Annexe: La transformation bilinéaire

La transformation bilinéaire est une méthode où l'on passe du plan « analogique » (en s ou en p) au plan « numérique » (en z). Le changement de plan passe par une correspondance de l'axe imaginaire du plan p sur le cercle unité du plan z. La méthode consiste donc à effectuer la substitution suivante dans la fonction de transfert $H_c(p)$ du système continu :

$$p = \frac{2}{T}\,\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{T}\,\frac{z - 1}{z + 1}$$

La fonction de transfert du système discret est donc :

$$H_d(z) = H_c(p)\ \bigg|\ p = \frac{2}{T}\,\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

La transformation inverse s'en déduit :

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}\,p}{1 - \frac{T}{2}\,p}$$

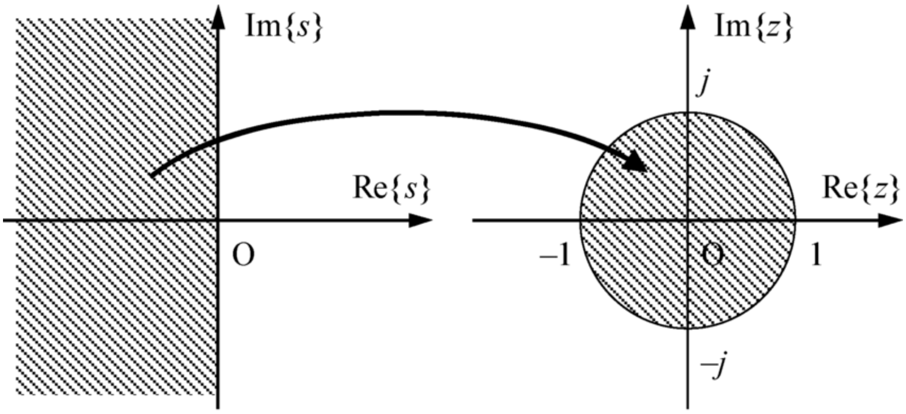
Il y a correspondance biunivoque entre les plans p et z. Puisque l'axe imaginaire correspond au cercle unité, on vérifie que :

$$Re(p) > 0 \Leftrightarrow |z| > 1$$

$$Re(p) < 0 \Leftrightarrow |z| < 1$$

$$Re(p) = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$$

Un filtre analogique est stable si ses pôles ont une partie réelle négative. Dans le domaine discret, un filtre est stable si ses pôles font partie du disque unité. Par la correspondance ci-dessus, on observe que la transformation bilinéaire conserve la stabilité des filtres transformés.



(a) s plane (b) z plane

Rappelons-nous que $H_c(j\Omega) = H_c(p)_{|p=j\Omega}$ et que $H_d\left(e^{j\omega}\right) = H_d(z)_{|z=j\omega}$. Par la transformation bilinéaire, on peut donc examiner la correspondance entre l'axe imaginaire $p = j\Omega$ et le cercle unité $z = e^{j\omega}$:

(Ω = pulsation dans le plan p (continu) et ω = pulsation dans le plan z (discret))

$$p = \frac{2}{T}\,\frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = \frac{2}{T}\cdot\frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}} = \frac{2}{T} j \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = j\Omega$$

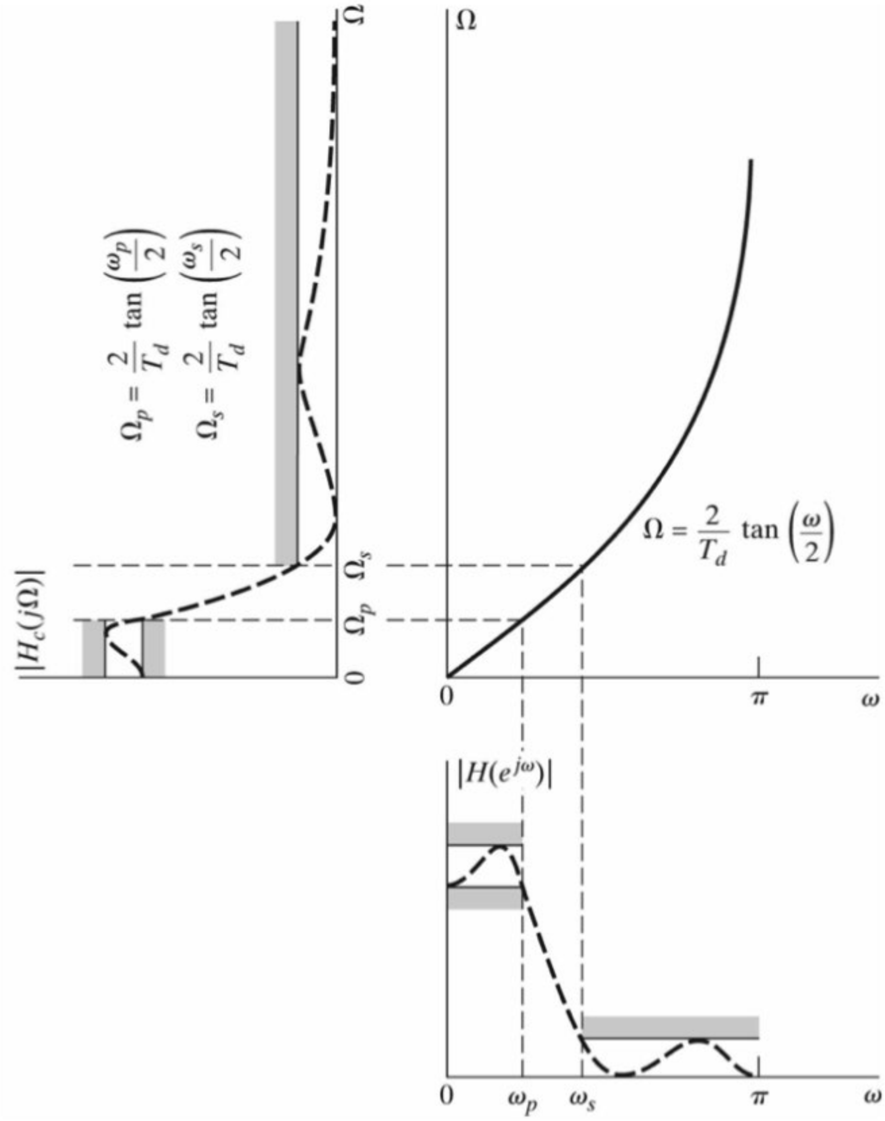
et donc :

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\omega = 2\,\mathrm{atan}\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$$

Cette relation non linéaire associe bien à chaque point de la réponse en fréquence du filtre analogique une réponse en fréquence correspondante du filtre numérique, mais est également la raison pour laquelle on observe de la distorsion de l'axe des fréquences (frequency warping).

Pour $\omega << 1$, on a bien une correspondance quasiment linéaire entre le domaine discret et analogique avec $\Omega \cong \frac{\omega}{T}$ mais cette distorsion devient évidente lorsqu'on se rapproche de la fréquence de Nyquist. Puisque les pulsations Ω élevées correspondront toujours à des pulsations ω inférieures à la fréquence de Nyquist, il n'y a pas de repliement spectral.


$|H_c(j\Omega)|$
$\Omega_p = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right)$
$\Omega_s = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right)$
Ω
0
Ω_p
Ω_s
$\Omega = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$
π
ω
$|H(e^{j\omega})|$
ω_p
ω_s