

Régulateur PID

Année 2012-2013

Plan

- 1 Mise en contexte
- 2 Actions proportionnelle, intégrale et dérivée
- 3 Ajustement par les méthodes de Ziegler-Nichols
- 4 Quand utiliser un régulateur PI ou PID
- 5 Récapitulation

Motivation

- Structure de régulateur la plus utilisée (95 pourcents des régulateurs dans les procédés industriels)
- Développée initialement par des expériences; approche par essais et erreurs
 - **P**: action proportionnelle à l'erreur de réglage (la plus naturelle)
 - **I**: action par intégration ; permet d'annuler l'erreur statique (pour une référence constante); dégrade généralement la réponse transitoire
 - **D**: action dérivée permet d'améliorer la réponse transitoire grâce à l'effet d'anticipation
- Fonction de transfert de base:

$$D_{bf}(p) = k_p + \frac{k_I}{p} + \frac{k_D p}{pT_f + 1}$$

Pôle de filtrage introduit notamment pour rendre la fonction de transfert propre → réalisable en pratique

Objectif

- Comprendre le rôle des différentes actions P , I et D
- Introduire une méthode heuristique d'ajustement des paramètres k_P , k_I , k_D et sensibiliser à ses limitations

Régulateur proportionnel (1)

- Loi de réglage

$$u(t) = k_P e(t) \quad \text{soit} \quad D_{bf}(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = k_P$$

- k_P gain proportionnel
- Bande proportionnelle (proportionnal band): P_b

Définition: plage d'erreur dans laquelle $u_{min} \leq u(t) \leq u_{max}$

ou encore $u_{max} - u_{min} = k_P P_b$

Si l'on considère $u_{max} - u_{min} = 100\%$, alors

$$k_P = \frac{100}{P_b}$$

Régulateur proportionnel (2)

- Effet dans une rétroaction unitaire sur un système du 1^{er} ordre ?
 - Possibilité d'imposer la position du pôle de la boucle fermée
- Effet dans une rétroaction unitaire sur un système du 2^e ordre
 - Système réglé $G(p) = \frac{b}{p^2 + a_1 p + a_2}$
 - Fonction de transfert de la boucle fermée : $T(p) = \frac{b \cdot k_p}{p^2 + a_1 p + a_2 + k_p b}$
 - Possibilité de modifier la pulsation naturelle du système mais pas son facteur d'amortissement
 - Système de type 0 \rightarrow erreur statique d'autant plus faible que k_p grand
 - Augmentation de la fréquence naturelle mène à diminution de l'amortissement (cf $a_1 = 2\zeta\omega_n$ constant)

Régulateur à actions proportionnelle et intégrale (PI)

- Loi de réglage

$$u(t) = k_P e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau$$

- Fonction de transfert du régulateur

$$D_{bf}(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = k_P + \frac{k_I}{p}$$

- Boucle fermée obtenue pour un système réglé du premier ordre
 - Système réglé: $Y(p) = \frac{A_0}{1+p\tau} (U(p) + W(p))$
 - Régulateur : $U(p) = k_P(R(p) - Y(p)) + \frac{k_I}{p}(R(p) - Y(p))$
 - Boucle fermée :

$$Y(p) = \frac{A_0(k_P p + k_I)}{\tau p^2 + (A_0 k_P + 1)p + A_0 k_I} R(p) + \frac{A_0 p}{\tau p^2 + (A_0 k_P + 1)p + A_0 k_I} W(p)$$

Régulateur à actions proportionnelle et intégrale (PI)

- Boucle fermée obtenue pour un système réglé du premier ordre (suite)
 - Possibilité de choisir k_P et k_I pour obtenir des pôles complexes conjugués avec la pulsation naturelle et l'amortissement requis:
$$\omega_n = \sqrt{A_0 k_I / \tau} \text{ et } \zeta = \frac{A_0 k_P + 1}{2\tau \omega_n}$$
 - Noter le zéro à l'origine au numérateur de la fonction de transfert entre $W(p)$ et $Y(p)$ et le gain statique unitaire de la fonction de transfert entre $Y(p)$ et $R(p)$ \rightarrow erreur statique nulle vis-à-vis d'une référence constante et pour une perturbation constante
 - Système de type 1 vis-à-vis de la référence et de la perturbation (noter l'action par intégration en amont de la perturbation)

Régulateur à actions proportionnelle et intégrale (PI)

- Boucle fermée obtenue pour un système réglé du deuxième ordre

- Système réglé: $Y(p) = \frac{b}{p^2 + a_1p + a_2}(U(p) + W(p))$
- Equation caractéristique du système en boucle fermée

$$1 + D_{bf}(p)G(p) = 1 + \frac{k_P p + k_I}{p} \frac{b}{p^2 + a_1p + a_2} = 0$$

soit

$$p^3 + a_1p^2 + (a_2 + k_P b)p + b k_I = 0$$

Possibilité de fixer deux coefficients sur trois

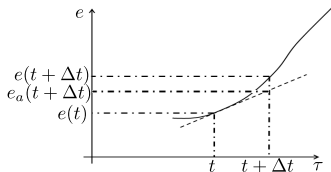
- Mêmes propriétés de précision que dans le cas du système du premier ordre (à démontrer comme exercice)

Régulateur à actions proportionnelle, intégrale et dérivée (PID)

- Action dérivée proportionnelle à la pente de l'erreur $e(t)$ (action anticipative)

$$e(t + \Delta t) = e(t) + \left. \frac{de}{d\tau} \right|_{\tau=t} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

$e_a(t + \Delta t)$: valeur fournie par le développement en série de Taylor limité au premier ordre



Régulateur à actions proportionnelle, intégrale et dérivée (PID)

- Loi de réglage

$$u(t) = k_P e(t) + k_I \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + k_D \frac{de(t)}{dt}$$

- Fonction de transfert du régulateur

$$D_{bf}(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = k_P + \frac{k_I}{p} + k_D p$$

- Donne une réponse brusque lors d'un changement abrupt de référence → souvent utile de placer l'action dérivée dans la rétroaction

$$u(t) = k_P e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau - k_D \frac{dy(t)}{dt}$$

Régulateur à actions proportionnelle, intégrale et dérivée (PID)

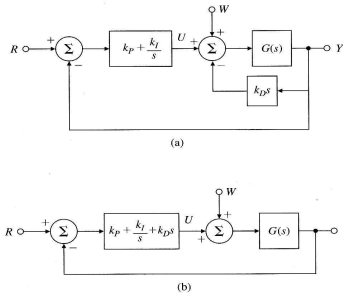


Figure: Schémas fonctionnels sans ou avec dérivée de la référence [Franklin et al., 2010]

Régulateur à actions proportionnelle, intégrale et dérivée (PID)

- Système réglé: $Y(p) = \frac{b}{p^2 + a_1 p + a_2} (U(p) + W(p))$
- Boucle fermée dans le cas où l'action dérivée porte sur $e(t)$

$$Y(p) = \frac{b(p^2 k_D + p k_P + k_I)}{DEN(p)} R(p) + \frac{bp}{DEN(p)} W(p)$$

où $DEN(p) = p^3 + (a_1 + b k_D) p^2 + (a_2 + b k_P) p + b k_I$

Possibilité d'assigner arbitrairement les 3 racines de $DEN(p)$ par choix de k_P , k_I et k_D

- Boucle fermée dans le cas où l'action dérivée porte sur $y(t)$

$$Y(p) = \frac{b(p k_P + k_I)}{DEN(p)} R(p) + \frac{bp}{DEN(p)} W(p)$$

- Propriétés de précision similaires au régulateur PI

Régulateur à actions proportionnelle, intégrale et dérivée (PID)

- Rôle du pôle de filtrage
 - Assure que le régulateur soit réalisable
 - Evite l'amplification du bruit de mesure
- Considérons $v(t) = \alpha \sin \omega_0 t$
Contribution dans l'action dérivée :
- $$k_D \frac{dv(t)}{dt} = \alpha k_D \omega_0 \cos \omega_0 t$$
- Effet d'autant plus important que ω_0 grande
- Filtrage du terme dérivé

$$D_{bf}(p) = k_p + \frac{k_i}{p} + \frac{k_D p}{p T_f + 1}$$

Valeur de bonne pratique: $T_f = \frac{k_D}{k_p N}$ avec N entre 8 et 20

Régulateur à actions proportionnelle, intégrale et dérivée (PID)

- Autre paramétrisation courante

$$D_{bf}(p) = k_P \left(1 + \frac{1}{pT_I} + \frac{pT_D}{1 + pT_D/N} \right)$$

Equivalence:

Constante de temps de l'action par intégration $T_I = k_P/k_I$

Constante de temps de l'action dérivée $T_D = k_D/k_P$

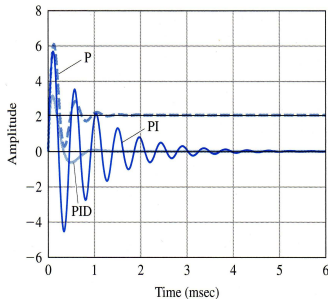
N entre 8 et 20

Régulateur à actions proportionnelle, intégrale et dérivée (PID)

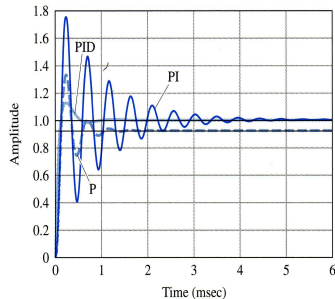
Illustration des effets P, I et D; régulation de vitesse d'un moteur à courant continu [Franklin et al., 2010]

(a) Réponse à un échelon de perturbation

(b) Réponse à un échelon de consigne



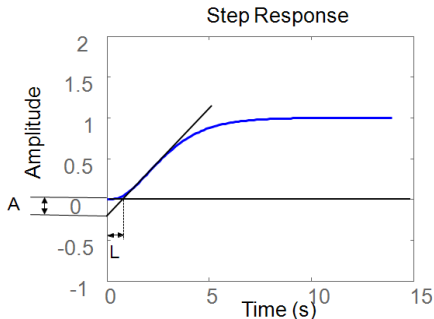
(a)



(b)

Méthode basée sur la réponse indicielle(1)

- Représentation de la réponse indicielle sous la forme d'un système intégrateur avec temps mort $\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{Ae^{-pL}}{Lp}$



- Ajustement des paramètres du régulateur pour obtenir une réponse avec un facteur de décroissance d égal à 0.25

Méthode basée sur la réponse indicielle(2)

- Règles d'ajustement des paramètres
 - Pour un régulateur proportionnel

$$k_P = 1/A$$

- Pour un régulateur PI

$$\begin{cases} k_P = 0.9/A \\ T_I = 3L \end{cases}$$

- Pour un régulateur PID

$$\begin{cases} k_P = 1.2/A \\ T_I = 2L \\ T_D = L/2 \end{cases}$$

Méthode basée sur la réponse indicielle (3)

- Exemple d'application au système décrit par $G(p) = \frac{1}{(p+1)^3}$
- $A = 0.218, L = 0.806 \rightarrow k_P = 5.50, T_i = 1.61, T_d = 0.403$
[Aström et Hagglund, 1995]

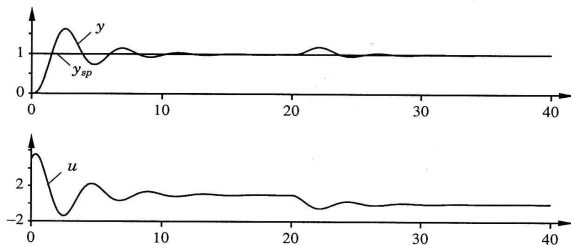


Figure 4.7 Setpoint and load disturbance response of a process with transfer function $1/(s+1)^3$ controlled by a PID controller tuned with the Ziegler-Nichols step response method. The diagrams show setpoint y_{sp} , process output y , and control signal u .

Notons que $y_{sp} \equiv r$

Méthode basée sur la réponse indicielle (4)

- Faible amortissement car $d = 0.25$ équivaut à $\zeta \simeq 0.21$
- Dépassement indiciel important
- Meilleure réponse vis-à-vis d'une perturbation abrupte (en échelon) que vis-à-vis d'un échelon de consigne

Méthode de la sensibilité ultime (1)

- Boucle fermée à rétroaction unitaire; régulateur proportionnel
Augmenter le gain du régulateur jusqu'à l'apparition d'une oscillation entretenue (une paire de pôles sur l'axe imaginaire pour la boucle fermée)
→ Gain ultime $k_P = K_u$; Période ultime T_u

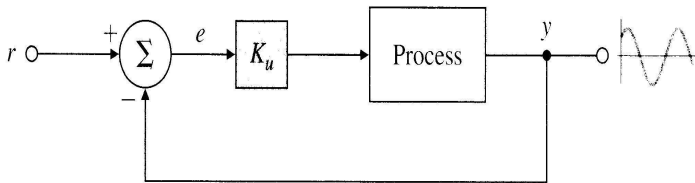


Figure: Expérience pour la détermination de T_u et K_u [Franklin et al., 2010]

Méthode de la sensibilité ultime (2)

- Règles d'ajustement des paramètres
 - Pour un régulateur proportionnel

$$k_P = 0.5T_u$$

- Pour un régulateur PI

$$\begin{cases} k_P = 0.4K_u \\ T_I = 0.8T_u \end{cases}$$

- Pour un régulateur PID

$$\begin{cases} k_P = 0.6K_u \\ T_I = 0.5T_u \\ T_D = 0.125T_u \end{cases}$$

Méthode de la sensibilité ultime (3)

- Exemple d'application au système décrit par $G(p) = \frac{1}{(p+1)^3}$
- $K_u = 8, T_u = 3.63 \rightarrow k_p = 4.8, T_I = 1.81, T_D = 0.45$ [Aström et Hagglund, 1995]

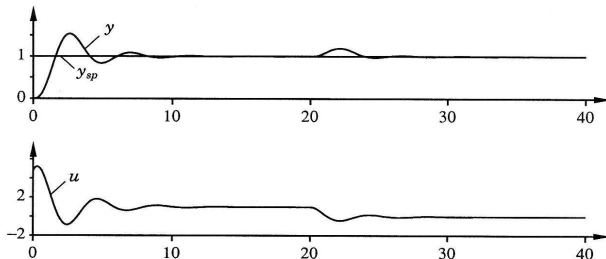


Figure 4.8 Setpoint and load disturbance response of a process with the transfer function $1/(s+1)^3$ controlled by a PID controller that is tuned with the Ziegler-Nichols frequency response method. The diagrams show setpoint y_{sp} , process output y , and control signal u .

Méthode de la sensibilité ultime (4)

- k_P généralement plus faible par la méthode de la sensibilité ultime que par l'approche basée sur la réponse indicielle → dépassement indicel plus faible mais encore fort important
- k_P important → faibles marges de stabilité
- Requiert mise en oscillation de la boucle fermée

Quand utiliser un régulateur PI

- Action dérivée peu fréquemment utilisée pour la régulation des procédés industriels
- Approprié pour les systèmes réglés dont le comportement transitoire est proche de celui d'un système du premier ordre
- Approprié pour les systèmes d'ordre supérieur s'il n'est pas nécessaire d'atteindre des performances élevées

Quand utiliser un régulateur PID

- Approprié pour les systèmes réglés dont le comportement transitoire est proche de celui d'un système du deuxième ordre
- Intérêt de l'action dérivée apparaît en particulier quand les constantes de temps sont significativement différentes (ex: régulation de température)
- Pour les systèmes d'ordre supérieur à 2, l'action dérivée permet d'améliorer la rapidité de la réponse par rapport à la réponse obtenue avec un PI. L'amélioration du facteur d'amortissement permet d'augmenter le gain proportionnel

Quand un régulateur plus sophistiqué est il requis (1)

- Système d'ordre élevé et performances exigentes

Exemple : $G(p) = \frac{1}{(p+1)^3}$

Comparaison des résultats obtenus par un régulateur PID et un régulateur de type RST (régulateur à deux degrés de liberté) [Aström et Hagglund, 1995]

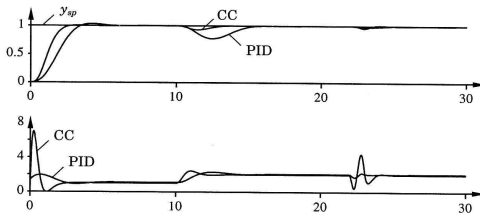


Figure 3.40 Control of the third-order system in Example 3.3 using a PID controller (PID) and a more complex controller (CC). The figure shows responses to a setpoint change, a load disturbance, and finally a measurement disturbance. The upper diagram shows setpoint y_{sp} and measurement signal y , and the lower diagram shows control signal u .

Quand un régulateur plus sophistiqué est il requis (2)

- Système avec un temps mort important par rapport à sa constante de temps dominante

Exemple : $\frac{dy(t)}{dt} = -0.5y(t) + 0.5u(t - 4)$

Comparaison des résultats obtenus par un régulateur PI et un prédicteur de Smith (SP: Smith Predictor)[Astrom et Hagglund, 1995]

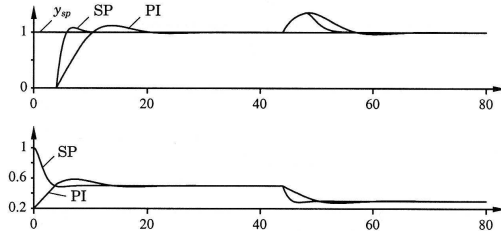


Figure 3.41 Control of the system in Example 3.4 with PI control (PI) and with a Smith predictor (SP). The upper diagram shows setpoint y_{sp} and measurement signal y , and the lower diagram shows control signal u .

Quand un régulateur plus sophistiqué est il requis (2)

- Systèmes avec modes oscillants peu amortis
- Régulateur PID peut suffire si il y a une seule paire de pôles complexes conjugués peu amortis dans la bande passante souhaitée pour la boucle fermée
- Besoin d'un ajustement de T_I et de T_D spécifique (voir ultérieurement utilisation d'un correcteur "notch")

Récapitulation

- Augmenter le gain proportionnel réduit l'erreur statique, mais un grand gain déstabilise presque toujours la boucle fermée et sollicite fortement les actionneurs (cf bruit de mesure)
- L'action par intégration annule l'erreur statique vis-à-vis d'une perturbation constante et/ou d'une référence constante mais a un effet déstabilisant
- L'action dérivée augmente l'amortissement et a un effet stabilisant
- Loi de réglage PID

$$U(p) = \left(k_P + \frac{k_I}{p} + k_D p \right) E(p)$$

ou

$$U(p) = k_P \left(1 + \frac{1}{T_{Ip}} + T_{Dp} \right) E(p)$$

Récapitulation

- La méthode de Ziegler Nichols permet un premier ajustement rapide sur la base du relevé de la réponse indicielle du système réglé ou d'une expérience en boucle fermée
- La méthode de Ziegler Nichols résulte en une boucle fermée avec un amortissement faible et de faibles marges de stabilité
- Méthode heuristique plus performante : méthode κ - τ [Aström et Hagglund, 1995]
- Meilleures performances que la régulation PID possibles pour un système réglé d'ordre élevé, un système avec temps mort important ou un système avec modes oscillants peu amortis