

Modèle dynamique

Théorèmes valeur finale et initiale

$$\left\{ \begin{array}{l} Y(p) = \frac{N(p)}{D(p)} e^{xp} \\ \text{pôles } pY(p) \text{ ont } Re < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) \\ y(t) = 0 \quad \forall t < -a \end{array} \right.$$

Transfo similitude ? connaitre partie non gouv/obs
-non gouv ssi Det Cd=0 → un des Bdi est nul (Bdi = coeff de la diagonale de la matrice Cd)
-non obs ssi un des Cdi est nul → état i non observable

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \iff S(p) = \frac{H(p)}{p}$$

Passage ss → tf :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C(pI_n - A)^{-1} B + D = \frac{C \text{Adj}(pI_n - A) B + D \det(pI_n - A)}{\det(pI_n - A)}$$

(VI) Forme modale : Si matrice A valeurs propres distinctes, transformation de

$$\text{similitude pour } x = Lx_d \text{ avec } L \text{ matrice des vecteurs propres de } A : \begin{cases} \dot{x}_d(t) = L^{-1} ALx_d(t) + L^{-1} Bu(t) \\ y(t) = CLx_d(t) + Du(t) \end{cases}$$

avec $x_d(0) = L^{-1}x_0 = x_{d0}$. Ecrit autrement : $\begin{cases} \dot{x}_d(t) = \lambda_i x_{d,i}(t) + b_{d,i} u(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^n c_{d,i} x_{d,i}(t) + Du(t) \end{cases}$

Matrice de gouvernabilité : $C_d = L^{-1}C$ (rang C_d = rang C)
 $\det C_d : \prod_{i=1}^n b_{d,i} \cdot \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)$

$$\begin{aligned} \exp(At) &= I_n + At + A^2 + \dots + A^n \frac{t^n}{n!} + \dots \\ x(t) &= T\tilde{x}(t) \\ \tilde{x}(0) &= T^{-1}x_0 := \tilde{x}_0 \\ A &= T^{-1}AT \\ \tilde{B} &= T^{-1}B \\ \tilde{C} &= CT \\ \tilde{D} &= D \end{aligned}$$

Obs : reconstruire $x(t)$ via $u(t)$ et $y(t)$
Gouv : amener $x(0)$ à $x(T)$ via $u(t)$

SLP analyse

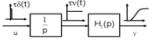
STABLEssi $\sigma > 0$

H(p) :	1er ordre	2e ordre
$h(t) :$	$K \frac{\sigma}{p+\sigma}$	$K \frac{\omega_n^2}{p^2+2\zeta\omega_n p+\omega_n^2}$
s(t) :	$K(1-e^{-\sigma t})$	$K \left(1-e^{-\sigma t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d t\right)\right) \nu(t)$
pôles :	$-\sigma$	$-\sigma \pm j\omega_d$

	1er ordre	2e ordre
t_r :	$\frac{2.2}{\sigma}$	$\frac{1.8}{\omega_n}$
t_p :	—	$\frac{\pi}{\omega_d}$
M_p :	0	$K \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}$
t_s :	$\frac{4.6}{\sigma}$	$e^{-\frac{\pi\zeta}{\omega_d}}$
τ :	—	$\sin \theta = \zeta$

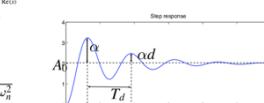
$$\hat{H}(p) = \frac{A_0}{1-pT} e^{-pL} \quad H(p) = A_0 \frac{\omega_n^2}{p^2+2\zeta\omega_n p+\omega_n^2}$$

Choix du signal d'entrée en fonction de la présence d'un pôle à l'origine (système intégrateur) ou pas



Critère de Routh

- Polynôme caractéristique : $a(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$
- # changements de signe = # pôles demi-plan droit
- CNS (stabilité interne) : éléments 1e colonne > 0



$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\text{cf } \omega_d T_d = 2\pi)$$

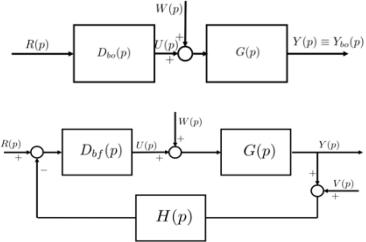
$$d = e^{-\sigma t_2} / e^{-\sigma t_1} = e^{-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi/\ln d)^2}} \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T_d \sqrt{1-\zeta^2}}$$



Analyse BF

$$T_{bf} = \frac{GD_{bf}}{1+GD_{bf}}$$



$$\text{Sensibilité, } S = \frac{\Delta T/T}{\Delta G/G}$$

$$\text{BO : } S_{BO} = 1 \quad \text{BF : } S_{BF} = \frac{1}{1+GD_{bf}}$$

Pour assurer une erreur statique nulle vis-à-vis d'une perturbation polynomiale de degré égal à $k-1$, le régulateur doit contenir k pôles à l'origine.

Lieu EVANS

$$1 + DGH = 0 \iff 1 + KL(p) = 0 \iff 1 + K \frac{b(p)}{a(p)} = 0 \iff a(p) + Kb(p) = 0$$

Règles de tracé du lieu d'Evans, $L(p) = \frac{b(p)}{a(p)}$ (m zéros, n pôles)

- n branches partent des pôles, m arrivent aux zéros, $(n-m)$ asymptotes
- points sur l'axe réel qui appartiennent au lieu sont à gauche d'un nombre impair de pôles/zéros
- point d'∩ des $(n-m)$ asymptotes sur l'axe réel en $\alpha = \sum_{i=1}^m \frac{z_i}{n-m}$, angle $\phi_1 = \frac{180^\circ(2l-1)}{n-m}$
- points où le lieu quitte/rejoint l'axe réel : $\frac{dz}{dp} = 0 \Rightarrow -a'b+ab' = 0$
- points d'∩ avec l'axe imaginaire : utiliser Routh (annuler coef. $p^i \rightarrow$ racines données par p^{i+1} = valeur des pôles) ou $p = j\omega$ et résoudre $\text{Re}(p) = \text{Im}(p) = 0$
- ∠ départ branche du lieu à partir d'un pôle complexe conjugué : $\angle(p_1)_{\text{départ}} = \sum \angle(z_i) - \sum_{i \neq 1} \angle(p_i) - 180^\circ$
- ∠ arrivée branche du lieu à partir d'un zéro complexe conjugué : $\angle(z_1)_{\text{arrivée}} = \sum \angle(p_i) - \sum_{i \neq 1} \angle(z_i) + 180^\circ$

$$\begin{matrix} \text{Exemple : } a(p) + Kb(p) = p^3 + 3p^2 + 2p + K = 0 \\ p^3 \mid 1 & 2 \\ p^2 & 3 & K \\ p^1 & 6-K & 0 \\ p^0 & K & 0 \end{matrix}$$

$$\text{pour } K > 0 : \frac{6-K}{3} > 0 \Rightarrow K < 6$$

$$\text{point d'∩ avec Im : } 3p^2 + 6 = 0 \Rightarrow p = \pm j\sqrt{2}$$

Condition sur le module :

$$|KL(p)| = 1 \iff K(p) = \frac{1}{|L(p)|} = \prod \frac{|p-p_i|}{|z-z_i|}$$

Condition sur l'argument (Evans positif) :

$$\arg(L(p)) = \sum_i \arg(z_i) - \sum_i \arg(p_i) = \pm 180^\circ(2l-1)$$

∃ partie de cercle dans Evans : $2p/1z, 2p/2z, 1p/2z$

Lead/lag compensator : $D(p) = k_c \frac{p+z_a}{p+p_a}$

Régulateur LEAD

$z_c < p_c$ (PD)

améliore le transitoire
accélère la réponse ($t_r \downarrow M_p \downarrow \zeta \uparrow$)
augmente MP & marge de stabilité
accentue le bruit HF

Ajout d'un zéro

déplace le lieu vers la gauche

Ajout d'un pôle

déplace le lieu vers la droite

Condition sur le module :

Dans les notation de ce chapitre-ci, on la note

$$D(p) = k_c \frac{1+pT}{1+pT\alpha} \quad \alpha < 1 \quad (8.36)$$

Avant de commencer, il faut déterminer l'avance de phase maximale ϕ_{max} , celle-ci s'obtient en annulant la dérivée de l'argument par rapport à ω . L'argument de la BO est donné par

$$\arg(D(j\omega)) = \arctan(\omega T) - \arctan(\omega\alpha T) \quad (8.37)$$

L'avance de phase maximale est donc donnée pour $\omega_{max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$. Elle est donc donnée par

$$\tan(\phi_{max}) = \frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}} \quad (8.38)$$

Pour bien comprendre le principe de dimensionnement d'un tel correcteur, on prend l'exemple simple du moteur à courant continu dont la fonction de transfert est donnée par

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)} \quad (8.39)$$

$$D(p) = k_c \frac{p+z_c}{p+pc}$$

$$K_v = \lim_{p \rightarrow 0} pD(p)G(p)$$

Avance (PD) $zc < pc$

1) Reg P ? calculer les pôles

2) Red PD ? satisfaire $\arg(L(p)) = -180^\circ$

3) Déterminer Zc qui compense le pôle

4) Déterminer Pc avec cond sur arg

5) Déterminer K avec cond module

Méthode 1 : $z_c = \frac{1}{p}$ et $p_c = \frac{1}{z_c}$

Méthode 2 : Compensation pôle par z_c

p_c par condition argument $L(p)$

5) Tracer Evans et ajuster

Attention :

- K_c proche de 1

- $D(O) = Zc/Pc$

- $-5^\circ < \arg D(p) < 0^\circ$

Pour récapituler, la démarche de conception des correcteur à avance de phase est la suivante :

• On déterminer k_c par une des méthodes suivantes selon les spécification :

– Choisir k_c en fonction de l'erreur statique

– Choisir k_c de façon à ce que $\omega_c = \omega_{BP}/\alpha$

• Evaluer les MP de la boucle fermée pour le gain k_c que l'on vient de calculer

• Sur base des spécification liée à M_p où ζ , déterminer la marge de phase requise et en déduire l'avance de phase requise.

• Déterminer enfin la valeur de α sur base de cette dernière.

• Fixer $\omega_{max} = \omega_c$, i.e. faire en sorte d'avoir le zéro en $1/T = \omega_{max}\sqrt{\alpha}$ et le pôle en $1/T\alpha = \omega_{max}/\sqrt{\alpha}$.

• Et finir par tracer les courbe de Bode du système dimensionner et vérifier que la marge de phase est bien respecter.

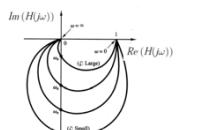
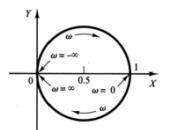
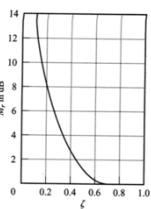
Méthode harmonique

Pôle zéro : $20 \log |A_0(j\omega)^k| = 20 \log |A_0| + 20k \log \omega$

Tracé asymptotique des courbes de Bode

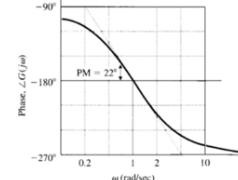
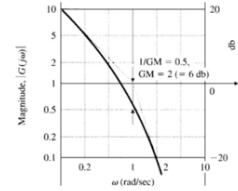
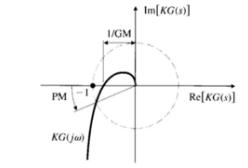
Courbes de Bode	Pente gain	Phase
$A_0(j\omega)^n$	$20n$ dB/décade en $\omega = 1$	$n \cdot 90^\circ$
$(1 + j\omega T)^n$	$20n$ dB/décade en $\omega = \frac{1}{T}$	$n \cdot 90^\circ$
$\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right) + 1 \right]^n$	$40n$ dB/décade en $\omega = \omega_n$	$n \cdot 180^\circ$

$$\arg(H(j\omega_0)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dM}{du} \right) W(u) du$$



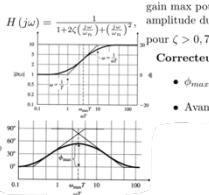
$$MG = -20 \log_{10} |D(j\omega_{180}) G(j\omega_{180})|$$

$$MP = 180^\circ + \arg(D(j\omega_c) G(j\omega_c))$$



Courbes de Bode et de Nyquist de la boucle ouverte permettent d'estimer les marges de stabilité (marge de gain et marge de phase) du système en boucle fermée

Lien entre ζ et le pic de résonance (système du 2e ordre)



gain max pour $\omega = \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$
amplitude du pic de résonance $M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$
pour $\zeta > 0,707$, $M_r = 1$ et pas de pic de résonance

Correcteur à avance de phase : $D(p) = k_e \frac{p + p_r}{1 + p/p_r}$ ($\alpha < 1$)

- ϕ_{max} en $\omega_{max} = \frac{1}{T_s/\alpha}$, moyenne géométrique de $\frac{1}{T_s}$ et $\frac{1}{T_s/\alpha}$: $\log \omega_{max} = \frac{1}{2} (\log \frac{1}{T_s} + \log \frac{1}{T_s/\alpha})$
- Avance de phase maximale ϕ_{max} : $\tan \phi_{max} = \frac{1 - \alpha}{2\sqrt{\alpha}}$

Nombre d'encerclements de $(-1; 0)$ par Γ : $|N_E = Z - P|$

Régulation numérique

$$D(z) = \frac{c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n}{z^n + d_1 z^{n-1} + \dots + d_n} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

$$D_d(z) = D_c \left(\frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1} \right) \quad U(z) = \left(k_P + k_I \frac{T_s}{2} \frac{z + 1}{z - 1} + k_D \frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1} \right) E(z)$$

Transfo Z

$$\mathcal{Z}(u(kT_s + T_s)) = zU(z)$$

$$\mathcal{Z}(u(kT_s - T_s)) = z^{-1}U(z)$$

Algorithmes correspondants

Calcul des écarts par rapport à l'équilibre

$$y(k) = Y(k) - Y_0$$

$$e(k) = r(k) - y(k)$$

Calcul du signal réglant ("petit signal")

$$u(k) = -d_1 u(k-1) - \dots - d_n u(k-n) + c_0 e(k) + \dots + c_n e(k-n)$$

Détermination du grand signal associé

$$U(k) = U_0 + u(k)$$

ANTI-EMBALLLEMENT

- Équations d'état du correcteur (ou régulateur)

$$\begin{aligned} x_r(k+1) &= A_r x_r(k) + B_r e(k) \\ u(k) &= C_r x_r(k) + D_r e(k) \end{aligned}$$

- Prise en compte du signal réglant appliqué au système réglé (on parlera de signal réglant réalisé); régulateur avec dispositif d'anti-emballement

$$\begin{aligned} x_r^d(k+1) &= A_r x_r^d(k) + B_r e(k) + L(u^*(k) - u(k)) \\ u(k) &= C_r x_r^d(k) + D_r e(k) \end{aligned}$$

- Soit

$$\begin{aligned} x_r^d(k+1) &= (A_r - L C_r) x_r^d(k) + (B_r - L D_r) e(k) + L u^*(k) \\ u(k) &= C_r x_r^d(k) + D_r e(k) \end{aligned}$$

fonction	transformée de Laplace	abscisse de convergence
e^{at}	$\frac{1}{z - a}$	$\Re(a)$
$\sin(at)$	$\frac{a}{z^2 + a^2}$	$ \Im(a) $
$\cos(at)$	$\frac{z}{z^2 + a^2}$	$ \Im(a) $
t^n	$\frac{n!}{z^{n+1}}$	0
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(z - a)^{n+1}}$	$ \Im(a) $
$\sinh(at)$	$\frac{a}{z^2 - a^2}$	$ \Re(a) $
$\cosh(at)$	$\frac{z}{z^2 - a^2}$	$ \Re(a) $
$t^a, \Re(a) > -1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{z^{a+1}}$	0

Version personnelle annotée

Modèle dynamique

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \iff S(p) = \frac{H(p)}{p}$$

$$\alpha(t) = e^{At} \alpha_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

$$\exp(At) = I_n + At + A^2 \frac{t^2}{2} + \dots + A^n \frac{t^n}{n!} + \dots$$

$$x(t) = T x(t)$$

$$\dot{x}(0) = T^{-1} x_0 := \dot{x}_0$$

$$\dot{A} = T^{-1} A T$$

$$\dot{B} = T^{-1} B$$

$$\dot{C} = C T$$

$$\dot{D} = D$$

Obs : reconstruire $x(t)$ via $u(t)$ et $y(t)$
Gouv : amener $x(0)$ à $x(t)$ via $u(t)$

Théorèmes valeur finale et initiale

$$Y(p) = \frac{N(p)}{D(p)} e^{op}$$

$$\text{si } \text{pôle } pY(p) \text{ ont } \text{Re } < 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) \quad (\text{VF})$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pY(p) \quad (\text{VI})$$

$$y(t) = 0 \quad \forall t < -a$$

Transfo similitude ? connaitre partie non gouv/obs

-non gouv ssi Det Cd = 0 \Rightarrow un des Bdi est nul (Bdi = coeff de la diagonale de la matrice Cd)

-non obs ssi un des Cdi est nul \Rightarrow état i non observable

$$\text{Pole } p=0 \Rightarrow \text{d'Alembert} = 0$$

SLP analyse

STABLEssi $\sigma > 0$

1er ordre 2e ordre

$$H(p) = \frac{K\sigma}{p+\sigma}$$

$$h(t) = K\sigma e^{-\sigma t} \nu(t)$$

$$s(t) = K \left(1 - e^{-\sigma t}\right) \left(\cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d t\right) \nu(t)$$

pôles : $-\sigma \pm j\omega_d$

2e ordre

$$\frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2}$$

$$h(t) = K \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t} (\sin \omega_d t) \nu(t)$$

$$s(t) = K \left(1 - e^{-\sigma t}\right) \left(\cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d t\right) \nu(t)$$

pôles : $-\sigma \pm j\omega_d$

similitude pour $x = Lx_d$ avec L matrice des vecteurs propres de A : $\dot{x}_d(t) = Ax_d(t) + Bu(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}_d(t) = Ax_d(t) + Bu(t) \\ y(t) = G(x_d(t), U(t)) \end{cases} \xrightarrow{\text{linéarisation}} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{transformation de similitude}} \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}\tilde{u}(t) \end{cases}$ avec $\tilde{A} = T^{-1}AT$

$$\tilde{C} = CT$$

$$\tilde{D} = D$$

$$(hypothèse: v(t)=0) \quad M_A(t) = e^{At} M_A(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

$$\text{CNS : } \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \text{Observabilité} & \text{Gouvernabilité} \\ \hline \mathcal{O}(C, A) = & \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ C A^{n-1} \end{pmatrix} & \mathcal{C}(A, B) = \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} \\ \hline \text{rang } \mathcal{O} = n & & \text{rang } \mathcal{C} = n \\ \hline \end{array}$$

$$\text{CNS (ss) : valeurs propres de } A \text{ ont } \text{Re } < 0$$

$$\text{Entrée } 0 \rightarrow \text{état tend vers } 0 \text{ pour } t \rightarrow \infty$$

$$\text{Stabilité BBBO (externe)}$$

$$\text{CNS : } \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \text{ (pôles ont } \text{Re } < 0 \text{ après simplification)}$$

$$\text{Stabilité asymptotique (interne)}$$

$$\text{CNS (tf) : pôles ont } \text{Re } < 0 \text{ avant simplification}$$

$$\text{CNS (ss) : valeurs propres de } A \text{ ont } \text{Re } < 0$$

$$\text{Entrée } 0 \rightarrow \text{état tend vers } 0 \text{ pour } t \rightarrow \infty$$

$$\text{Ziegler Nichols } H(p) = p \cdot \zeta(p) = \frac{A}{pL} e^{-pl}$$

$$\text{P : } k_p = 0.5T_u \quad \text{PI : } \begin{cases} k_p = 0.4K_u \\ T_I = 0.8T_u \end{cases} \quad \text{PID : } \begin{cases} k_p = 0.6K_u \\ T_I = 0.57u \\ T_D = 0.125T_u \end{cases}$$

$$\text{Boucle fermée à rétroaction unitaire: régulateur proportionnel}$$

$$\text{Augmenter } k_p = \frac{1}{\omega_n} \text{ (ralentir la réponse)}$$

$$\text{Méthode de la sensibilité ultime}$$

$$\text{P : } k_p = 0.5T_u \quad \text{PI : } \begin{cases} k_p = 0.4K_u \\ T_I = 0.8T_u \end{cases} \quad \text{PID : } \begin{cases} k_p = 0.6K_u \\ T_I = 0.57u \\ T_D = 0.125T_u \end{cases}$$

$$\text{Gain ultime } k_p = K_u, \text{ Période ultime } T_u$$

$$\text{Vecteurs propres: } \begin{pmatrix} A - dI_n \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Valeurs propres: } \text{Det}(A - dI_n) = 0$$

Stable, non oscillant

$$H(p) = \frac{A_0}{1+pT} e^{-pt} \quad T = \frac{1}{\omega_n}$$

Choix du signal d'entrée en fonction de la présence d'un pôle à l'origine (système intégrateur) ou pas

$$H(p) = \frac{A_0}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2} e^{-pt}$$

$$\text{Tempo: } \frac{1}{p} \text{ (pôle)} + \frac{1}{p^2} \text{ (pôle)} + \frac{1}{p^3} \text{ (pôle)}$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \text{ (cf } \omega_d T_d = 2\pi)$$

$$d = e^{-\sigma t} / e^{-\sigma t} = e^{-\frac{2\pi\zeta}{\omega_n}}$$

$$\lambda p = -\sigma \Rightarrow \lambda = \frac{\sigma}{\pi^2 + \omega_n^2 \lambda^2}$$

$$\text{Pôle sur l'origine} \rightarrow \text{réponse rapide}$$

$$\text{Sensibilité, } S = \frac{\Delta T/T}{\Delta G/G}$$

$$\text{BO : } S_{BO} = 1 \quad \text{BF : } S_{BF} = \frac{1}{1+GD_B}$$

$$\boxed{\text{Pour assurer une erreur statique nulle vis-à-vis d'une perturbation polynomiale de degré égal à } k-1, \text{ le régulateur doit contenir } k \text{ pôles à l'origine.}}$$

$$\text{Analyse BF}$$

$$T_{bf} = \frac{GD_{bf}}{1+GD_{bf}}$$

$$T_{bo} = G \cdot D_{bo}$$

$$Y_{bo}(p) = G(p)D_{bo}(p)R(p) + G(p)W(p)$$

$$E_{bo}(p) = (I - G(p)D_{bo}(p))R(p) - G(p)W(p)$$

$$Y_{bf} = \frac{GD_{bf}}{1+GD_{bf}} R - \frac{G}{1+GD_{bf}} W - \frac{GD_{bf}}{1+GD_{bf}} V$$

$$U = \frac{D_{bf}}{1+GD_{bf}} R - \frac{GD_{bf}}{1+GD_{bf}} W - \frac{D_{bf}}{1+GD_{bf}} V$$

$$E_{bf} = \frac{1}{1+GD_{bf}} R - \frac{G}{1+GD_{bf}} W + \frac{GD_{bf}}{1+GD_{bf}} V$$

$$\lambda(t) = \frac{dt}{k!} \cdot \nu(t) \rightarrow R = \frac{1}{k!}$$

$$\text{Sensibilité, } S = \frac{\Delta T/T}{\Delta G/G}$$

$$\text{BO : } S_{BO} = 1 \quad \text{BF : } S_{BF} = \frac{1}{1+GD_B}$$

$$\boxed{\text{Pour assurer une erreur statique nulle vis-à-vis d'une perturbation polynomiale de degré égal à } k-1, \text{ le régulateur doit contenir } k \text{ pôles à l'origine.}}$$

$$\text{Pôle sur l'origine} \rightarrow \text{intégrateur!!}$$

$$\text{Lieu EVANS}$$

$$1 + DGH = 0 \iff 1 + KL(p) = 0 \iff 1 + K \frac{b(p)}{a(p)} = 0 \iff a(p) + Kb(p) = 0$$

$$\text{Règles de tracé du lieu d'Evans, } L(p) = \frac{b(p)}{a(p)}$$

$$(m \text{ zéros, } n \text{ pôles})$$

$$1. n \text{ branches partent des pôles, } m \text{ arrivent aux zéros, } (n-m) \text{ asymptotes}$$

$$2. \text{ points sur l'axe réel qui appartiennent au lieu sont à gauche d'un nombre impair de pôles/zéros}$$

$$3. \text{ point d' } \cap \text{ des } (n-m) \text{ asymptotes sur l'axe réel en } \alpha = \frac{\sum_m p_i - \sum_m z_i}{n-m}, \text{ angle } \phi_i = \frac{180^\circ(2i-1)}{n-m} \quad i = 0, \dots, m-n-1$$

$$4. \text{ points où le lieu quitte/rejoint l'axe réel: } \frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow -a'p + b'ab = 0$$

$$5. \text{ points d' } \cap \text{ avec l'axe imaginaire: utiliser Routh (annuler coef. } p^j \text{ → racines données par } p^{j+1} \text{ = valeur des pôles) ou } p = j\omega \text{ et résoudre } Re(p) = Im(p) = 0$$

$$6. \angle \text{ départ branche du lieu à partir d'un pôle complexe conjugué: } \angle(p_i)_{\text{départ}} = \sum \angle(z_i) - \sum \angle(p_i) - 180^\circ \quad (2k-1)$$

$$7. \angle \text{ arrivée branche du lieu à partir d'un zéro complexe conjugué: } \angle(z_i)_{\text{arrivée}} = \sum \angle(p_i) - \sum \angle(z_i) + 180^\circ \quad (2k+1)$$

$$\text{Règle répétitive: } \text{arg}(L(p)) = l \cdot 360^\circ$$

$$2. \text{ Il faut faire } \frac{1}{2} \text{ pour gérer le croisement d'autre pôle.}$$

$$\text{d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$\star \text{ calcul de } \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle } \text{ d'autre pôle.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{ pôle } \text{ à droite d'un pôle$$

Méthode harmonique

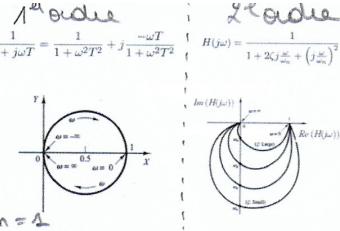
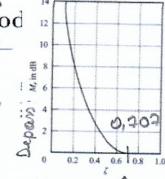
Pôle zéro : $20 \log |A_0(j\omega)^k| = 20 \log |A_0| + 20k \log \omega$

Pôle par : $(n, 20 \log |A_0|)$

Tracé asymptotique des courbes de Bod

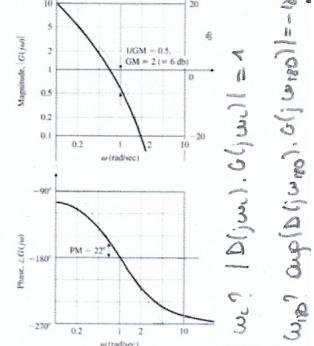
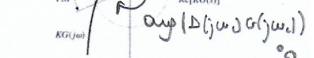
Courbes de Bode

Pente gain	Phase
$A_0(j\omega)^n$	20n dB/décade en $\omega = 1$
$(1+j\omega T)^n$	$n \cdot 90^\circ$
$\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + 1\right]^n$	$40n$ dB/décade en $\omega = \omega_n$
$\arg(H(j\omega_0)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dM}{du} \right) W(u) du = M \cdot 90^\circ$	$n \cdot 180^\circ$



$$MG = -20 \log_{10} |D(j\omega_{180}) G(j\omega_{180})|$$

$$MP = 180^\circ + \arg(D(j\omega_{180}) G(j\omega_{180}))$$



$$u(t) = A_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$y(t) = A_0 \cdot |H(j\omega)| \cdot \sin(\omega_0 t + \arg(H(j\omega)))$$

$$\text{Lien entre } \zeta \text{ et le pôle de résonance (système du 2e ordre)}$$

$$A_0 = 2A \cdot \sin(\arg(H(j\omega)))$$

$$Ay = 2A \cdot |H(j\omega)| \cdot \sin(\arg(H(j\omega)))$$

$$\text{Pôle en } 0: (z = \frac{A_0}{p(pT+n)})$$

$$P = E e^{j\theta} \quad -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

$$D(p)G(p) = \frac{A_0}{E^2 e^{j\theta}} = \frac{A_0}{E^2} e^{-j\theta/2}$$

$$D(j\omega)G(j\omega) = \frac{-T}{1+w^2} - j \frac{1}{w(w+Tw)}$$

Régulation numérique

TUITION / D
Transfo Z

$Z(U(kT_s + T_n)) = zU(z)$

$Z(u(kT_s - T_n)) = z^{-1}U(z)$

$$\begin{aligned} u(kT_n) &\longleftrightarrow U(z) \\ u(kT_n + T_n) &\longleftrightarrow zU(z) \\ u(kT_n - T_n) &\longleftrightarrow z^{-1}U(z) \end{aligned}$$

$$u_p(T_n k + T_n) = k p \cdot e(kT_n + T_n)$$

$$u_I(T_n k + T_n) = u_I(kT_n) + k_I \frac{T_n}{2} (e(kT_n + T_n) + e(kT_n))$$

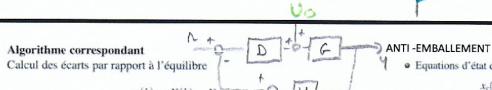
$$u_D(kT_n + T_n) = -u_D(kT_n) + k_D \frac{T_n}{2} (e(kT_n + T_n) - e(kT_n))$$

$$\begin{aligned} D(z) &= D_c \left(\frac{2z-1}{T_s z+1} \right) \quad PCD \\ U(z) &= \left(k_p + k_I \frac{T_s z+1}{2z-1} + k_D \frac{2z-1}{T_s z+1} \right) E(z) \end{aligned}$$

Nombre d'encerclements de $(-1; 0)$ par Γ : $N_E = Z - P$

Croix en BO:

Nombre de pôles dans la moitié droite du plan complexe est égal au nombre de pôles de la BF dans le plan droit - le nombre de pôles de la BO dans le plan droit



Algorithme correspondant

Calcul des écarts par rapport à l'équilibre

$$y(k) = Y(k) - Y_0$$

$$e(k) = r(k) - y(k)$$

Calcul du signal régulant ("petit signal")

$$u(k) = -d_1 u(k-1) - \dots - d_n u(k-n) + c_0 e(k) + \dots + c_n e(k-n)$$

Détermination du grand signal associé

$$U(k) = U_0 + u(k)$$

(Déroulement petit régime)

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

lim ecart autour x_0

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

$$\text{Suivi Traj: } \frac{dy}{dt} = \frac{b(p)}{a(p)} \cdot \frac{c(p)}{b(p)} = 1$$

A $\frac{dy}{dt}$ proprie

$$\text{BF: } E_B(p) = \frac{1}{1+G \cdot D(p)}$$

$D_B \gg$

Rép. manuelle (peut-être!!)

bf

BF: $\omega \cdot D_B \gg$ basse fréq.

V. $D_B \ll$ haute fréq.

Régulateur PID

$$T_i = \frac{k_p}{k}; \quad T_D = \frac{k_D}{k_p}$$

$$D(p) = k_p + \frac{k_I}{p} + \frac{k_D p}{pT_f + 1} = k_p \left(1 + \frac{1}{pT_i} + \frac{pT_D}{1 + pT_i} \right)$$

Modèle discret et transférée en Z

pôles discrets et zéro de la rep imp

Caractéristique

$$G < 0$$

BD

l'arc

l'arc