

ANALYSE NUMÉRIQUE
Examen 2022 – 2023
Série 1 (8h-11h)

- Répondez aux questions sur les feuilles mises à votre disposition **ou/et** en écrivant des programmes et en y laissant des commentaires.
- Veuillez indiquer votre nom et prénom sur **chaque** feuille et dans le **premier commentaire** de chaque programme.
- Répondez aux questions 1-2, 3 et 4 sur des feuilles **séparées** (ces groupes de questions seront corrigés séparément).
- Sauvegardez vos programmes dans le répertoire **examen** existant.
- **Sauvegardez régulièrement** les fichiers en cours d'édition.

Question 1. (3+0.5+1.5 points) Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 5 & 8 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 3 & 7 \\ 0 & 8 & 8 & 6 & 1 \\ 3 & 9 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

- (a) Déterminez de manière efficace et numériquement stable les matrices Q et R d'une factorisation QR de A .
- (b) Utilisez **uniquement** les matrices Q et R du point (a) pour résoudre numériquement et de manière efficace le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- (c) Utilisez **uniquement** les matrices Q et R du point (a) pour résoudre numériquement et de manière efficace le système linéaire $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Justifiez votre démarche. Précisez le coût (en flops) de cette résolution, factorisation exclue.

NOTE : pour l'ensemble de la Question 1, vous pouvez utiliser l'instruction \ (backslash) **seulement** avec les systèmes triangulaires; les instructions **qr** et **inv** (ou équivalentes) sont **interdites**; ces limitations ne concernent pas d'éventuelles vérifications.

Question 2. (1+3+1 points)

- (a) Définissez une représentation en virgule flottante **normalisée** en base β . Donnez la valeur de $\overline{0.111} \cdot \beta^3$ en fonction de β . Illustrez avec $\beta = 2$.
- (b) Soient x un réel qui ne dépasse pas les limites de la représentation et $\text{fl}(x)$ le réel le plus proche de x dans cette représentation. Démontrez que $|\text{fl}(x) - x|/|x|$ est majoré par l'unité d'arrondi.
- (c) Illustrez le résultat du point (b) en choisissant $x = \overline{0.111} \cdot \beta^3$ et en prenant comme $\text{fl}(x)$ un des deux éléments les plus proches de x dans la représentation en virgule flottantes normalisée en base β avec **deux** chiffres significatifs. Particularisez ensuite à $\beta = 2$.

Question 3. (5 points) Déterminez numériquement la solution du système d'équations non-linéaires

$$\begin{cases} a^3 - b^2 + 2b - 1 &= 0, \\ a + a^2 - a^2b - 1 &= 0, \end{cases}$$

dans la région $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1$.

Question 4. (3+2 points) Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} &= \cos(y - 2t), \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

- (a) Résolvez ce problème sur l'intervalle $[0, 5]$.
- (b) Déterminez numériquement l'ordre de la méthode de résolution utilisée. Cet ordre correspond-il à celui vu au cours ?