Examen d'instrumentation

Consignes

- Indiquez immédiatement vos nom, prénom et section en bas de CHAQUE page

- Documents et calculatrices graphiques ou avec mémoire **NE SONT PAS AUTORISES**.
- L'examen dure **3h00**
- L'examen est coté au total sur 40 points (ramené ensuite sur 20 points)

- Répondez directement dans les cases prévues à cet effet
- Décrivez le **raisonnement** qui a conduit à chaque réponse (**la longueur de l'emplacement prévu pour la réponse vous indique approximativement la longueur du développement attendu**)
- Efforcez-vous d'écrire le plus clairement et le plus lisiblement possible

NOM :
PRENOM :
SECTION :

Question 1 / 10pts

Une société désire réaliser un système de mesure de la température de précision portable et stand alone pour monitorer les variations de la calotte glaciaire. Les spécifications de cette chaine d'acquisition vous sont fournies :

- La température doit pouvoir être mesurée entre -100°C et +50°C
- La puissance max est budgétée à 7.5 mW
- Précision sur la température de 0.01 10^{-3} °C
- Bruit sur la mesure inférieur à 0.015 10^{-3} °C $_{RMS}$
- On veut mesurer les variations de la température pour des fréquences allant jusqu'à maximum 1Hz.
- Alimentation du circuit en 0-6V

Pour réaliser cette chaîne, vous avez à votre disposition différents composants (vous pouvez prendre plusieurs fois le même composant si nécessaire). Vous avez aussi à disposition tous les composants numériques que vous pourriez désirer. Pour des raisons économiques, vous désirez minimiser le nombre total de composants utilisés.

Il vous est demandé de dimensionner la chaîne d'acquisition respectant le cahier des charges. Veuillez préciser son architecture (en vous aidant d'un schéma bloc) et, pour chaque composant, discuter son utilité (est-il nécessaire de l'inclure dans la chaine ?), sa position dans la chaine et la manière dont il est utilisé (quelle(s) amplification(s) pour le(s) amplificateur(s) ? quelle(s) fréquence(s) de coupure pour le(s) filtre(s) ?). Veuillez calculer la contribution en bruit de chaque composant ainsi que le bruit total, référé à l'entrée, de la chaine. Si plusieurs possibilités sont offertes (par exemple, plus d'un composant possible ou plus d'une valeur possible), veuillez le noter.

Capteurs :

	Bruit E_n	R_{source}	Tension de sortie à 0°C	Sensibilité (linéaire)
Capteur 1	$75\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$	1kΩ	0.5V	10mV/°C
Capteur 2	$75\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$	1kΩ	1 V	10mV/°C
Capteur 3	$5\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$	10kΩ	0.5V	10mV/°C
Capteur 4	$5\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$	10kΩ	1 V	10mV/°C

Amplificateurs :

	Bruit E_n	Bruit I_n	G.BP	Puissance
Ampli 1	$10\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$	$100\frac{pA}{\sqrt{Hz}}$	$5MHz$	2mW
Ampli 2	$5\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$	$500\frac{pA}{\sqrt{Hz}}$	$0.1MHz$	1mW
Ampli 3	$5\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$	$1\frac{nA}{\sqrt{Hz}}$	$10MHz$	0.5mW

Filtres passe-haut :

	Bruit E_n	Bruit I_n	G.BP	Puissance	$F_{coupure}$
Filtre PH1	$500\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$	$100\frac{pA}{\sqrt{Hz}}$	$50MHz$	2mW	A déterminer
Filtre PH2	$250\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$	$100\frac{nA}{\sqrt{Hz}}$	$20MHz$	2mW	A déterminer
Filtre PH3	$100\frac{\mu V}{\sqrt{Hz}}$	$100\frac{nA}{\sqrt{Hz}}$	$10MHz$	0.5mW	A déterminer

Filtres passe-bas :

	Bruit E_n	Bruit I_n	G.BP	Puissance	$F_{coupure}$
Filtre PB1	$800\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$	$100\frac{pA}{\sqrt{Hz}}$	$50MHz$	0.5mW	A déterminer
Filtre PB2	$800\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$	$100\frac{nA}{\sqrt{Hz}}$	$20MHz$	0.5mW	A déterminer
Filtre PB3	$100\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$	$100\frac{nA}{\sqrt{Hz}}$	$10MHz$	2mW	A déterminer

Convertisseurs analogique-numérique :

	Bruit E_n	$F_{sampling}$ max	Nombre de bits	Puissance
CAN 1	$100\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$	100Hz	16	2mW
CAN 2	$100\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$	100Hz	20	2mW
CAN 3	$100\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$	100Hz	24	2mW
CAN 4	$400\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$	100Hz	16	1mW
CAN 5	$400\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$	100Hz	20	1mW
CAN 6	$400\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$	100Hz	24	1mW

Une chaine sans amplificateur ?

Pour minimiser le nombre de composants, on part d'une chaine composée du stricte minimum. On n'a aucune indication comme quoi le signal du capteur serait limité en fréquence et donc un filtre passe bas est nécessaire pour éviter le repliement spectral. Un CAN l'est aussi pour digitaliser le signal. La chaine minimisant le nombre de composant est donc constituée d'un capteur, d'un filtre passe bas et d'un CAN.

On veut un bruit sur la mesure inférieur à 0.015 10-3°Crms, c'est-à-dire un bruit référé à l'entrée de 0.015 10-3°Crms x 10mV/°C = $150nV_{RMS}$.

En choisissant l'impédance de source la plus faible (1kΩ), la densité spectrale de bruit sera :

$$PB1: en = \sqrt{\left(1k\Omega * 100\frac{pA}{\sqrt{Hz}}\right)^2 + \left(800\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2} = \sqrt{\left(100\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2 + \left(800\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2} \approx 800\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$$

$$PB2: en = \sqrt{\left(1k\Omega * 100\frac{nA}{\sqrt{Hz}}\right)^2 + \left(800\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2} = \sqrt{\left(100\,000\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2 + \left(800\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2} \approx 100\,000\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$$

$$PB3: en = \sqrt{\left(1k\Omega * 100\frac{nA}{\sqrt{Hz}}\right)^2 + \left(100\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2} = \sqrt{\left(100\,000\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2 + \left(100\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2} \approx 100\,000\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$$

Le bruit total de l'ampli vaut, pour PB1 qui minimise le bruit :

$$En = 800\frac{nV}{\sqrt{Hz}} * \sqrt{1Hz} = 800nV_{RMS}$$

On ne respecte donc pas le cahier des charges. La chaine qui pourrait respecter le cahier des charge devra donc contenir un élément supplémentaire. L'ajout d'un amplificateur de tête semble tout désigné. Vérifions si la chaine résultante pourrait convenir.

Choix du capteur et de l'ampli

La température doit pouvoir être mesurée entre -100°C et +50°C.

Les capteurs 1 et 3 donnent en sortie 0.5V à 0°C et une sensibilité linéaire de 10mV/°C. Ils ont donc une sortie en tension de 0V (-50°C) à 1.5V (100°C). Ils ne conviennent pas car ils donneront des tensions négatives pour une température en dessous de -50°C et la chaine est alimentée en 0-6V

Les capteurs 2 et 4 donnent en sortie 1V à 0°C et une sensibilité linéaire de 10mV/°C. Ils ont donc une sortie en tension de 0V (-100°C) à 1.5V (50°C). Ils conviennent de ce point de vue là.

Gain max = 4 (=6V/1.5V). Le produit gain*BP = 4*1Hz = 4, ne pose de problème pour aucun des trois amplis.

Rs = 1kΩ ou 10kΩ donc c'est le bruit de courant qui va être prépondérant. Même pour 1kΩ, la densité bruit de courant domine largement pour les trois amplis :

- **pour l'ampli A :** $10\frac{nV}{\sqrt{Hz}} < 1k\Omega * 100\frac{pA}{\sqrt{Hz}} = 100\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$
- **pour l'ampli B :** $5\frac{nV}{\sqrt{Hz}} < 1k\Omega * 500\frac{pA}{\sqrt{Hz}} = 500\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$
- **pour l'ampli C :** $5\frac{nV}{\sqrt{Hz}} < 1k\Omega * 1000\frac{pA}{\sqrt{Hz}} = 1000\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$

C'est l'ampli 1 qui a le plus petit bruit en courant et qui minimise le bruit total. La densité spectrale de bruit, presque uniquement due au bruit en courant, vaut :

$$en\_amp1/cap2 = \sqrt{\left(1k\Omega * 100\frac{pA}{\sqrt{Hz}}\right)^2 + \left(10\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2} = \sqrt{\left(100\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2 + \left(10\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2} \approx 100\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$$

Le bruit total de l'ampli vaut :

$$En = 100\frac{nV}{\sqrt{Hz}} * \sqrt{1Hz} = 100nV_{RMS}$$

On respecte pour l'instant le cahier des charges, c'est-à-dire un bruit référé à l'entrée inférieur à $150nV_{RMS}$. Si on prend l'ampli 2 ou 3, ce n'est plus le cas :

$$en\_amp2/cap2 = \sqrt{\left(1k\Omega * 500\frac{pA}{\sqrt{Hz}}\right)^2 + \left(5\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2} = \sqrt{\left(500\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2 + \left(5\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2} \approx 500\frac{nV}{\sqrt{Hz}} => En = 500nV_{RMS}$$

$$en\_amp3/cap2 = \sqrt{\left(1k\Omega * 1000\frac{pA}{\sqrt{Hz}}\right)^2 + \left(5\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2} = \sqrt{\left(1000\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2 + \left(5\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2} \approx 1000\frac{nV}{\sqrt{Hz}} => En = 1000nV_{RMS}$$

On peut donc les rejeter. Si l'on choisit le capteur 4, on ne respecte plus non plus le cahier des charges, même avec l'amplificateur 1, qui pourant minimise le bruit en courant :

$$en\_amp1/cap4 = \sqrt{\left(10k\Omega * 100\frac{pA}{\sqrt{Hz}}\right)^2 + \left(10\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2} = \sqrt{\left(1000\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2 + \left(10\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2} \approx 1000\frac{nV}{\sqrt{Hz}} => En = 1000nV_{RMS}$$

On choisit l'ampli 1 et le capteur 2.

Le bruit du capteur 2 vaut :

$$En = 75\frac{nV}{\sqrt{Hz}} * \sqrt{1Hz} = 75nV_{RMS}$$

<u>Choix des filtres</u>
L'offset nous intéresse, puisqu'il est nécessaire pour obtenir la température (en valeur absolue).
Il ne faut pas de filtre passe haut.

Choix de la fréquence de coupure du filtre :
Minimum (fin de la bande passante) : 1Hz
Maximum (début de la bande d'arrêt) : 100Hz/2 = 50Hz

Le produit gain*BP = 1*1Hz = 1Hz. Tous les filtres conviennent.

Ici, c'est le bruit en tension qui domine (Zin ~ 0). Le filtre avec le moins de bruit en tension donne (PB3):

$$En = 100\frac{nV}{\sqrt{Hz}} * \sqrt{1Hz}/4 = 25nV_{RMS}$$

Les deux autres donnent :
$En = 800\frac{nV}{\sqrt{Hz}} * \sqrt{1Hz}/4 = 200nV_{RMS}$**. En le sommant au bruit de l'ampli on dépasse déjà le cahier des charges :**

$$\sqrt{(100nV_{RMS})^2 + (200nV_{RMS})^2} = 223nV_{RMS} > 150nV_{RMS}$$

On peut donc les rejeter.

On choisit le filtre PB3.

<u>CAN</u>
La précision sur la mesure est de 0,01 10-3°C à l'entrée de la chaine, correspondant à 0.1µV à la sortie du capteur, soit 4*0.1µV = 0.4µV à l'entrée du CAN. Nous avons donc une dynamique de 6V/0.4µV = 15M. Il nous faudra donc au minimum 24 bits (2^24=16M). => Uniquement le 3 ou le 6.

On veut mesurer les variations de la température pour des fréquences allant jusqu'à maximum 1Hz. Il faut donc une fréquence d'échantillonnage > 2Hz minimum pour respecter Shannon. F_s > min 2* fmax = 2Hz => tous les CAN conviennent.

Bruit du 3 : $En = 100\frac{nV}{\sqrt{Hz}} * \sqrt{1Hz}/4 = 25nV_{RMS}$

Bruit du 6 : $En = 400\frac{nV}{\sqrt{Hz}} * \sqrt{1Hz}/4 = 100nV_{RMS}$

Budget bruit

Avec le CAN 3 :

$Etot = \sqrt{75nV^2 + 100nV^2 + 25nV^2 + 25nV^2} = 130nV_{RMS} < 150nV_{RMS}.$

Avec le CAN 6 :

$Etot = \sqrt{75nV^2 + 100nV^2 + 25nV^2 + 100nV^2} = 162nV_{RMS} > 150nV_{RMS}.$

Seul le CAN 3 peut convenir.

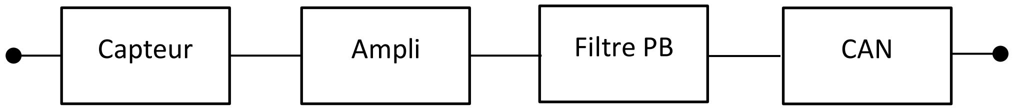
Budget puissance

PAmpli1 + PFiltrePB3 + PCAN3 =

2mW + 2mW + 2mW = 6mW < 7.5 mW

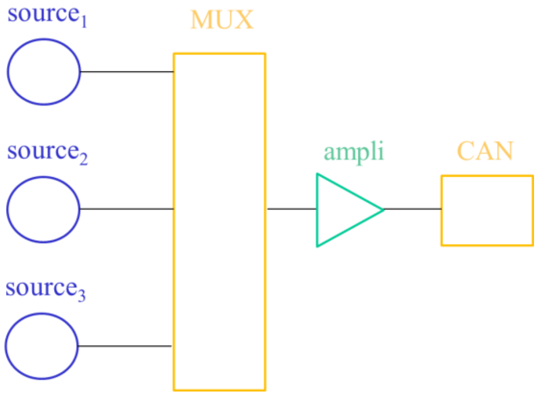
Ok

Architecture finale



Question 2 **/ 5pts**

Soit le schéma suivant :



Les sources 1, 2, et 3 sont des signaux sinusoïdaux de 1mV crête à crête à 1 Hz, superposé à un offset allant jusqu'à +/-1V. Le CAN échantillonne a une fréquence de 1kHz. L'amplificateur a un gain unitaire. Le multiplexeur et l'amplificateur sont bien dimensionnés.

Quel est le slew rate minimum de l'amplificateur ? Pourquoi ?

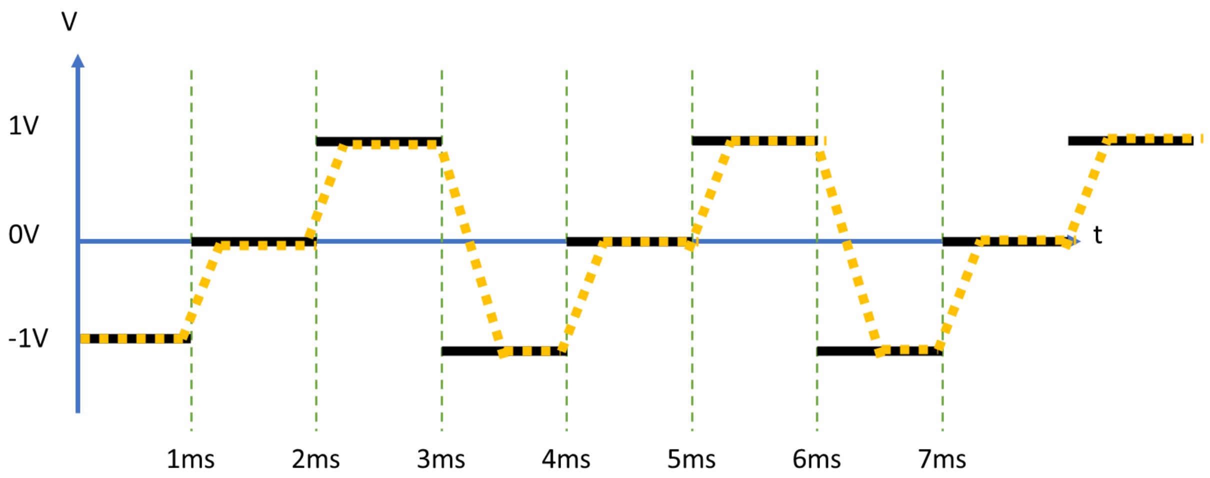
Différence d'amplitude maximum entre deux canaux = 1V + 1V = 2V.

Temps maximum entre deux échantillons : 1/fs = 1ms.

Slew rate minimum : 2V/1ms = 2V/ms.

/2

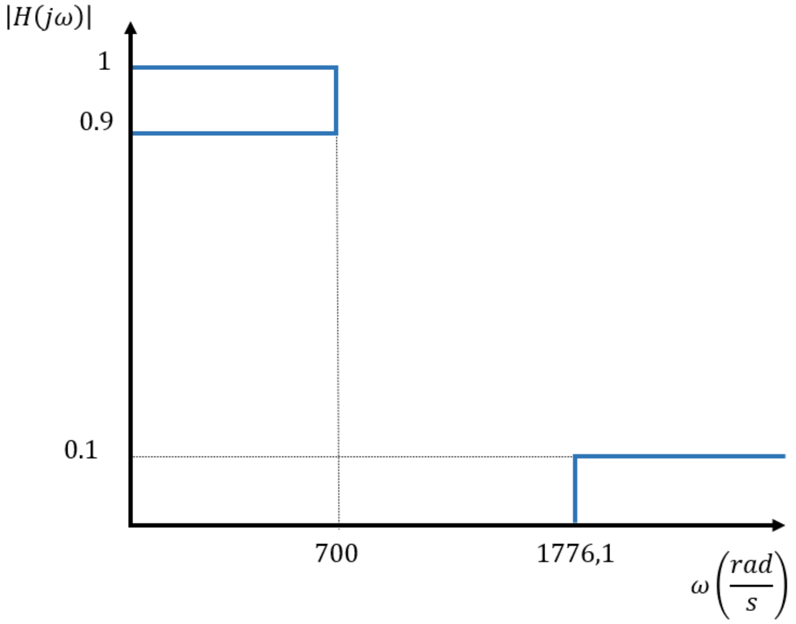
Donner l'allure temporel du signal à l'entrée de l'amplificateur et à l'entrée du CAN si l'offset vaut : -1V, 0V et 1V, respectivement pour la source 1, 2 et 3. L'amplificateur a un slew rate deux fois supérieur au slew rate minimum.



/3

Question 3 **/ 5pts**

Ci-dessous sont représentés un gabarit et un tableau reprenant les polynômes normalisés de Butterworth. Il vous est demandé de dimensionner un filtre passe-bas respectant ce gabarit en suivant la méthodologie de Butterworth.



n	Polynôme de Butterworth pour $\omega_c = 1$
1	$p + 1$
2	$p^2 + 1.4142p + 1$
3	$(p+1)(p^2 + p + 1)$
4	$(p^2 + 0.7654p + 1)(p^2 + 1.8478p + 1)$

Calculez la pulsation de coupure et l'ordre du filtre respectant le gabarit, pour **réaliser la bande d'arrêt exactement.**

En suivant la méthodologie de Butterworth, il faut d'abord trouver l'ordre du filtre permettant de réaliser le gabarit.

$\frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon^2)}} = 0.9$, on en déduit que $\varepsilon = 0.4843$. $\frac{1}{A} = 0.1$, on en déduit que $A = 10$.

$n \geq \frac{\ln\left(\frac{A^2-1}{\varepsilon^2}\right)}{2\ln\left(\frac{\omega_S}{\omega_p}\right)} \Leftrightarrow n \geq 3.2462$, on en déduit que le filtre doit être d'ordre 4.

Pour respecter la bande d'arrêt exactement, la pulsation de coupure peut être trouvée par l'équation suivante :

$$\omega_c = \frac{\omega_S}{\sqrt[2n]{A^2 - 1}} = 1000\ rad/s$$

/3

Déterminez la fonction de transfert H(p) du **filtre respectant le gabarit** à partir du tableau donnant les polynômes normalisés de Butterworth.

La fonction de transfert du filtre normalisé s'écrit (cf. tableau):

$$H(\tilde{p}) = \frac{1}{(\tilde{p}^2 + 0.7654\tilde{p} + 1)(\tilde{p}^2 + 1.8478\tilde{p} + 1)}$$

En effectuant le changement de variable $\tilde{p} = \frac{p}{\omega_c}$, on obtient la fonction de transfert H(p) du filtre passe-bas non normalisé permettant de réaliser le gabarit.

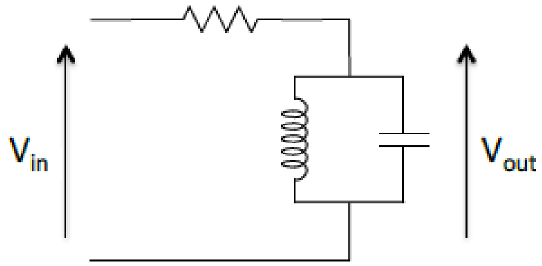
$$H(p) = \frac{1}{(\frac{p^2}{10^6} + \frac{0.7654}{10^3}p + 1)(\frac{p^2}{10^6} + \frac{1.8478}{10^3}p + 1)} = \frac{10^{12}}{(p^2 + 765.4p + 10^6)(p^2 + 1847.8p + 10^6)}$$

Si l'on distribue (non nécessaire), on obtient $H(p) = \frac{10^{12}}{p^4 + 2613p^3 + 3.414 \cdot 10^6 p^2 + 2.613 \cdot 10^9 p + 10^{12}}$

/2

Question 4 **/ 10pts**

Vous cherchez à réaliser un circuit d'amplification audio qui nécessite d'isoler un spectre de fréquences au sein des fréquences audibles. La bande passante désirée s'étend de 1 kHz à 10 kHz. Après analyse du cahier des charges, vous optez pour un filtre passe-bande RLC du second ordre, tel que présenté ci-dessous.



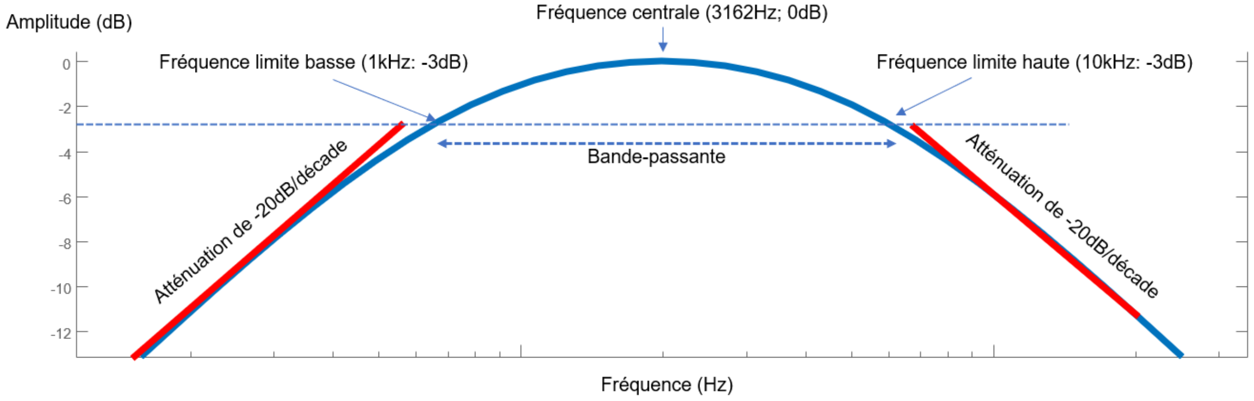
Déterminez la fonction de transfert H(p) du montage respectant le cahier des charges et **esquissez l'amplitude (en dB) de la réponse en fréquence** de ce filtre. Soyez précis et indiquez les points remarquables pertinents sur le graphe.

La fonction de transfert $H(j\omega)$ du filtre est, par définition :

$$H(p) = \frac{V_{out}(p)}{V_{in}(p)} = \frac{Z_L//Z_C}{R + Z_L//Z_C}$$

$$\mathrm{Z_L//Z_c} = \frac{j\omega L}{-\omega^2 LC + 1} = \frac{pL}{p^2LC\ + 1}$$

$$H(p) = \frac{\mathrm{pL}}{p^2RLC + pL + R} = \frac{\frac{p}{RC}}{p^2 + \frac{p}{RC} + \frac{1}{LC}}$$



/4

Déterminez la valeur du facteur de qualité (Q) du filtre RLC permettant de réaliser la bande-passante requise.

Par définition, $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$, avec f_0 la fréquence centrale de la bande passante (moyenne géométrique) et Δf la largeur de la bande-passante.

$$Q = \frac{\sqrt{1\,kHz \cdot 10\,kHz}}{9\,kHz} = 0.351$$

/1.5

Sachant que l'expression canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe-bande est :

$H(p) = \frac{\frac{\omega_0}{Q}p}{p^2+\frac{\omega_0}{Q}p+{\omega_0}^2}$, déterminez les valeurs de l'inductance (L) et de la capacité (C) permettant de réaliser ce facteur de qualité, sachant que la résistance (R) est fixée à la valeur de 1 kΩ.

En comparant l'expression canonique et H(p) trouvée à l'exercice précédent, on obtient $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{Q}$. En remplaçant R, Q et ω_0 par leurs valeurs, on trouve : $C = \frac{Q}{\omega_0 R} = 17.684\ \mathrm{nF}$. En remplaçant ω_0 par son expression $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, on trouve également $L = \frac{R^2C}{Q^2} = 143.2\ mH.$

/1.5

En pratique, aucun composant n'est idéal. **Expliquez** l'impact d'une résistance parasite (ESR) au sein de l'inductance L, en **explicitant la fonction de transfert du montage incluant la résistance parasite.**

Y'a-t-il d'autres inconvénients liés à l'utilisation d'une inductance pour réaliser ce genre de montage ?

Citez une alternative au montage RLC permettant de réaliser un filtre passe-bande n'utilisant pas d'inductance.

En rajoutant une ESR (notée ici R_L), la fonction de transfert devient :

$$H(p) = \frac{V_{out}(p)}{V_{in}(p)} = \frac{(Z_L + \mathrm{R_L})//Z_C}{R + (Z_L + \mathrm{R_L})//Z_C}$$

$$(\mathrm{Z_L} + \mathrm{R_L})//\mathrm{Z_c} = \frac{j\omega L + \mathrm{R_L}}{-\omega^2 LC + \mathrm{j\omega C\,R_L} + 1} = \frac{pL + \mathrm{R_L}}{p^2 LC \ + p\,CR_L + 1}$$

$$H(p) = \frac{\mathrm{pL} + \mathbf{R_L}}{p^2 RLC + \boldsymbol{p\ R}\mathbf{R_L}\boldsymbol{C} + pL + R + \mathbf{R_L}} = \frac{\frac{p}{RC} + \frac{\mathbf{R_L}}{\boldsymbol{RLC}}}{p^2 + \frac{p}{RC} + \mathbf{p}\frac{\mathbf{R_L}}{\boldsymbol{L}} + \frac{1}{LC} + \frac{\mathbf{R_L}}{\boldsymbol{RLC}}}$$

Après analyse de la fonction de transfert, certains termes supplémentaires apparaissent (en **gras**). La résistance parasite modifie la fonction de transfert et les basses fréquences sont moins atténuées (la fonction ne s'annule plus pour $\omega = 0$). La fréquence centrale est également décalée, ainsi que les pôles de la fonction de transfert. Le comportement à haute fréquence est inchangé.

Les inductances sont généralement à éviter dû à leur coût, leur taille et leur tolérance importantes.

On préfère alors utiliser des filtres actifs, faisant intervenir un amplificateur opérationnel, mais pas d'inductance.

/3

Question 5 **/ 10pts**

Soit la fonction suivante :

$$y[n] = x[n] - x[n-L]$$

1) Déterminer la fonction de transfert de ce système

$$y[n] = x[n] - x[n-L]$$

$$\Rightarrow \quad Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) - X(e^{j\omega})e^{-j\omega L}$$

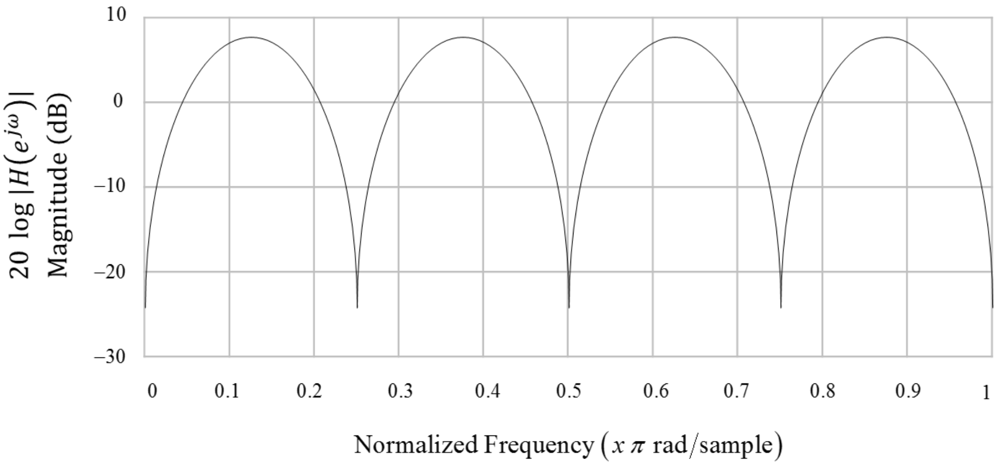
$$\Rightarrow \quad H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = 1 - e^{-j\omega L} = 1 - \cos(\omega L) + j\sin(\omega L)$$

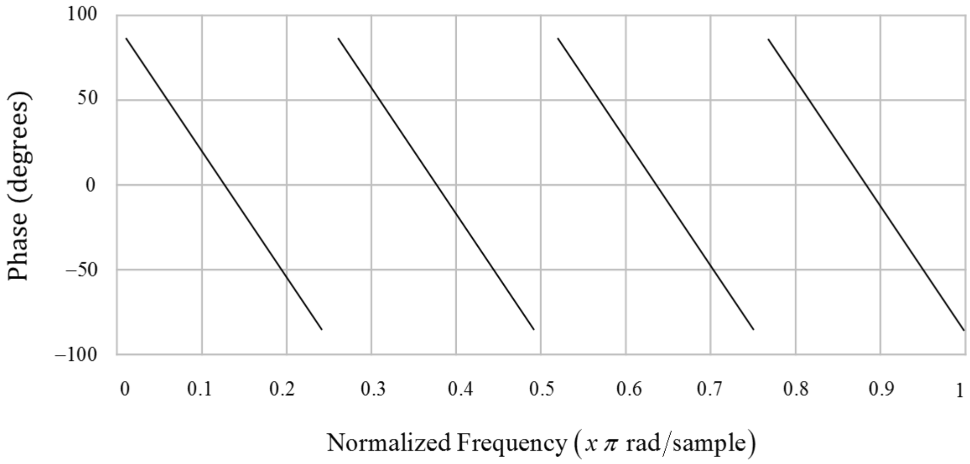
$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{L}{2}}\left(e^{j\omega\frac{L}{2}} - e^{-j\omega\frac{L}{2}}\right) = 2j\sin\left(\omega\frac{L}{2}\right)e^{-j\omega\frac{L}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \left|H(e^{j\omega})\right| = 2\left|\sin\left(\omega\frac{L}{2}\right)\right|$$

$$\text{Et} \quad Arg\left[H(e^{j\omega})\right] = \pm\frac{\pi}{2} - \omega\frac{L}{2} \quad \text{où} \quad \pm 1 = sign\left[\sin\left(\omega\frac{L}{2}\right)\right]$$

2) Représenter graphiquement l'amplitude $\left|H(e^{j\omega})\right|$ et la phase $Arg\left(H(e^{j\omega})\right)$ de ce système pour $L = 8$.





3) Déterminer la réponse $y[n]$ de ce système à l'excitation suivante pour $L = 8$:

$$x[n] = A + B\,cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) + C\,cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + D\,sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$

$$x[n] = A + B\,cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) + C\,cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + D\,sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) \Rightarrow y[n]$$

$$= 2B\,cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) + \sqrt{3}D\,sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{6}\right)$$

si $\begin{cases} x(n) = A\,cos(\omega_0)\,n \quad \rightarrow \quad y(n) = A \cdot \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| cos\left(\omega_0 n + \varphi(\omega_0)\right) \\ \quad H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\varphi(\omega)} \end{cases}$