Modélisation à partir de données expérimentales

Année 2014-2015

Plan

Motivation

- Obtention d’un modèle basé sur les lois de la physique (ou d’autres lois théoriques) peut être long, mener à des erreurs de modélisation importantes ou être très compliqué
- Utilité de vérifier modèle théorique à l’aide de données expérimentales
- Obtention d’un modèle de type ”boîte noire” à partir de données expérimentales: identification d’un système (détermination des expériences à réaliser, de la structure du modèle, estimation des paramètres, ...)

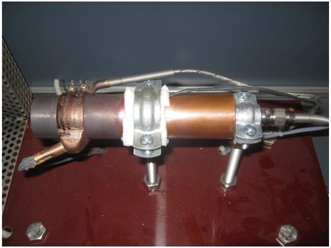
Types de données expérimentales les plus courants

- Réponses transitoires : réponse impulsionnelle, réponse indicielle
- Réponse harmonique (frequency response): requiert d'exciter le système à l'aide d'un signal multi-sinusoïdal ou d'un ensemble de signaux sinusoïdaux de fréquences différentes
- Réponse à une sollicitation aléatoire naturelle autour d'un état d'équilibre: par exemple avion volant à altitude donnée et sujet aux turbulences du vent
- Réponse à une sollicitation de type pseudo-aléatoire (ex: suite binaire pseudo-aléatoire)

Dans la suite on se limite à introduire la première approche afin de construire des modèles simples utilisés dans la pratique industrielle

Est-il réaliste de considérer des modèles très simples? (1)

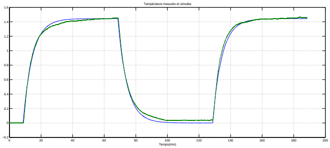
Expériences réalisées sur un système chauffant avec régulation de température



- Actionneur: collier chauffant et électronique de commande associée
- Capteur: Sonde Pt100 (résistance variable en fonction de la température) mesurant la température de l'air à l'intérieur du cylindre
- Signal réglant: tension de commande de l'actionneur
- Signal réglé: température de l'air à l'intérieur du cylindre

Est-il réaliste de considérer des modèles très simples? (2)

- Relevé de la réponse indicielle d'un système de chauffe et superposition de la réponse fournie par un modèle du premier ordre



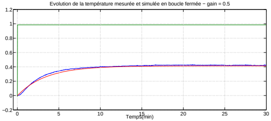
- Fonction de transfert estimée : $\hat{H}(p) = \frac{1.44}{352.1p+1}$
- Précision suffisante ?

Est-il réaliste de considérer des modèles très simples? (3)

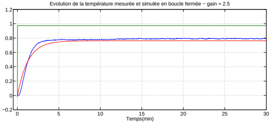
Etude de la boucle fermée avec régulateur proportionnel de gain K (rétraction unitaire):

Comparaison de la réponse indicielle mesurée en boucle fermée (bleu) et la réponse indicielle simulée en boucle fermée (rouge)

$K = 0.5 \qquad \hat{T}(p) = \frac{0.7221}{352.1p+1.722}$

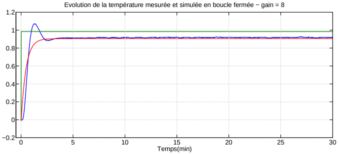


$K = 2.5 \qquad \hat{T}(p) = \frac{3.611}{352.1p+4.611}$



Est-il réaliste de considérer des modèles très simples? (4)

$K = 8 \qquad \hat{T}(p) = \frac{11.55}{352.1p+12.55}$

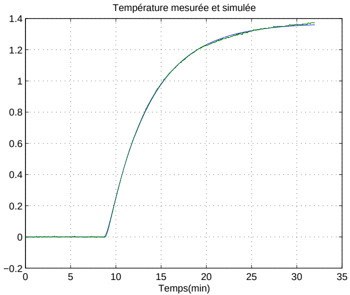


Augmentation de la qualité requise pour le modèle avec l'augmentation des exigences sur la réponse en boucle fermée

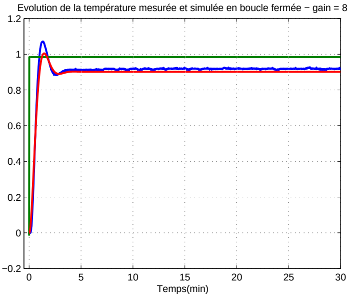
Est-il réaliste de considérer des modèles très simples? (5)

Estimation d'une fonction de transfert d'ordre 2 (boucle ouverte)
"Bleu" réponse indicielle du modèle estimé; "vert" réponse indicielle mesurée

$$\hat{H}(p) = \frac{1.371}{6118p^2 + 307.5p + 1}$$



Est-il réaliste de considérer des modèles très simples? (6)



Reproduction du dépassement indiciel grâce au modèle d'odre 2

$$\hat{T}(p) = \frac{10.97}{6118p^2 + 307.5p + 11.97}$$

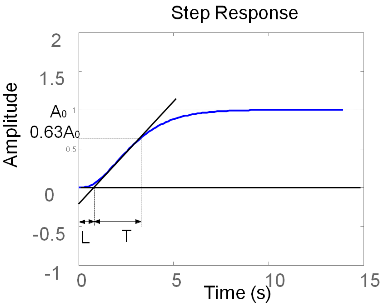
Modélisation à partir d'une réponse indicielle - Système stable non oscillant(1)

- Relevé de la réponse indicielle
  - Initialement le système est dans un état d'équilibre caractérisé par l'entrée u_0 et la sortie y_0
  - Changement rapide de la grandeur réglante (cf échelon) d'amplitude Δu
  - Répétition de l'expérience pour différentes amplitudes de l'échelon (vérification de la linéarité)
  - Tracé de la réponse indicielle mesurée

$$s_{mes}(t) = \frac{y_{mes}(t) - y_0}{\Delta u}$$

Modélisation à partir d'une réponse indicielle - Système stable non oscillant(2)

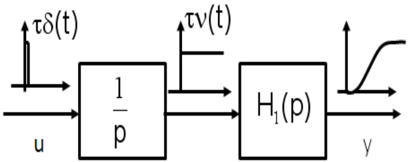
- Construction graphique
  - Réponse indicielle (normalisée par l'amplitude de l'échelon d'entrée)
  - Tangente à la réponse indicielle possédant la plus grande pente



  - Modèle estimé: $\hat{H}(p) = \frac{A_0}{1+pT}e^{-pL}$

Modélisation à partir d'une réponse impulsionnelle - Système intégrateur(1)

- Pas d'état d'équilibre en boucle ouverte si l'entrée est un échelon
- Etat d'équilibre peut être atteint pour une entrée impulsionnelle



Modélisation à partir d'une réponse impulsionnelle - Système intégrateur(1)

- Procédure
  - Soit y_0 la valeur initiale de la sortie (à entrée nulle)
  - Relever la réponse du système pour une impulsion de courte durée de surface τ
  - Tracer l'évolution de $\frac{y(t)-y_0}{\tau}$ en fonction de t
  - Allure similaire à la figure du "slide" 13 $\rightarrow$ modèle $H_1(p) = \frac{A_0}{1+pT} e^{-pL}$
  - Fonction de transfert du procédé: $H(p) = \frac{A_0}{p(1+pT)} e^{-pL}$

Modélisation à partir d'une réponse indicielle - Système stable oscillant(1)

- Tracer la réponse indicielle ("normalisée par l'amplitude de l'échelon")
- Considérer un modèle du 2^e ordre: $H(p) = A_0 \frac{\omega_n^2}{p^2+2\zeta\omega_n p+\omega_n^2}$
- Caractérisation de la réponse:
  - Période apparente: $T_d = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ (cf $\omega_d T_d = 2\pi$)
  - Facteur de décroissance : $d = e^{-\sigma t_2}/e^{-\sigma t_1} = e^{-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

Modélisation à partir d'une réponse indicielle - Système stable oscillant(2)

- Valeur des paramètres ζ et ω_n

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi / \ln d)^2}} \qquad \omega_n = \frac{2\pi}{T_d\sqrt{1-\zeta^2}}$$

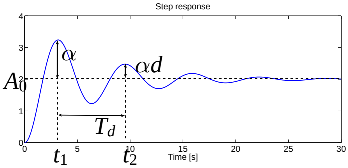
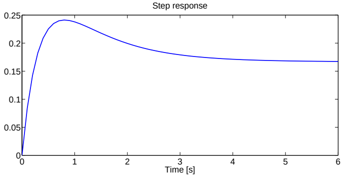


Figure: Réponse indicielle du système $H(p) = \frac{2}{p^2+0.3p+1}$

Modélisation à partir d'une réponse indicielle - Exercice

- Gain statique ?
- Degré relatif ?
- Nombre de pôles ?



- $$H(p) = \frac{p + 0.5}{p^2 + 4p + 3}$$

Réponse indicielle monotone et bornée

- Forme de modèle considérée

$$s(t) = s(\infty) + Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t} + Ce^{-\gamma t} + \ldots$$

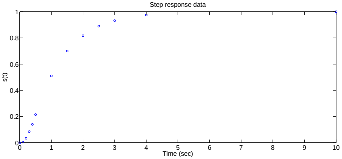
- Supposons que α correspond au pôle le plus lent (le plus proche de zéro) et que $A < 0$ (cf réponse croissante)

$$\begin{aligned} s(\infty) - s(t) &\simeq |A|e^{-\alpha t} \\ \log_{10}(s(\infty) - s(t)) &\simeq \log_{10}|A| - \alpha t \log_{10} e \\ &\simeq \log_{10}|A| - 0.4343\alpha t \end{aligned}$$

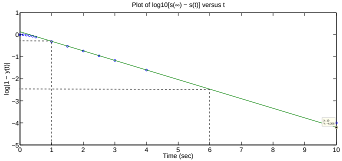
- Equation d'une droite $\rightarrow$ possibilité de déterminer graphiquement ou par régression linéaire A et α
- Répéter les mêmes opérations pour $s(t) - [s(\infty) + Ae^{-\alpha t}] \simeq Be^{\beta t} \cdots$

Exemple numérique (1)

- Données expérimentales



- $log_{10}(s(\infty) - s(t))$ en fonction de t

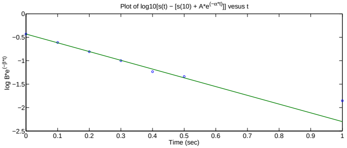


Exemple numérique (2)

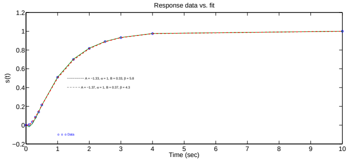
- Calcul de A
  $A < 0$ car $y(\infty) > y(t)$ pour t fini
  $\log_{10}|A| = 0.125 \rightarrow A = -1.33$
- Calcul de α
  $0.4343\alpha = \frac{2.469-0.297}{5} \rightarrow \alpha \simeq 1$
- Estimée : $\hat{s}(t) = 1 - 1.33e^{-t}$

Exemple numérique (3)

- Détermination du deuxième pôle



- Validation



Exemple numérique (4)

- Réponse indicielle estimée

$$\hat{s}(t) = 1 - 1.33e^{-t} + 0.33e^{-5.8t}$$

- Fonction de transfert estimée

$$\begin{aligned}\hat{S}(p) &= \frac{1}{p} - \frac{1.33}{p+1} + \frac{0.33}{p+5..8} \\ &= \frac{-0.58p + 5.8}{p(p+1)(p+5.8)}\end{aligned}$$

Et donc

$$\hat{H}(p) = \frac{-0.58p + 5.8}{(p+1)(p+5.8)}$$

Noter le zéro dans le demi-plan droit alors que pas de dépassement négatif

Identification par la méthode des moindres carrés (least squares identification)

- Permet de traîter les cas où la réponse présente un mélange de modes "mal séparés"
- Utilisation d'un logiciel d'optimisation numérique pour déterminer les paramètres du modèle qui approche au mieux les mesures.
- Critère d'optimalité : somme des carrés des erreurs

$$J = \sum_{i=1}^{N} (y_{mes,i} - \hat{y}_i)^2$$

  où N est le nombre de mesures disponibles, $y_{mes,i}$ le i^e point de mesure et $\hat{y}_i$ l'estimée de ce i^e point fournie par le modèle
- Solution analytique pour un modèle linéaire en les paramètres

Récapitulation

- Modèle simple utilisable
- Méthodes graphiques fournissent une première estimée du modèle qui peut être améliorée par optimisation numérique des paramètres (méthode des moindres carrés par exemple)
- Choix du signal d'entrée en fonction de la présence d'un pôle à l'origine (système intégrateur) ou pas