Analyse Numérique

Examen 2018 – 2019 (seconde session)

13h – 16h

- *Répondez aux questions sur les feuilles mises à votre disposition ou en laissant des commentaires dans vos programmes.*
- *Veuillez indiquer votre nom et prénom sur* **chaque** *feuille et dans le* **premier commentaire** *de chaque programme.*
- *Répondez aux questions 1-2 et 3-4 sur des feuilles* **séparées** *(elles seront corrigées séparément).*
- *Sauvegardez vos programmes dans le répertoire existant* `examen`*.*
- *Sauvegardez régulièrement les fichiers en cours d'édition.*

Question 1. (6 points) Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad , \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

(a) Déterminez numériquement (et sans utiliser l'instruction `qr`) des matrices Q et R produites par un algorithme de factorisation QR appliqué à A. Expliquez les étapes. Précisez le coût (en flops) de l'algorithme utilisé.

(b) Utilisez la factorisation du point (a) pour résoudre numériquement le système linéaire

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} .$$

Précisez le coût (en flops) de chaque étape de résolution.

(c) Avec quelle précision le système du point (b) peut-il être résolu par une méthode stable ? Sachant que la solution exacte du système au point (b) est un vecteur d'entiers, déterminez cette solution exacte, ainsi que la précision sur la solution numérique obtenue au point (b). Qu'indique cette dernière valeur ?

Note : vous pouvez utiliser l'instruction \ (backslash) seulement avec les systèmes triangulaires ; l'instruction `inv` (ou équivalente) est interdite.

Question 2. (5 points)

(a) Donnez et expliquez la formule des trapèzes.

(b) Donnez et justifiez l'expression de l'erreur locale pour cette formule.

(c) Expliquez pourquoi la formule des trapèzes est exacte pour tout polynôme de degré au plus 1 .

Question 3. (4 points) A l'aide d'une méthode vue au cours déterminez numériquement les trois zéros **négatifs** les plus petits en valeur absolue de la fonction `airy(2,x)` ; il s'agit d'une fonction continue définie dans Octave .

Question 4. (5 points) Résolvez numériquement le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2} + 10y = -x^2 , & x \in [0,1] , \\ y(0) = 1 , \ y(1) = 0 . \end{cases}$$

Vérifiez le respect des conditions aux limites.

Note : vous pouvez utiliser l'instruction \ (backslash) pour la résolution d'un système linéaire.