Analyse Numérique
Examen 2021 – 2022
Série 3 (15h-18h)

- *Répondez aux questions sur les feuilles mises à votre disposition* **ou** *en laissant des commentaires dans vos programmes.*
- *Veuillez indiquer votre nom et prénom sur* **chaque** *feuille et dans le* **premier commentaire** *de chaque programme.*
- *Répondez aux questions 1-2, 3 et 4 sur des feuilles* **séparées** *(ces groupes de questions seront corrigés séparément).*
- *Sauvegardez vos programmes dans le répertoire* `examen` *existant.*
- **Sauvegardez régulièrement les fichiers en cours d'édition.**

Question 1. (4+1+1 points) Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 9 & 6 \\ 6 & 1 & 9 & 7 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 0 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Déterminez de manière efficace et numériquement stable les matrices Q et R d'une factorisation QR de A.

(b) Utilisez la factorisation du point (a) pour résoudre numériquement et de manière efficace le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(c) Avec quelle précision le système du point (b) peut-il être résolu par une méthode stable ? Sachant que la solution exacte du système au point (b) est un vecteur d'entiers, déterminez cette solution exacte, ainsi que l'erreur relative sur la solution numérique obtenue au point (b). Qu'indique cette dernière valeur ?

Note : pour l'ensemble de la Question 1, vous pouvez utiliser l'instruction \ (backslash) **seulement** avec les systèmes triangulaires ; les instructions `qr` et `inv` (ou équivalentes) sont **interdites** ; ces limitations ne concernent pas d'éventuelles vérifications.

Question 2. (4 points)

(a) Expliquer le principe de la méthode de minimisation d'énergie. Pour quel type de systèmes d'équations linéaires est-elle applicable ?

(b) Montrez que l'expression du paramètre α_k telle que donnée dans le formulaire minimise la norme énergie de l'erreur assosiée à $x^{(k+1)}$.

Question 3. (5 points) Déterminez numériquement l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos x}{x} dx$$

tout en **garantissant** que l'erreur absolue sur la valeur de l'intégrale est inférieure à 10^{-4}. Expliquez votre démarche.

Question 4. (5 points) Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} &= \cos y + \sin t\,, \\ y(0) &= 0\,. \end{cases}$$

(a) Résolvez ce problème sur l'intervalle $[0, 10]$ avec la méthode d'Euler rétrograde. Vous pouvez utiliser l'instruction `fsolve` (`fzero` en Matlab) pour la résolution d'équations non linéaires.

(b) Quel est l'ordre de la méthode d'Euler rétrograde ? Vérifiez expérimentalement en utilisant le problème considéré.