Analyse Numérique

Examen 2022 – 2023

Série 3 (15h-18h)

- *Répondez aux questions sur les feuilles mises à votre disposition* **ou/et** *en écrivant des programmes et en y laissant des commentaires.*
- *Veuillez indiquer votre nom et prénom sur* **chaque** *feuille et dans le* **premier commentaire** *de chaque programme.*
- *Répondez aux questions 1-2, 3 et 4 sur des feuilles* **séparées** *(ces groupes de questions seront corrigés séparément).*
- *Sauvegardez vos programmes dans le répertoire* ***examen*** *existant.*
- **Sauvegardez régulièrement** *les fichiers en cours d'édition.*

Question 1. (3+0.5+1.5 points) Soient

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 8 & 4 & 3 & 8 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 6 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 9 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Déterminez de manière efficace et numériquement stable les matrices Q et R d'une factorisation QR de A.

(b) Utilisez **uniquement** les matrices Q et R du point (a) pour résoudre numériquement et de manière efficace le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(c) Utilisez **uniquement** les matrices Q et R du point (a) pour calculer numériquement et de manière efficace le déterminant $\det(A)$ de A ; notez pour cela que $\det(Q) = (-1)^h$, où h est le nombre de transformations de Householder utilisées pour former Q. Justifiez votre démarche. Précisez le coût (en flops) de ce calcul, factorisation exclue.

Note : pour l'ensemble de la Question 1, vous pouvez utiliser l'instruction \ (backslash) **seulement** avec les systèmes triangulaires ; les instructions `qr`, `det` et `inv` (ou équivalentes) sont **interdites** ; ces limitations ne concernent pas d'éventuelles vérifications.

Question 2. (1+3+1 points)

(a) Expliquez le principe de la méthode de Newton avec recherche linéaire.

(b) Montrez que, sous certaines conditions, l'inégalité $|f(x_k)| > |f(x_{k+1})|$ est satisfaite pour un facteur d'amortissement suffisamment petit ; ici x_k et x_{k+1} sont des solutions approchées générées par la méthode à l'itération k et $k+1$, respectivement.

(c) L'affirmation du point (b) est-elle valable pour toute fonction f **continue** ? Si oui, justifiez ; si non, donnez un contre-exemple.

Question 3. (1+4 points) Soit le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt}(t) & = & -20\, y_1 - y_2 \,, \\ \frac{dy_2}{dt}(t) & = & -0.2\, y_2 \,, \end{cases}$$

avec conditions initiales $y_1(0) = y_2(0) = 1$.

(a) Déterminez la condition de stabilité absolue de la méthode d'Euler progressive.

(b) Résolvez numériquement ce problème sur l'intervalle $[0, 5]$ avec la méthode d'Euler progressive. Vérifiez la validité de la condition de stabilité du point (a) en utilisant un pas de discrétisation légèrement inférieur et un pas légèrement supérieur à celui de la limite de stabilité.

Question 4. (5 points) Déterminez numériquement l'intégrale

$$\int_0^e \cos(x)\ \cos\big(\sin(x)\big)\, dx$$

tout en **garantissant** que l'erreur absolue sur la valeur de l'intégrale est inférieure à 10^{-5} . Expliquez votre démarche.