Analyse Numérique
Examen 2022 – 2023
Série 2 (11h30-14h30)

— *Répondez aux questions sur les feuilles mises à votre disposition* **ou/et** *en écrivant des programmes et en y laissant des commentaires.*
— *Veuillez indiquer votre nom et prénom sur* **chaque** *feuille et dans le* **premier commentaire** *de chaque programme.*
— *Répondez aux questions 1-2, 3 et 4 sur des feuilles* **séparées** *(ces groupes de questions seront corrigés séparément).*
— *Sauvegardez vos programmes dans le répertoire* `examen` *existant.*
— **Sauvegardez régulièrement** *les fichiers en cours d'édition.*

Question 1. (3+0.5+1.5 points) Soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 5 & 2 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 7 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 7 & 9 \\ 8 & 7 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Déterminez de manière efficace et numériquement stable les matrices L, U et P d'une factorisation LU avec pivotage partiel de lignes de A.
(b) Utilisez **uniquement** les matrices L, U et P du point (a) pour résoudre numériquement et de manière efficace le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
(c) Utilisez **uniquement** les matrices L, U et P du point (a) pour résoudre numériquement et de manière efficace le système linéaire $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Justifiez votre démarche. Précisez le coût (en flops) de cette résolution, factorisation exclue.

Note : pour l'ensemble de la Question 1, vous pouvez utiliser l'instruction \ (backslash) **seulement** avec les systèmes triangulaires ; les instructions `lu` et `inv` (ou équivalentes) sont **interdites** ; ces limitations ne concernent pas d'éventuelles vérifications.

Question 2. (1+2+2 points)
(a) Définissez la solution au sens des moindres carrés pour un système d'équations linéaires surdéterminé.
(b) Montrez que cette solution est aussi celle du système d'équations normales associé.
(c) Inversement, montrez que la solution du système d'équations normales est aussi celle au sens des moindres carrés du système surdéterminé associé.

Question 3. (5 points) Déterminer numériquement la solution du système d'équations non-linéaires

$$\begin{cases} x + z - 2xz - 1 &= 0\,, \\ x^2 + z^2 - 2x - 2z &= 0\,, \end{cases}$$

dans la région $0 \le x \le 1$, $2 \le z \le 3$.

Question 4. (5 points) Déterminez numériquement l'intégrale

$$\int_0^e \sin(x)\,\cos\bigl(\cos(x)\bigr)\,dx$$

tout en **garantissant** que l'erreur absolue sur la valeur de l'intégrale est inférieure à 10^{-5} . Expliquez votre démarche.