Etude des modèles en variables d'état

Année 2018-2019

Plan

Contexte

- Etant donné un système caractérisé par une fonction de transfert rationnelle, comment peut-on simuler son comportement à l'aide de composants électroniques (sommateurs, intégrateurs, potentiomètres) ?
- Comment mettre en oeuvre un régulateur (caractérisé par une fonction de transfert rationnelle) sur un calculateur analogique, c-à-d à partir de sommateurs, d'intégrateurs et de potentiomètres ?
- Pour un système décrit par un modèle en variables d'état,
  - sous quelle condition peut-on estimer son état à partir de la connaissance des entrées et des sorties (notion d'observabilité) ?
  - sous quelle condition peut-on amener l'état de ce système à une valeur fixée à l'aide d'un signal réglant approprié (notion de gouvernabilité) ?
- Quel est le nombre d'intégrateurs requis pour mettre en oeuvre un régulateur caractérisé par une fonction de transfert d'ordre n sur un calculateur analogique?

Objectifs

- Déterminer un modèle en variables d'état de dimension minimale (réalisation minimale) pour un système à partir de sa fonction de transfert; en déduire un schéma de cablage pour simuler ou mettre en oeuvre ce système sur un calculateur analogique
- Déterminer si un système est observable et/ou gouvernable; dans la négative déterminer la partie de l'état qui est observable et gouvernable
- Comprendre le lien entre les simplifications "pôle/zéro" et les notions d'observabilité et de gouvernabilité

Description en variables d'état

Forme générale pour un système non linéaire

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= f(X(t), U(t)) \\ Y(t) &= g(X(t), U(t)) \end{aligned}$$

f et g fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à X et U
$X(t)$: vecteur d'état (ensemble des valaurs possibles appelé espace d'état)
$U(t)$: signal d'entrée
$Y(t)$: signal de sortie
(Attention exceptionnellement majuscules utilisées pour représenter des variables temporelles)

Etats d'équilibre

$$\begin{aligned} 0 &= f(X_0, U_0) \\ Y_0 &= g(X_0, U_0) \end{aligned}$$

Description en variables d'état (suite)

Modèle linéarisé autour d'un état d'équilibre

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

avec

$$x(t) = X(t) - X_0 \quad u(t) = U(t) - U_0 \quad y(t) = Y(t) - Y_0$$

$$A : n \times n \quad B : n \times 1 \quad C : 1 \times n$$

et D scalaire (système à une entrée et une sortie)

$$A = \frac{\partial f(X, U)}{\partial X}\Big|_{(X_0, U_0)} \quad B = \frac{\partial f(X, U)}{\partial U}\Big|_{(X_0, U_0)}$$

$$C = \frac{\partial g(X, U)}{\partial X}\Big|_{(X_0, U_0)} \quad D = \frac{\partial g(X, U)}{\partial U}\Big|_{(X_0, U_0)}$$

Solution des équations d'état dans le cas linéaire

- Exponentielle d'une matrice

$$\exp(A\ t) = I_n + A\ t + A^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + A^n\frac{t^n}{n!} + \cdots$$

  Remarque : $A\ \exp(A\ t) = \exp(A\ t)\ A$

- Solution de $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)\ \ ;\ \ x(0) = x_0$

$$x(t) = \exp(A\ t)x_0 + \int_0^t \exp(A\ (t-\tau))Bu(\tau)d\tau$$

- Démontrez le résultat en le substituant dans l'équation différentielle
- La connaissance de l'état initial et de $\{u(\tau), \tau \geq 0\}$ permet de déduire $\{x(\tau), \tau \geq 0\}$.

Passage d'une description en variables d'état à une fonction de transfert

- Transformée de Laplace (unilatérale) des équations d'état pour $x(0) = x_0$

$$pX(p) - x_0 = AX(p) + BU(p) \qquad Y(p) = CX(p) + DU(p)$$

- Soit en réorganisant les termes

$$(pI_n - A)X(p) = x_0 + BU(p) \qquad Y(p) = CX(p) + DU(p)$$

- D'où

$$X(p) = (pI_n - A)^{-1}x_0 + (pI_n - A)^{-1}BU(p) \qquad Y(p) = CX(p) + DU(p)$$

- A conditions initiales nulles, on déduit:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C(pI_n - A)^{-1}B + D = \frac{CAdj(pI_n - A)B + Ddet(pI_n - A)}{det(pI_n - A)}$$

  où I_n est la matrice identité d'ordre n

- Pôles de la fonction de transfert identiques aux valeurs propres de la matrice A si pas de simplification entre numérateur et dénominateur

Passage d'une fonction de transfert à un modèle en variables d'état

Fonction de transfert du SLP

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{n_H(p)}{d_H(p)}$$

avec

$$d_H(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n$$

$$n_H(p) = b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \cdots + b_n$$

($H(p)$ strictement propre c-à-d $\partial d_H(p) > \partial n_H(p)$)

Passage d'une fonction de transfert à un modèle en variables d'état (suite)

Marche à suivre

- Ecrire le lien entre $Y(p)$ et $U(p)$ sous la forme suivante (cas $n = 3$):

$$(p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3)Y(p) = (b_1 p^2 + b_2 p + b_3)U(p)$$

- Diviser par la puissance maximale de p (ici p^3) et regrouper les termes comme suit:

$$Y(p) = -a_1 \frac{Y(p)}{p} - a_2 \frac{Y(p)}{p^2} - a_3 \frac{Y(p)}{p^3} + b_1 \frac{U(p)}{p} + b_2 \frac{U(p)}{p^2} + b_3 \frac{U(p)}{p^3}$$

- Construire le schéma fonctionnel ci-dessous et prendre pour variables d'état la sortie de chaque bloc intégrateur

Passage d'une fonction de transfert à un modèle en variables d'état (suite)

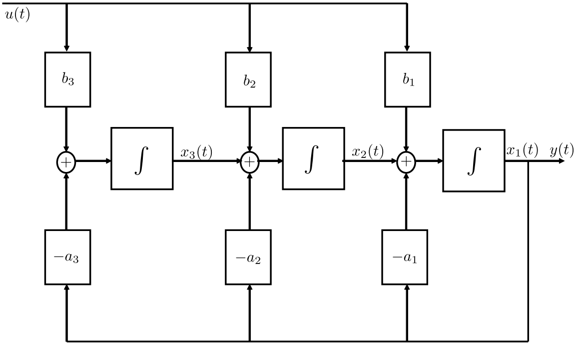


Figure: Schéma fonctionnel pour l'obtention d'un modèle en variables d'état

Passage d'une fonction de transfert à un modèle en variables d'état (suite)

Modèle en variables d'état

- On déduit du schéma fonctionnel

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -a_1 x_1(t) + x_2(t) + b_1 u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -a_2 x_1(t) + x_3(t) + b_2 u(t) \qquad y(t) = x_1(t)\\ \dot{x}_3(t) &= -a_3 x_1(t) \qquad\qquad\quad + b_3 u(t)\end{aligned}$$

- Soit sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-a_1 & 1 & 0\\ -a_2 & 0 & 1\\ -a_3 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}$$

Passage d'une fonction de transfert à un modèle en variables d'état (suite)

Modèle en variables d'état

- Forme matricielle (suite)
  Définissons
$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$
- On retrouve la forme standard
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Passage d'une fonction de transfert à un modèle en variables d'état (suite)

Cas d'une fonction de transfert de même degré au numérateur et au dénominateur

- Fonction de transfert:

$$H(p) = \frac{b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}$$

- Se ramener au cas précédent ($H(p)$ strictement propre) en séparant le terme d'action directe

$$H(p) = b_0 + \frac{(b_1 - b_0 a_1)p^2 + (b_2 - b_0 a_2)p + (b_3 - b_0 a_3)}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}$$

- Définissons la fonction de transfert strictement propre ($\partial d_{H_{sp}} > \partial n_{H_{sp}}$)

$$H_{sp}(p) = \frac{(b_1 - b_0 a_1)p^2 + (b_2 - b_0 a_2)p + (b_3 - b_0 a_3)}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}$$

Passage d'une fonction de transfert à un modèle en variables d'état (suite)

Cas d'une fonction de transfert de même degré au numérateur et au dénominateur(suite)

- Relation entrée/sortie

$$Y(p) = b_0 U(p) + H_{sp}(p) U(p)$$

- Description en variables d'état

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

avec $H_{sp}(p) = C(pI_n - A)^{-1} B$ et $D = b_0$ (où (A, B, C) sont déterminés par la méthode décrite précédemment)

Détermination de l'état initial - Observabilité

Position du problème

Modèle en variables d'état associé à une EDO d'ordre n

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_n u(t)$$

dont les conditions initiales sont caractérisées par

$$y(0) = y_0, \dot{y}(0) = y_0^1, \cdots, y^{(n-1)} = y_0^{n-1}$$

Comment en déduire l'état initial correspondant $x(0)$?

Détermination de l'état initial - Observabilité

SLP décrit par un modèle en variables d'état

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0 \qquad t \geq 0\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Expression de la sortie et de ses dérivées

$$\begin{aligned}y(t) &= Cx(t) + Du(t)\\ \dot{y}(t) &= C\dot{x}(t) + D\dot{u}(t) = CAx(t) + CBu(t) + D\dot{u}(t)\\ \ddot{y}(t) &= C\ddot{x}(t) + D\ddot{u}(t)\\ &= CA\dot{x}(t) + CB\dot{u}(t) + D\ddot{u}(t)\\ &= CA^2x(t) + CABu(t) + CB\dot{u}(t) + D\ddot{u}(t)\\ \ldots\end{aligned}$$

Détermination de l'état initial - Observabilité

Expression de la sortie et de ses dérivées (suite)

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ CA^{(n-2)}B & \cdots & \cdots & CB & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

Matrice d'observabilité :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$\mathcal{O}$: matrice $n \times n$ dans le cas d'un système à une sortie

Détermination de l'état initial - Observabilité

CNS d'observabilité (observability)

- Notons $\mathcal{Y}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$ et considérons $u(t) = 0$ pour tout t.

$$\mathcal{Y}(t) = \mathcal{O}x(t)$$

- A tout $\mathcal{Y}(0)$, il correspond une seule valeur de $x(0)$ si et seulement si

$$\text{rang } \mathcal{O} = n$$

(cf les n colonnes de $\mathcal{O}$ sont linéairement indépendantes et permettent donc d'engendrer n'importe quel vecteur $\mathcal{Y}(0)$ dans $\mathbb{R}^n$)

- Un SLP est observable si et seulement si

$$\text{rang } \mathcal{O} = n$$

Détermination de l'état initial - Observabilité

Remarques

- Pas d'intervention de l'entrée dans les questions d'observabilité
- Définition plus classique de l'observabilité: possibilité de reconstruire de façon **univoque** l'état $\{x(t), t \geq 0\}$ à partir du modèle $\{A, B, C\}$ et des trajectoires de l'entrée et de la sortie $(\{u(t), t \geq 0\}, \{y(t), t \geq 0\})$. En effet, ayant déterminé $x(0)$ on peut reconstruire $\{x(t), t \geq 0\}$ à partir du modèle $\{A, B, C\}$ en simulant le système pour l'entrée donnée et l'état initial déterminé.
- En pratique, on ne dispose généralement pas des dérivées de $u(t)$ et $y(t)$ et on ne peut que les approcher. On préfère passer par des "observateurs d'état" ou des "capteurs logiciels" pour estimer l'état du système.
- L'observabilité ne dépend que de la paire (C, A) pour un système linéaire permanent.
- Exemple de système non observable: moteur dont on mesure la vitesse angulaire (cf impossibilité de reconstruire de façon univoque la position angulaire)

Amener l'état à une valeur donnée - gouvernabilité ou commandabilité

Définition

Un SLP est gouvernable s'il est possible d'amener l'état d'une valeur initiale $x(0) = x_0$ à une valeur finale $x(T) = x_1$ à l'aide d'une fonction $u(t), 0 \leq t \leq T$ appropriée (typiquement une fonction continue par morceaux)

Mise en équations

Trouver $u(t), 0 \leq t \leq T$ tel que

$$x_1 = \exp(AT)\, x_0 + \int_0^T \exp(A(T-\tau))Bu(\tau)d\tau$$

soit encore

$$\underbrace{x_1 - \exp(AT)\, x_0}_{q} = \int_0^T \exp(A(T-\tau))Bu(\tau)d\tau \qquad (1)$$

Amener l'état à une valeur donnée - gouvernabilité ou commandabilité

CNS de gouvernabilité (controllability)

Un SLP est gouvernable si et seulement si rang $\mathcal{C} = n$ où $\mathcal{C} = \left[\begin{array}{cccc} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{array}\right]$ est la matrice de gouvernabilité ou de commandablité.

Démonstration de la condition nécessaire

- Supposons que rang $\mathcal{C} < n$, c-à-d
  $\exists \gamma \neq 0$ tel que $\gamma' \mathcal{C} = 0$
- Reprenons l'expression (1) avec $q = \gamma$. On doit déterminer $u(t), 0 \leq t \leq T$ tel que

$$\gamma' \gamma = \int_0^T \gamma' \exp(A(T-\tau))Bu(\tau)d\tau$$

Amener l'état à une valeur donnée - gouvernabilité ou commandabilité

Démonstration de la condition nécessaire (suite)

- Notons que:

$$
\begin{aligned}
\gamma' \exp(A(T-\tau))B &= \gamma' B + \gamma' AB(T-\tau) + \cdots + \gamma' \frac{A^{n-1}}{(n-1)!}B(T-\tau)^{(n-1)} + \cdots \\
&= 0
\end{aligned}
$$

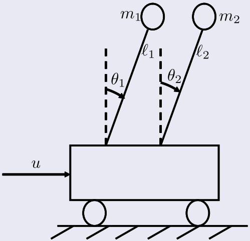
car $\gamma'\mathcal{C} = 0$ et les termes en puissance de A supérieure ou égale à n sont nuls par le théorème de Cayley Hamilton.

- Il en résulte $\gamma'\gamma = 0$ soit $\gamma = 0$, ce qui est une contradiction.
- Il n'est donc pas possible de trouver $u(t), 0 \leq t \leq T$ qui mène à $\gamma \neq 0$

Amener l'état à une valeur donnée - gouvernabilité ou commandabilité

Exemple de système ingouvernable

Système formé d'un chariot muni de deux pendules inversés de même longueur ($\ell_1 = \ell_2$) et de même masse ($m_1 = m_2$)



En effet, $\theta_1(0) = \theta_2(0) \rightarrow \theta_1(t) = \theta_2(t)$ quelle que soit $u(t)$

Transformation de similitude - Changement de variables

- Soit un système décrit par le modèle en variables d'état suivant

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0 \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t) \end{array}$$

- Changement de variables d'état - transformation de similitude (Similarity transform)

$$x(t) = T\tilde{x}(t)$$

avec T matrice carrée régulière (" non singular")

- Par substitution dans les équations d'état, il vient:

$$\begin{array}{rcl} T\dot{\tilde{x}}(t) & = & A\,T\tilde{x}(t) + Bu(t) \qquad \tilde{x}(0) = T^{-1}x_0 \equiv \tilde{x}_0 \\ y(t) & = & C\,T\tilde{x}(t) + Du(t) \end{array}$$

soit

$$\begin{array}{rcl} \dot{\tilde{x}}(t) & = & T^{-1}A\,T\tilde{x}(t) + T^{-1}Bu(t) \qquad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \\ y(t) & = & C\,T\tilde{x}(t) + Du(t) \end{array}$$

Transformation de similitude - Changement de variables (suite)

- Introduisons les notations

$$\tilde{A} = T^{-1} A \, T \;\; ; \;\; \tilde{B} = T^{-1} B$$

$$\tilde{C} = C \, T \;\; ; \;\; \tilde{D} = D$$

- Il vient:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \qquad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \qquad t \geq 0 \\ y(t) &= \tilde{C}x(t) + \tilde{D}u(t) \end{aligned}$$

Conclusion sur les changements de vavriables d'état

A partir d'une représentation en variables d'état, on peut déduire une infinité d'autres par transformation de similitude.

Forme modale

- Hypothèse: A a des valeurs propres distinctes
- Changement de variables mettant la matrice A sous forme diagonale

$$x(t) = Lx_d(t)$$

avec L matrice formée des vecteurs propres de A
- Forme modale (ou diagonale) des équations d'état

$$\begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= L^{-1}A\,Lx_d(t) + L^{-1}\,Bu(t) \qquad x_d(0) = L^{-1}x_0 \equiv x_{d0} \\ y(t) &= C\,Lx_d(t) + Du(t) \end{aligned}$$

- Notations

$$\Lambda = \text{diag}_{i=1,n}\{\lambda_i\} = L^{-1}\,A\,L$$

$$B_d = L^{-1}\,B = \left[\begin{array}{cccc} b_{d1} & b_{d2} & \cdots & b_{dn} \end{array}\right]'$$

$$C_d = C\,L = \left[\begin{array}{cccc} c_{d1} & c_{d2} & \cdots & c_{dn} \end{array}\right]$$

Forme modale (suite)

- Description en variables d'état sous une forme modale

$$\begin{aligned} \dot{x}_{di}(t) &= \lambda_i x_{di}(t) + b_{di} u(t) \qquad i = 1, \cdots, n \\ y(t) &= \sum_{i=1}^{n} c_{di} x_{di}(t) + D u(t) \end{aligned}$$

- Matrice de gouvernabilité

$$\mathcal{C}_d = \begin{bmatrix} b_{d1} & \lambda_1 b_{d1} & \cdots & \lambda_1^{n-1} b_{d1} \\ b_{d2} & \lambda_2 b_{d2} & \cdots & \lambda_2^{n-1} b_{d2} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{dn} & \lambda_n b_{dn} & \cdots & \lambda_n^{n-1} b_{dn} \end{bmatrix} = L^{-1} \mathcal{C}$$

- Remarque : $\text{rang}\mathcal{C}_d = \text{rang}\mathcal{C}$ (la gouvernabilité d'une réalisation n'est pas affectée par une transformation de similitude)

Forme modale (suite)

- Matrice de gouvernabilité (suite)

$$\mathcal{C}_d = \begin{bmatrix} b_{d1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{d2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{dn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$

$$\det\mathcal{C}_d = \left(\prod_{i=1}^{n} b_{di}\right)\left(\prod_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)\right)$$

- Système non gouvernable si et seulement si au moins un des coefficients $b_{di}, i = 1 \cdots , n$ est nul.
- De manière similaire, $\text{rang}\mathcal{O}_d < n$ (système inobservable) si et seulement si au moins un des $c_{di}, i = 1 \cdots , n$ est nul. De plus, l'observabilité d'un système n'est pas affectée par une transformation de similitude.

Forme modale (suite)

- Equation d'état associée à x_i lorsque $b_{di} = 0$:

$$\dot{x}_{di}(t) = \lambda_i \; x_{di}(t)$$

$\rightarrow$ impossibilité d'agir (par $u(t)$) sur $x_{di}(t)$
$\rightarrow$ état $x_{di}(t)$ non gouvernable et système non gouvernable

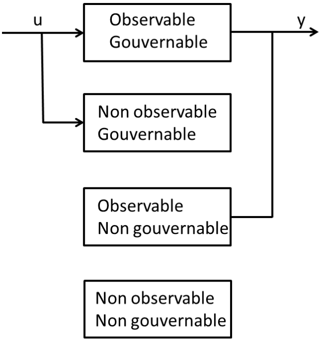
- Equation de sortie lorsque $c_{di} = 0$

$$y(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} c_{dj} x_{dj}(t) + Du(t)$$

$\rightarrow$ Comme les état $x_{dj}(t), j \neq i$ sont indépendants de $x_{di}(t)$, il est impossible de déduire de l'information sur $x_{di}(t)$ à partir de $y(t)$
$\rightarrow$ l'état $x_{di}(t)$ est inobservable et le système est inobservable

Forme modale (suite)

- Séparation de l'état en sa partie gouvernable et non gouvernable et sa partie observable et non observable correspond à la décomposition de Kalman



Forme modale (suite)

- Fonction de transfert: $$\begin{aligned} H(p) &= C_d(pI_n - \Lambda)^{-1}B_d = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{dj}\ \ b_{dj}}{p - \lambda_j} \\ &= C(pI_n - A)^{-1}B \end{aligned}$$
- Si $c_{di} = 0$ ou $b_{di} = 0$, il y a une simplification entre le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert; on dit que $H(p)$ n'est pas irréductible.
- De manière générale (même quand A a des valeurs propres confondues), un système caractérisé par une fonction de transfert $H(p)$ d'ordre n peut être décrit par un modèle en variables d'état d'ordre n gouvernable et observable si et seulement si $H(p)$ est irréductible. Une telle représentation en variables d'état est dite "minimale" car on ne peut pas trouver un un modèle avec moins d'états pour $H(p)$.
- En d'autres termes, si l'on détermine une réalisation d'ordre supérieur à n pour une fonction de transfert irréductible d'ordre n, cette réalisation sera inobservable et/ou ingouvernable. Cette réalisation a le même comportement entrée-sortie qu'une réalisation d'ordre n pour des conditions initiales nulles, mais elle risque d'avoir un état inobservable et/ou ingouvernable instable.

Simplification pôle/zéro

Illustration par un exemple numérique: $H(p) = \frac{(p-1)}{(p-1)(p+1)}$

- Considérer comme la mise en série de $H_1(p) = \frac{1}{p-1}$ et $H_2(p) = \frac{p-1}{p+1}$
- Description en variables d'état

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + u_1(t) \qquad \dot{x}_2(t) = -x_2(t) - 2u_2(t)$$

$$y_1(t) = x_1(t) \qquad y_2(t) = x_2(t) + u_2(t)$$

Mise en série $\rightarrow u_2(t) = y_1(t)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_1(t)$$

$$y_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix}'$$

Simplification pôle/zéro - complément

- Transformée de Laplace unilatérale des équations d'état

$$pX_1(p) - x_{10} = X_1(p) + U_1(p) \rightarrow X_1(p) = \frac{x_{10}}{p-1} + \frac{U_1(p)}{p-1}$$

$$pX_2(p) - x_{20} = -2X_1(p) - X_2(p) \rightarrow X_2(p) = \frac{x_{20}}{p+1} - 2\frac{X_1(p)}{p+1}$$

$$Y_2(p) = \frac{x_{10}+x_{20}}{p+1} + \frac{U_1(p)}{p+1}$$

- Transformée de Laplace inverse

$$x_1(t) = x_{10}e^{t} + e^{t}\nu(t) * u_1(t)$$

$$x_2(t) = x_{20}e^{-t} + x_{10}(e^{-t} - e^{t}) + (e^{-t} - e^{t})\nu(t) * u_1(t)$$

$$y_2(t) = (x_{10}+x_{20})e^{-t} + e^{-t}\nu(t) * u_1(t)$$

pour $t \geq 0$

Simplification pôle/zéro - complément

- Gouvernabilité

$$\text{rang}\mathcal{C} = \text{rang}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 2$$

  Système gouvernable

- Matrice d'observabilité

$$\text{rang}\mathcal{O} = \text{rang}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = 1$$

  Système non observable

- Exercice: en calculant une forme modale pour ce système, montrez que la variable d'état associée à la valeur propre $\lambda = 1$ est inobservable
- La partie de l'état inobservable est associée au pôle simplifié par le zéro

Conclusions

- Observabilité du système : possibilité d'estimer l'état à partir des trajectoires de l'entrée et de la sortie
- Gouvernablité du système : possibilité d'amener l'état en un point quelconque de l'espace d'état
- Pour la mise en oeuvre d'un régulateur, utiliser une réalisation minimale (gouvernable et observable)
- Pour une réalisation non gouvernable et/ou non observable, il y a une ou plusieurs simplifications pôle/zéro dans la fonction de transfert du système.
- Pour des systèmes en cascade, la simplification d'un pôle par un zéro n'est admissible que si le pôle est dans le demi-plan gauche sans quoi on induit un état inobservable ou ingouvernable qui est instable.