

# Modèle dynamique

Année 2020-2021

# Plan

## 1 Objectifs du chapitre

# Plan

- 1 Objectifs du chapitre
- 2 Modèle dynamique - Modèle entrée-sortie

# Plan

- 1 Objectifs du chapitre
- 2 Modèle dynamique - Modèle entrée-sortie
- 3 Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

# Plan

- 1 Objectifs du chapitre
- 2 Modèle dynamique - Modèle entrée-sortie
- 3 Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale
- 4 Modélisations interne et externe

# Plan

- 1 Objectifs du chapitre
- 2 Modèle dynamique - Modèle entrée-sortie
- 3 Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale
- 4 Modélisations interne et externe
- 5 Récapitulation

# Outline

- 1 Objectifs du chapitre
- 2 Modèle dynamique - Modèle entrée-sortie
- 3 Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale
- 4 Modélisations interne et externe
- 5 Récapitulation

## Pourquoi un modèle dynamique ?

- Permet de caractériser la réponse d'un système (système réglé, régulateur, actionneur, capteur) en termes de temps de réponse, importance de l'effet de l'entrée sur la sortie, retard, ...
- Sert de base à la conception d'un régulateur
- Sert à la validation du régulateur pour vérifier que la boucle fermée a les propriétés requises



## Deux approches pour la modélisation

- Utiliser les lois de la physique et/ou de la chimie pour déduire les équations différentielles décrivant le comportement du système
- Réaliser des expériences sur le système et déterminer un modèle sur la base des mesures recueillies (identification des systèmes)

Souvent on est amené à combiner ces deux approches : partir d'un modèle dont la structure est guidée par les lois de la physique mais dans lequel certains paramètres sont inconnus et doivent être déterminés à partir de données expérimentales

# Différents types de modèles

- Domaine temporel  
Réponse impulsionnelle, réponse indicielle, équation différentielle
- Domaine fréquentiel  
Fonction de transfert, transmittance isochrone

## Objectifs à atteindre

- Etre capable de passer d'un type de modèle à un autre (pour les systèmes linéaires et permanents)
- Pouvoir déterminer des informations sur la structure de la fonction de transfert à partir d'un relevé expérimental de la réponse impulsionnelle ou indicielle
- Pouvoir déterminer un modèle du comportement d'un système non-linéaire autour d'un état d'équilibre (notion de linéarisation autour d'un état d'équilibre)
- Références: Chapitre 3 du livre de référence, cours d'analyse complexe (MATH-H302) ou cours "Signaux et Systèmes" (MATH-H3001)

# Outline

- 1 Objectifs du chapitre
- 2 **Modèle dynamique - Modèle entrée-sortie**
- 3 Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale
- 4 Modélisations interne et externe
- 5 Récapitulation

# Convolution et réponse impulsionnelle (1)

## Remarque importante

**Dans tout ce qui suit, sauf mention explicite, on considère un système linéaire permanent (SLP) causal**

## SLP causal

- Système linéaire :  $y(t) = \varphi(u(t))$

$$ay_1(t) + by_2(t) = \varphi(au_1(t) + bu_2(t)) \quad a, b \in \mathbb{R}$$

avec  $y_i(t) = \varphi(u_i(t))$ ,  $i = 1, 2$

- Système permanent : entrées identiques mais décalées d'un laps de temps  $\tau$  donnent sorties identiques et décalées de  $\tau$
- Système causal : sortie à l'instant  $t$  ne dépend que de l'entrée à l'instant  $t$  et aux instants antérieurs

## Convolution et réponse impulsionnelle (2)

### Réponse d'un SLP à une entrée $u(t)$

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= h(t) * u(t)\end{aligned}\tag{1}$$

- $h(t)$ : réponse impulsionnelle
- Justification :  $y(t) = h(t)$  si  $u(t) = \delta(t)$  (impulsion de Dirac)
- $h(t)$  caractérise entièrement la réponse d'un SLP
- La sortie  $y(t)$  est le produit de convolution de  $u(t)$  et de  $h(t)$
- Dans le cas d'un système causal,  $h(t) = 0$  pour  $t < 0$  (fonction causale)

## Fonction de transfert ou transmittance isomorphe

### Relation entre les transformées de Laplace de $y(t)$ et $u(t)$

- Transformée de Laplace bilatérale de (1)

$$Y(p) = H(p)U(p) \quad (2)$$

avec  $H(p) = \mathcal{L}(h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-pt} dt$ ,

$Y(p) = \mathcal{L}(y(t))$ ,  $U(p) = \mathcal{L}(u(t))$

- $H(p)$ : Fonction de transfert ou transmittance isomorphe du système
- Système causal  $\rightarrow$  la région de convergence associée à  $H(p)$  est le demi-plan droit (à droite du pôle le plus à droite) et  $\mathcal{L}(h(t)) = \mathcal{L}_u(h(t))$  avec  $\mathcal{L}_u(h(t)) = \int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-pt} dt$

## Réponse indicielle d'un SLP (1)

Réponse du système à l'entrée  $u(t) = \nu(t)$  (Fonction d'Heaviside)

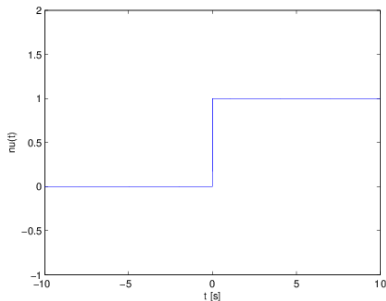


Figure: Fonction d'Heaviside



## Réponse indicielle d'un SLP (2)

- Détermination à partir de  $h(t)$

$$\begin{aligned}s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \nu(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau\end{aligned}$$

- Détermination à partir de  $H(p)$

$$S(p) = \frac{H(p)}{p} \qquad s(t) = \mathcal{L}^{-1}(S(p))$$

- Gain statique du système (pour un système stable)  
Valeur vers laquelle tend la réponse indicielle du système quand  $t$  tend vers l'infini :  $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t)$

# Transmittance isochrone et réponse harmonique (Frequency response)

## Transmittance isochrone

Lorsque l'axe imaginaire appartient à la région de convergence de  $H(p)$  (c-à-d lorsque le SLP est stable), on peut définir la transmittance isochrone en substituant  $p$  par  $j\omega$  dans (2)

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \quad (3)$$

## Réponse à une entrée sinusoïdale ou réponse harmonique

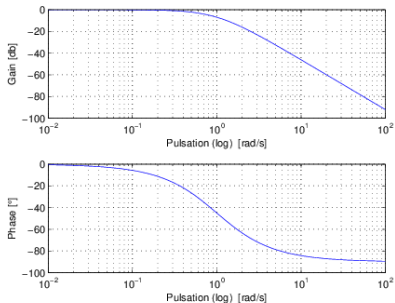
Pour  $u(t) = A \sin(\omega_0 t)$  (avec  $A$  et  $\omega_0$  réels positifs), la sortie du SLP caractérisé par  $H(j\omega)$  est:

$$y(t) = A |H(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))$$

où  $\varphi(\omega_0) = \arg(H(j\omega_0))$

## Courbes de Bode

- Porter en graphique le module de la transmittance isochrone exprimé en décibels (  $20 \log_{10} |H(j\omega)|$  ) en fonction de  $\omega$  (en échelle logarithmique).
- Porter en graphique  $\varphi$  en fonction de  $\omega$  en échelle logarithmique.
- Attention: en théorie des vibrations, les courbes de Bode sont définies dans une échelle linéaire pour la pulsation (ou la fréquence) et logarithmique pour l'amplitude du déplacement (en variables réduites) : voir MECA-H-303.



## Exemple : modélisation d'un amplificateur opérationnel (1)

En première approximation, l'ampli-op est un circuit à un pôle

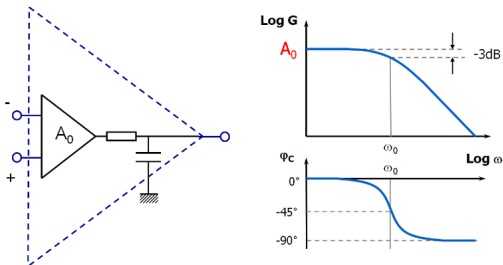


Figure: Un peu d'électronique ! (Slides du cours ELEC-H-301, F. Robert)

## Exemple : modélisation d'un amplificateur opérationnel (2)

- Notations

$V_d = V^+ - V^-$  différence des tensions présentes aux bornes d'entrée

$V_{out}$  tension de sortie

- Fonction de transfert

$$H(p) = \frac{V_{out}(p)}{V_d(p)} = \frac{A_0}{1 + RCp}$$

$A_0$ : gain statique de l'ampli-op

$R$ : résistance de sortie

$C$ : capacité parasite entre la sortie et la masse

- Ordre de grandeur des paramètres :  $RC \simeq 10^{-6}s$ ,  $A_0 \simeq 30000$

## Exemple : modélisation d'un amplificateur opérationnel (3)

- Réponse impulsionnelle

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(p)) = \frac{A_0}{RC} e^{-t/RC} \nu(t)$$

- Réponse indicielle

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{H(p)}{p}\right) = A_0(1 - e^{-t/RC})\nu(t)$$

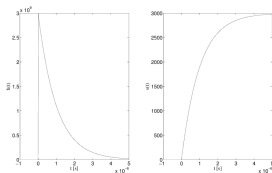


Figure: Réponses impulsionnelle (gauche) et indicielle (droite)

## Exemple : modélisation d'un amplificateur opérationnel (4)

### Réponse harmonique - Courbes de Bode

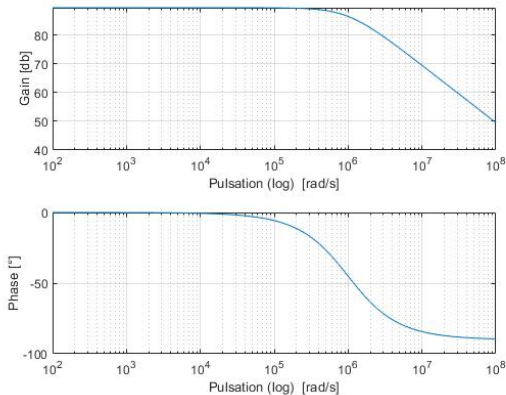


Figure: Courbes de Bode d'un amplificateur opérationnel

$$H(j\omega) = \frac{A_0}{1 + j\omega RC}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{A_0}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}$$

$$\arg H(j\omega) = -\arctan RC\omega$$



# Outline

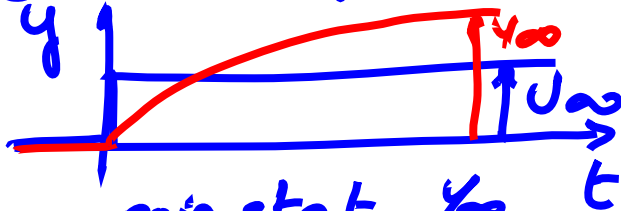
- 1 Objectifs du chapitre
- 2 Modèle dynamique - Modèle entrée-sortie
- 3 Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale
- 4 Modélisations interne et externe
- 5 Récapitulation

# Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

## Utilité

- Relient des propriétés de la fonction de transfert d'un SLP à celles de sa réponse impulsionnelle ou indicielle
- Théorème de la valeur finale: permet de déterminer le gain statique d'un système stable à partir de sa fonction de transfert (la pente de la réponse indicielle d'un système intégrateur à partir de la fonction de transfert du système)
- Théorème de la valeur initiale : informe sur le degré relatif (différence entre le degré du dénominateur et le degré du numérateur) de la fonction de transfert d'un SLP à partir de sa réponse indicielle

# Gain statique



$$\text{gain stat} = \frac{y_{\infty}}{u_{\infty}}$$

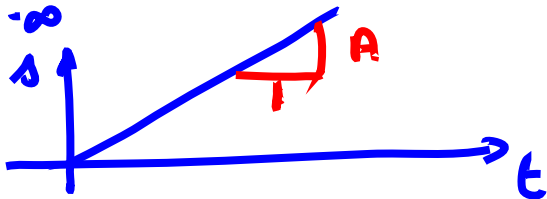
# Système intégrateur

$$h(t) = A u(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) u(\tau) d\tau = A \int_{-\infty}^{\infty} \tau(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

$$= A \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

Rép. ind :



Pente :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p H(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{s} = A$$

## Théorème de la valeur finale (1)

- Enoncé

Soit  $Y(p) = G(p)e^{\alpha p}$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $G(p)$  est une fraction rationnelle dont le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur. Si tous les pôles de  $pY(p)$  ont une partie réelle négative et si  $y(t)$  est une fonction nulle pour  $t < -\alpha$  telle que  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(p))$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p)$$

- Application à la réponse indicielle de l'ampli-op

$$S(p) = \mathcal{L}(s(t)) = \frac{A_0}{1 + RCp} \frac{1}{p}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = \lim_{p \rightarrow 0} H(p) = H(0) = A_0$$

$A_0 (= H(0))$  est appelé le gain statique (de l'ampli-op)

## Théorème de la valeur finale (2)

- Application erronée

Déterminer la valeur finale (quand  $t \rightarrow \infty$ ) du signal causal correspondant à  $Y(p) = \frac{3}{p(p-2)}$

Application aveugle de  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p)$  donne:

$$y(\infty) = pY(p)|_{p=0} = \frac{-3}{2}$$

Cependant par calcul de  $\mathcal{L}^{-1}(Y(p))$ , on obtient:

$$y(t) = \left( -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^{2t} \right) \nu(t)$$

qui n'est pas bornée quand  $t \rightarrow \infty$

## Théorème de la valeur initiale (1)

- Enoncé

Soit  $Y(p) = \frac{NUM(p)}{DEN(p)}$  une fraction rationnelle dont le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur. Soit  $y(t)$  la fonction causale telle que  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(p))$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pY(p)$$

- Détermination de la pente en  $t = 0^+$  de la réponse indicielle de l'ampli-op

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} s'(t) &= \lim_{p \rightarrow \infty} p \left( pH(p) \frac{1}{p} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{A_0}{1 + RCp} \\ &= \frac{A_0}{RC} \end{aligned}$$

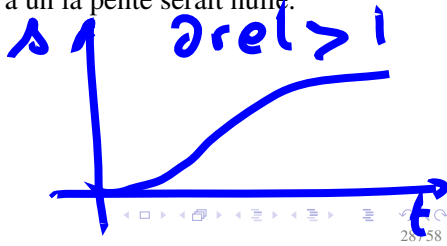
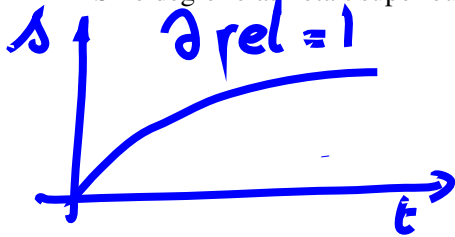
(4)

## Théorème de la valeur initiale (2)

- Constatation

La pente n'est pas nulle car le degré relatif (la différence entre le degré du dénominateur et le degré du numérateur) de la fonction de transfert vaut 1.

Si le degré relatif était supérieur à un la pente serait nulle.





# Outline

- 1 Objectifs du chapitre
- 2 Modèle dynamique - Modèle entrée-sortie
- 3 Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale
- 4 Modélisations interne et externe**
- 5 Récapitulation

# Modélisation par une équation différentielle ou un système d'équations différentielles

## Description interne et description externe

- Interne : système d'EDO du premier ordre faisant intervenir les variables physiques internes au système (pas uniquement les grandeurs d'entrée et de sortie) ou des grandeurs auxiliaires sans signification physique → **description en variables d'état**
- Externe : EDO faisant intervenir uniquement les grandeurs d'entrée (signal réglant et perturbations) et de sortie (signal réglé)

## Remarque

Autres modèles externes : réponses impulsionnelle et indicielle, transmittances isomorphe et isochrone

# Modélisation par une équation différentielle - description en variables d'état (1)

## Exemple 1: Réservoir

- Bilan volumique

$$S \frac{dh(t)}{dt} = q_{in}(t) - q_{out}(t)$$

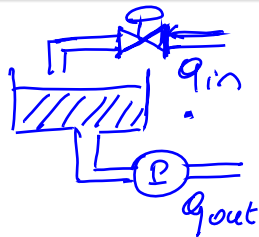
$S$  : section droite du réservoir

$h(t)$  : niveau dans le réservoir

$q_{in}(t)$  : débit volumique d'entrée

$q_{out}(t)$  : débit volumique de sortie imposé à l'aide d'une pompe

- Problème de régulation : maintenir le niveau au voisinage d'une valeur fixée en agissant sur  $q_{in}$  en présence de la perturbation  $q_{out}$
- Modèle en variables d'état



$$\dot{h}(t) = q_{in}(t)/S - q_{out}(t)/S \quad \text{équation d'état} \quad (5)$$

$$y(t) = h(t) \quad \text{équation de sortie} \quad (6)$$

# Infinité de représentations en variables d'état

$$\dot{x}(t) = \alpha \left( \frac{q_{in}}{s} - \frac{q_{out}}{s} \right)$$

$$y(t) = \frac{1}{\alpha} x(t) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

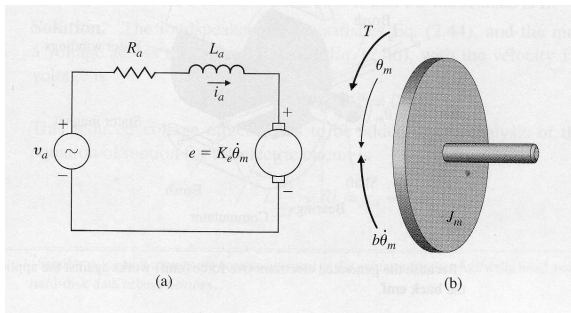
$\Rightarrow$   $\hat{m}$  fct de transfert

$$Y(p)/Q_{in}(p) \text{ et } Y(p)/Q_{out}(p)$$

# Modélisation par une équation différentielle - description en variables d'état (2)

## Exemple 2: Moteur à courant continu

Schémas équivalents électrique et mécanique



## Modélisation par une équation différentielle - description en variables d'état (3)

Par le théorème du moment cinétique

$$J_m \ddot{\theta}_m = K_t i_a - b \dot{\theta}_m \quad (7)$$

$\theta_m$  : position angulaire de l'arbre (ou du rotor)

$i_a$  : courant d'armature

$J_m$  : moment d'inertie du moteur

$K_t i_a$  : couple engendré par le moteur ( $K_t$ : constante de couple)

$b \dot{\theta}_m$  : couple de frottement visqueux ( $b$  : coefficient de frottement visqueux)

## Modélisation par une équation différentielle - description en variables d'état (4)

- Equation décrivant le circuit électrique

$$L_a \dot{i}_a + R_a i_a = v_a - K_e \dot{\theta}_m \quad (8)$$

$i_a$  : courant d'armature

$L_a$  et  $R_a$  : inductance et résistance des enroulements rotoriques

$K_e \dot{\theta}_m$  : tension contre-électromotrice ( $K_e$  constante électrique)

$v_a$  : tension d'armature

- Calcul de la fonction de transfert  $\Theta_m(p)/V_a(p)$

(7) donne  $p(J_m p + b)\Theta_m(p) = K_t I_a(p)$

(8) donne  $(L_a p + R_a)I_a(p) = V_a(p) - K_e p\Theta_m(p)$

En substituant  $I_a(p)$  tiré de la 2e équation dans la première

$$\frac{\Theta_m(p)}{V_a(p)} = \frac{K_t}{p(J_m p + b)(L_a p + R_a) + K_t K_e p}$$

Obtention fct transfert :

$$p(J_m p + b) \Theta_n(p) = K_t \frac{V_d(p) - K_e \Theta_n(p)}{L_a p + R_a}$$

$$\begin{aligned} (p(J_m p + b)(L_a p + R_a) + K_e K_t p) \Theta_n \\ = K_t V_d(p) \end{aligned}$$



# Modélisation par une équation différentielle - description en variables d'état (5)

- EDO du troisième ordre

A partir de la fonction de transfert, on obtient:

$$(J_m L_a p^3 + (J_m R_a + L_a b) p^2 + (b R_a + K_t K_e) p) \Theta_m(p) = K_t V_a(p)$$

En par transformée de Laplace inverse

$$J_m L_a \ddot{\theta}_m(t) + (J_m R_a + L_a b) \dot{\theta}_m(t) + (b R_a + K_t K_e) \theta_m(t) = K_t v_a(t)$$

# Modélisation par une équation différentielle - description en variables d'état (6)

- EDOs du premier ordre faisant intervenir les variables internes

Introduisons  $\dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t)$

L'équation du moment cinétique peut s'écrire sous la forme d'une équation du premier ordre

$$J_m \dot{\omega}_m(t) + b \omega_m(t) = K_t i_a(t)$$

ou encore

$$\dot{\omega}_m(t) = -\frac{b}{J_m} \omega_m(t) + \frac{K_t}{J_m} i_a(t)$$

- Equations d'état

En regroupant ces équations (y compris (8)) sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ \dot{i}_a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{J_m} & \frac{K_t}{J_m} \\ 0 & -\frac{K_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} v_a(t)$$

# Modélisation par une équation différentielle - description en variables d'état (7)

Equation de sortie dans le cas d'une mesure de position

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix}$$

Vecteur d'état :  $\begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix}$

Grandeur d'entrée ou grandeur réglante :  $v_a(t)$

Grandeur de sortie ou grandeur réglée :  $y(t)$

... > lorsqu'il s'agit  
d'un système réglé

# Modélisation par une équation différentielle - description en variables d'état (8)

**Forme générale d'un modèle en variables d'état pour un système linéaire et permanent**

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$x(t)$  : Vecteur d'état ( $n \times 1$ )

$u(t)$  : Vecteur d'entrée ou vecteur réglant ( $m \times 1$ )

$y(t)$  : Vecteur de sortie ou vecteur réglé ( $p \times 1$ )

$A$  matrice du système ( $n \times n$ ),  $B$  matrice d'entrée ( $n \times m$ )

$C$  matrice de sortie ( $p \times n$ ),  $D$  matrice d'action directe ( $p \times m$ )

## Modélisation par une équation différentielle - description en variables d'état (9)

- La connaissance de  $x(t_0)$  permet de déterminer l'évolution de  $y(t)$  pour  $t \geq t_0$  si l'on connaît  $u(t)$  pour  $t \geq t_0$ .  $x(t_0)$  est donc l'information minimale requise pour pouvoir calculer l'évolution future du système sans devoir se référer à des valeurs de  $u(t)$  antérieures à  $t_0$ .
- Le modèle a la même forme que le système soit à une entrée et une sortie ou à plusieurs entrées et plusieurs sorties

# Modélisation par une équation différentielle - cas d'un système non linéaire (1)

## Exemple : Modèle du niveau dans un réservoir (débit de sortie non commandé)

- Bilan volumique:

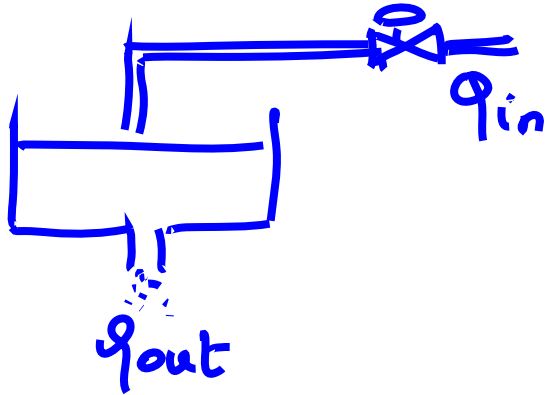
$$S \frac{dh(t)}{dt} = q_{in}(t) - q_{out}(t)$$

- Expression du débit de sortie  $q_{out}(t) = c\sqrt{h(t)}$  avec  $c$  constante dépendant de la forme de l'ajutage et des propriétés du fluide
- Equation différentielle non linéaire

$$S \frac{dh(t)}{dt} + c\sqrt{h(t)} = q_{in}(t)$$

- **Etats d'équilibres (steady state) - caractéristique statique**

Un état d'équilibre est une solution particulière de l'équation différentielle qui ne dépend pas du temps. Cette solution est obtenue pour une entrée constante supposée appliquée depuis un temps infiniment long.



## Modélisation par une équation différentielle - cas d'un système non linéaire (2)

En imposant  $\frac{dh}{dt} = 0$ , on obtient

$$h = (q_{in}/c)^2,$$

ce qui fournit, pour un niveau donné, le débit d'entrée à appliquer pour que ce niveau reste constant au cours du temps

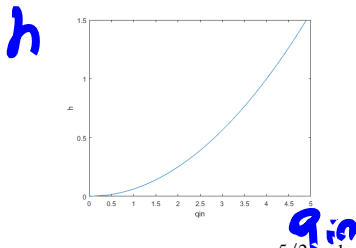
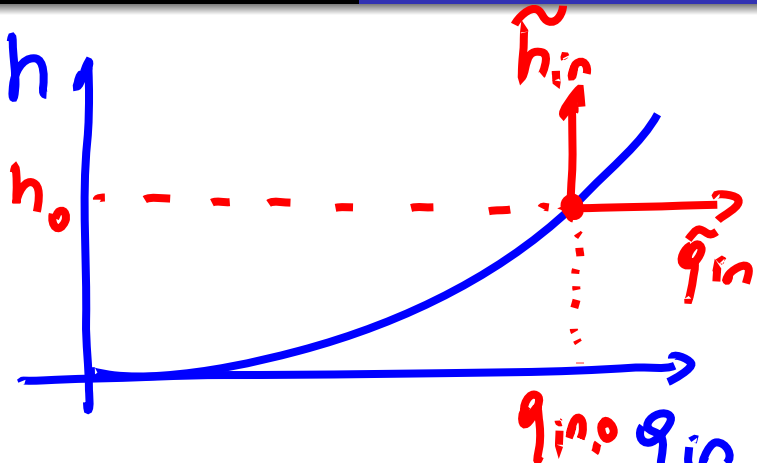


Figure: Caractéristique statique pour  $c = 4m^{5/2}s^{-1}$ ;  $h$  en  $m$ ;  $q_{in}$  en  $m^3s^{-1}$





Ecart par rapport aux  
grandeurs d'équilibre

## Modélisation par une équation différentielle - cas d'un système non linéaire (3)

**Linéarisation** de l'équation autour d'un état d'équilibre  $h = h_0$

- Entrée correspondante:  $q_{in0} = c\sqrt{h_0}$
- Ecart par rapport aux grandeurs d'équilibre  
 $\tilde{h} = h - h_0$        $\tilde{q}_{in} = q_{in} - q_{in0}$
- Développement de la fonction non linéaire en série de Taylor au voisinage de  $h_0$

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_0} + \frac{1}{2\sqrt{h_0}}(h - h_0) + O((h - h_0)^2)$$

- Substitution dans l'équation non linéaire en se limitant au terme linéaire

$$S \frac{d(\tilde{h}(t) + h_0)}{dt} + c\sqrt{h_0} + \frac{c}{2\sqrt{h_0}}\tilde{h}(t) = q_{in0} + \tilde{q}_{in}(t)$$

Termes en rouge donnent contribution nulle

Développement en série de  
Taylor limité au 1<sup>er</sup> ordre:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x) \big|_{x=x_0} (x - x_0) + O(x - x_0)^2$$

Ici  $f(h) = \sqrt{h}$

# Modélisation par une équation différentielle - cas d'un système non linéaire (4)

- Modèle linéarisé

$$S \frac{d\tilde{h}(t)}{dt} + \frac{c}{2\sqrt{h_0}} \tilde{h}(t) = \tilde{q}_{in}(t)$$

- Fonction de transfert

$$H(p) = \frac{\tilde{H}(p)}{\tilde{Q}_{in}(p)} = \frac{1/S}{p + c/(2S\sqrt{h_0})}$$

- Evolution du gain statique avec l'état d'équilibre :  $H(0) = 2\sqrt{h_0}/c$

$h_0$	$[m]$	0,2	0,8	1,4
Gain statique	$[m^{-2}s]$	0,224	0,469	0,591

- Evolution du pôle:  $p_1 = -c/(2S\sqrt{h_0})$   
 Réponse d'autant plus lente que le niveau est élevé

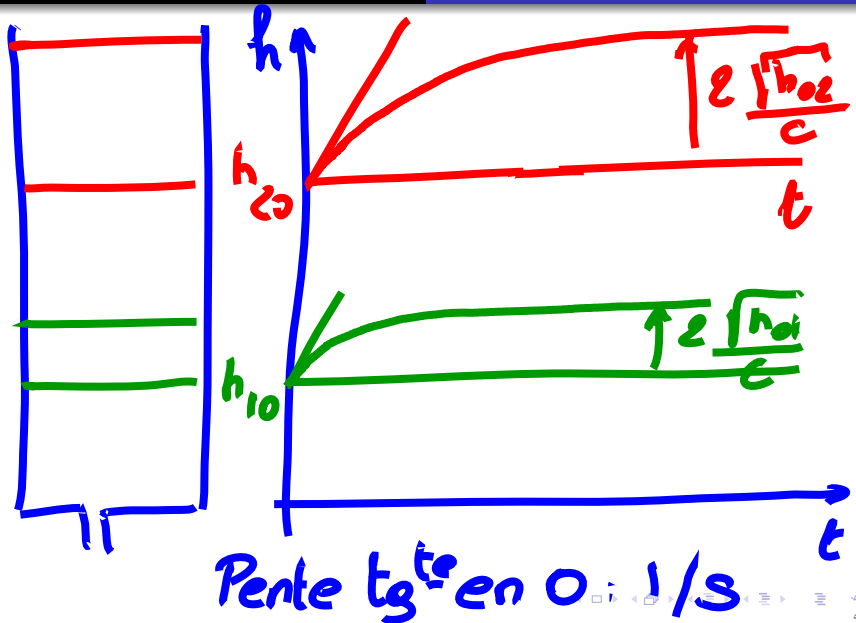
$$K(s) = \frac{1}{s} e^{-\frac{c}{2s\sqrt{h_0}}} \Delta(s)$$

$$\Delta(s) = \frac{2\sqrt{h_0}}{c} \left( 1 - e^{-\frac{c}{2s\sqrt{h_0}}} \right) \mu(s)$$

Réponses indicielles autour  
de 2 états d'équilibre  $\neq$

$$q_{in,i}(t) = q_{in,oi} + \mu(t)$$

$i=1,2$



## Modélisation par une équation différentielle - cas d'un système non linéaire (4)

- Lien avec la caractéristique statique

Equation de la tangente à la caractéristique au point  $(q_{in0}, h_0)$

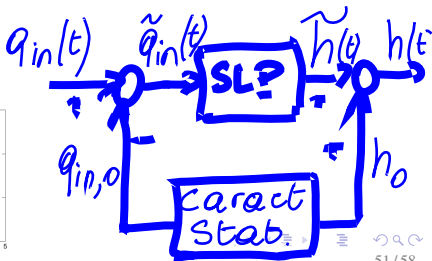
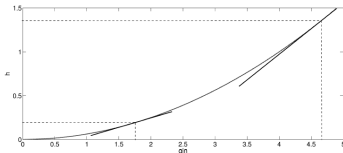
$$h - h_0 = \left. \frac{dh}{dq_{in}} \right|_{(q_{in0}, h_0)} (q_{in} - q_{in0})$$

soit

$$h - h_0 = \frac{2\sqrt{h_0}}{c} (q_{in} - q_{in0})$$

puisque  $\left. \frac{dh}{dq_{in}} \right|_{(q_{in0}, h_0)} = \frac{2q_{in0}}{c^2} = \frac{2\sqrt{h_0}}{c}$

- Illustration



## Modélisation par une équation différentielle - cas d'un système non linéaire (5)

### Messages

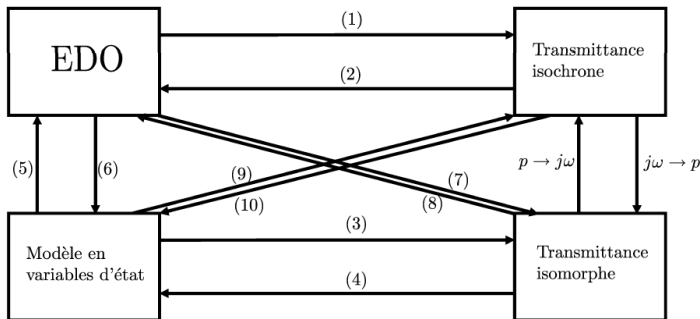
- Système non linéaire: gain statique et/ou temps de réponse varient selon le point de fonctionnement (ou l'état d'équilibre)
- **Pente de la caractéristique statique en un point  $\equiv$  gain statique modèle linéarisé en ce point**
- Rapidité de la réponse inversement proportionnelle à position du pôle de la fonction de transfert du premier ordre



# Outline

- 1 Objectifs du chapitre
- 2 Modèle dynamique - Modèle entrée-sortie
- 3 Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale
- 4 Modélisations interne et externe
- 5 **Récapitulation**

## Récapitulation (1)



(1) Transformée de Fourier de l'équation et déduction de  $H(j\omega) = \mathcal{F}(y(t))/\mathcal{F}(u(t))$   
 (si le système considéré est stable)

(2)  $H(j\omega) = NUM(j\omega)/DEN(j\omega) = \mathcal{F}(y(t))/\mathcal{F}(u(t)) \rightarrow$   
 $DEN(j\omega)\mathcal{F}(y(t)) = NUM(j\omega)\mathcal{F}(u(t))$  puis transformée de Fourier inverse

## Récapitulation (2)

**(3) Transformée de Laplace des équations d'état et élimination des variables d'état pour déduire  $H(p) = \mathcal{L}(y(t))/\mathcal{L}(u(t))$**

(4) Fait appel à la théorie des réalisations vue ultérieurement

(5) Élimination des variables d'état (le plus simple est souvent de passer par la transmittance isomorphe)

(6) Introduction de grandeurs auxiliaires (variables d'état)

**(7) Transformée de Laplace de l'équation et déduction de  $H(p) = \mathcal{L}(y(t))/\mathcal{L}(u(t))$**

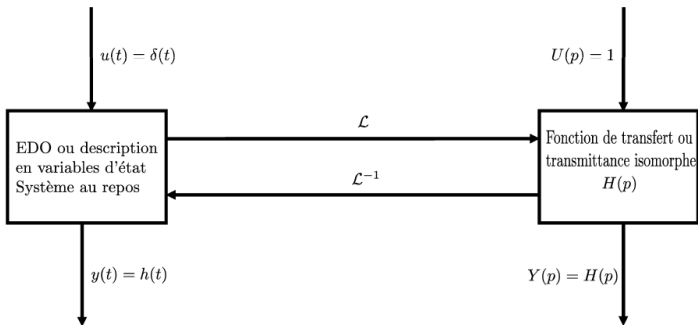
**(8)  $H(p) = NUM(p)/DEN(p) = \mathcal{L}(y(t))/\mathcal{L}(u(t)) \rightarrow$**

**$DEN(p)\mathcal{L}(y(t)) = NUM(p)\mathcal{L}(u(t))$  puis transformée de Laplace inverse**

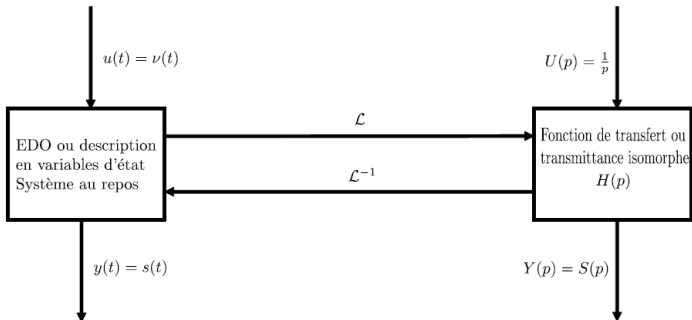
(9) Transformée de Fourier des équations d'état et élimination des variables d'état pour déduire  $H(j\omega) = \mathcal{F}(y(t))/\mathcal{F}(u(t))$

(10) Fait appel à la théorie des réalisations vue ultérieurement

## Récapitulation - Réponse impulsionnelle



## Récapitulation - Réponse indicielle



Comportement approché d'un syst.  
non linéaire autour d'un état  
d'équilibre caractérisé par  $(U_0, Y_0)$

