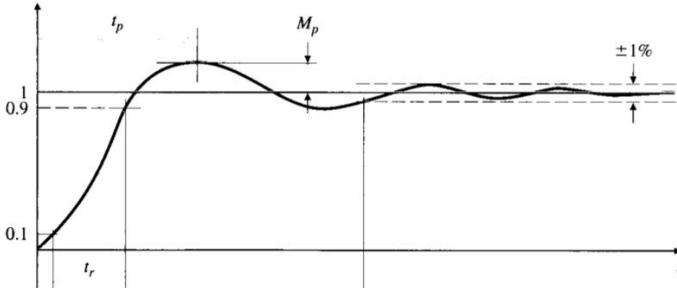


## Modèle dynamique

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \leftrightarrow S(p) = \frac{H(p)}{p}$$

## Analyse SLP

	1er ordre	2e ordre
$H(p)$ :	$\frac{K\sigma}{p+\sigma}$	$\frac{K\omega_n^2}{p^2+2\zeta\omega_n p+\omega_n^2}$
$h(t)$ :	$K\sigma e^{-\sigma t} \nu(t)$	$K \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t} (\sin \omega_d t) \nu(t)$
$s(t)$ :	$K(1-e^{-\sigma t})$	$K \left( 1 - e^{-\sigma t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \right) \nu(t)$
pôles :	$-\sigma$	$-\sigma \pm j\omega_d$



Effet d'un zéro,  $H(p) = \frac{\frac{p}{\alpha\zeta\omega_n}+1}{(\frac{p}{\omega_n})^2+2\zeta(\frac{p}{\omega_n})+1}$

- Modifier coefficients des exponentielles
- Zéro près d'un pôle réduit la contribution du terme
- Augmenter  $M_p$  :  $y(t) = y_0(t) + y_d(t) = y_0(t) + \frac{1}{\alpha\zeta}\dot{y}_0(t)$
- Pas d'influence sur  $t_s$

## Stabilité BIBO (externe)

CNS :  $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$  (pôles ont  $\text{Re} < 0$  après simplification)

## Critère de Routh

- Polynôme caractéristique :  $a(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$
- # changements de signe = # pôles demi-plan droit
- CNS (stabilité interne) : éléments 1e colonne > 0

Analyse BF Sensibilité,  $S = \frac{\Delta T/T}{\Delta G/G}$

BO :  $S_{BO} = 1$       BF :  $S_{BF} = \frac{1}{1+GD_{BF}}$

## Système de type $k$ v-à-v tracking/régulation

Réponse avec erreur statique constante pour  $R/W$  polynomiale de degré  $k$ , nulle pour degré <  $k$  ( $k$  pôles à l'origine)

Rappel :  $\frac{t^k}{k!} \nu(t) \leftrightarrow \frac{1}{p^{k+1}}$        $1 \nu(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}$ ,       $t \nu(t) \leftrightarrow \frac{1}{p^2}$ ,       $\frac{t^2}{2} \nu(t) \leftrightarrow \frac{1}{p^3}, \dots$

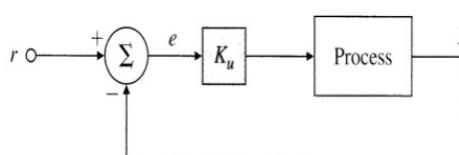
## Méthode basée sur la réponse indicelle, $\frac{Ae^{-pL}}{pL}$

P :  $k_p = \frac{1}{A}$       PI :  $\begin{cases} k_p = \frac{0.9}{A} \\ T_I = 3L \end{cases}$

Boucle fermée à rétroaction unitaire; régulateur proportionnel

Augmenter le gain du régulateur jusqu'à l'apparition d'une oscillation entretenue (une paire de pôles sur l'axe imaginaire pour la boucle fermée)

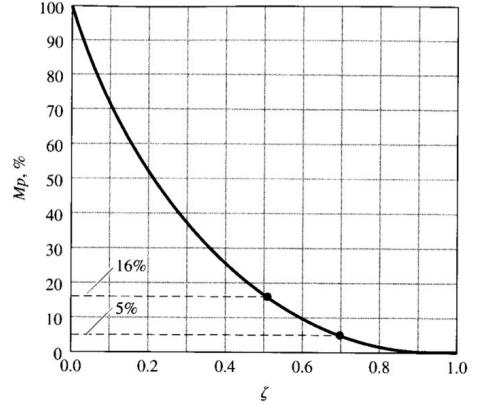
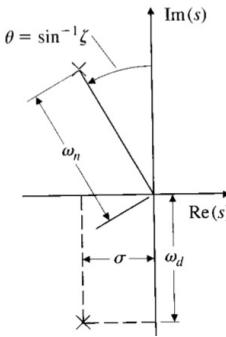
→ Gain ultime  $k_p = K_u$ ; Période ultime  $T_u$



## Théorèmes valeur finale et initiale

$$\begin{cases} Y(p) = \frac{N(p)}{D(p)} e^{\sigma p} \\ \text{pôles } pY(p) \text{ ont } \text{Re} < 0 \end{cases} \implies \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) && \text{(VF)} \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) &= \lim_{p \rightarrow \infty} pY(p) && \text{(VI)} \end{aligned}$$

	1er ordre	2e ordre	$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$
$t_r$ :	$\frac{2,2}{\sigma}$	$\frac{1,8}{\omega_n}$	$\sigma = \zeta \omega_n$
$t_p$ :	—	$\frac{\pi}{\omega_d}$	$ p  = \omega_n$
$M_p$ :	0	$e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$	$\sin \theta = \zeta$
$t_s$ :	$\frac{4,6}{\sigma}$	$\frac{4,6}{\omega_d}$	
$\tau$ :	$\frac{1}{\sigma}$	—	



Effet d'un pôle,  $H(p) = \frac{1}{(\frac{p}{\alpha\zeta\omega_n}+1)((\frac{p}{\omega_n})^2+2\zeta(\frac{p}{\omega_n})+1)}$

- Augmenter  $t_r = \frac{1,8}{\omega_n}$  (ralentir la réponse)

## Stabilité asymptotique (interne)

CNS (tf) : pôles ont  $\text{Re} < 0$  avant simplification

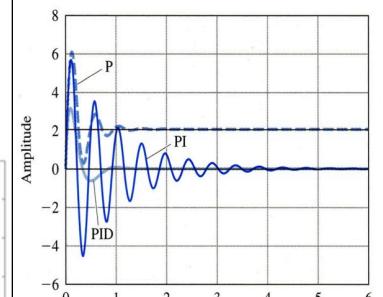
CNS (ss) : valeurs propres de  $A$  ont  $\text{Re} < 0$

## Table de Routh

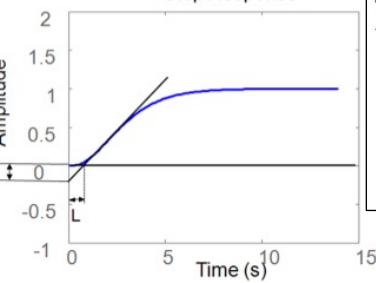
$$\begin{array}{cccccc} 1 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & \\ a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & \text{avec } b_1 = -\frac{1}{a_1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots & \text{etc.} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

## Régulateur PID

$$D_{BF}(p) = k_P + \frac{k_I}{p} + k_D p = k_P \left( 1 + \frac{1}{T_I p} + T_D p \right)$$



## Step Response



## Méthode de la sensibilité ultime

P :  $k_p = 0,5T_u$

PI :  $\begin{cases} k_p = 0,4K_u \\ T_I = 0,8T_u \end{cases}$

PID :  $\begin{cases} k_p = 0,6K_u \\ T_I = 0,5T_u \\ T_D = 0,125T_u \end{cases}$

## Lieu d'Evans

$$1 + DGH = 0 \Leftrightarrow 1 + KL(p) = 0 \Leftrightarrow 1 + K \frac{b(p)}{a(p)} = 0 \Leftrightarrow a(p) + Kb(p) = 0$$

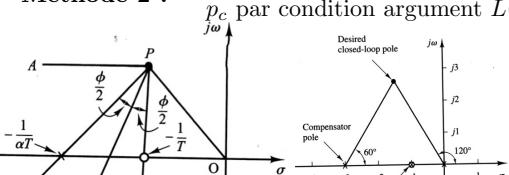
Règles de tracé du lieu d'Evans,  $L(p) = \frac{b(p)}{a(p)}$  ( $m$  zéros,  $n$  pôles)

1.  $n$  branches partent des pôles,  $m$  arrivent aux zéros,  $(n-m)$  asymptotes
2. points sur l'axe réel qui appartiennent au lieu sont à gauche d'un nombre impair de pôles/zéros
3. point d'intersection des  $(n-m)$  asymptotes sur l'axe réel en  $\alpha = \frac{\sum^n p_i - \sum^m z_i}{n-m}$ , angle  $\phi_l = \frac{180^\circ(2l-1)}{n-m}$
4. points où le lieu quitte/rejoint l'axe réel :  $\frac{dK}{dp} = 0 \Rightarrow -a'b + ab' = 0$
5. points d'intersection avec l'axe imaginaire : utiliser Routh (annuler coef.  $p^i \rightarrow$  racines données par  $p^{i+1}$  = valeur des pôles) ou  $p = j\omega$  et résoudre  $\text{Re}(p) = \text{Im}(p) = 0$
6.  $\angle$  départ branche du lieu à partir d'un pôle complexe conjugué :  $\angle(p_l)_{\text{départ}} = \sum \angle(z_i) - \sum_{\neq l} \angle(p_i) - 180^\circ$
7.  $\angle$  arrivée branche du lieu à partir d'un zéro complexe conjugué :  $\angle(z_l)_{\text{arrivée}} = \sum \angle(p_i) - \sum_{\neq l} \angle(z_i) + 180^\circ$

## Conception de régulateurs à avance de phase

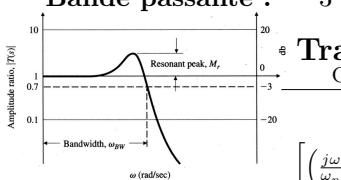
**Méthode 1 :**  $z_c = \frac{1}{T}$  et  $p_c = \frac{1}{\alpha T}$

**Méthode 2 :** Compensation pôle par  $z_c$



## Méthodes harmoniques

Bande passante :  $-3 \text{ dB}$



## Tracé asymptotique des courbes de Bode

Courbes de Bode	Pente gain	Phase
$A_0(j\omega)^n$	$20n \text{ dB/décade en } \omega = 1$	$n \cdot 90^\circ$
$(1 + j\omega T)^n$	$20n \text{ dB/décade en } \omega = \frac{1}{T}$	$n \cdot 90^\circ$
$\left[ \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right) + 1 \right]^n$	$40n \text{ dB/décade en } \omega = \omega_n$	$n \cdot 180^\circ$

## Lien entre $\zeta$ et le pic de résonance (système du 2e ordre)

gain max pour  $\omega = \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

amplitude du pic de résonance  $M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$

pour  $\zeta > 0,707$ ,  $M_r = 1$  et pas de pic de résonance

Correcteur à avance de phase :  $D(p) = \tilde{k}_c \alpha \frac{1+pT}{1+pT\alpha}$  ( $\alpha < 1$ )

•  $\phi_{max}$  en  $\omega_{max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$ , moyenne géométrique de  $\frac{1}{T}$  et  $\frac{1}{\alpha T}$  :  $\log \omega_{max} = \frac{1}{2} (\log \frac{1}{T} + \log \frac{1}{\alpha T})$

• Avance de phase maximale  $\phi_{max}$  :  $\tan \phi_{max} = \frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}}$

Nombre d'encerclements de  $(-1; 0)$  par  $\Gamma$  :  $N_E = Z - P$

## Modèles en variables d'état

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X(t), U(t)) \\ Y(t) = g(X(t), U(t)) \end{cases} \rightarrow \text{linéarisation} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$\rightarrow$  transformation de similitude  $\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}\tilde{u}(t) \end{cases}$

Passage ss  $\rightarrow$  tf :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C(pI_n - A)^{-1}B + D = \frac{C \text{Adj}(pI_n - A)B + D \det(pI_n - A)}{\det(pI_n - A)}$$

**Forme modale :** Si matrice  $A$  valeurs propres distinctes, transformation de

similitude pour  $x = Lx_d$  avec  $L$  matrice des vecteurs propres de  $A$  :  $\begin{cases} \dot{x}_d(t) = L^{-1}ALx_d(t) + L^{-1}Bu(t) \\ y(t) = CLx_d(t) + Du(t) \end{cases}$

avec  $x_d(0) = L^{-1}x_0 = x_{d0}$ . Ecrit autrement :  $\begin{cases} \dot{x}_{d_i}(t) = \lambda_i x_{d_i}(t) + b_{d_i}u(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^n c_{d_i}x_{d_i}(t) + Du(t) \end{cases}$

Matrice de gouvernabilité :  $C_d = L^{-1}C$  (rang  $C_d$  = rang  $C$ )

$\det C_d : \prod_{i=1}^n b_{d_i} \cdot \prod_{i,j=1}^n (\lambda_i - \lambda_j)$

## Exponentielle d'une matrice :

$$\exp(At) = I_n + At + A\frac{t^2}{2} + \dots + A^n \frac{t^n}{n!} + \dots$$

$$x(t) = T\tilde{x}(t)$$

$$\tilde{x}(0) = T^{-1}x_0 := \tilde{x}_0$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B$$

$$\tilde{C} = CT$$

$$\tilde{D} = D$$

## Condition sur le module :

$$|KL(p)| = 1 \Leftrightarrow K(p) = \frac{1}{|L(p)|} = \frac{1}{\prod |z-z_i|}$$

## Condition sur l'argument (Evans positif) :

$$\arg L(p) = \sum^m \arg(z_i) - \sum^n \arg(p_i) = \pm 180^\circ(2l - 1)$$

**Partie de cercle dans Evans :**  $2p/1z$ ,  $2p/2z$ ,  $1p/2z$

**Lead/lag compensator :**  $D(p) = k_c \frac{p+z_c}{p+p_c}$

**Régulateur LEAD**

**Régulateur LAG**

$z_c < p_c$  (PD)

améliore le transitoire

accélère la réponse ( $t_r \downarrow M_p \downarrow \zeta \uparrow$ )

augmente MP & marge de stabilité

accentue le bruit HF

$p_c < z_c$  (PI)

améliore la précision BF

diminue l'erreur statique

conserve MP

n'augmente pas BP

## Ajout d'un zéro

déplace le lieu vers la gauche

## Ajout d'un pôle

déplace le lieu vers la droite

Exemple :  $a(p) + Kb(p) = p^3 + 3p^2 + 2p + K = 0$

$p^3$	1	2		
$p^2$	3	$K$		
$p^1$	$\frac{6-K}{3}$	0		
$p^0$	$K$	0		

pour  $K > 0$  :  $\frac{6-K}{3} > 0 \Leftrightarrow K < 6$

point d'intersection avec Im :  $3p^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow p = \pm j\sqrt{2}$

## Courbes de Nyquist

