

Méthodes harmoniques

Année 2016-2017

Plan

- 1 Mise en contexte - Réponse harmonique
- 2 Tracé asymptotique des courbes de Bode
- 3 Stabilité d'une boucle fermée - méthodes harmoniques
- 4 Conception d'un régulateur par les méthodes harmoniques

Avantages des méthodes harmoniques

- Possibilité de prendre en compte facilement les erreurs (ou incertitudes) de modélisation
- Possibilité de relever expérimentalement la réponse harmonique et d'exploiter directement ces données (modèle non paramétrique) pour la conception d'un régulateur
- Possibilité d'obtenir rapidement (nombre faible d'itérations) un régulateur fournissant des performances en boucle fermée raisonnables

Objectifs à atteindre

- Pouvoir effectuer le tracé asymptotique des courbes de Bode
- Pouvoir esquisser une courbe de Nyquist et appliquer le critère de Nyquist pour étudier la stabilité d'une boucle fermée
- Pouvoir déterminer les marges de stabilité classiques (marge de gain et marge de phase) à partir des courbes de Bode ou de la courbe de Nyquist de la boucle ouverte
- Pouvoir concevoir un régulateur sur la base d'une réponse harmonique
- Pouvoir faire le lien entre réponse temporelle (réponse indicielle ou impulsionale), réponse harmonique et lieu d'Evans

Réponse harmonique - réponse d'un SLP à une entrée sinusoïdale

SLP stable - réponse en régime sinusoïdal établi

- Système stable caractérisé par sa transmittance isochrone : $H(j\omega)$
- Entrée: $u(t) = A \sin \omega_0 t$
- Sortie: $y(t) = A|H(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg(H(j\omega_0)))$

Réponse harmonique - réponse d'un SLP à une entrée sinusoïdale

SLP stable - réponse à un signal sinusoïdal appliqué

- Entrée : $u(t) = A \sin \omega_0 t \quad \nu(t) \leftrightarrow U(p) = \frac{A\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
- Sortie : $Y(p) = H(p) \frac{A\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
- Pour la simplicité supposons que $H(p)$ n'a que des pôles simples

$$Y(p) = \frac{\alpha_1}{p - p_1} + \frac{\alpha_2}{p - p_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{p - p_n} + \frac{\alpha_0}{p + j\omega_0} + \frac{\bar{\alpha}_0}{p - j\omega_0}$$

avec $p_i, i = 1, \dots, n$ les pôles de $H(p)$ et $\text{Re } p_i < 0$ (cf système stable)

- Par transformée de Laplace inverse

$$y(t) = \alpha_1 e^{p_1 t} + \cdots + \alpha_n e^{p_n t} + \alpha_0 e^{-j\omega_0 t} + \bar{\alpha}_0 e^{j\omega_0 t}$$

Réponse harmonique - réponse d'un SLP à une entrée sinusoïdale

SLP stable - réponse à un signal sinusoïdal appliqué

- Termes en $e^{p_i t}$ tendent vers zéro
- Détermination de α_O et $\bar{\alpha}_0$

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= H(p) \frac{A\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} (p + j\omega_0)|_{p=-j\omega_0} \\ &= -\frac{AH(-j\omega_0)}{2j} = -\frac{A|H(j\omega_0)|e^{-j\arg(H(j\omega_0))}}{2j} \\ \bar{\alpha}_0 &= \frac{A|H(j\omega_0)|e^{j\arg(H(j\omega_0))}}{2j}\end{aligned}$$

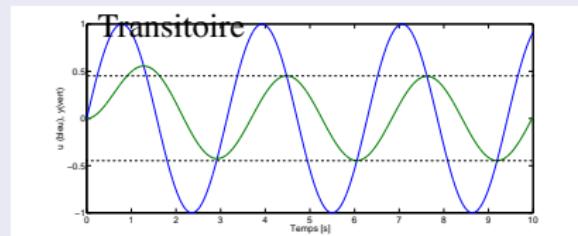
- Sortie après évanouissement du transitoire

$$\begin{aligned}y_e(t) &= A|H(j\omega_0)| \frac{e^{j(\omega_0 t + \arg(H(j\omega_0)))} - e^{-j(\omega_0 t + \arg(H(j\omega_0)))}}{2j} \\ &= A|H(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg(H(j\omega_0)))\end{aligned}$$

Réponse harmonique - réponse d'un SLP à une entrée sinusoïdale

Illustration

Réponse (en vert) du système $H(p) = \frac{1}{p+1}$ à $u(t) = \sin 2t$ $\nu(t)$ (en bleu)



Réponse harmonique - Courbes de Bode

Définition

- Porter en graphique le module de la transmittance isochrone (gain du système) exprimé en décibels ($20 \log_{10} |H(j\omega)|$) en fonction de ω (en échelle logarithmique).
- Porter en graphique $\arg H(j\omega)$ en fonction de ω en échelle logarithmique.

Intérêt de considérer les échelles logarithmiques

- Les courbes de Bode de systèmes en série s'additionnent
- Possibilité de représenter le comportement du système dans une large gamme de pulsations

Exemple

- Système du premier ordre : $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1}$
- Module de $H(j\omega)$: $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$
Soit en dB : $20 \log_{10} |H(j\omega)| = -20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2}$
- Phase de $H(j\omega)$: $\phi(\omega) = -\arctg\omega$

Réponse harmonique - Courbes de Bode

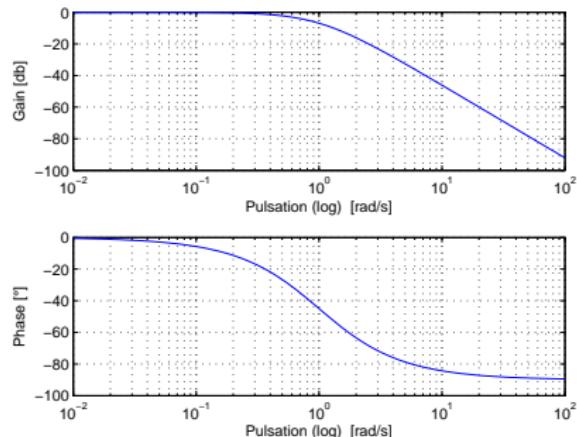


Figure: Courbes de Bode de $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1}$

Relevé expérimental d'une courbe de Bode

Procédure

- Déterminer le domaine des pulsations d'intérêt et choisir N points dans cet intervalle répartis de manière équidistante dans une échelle logarithmique (instruction "logspace" de MATLAB)
Exemple: 5 points dans l'intervalle $[10^{-2} \ 10^2]$:
 $0.01, \ 0.1, \ 1, \ 10, \ 100$
- Pour $i = 1, \dots, N$,
 - Introduire l'entrée $u(t) = A_i \sin \omega_i t$ $\nu(t)$ dans le système où l'amplitude A_i est choisie de manière à obtenir un signal d'amplitude acceptable à la sortie
 - Attendre que le transitoire se soit évanoui et relever le rapport des amplitudes entre la sinusoïde de sortie et d'entrée, et le déphasage entre ces deux signaux
 - Porter le résultat en figures dans les échelles appropriées

Evaluation du déphasage entre l'entrée et la sortie

Superposition des signaux temporels

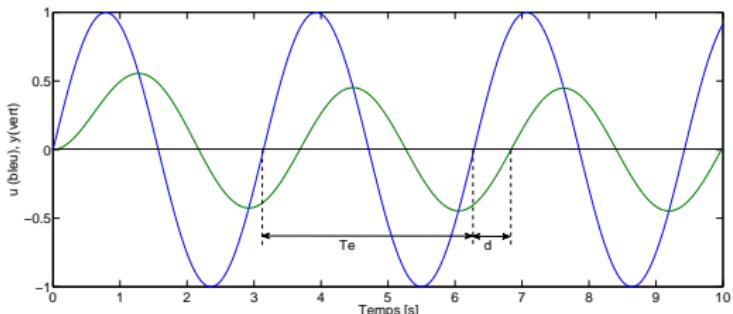
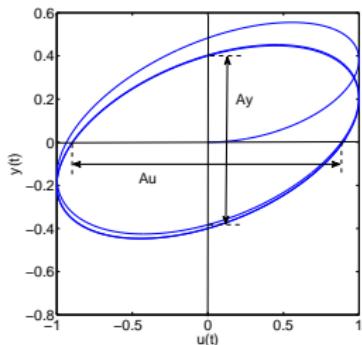


Figure: Déphasage $|\arg(H(j\omega_0))| = \frac{d}{T_e} 2\pi$ avec ω_0 pulsation de l'entrée

Courbe de Lissajous

Tracer $y(t)$ en fonction de $u(t) = A \sin(\omega_0 t) \nu(t)$. Après évanouissement du transitoire, on obtient une courbe de Lissajous. Notons que

$$Au = 2A |\sin(\arg(H(j\omega_0))| \text{ et } Ay = 2A |H(j\omega_0)| |\sin(\arg(H(j\omega_0))|$$



Instrument permettant l'automatisation du relevé des courbes de Bode: analyseur spectral

Forme du modèle

- Soit $H(p)$ la fonction de transfert dont on recherche les courbes de Bode
- Forme utilisée pour le tracé du lieu d'Evans

$$H(p) = A \frac{(p - z_1) \cdots (p - z_m)}{(p - p_1) \cdots (p - p_n)}$$

- Forme utilisée pour le tracé des courbes de Bode

$$H(p) = A_0 \frac{(pT_{z1} + 1) \cdots (pT_{zm} + 1)}{(pT_{p1} + 1) \cdots (pT_{pn} + 1)}$$

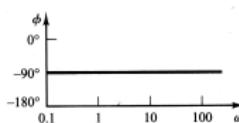
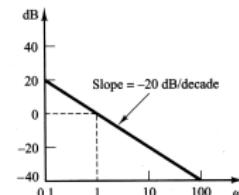
avec $A_0 = A(-1)^{(m-n)} \frac{z_1 \cdots z_m}{p_1 \cdots p_n}$,

$z_i = -1/T_{zi}$, $p_i = -1/T_{pi}$, T_{zi} et T_{pi} positifs

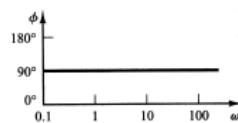
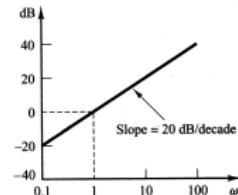
- Types de facteurs
 - ➊ $A_0(j\omega)^k$
 - ➋ $(j\omega T + 1)^{\pm 1}$
 - ➌ $\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + 1 \right]^{\pm 1}$

Facteur $A_0(j\omega)^k$

- Gain : $20 \log |A_0(j\omega)^k| = 20 \log |A_0| + 20k \log \omega$
Droite de pente $20 k \text{ dB/decade}$ passant par le point $(1, 20 \log |A_0|)$ c-à-d $\omega = 1$, Gain= $20 \log |A_0|$
- Phase : $\arg(A_0(j\omega)^k) = k90^\circ$ pour $A_0 > 0$ ou
 $\arg(A_0(j\omega)^k) = -180^\circ + k90^\circ$ pour $A_0 < 0$

Bode diagram of
 $G(j\omega) = 1/j\omega$

(a)

Bode diagram of
 $G(j\omega) = j\omega$

(b)

Figure: Courbes de Bode de $H(j\omega) = 1/(j\omega)$ (a) et $H(j\omega) = j\omega$ (b)

Facteur du premier ordre ($1 + j\omega T$)

Au numérateur

- Gain : $20 \log |1 + j\omega T| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$

Pour $\omega T \ll 1$: $1 + \omega^2 T^2 \simeq 1$ soit un gain proche de zéro

Pour $\omega T \gg 1$: $1 + \omega^2 T^2 \simeq \omega^2 T^2$ soit un gain proche de $20 \log T + 20 \log \omega$

Point d'intersection des asymptotes : $\omega = 1/T$

- Phase : $\arg(1 + j\omega T) = \arctg \omega T$

Pour $\omega T \ll 1$: $\arg(1 + j\omega T) \simeq 0^\circ$

Pour $\omega T \gg 1$: $\arg(1 + j\omega T) \simeq 90^\circ$

Conventionnellement saut de 0° à 90° en $\omega = 1/T$

Facteur du premier ordre ($1 + j\omega T$)

Au numérateur

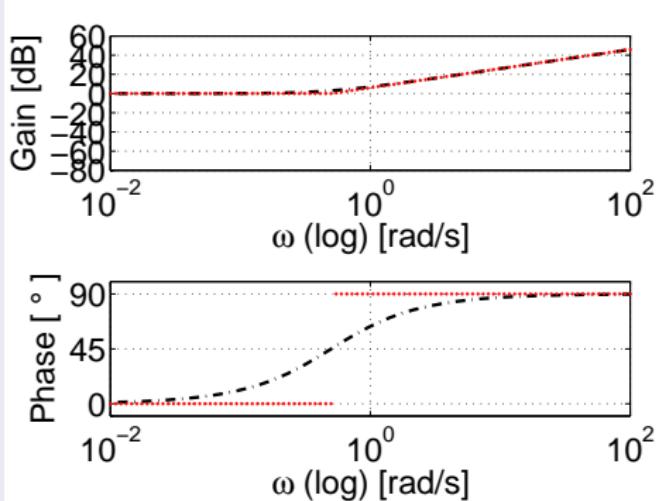


Figure: Courbes de Bode de $H(j\omega) = 1 + 2j\omega$

Facteur du premier ordre ($1 + j\omega T$)

Au dénominateur

- Gain : $20 \log \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$

Pour $\omega T \ll 1$: $1 + \omega^2 T^2 \simeq 1$ soit un gain proche de zéro

Pour $\omega T \gg 1$: $1 + \omega^2 T^2 \simeq \omega^2 T^2$ soit un gain proche de
 $-20 \log T - 20 \log \omega$

Point d'intersection des asymptotes : $\omega = 1/T$

- Phase : $\arg \frac{1}{(1+j\omega T)} = -\arctg \omega T$

Pour $\omega T \ll 1$: $\arg \frac{1}{1+j\omega T} \simeq 0$

Pour $\omega T \gg 1$: $\arg \frac{1}{1+j\omega T} \simeq -90^\circ$

Facteur du premier ordre ($1 + j\omega T$)

Au dénominateur

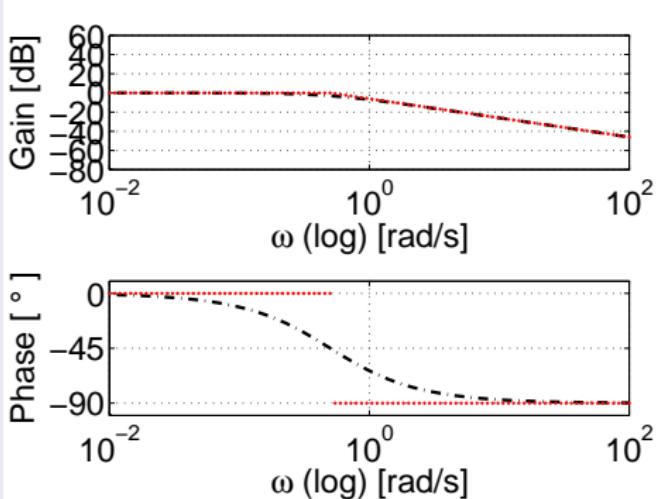


Figure: Courbes de Bode de $H(j\omega) = \frac{1}{1+2j\omega}$

Facteur du deuxième ordre $(1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2)$

Au numérateur

- Gain : $20 \log |1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2| =$

$$20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Pour $\omega \ll \omega_n$: Gain $\simeq 20 \log 1 = 0 \text{dB}$

Pour $\omega \gg \omega_n$: Gain $\simeq 40 \log \omega - 40 \log \omega_n$

Point d'intersection des asymptotes : $\omega = \omega_n$

- Phase : $\arg(1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2) = \arctg \left(\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2} \right)$

Pour $\omega \ll \omega_n$: $\arg(1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2) \simeq \arg 1 = 0^\circ$

Pour $\omega \gg \omega_n$: $\arg(1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2) \simeq -\arg(\omega/\omega_n)^2 = 180^\circ$

Conventionnellement saut de 0° à 180° en $\omega = \omega_n$

Facteur du deuxième ordre $(1 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2)$

Au dénominateur

- Gain : Changement de signe par rapport au facteur de même type au numérateur
- Phase : Changement de signe par rapport au facteur de même type au numérateur

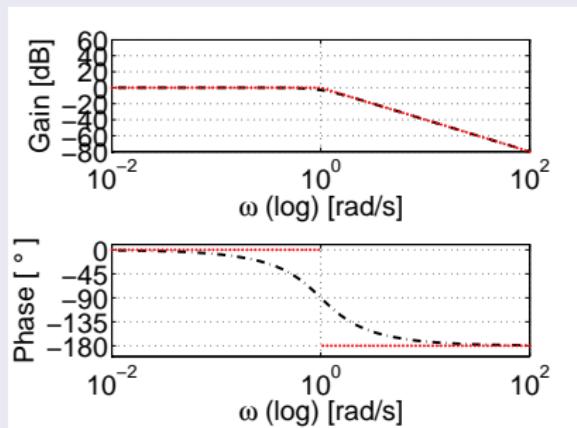


Figure: Courbes de Bode de $H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 1.4j\omega + 1}$

Facteur du deuxième ordre $(1 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2)$

Influence du facteur d'amortissement

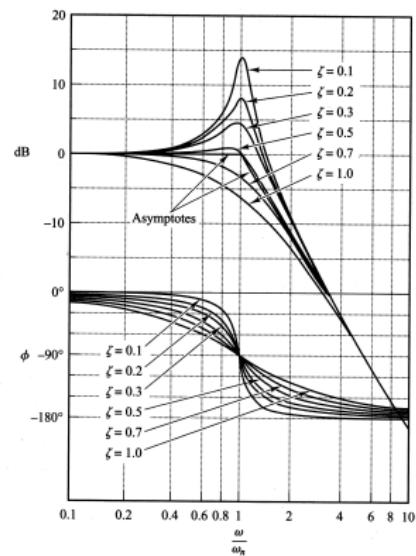


Figure: Facteur du 2^e ordre au dénominateur - allure des courbes de Bode pour ζ variant entre 0.1 et 1 [Ogata,2010]

Facteur du deuxième ordre - Lien entre ζ et le pic de résonnance

- On considère $H(j\omega) = \frac{1}{1+2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2}$
- Le gain maximum est obtenu pour la pulsation de résonnance

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad 0 \leq \zeta \leq 0,707$$

- Amplitude du pic de résonnance (maximum de la courbe de gain)

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad 0 \leq \zeta \leq 0,707$$

- Pour $\zeta > 0,707$, $M_r = 1$ et il n'y a pas de pic de résonnance

Facteur du deuxième ordre - Lien entre ζ et le pic de résonnance

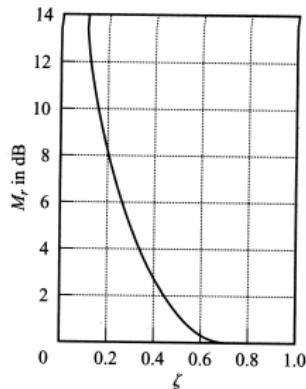


Figure: M_r en fonction de ζ pour un système du 2^e ordre

Système à déphasage non minimal (1)

- Considérons $H_1(j\omega) = \frac{1+j\omega T}{1+j\omega T_1}$ et $H_2(j\omega) = \frac{1-j\omega T}{1+j\omega T_1}$ $0 < T < T_1$
- $|H_1(j\omega)| = |H_2(j\omega)|$, mais les arguments sont différents
- $\arg H_1(j\omega) = \text{arctg}(\omega T) - \text{arctg}(\omega T_1)$
 $\arg H_2(j\omega) = -\text{arctg}(\omega T) - \text{arctg}(\omega T_1)$

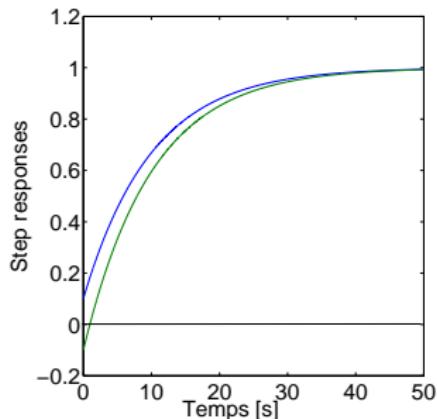


Figure: Réponses indicielles: $H_1(p) = \frac{1+p}{1+10p}$ en bleu, $H_2(p) = \frac{1-p}{1+10p}$ en vert

Système à déphasage non minimal (2)

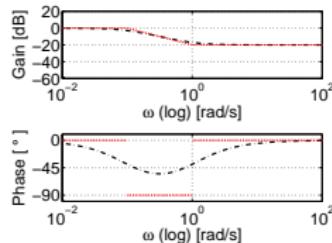


Figure: Courbes de Bode pour $H_1(j\omega) = \frac{1+j\omega}{1+10j\omega}$

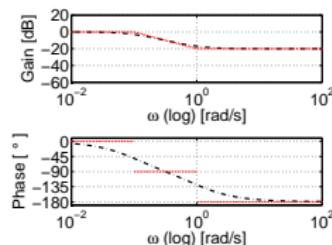


Figure: Courbes de Bode pour $H_2(j\omega) = \frac{1-j\omega}{1+10j\omega}$

Système à déphasage non minimal (3)

- Un système à déphasage minimal produit le plus petit déphasage entre l'entrée et la sortie
- Pour un système stable et à déphasage minimal, la courbe de gain détermine de manière univoque la courbe de déphasage (voir ultérieurement théorème de Bode)

Système instable

Signification physique

- Pas de lien avec la transformée de Fourier de la réponse impulsionale du système puisque cette transformée n'existe pas (l'intégrale définissant la transformée ne converge pas)
- La réponse du système instable à une sinusoïde appliquée ne tend pas vers une sinusoïde car la réponse transitoire diverge
- Les courbes de Bode caractérisent la réponse du système à une entrée sinusoïdale **lorsque le système réglé est stabilisé par un régulateur adéquat**

Facteur $(1 - j\omega T)$ au dénominateur

- Courbe de gain identique au cas $(1 + j\omega T)$
- Courbe de phase de signe opposé au cas $(1 + j\omega T)$

Résumé de la méthode pour le tracé asymptotique des courbes de Bode

- Mettre la fonction de transfert $H(j\omega)$ sous la forme

$$A_0 \frac{(j\omega)^k (j\omega T_{z1} + 1) \dots (j\omega T_{zm1} + 1) (1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_{n_{z1}}} + (\frac{j\omega}{\omega_{n_{z1}}})^2) \dots (1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_{n_{zm2}}} + (\frac{j\omega}{\omega_{n_{zm2}}})^2)}{(j\omega T_{p1} + 1) \dots (j\omega T_{pn1} + 1) (1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_{n_{p1}}} + (\frac{j\omega}{\omega_{n_{p1}}})^2) \dots (1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_{n_{pn2}}} + (\frac{j\omega}{\omega_{n_{pn2}}})^2)}$$

Résumé de la méthode pour le tracé asymptotique des courbes de Bode

- Courbe du gain

- Considérer le facteur $A_0(j\omega)^k$ où k peut être positif ou négatif
Tracer la droite $Gain = 20 \log |A_0| + 20k \log \omega$ passant par le point $(1, 20 \log |A_0|)$ et de pente $k \ 20 \ dB/dec$
- En parcourant l'axe des pulsations à partir des valeurs les plus basses, modifier la pente de l'asymptote:
 - de $+20dB/dec$ (de $+40dB/dec$) à chaque rencontre d'une pulsation associée à un zéro réel simple (d'une pulsation naturelle associée à des zéros complexes conjugués)
 - de $-20dB/dec$ (de $-40dB/dec$) à chaque rencontre d'une pulsation associée à un pôle réel simple (d'une pulsation naturelle associée à des pôles complexes conjugués)
- Si les zéros ou les pôles sont de multiplicité $\ell > 1$, les changements de pente doivent être multipliés par ℓ

Résumé de la méthode pour le tracé asymptotique des courbes de Bode

• Courbe de phase

- Asymptote aux basses pulsations $k \rightarrow 0^\circ$
- A chaque pulsation correspondant à un changement de pente dans la courbe du gain:
 - Effectuer un saut de $+90^\circ$ ($+180^\circ$) pour un zéro simple (pour des zéros complexes conjugués) à partie réelle négative ou un pôle simple (des pôles complexes conjugués) à partie réelle positive
 - Effectuer un saut de -90° (-180°) pour un zéro simple (pour des zéros complexes conjugués) à partie réelle positive ou un pôle simple (des pôles complexes conjugués) à partie réelle négative.
- Si les zéros ou les pôles sont de multiplicité $\ell > 1$, les sauts de phase doivent être multipliés par ℓ .

Résumé de la méthode pour le tracé asymptotique des courbes de Bode

Pôle	Changement de pente (gain)	Discontinuité (déphasage)
pôle réel d'ordre ℓ à partie réelle < 0	$-\ell \text{ } 20dB/dec$	$-\ell \text{ } 90^\circ$
pôles complexes conjugués d'ordre ℓ à partie réelle < 0	$-\ell \text{ } 40dB/dec$	$-\ell \text{ } 180^\circ$
pôle réel d'ordre ℓ à partie réelle > 0	$-\ell \text{ } 20dB/dec$	$\ell \text{ } 90^\circ$
pôles complexes conjugués d'ordre ℓ à partie réelle > 0	$-\ell \text{ } 40dB/dec$	$\ell \text{ } 180^\circ$

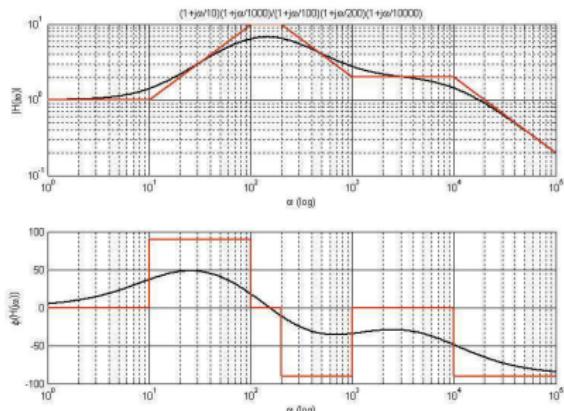
Résumé de la méthode pour le tracé asymptotique des courbes de Bode

Zéro	Changement de pente (gain)	Discontinuité (déphasage)
zéro réel d'ordre ℓ à partie réelle < 0	$\ell \text{ } 20dB/dec$	$\ell \text{ } 90^\circ$
zéros complexes conjugués d'ordre ℓ à partie réelle < 0	$\ell \text{ } 40dB/dec$	$\ell \text{ } 180^\circ$
zéros réel d'ordre ℓ à partie réelle > 0	$\ell \text{ } 20dB/dec$	$-\ell \text{ } 90^\circ$
zéros complexes conjugués d'ordre ℓ à partie réelle > 0	$\ell \text{ } 40dB/dec$	$-\ell \text{ } 180^\circ$

Courbes de Bode dans le cours d'électronique appliquée

Hypothèses et conventions

- Présentation limitée à des systèmes stables et à déphasage minimal sans pôle ou zéro à l'origine
- Module $|H(j\omega)|$ pas exprimé en dB



Objectif

- Pouvoir déduire la stabilité d'une boucle fermée à partir de la réponse harmonique de la boucle ouverte
- Pouvoir caractériser des marges de stabilité (ou tolérances à des erreurs de modélisation)

Prérequis - Principe de l'argument

On considère une fonction f analytique dans \mathcal{D} , domaine intérieur à C (un chemin admissible simple fermé orienté dans le sens positif) sauf aux pôles dans \mathcal{D} . En outre f est analytique et non nulle sur C . Soit Γ l'image de C par la fonction f .

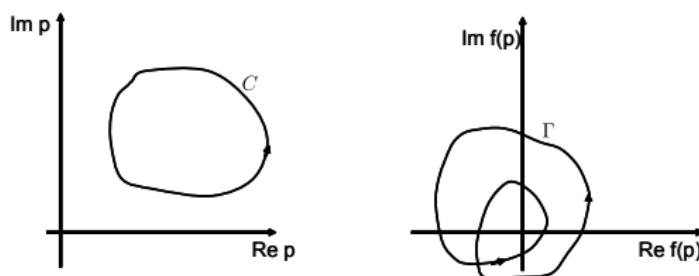


Figure: Illustration des chemins C et Γ

Prérequis - Principe de l'argument

Enoncé

Le nombre N_E d'encerclements de l'origine par le chemin Γ est donné par:

$$N_E = Z - P$$

où Z et P sont respectivement le nombre de zéros et de pôles de $f(p)$ à l'intérieur du chemin C (multiplicité prise en compte).

Prérequis - Principe de l'argument

Exemple

- C : Cercle centré en 0 et de rayon R orienté dans le sens positif soit $p = Re^{j\theta}$ avec $0 \leq \theta < 2\pi$
- $f(p) = 1/p$
- $\Gamma = (1/R)e^{-j\theta}$ cercle de rayon $1/R$ orienté dans le sens négatif
- Il vient $N_E = -P = -1$ (sens de parcours de Γ opposé au sens de parcours de $C \rightarrow N_E < 0$)

Evaluation du nombre d'encerclements

Tracer une demi-droite passant par l'origine et compter le nombre d'intersections avec le chemin Γ en prenant en compte l'orientation du chemin à chaque intersection (sens opposé à celui de $C \rightarrow -1$, sens identique à celui de $C \rightarrow +1$).

Critère de stabilité de Nyquist

Obtention

- Fonction de transfert d'une boucle fermée

$$\frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{D(p)G(p)}{1 + D(p)G(p)H(p)}$$

- Appliquer le principe de l'argument au chemin C représenté ci-dessous (appelé contour de Nyquist) et pour la fonction $f(p) = 1 + D(p)G(p)H(p)$
- Les zéros de $f(p)$ sont les pôles de la boucle fermée
- Les pôles de $f(p)$ sont les pôles de la boucle ouverte

Critère de stabilité de Nyquist (suite)

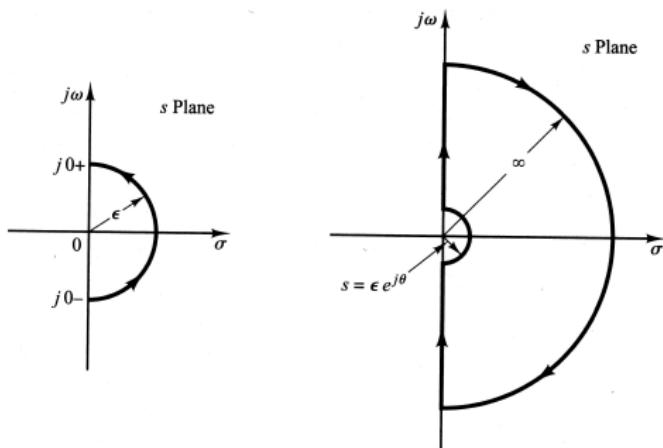


Figure: Contour de Nyquist pour une boucle ouverte avec un ou plusieurs pôles à l'origine [Ogata, 2010]

Critère de stabilité de Nyquist (suite)

Obtention (suite)

- Soit Γ l'image du contour de Nyquist, C , par $f(p)$
- Par application du théorème de l'argument:

Nombre d'encerclements de l'origine par Γ

= Nombre de zéros de $f(p)$ à l'intérieur du contour de Nyquist

- Nombre de pôles de $f(p)$ à l'intérieur du contour de Nyquist

= Nombre de pôles de la boucle fermée dans le demi-plan droit

- Nombre de pôles de la boucle ouverte dans le demi-plan droit

Nombre d'encerclements compté positivement si l'orientation de Γ est la même que celle de C

Critère de stabilité de Nyquist (suite)

Obtention (suite)

- Remarquer que le nombre d'encercllements de l'origine par Γ (l'image de C par $f(p)$) est égal au nombre d'encercllements du point $(-1, 0)$ par Γ_{bo} (l'image de C par $f_{bo}(p) = D(p)G(p)H(p)$)
- Γ_{bo} , l'image de C par $f_{bo}(p) = D(p)G(p)H(p)$ est appelée la courbe de Nyquist complète
- En cas de pôles imaginaires, il y a lieu de modifier le contour de Nyquist en introduisant des demi-cercles pour les exclure du contour

Enoncé

Nombre d'encercllements du point $(-1, 0)$ par la courbe de Nyquist complète = Nombre de pôles de la boucle fermée dans le demi-plan droit - Nombre de pôles de la boucle ouverte dans le demi-plan droit

Esquisse de la courbe de Nyquist complète

Système du premier ordre



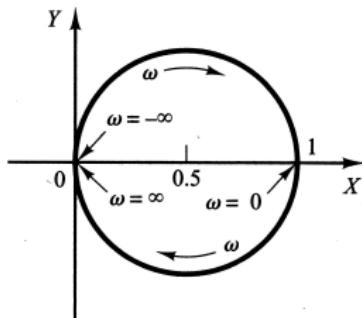
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} + j \frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

- Tracé approché obtenu à partir des courbes de Bode en représentant $H(j\omega)$ en coordonnées polaires
 - Pour $\omega = 0$, $|H(j0)| = 1$ et $\arg(H(j0)) = 0^\circ$
 - Pour $\omega = 1/T$, $|H(j\frac{1}{T})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\arg(H(j\frac{1}{T})) = -45^\circ$
 - Pour $\omega \rightarrow \infty$, $|H(j\omega)| \rightarrow 0$ et $\arg(H(j\omega)) \rightarrow -90^\circ$
- Notons $X = \operatorname{Re}(H(j\omega))$ et $Y = \operatorname{Im}(H(j\omega))$, il vient

$$(X - \frac{1}{2})^2 + Y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Esquisse de la courbe de Nyquist complète (suite)

Système du premier ordre (suite)



(b)

Figure: Courbe de Nyquist pour un système du premier ordre de gain statique égal à 1 [Ogata,2010]

Esquisse de la courbe de Nyquist complète (suite)

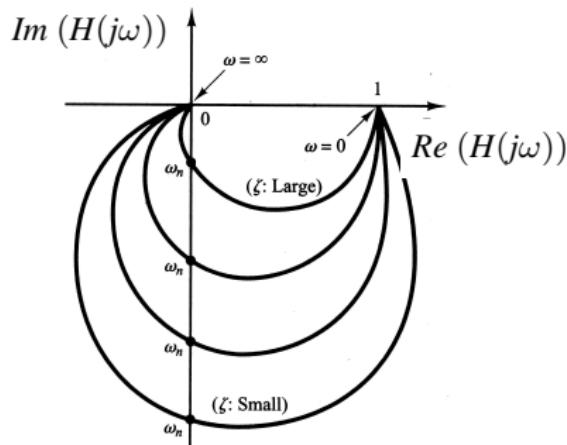
Système du deuxième ordre

- $H(j\omega) = \frac{1}{1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$ pour $\zeta > 0$
- Quelques points caractéristiques
 - Pour $\omega = 0$, $|H(j0)| = 1$ et $\arg(H(j0)) = 0^\circ$
 - Pour $\omega = \omega_n$, $H(j\omega_n) = 1/(2\zeta j)$ soit $|H(j\omega_n)| = 1/(2\zeta)$ et $\arg(H(j\omega_n)) = -90^\circ$
 - Pour $\omega \rightarrow \infty$, $|H(j\infty)| = 0$ et $\arg(H(j\infty)) = -180^\circ$

Esquisse de la courbe de Nyquist complète (suite)

Système du deuxième ordre (suite)

- Cas sous-amorti ($\zeta < 1$): le pic de résonnance correspond au point le plus éloigné de l'origine
- Cas sur-amorti ($\zeta > 1$) (2 pôles réels): la courbe de Nyquist se rapproche d'un cercle lorsqu'un des pôles est nettement plus proche de l'origine que l'autre



Esquisse de la courbe de Nyquist complète (suite)

Boucle ouverte sans ou avec pôle(s) à l'origine

- Système de type zéro vis-à-vis de la référence (pas de pôle à l'origine): point de départ de la courbe de Nyquist ($\omega = 0$) sur l'axe réel positif ou négatif selon le signe de A_0 .
- Système de type 1 vis-à-vis de la référence: asymptote verticale; $\omega = 0$ correspond à un point dont la partie réelle est finie et la partie imaginaire vaut plus ou moins l'infini selon le signe de A_0 .
- Système de type 2 vis-à-vis de la référence : attention, contrairement à ce que suggèrent souvent les figures dans les livres, l'axe réel négatif n'est en général pas une asymptote de la courbe de Nyquist

Esquisse de la courbe de Nyquist complète (suite)

Exemple - Cas d'un système de type 1

- Fonction de transfert de la boucle ouverte

$$D(p)G(p) = \frac{A_0}{p(pT + 1)}$$

- Image du demi-cercle autour de l'origine: $p = \epsilon e^{j\theta}$ avec $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

$$D(\epsilon e^{j\theta})G(\epsilon e^{j\theta}) \simeq \frac{A_0}{\epsilon e^{j\theta}} = \frac{A_0}{\epsilon} e^{-j\theta}$$

- Correspond à un demi-cercle de rayon infini qui se referme dans le demi-plan droit. L'argument du point qui parcourt le demi-cercle passe bien de 90° à 0° puis à -90°

Esquisse de la courbe de Nyquist complète (suite)

Exemple - Cas d'un système de type 1 (suite)

- Détermination de l'asymptote verticale ($A_0 = 1$)

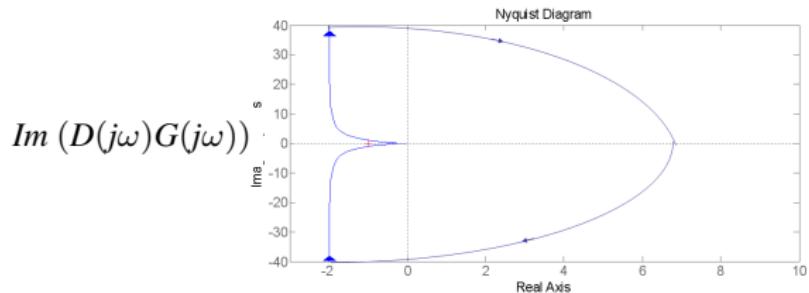
$$D(j\omega)G(j\omega) = \frac{-T}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{1}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

Quand $\omega \rightarrow 0^+$, $Re(D(j\omega)G(j\omega)) \rightarrow -T$ et

$Im(D(j\omega)G(j\omega)) \rightarrow -\infty$

- Par application du critère de stabilité, on déduit que la boucle fermée est stable

Esquisse de la courbe de Nyquist complète (suite)



$$Re(D(j\omega)G(j\omega))$$

Figure: Courbe de Nyquist pour la boucle ouverte décrite par
 $D(p)G(p) = \frac{1}{p(2p+1)}$

Esquisse de la courbe de Nyquist complète (suite)

Exemple - Cas d'un système de type 2

- Fonction de transfert de la boucle ouverte

$$D(p)G(p) = \frac{A_0}{p^2(pT + 1)}$$

- Image du demi-cercle autour de l'origine: $p = \epsilon e^{j\theta}$ avec $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

$$D(\epsilon e^{j\theta})G(\epsilon e^{j\theta}) \simeq \frac{A_0}{\epsilon^2 e^{2j\theta}} = \frac{A_0}{\epsilon^2} e^{-2j\theta}$$

- Correspond à un cercle de rayon infini orienté dans le sens opposé au contour de Nyquist

Esquisse de la courbe de Nyquist complète (suite)

Exemple - Cas d'un système de type 2 (suite)

- Décomposition en parties réelle et imaginaire ($A_0 = 1$)

$$D(j\omega)G(j\omega) = \frac{-1}{\omega^2(1 + \omega^2T^2)} + j\frac{T}{\omega(1 + \omega^2T^2)}$$

- Quand $\omega \rightarrow 0^+$, la partie réelle et la partie imaginaire de $D(j\omega)G(j\omega)$ tendent vers $-\infty$ et $+\infty$ respectivement
- Par application du critère de stabilité, on déduit que la boucle fermée possède deux pôles dans le demi-plan droit (cf deux encerclements du point $(-1, 0)$)

Esquisse de la courbe de Nyquist complète (suite)

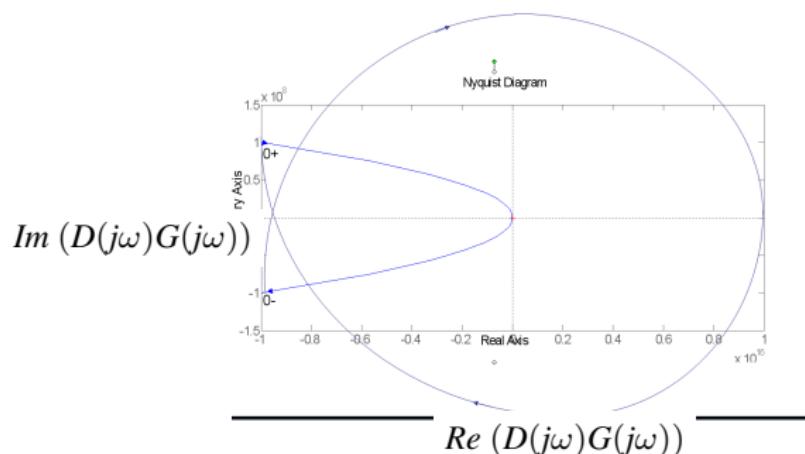


Figure: Courbe de Nyquist pour la boucle ouverte décrite par
 $D(p)G(p) = \frac{1}{p^2(p+1)}$

Intervalle de valeurs du gain pour lequel la boucle fermée est stable

Exemple

- Système réglé : $G(p) = \frac{1}{p(p+1)^2}$
- Régulateur proportionnel : $D(p) = k_P$
- Décomposition en parties réelle et imaginaire (courbe de Nyquist pour $k_P = 1$):
Objectif: déterminer asymptote verticale et point d'intersection avec l'axe réel
(à réaliser après l'esquisse à partir de la courbe de Bode)

$$G(j\omega) = \frac{-2}{(\omega^2 + 1)^2} + j \frac{\omega^2 - 1}{\omega(\omega^2 + 1)^2}$$

- Point d'intersection avec l'axe réel:

$$\omega = \pm 1 \quad Re(G(j\omega)) = -0.5$$

- Asymptote verticale: $Re(G(j\omega)) = -2$

Intervalle de valeurs du gain pour lequel la boucle fermée est stable (suite)

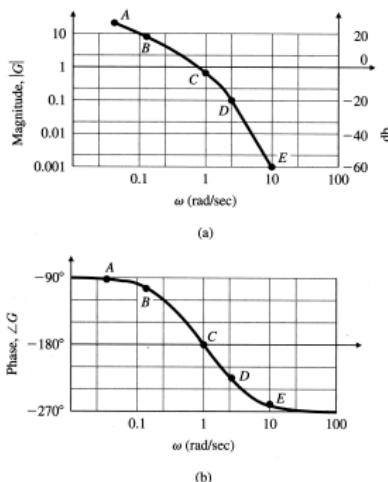


Figure: Courbes de Bode de $G(p) = \frac{1}{p(p+1)^2}$ c-à-d fonction de transfert de la boucle ouverte pour $k_P = 1$

Intervalle de valeurs du gain pour lequel la boucle fermée est stable (suite)

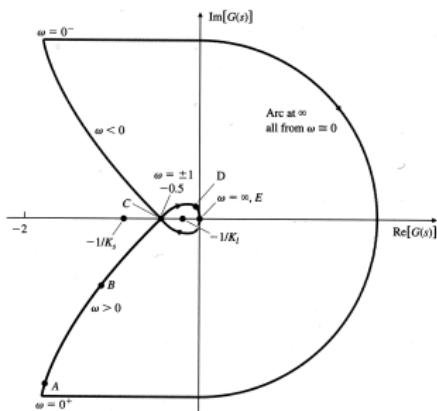


Figure: Courbes de Nyquist (complète de $G(p) = \frac{1}{p(p+1)^2}$) c-à-d fonction de transfert de la boucle ouverte pour $k_P = 1$

Intervalle de valeurs du gain pour lequel la boucle fermée est stable (suite)

Effet d'une modification de k_P - Etude de stabilité

- $k_P \neq 1$ induit une homothétie de centre $(0, 0)$ et de rapport k_P
Pas de pôle de la boucle ouverte à l'intérieur du contour de Nyquist → Boucle fermée stable si $0 < k_P < 2$.
Pour $k_P > 2$, la boucle fermée possède 2 pôles à partie réelle positive
Pour $k_P < 0$, la boucle fermée possède 1 pôle à partie réelle positive
- Alternative: remarquer que le nombre d'encerclements de $(-1, 0)$ par la courbe de Nyquist de $k_P G(p)$ est égal au nombre d'encerclements du point $(-1/k_P, 0)$ par la courbe de Nyquist de $G(p)$.
- Application au cas étudié:
 $0 > -1/k_P > -0.5$ correspond à 2 encerclements → instabilité pour $k_P > 2$
 $0 < -1/k_P < \infty$ correspond à un encerclement → instabilité pour $k_P < 0$

Marges de stabilité

Objectif

- Permettent d'évaluer la tolérance de la boucle fermée vis-à-vis d'erreurs de modélisation
- Font souvent partie des spécifications pour la conception d'un régulateur (cf lien entre la marge de phase et le facteur d'amortissement de la boucle fermée notamment)

Trois marges de stabilité

- Marges classiques: marge de gain et marge de phase
- Marge vectorielle

Marges de stabilité

Marge de gain - Définition - Rappel

Facteur maximum et/ou minimum par lequel on peut modifier le gain du système réglé (ou de la boucle ouverte) sans perdre la stabilité de la boucle fermée (marge de gain souvent exprimée en dB)

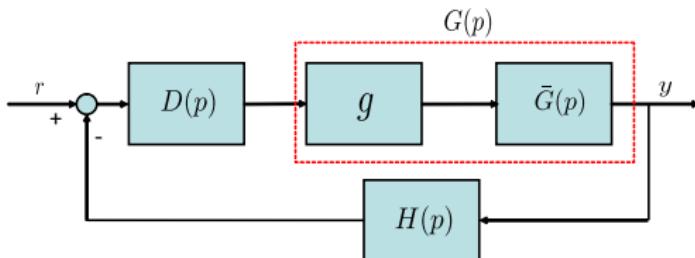


Figure: Boucle fermée incluant un système réglé de gain incertain

Marges de stabilité

Marge de phase - Définition

Retard de phase que l'on peut rajouter dans la boucle sans perdre la stabilité

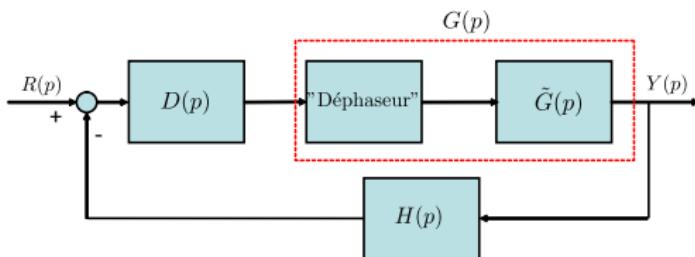
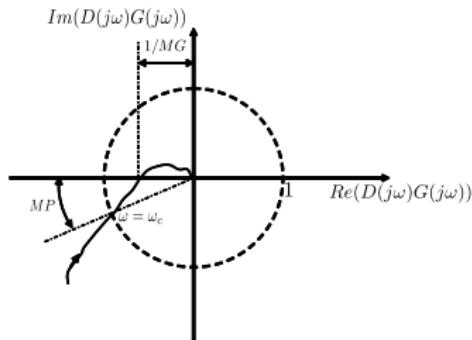


Figure: Boucle fermée incluant un système réglé de phase incertaine

Marges de stabilité

Visualisation de la marge de gain (MG) et de la marge de phase (MP) sur la courbe de Nyquist de la boucle ouverte

- Marge de gain: rapport d'homothétie (de centre $(0, 0)$) qui amène la courbe de Nyquist à passer par le point $(-1, 0)$
- Marge de phase: angle de la rotation qui amène le point de coupure de la courbe de Nyquist en $(-1, 0)$
Point de coupure (crossover) : point pour lequel le module de la boucle ouverte, $|D(j\omega_c)G(j\omega_c)|$, vaut 1 (ω_c est appelée la pulsation de coupure)



Marges de stabilité

Visualisation de la marge de gain (MG) et de la marge de phase(MP) sur les courbes de Bode de la boucle ouverte

- Marge de gain:

$$MG = -20 \log_{10} |D(j\omega_{180})G(j\omega_{180})| \text{ (en dB)}$$

avec ω_{180} la pulsation pour laquelle $\arg(D(j\omega_{180})G(j\omega_{180})) = -180^\circ$

Si $MG < 0$, le système est en général instable (pour un système en boucle ouverte sans pôle dans le demi-plan droit)

- Marge de phase :

$$MP = 180^\circ + \arg(D(j\omega_c)G(j\omega_c))$$

où ω_c est la pulsation de coupure

Marges de stabilité

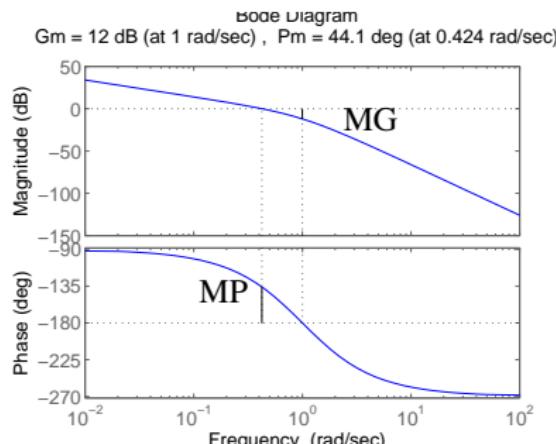


Figure: Marge de gain et marge de phase pour la boucle ouverte
 $D(p)G(p) = \frac{0.5}{p^3 + 2p^2 + p}$

Marges de stabilité

Valeurs usuelles pour MG et MP

- Marge de gain supérieure ou égale à 6 dB
- Marge de phase entre 30° et 60°

Marge de stabilité vectorielle

Plus courte distance euclidienne entre le point $(-1, 0)$ et la courbe de Nyquist de la boucle ouverte

$$MV = \inf_{\omega} |1 + D(j\omega)G(j\omega))| = 1/\sup_{\omega} |\mathcal{S}(j\omega)| = 1/\|\mathcal{S}(j\omega)\|_{\infty}$$

où la dernière égalité correspond à la définition de la norme infinie

Lien entre la marge de phase et le facteur d'amortissement pour un système d'ordre 2

- Boucle ouverte $D(p)G(p) = \frac{\omega_n^2}{p(p+2\zeta\omega_n)}$

- Boucle fermée $\mathcal{T}(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2+2\zeta\omega_np+\omega_n^2}$

- Calcul de la marge de phase:

$$|D(j\omega)G(j\omega)| = 1 \text{ pour } \omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}$$

$$\rightarrow \arg(D(j\omega_c)G(j\omega_c)) = -\arg(j\omega_c) - \arg(j\omega_c + 2\zeta\omega_n)$$

-

$$\begin{aligned} MP &= 180^\circ + \arg(D(j\omega_c)G(j\omega_c)) \\ &= \operatorname{arctg} \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}} \end{aligned}$$

- Pour les valeurs de $\zeta \leq 0.6$, on constate que $\zeta \simeq \frac{MP}{100^\circ}$, avec MP en degrés

Lien entre la marge de phase et le facteur d'amortissement pour un système d'ordre 2

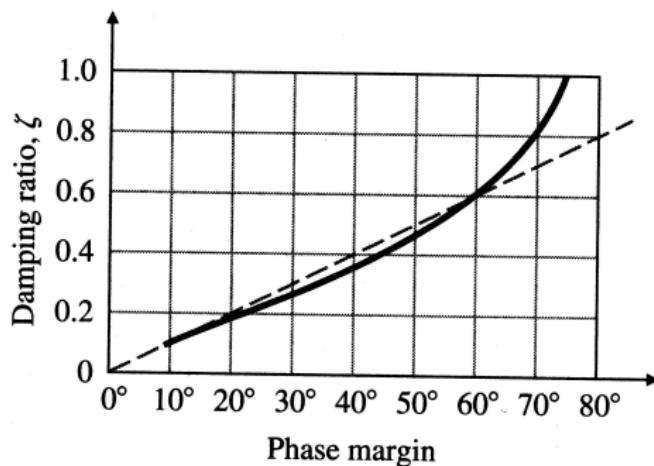


Figure: Lien entre le facteur d'amortissement et la marge de phase pour un système du 2^e ordre en boucle fermée [Franklin et al., 2010]

Lien entre la marge de phase et le dépassement indiciel pour un système d'ordre 2

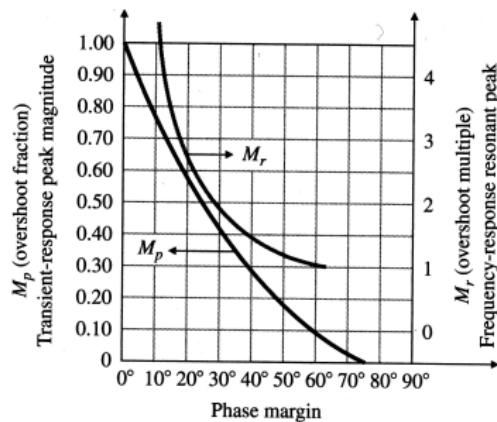


Figure: Dépassement indiciel de la réponse transitoire (M_p) et amplitude du pic de résonnance (M_r) en fonction de MP pour un système du 2^e ordre en boucle fermée [Franklin et al., 2010]

Objectif et approche

Objectif

Fournir une démarche de conception de régulateur pour un système réglé stable et à déphasage minimal

Approche

Mise en forme (shaping) de la courbe de Bode de la boucle ouverte en exploitant

- ① la relation entre la pente de la courbe de Bode de la boucle ouverte et le déphasage induit par la boucle ouverte (prise en compte de la spécification sur la marge de phase) - théorème de Bode
- ② les spécifications sur la boucle fermée et, en particulier, le lien entre la bande passante et la pulsation de coupure

Théorème de Bode

Enoncé

Pour tout système stable et à déphasage minimal (c-à-d sans zéro dans le demi-plan droit), la phase de $H(j\omega)$ et le gain de $H(j\omega)$ sont liés de manière univoque par la relation suivante:

$$\arg(H(j\omega_0)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dM}{du} \right) W(u) du \quad (\text{en radians})$$

où $M = \ln|H(ju)|$; $u = \ln(\omega/\omega_0)$;

$W(u) = \ln(\coth(|u|/2))$ Fonction de pondération

Rappel: $\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Théorème de Bode (suite)

Approximation

- $\frac{dM}{du} \simeq n$ pente de $|H(j\omega)|$ dans des échelles bi-logarithmiques
- $W(u) \simeq \frac{\pi^2}{2} \delta(u)$

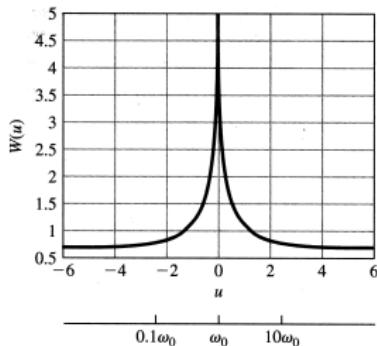


Figure: Fonction de pondération dans la relation de Bode [Franklin et al., 2010]

Théorème de Bode (suite)

Forme approchée du théorème de Bode

$$\arg H(j\omega_0) \simeq n \times 90^\circ$$

Formulation des problèmes de régulation dans le domaine harmonique

Conditions sur la fonction de transfert de la boucle fermée

Fonction de transfert entre $R(p)$ et $Y(p)$

$$\mathcal{T}(p) = \frac{D(p)G(p)}{1 + D(p)G(p)}$$

- $|\mathcal{T}(j\omega)| \simeq 1$ aux basses fréquences (suivi de trajectoire)
- $|\mathcal{T}(j\omega)| << 1$ aux hautes fréquences (atténuation bruit de mesure)

Bande passante

- Bande (ou intervalle) des fréquences dans laquelle le gain est supérieur à $-3dB$.
- Borne supérieure ω_{BP} : pulsation pour laquelle la sortie y est atténuée d'un facteur 0.707 par rapport à r , soit une atténuation de $-3dB$
- Par abus de langage ω_{BP} souvent appelée bande passante

Formulation des problèmes de régulation dans le domaine harmonique

Courbe de Bode (en gain) typique pour une boucle fermée

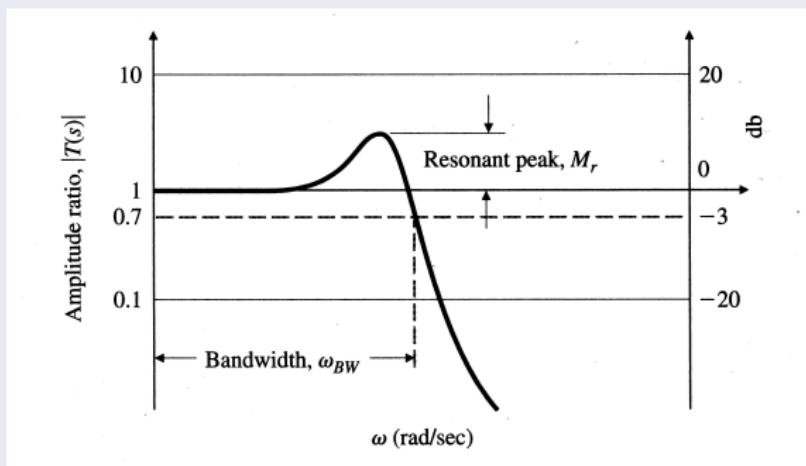


Figure: Courbe typique du gain en fonction de la pulsation pour $\mathcal{T}(j\omega)$ (notation ω_{BW} à la place de ω_{BP}) [Franklin et al., 2010]

Des spécifications de la BF aux spécifications de la BO

Comportement au voisinage de la fréquence de coupure

- $|D(j\omega)G(j\omega)| \simeq 1$ dans le voisinage de ω_c
- $|\mathcal{T}(j\omega_c)|$ dépend fortement de la marge de phase

MP	$\arg(D(j\omega_c)G(j\omega_c))$	$ \mathcal{T}(j\omega_c) $
90°	-90°	$\left \frac{e^{-j\pi/2}}{1+e^{-j\pi/2}} \right = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$
45°	-135°	$\left \frac{e^{-j3\pi/4}}{1+e^{-j3\pi/4}} \right = 1,31$

Des spécifications de la BF aux spécifications de la BO

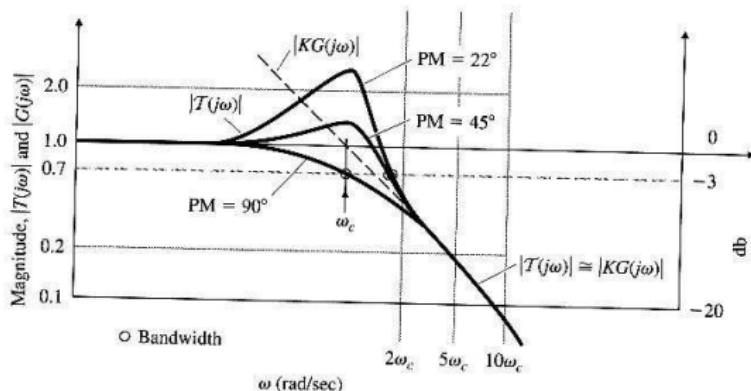


Figure: Illustration du lien entre bande passante et marge de phase -
 Remplacer dans la figure $KG(j\omega)$ par $D(j\omega)G(j\omega)$ [Franklin et al., 2010]

→ $\omega_{BP} > \omega_c$ pour les faibles valeurs de PM

Des spécifications de la BF aux spécifications de la BO

Lien entre ω_{BP} et ω_c

$$\omega_c \leq \omega_{BP} \leq 2\omega_c$$

Sert de base au choix de ω_c connaissant ω_{BP}

Des spécifications en BF aux spécifications en BO

Démarche de conception dans le voisinage de ω_c

Ajuster la transmittance isochrone $D(j\omega)G(j\omega)$ de sorte que sa pente (dans des échelles bi-logarithmiques) soit approximativement égale à -1 autour de la pulsation de coupure (soit -20 dB/dec dans la courbe de Bode)

Justification

Permet d'atteindre une marge de phase raisonnable et donc une réponse suffisamment amortie (cf. théorème de Bode)

Formulation des problèmes de régulation dans le domaine harmonique

Spécifications

Peuvent inclure les critères suivants:

- ① Bande passante de la BF (\rightarrow indication sur ω_c pour la BO) (doit prendre en compte les caractéristiques de l'actionneur: intervalle des commandes atteignables)
- ② Marge de phase (ou dépassement indiciel)
- ③ Marge de gain
- ④ Atténuation du bruit de mesure
- ⑤ Type du système en boucle fermée vis-à-vis de la référence et des perturbations (y compris borne supérieure de l'erreur statique vis-à-vis d'une entrée spécifiée)

Formulation des problèmes de régulation dans le domaine harmonique

Forme de la réponse harmonique de la BO

- 1 et 5 $\rightarrow |D(j\omega)G(j\omega)| > W_1$ pour $\omega \ll \omega_c$
- 2 \rightarrow pente de $|D(j\omega)G(j\omega)| \simeq -1$ pour $\omega \simeq \omega_c$
- 3 et 4 $\rightarrow |D(j\omega)G(j\omega)| < 1/W_2$ pour $\omega \gg \omega_c$

avec W_1 et W_2 nettement supérieurs à 1 généralement

Formulation des problèmes de régulation dans le domaine harmonique

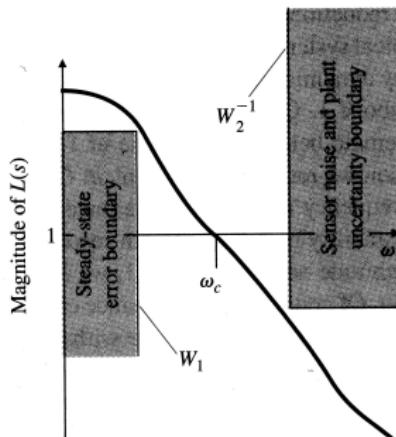


Figure: Mise en forme ("shaping") de la courbe de gain de la boucle ouverte $L(p) = D(p)G(p)$ correspondant aux spécifications [Franklin et. al, 2010]

Correcteur à avance de phase

Caractéristiques

- Améliore la réponse transitoire en augmentant la marge de phase
- Peut accentuer le bruit de mesure aux hautes fréquences

Fonction de transfert

$$D(p) = k_C \frac{1 + pT}{1 + pT\alpha} \quad \alpha < 1$$

Correcteur à avance de phase (suite)

Avance de phase maximale

- Le maximum ϕ_{max} s'obtient en annulant la dérivée par rapport à ω de

$$\arg D(j\omega) = \arg(1 + j\omega T) - \arg(1 + j\omega\alpha T) = \arctg(\omega T) - \arctg(\alpha\omega T)$$

- Pulsation correspondant à ϕ_{max} : $\omega_{max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$
donc ω_{max} est la moyenne géométrique de $1/T$ et $1/\alpha T$, soit

$$\log_{10} \omega_{max} = \frac{1}{2} \left(\log_{10} \frac{1}{T} + \log_{10} \frac{1}{\alpha T} \right)$$

- Valeur de l'avance de phase maximale ϕ_{max}

$$\operatorname{tg} \phi_{max} = \frac{1 - \alpha}{2\sqrt{\alpha}}$$

Correcteur à avance de phase (suite)

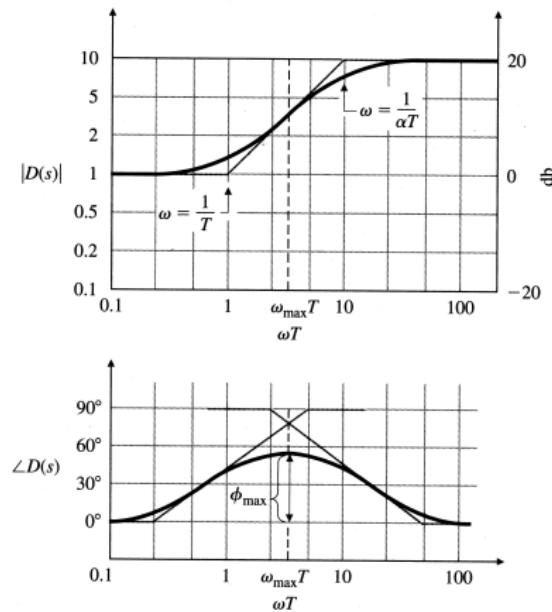


Figure: Courbes de Bode de $D(j\omega)$ pour $k_C = 1$ et $1/\alpha = 10$ [Franklin et al., 2010]

Correcteur à avance de phase (suite)

- Possibilité d'atteindre une avance de phase de presque 90° avec un correcteur à avance de phase. Cependant en pratique, la valeur de $1/\alpha$ maximale est limitée par l'atténuation du bruit de mesure
 \rightarrow en général ϕ_{max} limitée à 70°

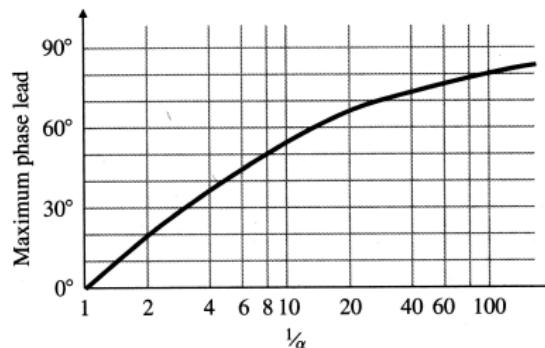


Figure: Avance de phase maximale en fonction de $1/\alpha$ [Franklin et al., 2010]

Correcteur à avance de phase (suite)

Conception d'un correcteur pour un moteur à courant continu

- Système réglé: $G(p) = \frac{1}{p(p+1)}$
- Spécifications
 - Erreur statique inférieure à 0.1 vis-à-vis d'une rampe unité ($R(p) = 1/p^2$)
 - Dépassement indiciel inférieur à 25 pourcents

Correcteur à avance de phase (suite)

Conception d'un correcteur pour un moteur à courant continu (suite)

- Première étape: prise en compte de l'erreur statique pour ajuster k_C

$$\begin{aligned} e_s &= \lim_{p \rightarrow 0} p \left[\frac{1}{1 + D(p)G(p)} \right] R(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{1}{p + D(p)(1/(p+1))} \right] = \frac{1}{k_C} \end{aligned}$$

$$\rightarrow k_C \geq 10$$

- Deuxième étape: liaison entre le dépassement indiciel et la marge de phase; positionnement du pôle et du zéro du correcteur

- Par la figure donnée pour un système du second ordre, on déduit:
 $MP = 45^\circ \rightarrow M_P \simeq 25$ pourcents
- Marge de phase pour le système réglé par un régulateur proportionnel de gain $k_C = 10 : 20^\circ$ (voir figure)

Correcteur à avance de phase (suite)

Conception d'un correcteur pour un moteur à courant continu (suite)

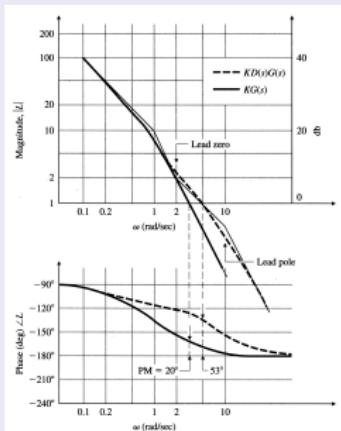


Figure: Courbes de Bode pour la conception du correcteur à avance de phase [Franklin et al., 2010]

Correcteur à avance de phase (suite)

Conception d'un correcteur pour un moteur à courant continu (suite)

- Pour obtenir une marge de phase de 45° , une avance de phase additionnelle de 25° est requise à la pulsation de coupure.
Impossibilité de modifier le déphasage sans modifier la pulsation de coupure (zéro \rightarrow augmentation de la pulsation de coupure pour un gain k_C fixé) \rightarrow avance de phase supérieure à 25° requise
Choix $\phi_{max} = 40^\circ \rightarrow 1/\alpha = 5$
- Bénéfice maximum du correcteur à avance de phase si l'avance de phase maximale se produit à la pulsation de coupure.
Par procédure itérative à l'aide d'un logiciel pour le tracé des courbes de Bode, $\omega_{max} = \omega_c = 1/\sqrt{\alpha}T = 4.47 \rightarrow T = \omega_c\sqrt{\alpha} = 0.5$ et $\alpha T = 0.5/5 = 0.1$
L'avance de phase maximale correspond donc à la pulsation de coupure (voir figure)
Marge de phase finale : 53°

Correcteur à avance de phase (suite)

Conception d'un correcteur pour un moteur à courant continu (suite)

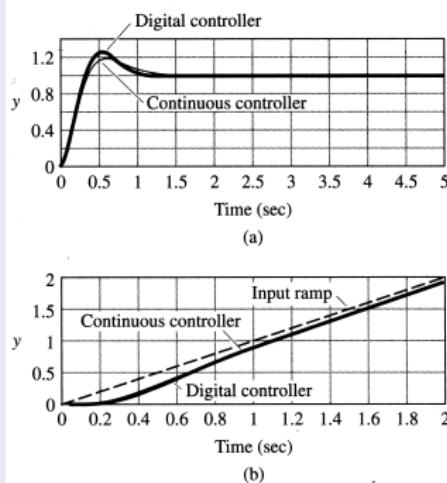


Figure: Réponse indicielle et réponse à une rampe unité pour la boucle fermée munie du correcteur $D(p) = 10 \frac{p^{1/2} + 1}{p^{1/10} + 1}$ [Franklin et al., 2010]

Correcteur à avance de phase (suite)

Spécifications en général

- Bande-passante (liée à la pulsation de coupure)
- Facteur d'amortissement et dépassement indiciel (lié à MP)
- Erreur statique (liée au gain du régulateur aux basses fréquences)

Correcteur à avance de phase (suite)

Résumé de la procédure de conception

- 1 Déterminer k_C par l'une des approches suivantes selon que les spécifications concernent l'erreur statique ou la bande passante de la boucle fermée
 - a choisir k_C de sorte que e_s remplit les spécifications
 - b choisir k_C de sorte que $\omega_c = \omega_{BP}/2$ (où ω_c est la pulsation de coupure et ω_{BP} la pulsation associée à la bande passante) (règle heuristique)
- 2 Evaluer la MP de la boucle fermée munie du régulateur proportionnel de gain k_C déterminé au point 1.
- 3 Sur la base des spécifications liées à M_P et ζ déterminer la marge de phase requise. En déduire l'avance de phase maximale requise pour $D(p)$: ϕ_{max} (prévoir une majoration d'environ 10°)
- 4 Déterminer α à partir de ϕ_{max}

Correcteur à avance de phase (suite)

Résumé de la procédure de conception (suite)

- 5 Fixer $\omega_{max} = \omega_c \rightarrow$ zéro $1/T = \omega_{max}\sqrt{\alpha}$ et pôle $1/T\alpha = \omega_{max}/\sqrt{\alpha}$
- 6 Tracer les courbes de Bode de $D(p)G(p)$ et vérifier que la *MP* est correcte; vérifier par des simulations dans le domaine temporel que les spécifications sont atteintes ; ajuster au besoin la position du pôle, du zéro et/ou le choix de k_C

Remarque

Les lignes de conduite ci-dessus peuvent ne pas mener à une solution satisfaisante dans certains cas (cf. situations où il est nécessaire de recourir à un correcteur à avance de phase d'ordre 2 par exemple), mais elles suggèrent une procédure par essais et erreurs qui peut guider la conception.

Régulateur PI

- Fonction de transfert:

$$D(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = \frac{k_P}{p} \left(p + \frac{1}{T_i} \right)$$

- Annule l'erreur statique vis-à-vis d'une référence ou d'une perturbation en échelon
- Inconvénient: retard de phase aux pulsations inférieures à $\omega = 1/T_i \rightarrow$ le plus souvent $1/T_i$ choisi à une pulsation nettement inférieure à la pulsation de coupure pour ne pas affecter de manière significative la marge de phase
- N'induit pas d'augmentation de la bande passante contrairement au correcteur à avance de phase

Régulateur PI (suite)

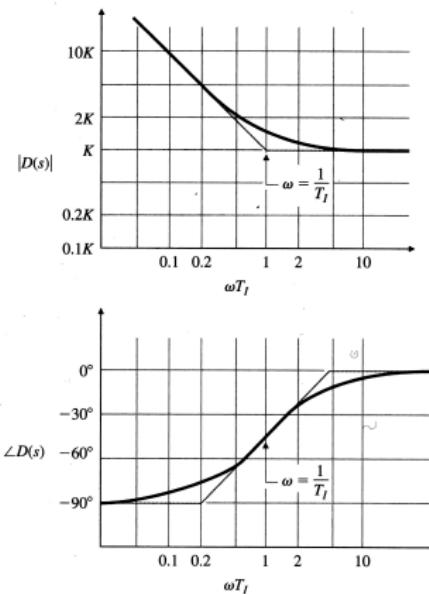


Figure: Courbes de Bode d'un régulateur PI (K doit être remplacé par k_P)[Franklin et al.,2010]

Régulateur à retard de phase

Caractéristiques

- Approche un correcteur PI : Gain > 1 et retard de phase aux basses pulsations
- 2 usages possibles
 - Réduire l'erreur statique en conservant la marge de phase
 - Augmenter la marge de phase en réduisant la pulsation de coupure de la boucle ouverte

Fonction de transfert

$$D(p) = k_C \frac{1 + pT}{1 + pT\alpha} \quad \alpha > 1$$

Correcteur à retard de phase (suite)

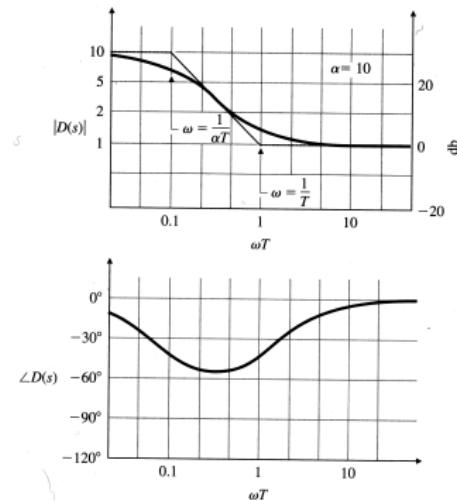


Figure: Courbes de Bode d'un correcteur à retard de phase pour $\alpha = 10$ et $k_C = 10$ [Franklin et al., 2010]

Régulateur à retard de phase

Principe de conception - usage 1

On part d'un système en boucle ouverte qui possède la marge de phase voulue mais l'erreur statique vis-à-vis d'une référence polynomiale est trop importante.

Correcteur de la forme : $D(p) = \alpha \frac{1+Tp}{1+\alpha Tp}$

- Déterminer α pour satisfaire la condition sur le gain aux basses fréquences (cf théorème de la valeur finale)
- Choisir la pulsation associée au zéro ($\omega_z = 1/T$) une octave à une décade en-dessous de la pulsation de coupure ω_C
- La pulsation associée au pôle est donnée par $\omega_p = 1/(\alpha T)$
- Au besoin ajuster ω_z et ω_p pour atteindre les performances voulues

Illustration, voir [Franklin et al. 2010]

Correcteur à retard de phase (suite)

Spécifications - usage 2

- Marge de phase fixée
- Constante d'erreur de position, de vitesse ou d'accélération (selon que le système en boucle ouverte sans le correcteur à retard de phase est de type 0, 1 ou 2 vis-à-vis de la référence) spécifiée

Correcteur à retard de phase (suite)

Procédure pour la conception - usage 2

- 1 Déterminer le gain k_C qui assure que la constante d'erreur ait la valeur souhaitée
- 2 Tracer les courbes de Bode de $k_C G(p)$ et évaluer la marge de phase
- 3 Choisir le pôle et le zéro du correcteur afin de diminuer la pulsation de coupure et ainsi atteindre la marge de phase souhaitée (pôle et zéro à pulsation suffisamment faible pour que l'effet du retard de phase soit petit au voisinage de la pulsation de coupure; cependant pôle et zéro pas à pulsation plus faible que nécessaire pour éviter un transitoire lent vis-à-vis de la perturbation)
- 4 Valider la conception sur la base des courbes de Bode de $D(p)G(p)$ et de la simulation (temporelle) de la boucle fermée; itérer l'ajustement du gain du régulateur, du pôle et du zéro au besoin

Correcteur à retard de phase (suite)

Illustration - régulation d'un moteur DC

- Fonction de transfert du système réglé: $G(p) = \frac{1}{p(p+1)}$
- Spécifications : erreur statique inférieure ou égale à 0.1 pour une rampe de pente 1, dépassement indiciel inférieur à 25 pourcents
- Traduction en terme de marge de phase: marge de phase d'au moins 45°
- Conception
 - Condition sur l'erreur statique $\rightarrow k_C \geq 10$ (idem correcteur à avance de phase)
 - Courbes de Bode de $k_C G(p) \rightarrow MP = 20^\circ$
 - Pulsation de coupure au voisinage de 1 rad/s donnerait la MP souhaitée
 - Pôle et zéro choisis respectivement en 0.01 rad/s et $0.1 \text{ rad/s} \rightarrow$ spécifications vérifiées

Correcteur à retard de phase (suite)

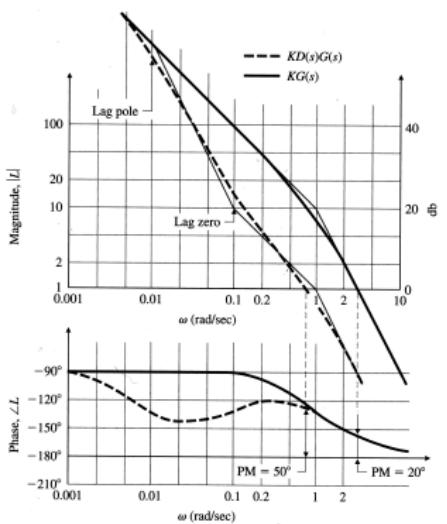


Figure: Courbes de Bode associées à la conception d'un correcteur à retard de phase pour $G(p) = \frac{1}{p(p+1)}$ [Franklin et al. 2010]

Correcteur à retard de phase (suite)

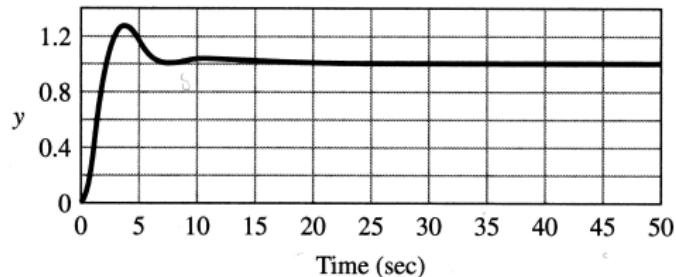


Figure: Réponse indicielle de la boucle fermée avec le correcteur à retard de phase pour $G(p) = \frac{1}{p(p+1)}$ [Franklin et al. 2010]

Correcteur à retard de phase (suite)

Discussion

- Mêmes spécifications atteintes par correcteur à avance de phase et à retard de phase pour l'application considérée
- Différentes pulsations de coupure:
 $\omega_C = 5\text{rad/s}$ pour le correcteur à avance de phase
 $\omega_C = 0.8\text{rad/s}$ pour le correcteur à retard de phase
- Correcteur à avance de phase donne une plus grande bande passante pour la boucle fermée et pas de transitoire lent lié à un pôle proche de l'origine
- L'augmentation de la bande passante de la BF peut induire la saturation des actionneurs (commande trop énergique) ou un manque d'atténuation du bruit de mesure → dans ce cas il est préférable de choisir un compensateur à retard de phase pour atteindre la marge de phase voulue sans risquer un fonctionnement en mode non-linéaire (pour lequel l'analyse réalisée n'est plus valable)

Correcteur PID

Utilisation de la forme "série" du régulateur PID:

$$D(p) = \frac{k_p}{pT_I} (1 + pT_D)(1 + pT_I) \quad T_I > 0, T_D > 0$$

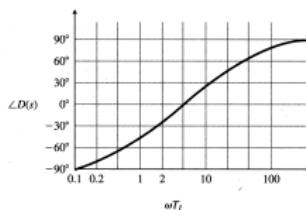
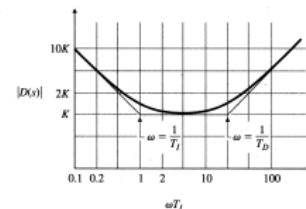


Figure: Réponse harmonique d'un correcteur PID pour $1/T_D = 20$ (**K doit être remplacé par k_p**) [Franklin et. al, 2010]

Correcteur PID (suite)

- Pôle de filtrage aux hautes fréquences pas considéré ici
- Comportement proche du régulateur formé de la combinaison d'un correcteur à avance de phase et d'un correcteur à retard de phase
- Action dérivée (zéro en $-1/T_D$) ajustée afin d'obtenir la marge de phase requise
- Coefficient k_P utilisé pour ajuster la bande passante de la BF ou la pulsation de coupure de la BO
- Zéro en $-1/T_I$ placé de manière à avoir le gain le plus élevé possible aux basses fréquences ($1/T_I$ le plus grand possible) sans affecter la marge de phase

Remarques générales sur la conception de régulateurs

- La limitation de l'erreur statique requiert que $D(j\omega)G(j\omega)$ ait un gain suffisant aux basses pulsations → borne inférieure sur le gain aux basses fréquences W_1
- Pour limiter l'effet du bruit de mesure (sur le signal réglant notamment) le gain de la boucle ouverte doit être faible aux hautes fréquences. En effet, en boucle fermée:

$$\frac{E(p)}{V(p)} = \frac{D(p)G(p)}{1+D(p)G(p)} \text{ et } \frac{U(p)}{V(p)} = -\frac{D(p)}{1+D(p)G(p)}$$

→ parfois introduction d'un double pôle dans les correcteurs à avance de phase:

$$D(p) = k_C \frac{1 + pT}{(1 + p\alpha T)^2}$$

- Prise en compte des incertitudes sur le modèle dynamique aux hautes fréquences (ex: résonnances mécaniques caractérisées par pôles complexes conjugués avec faible facteur d'amortissement). Ajuster le gain du régulateur de sorte que le gain de la boucle soit toujours inférieur à un aux hautes fréquences (stabilisation par l'amplitude ou par le gain)

Remarques générales sur la conception de régulateurs (suite)

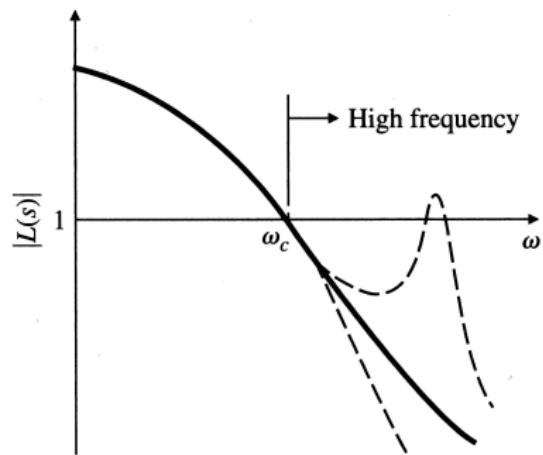


Figure: Effet de l'incertitude sur le modèle du système réglé aux hautes fréquences; $L(p) = D(p)G(p)$ [Franklin et. al, 2010]

Remarques générales sur la conception de régulateurs (suite)

Pour obtenir une boucle fermée avec de très hautes performances (grande bande passante), il est nécessaire d'inclure les résonnances mécaniques proches de la pulsation de coupure souhaitée dans le modèle. On emploie alors des filtres notch (zéros complexes conjugués) pour induire une avance de phase aux pulsations de résonnance et éviter ainsi l'encerclement du point $(-1, 0)$ par la courbe de Nyquist de la boucle ouverte (stabilisation par la phase).

Récapitulatif

- Courbes de Bode et de Nyquist **de la boucle ouverte** permettent d'estimer les marges de stabilité (marge de gain et marge de phase) du système **en boucle fermée**
- Principe de conception des régulateurs à avance ou à retard de phase: faire passer la courbe de Bode **de la boucle ouverte** dans un "gabarit" en ajustant les paramètres du régulateur (gain suffisamment grand pour $\omega \ll \omega_C$, pente au voisinage de $-20dB/dec$ pour $\omega \simeq \omega_C$, gain suffisamment faible pour $\omega \gg \omega_C$) \rightarrow obtention de performances **en boucle fermée** appropriées