Nom, Prénom :
Numéro :

Question 3

On considère les courbes de Bode obtenues pour un système que l'on souhaite régler au moyen d'un régulateur proportionnel. La figure 2 correspond à la boucle ouverte, la figure 3 correspond au système réglé et la figure 4 correspond à la boucle fermée. Toutes ces courbes sont munies de leur tracé asymptotique.

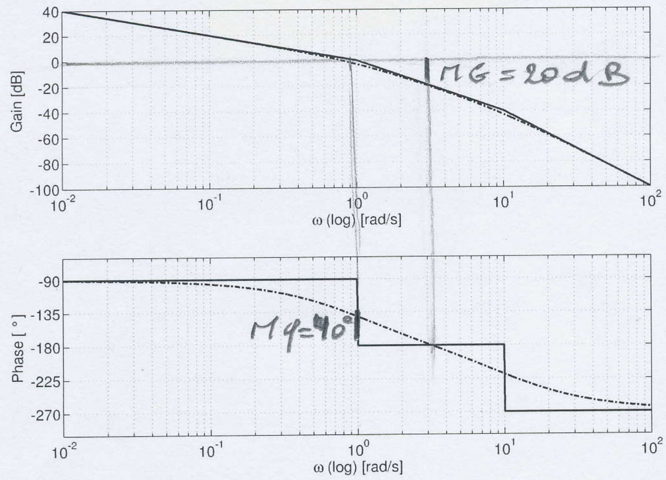


FIGURE 2 – Courbes de Bode de la boucle ouverte avec $k_p = 1$

Au moyen des courbes adéquates

1. Déterminez le nombre de pôles et de zéros de la fonction de transfert du système réglé. Calculez ensuite cette fonction de transfert.
2. Déterminez la marge de gain et de phase de la boucle fermée pour un gain $k_p = 1$.
3. Si l'actionneur peut être considéré comme parfait, représentez schématiquement la boucle fermée en y précisant les fonctions de transfert de chaque élément.
4. Tracez la courbe de Nyquist qui vous permettra de conclure quant à la stabilité de la boucle fermée. Quel intervalle de valeurs de k_p assure une boucle fermée stable ?
5. Déterminez le comportement asymptotique de la boucle fermée vis-à-vis d'une référence sinusoïdale de pulsation 1 rad s^{-1} et d'amplitude unitaire.

Nom, Prénom :
Numéro :

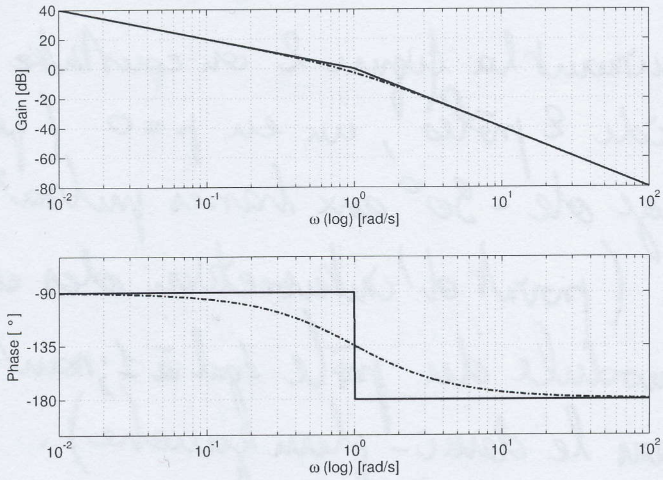


FIGURE 3 – Courbes de Bode du système réglé

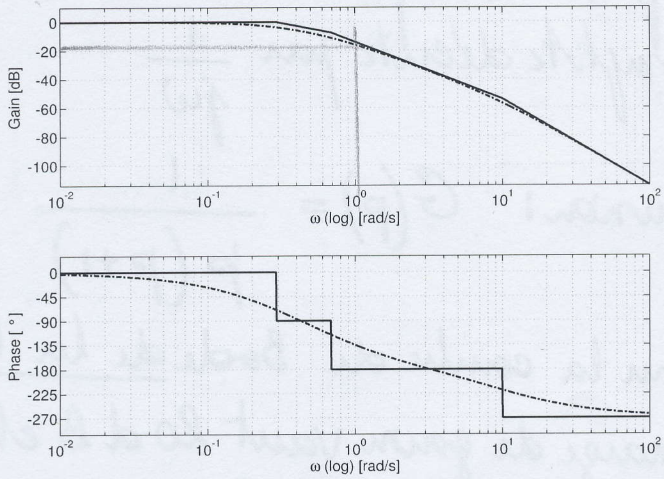


FIGURE 4 – Courbes de Bode de la boucle fermée avec $k_p = 1$

Nom, Prénom :
Numéro :

3.1.

En examinant la figure 2 on constate que le système possède 2 pôles, un en $p=0$ (pente de -20 dB/dec et déphasage de $-90°$ aux basses pulsations) et un en $p=-1$ (point d'intersection des asymptotes donne un module du pôle égal à 1; saut de $-90° \Rightarrow$ pôles dans le demi-plan gauche).

Finalement le point $\omega = 1$ rad/s, $G = 0$ dB appartient à l'asymptote correspondant aux basses pulsations $\Rightarrow$ asymptote décrite par $\frac{1}{j\omega}$

$\Rightarrow$ Conclusion : $G(p) = \dfrac{1}{p(p+1)}$

3.2. On lit sur la courbe de Bode de la boucle ouverte que la marge de gain vaut 20 dB et la marge de phase vaut approximativement 40°.

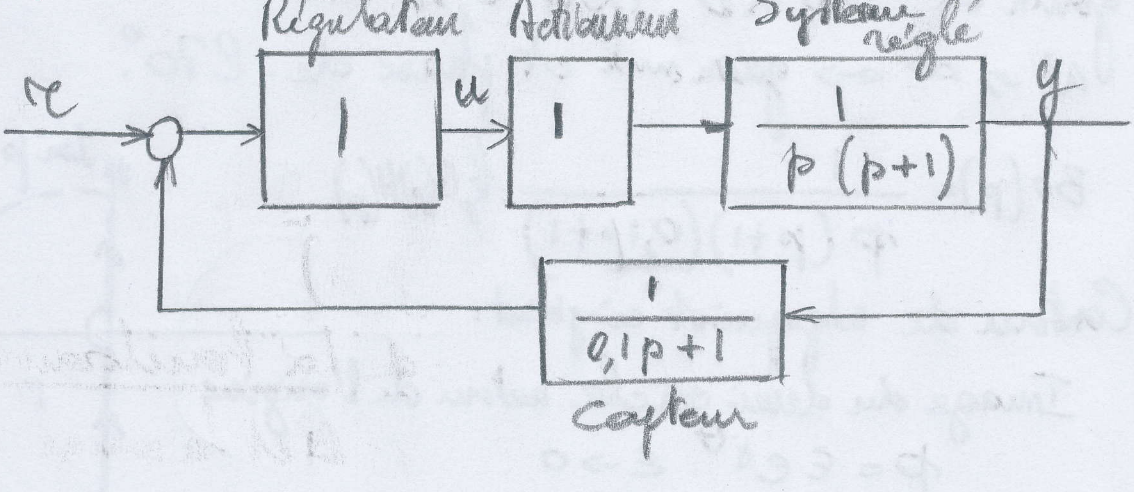
3.3. On sait par l'énoncé que le régulateur est un régulateur proportionnel de gain $k_p = 1$ et par le point 3.1. que $G(p) = \dfrac{1}{p(p+1)}$. En considérant la courbe de Bode de la boucle ouverte, on constate la présence d'un pôle en $p=-10$ (cf pente passe de -40 dB/dec à -60 dB/dec et saut de $-90°$ dans la courbe de phase).

Nom, Prénom :
Numéro :

Comme l'actionneur est supposé parfait, ce pôle est lié au capteur dont la fonction de transfert s'écrit $H(p) = \dfrac{1}{0{,}1p+1}$

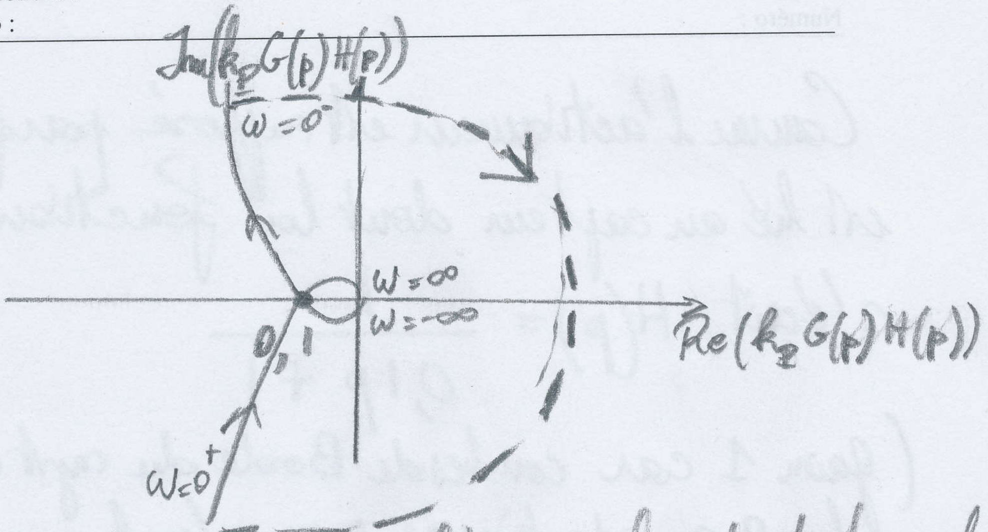
(gain 1 car courbes de Bode du syst réglé et de la BO identiques pour les basses pulsations)

Schéma fonctionnel de la boucle fermée :



Nom, Prénom :
Numéro :

3.4



Le point d'intersection avec l'axe réel négatif se lit sur la figure 2 où une phase de $-180°$ donne un gain de -20 dB, soit 0,1.

$\omega \to \infty \Leftrightarrow$ gain nul et phase de $-270°$.

$$Bo(p) = \frac{1}{p(p+1)(0{,}1p+1)} = k_p G(p) H(p)$$

Contour de Nyquist ci-joint :

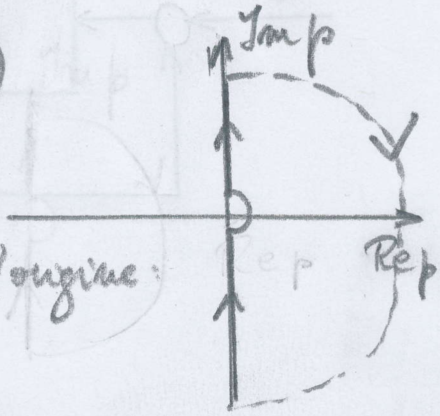


Image du demi cercle autour de l'origine :

$p = \varepsilon e^{j\theta}$ $\varepsilon \to 0$

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow Bo(\varepsilon e^{j\theta}) \sim \frac{1}{\varepsilon} e^{-j\theta}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ demi-cercle à l'infini se refermant dans le ½-plan droit.

Intervalle de k_p :

Gain de la boucle multiplié par 10 $\Longrightarrow$ courbe de Nyquist passe par $(-1, 0)$ et système possède deux pôles sur l'axe imaginaire (cf 2 encerclements du point $(-1, 0)$ pour $k_p > 10$ et pas de pôle de la boucle ouverte dans le demi-plan droit $\Rightarrow$ par le critère de Nyquist la BF possède 2 pôles dans le demi-plan droit pour $k_p > 10$.)

Gain de la boucle négatif → courbe de Nyquist encercle une fois le point $(-1, 0)$ → un pôle instable pour la BF par le critère de Nyquist

⟹ Intervalle de valeurs de k_I pour lesquelles la boucle fermée est stable : $k_I \in]0, 10[$

3.5. On lit sur la courbe de Bode de la boucle fermée (transmittance notée $T(p)$) que :

$$y(t) = |T(j)| \sin\left(t + \arg T(j)\right)$$

avec $20 \log |T(j)| \simeq -18\,dB$,

soit $|T(j)| = 10^{-9/10}$

et $\arg T(j) \simeq -\dfrac{3\pi}{4}$