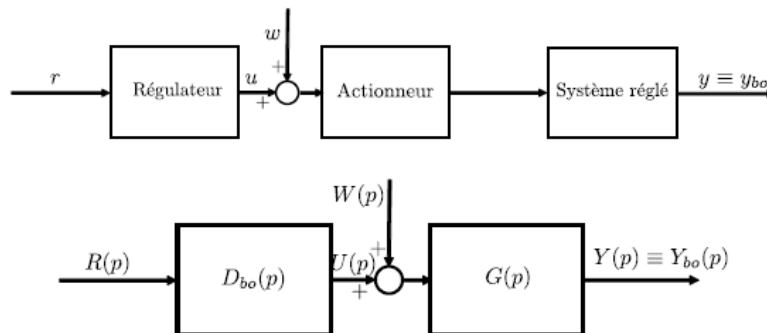
## 6. ANALYSE D'UNE BOUCLE FERMÉE

On a vu différents critères qui permettent de caractériser les performances voulues pour le système : temps de montée, temps d'établissement, dépassement indiciel, ... Imposer ces critères permettrait d'imposer que les pôles de la fonction de transfert soient dans une certaine région du plan complexe. On va maintenant voir ce que ces critères impliquent pour une boucle fermée.

### 6.1 Introduction

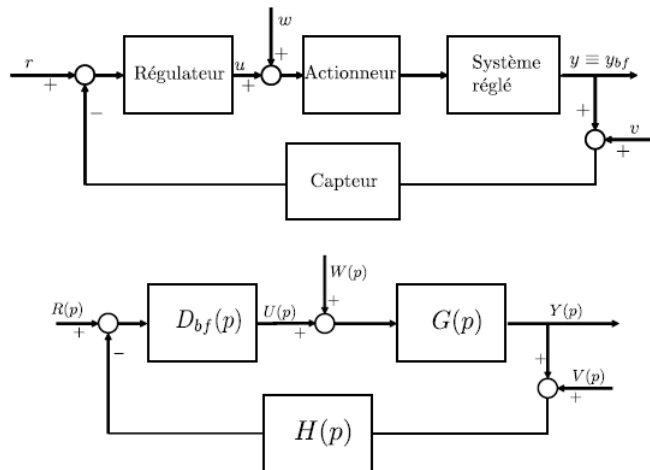
Faisons le lien entre la physique et la description mathématique d'une boucle ouverte et d'une boucle fermée.

Pour une boucle ouverte, on a

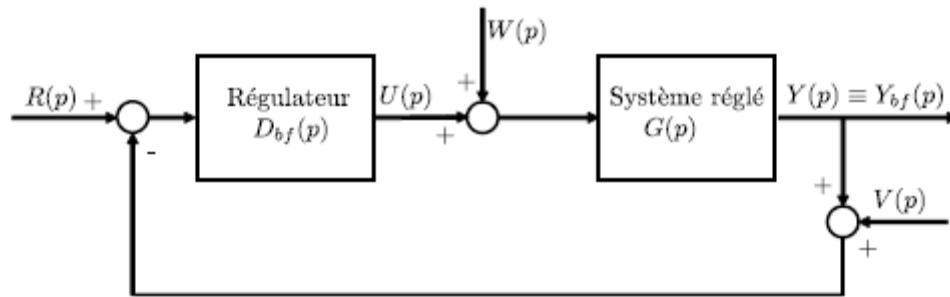


L'actionneur répond en général beaucoup plus rapidement que le système réglé. On va donc ramener son modèle à un facteur constant que l'on insère dans  $G(p)$ . La fonction de transfert  $D_{bo}(p)$  décrit le régulateur en boucle ouverte.

Pour une boucle fermée, on a



Ici  $G(p)$  inclut également l'actionneur. Le capteur sera modélisé par une fonction de transfert  $H(p)$  que l'on supposera égale à 1. Il y a trois entrées pour une régulation en boucle fermée : la référence, les perturbations et le bruit de mesure. Dans le cas où le capteur ne pourrait pas être modélisé par un gain unitaire, on peut toujours l'insérer dans  $G(p)$  à condition de normaliser la référence et les perturbations par ce gain. On modélisera donc notre boucle fermée comme indiquée sur le schéma fonctionnel suivant.



## 6.2 Equations de base de l'automatique

### 6.2.1 Boucle ouverte

On peut exprimer la sortie

$$Y_{bo}(p) = G(p)D_{bo}(p)R(p) + G(p)W(p)$$

Et l'erreur entre la référence et la sortie vaut

$$\begin{aligned} E_{bo}(p) &= R(p) - Y(p) \\ &= R(p) - [G(p)D_{bo}(p)R(p) + G(p)W(p)] \\ &= (I - G(p)D_{bo}(p))R(p) - G(p)W(p) \end{aligned}$$

### 6.2.2 Boucle fermée

Pour une boucle fermée on a trois entrées :

- La référence qui doit être suivie par la sortie du système réglé
- Les perturbations que la régulation doit contrecarrer
- Le bruit de mesure que le régulateur est supposé ignorer

On peut exprimer la sortie en fonction de ces trois entrées

$$Y_{bf} = \frac{G D_{bf}}{1 + G D_{bf}} R + \frac{G}{1 + G D_{bf}} W - \frac{G D_{bf}}{1 + G D_{bf}} V.$$

Il est également intéressant d'étudier le signal réglant car il existe des limitations sur ce signal dont il faut aussi tenir compte. On a

$$U = \frac{D_{bf}}{1 + G D_{bf}} R - \frac{G D_{bf}}{1 + G D_{bf}} W - \frac{D_{bf}}{1 + G D_{bf}} V.$$

Pour voir avec quelle qualité la sortie suit la référence, on s'intéresse à l'erreur de réglage  $E_{bf} = R - Y_{bf}$

$$E_{bf} = \frac{1}{1 + G D_{bf}} R - \frac{G}{1 + G D_{bf}} W + \frac{G D_{bf}}{1 + G D_{bf}} V.$$

## 6.3 Principaux objectifs

### 6.3.1 La stabilité

On va modéliser  $G(p)$  et  $D(p)$  par des fractions rationnelles.

### 6.3.1.1 Boucle ouverte

Pour la boucle ouverte, on a donc

$$G(p) = \frac{b(p)}{a(p)} \quad D_{bo}(p) = \frac{c(p)}{d(p)}$$

On a vu qu'une CNS de stabilité EBSB était que tous les pôles aient une partie réelle négative après les éventuelles simplifications. On a vu également qu'une CNS de stabilité asymptotique est que tous les pôles aient une partie réelle négative avant toute simplification. On a vu aussi que toute simplification entre singularités dans le demi-plan droit était interdite.

### 6.3.1.2 Boucle fermée

Pour une boucle fermée, le polynôme caractéristique de la fonction de transfert est donné par

$$1 + G(p)D_{bf}(p) = 1 + \frac{b(p)c(p)}{a(p)d(p)}$$

L'équation caractéristique de la boucle fermée est alors

$$1 + G(p)D_{bf}(p) = 0 \Rightarrow a(p)d(p) + b(p)c(p) = 0.$$

En effet,

$$T_{bf}(p) = \frac{G(p)D_{bf}(p)}{1 + G(p)D_{bf}(p)} = \frac{c(p)b(p)}{a(p)d(p) + b(p)c(p)}.$$

Il est possible de stabiliser un système instable par un choix approprié de  $c(p)$  et  $d(p)$ .

#### Exemple

On considère le système  $G(p) = \frac{1}{p-1}$  instable car son pôle est dans le demi-plan droit. On va le stabiliser à l'aide d'un régulateur proportionnel  $D_{bf}(p) = K$ .

L'équation caractéristique est

$$p - 1 + K = 0$$

On voit que pour  $K > 1$ , le pôle sera à partie réelle négative et on aura stabilisé le système.

On a stabilisé un système instable en utilisant un régulateur approprié et surtout pas en introduisant une simplification pôle zéro ! Cela aurait pour effet de faire diverger un état interne au système et on aurait un système instable asymptotiquement.



### 6.3.2 Suivi de trajectoire

#### 6.3.2.1 Boucle ouverte

Pour avoir un suivi de trajectoire parfait, il suffirait, pour autant que le système soit stable, de prendre pour le régulateur, l'inverse de la fonction de transfert du système de sorte que la fonction de transfert de la boucle ouverte soit égale à 1 :

$$G(p)D_{bo}(p) = \frac{b(p)c(p)}{a(p)d(p)} = 1 \quad \text{si} \quad \frac{c(p)}{d(p)} = \frac{a(p)}{b(p)}$$

Cependant, il n'est pas possible de prendre exactement l'inverse de la fonction de transfert du système pour la fonction de transfert du régulateur. Il y a plusieurs types de limitations :

- Pour réaliser en pratique une fonction de transfert, il faut que le degré du numérateur soit inférieur ou égal à celui du dénominateur. Il faudrait que  $\partial d(p) \geq \partial c(p)$ . Or, en général, dans ce cours, on a vu que le degré de  $a(p)$  était supérieur au degré de  $b(p)$ . On ne pourra donc pas atteindre l'objectif à la perfection.
- Il y a des limitations sur les actionneurs et on doit les prendre en compte dans la fonction de transfert de la boucle ouverte (qui ne sera donc pas nécessairement égale à 1).
- En pratique, on ne connaît pas bien notre système, on l'approche sur base de mesures expérimentales et donc on n'aura jamais vraiment son inverse. On risque des erreurs de modélisation.

#### 6.3.2.2 Boucle fermée

En boucle fermée, puisqu'on s'intéresse au suivi de trajectoire, on doit étudier l'erreur vis-à-vis de la référence :

$$E_{bf}(p) = \frac{1}{1 + G(p)D_{bf}(p)} R(p)$$

On peut étudier ce qu'il se passe lorsque la consigne appliquée est une constante. Pour voir vers quoi va tendre l'erreur statique, on utilise le théorème de la valeur finale. Pour pouvoir utiliser ce théorème, on suppose que la boucle fermée est stable, sans quoi on aurait une valeur qui diverge.

$$\begin{aligned} e_s &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p E_{bf}(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{1 + G(p)D_{bf}(p)} \frac{1}{p} \\ &= \frac{1}{1 + G(0)D_{bf}(0)} \end{aligned}$$

Pour avoir le meilleur suivi de trajectoire possible, on veut que l'erreur statique tende vers zéro, on a donc intérêt à avoir un gain important pour notre régulateur.

### 6.3.3 Régulation de maintien

On doit souvent, plutôt que de suivre une trajectoire, rester à un point de fonctionnement constant. Dès lors, on a une référence constante et il s'agit essentiellement de gérer les perturbations. La boucle ouverte est une structure inutilisable pour la régulation de maintien car le régulateur n'a pas d'effet sur la perturbation.

Pour une boucle fermée, la contribution des perturbations sur l'erreur de réglage est donnée par

$$\frac{G(p)}{1 + G(p)D_{bf}(p)} W(p)$$

Le signe est sans intérêt ici. On voit que pour atténuer l'effet des perturbations, il faut choisir pour le régulateur un grand gain. Il faut cependant aussi faire attention à la contribution du bruit à l'erreur de réglage donnée par

$$\frac{G(p)D_{bf}(p)}{1 + G(p)D_{bf}(p)} V(p)$$

qui elle vaut 1 si le gain du régulateur est trop grand. On peut résoudre ce problème en remarquant que l'effet des perturbations est important aux basses fréquences et l'effet du bruit est important aux hautes fréquences. On choisira donc pour le régulateur une fonction de transfert avec un grand gain aux basses fréquences et un petit gain aux hautes fréquences.

#### 6.3.4 Sensibilité aux erreurs de modélisation

Nos régulateurs sont conçus sur base d'un modèle du système. Il y a une certaine incertitude sur ce modèle et l'effet de cette incertitude sur les performances de la boucle est caractérisé par la sensibilité.

##### 6.3.4.1 Boucle ouverte

On a une certaine erreur sur la fonction de transfert du système qui va induire une erreur sur la fonction de transfert de la boucle ouverte. On note

$$T_{bo} + \Delta T_{bo} = D_{bo}(G + \Delta G) = T_{bo} + D_{bo}\Delta G$$

On définit la sensibilité par le rapport l'erreur relative de la fonction de transfert de la boucle ouverte sur l'erreur relative de la fonction de transfert du système réglé :

$$S_G^{T_{bo}} = \frac{\frac{\Delta T_{bo}}{T_{bo}}}{\frac{\Delta G}{G}} = \frac{G}{T_{bo}} \frac{\Delta T_{bo}}{\Delta G}$$

Mais

$$\frac{\Delta T_{bo}}{T_{bo}} = \frac{D_{bo}\Delta G}{D_{bo}G} = \frac{\Delta G}{G} \quad \Rightarrow S_G^{T_{bo}} = 1$$

La fonction de sensibilité vaut 1 en boucle ouverte. Donc si on a une erreur de 10% sur le modèle, on aura une erreur de 10% sur la fonction de transfert de la boucle ouverte.

##### 6.3.4.2 Boucle fermée

La boucle fermée permet d'atténuer les erreurs de modélisation. On fait le même genre de raisonnement que pour la boucle fermée mais les calculs sont légèrement plus chiants. On note

$$G_{\Delta} = G + \Delta G \quad T_{bf} = \frac{GD_{bf}}{1 + GD_{bf}} \quad \Delta T_{bf} = \frac{G_{\Delta}D_{bf}}{1 + G_{\Delta}D_{bf}} - \frac{GD_{bf}}{1 + GD_{bf}}$$

On peut encore écrire

$$\Delta T_{bf} = \frac{\Delta G D_{bf}}{(1 + G_{\Delta}D_{bf})(1 + GD_{bf})} = \frac{\Delta G D_{bf} G}{(1 + G_{\Delta}D_{bf})(1 + GD_{bf}) G} = \frac{\Delta G T_{bf}}{(1 + G_{\Delta}D_{bf}) G}$$

On en déduit la sensibilité de la fonction de transfert de la boucle fermée aux erreurs de modélisation :

$$S_G^{T_{bf}} = \frac{\frac{\Delta T_{bf}}{T_{bf}}}{\frac{\Delta G}{G}} = \frac{1}{(1 + G_{\Delta}D_{bf})} \approx \frac{1}{(1 + GD_{bf})}$$

On remarque donc que les erreurs de modélisation sont atténuées. Fermer une boucle permet de limiter ces erreurs de modèle ou des changements de modèles. En effet, même si on avait un modèle parfait au départ, le système va vieillir. Cela se marquera par des changements sur la fonction de transfert du système. Grâce à la BF, on limitera l'effet de ces changements.

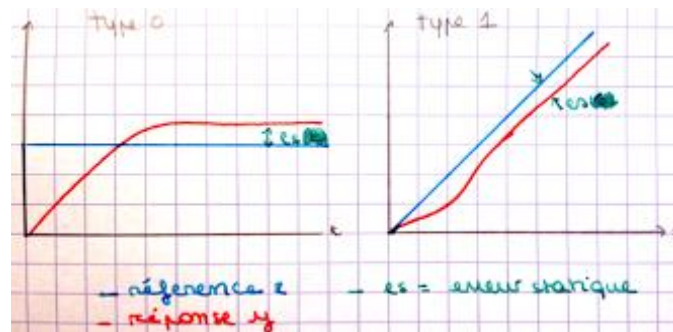
## 6.4 Erreur statique vis à vis d'entrées polynomiales – Type d'un système

L'objectif dans la régulation en suivi de trajectoire est d'avoir une erreur statique nulle. On va étudier l'erreur statique quand la référence a une forme polynomiale.

### 6.4.1 Type d'un système

Un système est de **type k** vis-à-vis du suivi de trajectoire s'il répond avec une erreur constante à une référence polynomiale de degré k.

Un système est de **type k** vis-à-vis des réjections de perturbations s'il répond avec une erreur constante à une perturbation polynomiale de degré k.



On va voir comment faire pour que ce soit le cas. On va travailler avec le théorème de la valeur finale donc pour cela on suppose que notre boucle fermée est stable.

### 6.4.2 Précision vis-à-vis de la référence

L'étude de l'erreur statique est ce qu'on appelle la précision. On ne considère que l'erreur de réglage vis-à-vis de la référence :

$$E = \frac{1}{1 + GD_{bf}} R = SR$$

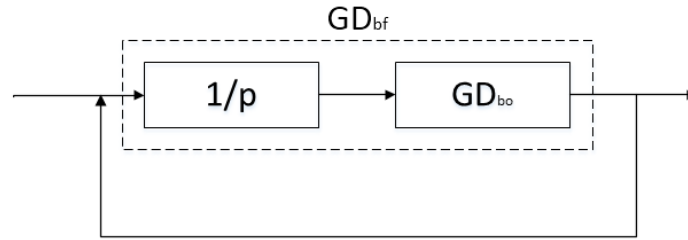
Par application du théorème de la valeur finale, si on applique une référence  $r(t) = \frac{t^k}{k!} v(t)$ , on a

$$\begin{aligned} e_s &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{1 + G(p)D_{bf}(p)} R(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{1 + G(p)D_{bf}(p)} \frac{1}{p^{k+1}} \end{aligned}$$

Pour une référence en échelon, on a

$$e_s = \frac{1}{1 + G(0)D_{bf}(0)}$$

Elle n'est pas nulle mais on peut la diminuer avec un gain grand dans le régulateur.



Si maintenant, on ajoute un pôle à l'origine dans la boucle ouverte, c'est-à-dire dans le régulateur ou dans le système réglé, la nouvelle fonction de transfert de la boucle fermée sera

$$T(p) = \frac{\frac{G(p)D_{bo}(p)}{p}}{1 + \frac{G(p)D_{bo}(p)}{p}}$$

Et l'erreur statique vis-à-vis de la référence en échelon devient

$$e_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{1 + \frac{G(p)D_{bo}(p)}{p}} \frac{1}{p} = 0$$

Le pôle à l'origine dans la boucle ouverte assure l'erreur nulle vis-à-vis de la référence.

On regarde l'erreur statique vis-à-vis d'une référence en rampe quand la boucle ouverte contient un seul pôle à l'origine :

$$e_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{1 + \frac{G(p)D_{bo}(p)}{p}} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{G(0)D_{bo}(0)}$$

L'erreur statique est une constante. Si on met deux pôles à l'origine dans la boucle ouverte, l'erreur statique vis-à-vis d'une référence en pente sera nulle.

Si on généralise à  $n$  pôles en l'origine dans la boucle ouverte, l'erreur statique vis-à-vis d'une référence  $r(t) = \frac{t^k}{k!} v(t)$ , sera

$$e_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^n}{p^n + G(p)D_{bo}(p)} \frac{1}{p^k}$$

Si  $n > k$  alors l'erreur statique sera nulle. Il faut donc au moins autant d'intégrateurs qu'il y a de pôles en l'origine (il y en a  $k + 1$ ) dans le signal de référence. Si  $n = k$ , l'erreur est constante, le système est de type  $k$ .

Remarquons que le type d'un système est une propriété robuste, elle n'est pas affectée par des changements de valeurs des paramètres pour autant que la boucle fermée reste stable.

#### 6.4.3 Précision vis-à-vis d'une perturbation

L'erreur due aux perturbations est

$$E = \frac{-G}{1 + GD_{bf}} W$$

Si on considère qu'on a un pôle en l'origine dans le système réglé, l'erreur pour une perturbation en échelon sera

$$\begin{aligned}
e_s &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) \\
&= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{G(p)}{p}}{1 + \frac{G(p)D_{bf}(p)}{p}} \frac{1}{p} \\
&= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{G(p)}{p + G(p)D_{bf}(p)} = \frac{1}{D_{bf}(0)}
\end{aligned}$$

L'erreur est non nulle sauf si le régulateur contient un pôle à l'origine. [Le pôle à l'origine doit être placé en amont de l'endroit où entre la perturbation pour assurer une erreur statique nulle.](#)

On peut faire le raisonnement pour le cas d'un régulateur avec  $n$  pôles en l'origine et une perturbation d'ordre  $k$ . On trouve alors que si  $n > k$ , l'erreur est nulle, si  $n = k$ , l'erreur est constante, le système est d'ordre  $k$ .

On verra plus tard que si on met trop d'intégrateurs, on tend à déstabiliser le système. On se limitera donc au nombre de pôles en l'origine strictement nécessaire.

## 7. RÉGULATEURS PID

### 7.1 Introduction

Les régulateurs PID sont les plus utilisés dans l'industrie. Ce chapitre donne des méthodes basées sur essais-erreurs (heuristiques) pour adapter les paramètres de ces régulateurs.

On a trois actions différentes

- L'action P : action proportionnelle à l'erreur de réglage
- L'action I : action par intégration. Elle est essentiellement liée à la précision que l'on veut atteindre. Elle permet d'annuler l'erreur statique pour une entrée constante mais elle dégrade généralement la réponse transitoire.
- L'action D : action dérivée. Elle permet d'améliorer la réponse transitoire grâce à l'effet d'anticipation.

La fonction de transfert de base d'un régulateur PID est

$$D_{bf}(p) = k_p + \frac{k_i}{p} + \frac{k_d p}{pT_f + 1}$$

Le troisième terme est proportionnel à la dérivée de l'erreur. On y a introduit un pôle de filtrage car on ne sait pas mettre en œuvre une fonction de transfert qui possède un numérateur de degré plus élevé que celui du dénominateur.

### 7.2 Actions proportionnelle, intégrale et dérivée

#### 7.2.1 Régulateur proportionnel (P)

La loi de réglage est

$$u(t) = k_p e(t)$$

La fonction de transfert est un simple gain  $D_{bf}(p) = k_p$ , appelé gain proportionnel. On introduit parfois une bande proportionnelle notée  $P_b$ . Elle est liée aux limitations sur les actionneurs.

Lorsque l'on met en œuvre un régulateur, il faut étudier son effet sur une boucle fermée. Nous allons voir l'effet d'un régulateur proportionnel sur un système du premier ordre et ensuite, sur un système du second ordre.

##### 7.2.1.1 Effet d'un régulateur proportionnel sur un système du premier ordre

La fonction de transfert d'un système du premier ordre est

$$G(p) = \frac{A_0 \sigma}{p + \sigma}$$

Donc, avec un régulateur proportionnel, la fonction de transfert de la boucle fermée sera

$$T_{bf}(p) = \frac{k_p G(p)}{1 + k_p G(p)} = \frac{k_p A_0 \sigma}{p + \sigma + k_p A_0 \sigma}$$

Pour un système du premier ordre, on va pouvoir déplacer le pôle et donc influencer sur la rapidité de réponse puisqu'on a vu que la rapidité de réponse est directement liée à la position du pôle.

### 7.2.1.2 Effet d'un régulateur proportionnel sur un système du second ordre

La fonction de transfert d'un système du second ordre est du type

$$G(p) = \frac{b}{p^2 + a_1 p + a_2}$$

Donc, en boucle fermée, avec un régulateur proportionnel, on a

$$T_{bf}(p) = \frac{k_p b}{p^2 + a_1 p + a_2 + k_p b}$$

On voit que  $\omega_n^2 = k_p b$ , on pourra donc influencer sur la pulsation naturelle du système. Par contre,  $a_1 = 2\zeta\omega_n$ , ce coefficient n'étant pas influencé par  $k_p$ , on ne pourra pas influencer sur le facteur d'amortissement du système.

On a vu que pour un système de type 0, l'erreur statique est d'autant plus faible que le gain proportionnel est grand. Si ce gain est grand, la pulsation naturelle sera grande et du coup le facteur d'amortissement diminuera. Donc avec un régulateur proportionnel et système du second ordre, pour avoir une erreur statique nulle, on aurait une réponse très oscillante. Le régulateur proportionnel n'est pas suffisant pour maîtriser la dynamique d'un système du second ordre.

### 7.2.2 Régulateur à actions proportionnelle et intégrale (PI)

La loi de réglage est

$$u(t) = k_p e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau$$

Et la fonction de transfert est donc

$$D_{bf}(p) = k_p + \frac{k_I}{p}$$

#### 7.2.2.1 Effet d'un régulateur PI sur un système du premier ordre

Sachant que la fonction de transfert du premier ordre peut s'écrire

$$G(p) = \frac{A_0}{Tp + 1}$$

La fonction de transfert de la boucle fermée avec un régulateur PI (faire le calcul comme exo) est

$$T_{bf}(p) = \frac{A_0(k_p p + k_I)}{Tp^2 + (A_0 k_p + 1)p + A_0 k_I}$$

On peut ajuster alors la valeur de la pulsation naturelle ainsi que celle du facteur d'amortissement, puisque

$$\omega_n = \sqrt{\frac{A_0 k_I}{T}} \quad \zeta = \frac{(A_0 k_p + 1)}{2T\omega_n}$$

On peut calculer la sortie du système en fonction de la référence et des perturbations :

$$Y(p) = \frac{A_0(k_p p + k_I)}{Tp^2 + (A_0 k_p + 1)p + A_0 k_I} R(p) + \frac{A_0 p}{Tp^2 + (A_0 k_p + 1)p + A_0 k_I} W(p)$$

Le zéro en l'origine au numérateur de la fonction de transfert entre  $Y(p)$  et  $W(p)$  assure bien que l'erreur statique vis-à-vis d'une perturbation constante est nulle. De plus l'intégrateur est sensé également assurer que l'erreur statique vis-à-vis d'une référence constante est nulle. Cela signifie que  $y(t)$  doit valoir asymptotiquement  $r(t)$ . On peut le vérifier en calculant le gain statique de la boucle fermée (obtenu pour  $p = 0$  dans la fonction de transfert de la boucle fermée) : ce gain est unitaire, preuve que asymptotiquement  $y(t) = r(t)$ . Le système est donc de type 1 vis-à-vis de la référence et des perturbations.

On voit donc qu'avec un régulateur PI, on peut fixer la position des pôles mais qu'en plus on a la précision.

### 7.2.2.2 Effet d'un régulateur PI sur un système du second ordre

Pour un système du second ordre, le raisonnement est principalement le même. Ce qui nous intéresse c'est le dénominateur de la fonction de transfert de la boucle fermée :

$$p^3 + a_1 p^2 + (a_2 + k_p b)p + b k_I$$

On remarque qu'à nouveau l'un des coefficients du dénominateur n'est pas influencé par le régulateur. On ne pourra donc pas fixer la position des pôles.

### 7.2.3 Régulateur à actions proportionnelle, intégrale et dérivée (PID)

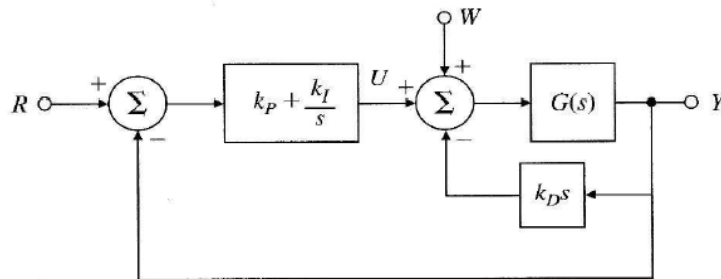
La loi de réglage est

$$u(t) = k_p e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau + k_D \frac{de(t)}{dt}$$

La fonction de transfert du régulateur est alors

$$D_{bf}(p) = k_p + \frac{k_I}{p} + k_D p$$

Le problème ici est que si on a un changement abrupt de référence, la réponse sera brusque. Pour éviter cela, on place souvent l'action dérivée dans la rétroaction.



La loi de réglage est alors

$$u(t) = k_p e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau - k_D \frac{dy(t)}{dt}$$

#### 7.2.3.1 Effet d'un régulateur PID sur un système du second ordre

Pour un système réglé du second ordre dans une boucle fermée avec un régulateur PID, on a, dans le cas où l'action dérivée porte sur  $e(t)$  :



$$Y(p) = \frac{b(k_D p^2 + k_P p + k_I)}{p^3 + (a_1 + b k_D) p^2 + (a_2 + k_P b) p + b k_I} R(p) + \frac{b p}{p^3 + (a_1 + b k_D) p^2 + (a_2 + k_P b) p + b k_I} W(p)$$

Cette fois, tous les coefficients du dénominateur sont influencés par les paramètres du régulateur. On peut donc imposer complètement la position des pôles. Dans le cas où l'action dérivée porte sur  $y(t)$ , le dénominateur ne change pas mais les zéros du numérateur changent. On a les mêmes propriétés de précision que pour un régulateur PI.

### 7.2.3.2 Rôle du pôle de filtrage

L'action D n'est pas réalisable en pratique c'est pourquoi on ajoute un pôle de filtrage. Ce pôle de filtrage permet également d'éviter une amplification du bruit.

Si on a un bruit  $v(t) = \alpha \sin \omega_0 t$ , lorsque que l'on appliquera l'action dérivée sur l'erreur ou sur le signal de sortie, la dérivée du bruit s'y trouvera et on aura

$$k_D \frac{dv(t)}{dt} = k_D \alpha \omega_0 \cos \omega_0 t$$

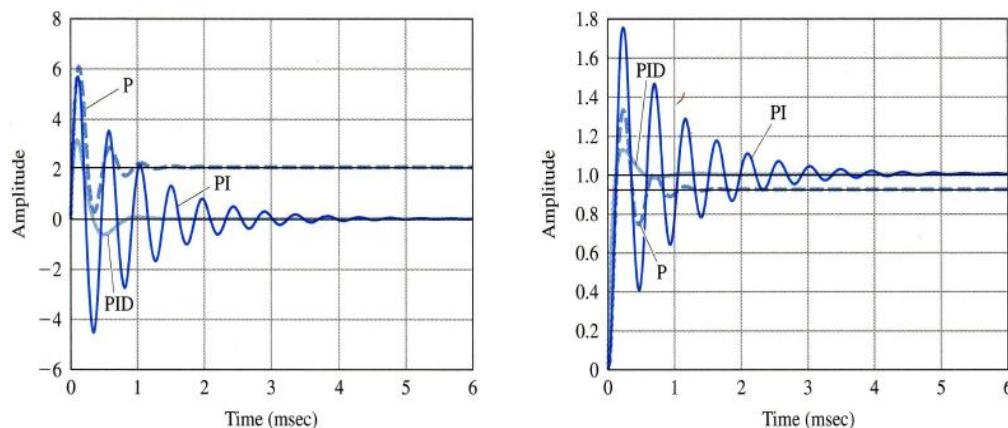
Plus on aura un bruit à haute fréquence, plus l'amplitude du bruit sera importante. On a donc intérêt à atténuer ce bruit et c'est ce que fait le pôle de filtrage (on verra comment en détail dans le chapitre sur les méthodes harmoniques).

On a donc une fonction de transfert

$$D_{bf}(p) = k_P + \frac{k_I}{p} + \frac{k_D p}{p T_f + 1}$$

Les règles de bonne pratique veulent que l'on choisisse  $T_f = \frac{k_D}{k_P N}$  avec  $N$  entre 8 et 20.

### 7.2.4 Illustrations des effets PID



Le graphique de gauche est la réponse à un échelon de perturbation, et celui de droite à un échelon de référence. Comment déterminer quelle courbe représente quel régulateur ?

Pour un régulateur P, on a vu que l'erreur statique vis-à-vis de la référence et des perturbations n'était pas nulle. Sa courbe est donc facilement détectable.

Pour les régulateurs PI et PID, les erreurs statiques sont nulles. Mais le PI a une réponse beaucoup plus oscillante que le PID.

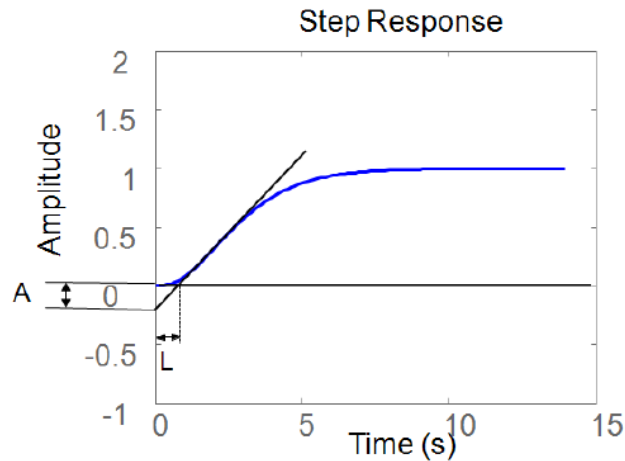
On remarque ici l'intérêt de l'action dérivée qui permet d'atteindre une réponse aussi rapide que le régulateur P mais en ayant des erreurs statiques nulles.

### 7.3 Ajustement par les méthodes de Ziegler Nichols

Ce sont des méthodes par essais-erreurs. La première est basée sur la réponse indicielle.

#### 7.3.1 Méthode basée sur la réponse indicielle

On va approcher notre système par  $G(p) = \frac{A e^{-pL}}{Lp}$ . On obtient comme réponse indicielle la réponse représentée sur le graphe suivant.



La réponse indicielle du système est

$$y(t) = \frac{A}{L}(t - L)v(t - L)$$

Il s'agit d'un temps mort suivi d'une droite de pente  $\frac{A}{L}$ . Pour trouver A et L on trace la tangente au point d'inflexion de la vraie réponse indicielle (courbe bleue).

On va ajuster les paramètres du régulateur pour obtenir une réponse avec un facteur de décroissance  $d = 0,25$ . Les règles d'ajustements des paramètres sont (en se basant sur la fonction de transfert courante, voir slides) :

- Pour un régulateur P :

$$k_P = \frac{1}{A}$$

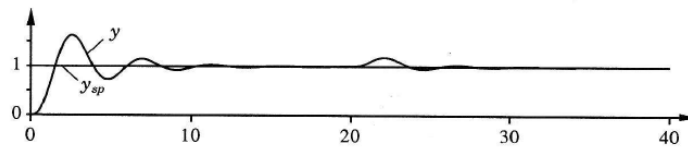
- Pour un régulateur PI :

$$k_P = \frac{0,9}{A} \quad T_I = 3L$$

- Pour un régulateur PID :

$$k_P = \frac{1,2}{A} \quad T_I = 2L \quad T_D = \frac{L}{2}$$

Si on ajuste les paramètres d'un régulateur PID sur base de cette méthode pour le système  $G(p) = \frac{1}{(p+1)^3}$ , on obtient



On voit d'abord la réponse à une entrée en échelon, puis, à l'instant  $t = 20$ , on introduit une perturbation en échelon. On voit que cette méthode est caractérisée par un dépassement indiciel important. On voit également qu'elle réagit mieux à un échelon de perturbation qu'à un échelon de référence.

Imposer le facteur de décroissance  $d = 0,25$  revient à imposer un facteur d'amortissement  $\zeta = 0,21$ . C'est un facteur d'amortissement faible, on a donc des oscillations importantes avec cette méthode.

### 7.3.2 Méthode de la sensibilité ultime

Ici, on ferme la boucle avec un régulateur proportionnel. On va progressivement augmenter le gain du régulateur jusqu'à observer en sortie une oscillation entretenue (le système possède des pôles sur l'axe imaginaire). Une fois qu'on a la valeur du gain du régulateur qui provoque cette oscillation entretenue, on arrête l'expérience. On note cette valeur  $K_u$ . On note la période des oscillations  $T_u$ . Sur base de ces deux paramètres, on a les règles d'ajustement suivantes :

- Pour un régulateur P :

$$k_p = 0,5 T_u$$

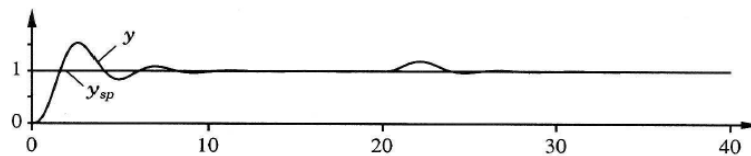
- Pour un régulateur PI :

$$k_p = 0,4 K_u \quad T_I = 0,8 T_u$$

- Pour un régulateur PID :

$$k_p = 0,6 K_u \quad T_I = 0,5 T_u \quad T_D = 0,125 T_u$$

Si on met en œuvre un régulateur PID sur base de cette méthode pour le système  $G(p) = \frac{1}{(p+1)^3}$ , on obtient



Les résultats obtenus sont assez similaires à ceux obtenus avec la première méthode. Le dépassement indiciel est légèrement plus faible ici mais reste important. La valeur de  $k_p$  est ici plus faible mais suffisamment grande pour avoir des marges de stabilité trop faibles. Notons que cette deuxième méthode requiert une mise en oscillation de la boucle fermée, ce qui n'est pas applicable à tous les procédés.

## 8. MÉTHODE DU LIEU D'EVANS

On sait déjà faire le lien entre les caractéristiques de la réponse indicielle et la position des pôles d'un système. On a également vu l'effet d'un pôle ou d'un zéro additionnel sur réponse transitoire. On a également vu que lorsqu'on fermait la boucle avec un régulateur, la position des pôles pouvait être modifiée. On va maintenant étudier le lieu des pôles de la boucle fermée en fonction d'un paramètre de la boucle ouverte (le gain du régulateur en général). On va voir comment utiliser ces lieux pour la conception de régulateurs.

### 8.1 Règles pour le tracé du lieu d'Evans

#### 8.1.1 Notations – Equation caractéristique

La fonction de transfert d'une boucle fermée dans les cas le plus général (avec capteur) est donnés par

$$T(p) = \frac{D(p)G(p)}{1 + D(p)G(p)H(p)}$$

L'équation caractéristique de la boucle fermée est

$$1 + D(p)G(p)H(p) = 0$$

On va transformer cette expression en une expression polynômiale. On fait apparaître le paramètre d'Evans  $K$  qui contient souvent le gain du régulateur. On a

$$a(p) + K b(p) = 0$$

On introduit la fonction de transfert  $L(p) = \frac{b(p)}{a(p)}$ , de sorte que l'équation caractéristique devienne

$$1 + K L(p) = 0.$$

On sera amené à factoriser les polynômes de  $L(p)$  :

$$\begin{aligned} b(p) &= p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m \\ &= (p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(p) &= p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n \\ &= (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) \end{aligned}$$

$$a(p) + K b(p) = (p - r_1)(p - r_2) \dots (p - r_n)$$

On note  $z_i$  les zéros de la boucle ouverte,  $p_i$  les pôles de la boucle ouverte et  $r_i$  les pôles de la boucle fermée.

#### 8.1.2 Définitions

Le **lieu d'Evans (positif)** de  $L(p)$  est le lieu des racines de  $1 + K L(p)$  lorsque  $K$  varie de 0 à l'infini. Comme  $1 + K L(p) = 0$  est l'équation caractéristique de la boucle fermée, le lieu d'Evans (positif) est le lieu des pôles de la boucle fermée pour les valeurs positives ou nulle de  $K$ .

Le **lieu d'Evans (positif)** de  $L(p)$  est le lieu des points du plan complexe où l'argument de  $L(p)$  vaut  $180^\circ$ . En effet

$$K L(p) = -1 \Rightarrow \arg(L(p)) = (2l - 1) 180^\circ$$

On peut un peu plus développer.

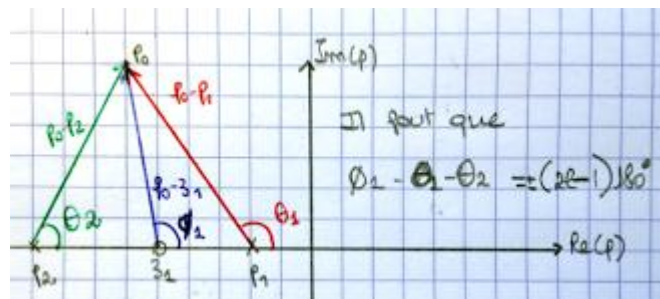
En se rappelant les notations introduites, on a

$$L(p) = \frac{b(p)}{a(p)} = \frac{\prod_{i=1}^m (p - z_i)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)}$$

On introduit les notations  $\theta_i = \arg(p - p_i)$  et  $\phi_i = \arg(p - z_i)$ . L'argument de  $L(p)$  peut alors être exprimé comme suit

$$\arg(L(p)) = \sum_{i=1}^m \phi_i - \sum_{i=1}^n \theta_i = \pm 180^\circ (2l - 1)$$

On va illustrer maintenant comment utiliser **ce critère de l'argument**. On aimerait savoir si un point  $p_0$  appartient ou non au lieu d'Evans. On considère un cas où on a deux pôles  $p_1$  et  $p_2$  et un zéro  $z_1$ .



On trace les vecteurs  $p_0 - z_i$  et  $p_0 - p_i$ . Les arguments sont lus entre l'axe réel positif et le vecteur. Pour que le point  $p_0$  appartienne au lieu d'Evans il faut que

$$\phi_1 - \theta_1 - \theta_2 = \pm 180^\circ (2l - 1)$$

Un autre critère important est **le critère du module** qui impose que

$$|KL(p)| = 1$$

On en déduit

$$|K| = \frac{1}{|L(p)|}$$

Donc en calculant l'inverse du module de  $L(p)$  en un point du lieu on obtient directement la valeur de  $K$  associée à ce point.

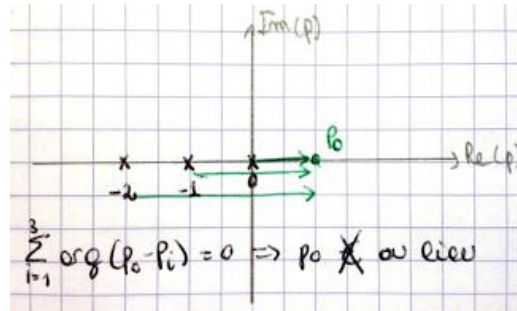
### 8.1.3 Exemple : tracé d'un lieu d'Evans simple

On va introduire certaines règles pour le tracé du lieu d'Evans au travers d'un exemple simple. On généralisera ces règles par la suite. On va considérer le système à rétroaction unitaire caractérisé par

$$K L(p) = \frac{K}{p(p+1)(p+2)}$$

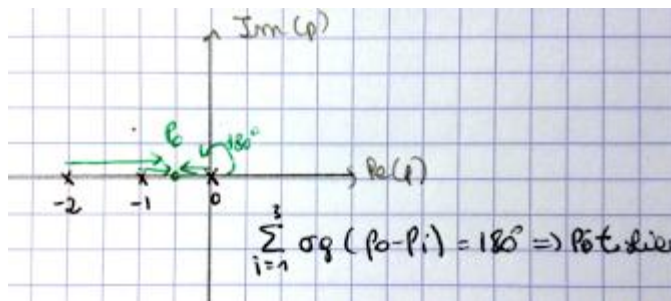
## 8.1.3.1 Lieu sur l'axe réel

La première étape est de voir quels segments de l'axe réel appartiennent au lieu. Si on prend un point  $p_0$  sur l'axe réel positif,



on voit que tous les vecteurs  $p_0 - p_i$  sont orientés dans le sens des réels positifs et donc que leur contribution dans le calcul de l'argument de  $L(p)$  est nulle. On en conclut que comme l'argument de  $L(p)$  n'est pas un multiple de  $180^\circ$ , le point  $p_0$  n'appartient pas au lieu. On voit que l'axe réel positif n'appartiendra jamais au lieu d'Evans.

Par contre, si on prend un point  $p_0$  dans le demi-plan gauche toujours sur l'axe réel, on voit que en fonction de l'endroit où l'on place ce point on aura parfois une contribution non nulle et un argument de  $L(p)$  qui sera multiple de  $180^\circ$ .



On verra une règle qui dit que pour qu'un point  $p_0$  appartienne au lieu d'Evans, il faut qu'il soit à gauche d'un nombre impair de pôles. On en conclut que seul le segment compris entre -2 et -1 n'appartiendra pas au lieu.

## 8.1.3.2 Asymptotes

Que se passe-t-il quand  $p$  est très éloigné de l'origine ? Depuis l'infini, les trois pôles semblent confondus et on peut approcher

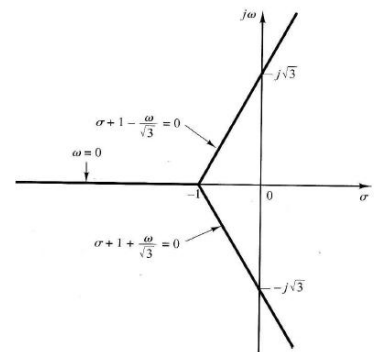
$$KL(p) \cong \frac{K}{p^3}$$

En appliquant le critère de l'argument, on obtient les trois directions pour lesquelles il y a une asymptote :

$$-3 \arg p = \pm 180^\circ (2l - 1) \quad \Rightarrow \quad \frac{\pm 180^\circ (2l - 1)}{3}$$

On a  $n - m$  asymptotes, où  $n$  est le nombre de pôles et  $m$  le nombre de zéros. Pour établir une droite pour chaque asymptote, on va faire une meilleure approximation,

$$KL(p) \cong \frac{K}{(p + 1)^3} \quad \Rightarrow \quad \arg(p + 1) = \pm 60^\circ (2l - 1)$$



On substitue  $p = \sigma + j\omega$ , ce qui implique que

$$\operatorname{arctg} \frac{\omega}{\sigma + 1} = \pm 60^\circ (2l - 1)$$

En prenant la tangente des deux membres, on obtient

$$\sigma + 1 - \frac{\omega}{\sqrt{3}} = 0 \quad \sigma + 1 + \frac{\omega}{\sqrt{3}} = 0 \quad \omega = 0$$

### 8.1.3.3 Points où le lieu quitte l'axe réel

Comme il y a des asymptotes, il y a nécessairement un point où le lieu quitte l'axe réel pour aller rejoindre les asymptotes. Le lieu va quitter l'axe quand les pôles se seront tellement rapprochés qu'ils seront confondus. Donc, le lieu quitte l'axe réel en des points qui sont pôles multiples de l'équation caractéristique.

Les points  $p$  pour lesquels le lieu quitte l'axe réel sont donc caractérisés par

$$\begin{aligned} f(p) &\equiv a(p) + Kb(p) = 0 \\ f'(p) &\equiv a'(p) + Kb'(p) = 0 \end{aligned}$$

Il en résulte

$$a(p)b'(p) - b(p)a'(p) = 0$$

Chercher les valeurs de  $p$  qui vérifient cette dernière équation revient à chercher les valeurs de  $p$  qui annulent  $\frac{dK}{dp}$ . En effet,

$$\frac{dK}{dp} = \frac{a(p)b'(p) - b(p)a'(p)}{b(p)^2}$$

Donc, dans notre exemple, on a

$$K = -(p^3 + 3p^2 + 2p)$$

Et donc  $\frac{dK}{dp} = 0$ , implique que  $p = -0,4226$  et  $p = -1,5774$ . On rejette cette dernière valeur qui se trouve dans le segment de l'axe réel qui n'appartient pas au lieu. Elle correspond en fait au lieu pour  $K$  négatif. Connaissant  $p = -0,4226$ , on peut, avec le critère du module, déterminer la valeur de  $K$ . On obtient  $K = 0,384$ .

### 8.1.3.4 Intersections avec l'axe imaginaire

Il est intéressant de connaître la valeur de  $K$  quand les asymptotes intersecteront l'axe imaginaire puisque cela correspond à la situation où la boucle fermée devient instable.

On peut pour ce faire utiliser le critère de Routh. L'équation caractéristique est

$$p^3 + 3p^2 + 2p + K = 0$$

La table de Routh est

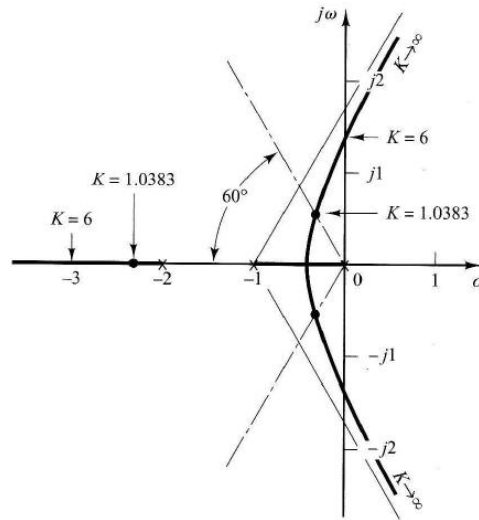
$p^3$	1	2
$p^2$	3	$K$
$p^1$	$(6 - K)/3$	
$p^0$	$K$	

On voit que le cas limite de stabilité sera donné par  $K = 6$ , on en déduit les pôles annulant le polynôme obtenu à partir de la deuxième ligne

$$3p^2 + K = 0 \Rightarrow p = \pm j\sqrt{2}$$

On peut également remplacer  $p$  par  $j\omega$  dans l'équation caractéristique et annuler la partie réelle et la partie imaginaire pour trouver les mêmes résultats.

Finalement, le lieu d'Evans est donné par



#### 8.1.4 Règles générales pour le tracé du lieu d'Evans

##### 8.1.4.1 Règle n°1 : détermination du nombre de branches

Les  $n$  branches du lieu partent des pôles de  $L(p)$  et  $m$  d'entre elles se terminent aux zéros finis de  $L(p)$  et les  $(n - m)$  restantes aux zéros à l'infini de  $L(p)$ .

En effet, pour  $K = 0$ , l'équation caractéristique donne  $a(p) = 0$ . Les solutions de cette équation sont les pôles de  $L(p)$ , on part donc bien des pôles de  $L(p)$ . Quand  $K$  augmente et tend vers l'infini, on aura  $L(p) = -\frac{1}{K}$  qui tend vers zéro c'est-à-dire  $L(p) = 0$ . Les solutions de cette dernière équation sont les zéros de  $L(p)$ . On se dirige donc bien des pôles de  $L(p)$  vers ses zéros. Soit  $b(p) = 0$ , et on a  $m$  zéros finis, soit  $p$  tend vers l'infini lorsque  $n > m$  et on a alors  $n - m$  zéros infinis.

##### 8.1.4.2 Règle n°2 : conditions d'existence sur l'axe réel

Les points de l'axe réel qui appartiennent au lieu sont situés à gauche d'un nombre impair de pôles et de zéros.

##### 8.1.4.3 Règle n°3 : les asymptotes

Les  $n - m$  asymptotes ont un point d'intersection commun sur l'axe réel en

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

Elles font, avec l'axe réel positif, un angle

$$\phi_l = \frac{\pm 180^\circ (2l - 1)}{n - m} \quad l = 0, 1, \dots, n - m - 1.$$



Pour un point  $p$  du lieu très éloigné de l'origine,  $\arg(p - p_i)$  est le même pour tous les pôles  $p_i$  et cet angle est identique à  $\arg(p - z_i)$ . Les  $m$  contributions des zéros suppriment celles de  $m$  pôles. Il reste donc  $n - m$  contributions liées aux  $n - m$  pôles restants. On a donc

$$K L(p) \cong \frac{K}{p^{n-m}} \Rightarrow \arg L(p) = \frac{\pm 180^\circ (2l - 1)}{n - m}$$

En effectuant les produits dans  $KL(p)$ , il vient

$$K L(p) = K \frac{p^m - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)p^{m-1} + \dots + (-1)^m z_1 z_2 \dots z_m}{p^n - (p_1 + p_2 + \dots + p_n)p^{n-1} + \dots + (-1)^n p_1 p_2 \dots p_n}$$

Par division polynômiale, on obtient

$$K L(p) = \frac{K}{p^{n-m} - (\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i) p^{n-m-1} + \dots}$$

Pour les grandes valeurs de  $p$  cette expression est approchée par

$$K L(p) = \frac{K}{\left[ p - \frac{(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i)}{n - m} \right]^{n-m}}$$

Pour les grandes valeurs de  $p$ , le lieu d'Evans est donc approché par

$$\frac{K}{\left[ p - \frac{(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i)}{n - m} \right]^{n-m}} = -1 \Rightarrow p = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

#### 8.1.4.4 Règle n°4 : points où le lieu quitte ou rejoint l'axe réel

- Lorsque le segment entre deux pôles adjacents sur l'axe réel appartient au lieu, il existe au moins un point où le lieu quitte l'axe réel entre les deux pôles.
- Lorsque le segment entre deux zéros adjacents sur l'axe réel (l'un d'entre eux pouvant être à l'infini) appartient au lieu, il existe au moins un point où le lieu rejoint l'axe réel entre les deux zéros.
- Si le segment entre un pôle et un zéro (fini ou infini) sur l'axe réel appartient au lieu, il peut ne pas y avoir de point où le lieu quitte l'axe réel, ou il peut exister à la fois des points où le lieu quitte et rejoint l'axe réel.

Ces points correspondent à des racines multiples de l'équation caractéristique

$$a(p) + K b(p) = 0$$

Ils sont solutions de l'équation suivante

$$\frac{dK}{dp} = \frac{a(p)b'(p) - b(p)a'(p)}{b(p)^2} = 0 \quad (K > 0)$$

Le lieu approche ou quitte une racine multiple  $q$  par des branches orientées dans les directions

$$\frac{\pm 180^\circ (2l - 1)}{q}$$

#### 8.1.4.5 Règle n°5 : points où le lieu intersecte l'axe imaginaire

Ces points sont importants car au-delà de ces points la boucle fermée devient instable.

Lorsque de tels points existent, on peut les déterminer soit

- Par le critère de Routh en déterminant la ou les valeurs de  $K$  qui annulent un des coefficients de la première colonne de la table de Routh. Si ce coefficient est associé à la ligne  $p^i$ , les racines du polynôme associé à la ligne  $p^{i+1}$  donnent les valeurs pôles sur l'axe imaginaire (lorsque la ligne  $p^i$  est nulle).
- En substituant  $p$  par  $j\omega$  dans l'équation caractéristique et en résolvant le système de deux équations à deux inconnues ( $\omega$  et  $K$ ).

#### 8.1.4.6 Boucle ouverte possédant des pôles complexes conjugués

On va voir ce qu'il se passe dans ce cas-là au travers d'un exemple et on généralisera par la suite. On considère un système pour lequel

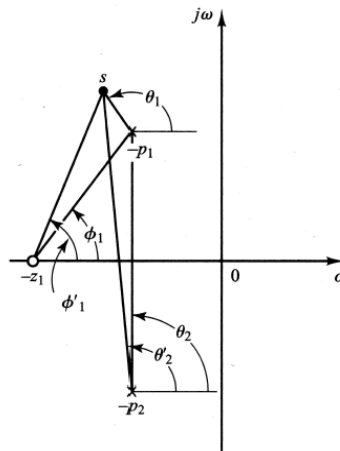
$$K L(p) = \frac{K(p+2)}{p^2 + 2p + 3}$$

On voit que les pôles de  $L(p)$  sont complexes conjugués et valent  $p_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{2}$ . On a également un zéro en  $z_1 = -2$ . Avec la règle n°2, on sait que tout l'axe réel négatif à partir de -2 appartient au lieu. Les pôles vont vers les zéros. Ici  $n - m = 2 - 1 = 1$ , on a donc un pôle qui va vers un zéro fini et un autre qui va vers un zéro infini. Comme  $n - m = 1$ , on a une asymptote. Elle est déjà connue, il s'agit de l'axe réel négatif. On peut donc calculer les points où le lieu quitte ou rejoint l'axe réel.

$$K = -\frac{p^2 + 2p + 3}{(p+2)} \Rightarrow \frac{dK}{dp} = -\frac{(2p+2)(p+2) - (p^2 + 2p + 3)}{(p+2)^2} = -\frac{p^2 + 4p + 1}{(p+2)^2}$$

Les points que l'on cherche sont racines de  $p^2 + 4p + 1$ , on obtient donc  $p = -2 - j\sqrt{3}$ . La deuxième racine est à rejeter car elle correspond au cas  $K < 0$ .

On va maintenant s'intéresser aux directions de départ du lieu depuis les pôles complexes conjugués. On considère un point  $s$  proche d'un des pôles conjugués et on va appliquer le principe de l'argument pour voir si ce point appartient au lieu.



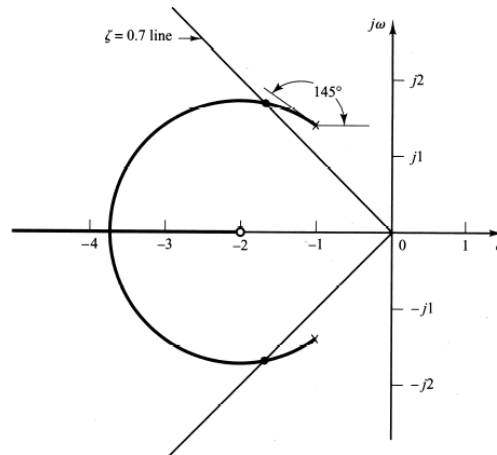
Le critère de l'argument donne

$$\phi'_1 - (\theta_1 + \theta'_2) = \pm 180^\circ(2l + 1)$$

Si on veut approcher la direction de départ du lieu au point  $p_1$ , on fait tendre  $s$  vers ce point. On a donc  $\phi'_1 \rightarrow \phi_1$ ,  $\theta'_2 \rightarrow \theta_2$ . On obtient alors

$$\theta_1 = 180^\circ - \theta_2 + \phi_1 = 180^\circ - 90^\circ + 55^\circ = 145^\circ$$

Par symétrie, la direction depuis le point  $p_2$  vaut  $-145^\circ$ . On obtient donc le lieu suivant :



#### 8.1.4.7 Règle n°6 : Angle de départ (d'arrivée) en des pôles (zéros) complexes conjugués

Pour des pôles et des zéros **simples**, la règle est la suivante :

- L'angle de départ d'une branche du lieu à partir d'un pôle complexe conjugué est

$$\theta_{l,dep} = \sum_{i=1}^m \phi_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n \theta_i - 180^\circ$$

- L'angle d'arrivée d'une branche du lieu en un zéro complexe conjugué est

$$\phi_{l,dep} = \sum_{i=1}^n \theta_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m \phi_i + 180^\circ$$

Pour des pôles et des zéros **multiples**, la règle devient :

- L'angle de départ d'une branche du lieu à partir d'un pôle de multiplicité  $q$  est

$$q\theta_{l,dep} = \sum_{i=1}^m \phi_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n \theta_i - 180^\circ(2l - 1) \quad l = 1, \dots, q$$

- L'angle d'arrivée d'une branche du lieu en un zéro de multiplicité  $q$  est

$$q\phi_{l,dep} = \sum_{i=1}^n \theta_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m \phi_i + 180^\circ(2l - 1) \quad l = 1, \dots, q$$

#### 8.1.4.8 Détermination du gain associé à une position des pôles

La règle du module permet d'évaluer le paramètre  $K$ .

$$K = \frac{1}{|L(p)|} = \frac{|p - p_1| \dots |p - p_n|}{|p - z_1| \dots |p - z_m|}$$

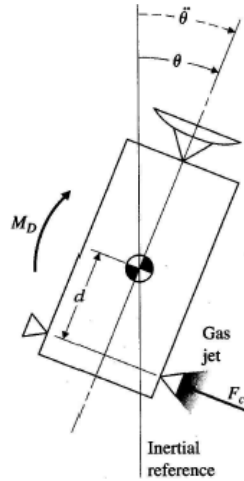
En l'absence de zéro, le dénominateur vaut 1.

## 8.2 Exemples de lieux d'Evans – Vers la conception de correcteurs

On va, dans cette partie, voir comment utiliser ces lieux d'Evans pour la conception de régulateurs.

### 8.2.1 Régulation d'attitude d'un satellite

Le satellite porte des antennes et des panneaux solaires. Il faut que l'antenne pointe sur un lieu précis de la terre et que les panneaux solaires soient orientés de manière à capter les rayons du soleil. Cela nécessite d'ajuster l'attitude du satellite.



On a comme moyen d'action un petit moteur qui va permettre d'exercer un moment autour du centre de masse. Les perturbations sont modélisées par des moments perturbateurs.

Le moteur provoque un moment

$$F_c(t)d$$

Où  $F_c$  est la force de propulsion introduite par le moteur et  $d$  la distance entre le vecteur force et le centre de gravité. On appelle le moment perturbateur  $M_D$ .

Le théorème du moment cinétique nous donne

$$J\ddot{\theta}(t) = dF_c(t) + M_D(t)$$

La fonction de transfert entre le signal réglant  $F_c(t)$  et le signal réglé  $\theta(t)$  est alors

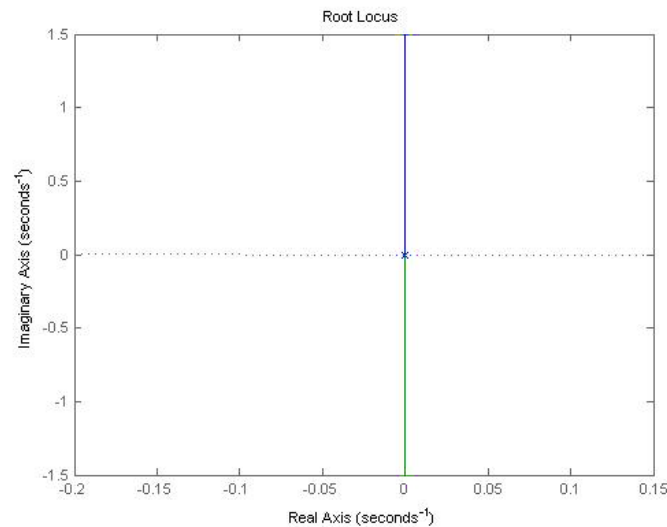
$$\theta(p) = \frac{d}{Jp^2}$$

#### 8.2.1.1 Utilisation d'un régulateur P

Si on utilise un régulateur P, on aura

$$K L(p) = \frac{k_p d}{Jp^2} \quad \Rightarrow \quad L(p) = \frac{1}{p^2} \quad K = \frac{k_p d}{J}$$

Si on trace le lieu d'Evans, on voit qu'il est sur l'axe imaginaire :



C'est pas top parce que cela signifie que quelle que soit la valeur choisie pour le gain du régulateur, on aura toujours une réponse oscillante non amortie. Or, on veut amortir. On a vu que l'action dérivée amortissait les pôles. On va donc essayer de réguler le système avec un régulateur PD.

#### 8.2.1.2 Utilisation d'un régulateur PD (idéal)

La fonction de transfert d'un régulateur PD est

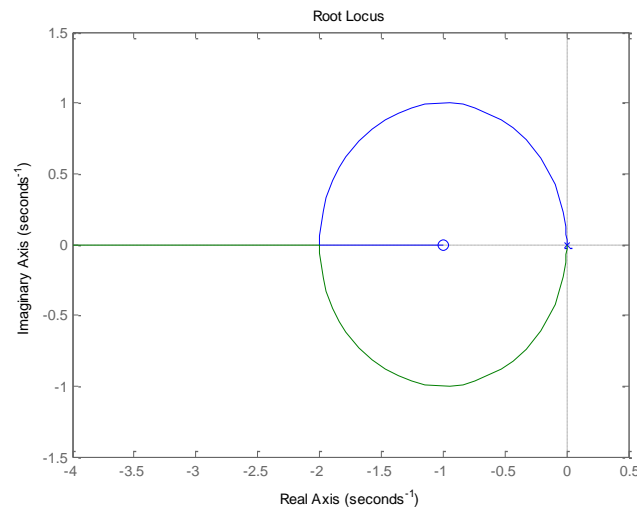
$$D(p) = k_p + k_D p$$

Pour simplifier, on va choisir  $k_p = k_D$  de façon à avoir notre zéro en -1. On reviendra sur la position du zéro plus tard.

On a donc

$$K L(p) = \frac{k_p d(p+1)}{J p^2} \Rightarrow L(p) = \frac{p+1}{p^2} \quad K = \frac{k_p d}{J}$$

Dans ce cas, le lieu d'Evans est donné par (faire le raisonnement qui nous le donne)



On voit que l'action dérivée a bien eu l'effet voulu : elle a attiré le lieu d'Evans (les pôles) dans le demi-plan gauche.

L'addition d'un zéro dans le demi-plan gauche attire le lieu d'Evans vers la gauche.

### 8.2.1.3 Régulateur PD propre

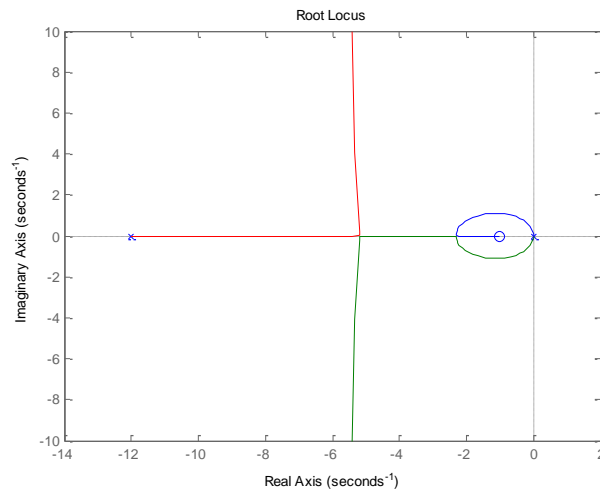
Le régulateur PD que l'on vient d'étudier n'est, comme on l'a déjà vu, pas réalisable en pratique car l'action dérivée idéale n'est pas réalisable. Il faut rajouter un pôle de filtrage pour rendre le système propre.

On va donc modéliser le régulateur PD par la fonction de transfert

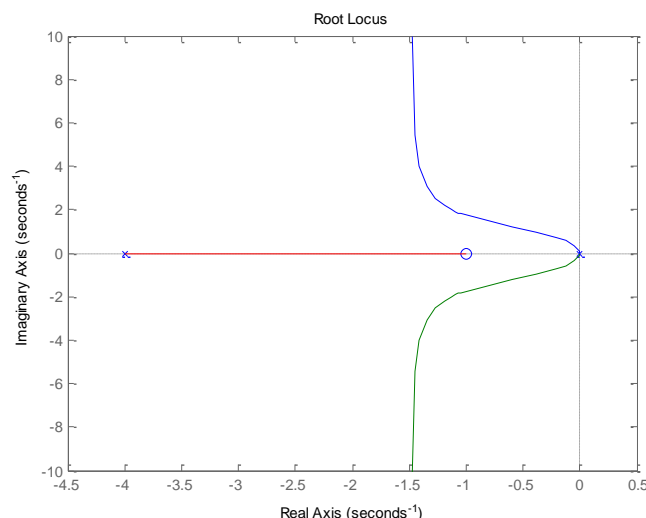
$$D(p) = k_p + \frac{k_D p}{p + 1} = \tilde{k} \frac{p + z_D}{p + p_D} \quad \tilde{k} = k_p + k_D p_D \quad z_D = \frac{k_p p_D}{\tilde{k}}$$

On va choisir un régulateur PD où c'est l'action dérivée qui domine c'est-à-dire qu'on va le choisir de sorte que  $p_D > z_D$ . On dit que ce régulateur est **un régulateur à avance de phase**.

Si on prend comme pôle de filtrage un pôle éloigné pour ne pas qu'il influence significativement la forme du lieu, par exemple,  $p_D = 12$ , on obtient le lieu suivant



On voit que le lieu n'est pas très fort modifié. On a un pôle supplémentaire en -12. Notre modélisation sans pôle de filtrage est acceptable quand le pôle de filtrage est éloigné de l'axe imaginaire. Par contre, si on choisit un pôle de filtrage proche, par exemple  $p_D = 4$  on aura le lieu suivant



Un pôle additionnel se déplaçant à partir de la gauche pousse les branches du lieu vers la droite lorsqu'il se rapproche du lieu initial (sans ce pôle additionnel).

Voyons maintenant pourquoi on appelle ce régulateur : **régulateur à avance de phase**. Si l'entrée du régulateur est une sinusoïde de pulsation  $\omega_0$ , sa sortie sera donnée par

$$u(t) = |D(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg(D(j\omega_0)))$$

Et

$$\begin{aligned} \arg D(j\omega_0) &= \arg(p + z_D) - \arg(p + p_D) \\ &= \arctg \frac{\omega_0}{z_D} - \arctg \frac{\omega_0}{p_D} \end{aligned}$$

Comme  $p_D > z_D$ , l'argument est toujours positif et on voit donc que le régulateur induit un déphasage positif entre son entrée et sa sortie.

### 8.3 Conception d'un correcteur (régulateur) dynamique

Les trois correcteurs les plus utilisés sont

- **Correcteur à avance de phase** : approche la fonction d'un régulateur PD. La réponse est accélérée et le dépassement indiciel est diminué.
- **Correcteur à retard de phase** ( $p_D < z_D$ ) : approche la fonction d'un régulateur PI. Il permet en général d'améliorer la précision de la boucle fermée.
- **Correcteur notch** : permet d'assurer la stabilité de la boucle fermée pour un système avec des pôles faiblement amortis.

#### 8.3.1 Conception d'un régulateur à avance de phase

La marche à suivre est la suivante

- 1) Détermination de la position souhaitée pour les pôles de la boucle fermée sur base des spécifications.
- 2) Vérification du fait les spécifications ne peuvent pas être atteintes par ajustement du gain de la boucle, c'est-à-dire avec un régulateur proportionnel. Si elles ne peuvent pas être atteintes, considérer un correcteur à avance de phase qui apporte l'angle requis pour obtenir les pôles en boucle fermée souhaités (déterminer  $p_C, z_C$ ).
- 3) Déterminer  $k_C$  par la condition sur le module.

Illustrons ceci par un exemple.

On considère un système réglé

$$G(p) = \frac{10}{p(p+1)}$$

On souhaite que le dépassement indiciel soit inférieur ou égal à 20% et le temps de montée inférieur ou égal à 0,6s.

- Détermination de la position des pôles de la boucle fermée sur base des spécifications :

Sur base des relations établies précédemment, on trouve que les spécifications demandées impliquent que

$$\zeta \geq 0,5 \qquad \omega_n \cong \frac{1,8}{0,6} = 3 \frac{rad}{s}$$

En reprenant la relation qui caractérise un système du second ordre  $p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2$ , on trouve que les pôles de la boucle fermée devront se situer en

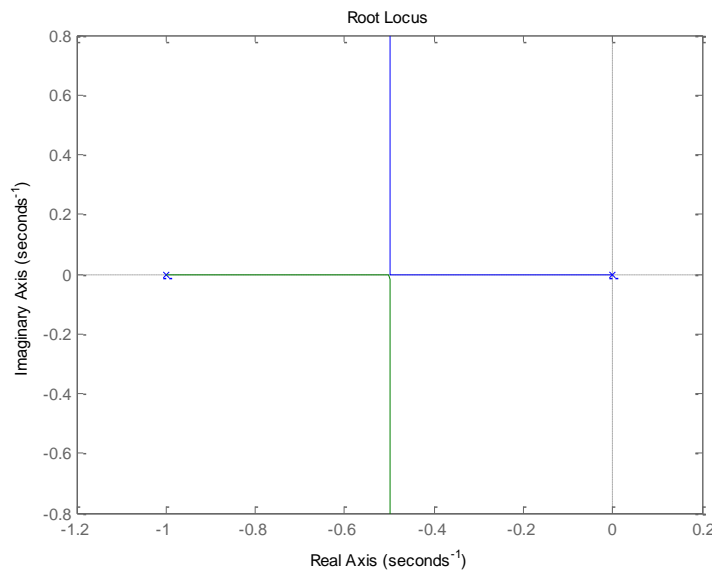
$$p = -1,5 \pm j 2,5981$$

- Ces pôles peuvent-ils être atteints avec un régulateur proportionnel ?

Si on prend un régulateur proportionnel de gain  $k_p$ , on aura

$$KL(p) = \frac{10k_p}{p(p+1)} \quad \Rightarrow \quad L(p) = \frac{1}{p(p+1)} \quad K = 10k_p$$

Le lieu d'Evans est le suivant



On voit qu'en faisant varier le gain du régulateur, on n'atteindra jamais les pôles  $p = -1,5 \pm j 2,5981$ . Donc, utiliser un régulateur proportionnel ne nous permet pas de remplir nos objectifs. Nos pôles souhaités étant à gauche du lieu obtenu avec un régulateur P, on doit attirer le lieu vers la gauche, c'est-à-dire utiliser un régulateur à avance de phase.

- Quel est l'angle requis pour atteindre ces pôles ? Que valent  $p_c, z_c$  ?

On sait que

$$\arg L(p) = \arg D(p)G(p) = \arg G(p) + \arg D(p) = 180^\circ(2l + 1)$$

Donc, en  $p = -1,5 \pm j 2,5981$ , on a

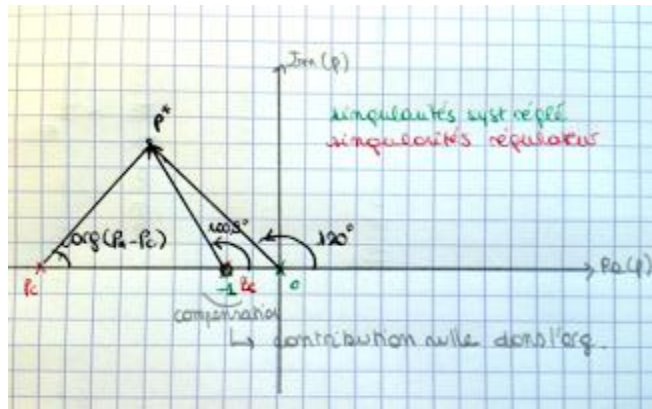
$$\begin{aligned} \arg(D(p))|_{p=-1,5 \pm j 2,5981} &= 180 - \arg(G(p))|_{p=-1,5 \pm j 2,5981} \\ &= 180 + \arg(p)|_{p=-1,5 \pm j 2,5981} + \arg(p+1)|_{p=-1,5 \pm j 2,5981} \\ &= 180 + 120 + 100,894 = 400,894 = 40,894^\circ \end{aligned}$$

Pour atteindre les pôles  $p = -1,5 \pm j 2,5981$ , l'angle doit être de  $40,894^\circ$ . Comment déterminer  $p_c, z_c$  ? Il n'y a pas qu'une possibilité mais on va aller vers la simplicité.



Le plus facile est de simplifier le pôle stable du système réglé par le zéro du régulateur. On va donc choisir  $z_c = -1$ . Cette simplification est autorisée comme on l'a vu précédemment et donc la perte d'observabilité due à cette simplification n'aura pas de conséquence.

Pour déterminer la valeur de  $p_c$ , on utilise le principe de l'argument :



La contribution du zéro sera nulle du fait de la compensation. En appliquant le critère de l'argument on trouve  $p_c = 3$ .

#### - Détermination du gain du régulateur

On utilise le critère du module,

$$K = 10 k_c = \frac{1}{|L(p)|} = |p(p+3)| \Rightarrow k_c = \left| \frac{p(p+3)}{10} \right|_{p=-1,5 \pm j 2,5981} = 0,9$$

On a donc notre régulateur

$$D(p) = 0,9 \frac{p+1}{p+3}$$

### 8.3.2 Conception d'un régulateur à retard de phase

Lorsque le système possède une réponse dont le transitoire est satisfaisant mais dont les propriétés à l'équilibre ne le sont pas on utilisera un régulateur à retard de phase. On veut améliorer le gain du système sans modifier significativement le lieu d'Evans au voisinage des pôles dominants (pôles qui caractérisent le transitoire, je suppose).

Donc, on veut concevoir un correcteur donc la contribution angulaire est faible au voisinage des pôles dominants. Pour cela, on va placer le pôle et le zéro du correcteur proches l'un de l'autre et proche de l'origine du plan complexe.

Si  $p_1$  est un pôle dominant, alors on veut que

$$|D(p_1)| = \left| k_c \frac{p_1 + z_c}{p_1 + p_c} \right| \cong k_c$$

On choisira  $k_c$  proche de 1 pour ne pas affecter significativement la réponse transitoire. On veut que le gain statique augmente, c'est-à-dire que

$$D(0) = \frac{z_c}{p_c}$$

Doit être suffisamment grand pour corriger l'erreur statique. Enfin, comme la contribution angulaire au voisinage du pôle dominant doit être faible, on impose que

$$-5^\circ < \arg \frac{p_1 + z_c}{p_1 + p_c} < 0^\circ$$

La marche à suivre pour concevoir un régulateur à retard de phase est la suivante :

- 1) Tracer le lieu d'Evans de  $G(p)$  et localiser les pôles dominants sur base des spécifications.
- 2) Evaluer la constante d'erreur statique d'intérêt pour le problème et déterminer le facteur par lequel il faut augmenter cette constante pour vérifier les spécifications.
- 3) Déterminer  $p_c, z_c$  pour atteindre le gain statique du correcteur requis sans modifier de façon significative le lieu d'Evans au voisinage des pôles dominants.
- 4) Tracer le lieu d'Evans obtenu avec le correcteur et ajuster le gain  $k_c$  si besoin.

Illustrons cela au moyen d'un exemple.

Soit le système décrit par

$$G(p) = \frac{1,06}{p(p+1)(p+2)}.$$

Placé dans une boucle à rétroaction unitaire avec un régulateur proportionnel de unitaire, la boucle fermée donne une réponse transitoire satisfaisante, mais la constante d'erreur de vitesse est trop faible  $K_v = 0,53 \text{ s}^{-1}$ . On souhaite obtenir une réponse transitoire similaire mais avec une constante d'erreur  $K_v = 5 \text{ s}^{-1}$ . Pour rappel,  $e_s = \frac{1}{K_v}$ .

- Localiser les pôles dominants

Sur base de la fonction de transfert on trouve que les pôles dominants sont

$$p = -0,3307 \pm j 0,5864$$

On trouve grâce à ces pôles

$$\zeta = 0,491 \quad \omega_n = 0,673 \text{ s}^{-1}$$

- Détermination de  $p_c, z_c$

Comme la constante d'erreur doit être multipliée par un facteur 10, on va prendre

$$D(0) = \frac{z_c}{p_c} = 10 \Rightarrow z_c = 0,05, \quad p_c = 0,005$$

On les choisit beaucoup plus proches de l'axe imaginaire que les pôles dominants. La contribution angulaire au voisinage des pôles dominants est satisfaisante :

$$\arg(p_1 + 0,05) - \arg(p_1 + 0,005) = -3,47^\circ$$

- Détermination du gain du régulateur

Avec le régulateur, on obtient pour la boucle ouverte

$$KL(p) = D(p)G(p) = \frac{k_c 1,06(p + 0,05)}{p(p+1)(p+2)(p+0,005)} \Rightarrow K = 1,06 k_c$$

Les nouveaux pôles dominants (si on conserve le même facteur d'amortissement) de la boucle ouverte sont donc

$$p = -0,31 \pm j 0,55$$

On voit que le régulateur n'a pas fort modifié les pôles dominants, ce qu'on voulait. Avec le critère du module, on peut calculer  $K$  et donc trouver  $k_c$

$$K = \left| \frac{p(p+1)(p+2)(p+0,005)}{(p+0,05)} \right|_{p=-0,31 \pm j 0,55} = 1,024 \Rightarrow k_c = 0,966$$

Notre régulateur est donc modélisé par

$$D(p) = 0,966 \frac{p+0,05}{p+0,005}$$

La nouvelle constante d'erreur est donc

$$K_v = \lim_{p \rightarrow 0} p D(p) G(p) = 5,12 \text{ s}^{-1}$$

### 8.3.3 Effet d'une erreur sur le gain du système réglé – marge de gain

La **marge de gain** est le facteur maximum et/ou minimum par lequel on peut modifier le gain du système réglé (ou de la boucle ouverte) sans perdre la stabilité de la boucle fermée.

Voir exemple d'illustration dans les slides.

## 9. MÉTHODES HARMONIQUES

Il s'agit ici d'étudier une deuxième approche permettant de concevoir les régulateurs. Elle est basée sur la réponse harmonique du système et a pour avantage que l'on peut déterminer expérimentalement la fonction de transfert du système. On va revoir le tracé asymptotique des courbes de Bode puis on verra comment étudier la stabilité des boucles fermées grâce aux méthodes harmoniques. Enfin, on verra comment concevoir des régulateurs sur base de ces méthodes.

### 9.1 Réponse harmonique

#### 9.1.1 Réponse d'un SLP à une entrée sinusoïdale

On a déjà vu précédemment et au cours d'analyse complexe que la réponse d'un SLP stable caractérisé par une transmittance isochrone  $H(j\omega)$  à une entrée sinusoïdale est également un signal sinusoïdal.

$$u(t) = A \sin \omega_0 t \quad \Rightarrow \quad y(t) = A|H(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg(H(j\omega_0)))$$

#### Démonstration

On va supposer que notre sinusoïde est appliquée à l'instant  $t = 0$ , c'est-à-dire

$$u(t) = A \sin \omega_0 t \quad v(t) \Rightarrow U(p) = \frac{A \omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

La réponse du système est donc

$$Y(p) = H(p)U(p) = H(p) \frac{A \omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

On va supposer pour la simplicité que  $H(p)$  possède  $n$  pôles simples. On peut donc décomposer  $H(p)$  en fraction simple et, par conséquent, on peut également décomposer  $Y(p)$ . On obtient

$$Y(p) = \frac{\alpha_1}{p - p_1} + \frac{\alpha_2}{p - p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{p - p_n} + \frac{\alpha_0}{p + j\omega_0} + \frac{\tilde{\alpha}_0}{p - j\omega_0}$$

Pour que le transitoire s'évanouisse, le système doit être stable. On l'avait déjà supposé puisque la transmittance isochrone d'un système n'existe que s'il est stable. Donc, tous les pôles de la fonction de transfert sont à partie réelle négative. Par application de la transformée de Laplace inverse, on a

$$y(t) = \alpha_1 e^{p_1 t} + \dots + \alpha_n e^{p_n t} + \alpha_0 e^{-j\omega_0 t} + \tilde{\alpha}_0 e^{j\omega_0 t}$$

Tous les termes  $e^{p_i t}$  vont tendre vers zéro en régime. Pour déterminer  $\alpha_0$  et  $\tilde{\alpha}_0$  on fait comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= H(p) \frac{A \omega_0}{p^2 + \omega_0^2} (p + j\omega_0) \Big|_{p = -j\omega_0} \\ &= - \frac{A H(-j\omega_0)}{2j} = - \frac{A |H(j\omega_0)|}{2j} e^{-j \arg(H(j\omega_0))} \\ \tilde{\alpha}_0 &= \frac{A |H(j\omega_0)|}{2j} e^{j \arg(H(j\omega_0))} \end{aligned}$$

Et finalement après évanouissement du transitoire, il reste

$$y(t) = A|H(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg(H(j\omega_0))) \text{ CQFD}$$

### 9.1.2 Courbes de Bode

Lorsque l'on trace une **courbe de Bode**, on porte en graphique le module de la transmittance isochrone (gain du système) exprimé en décibels ( $20 \log_{10}|H(j\omega)|$ ) en fonction de  $\omega$  (en échelle logarithmique). On porte sur un autre graphique l'argument de  $H(j\omega)$  en fonction de  $\omega$  en échelle logarithmique. **Il y a donc deux graphes à tracer quand on parle de courbe de Bode.**

L'avantage de travailler avec des courbes de Bode est que l'on peut représenter le comportement du système dans une large gamme de pulsations. De plus, les courbes de Bode de systèmes en série d'additionnent.

### 9.2 Tracé asymptotique des courbes de Bode

On doit pouvoir tracer facilement les courbes de Bode, c'est pourquoi on étudie des méthodes pour les esquisser.

On va représenter notre fonction de transfert par

$$H(p) = A_0 \frac{(pT_{z_1} + 1) \dots (pT_{z_m} + 1)}{(pT_{p_1} + 1) \dots (pT_{p_n} + 1)}$$

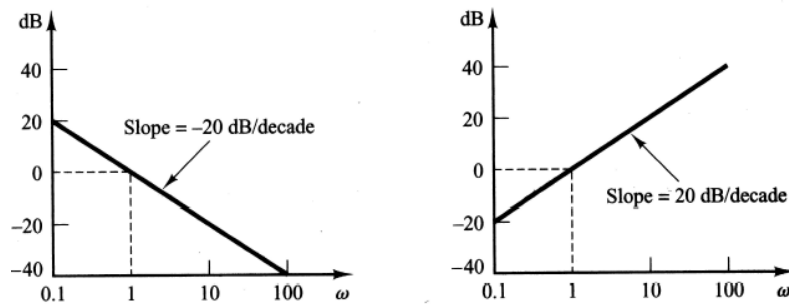
Où  $A_0$  est le gain statique de la fonction de transfert et  $T_{p_i}, T_{z_i}$  sont des constantes de temps du système.

#### 9.2.1 Facteur $A_0(j\omega)^k$

D'un point de vue gain, on a

$$20 \log|A_0(j\omega)^k| = 20 \log|A_0| + 20k \log|\omega|$$

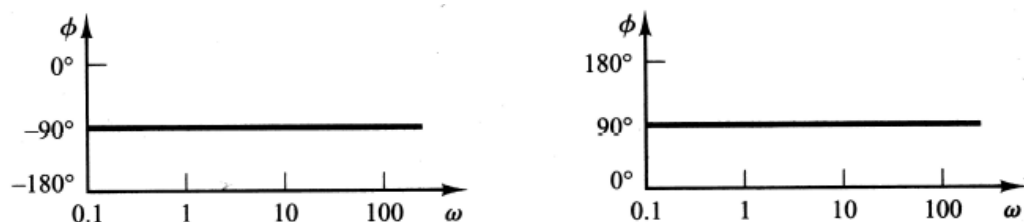
On a une droite de pente  $20k \text{ dB/decade}$  passant par le point  $(1, 20 \log|A_0|)$ . Sur les graphes ci-dessous, on représente le gain quand  $k = \pm 1$ . On voit qu'on passe toujours par le point  $(1, 20 \log|A_0|)$ .



Pour l'argument, on a

$$\begin{aligned} \arg(A_0(j\omega)^k) &= k90^\circ & \text{si } A_0 > 0 \\ &= -108^\circ + k90^\circ & \text{si } A_0 < 0 \end{aligned}$$

Les graphes correspondant à  $k = \pm 1$  sont les suivants.



### 9.2.2 Facteur du premier ordre ( $1 + j\omega T$ )

Le gain est donné par

$$20 \log|1 + j\omega T| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

On approche en faisant

$$\omega T \ll 1 : 1 + \omega^2 T^2 \cong 1$$

$$\omega T \gg 1 : 1 + \omega^2 T^2 \cong \omega^2 T^2$$

Donc, pour  $\omega T \ll 1$ , le gain est proche de 0, et pour  $\omega T \gg 1$ , le gain est proche de  $20 \log T + 20 \log \omega$ . Le point d'intersection des asymptotes (point où le changement de pente s'effectue) est en  $\omega = \frac{1}{T}$ .

Pour l'argument, on a

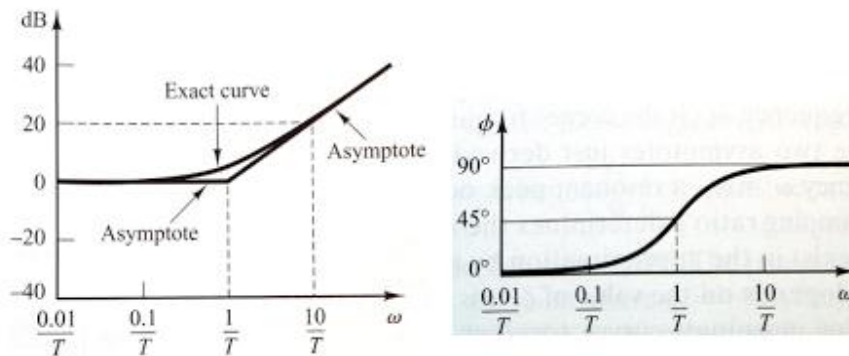
$$\arg(1 + j\omega T) = \arctg \omega T$$

On approche en faisant

$$\omega T \ll 1 : \arg(1 + j\omega T) \cong 0^\circ$$

$$\omega T \gg 1 : \arg(1 + j\omega T) \cong 90^\circ$$

Le saut de  $0^\circ$  à  $90^\circ$  se fait en  $\omega = \frac{1}{T}$ .



On fait le même genre de raisonnement si le facteur se trouve au dénominateur.

### 9.2.3 Facteur du second ordre ( $1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2$ )

Le gain est donné par

$$20 \log \left| 1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 \right| = 20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Pour

$$\omega \ll \omega_n : \text{Gain} \cong 20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

$$\omega \gg \omega_n : \text{Gain} \cong 40 \log \omega - 40 \log \omega_n$$

Le point d'intersection des asymptotes est toujours donné par le module de la singularité (zéro ou pôle). Ici, les zéros valent

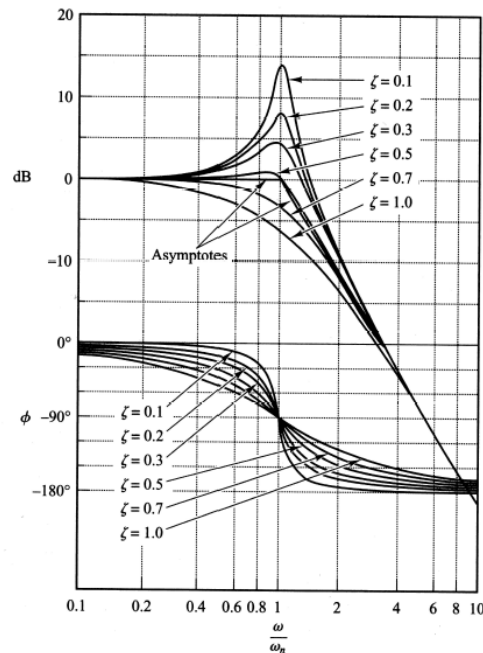
$$z_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Le module vaut  $\omega_n$  et donc le point d'intersection des asymptotes se trouve en  $\omega = \omega_n$

Lorsque que le facteur se trouve au dénominateur, seuls les signes changent.

#### 9.2.4 Lien entre le facteur d'amortissement et le pic de résonance

Lorsque l'on étudie le facteur du deuxième ordre au dénominateur, on obtient les courbes suivantes en fonction de la valeur du facteur d'amortissement.



Certaines courbes présentent un dépassement harmonique (pic de résonance) plus ou moins important en fonction de la valeur du facteur d'amortissement. On voit que pour  $\zeta \geq 0,7$  il n'y a plus de dépassement harmonique. En effet, si on caractérise le maximum obtenu pour ce réponses harmoniques, il suffit de prendre la dérivée du module de  $H(j\omega) = \frac{1}{1+2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n}+(\frac{j\omega}{\omega_n})^2}$  et de l'annuler. On trouve que le maximum se situe en

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$$

On voit bien que le pic de résonance est dépendant du facteur d'amortissement.

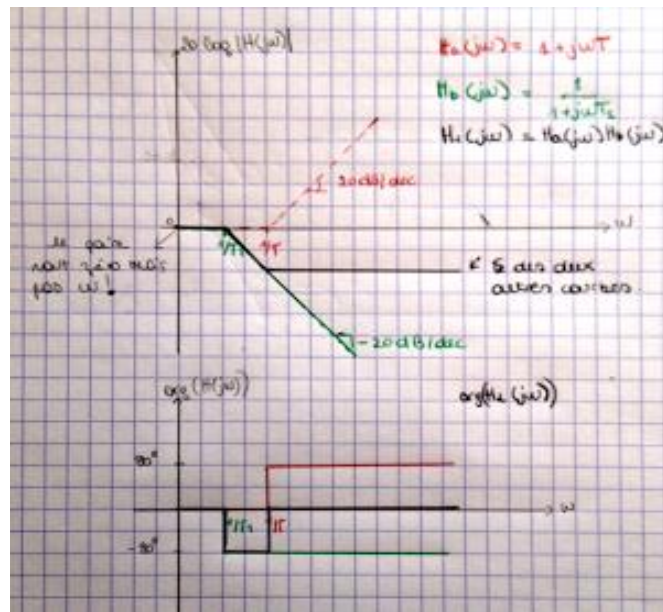
#### 9.2.5 Système à déphasage non minimal

On va voir comment tracer les courbes de Bode sur des exemples.

On considère

$$H_1(p) = \frac{1+j\omega T}{1+j\omega T_1} \quad 0 < T < T_1$$

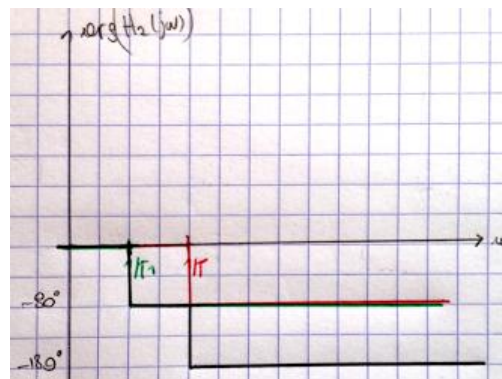
On peut voir  $H_1(p)$  comme la mise en série de  $1+j\omega T$  avec  $\frac{1}{1+j\omega T_1}$  et on a vu que pour des systèmes en série, les courbes de Bode s'additionnent.



Si on considère maintenant

$$H_2(p) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T_1} \quad 0 < T < T_1$$

Le graphe du gain sera le même mais celui de l'argument va changer car le zéro est dans le demi plan droit. Le système est dit **à déphasage non minimal**.



Un système **à déphasage minimal** produit le plus petit déphasage entre l'entrée et la sortie.

#### 9.2.6 En résumé

Pôle	Changement de pente (gain)	Discontinuité (déphasage)
pôle réel d'ordre $\ell$ à partie réelle $< 0$	$-\ell \ 20dB/dec$	$-\ell \ 90^\circ$
pôles complexes conjugués d'ordre $\ell$ à partie réelle $< 0$	$-\ell \ 40dB/dec$	$-\ell \ 180^\circ$
pôle réel d'ordre $\ell$ à partie réelle $> 0$	$-\ell \ 20dB/dec$	$\ell \ 90^\circ$
pôles complexes conjugués d'ordre $\ell$ à partie réelle $> 0$	$-\ell \ 40dB/dec$	$\ell \ 180^\circ$



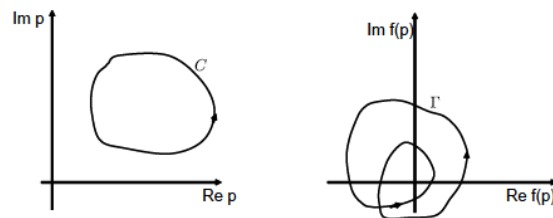
Zéro	Changement de pente (gain)	Discontinuité (déphasage)
zéro réel d'ordre $\ell$ à partie réelle $< 0$	$\ell \ 20dB/dec$	$\ell \ 90^\circ$
zéros complexes conjugués d'ordre $\ell$ à partie réelle $< 0$	$\ell \ 40dB/dec$	$\ell \ 180^\circ$
zéros réel d'ordre $\ell$ à partie réelle $> 0$	$\ell \ 20dB/dec$	$-\ell \ 90^\circ$
zéros complexes conjugués d'ordre $\ell$ à partie réelle $> 0$	$\ell \ 40dB/dec$	$-\ell \ 180^\circ$

### 9.3 Stabilité d'une boucle fermée – méthodes harmoniques

Les courbes de Bode sont un type de représentation harmonique du système. Il y en a un deuxième : les courbes de Nyquist.

#### 9.3.1 Prérequis : Principe de l'argument

On considère une fonction  $f$  analytique dans  $D$ , domaine intérieur à  $C$  (chemin admissible simple fermé orienté dans le sens positif) sauf aux pôles dans  $D$ . En outre,  $f$  est analytique et non nulle sur  $C$ . Soit  $\Gamma$  l'image de  $C$  par la fonction  $f$ .



Le nombre  $N_E$  d'encerclements de l'origine par le chemin  $\Gamma$  est donné par

$$N_E = Z$$

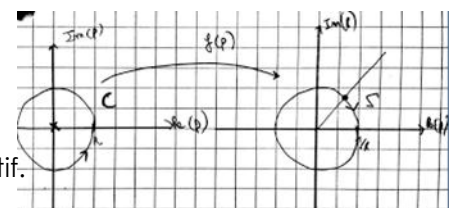
Où  $Z$  et  $P$  sont respectivement le nombre de zéros et de pôles de  $f(p)$  à l'intérieur du chemin  $C$  (multiplicité prise en compte).

#### Exemple

On considère le chemin  $C$  : cercle centré en 0 de rayon  $R$  orienté dans le sens positif. Une paramétrisation est  $p = Re^{i\theta}$   $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . La fonction que l'on considère est  $f(p) = \frac{1}{p}$ . Si on prend l'image du chemin  $C$  par  $f$  on obtient

$$\Gamma \equiv f(Re^{i\theta}) = \frac{1}{R} e^{-i\theta}$$

Il s'agit d'un cercle centré en 0 de rayon  $1/R$  et orienté dans le sens négatif.



Le nombre d'encerclements de l'origine vaut  $-1$  car le cercle est orienté dans le sens opposé à celui de  $C$ . On vérifie en effet que  $Z - P = 0 - 1 = -1$ .

### 9.3.2 Critère de stabilité de Nyquist

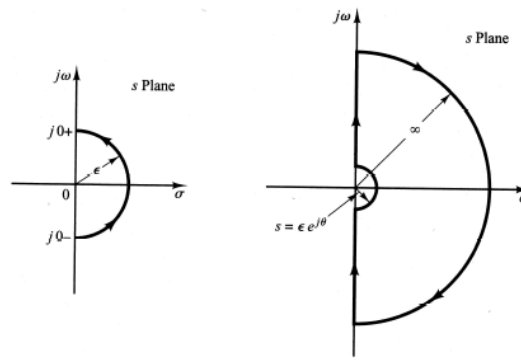
On considère la fonction de transfert d'une boucle fermée

$$\frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{D(p)G(p)}{1 + D(p)G(p)H(p)}$$

On va appliquer le principe de l'argument au contour  $C$  ci-dessous (contour de Nyquist) et pour la fonction  $f(p)$ , on prend

$$f(p) = 1 + D(p)G(p)H(p) = 1 + \frac{n_D n_G n_H}{d_D d_G d_H} = \frac{d_D d_G d_H + n_D n_G n_H}{d_D d_G d_H}$$

Cette fonction est le dénominateur de la fonction de transfert de la boucle fermée, donc les zéros de  $f(p)$  sont les pôles de boucle fermée. Les pôles de  $f(p)$  sont les pôles de la boucle ouverte  $D(p)G(p)H(p)$ .



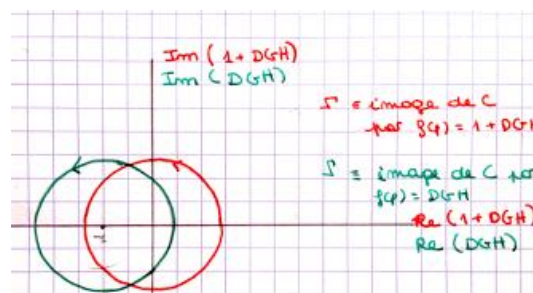
Le contour de Nyquist parcourt tout l'axe imaginaire. S'il y a des singularités, il les contourne. Il se referme par un demi cercle à l'infini. Ce chemin englobe tout le demi-plan droit, c'est-à-dire toute la partie instable du système. Si on a des pôles dans ce contour, on a un système instable. On va le transformer par la fonction  $f(p)$ .

On applique le principe de l'argument : soit  $\Gamma$  l'image du contour de Nyquist par  $f(p)$ . Par application du principe de l'argument, on sait que :

$$\begin{aligned} \# \text{ encerclements de l'origine par } \Gamma &= \# \text{ zéros de } f(p) \text{ dans } C - \# \text{ pôles de } f(p) \text{ dans } C \\ &= \# \text{ de pôles de la BF dans le demi plan droit} \\ &\quad - \# \text{ de pôles de la BO dans le demi plan droit} \end{aligned}$$

Le nombre d'encerclements est compté positivement si l'orientation de  $\Gamma$  est la même que celle de  $C$ .

La figure suivante représente un chemin  $\Gamma$ , l'image du chemin de Nyquist par  $f(p) = 1 + D(p)G(p)H(p)$ .



On remarque que le nombre d'encerclements de l'origine par  $\Gamma$  est égal au nombre d'encerclements du point  $(-1, 0)$  par le chemin  $\Gamma$  obtenu en prenant l'image du chemin de Nyquist par la fonction  $f(p) = D(p)G(p)H(p)$ . On a donc juste translaté le premier d'une unité. On notera désormais  $\Gamma_{bo}$  l'image du chemin de Nyquist par  $f_{bo}(p) = D(p)G(p)H(p)$  et on l'appellera courbe de Nyquist complète.

Le critère de Nyquist s'énonce donc :

Le nombre d'encerclements du point  $(-1,0)$  par la courbe de Nyquist complète est donné par le nombre de pôles de la boucle fermée dans le demi plan droit moins le nombre de pôles de la boucle ouverte dans le demi plan droit.

Sur base unique d'informations sur la boucle ouverte, on va pouvoir trouver des informations sur la stabilité de la boucle fermée.

### 9.3.3 Esquisse de la courbe de Nyquist complète

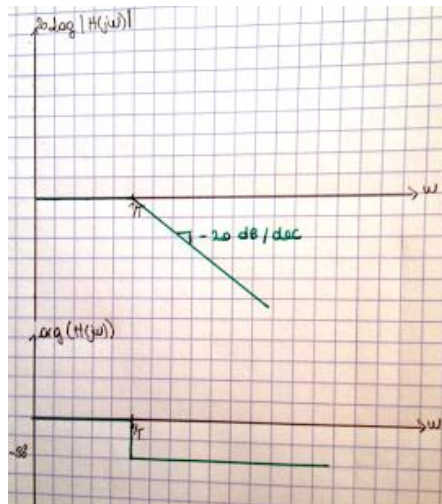
On va voir que pour dessiner la courbe de Nyquist complète, peu de calculs sont nécessaires si on utilise les courbes de Bode.

#### 9.3.3.1 Système du premier ordre

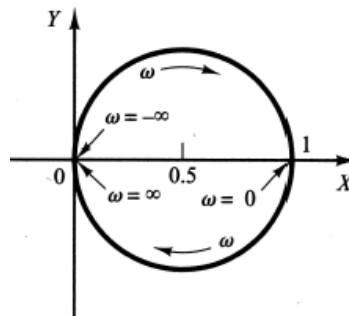
On considère une transmittance isochrone

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{1+\omega^2 T^2} + j \frac{-\omega T}{1+\omega^2 T^2}$$

On trace les courbes de Bode associées à cette transmittance.



Pour tracer la courbe de Nyquist complète, on trace la partie imaginaire de la transmittance en fonction de la partie réelle.

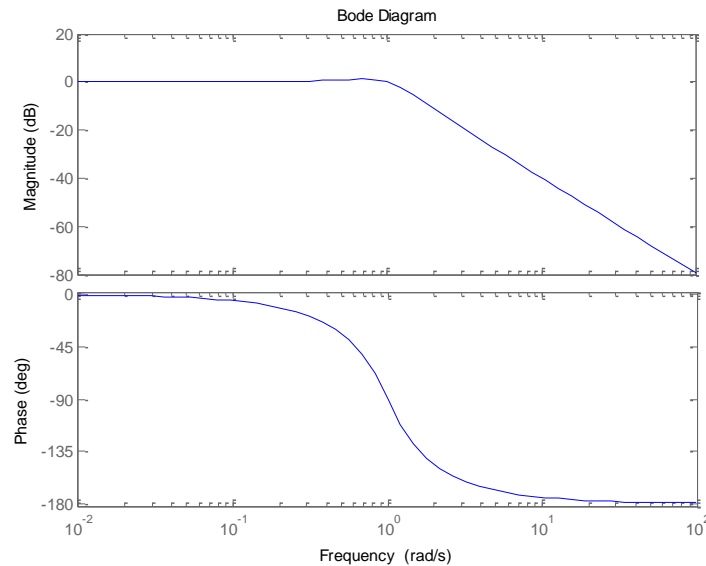


### 9.3.3.2 Système du second ordre

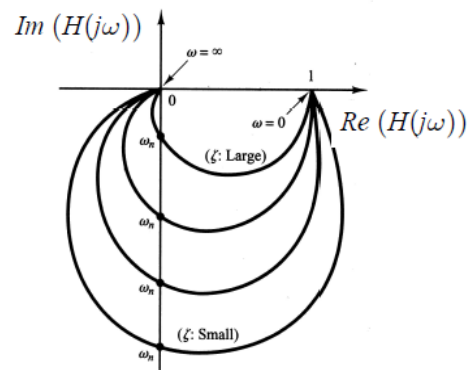
On considère

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Les courbes de Bode associées sont



On peut en déduire la courbe de Nyquist complète (ici la partie négative n'est pas représentée):



### 9.3.3.3 Boucle ouverte avec ou sans pôle(s) à l'origine

On dira que le système est

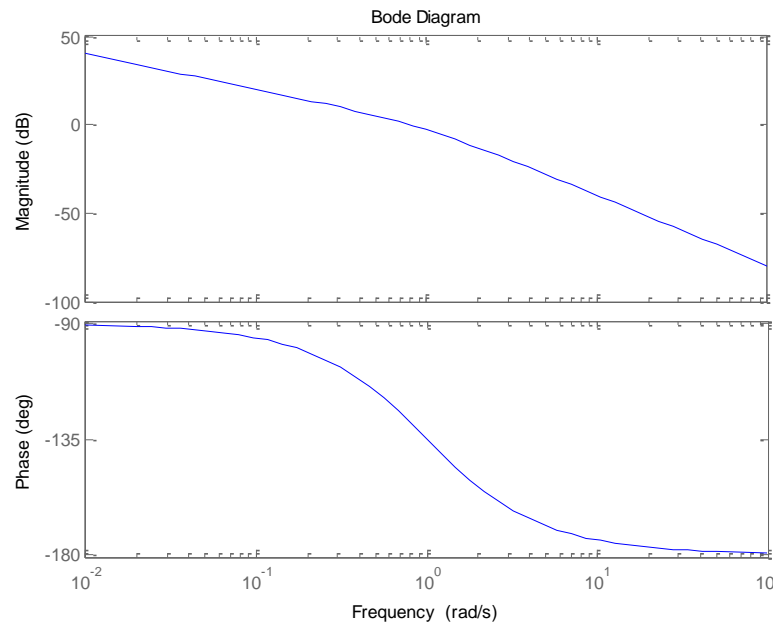
- **De type 0** vis-à-vis de la référence (pas de pôle à l'origine) si le point de départ de la courbe de Nyquist est sur l'axe réel positif ou négatif.
- **De type 1** vis-à-vis de la référence (1 pôle à l'origine) si le point de départ de la courbe de Nyquist ( $\omega = 0$ ) correspond à un point dont la partie réelle est finie et la partie imaginaire infinie.

### 9.3.3.4 Système de type 1

La fonction de transfert d'un système de type 1 a pour forme

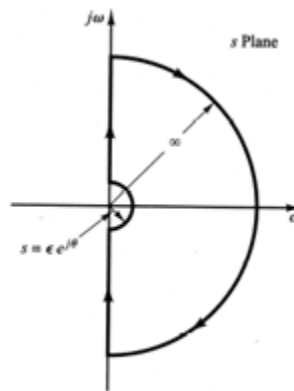
$$D(p)G(p) = \frac{A_0}{p(pT + 1)}$$

Les courbes de Bode sont



Sur base des courbes de Bode, on peut déjà dire que pour les basses fréquences, le gain tend vers l'infini avec un angle de  $-90^\circ$ , ce qui correspond à une parallèle à l'axe imaginaire (l'asymptote). On voit que le gain ne fait que diminuer et qu'on termine tangent à l'axe réel puisque on tend vers un angle de  $-180^\circ$ .

Comme il y a un pôle en l'origine, le contour de Nyquist utilisé est le suivant

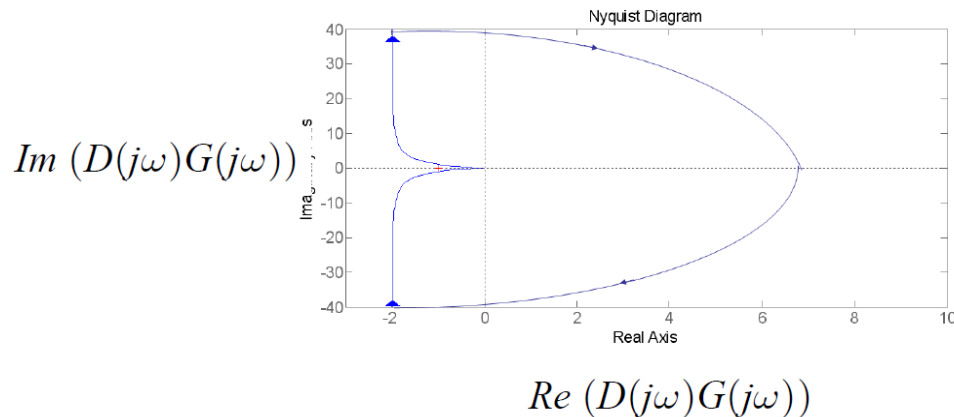


On contourne le pôle par un demi cercle de rayon  $\varepsilon$  que l'on va faire tendre vers 0. On va voir qu'elle est image de ce petit demi cercle par la fonction de transfert. On pose  $p = \varepsilon e^{j\theta} - 90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ , on a alors que l'image de ce petit contour est

$$\frac{A_0}{\varepsilon} e^{-j\theta}$$

Comme on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0,  $\frac{A_0}{\varepsilon}$  tend vers l'infini. On voit donc que pour  $\theta = -90^\circ$ , on est envoyé à l'infini à  $90^\circ$ , puisque les signes moins s'annulent. Si on fait le raisonnement pour tous les angles  $\theta$ , on voit que l'image de ce petit contour par la fonction de transfert est le demi cercle infini dans le demi plan droit.

On peut calculer l'asymptote en réécrivant la fonction de transfert comme sa partie réelle plus sa partie imaginaire et en faisant tendre  $\omega$  vers zéro. On a une asymptote en  $-T$ . On obtient donc la courbe de Nyquist suivante



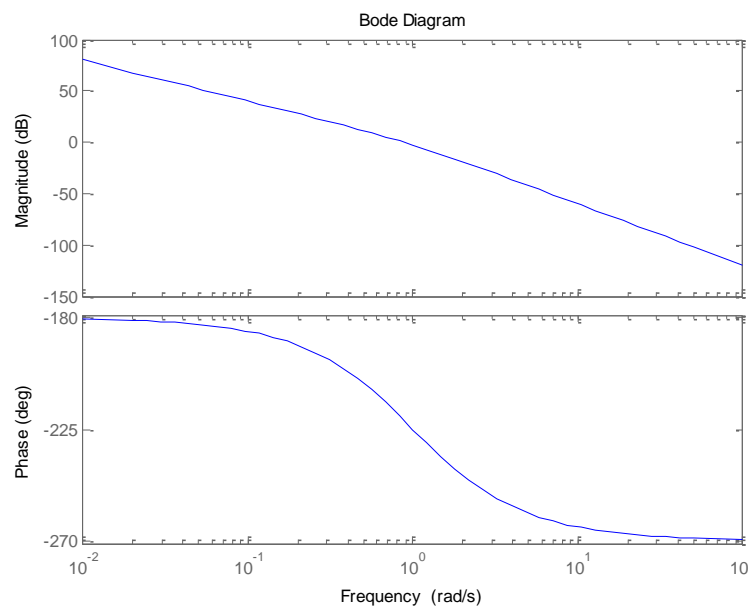
En utilisant le critère de Nyquist, on voit que la boucle fermée sera stable. En effet, on n'a pas d'encerclement du point  $(-1,0)$ . Le nombre de pôles de la boucle ouverte dans le demi plan droit est de zéro et donc on en conclut que le nombre de pôles de la boucle fermée dans le demi plan droit est de zéro.

#### 9.3.3.5 Système de type 2

La fonction de transfert est de la forme

$$D(p)G(p) = \frac{A_0}{p^2(pT + 1)}$$

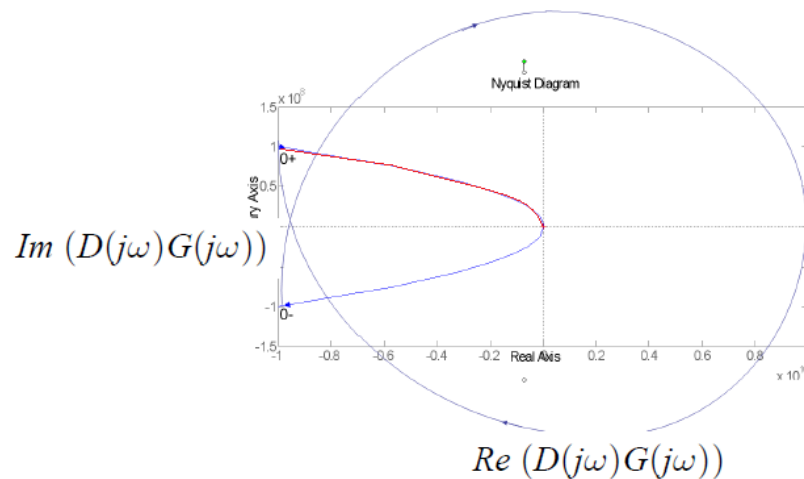
Les courbes de Bode sont



On voit que pour  $\omega = 0$ , on a un gain infini et un argument qui vaut  $-180^\circ$  et pour  $\omega$  tendant vers l'infini, on a un gain tendant vers 0. Donc, le diagramme de Nyquist, on peut déjà, rien qu'à partir des courbes de Bode déterminer la partie rouge (pas sûre du tout, faut demander Kinnaert de réexpliquer). Ensuite, la courbe doit se refermer, pour voir comment elle se referme, on étudie le petit contournement du pôle double en l'origine. L'image de ce petit demi-cercle par la fonction de transfert est

$$\frac{A_0}{\varepsilon^2} e^{-j2\theta}$$

Cela correspond au cercle de rayon infini parcouru dans le sens opposé à celui du petit contournement. On a donc



On voit ici que le nombre d'encerclement du point  $(-1,0)$  est de 2 et on n'a pas de pôles dans le demi plan droit pour la boucle ouverte donc cela veut dire qu'on aura deux pôles dans le demi plan droit en boucle fermée. Sur base uniquement de la fonction de transfert en boucle ouverte, on peut voir que la boucle fermée ne sera pas stable.

Si la boucle ouverte ne possède pas de pôles dans le demi plan droit, le critère de Nyquist devient : pour que la boucle fermée soit stable, il ne peut pas y avoir d'encerclement du point  $(-1,0)$ .

#### 9.3.4 Intervalle de valeurs du gain pour lequel la boucle fermée est stable

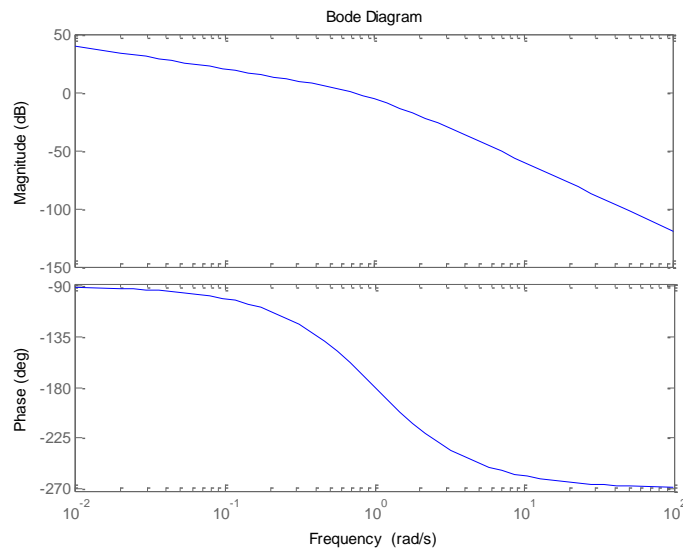
Grâce aux courbes de Nyquist, on peut déterminer un intervalle de gain (pour un régulateur proportionnel). Voyons cela au travers d'un exemple.

On considère le système réglé

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)^2}$$

Et un régulateur proportionnel  $D(p) = k_p$ .

On va commencer par tracer la courbe de Nyquist pour  $k_p = 1$ .

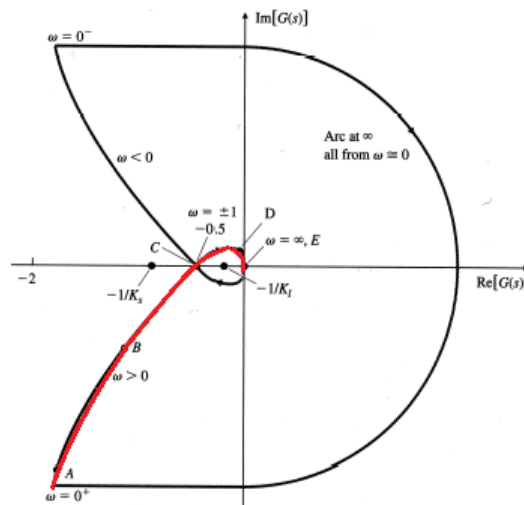


On voit sur base des courbes de Bode ci-dessous que lorsque  $\omega = 0$ , le gain est infini et l'argument vaut  $-90^\circ$ . Ensuite, lorsque  $\omega$  tend vers l'infini, le gain diminue et l'argument vaut  $-270^\circ$ . On obtiendra donc la partie rouge (je pense mais pas sure) sur le diagramme de Nyquist.

Si on calcule l'image du petit contournement de l'origine, on trouve qu'il s'agit du demi cercle de rayon infini.

On peut calculer l'intersection avec l'axe réel qui se fait en annulant la partie imaginaire de  $G(p)$  et calculer l'asymptote qui se fait en trouvant la valeur de  $\omega$  qui rend la partie imaginaire infinie.

La courbe de Nyquist est donc



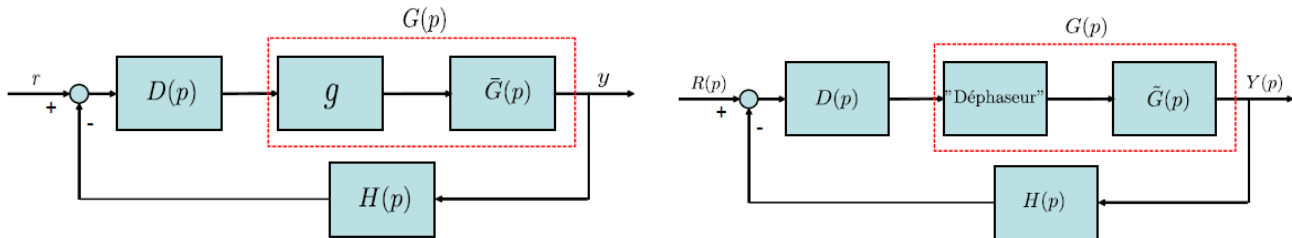
Comme notre boucle ouverte n'a pas de pôles dans le demi plan droit, la boucle fermée sera stable tant que la courbe de Nyquist n'encercle pas le point  $(-1,0)$ . On voit ici que comme l'intersection avec l'axe réel se fait en  $\omega = -\frac{1}{2}$ , la boucle fermée est stable pour un régulateur de gain 1. Si on considère que le gain est positif et qu'on l'augmente, on fait une homothétie de la courbe et donc le gain maximal sera  $k_p = 2$  (car  $-\frac{1}{2} * 2 = -1$ ). Donc si le gain est supérieur à deux, on encercle deux fois le point  $(-1,0)$  et la boucle fermée aura deux pôles instables. Si on prend un gain négatif, on retourne la courbe et on encercle alors d'office le point  $(-1,0)$  et la boucle fermée est d'office instable (un truc du genre).



### 9.3.5 Marges de stabilité

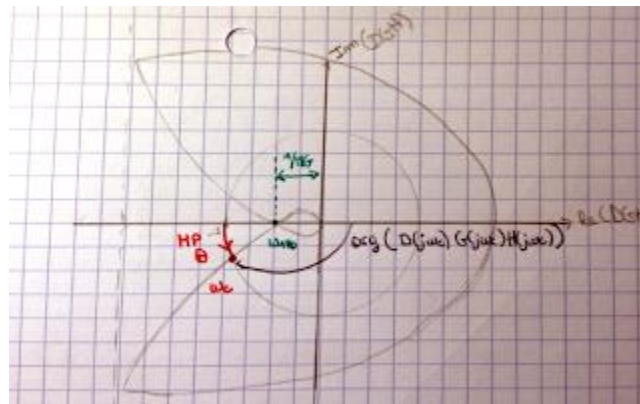
On définit la **marge de gain** par le facteur maximum et/ou minimum par lequel on peut modifier le gain ( $g$ ) du système réglé (ou de la boucle ouverte) sans perdre la stabilité de la boucle fermée.

On définit la **marge de phase** comme le retard de phase que l'on peut rajouter dans la boucle sans perdre la stabilité.



Pour visualiser la marge de gain et la marge de phase sur la courbe de Nyquist :

- La marge de gain est le rapport d'homothétie de centre (0,0) qui amène la courbe de Nyquist à passer par le point (-1,0) ;
- La marge de phase est l'angle de rotation qui amène le point de coupure de la courbe de Nyquist en (-1,0). Le point de coupure est le point pour lequel le module vaut 1, c'est-à-dire l'intersection de la courbe avec le cercle de rayon 1.



Mathématiquement, la marge de phase est définie par

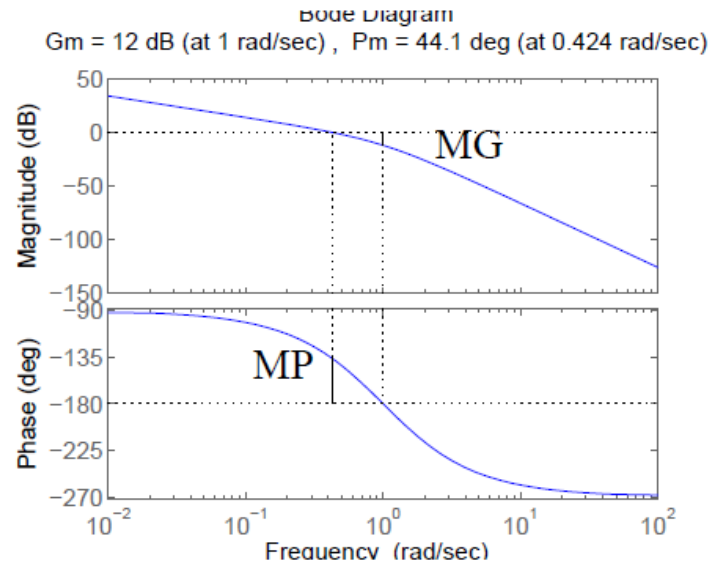
$$MG = -20 \log |D(j\omega_{180})G(j\omega_{180})|$$

Si  $MG < 0$ , le système est en général instable (pour un système ne possédant pas de pôle dans le demi plan droit en boucle ouverte).

La marge de phase est définie par

$$MP = 180^\circ + \arg(D(j\omega_c)G(j\omega_c))$$

On peut représenter la marge de phase et la marge de gain également sur les courbes de Bode :



Pour la marge de phase, on regarde ce que vaut le gain en  $-180^\circ$ . La marge de phase est le facteur par lequel on peut multiplier le gain pour avoir un gain unitaire, c'est-à-dire 0dB. On regarde donc simplement de combien on peut translater cette courbe avant que le point en  $\omega = 180^\circ$  soit à 0.

Pour la marge de gain, on repère le point de la pulsation de coupure, c'est-à-dire le point de gain unitaire (0dB). On regarde l'écart de phase par rapport à  $180^\circ$ .

### 9.3.6 Lien entre la marge de phase est le facteur d'amortissement

On considère une boucle ouvert caractérisée par

$$D(p)G(p) = \frac{\omega_n^2}{p(p + 2\zeta\omega_n)}$$

Pour calculer la marge de phase, on doit trouver la pulsation de coupure :

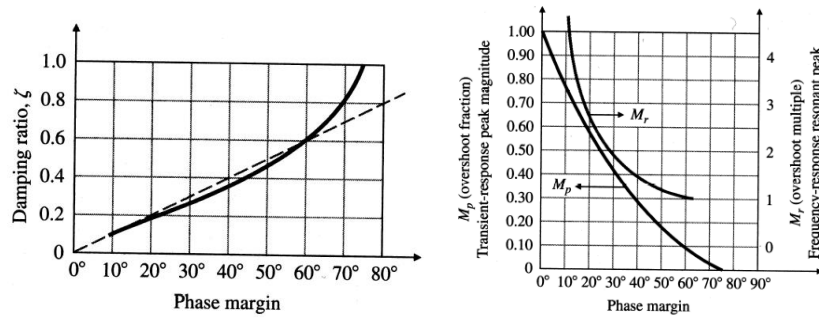
$$|D(j\omega_c)D(j\omega_c)| = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}$$

$$\arg(D(j\omega_c)D(j\omega_c)) = -\arg(j\omega_c) - \arg(j\omega_c + 2\zeta\omega_c)$$

La marge de phase vaut donc

$$MP = \arctg\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}}\right)$$

Pour les valeurs de  $\zeta \leq 0,6$ , on constate que cette relation est plus ou moins linéaire. Sachant qu'il y a un lien entre le facteur de d'amortissement et la marge de phase, on peut également faire un lien entre la marge de phase et le dépassement indiciel.



## 9.4 Conception d'un régulateur par les méthodes harmoniques

### 9.4.1 Théorème de Bode

Pour tout système stable et à déphasage minimal (c'est-à-dire sans zéro dans le demi plan droit), la phase de  $H(j\omega)$  et le gain de  $H(j\omega)$  sont liés de manière univoque par la relation suivante :

$$\arg(H(j\omega_0)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{dM}{du} \right) W(u) du \quad (rad)$$

Où  $M = \ln|H(ju)|$ ,  $u = \ln(\frac{\omega}{\omega_0})$ , et  $W(u) = \ln(\coth(\frac{|u|}{2}))$ .

On peut simplifier très fort ce théorème. En effet, on peut dire que  $\frac{dM}{du} \cong n$  la pente de la transmittance isochrone dans des échelles bilogarithmiques et  $W(u) \cong \frac{\pi^2}{2} \delta(u)$ . Donc, le théorème devient

$$\arg(H(j\omega_0)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n \frac{\pi^2}{2} \delta(u) du = \frac{\pi}{2} n = 90^\circ n$$

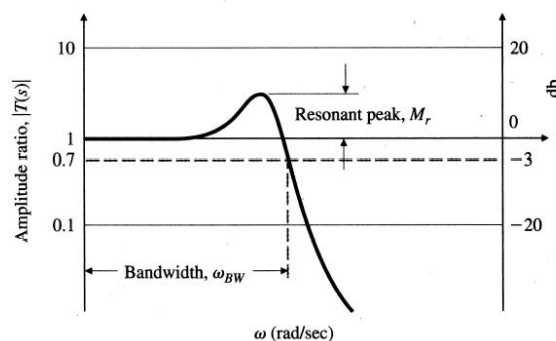
### 9.4.2 Formulation des problèmes de régulation dans le domaine harmonique

On considère la fonction de transfert d'une boucle fermée :

$$T(p) = \frac{D(p)G(p)}{1 + D(p)G(p)}$$

On aimerait avoir un suivi de trajectoire pour les basses fréquences, c'est-à-dire  $|T(j\omega)| \cong 1$  mais une atténuation du bruit de mesure pour les hautes fréquences c'est-à-dire  $|T(j\omega)| \ll 1$ .

Pour caractériser tout ça, on définit la **bande passante** comme l'intervalle des fréquences dans lequel le gain est supérieur à -3dB. La borne supérieure  $\omega_{BP}$  est la pulsation pour laquelle la sortie est atténuée de  $\sqrt{2} = 0,7$  par rapport à la référence, soit une atténuation de -3dB. Par abus de langage, cette pulsation est souvent appelée bande passante.



On peut voir ce que nos exigences deviennent pour la boucle ouverte. On va essayer de faire un lien entre la bande passante et la pulsation de coupure. On peut montrer que

$$\omega_c \leq \omega_{BP} \leq 2 \omega_c$$

#### 9.4.2.1 Spécifications

Lors de la conception d'un régulateur, on peut avoir des spécifications concernant

- 1) La bande passante de la BF (indications sur la fréquence de coupure pour la BO)
- 2) La marge de phase (ou dépassement indiciel)
- 3) La marge de gain
- 4) L'atténuation du bruit de mesure
- 5) Le type du système en BF vis-à-vis de la référence et des perturbations (borne supérieure de l'erreur statique vis-à-vis d'une entrée spécifiée).

Toutes ces spécifications impliquent certaines conditions sur la boucle ouverte.

Les critères 1 et 5 impliquent d'avoir un gain proche de 1 aux basses fréquences en BF, donc ça implique que

$$|D(j\omega)D(j\omega)| \gg 1$$

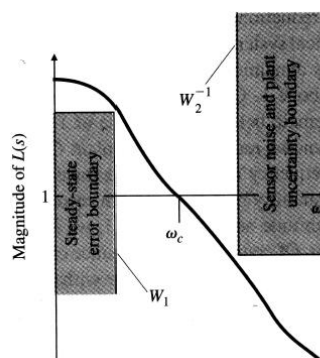
De sorte qu'aux basses fréquences, le module de la fonction de transfert en BF soit égal à 1.

Le deuxième critère implique en général que la pente de la courbe de Bode de la BO soit de -20dB/decade c'est-à-dire que la pente de  $|D(j\omega)D(j\omega)| \cong -1$  lorsqu'on est près de la pulsation de coupure.

Les critères 3 et 4 imposent que le gain de la boucle fermée aux hautes fréquences diminue rapidement c'est-à-dire que

$$|D(j\omega)D(j\omega)| \ll 1.$$

Toutes ces spécifications vont imposer une certaine forme à la courbe de Bode de la boucle ouverte qui peut être schématisée par



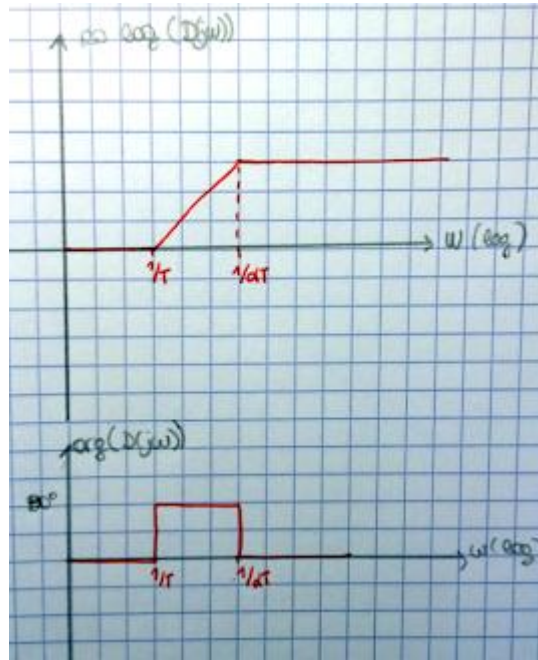
#### 9.4.3 Correcteur à avance de phase

Le but d'un correcteur à avance de phase est d'améliorer la réponse transitoire du système en augmentant la marge de phase. Il peut néanmoins accentuer le bruit de mesure aux hautes fréquences.

La fonction de transfert d'un correcteur à avance de phase est

$$D(p) = k_c \frac{1 + pT}{1 + pT\alpha} \quad \alpha < 1$$

Si on regarde les courbes de Bode associées à ce correcteur, on voit qu'effectivement, il porte bien son nom de correcteur à avance de phase.



On peut calculer l'endroit où cette avance de phase sera maximale. Il faut dériver l'argument de  $D(j\omega)$  et l'annuler.

On sait que

$$\arg D(j\omega) = \arg(1 + j\omega T) - \arg(1 + j\omega \alpha T) = \arctg(\omega T) - \arctg(\alpha \omega T)$$

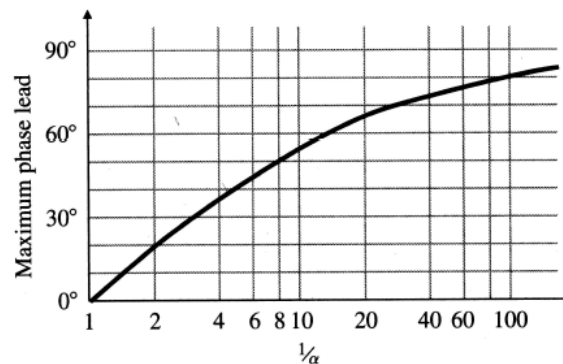
Si on calcule la dérivée, on a

$$\frac{d \arg D(j\omega)}{d\omega} = 0 \Rightarrow \frac{T}{1 + (\omega T)^2} - \frac{\alpha T}{1 + (\alpha \omega T)^2} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{T \sqrt{\alpha}}$$

Donc le déphasage maximal  $\phi_{max}$  est obtenu en  $\Rightarrow \omega_{max} = \frac{1}{T \sqrt{\alpha}}$ . Il s'agit d'une moyenne logarithmique entre  $\frac{1}{T}$  et  $\frac{1}{\alpha T}$ .

On peut étudier l'évolution de ce déphasage maximal en fonction de  $\alpha$ . Pour cela, on substitue la valeur de  $\omega_{max}$  dans l'argument de la transmittance isochrone et on prend la tangente des deux membres. On obtient

$$\operatorname{tg} \phi_{max} = \frac{1 - \alpha}{2\sqrt{\alpha}}$$



On voit qu'on peut atteindre une avance de phase de  $90^\circ$  mais en pratique le facteur  $1/\alpha$  est limité par l'atténuation du bruit de mesure et on ne dépassera pas un déphasage maximal de  $70^\circ$ .

Voyons au travers d'un exemple comment concevoir un correcteur à avance de phase.

Notre système réglé est

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)}$$

On souhaite que l'erreur statique vis-à-vis d'une entrée en rampe soit de 0,1 et que le dépassement indiciel soit inférieur à 25%.

- L'erreur statique

On calcule l'erreur statique :

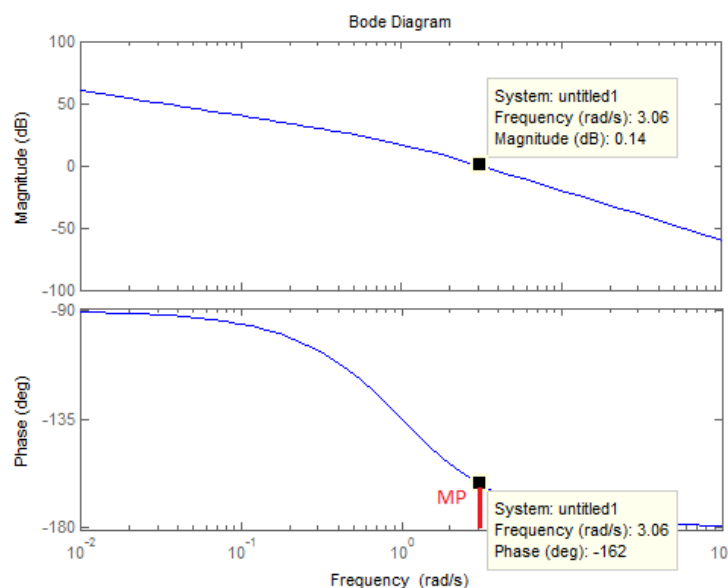
$$\begin{aligned} e_s &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + D(p)G(p)} R(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + k_c \frac{1+pT}{1+pT\alpha} \frac{1}{p(p+1)}} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{k_c} \end{aligned}$$

On en conclut que  $k_c \geq 10$ .

- Dépassement indiciel et marge de phase

Grace aux courbes établies liant le dépassement indiciel et la marge de phase, on trouve qu'à un dépassement indiciel de 25% correspond une marge de phase de  $45^\circ$ .

Si on avait voulu régler le système avec un régulateur proportionnel de gain 10, on aurait obtenu les courbes de Bode suivantes :



Pour voir la marge de phase sur ce diagramme on se met à la pulsation de coupure (obtenue quand on a 0 dB pour le gain) et on regarde l'écart avec l'horizontale  $-180^\circ$ . On voit qu'on aurait eu une marge de phase de  $20^\circ$ , ce qui est insuffisant étant donné que l'on attend une marge de phase de  $45^\circ$ .

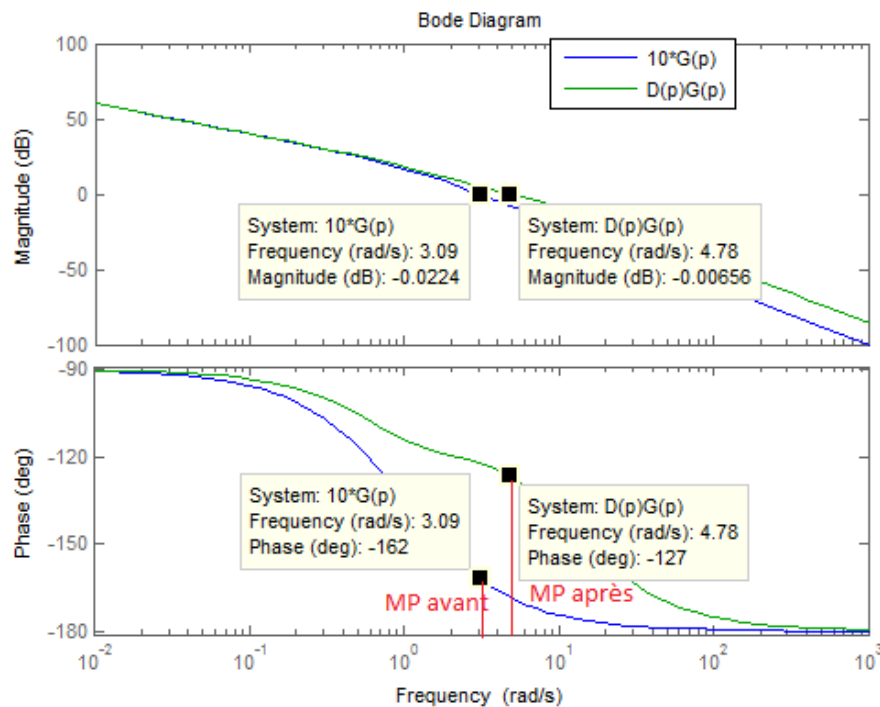
Pour augmenter cette marge de phase on utilise un correcteur à avance de phase. Il faut rajouter un déphasage de  $25^\circ$  à  $\omega_{max}$  si possible sans toucher à la pulsation de coupure. Le problème c'est que si on veut maintenir le gain qu'on a à basses fréquences, induire un déphasage de  $25^\circ$  provoque le déplacement de la pulsation de coupure vers la droite.

Ce qu'on fait alors c'est de choisir une avance de phase supérieure à  $25^\circ$ , par exemple  $\phi_{max} = 40^\circ$ . On trouve alors la valeur de  $\alpha$  correspondante :  $\frac{1}{\alpha} = 5$  d'après le graphe. On aura un bénéfice maximum si l'avance de phase maximale se produit à la pulsation de coupure, on détermine donc  $T$  de façon à avoir la même pulsation de coupure, on trouve  $T = 0,5$ .

Notre correcteur à avance de phase est donc

$$D(p) = 10 \frac{\frac{p}{2} + 1}{\frac{p}{10} + 1}$$

Sur le diagramme suivant, on voit la courbe de Bode en bleu pour le système réglé multiplié par un gain 10 tel que l'erreur statique sera satisfaisante (diagramme sur lequel on s'est basé pour trouver qu'il fallait une avance de phase d'au moins  $25^\circ$ ) et en vert pour la boucle fermée. On voit que la pulsation de coupure est faiblement modifiée et que la marge de phase est d'environ  $53^\circ$  (pas du tout sur que ce je dis ici est correct ...).



#### 9.4.4 Correcteur à retard de phase

Le correcteur à retard de phase permet d'approcher un régulateur PI. L'objectif d'un régulateur PI est d'annuler l'erreur statique. Le pôle du régulateur PI va induire un retard de phase, pour que ce retard de phase n'influe pas sur la marge de phase, on placera ce pôle loin de la pulsation de coupure.

La fonction de transfert d'un correcteur à retard de phase est

$$D(p) = k_c \frac{1 + pT}{1 + pT\alpha} \quad \alpha > 1$$

Voyons comment concevoir un correcteur à retard de phase. On se base sur le même problème que précédemment.

On sait pour atteindre les spécifications, on doit avoir un gain de 10, et une marge de phase de  $45^\circ$ . On a vu que quand on multipliait le système réglé par 10, la marge de phase était de  $20^\circ$ . On regarde quelle pulsation donnerait la marge de phase souhaitée et on voit que ce serait  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ . On a donc trouvé notre nouvelle fréquence de coupure. Connaissant la fréquence de coupure, on peut choisir la position du pôle et du zéro du régulateur de façon à ne pas influencer sur la marge de phase. On les place respectivement en  $\omega = 0,01 \text{ rad/s}$  et  $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$ .

On voit qu'on peut remplir les mêmes exigences avec un correcteur à avance de phase ou un correcteur à retard de phase. La différence est qu'avec un correcteur à avance de phase, la bande passante est plus grande et le transitoire est plus rapide car il n'y pas de pôle près de l'origine. L'augmentation de la bande passante de la boucle fermée peut induire la saturation des actionneurs ou un manque d'atténuation du bruit. Dans ce cas, il est préférable d'utiliser un correcteur à retard de phase.