

Méthode du lieu d'Evans

Année académique 2016-2017

Plan

- 1 Mise en contexte - Exemples de lieux d'Evans simples
- 2 Règles pour le tracé du lieu d'Evans
- 3 Exemples de lieux d'Evans - Vers la conception de correcteurs
- 4 Conception d'un correcteur dynamique

Contexte

- Ce que l'on sait :

- Lien entre caractéristiques de la réponse indicielle (temps de montée, temps d'établissement, dépassement) et position des pôles d'un système du second ordre caractérisé par ω_n , ζ et σ
- Effet d'un zéro ou d'un pôle additionnel sur la réponse transitoire
- Modification de la position des pôles d'un système par rétroaction
- Incite à conception d'un régulateur basée sur l'étude du lieu des pôles de la boucle fermée en fonction d'un paramètre de la boucle ouverte (le plus souvent le gain proportionnel du régulateur)
- Méthode du lieu d'Evans ("root locus")

Objectifs

- Comprendre comment exploiter un lieu d'Evans
- Etre capable d'esquisser un lieu d'Evans afin de pouvoir déterminer comment un régulateur donné affecte les pôles de la boucle fermée
- Comprendre l'utilité des compensateurs à avance et à retard de phase et être capable de les synthétiser

Visualisation dans le cas de la régulation d'un système de chauffe

Voir démonstration à l'aide du logiciel MATLAB

Notations-Equation caractéristique (1)

- Fonction de transfert entre $R(p)$ et $Y(p)$ pour une boucle fermée (avec modèle de capteur)

$$\frac{Y(p)}{R(p)} = \mathcal{T}(p) = \frac{D(p)G(p)}{1 + D(p)G(p)H(p)}$$

- Equation caractéristique de la boucle fermée

$$1 + D(p)G(p)H(p) = 0$$

- Ecrire sous la forme

$$1 + KL(p) = 0$$

où $L(p) = \frac{b(p)}{a(p)}$ avec $a(p)$ et $b(p)$ polynômes monics (coefficient du terme de plus haut degré égal à 1) et K constante contenant le gain du régulateur

- Numérateur de l'équation caractérisatique

$$a(p) + Kb(p) = 0$$

Notations-Equation caractéristique (2)

- Factorisation du numérateur et du dénominateur de $L(p)$
- $b(p)$ polynôme monic de degré m

$$\begin{aligned} b(p) &= p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_m \\ &= (p - z_1)(p - z_2) \cdots (p - z_m) \end{aligned}$$

- $a(p)$ polynôme monic de degré n avec $n \geq m$

$$\begin{aligned} a(p) &= p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n \\ &= (p - p_1)(p - p_2) \cdots (p - p_n) \end{aligned}$$

- Factorisation du polynôme caractéristique

$$a(p) + Kb(p) = (p - r_1)(p - r_2) \cdots (p - r_n)$$

Exemple: régulation de position d'un moteur

Position du problème

- Système réglé (moteur à courant continu): $G(p) = \frac{\alpha}{p(p+\gamma)}$ avec α et γ réels positifs
- Régulateur proportionnel: $D(p) = k_P$
- Capteur idéal: $H(p) = 1$
- Pour la simplicité de l'analyse, supposons $\gamma = 1$

Traduction dans les notations introduites

$$L(p) = \frac{1}{p(p+1)} \quad K = \alpha k_P \quad b(p) = 1 \quad a(p) = p^2 + p$$

$p_1 = 0, p_2 = -1$, pas de zéro

Exemple: régulation de position d'un moteur

Position des pôles de la boucle fermée

Polynôme caractéristique

$$a(p) + Kb(p) = p^2 + p + K = 0$$

D'où

$$r_1, r_2 = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 - 4K}}{2}$$

- $0 \leq K \leq 1/4$, racines réelles dans l'intervalle $[-1 \ 0]$
- $K = 1/4$ racines confondues: $r_1 = r_2 = -1/2$
- $K > 1/4$ racines complexes conjuguées avec partie réelle constante en $-1/2$ et partie imaginaire croissante avec K .

Exemple: régulation de position d'un moteur

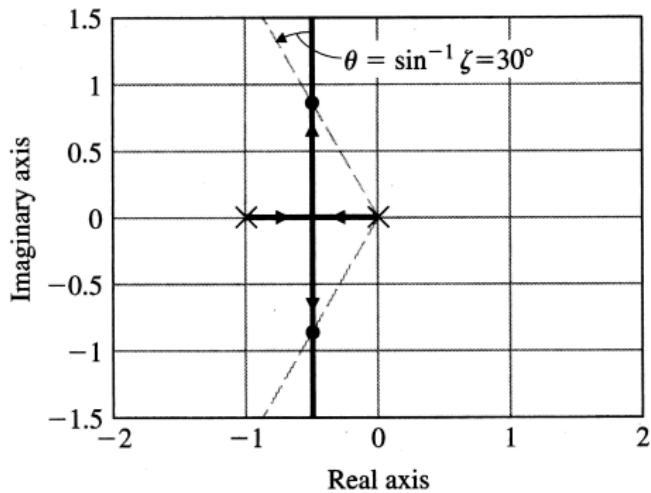


Figure: Lieu d'Evans pour $L(p) = \frac{1}{p(p+1)}$

Exemple: régulation de position d'un moteur

Représentation graphique

- Marques \times pour les racines de $a(p)$ (pôles de la boucle ouverte) correspondant à $K = 0$
- 2 branches correspondent à l'évolution des deux pôles en fonction de K (pour $K > 0$)
- Branches orientées selon K croissant
- A chaque point du lieu correspond une valeur de K ($\zeta = 0.5$ obtenu pour $K = 1$ soit $k_P = 1/\alpha$)
- Si, pour une valeur de K donnée la réponse transitoire est satisfaisante, la conception est terminée; sinon besoin de considérer un régulateur plus compliqué

Définitions

Définition 1

Le lieu d'Evans (positif) de $L(p)$ est le lieu des racines de $1 + KL(p)$ lorsque K varie de 0 à l'infini. Comme $1 + KL(p) = 0$ est l'équation caractéristique de la boucle fermée, le lieu d'Evans (positif) est le lieu des pôles de la boucle fermée pour les valeurs positives ou nulle de K .

Définition 2

- Le lieu d'Evans (positif) de $L(p)$ est le lieu des points du plan complexe où l'argument de $L(p)$ vaut 180°
- Soit p_0 un point du lieu; notons $\theta_i = \arg(p_0 - p_i)$, $i = 1, \dots, n$ et $\phi_i = \arg(p_0 - z_i)$, $i = 1, \dots, m$, alors, il existe un entier ℓ pour lequel

$$\sum_{i=1}^m \phi_i - \sum_{i=1}^n \theta_i = \pm 180^\circ (2\ell - 1)$$

Définitions

Définition 3

Le lieu d'Evans négatif de $L(p)$ est le lieu des racines de $1 + KL(p)$ lorsque $K \in]-\infty, 0]$. Comme $1 + KL(p) = 0$ est l'équation caractéristique de la boucle fermée, le lieu d'Evans négatif est le lieu des pôles de la boucle fermée pour les valeurs négatives ou nulle de K .

Définition 4

- Le lieu d'Evans (négatif) de $L(p)$ est le lieu des points du plan complexe où l'argument de $L(p)$ vaut 0°
- Soit p_0 un point du lieu; notons $\theta_i = \arg(p_0 - p_i)$, $i = 1, \dots, n$ et $\phi_i = \arg(p_0 - z_i)$, $i = 1, \dots, m$, alors, il existe un entier ℓ pour lequel

$$\sum_{i=1}^m \phi_i - \sum_{i=1}^n \theta_i = 360^\circ \ell$$

Remarques importantes

- Condition sur le module:

$$|KL(p)| = 1$$

Permet de graduer le lieu en fonction de K

- Il est nécessaire d'utiliser les mêmes échelles sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées pour représenter le lieu d'Evans (cf mesures d'angles et de distances)
- Dans la suite, quand on parle de lieu d'Evans, sans autre qualificatif, on sous entend lieu d'Evans positif.

Exemple (1)

- Soit le système à rétroaction unitaire caractérisé par

$$K \ L(p) = \frac{K}{p(p+1)(p+2)}$$

Boucle ouverte

- Par définition du lieu,

$$\arg\left(\frac{K}{p(p+1)(p+2)}\right) = \pm 180^\circ(2\ell - 1)$$

Soit, pour $K > 0$,

$$-\arg p - \arg(p + 1) - \arg(p + 2) = \pm 180^\circ(2\ell - 1)$$

- Condition sur le module:

$$|K \ L(p)| = \left|\frac{K}{p(p+1)(p+2)}\right| = 1$$

Exemple(2)-Lieu sur l'axe réel

- L'axe réel positif ne fait pas partie du lieu . En effet, soit un point test p sur l'axe réel positif →

$$\arg p = \arg(p + 1) = \arg(p + 2) = 0^\circ$$

- Point test p dans l'intervalle $] -1 \ 0[$

$$\arg p = 180^\circ \quad \arg(p + 1) = \arg(p + 2) = 0^\circ$$

D'où

$$-\arg p - \arg(p + 1) - \arg(p + 2) = -180^\circ$$

et donc la portion de l'axe réel dans l'intervalle $] -1 \ 0[$
appartient au lieu

- En continuant de la sorte, on déduit que
 - La portion de l'axe réel entre -2 et -1 ne fait pas partie du lieu
 - La portion de l'axe réel entre -2 et $-\infty$ fait partie du lieu

Exemple(3)-Asymptotes

- Quand p est très éloigné de l'origine:

$$K \ L(p) \simeq \frac{K}{p^3}$$

- Condition sur les arguments:

$$-3 \arg p = \pm 180^\circ (2\ell - 1)$$

ce qui donne les 3 directions suivantes pour les asymptotes

$$\frac{\pm 180^\circ (2\ell - 1)}{3} \quad \ell = 0, 1, 2$$

(Choisir soit le signe +, soit le signe -)

Exemple(4)-Point d'intersection des asymptotes

- Pour un point très éloigné de l'origine

$$K \ L(p) = \frac{K}{p^3 + 3p^2 + \dots} \simeq \frac{K}{(p+1)^3} \quad (1)$$

- Pour $K > 0$, il vient

$$\arg(p+1) = \pm 60^\circ (2\ell + 1)$$

- Substituer $p = \sigma + j\omega$

$$\operatorname{arctg} \frac{\omega}{\sigma + 1} = \pm 60^\circ (2\ell + 1)$$

- Prendre la tangente des deux membres

$$\sigma + 1 - \frac{\omega}{\sqrt{3}} = 0 \quad \sigma + 1 + \frac{\omega}{\sqrt{3}} = 0 \quad \omega = 0$$

Exemple(5)-Asymptotes (suite)

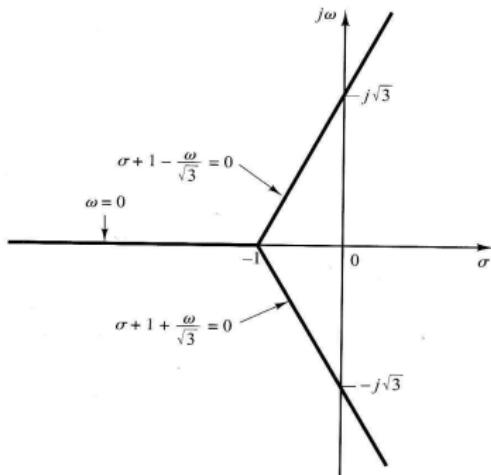


Figure: Asymptotes pour le lieu d'Evans de $\frac{1}{p(p+1)(p+2)}$ [Ogata, 2010]

Point d'intersection des asymptotes obtenu en annulant le dénominateur de (1)

Exemple (6) - Points où le lieu quitte l'axe réel

- En ces points l'équation caractéristique possède un pôle multiple. Donc

$$f(p) \equiv a(p) + Kb(p) = 0 \quad \text{et} \quad f'(p) = a'(p) + Kb'(p) = 0$$

ou ' désigne la dérivée par rapport à p

- Il en résulte $a(p)b'(p) - b(p)a'(p) = 0$
- Ceci revient à calculer les valeurs de p pour lesquelles $\frac{dK}{dp} = 0$. En effet,
 $f(p) = 0 \rightarrow K = -a(p)/b(p)$ et

$$\frac{dK}{dp} = -\frac{a'(p)b(p) - a(p)b'(p)}{b(p)^2}$$

- Dans le cas considéré:

$$K = -(p^3 + 3p^2 + 2p)$$

et $\frac{dK}{dp} = -(3p^2 + 6p + 2) = 0$ donne $p = -0.4226$ et $p = -1.5774$

Exemple (7) - Points où le lieu quitte l'axe réel

- Seul le point $p = -0.4226$ appartient au lieu positif (cf condition d'existence du lieu sur l'axe réel)
- La condition sur le module donne

$$\text{Pour } p = -0.4226, K = |p(p+1)(p+2)|_{p=-0.4226} = 0.384$$

$$\text{Pour } p = -1.5774,$$

$$K = -|p(p+1)(p+2)|_{p=-1.5774} = -0.3849$$

Exemple (8) - Points où le lieu intersecte l'axe imaginaire

- Première approche par le critère de Routh (la plus simple)

- Équation caractéristique : $p^3 + 3p^2 + 2p + K = 0$
- Table de Routh

p^3	1	2
p^2	3	K
p^1	$\frac{6-K}{3}$	
p^0	K	

- $K = 6$ annule le terme en p^1 de la première colonne
- Points d'intersection avec l'axe imaginaire donnés par (cf ligne nulle dans la table de Routh)

$$3p^2 + K = 3p^2 + 6 = 0 \rightarrow p = \pm j\sqrt{2}$$

Exemple (9) - Points où le lieu intersecte l'axe imaginaire

- Deuxième approche en posant $p = j\omega$ dans l'équation caractéristique
 - Equation caractéristique : $p^3 + 3p^2 + 2p + K = 0$
 - $p = j\omega \rightarrow (K - 3\omega^2) + j(2\omega - \omega^3) = 0$
 - En égalant la partie réelle et la partie imaginaire à zéro, il vient:

$$\begin{cases} \omega = \pm\sqrt{2} & K = 6 \\ \omega = 0 & K = 0 \end{cases}$$

Exemple (10) - Lieu d'Evans final

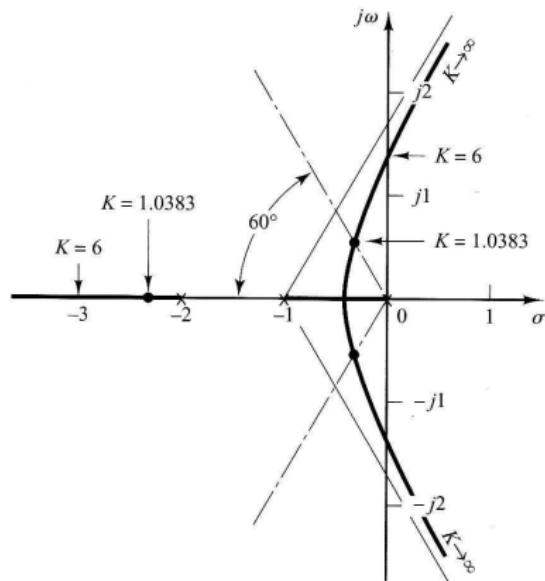


Figure: Lieu d'Evans de $\frac{1}{p(p+1)(p+2)}$ [Ogata, 2010]

Règle 1 - Branches de lieu

Enoncé

Les n branches du lieu partent des pôles de $L(p)$ et m d'entre elles se terminent aux zéros finis de $L(p)$ et les $(n - m)$ restantes aux zéros à l'infini de $L(p)$.

Justification

- Pour $K = 0$, $a(p) + Kb(p) = 0$ donne $a(p) = 0 \rightarrow$ pôles de $L(p)$
- Comme $L(p) = -1/K$, $L(p) = 0$ quand $K \rightarrow \infty$
2 possibilités: soit $b(p) = 0$ (m zéros finis de $L(p)$), soit $p \rightarrow \infty$ lorsque $n > m$ ($(n - m)$ zéros à l'infini, voir règle 3)

Règle 2 - Conditions d'existence sur l'axe réel

Enoncé

Les points de l'axe réel qui appartiennent au lieu sont situés à gauche d'un nombre impair de pôles et de zéros sur l'axe réel.

Justification

- Pour un point de l'axe réel, la contribution $\theta_1 + \theta_2$ de deux pôles complexes conjugués est nulle; il en va de même pour la contribution de deux zéros complexes conjugués
- Pour un point de l'axe réel, la contribution $\theta(\phi)$ d'un pôle (zéro) est nulle si le point se trouve à droite du pôle (zéro) considéré. Elle vaut 180° si le point se trouve à gauche du pôle (zéro) considéré.

Règle 3 - Asymptotes

Enoncé

Les $n - m$ asymptotes ont un point d'intersection commun sur l'axe réel en

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

Elles font, avec l'axe réel positif, un angle

$$\phi_\ell = \frac{180^\circ(2\ell - 1)}{n - m} \quad \ell = 0, 1, \dots, n - m - 1$$

Règle 3 - Asymptotes

Justification - orientations

- Pour un point p du lieu très éloigné de l'origine, $\arg(p - p_i)$ est le même pour tous les pôles $p_i, i = 1 \dots n$ et cet angle est identique à $\arg(p - z_i), i = 1, \dots, m$. Les m contributions des zéros suppriment celles de m pôles. Il reste donc $(n - m)$ contributions liées aux $(n - m)$ pôles restants →

$$K L(p) \simeq \frac{K}{p^{n-m}}$$

- Équations des asymptotes : $p = (-1)^{1/(n-m)} K^{-1/(n-m)}$ soit
 $p = e^{i(\pi(2\ell+1)/(n-m))} K^{-1/(n-m)}$ $\ell = 0, 1, \dots, n - m - 1$
- Orientations des asymptotes :

$$\frac{180^\circ (2\ell + 1)}{n - m} \quad \ell = 0, 1, \dots, n - m - 1$$

Règle 3 - Asymptotes (suite)

Justification - point d'intersection

- En effectuant les produits dans $K L(p)$, il vient

$$K L(p) = \frac{K p^m - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)p^{m-1} + \cdots + (-1)^m z_1 z_2 \cdots z_m}{p^n - (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)p^{n-1} + \cdots + (-1)^n p_1 p_2 \cdots p_n}$$

- Par division polynomiale, on obtient:

$$K L(p) = \frac{K}{p^{n-m} - (\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i)p^{n-m-1} + \cdots}$$

- Pour les grandes valeurs de p cette expression est approchée par

$$K L(p) = \frac{K}{\left[p - \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right) / (n - m) \right]^{n-m}}$$

Règle 3 - Asymptotes (suite)

Justification - point d'intersection

- Pour les grandes valeurs de p le lieu d'Evans est donc approché par:

$$\frac{K}{[p - (\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i) / (n-m)]^{n-m}} = -1$$

- Représente un faisceau de droites:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} + e^{i(\pi(2\ell+1)/(n-m))} K^{1/(n-m)} \quad \ell = 0, 1, \dots, n-m-1$$

dont l'intersection sur l'axe réel est obtenue pour $K = 0$:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$$

Règle 4 - Points où le lieu quitte ou rejoint l'axe réel

Conditions d'existence

- Lorsque le segment entre deux pôles adjacents sur l'axe réel appartient au lieu, il existe au moins un point où le lieu quitte l'axe réel entre les deux pôles.
- Lorsque le segment entre deux zéros adjacents sur l'axe réel (l'un d'entre eux pouvant être à l'infini) appartient au lieu, il existe au moins un point où le lieu rejoint l'axe réel entre les deux zéros
- Si le segment entre un pôle et un zéro (fini ou infini) sur l'axe réel appartient au lieu, il peut ne pas y avoir de point où le lieu rejoint ou quitte l'axe réel, ou il peut exister à la fois des points où le lieu quitte et rejoint l'axe réel.

Règle 4 - Points où le lieu quitte ou rejoint l'axe réel

Calcul

- Ces points correspondent à des racines multiples de l'équation caractéristique

$$a(p) + Kb(p) = 0$$

- Points donnés par les solutions de l'équation suivante

$$\frac{dK}{dp} = -\frac{a'(p)b(p) - b'(p)a(p)}{b(p)^2} = 0$$

pour autant qu'elles appartiennent au lieu (c-à-d. $K > 0$)

- Le lieu approche ou quitte une racine de multiplicité q par des branches orientées dans les directions $\frac{180^\circ(2\ell-1)}{q}$, $\ell = 0, 1, \dots, q-1$

Règle 5 - Points où le lieu intersecte l'axe imaginaire

Enoncé

Lorsque de tels points existent, on peut les déterminer soit

- par le critère de Routh en déterminant la ou les valeurs de K qui annulent un des coefficients de la première colonne de la table de Routh. Si ce coefficient est associé à la ligne p^i , les racines du polynôme associé à la ligne p^{i+1} donnent les valeurs des pôles sur l'axe imaginaire (lorsque la ligne p^i est nulle)
- en substituant p par $j\omega$ dans l'équation caractéristique et en résolvant le système de deux équations (partie réelle et partie imaginaire) à deux inconnues (ω et K).

Boucle ouverte possédant des pôles complexes conjugués

Exemple

- Soit K $L(p) = \frac{K(p+2)}{p^2+2p+3}$
- Pôles $p_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{2}$

Tracé

- Lieu sur l'axe réel
- Point où le lieu rejoint l'axe réel
- Directions de départ du lieu à partir des pôles complexes conjugués

Boucle ouverte possédant des pôles complexes conjugués

Directions de départ du lieu à partir des pôles complexes conjugués

- Règle de l'argument pour un point proche du pôle p_1

$$\phi'_1 - (\theta_1 + \theta'_2) = \pm 180^\circ (2\ell + 1)$$

- Point infiniment rapproché (pour obtenir la pente de la tangente au lieu)

$$\theta_1 = 180^\circ - \theta_2 + \phi_1 = 180^\circ - 90^\circ + 55^\circ = 145^\circ$$

Boucle ouverte possédant des pôles complexes conjugués

Point S choisis arbitrairement

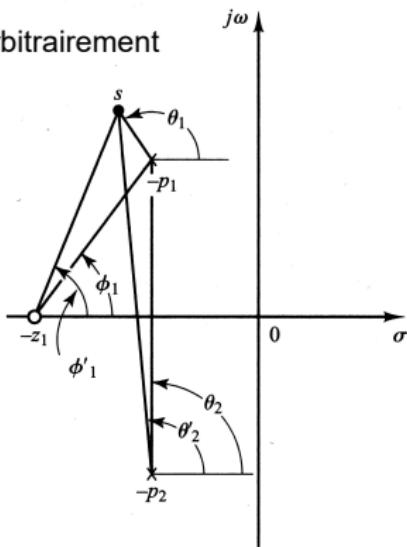
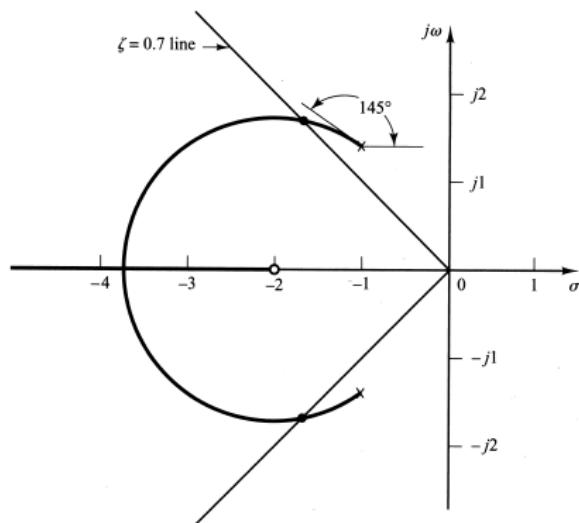


Figure: Détermination de l'orientation de la tangente au lieu [Ogata, 2010]

Boucle ouverte possédant des pôles complexes conjugués

Directions de départ du lieu à partir des pôles complexes conjugués

- Par symétrie, la tangente au lieu en p_2 forme un angle de -145° par rapport à l'axe réel positif



Règle 6 - Angle de départ (d'arrivée) en des pôles (zéros) complexes conjugués

Cas de pôles et de zéros simples

- Angle de départ d'une branche du lieu à partir d'un pôle complexe conjugué

$$\theta_{\ell,dep} = \sum_{i=1}^m \phi_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^n \theta_i - 180^\circ$$

- Angle d'arrivée d'une branche du lieu en un zéro complexe conjugué

$$\phi_{\ell,arr} = \sum_{i=1}^n \theta_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^m \phi_i + 180^\circ$$

Règle 6 (suite)

(Cas de pôles et de zéros multiples

- Angle de départ d'une branche en un pôle de multiplicité q

$$q\theta_{\ell,dep} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^m \phi_i - \sum_{i=1}^n \theta_i - 180^\circ(2\ell - 1) \quad \ell = 1, \dots, q$$

- Angle d'arrivée d'une branche en un zéro de multiplicité q

$$q\phi_{\ell,arr} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^n \theta_i - \sum_{i=1}^m \phi_i + 180^\circ(2\ell - 1) \quad \ell = 1, \dots, q$$

)

Règle 6 (suite)

Cas de pôles et de zéros multiples

- En particulier, la règle pour l'angle de départ en un pôle de multiplicité q mène à l'orientation du lieu aux points où il quitte ou rejoint l'axe réel (notion de continuation d'un lieu)

Condition sur le module - détermination du gain associé à une position des pôles

Expression de la condition en termes de pôles et zéros

$$K = \frac{1}{|L(p)|} = \frac{|p - p_1| \cdots |p - p_n|}{|p - z_1| \cdots |p - z_m|}$$

En l'absence de zéro le dénominateur vaut 1.

Application

- Reprenons l'exemple $L(p) = \frac{p+2}{p^2+2p+3}$
- Déterminer la valeur de K pour laquelle la boucle fermée possède deux pôles complexes conjugués avec un facteur d'amortissement $\zeta = 0.7$

Condition sur le module - détermination du gain associé à une position des pôles

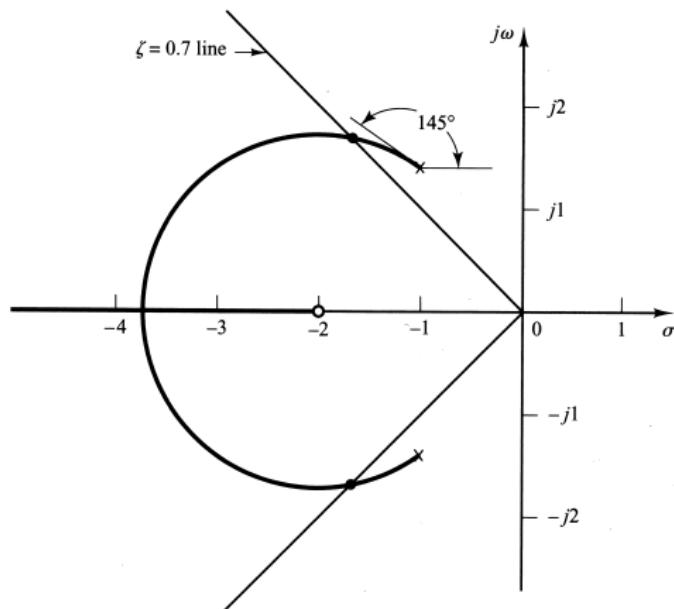
Expression de la condition en termes de pôles et zros

Le point d'intersection entre le lieu et la droite correspondant à $\zeta = 0.7$ est $p = -1.67 + j1.70$. D'où

$$\begin{aligned} K &= \left| \frac{(p + 1 - j\sqrt{2})(p + 1 + j\sqrt{2})}{p + 2} \right|_{p=-1.67+j1.70} \\ &= \frac{| -1.67 + j1.70 + 1 - j\sqrt{2} | | -1.67 + j1.70 + 1 + j\sqrt{2} |}{| -1.67 + j1.70 + 2 |} \\ &= 1.34 \end{aligned}$$

Condition sur le module - détermination du gain associé à une position des pôles

Illustration [Ogata, 2010]



Quelques commentaires

Cas où le degré relatif de $L(p)$ est supérieur ou égal à 2

- Forme de $L(p)$

$$L(p) = \frac{p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_m}{p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n}$$

avec $n - m \geq 2$

- Somme des pôles de la boucle fermée donnée par $-a_1$ indépendamment de K
- Si certains des pôles se déplacent vers la droite lorsqu'on augmente K , les autres doivent se déplacer vers la gauche (voir lieu de gauche sur le "slide" suivant)

Quelques commentaires (suite)

Sensibilité à la position des pôles et zéros

De légers déplacements des pôles et zéros de $L(p)$ peuvent induire un changement important de la configuration du lieu.

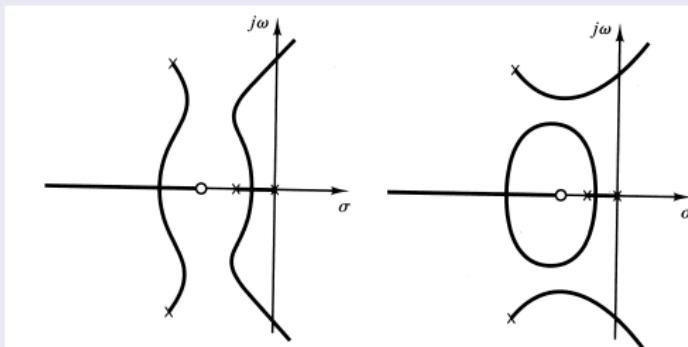


Figure: Changements de configuration [Ogata, 2010]

Quelques commentaires (suite)

Simplification de pôles et de zéros dans $L(p)$

$$L(p) = D(p)G(p)H(p)$$

Les pôles et zéros simplifiés n'apparaissent pas dans le lieu d'Evans mais ils ont une influence sur les transitoires par rapport aux conditions initiales et/ou aux perturbations (voir antérieurement l'étude des simplifications à l'aide d'une représentation interne)

Quelques commentaires (suite)

Présence d'une partie de cercle dans un lieu d'Evans

Une partie de cercle ne peut apparaître que pour les configurations suivantes des pôles et des zéros

- 2 pôles et 1 zéro
- 2 pôles et 2 zéros
- 1 pôle et 2 zéros

Démonstration de la forme circulaire dans le lieu de $\frac{p+2}{p^2+2p+3}$ (Voir Ogata, 2010, p 282)

Lieu d'Evans négatif (1)

Rappel

- Le lieu d'Evans (négatif) de $L(p)$ est le lieu des points du plan complexe où l'argument de $L(p)$ vaut 0°
- Soit p_0 un point du lieu; notons $\theta_i = \arg(p_0 - p_i)$, $i = 1, \dots, n$ et $\phi_i = \arg(p_0 - z_i)$, $i = 1, \dots, m$, alors, il existe un entier ℓ pour lequel

$$\sum_{i=1}^m \phi_i - \sum_{i=1}^n \theta_i = \ell \cdot 360^\circ$$

Lieu sur l'axe réel

Si le nombre total de pôles et de zéros à droite d'un point de l'axe réel est pair, alors ce point appartient au lieu d'Evans négatif (0 est considéré comme un nombre pair)

Lieu d'Evans négatif (2)

Asymptotes

- Le point d'intersection des asymptotes est calculé comme pour le lieu positif.
- Les directions des asymptotes sont:

$$\frac{\ell \cdot 360^\circ}{n - m} \quad \ell = 0, 1, \dots, n - m - 1$$

Lieu d'Evans négatif (3)

Angle de départ (d'arrivée) en des pôles (zéros) complexes conjugués

Cas de pôles et de zéros simples

- Angle de départ d'une branche du lieu à partir d'un pôle complexe conjugué

$$\theta_{\ell,dep} = \sum_{i=1}^m \phi_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^n \theta_i$$

- Angle d'arrivée d'une branche du lieu en un zéro complexe conjugué

$$\phi_{\ell,arr} = \sum_{i=1}^n \theta_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^m \phi_i$$

Lieu d'Evans négatif (4)

Angle de départ (d'arrivée) en des pôles (zéros) complexes conjugués

Cas de pôles ou de zéros de multiplicité q

- Angle de départ d'une branche en un pôle de multiplicité q

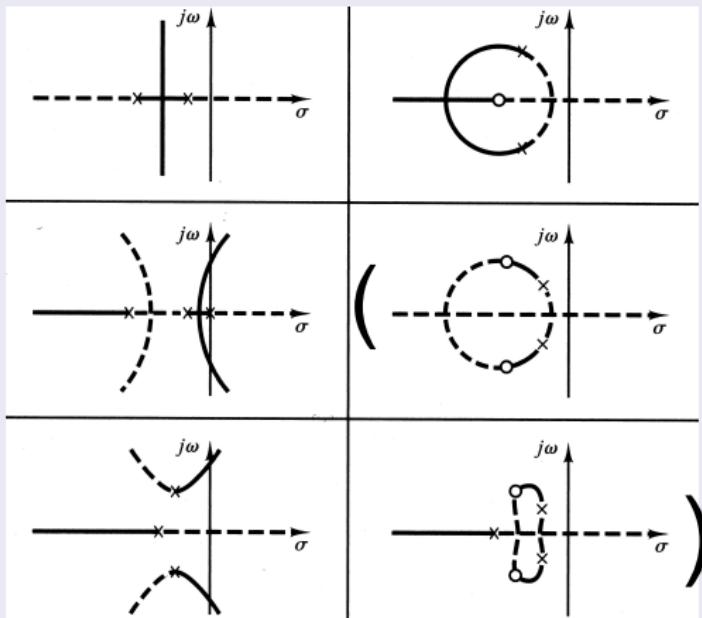
$$q\theta_{\ell,dep} = \sum_{i=1}^m \phi_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^n \theta_i - \ell 360^\circ \quad \ell = 0, \dots, q-1$$

- Angle d'arrivée d'une branche en un zéro de multiplicité q

$$q\phi_{\ell,arr} = \sum_{i=1}^n \theta_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^m \phi_i + \ell 360^\circ \quad \ell = 0, \dots, q-1$$

Lieu d'Evans négatif (5)

Quelques exemples de lieux d'Evans positifs et négatifs [Ogata, 2010]



continue: K positif, pointillée: K négatif

Régulation d'attitude d'un satellite

Objectif

- Régulation d'attitude requise pour assurer que les antennes, les capteurs et les panneaux solaires sont orientés de façon appropriée
- Régulation d'attitude par rapport à l'axe orthogonal à l'écran

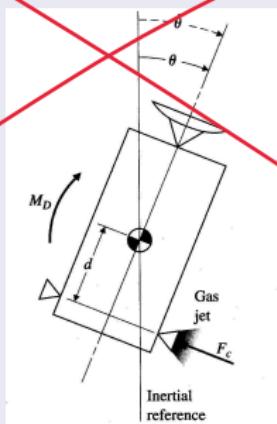


Figure: Schéma d'un satellite de communication [Franklin et al., 2010]

Position du problème et modélisation

Position du problème

- Mesure de l'attitude du satellite par rapport à un référentiel inertiel (non soumis à une accélération angulaire)
- Le moteur provoque un moment $F_c(t)d$ autour du centre de masse
- Moment perturbateur $M_D(t)$

Modèle

- Théorème du moment cinétique: $J\ddot{\theta}(t) = dF_c(t) + M_D(t)$
avec J moment d'inertie par rapport à l'axe orthogonal à l'écran passant par le centre de masse du satellite
- Fonction de transfert entre $U(p) = F_c(p)$ et $\Theta(p)$: $\frac{\Theta(p)}{U(p)} = \frac{d}{Jp^2}$

Régulateur proportionnel

Lieu d'Evans

- Régulateur : $D(p) = k_P$
- Détermination de $L(p)$
Posons $K = k_P d/J \rightarrow L(p) = 1/p^2$
- Le lieu est l'axe imaginaire \rightarrow impossible d'atteindre des performances raisonnables
- Attirer le lieu dans le demi-plan gauche \rightarrow régulateur à actions proportionnelle et dérivée (PD)

Régulateur PD

Lieu d'Evans

- Régulateur : $D(p) = k_P + k_D p$
- Choisir $k_P = k_D$ (position du zéro discutée ultérieurement) avec $K = k_P d/J$
- Équation caractéristique de la boucle fermée

$$1 + K \frac{1 + p}{p^2} = 0$$

- Tracé du lieu

Points de départ ou d'arrivée sur l'axe réel:

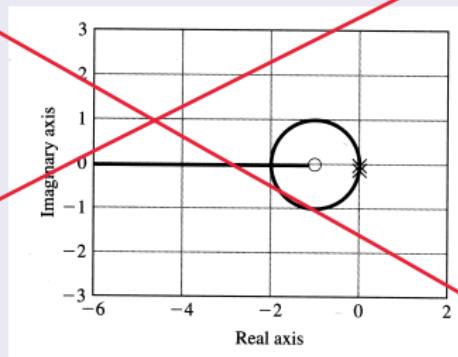
$$b'(p)a(p) - a'(p)b(p) = p^2 - 2p(p+1) = 0$$

soit $-p^2 - 2p = 0$ d'où $p = -2$ et $p = 0$

Régulateur PD

Lieu d'Evans (suite)

- Illustration du lieu [Franklin et al., 2010]



- Facteur d'amortissement $\zeta = 0.7$ obtenu pour $K = 2$, soit pour $k_P = 2J/d$

Régulateur PD

Effet d'un zéro sur la forme du lieu d'Evans

L'addition d'un zéro dans le demi-plan gauche attire le lieu d'Evans vers la gauche

Mise en oeuvre pratique du régulateur PD

Besoin de rajouter un pôle pour obtenir un système propre

$$D(p) = k_P + \frac{k_D p}{p/p_D + 1}$$

soit

$$D(p) = \tilde{k} \frac{p + z_D}{p + p_D}$$

avec $\tilde{k} = k_P + k_D p_D$ et $z_D = k_P p_D / \tilde{k}$ avec $p_D > z_D$

Régulateur PD propre

Effet du pôle de filtrage

- Pôle éloigné pour ne pas influencer significativement la forme du lieu $p_D = 12$
- Équation caractéristique

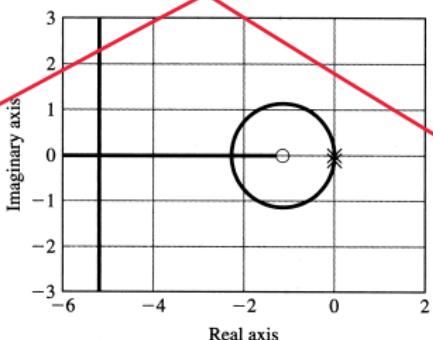
$$1 + K \frac{p + 1}{p^2(p + 12)} = 0$$

- Tracé du lieu
 - 3 branches (deux partant de 0 et une de -12)
 - $-12 \leq p \leq -1$ appartient au lieu
 - 2 asymptotes qui s'intersectent en $\frac{-12 - (-1)}{2} = -11/2$
 - Point de départ ou d'arrivée sur l'axe réel
 $2p^3 + 15p^2 + 24p = 0$ soit $p = 0, p = -2.3$ et $p = -5.2$

Régulateur PD propre (suite)

Effet du pôle de filtrage

- Légère distortion du cercle obtenu pour le cas sans pôle de filtrage
- Lieu très similaire pour les points proches de l'origine [Franklin et al., 2010]



Régulateur PD propre (suite)

Effet du pôle de filtrage

- Pôle de faible valeur $p_D = 4$
- Équation caractéristique: $1 + K \frac{p+1}{p^2(p+4)} = 0$

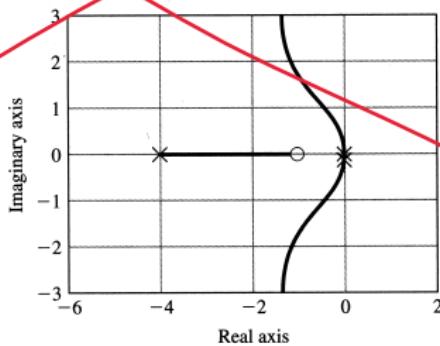


Illustration de l'évolution du lieu, emploi de l'instruction "rltool"
(MATLAB)

Régulateur PD propre (suite)

Effet du pôle de filtrage

Un pôle additionnel se déplaçant à partir de la gauche pousse les branches du lieu vers la droite lorsqu'il se rapproche du lieu initial (sans ce pôle additionnel)

Régulateur ou correcteur à avance de phase (lead compensator)

$$D(p) = \tilde{k} \frac{p+z_D}{p+p_D} \text{ avec } z_D < p_D \text{ et } z_D, p_D \in \mathbb{R}^+$$

Réponse à une sinusoïde de pulsation ω_0 déphasée de

$$\phi = \arctg \frac{\omega_0}{z_D} - \arctg \frac{\omega_0}{p_D}$$

Comme ϕ est positif, on parle de régulateur à avance de phase

Inclusion de la flexibilité dans le modèle du satellite

Actionneur et capteur collocalisés

- Système réglé : $G(p) = \frac{(p+0.1)^2+6^2}{p^2((p+0.1)^2+6.6^2)}$
- Régulateur (rétroaction unitaire): $D(p) = K \frac{p+1}{p+12}$
- Boucle ouverte: $L(p) = \frac{p+1}{p+12} \frac{(p+0.1)^2+6^2}{p^2((p+0.1)^2+6.6^2)}$
- Notations $p_1 = -0.1 + j6.6, p_2 = -0.1 - j6.6, p_3 = p_4 = 0, p_5 = -12, z_1 = -0.1 + j6, z_2 = -0.1 - j6, z_3 = -1$

Inclusion de la flexibilité dans le modèle du satellite (suite)

Lieu d'Evans

- 5 branches dont 3 vont vers les zéros
- $-12 \leq p \leq -1$ appartient au lieu
- Point d'intersection des asymptotes

$$p = \frac{-12 - 0.1 - 0.1 - (-0.1 - 0.1 - 1)}{5 - 3} = -\frac{11}{2}$$

- Direction de départ à partir du pôle en $p = -0.1 + j6.6$

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \arg(p_1 - z_1) + \arg(p_1 - z_2) + \arg(p_1 - z_3) \\ &\quad - \arg(p_1 - p_2) - \arg(p_1 - p_3) - \arg(p_1 - p_4) - \arg(p_1 - p_5) - 180^\circ\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \\ 90^\circ + 90^\circ + \arctg(6.6/0.9) - (90^\circ + 2\arctg(6.6/(-0.1)) + \arctg \frac{6.6}{11.9}) - 180^\circ \\ \text{d'où } \theta_1 &= -218.51^\circ = 141.49^\circ\end{aligned}$$

Inclusion de la flexibilité dans le modèle du satellite

Lieu d'Evans (suite)

Dans le cas d'un actionneur et d'un capteur collocalisés, la présence d'un seul mode flexible induit une paire de racines faiblement amorties dans l'équation caractéristique, mais ne cause pas l'instabilité de la boucle fermée

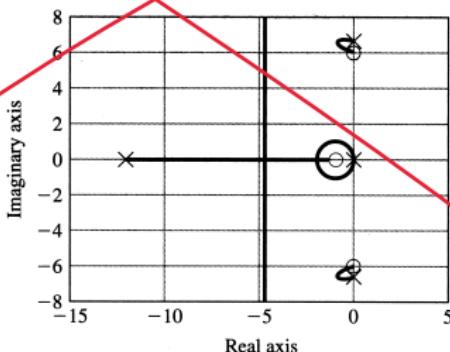


Figure: Lieu d'Evans de $L(p) = \frac{p+1}{p+12} \frac{(p+0.1)^2+6^2}{p^2((p+0.1)^2+6.6^2)}$

Inclusion de la flexibilité dans le modèle du satellite

Actionneur et capteur non collocalisés

- Système réglé : $G(p) = \frac{1}{(p+0.1)^2 + 6.6^2}$
- Régulateur (rétroaction unitaire): $D(p) = K \frac{p+1}{p+12}$
- Boucle ouverte: $L(p) = \frac{p+1}{p+12} \frac{1}{p^2((p+0.1)^2 + 6.6^2)}$

Exercice

- Déterminez l'allure du lieu; en particulier évaluez l'angle de départ des branches issues des deux pôles complexes conjugués.
- Le régulateur choisi est-il approprié ?

Considérations générales

- Mise en forme du lieu d'Evans par ajout de pôles et de zéros
- Souvent on cherche à avoir une paire de pôles complexes conjugués dominants caractérisant la dynamique souhaitée pour la boucle fermée (pôles et zéros additionnels affectent peu les caractéristiques de la réponse).
- Correcteurs les plus utilisés:
 - Correcteur à avance de phase: approche la fonction d'un régulateur PD → accélère la réponse en diminuant le temps de montée et le dépassement indiciel
 - Correcteur à retard de phase: approche la fonction d'un régulateur PI → généralement utilisé pour améliorer la précision de la boucle fermée
 - Correcteur "notch": permet d'assurer la stabilité de la boucle fermée pour un système avec des pôles faiblement amortis (cf actionneur et capteur non collocalisés)

Considérations générales

Correcteurs à avance ou à retard de phase (lead or lag compensator)

- Fonction de transfert du correcteur

$$D(p) = k_c \frac{p + z_C}{p + p_C} \quad z_C, p_C \in \mathbb{R}^+$$

- Si $z_C < p_C$ avance de phase
- Si $z_C > p_C$ retard de phase

Effet de l'addition de pôles dans le demi-plan gauche

L'addition d'un pôle attire le lieu vers la droite

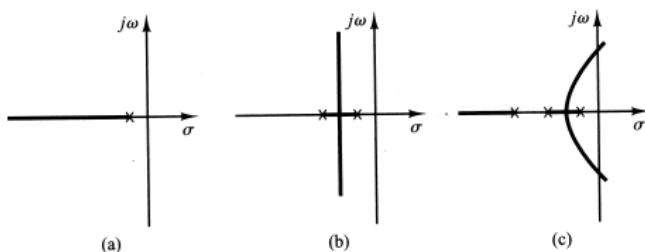
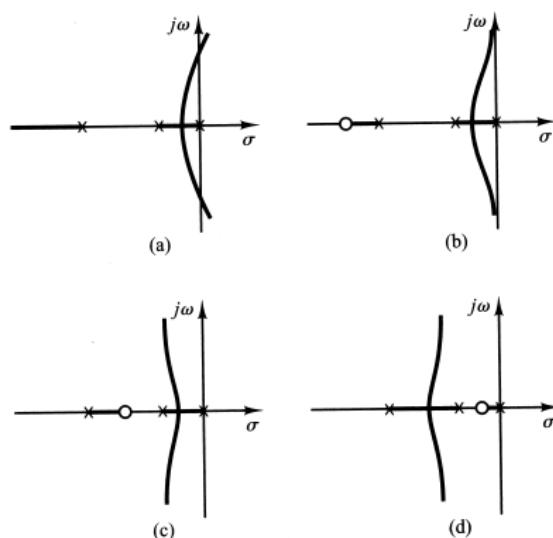


Figure: Lieu d'Evans de systèmes à un, deux et trois pôles [Ogata,2010]

Effet de l'addition de zéros dans le demi-plan gauche

L'addition d'un zéro dans le demi-plan gauche attire le lieu vers la gauche → tend, pour un gain K donné, à améliorer la marge de stabilité et à accélérer la réponse (cf effet d'un zéro additionnel dans une réponse indicielle)



Conception d'un régulateur à avance de phase

Marche à suivre

- Détermination de la position souhaitée pour les pôles de la boucle fermée sur la base des spécifications
- Vérification du fait que les spécifications ne peuvent pas être atteintes par ajustement du gain de la boucle; si elles ne peuvent être atteintes, considérer un correcteur à avance de phase qui apporte l'angle requis pour obtenir les pôles en boucle fermée souhaités $\rightarrow z_C$ et p_C
- Déterminer k_C par la condition sur le module.

Conception d'un régulateur à avance de phase -Exemple

Position du problème

- Système réglé : $G(p) = \frac{10}{p(p+1)}$
- Spécifications : dépassement indiciel inférieur ou égal à 20 pourcents et temps de montée inférieur ou égal à 0.6 s.

Conception du correcteur

A partir des relations obtenues pour un système du 2^e ordre, on obtient: $\zeta \geq 0.5$ et $\omega_n \simeq \frac{1.8}{0.6} = 3 \text{ rad/s}$ soit des pôles en $p = -1.5 \pm j2.5981$ (racines de $p^2 + 2 \cdot 0.5 \cdot 3p + 3^2 = p^2 + 3p + 9 = 0$)

Conception d'un régulateur à avance de phase - Exemple

Lieu d'Evans pour $L(p) = G(p)/10$

- Par observation du lieu, on constate l'impossibilité d'obtenir à la fois $\omega_n = 3$ et un amortissement suffisant.
- Pour $K = 10$ la boucle fermée donne: $\frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{10}{p^2+p+10}$ soit des pôles en $p = -0.5 \pm 3.1225j$, soit un facteur d'amortissement égal à 0.16 pour $\omega_n = 3.16\text{rad s}^{-1}$.

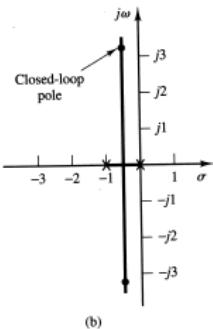


Figure: Lieu d'Evans de $L(p) = 1/(p(p + 1))$ [Ogata, 2010]

Conception d'un régulateur à avance de phase - Exemple

Angle à apporter par le correcteur à avance de phase

Condition sur les arguments pour que le lieu passe par les pôles souhaités

$$\arg G(p)|_{-1.5 \pm j2.5981} + \arg D(p)|_{-1.5 \pm j2.5981} = 180^\circ(2\ell + 1)$$

On en déduit

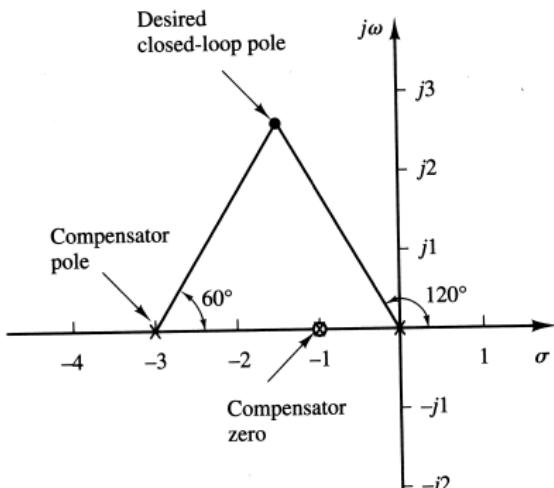
$$\arg D(p)|_{-1.5 \pm j2.5981} = 180 + 120 + 100.894 = 400.894$$

soit un angle équivalent de 40.894° (car modulo(%) 360°)

Conception d'un régulateur à avance de phase - Exemple (2)

Détermination de z_C et p_C

- Compensation du pôle en -1 du système par le zéro z_C du correcteur
- $p_C = 3$ pour vérifier la condition sur l' argument de $L(p)$



Conception d'un régulateur à avance de phase - Exemple (3)

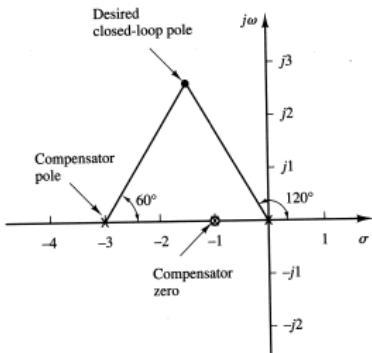
Détermination de $D(p)$

Par la condition sur le module de $L(p)$:

$$k_C = \left| \frac{p(p+3)}{10} \right|_{p=-1.5+j2.60} = 0.9$$

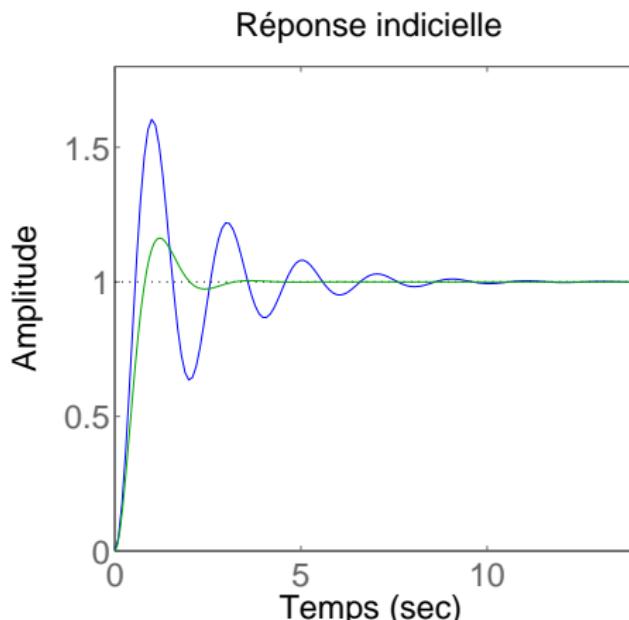
D'où

$$D(p) = 0.9 \frac{p+1}{p+3}$$



Conception d'un régulateur à avance de phase - Exemple (4)

Réponses indicielles de la boucle fermée pour le régulateur proportionnel de gain 1, soit $K = 10$ (courbe bleue), et pour le régulateur à avance de phase (courbe verte)



Conception d'un régulateur à retard de phase (1)

Rappel de l'objectif

- Le système possède une réponse transitoire offrant les caractéristiques requises, mais des propriétés non satisfaisantes à l'état d'équilibre.
- Besoin d'augmenter le gain de la boucle ouverte aux basses fréquences sans modifier de façon significative les caractéristiques de la réponse transitoire → pas de modification significative du lieu d'Evans au voisinage des pôles dominants.

Conception d'un régulateur à retard de phase (2)

Approche

- Concevoir un correcteur dont la contribution angulaire est faible ($<5^\circ$ par exemple) dans le voisinage des pôles dominants
- Placer le pôle et le zéro du correcteur proches l'un de l'autre et proches de l'origine du plan complexe
- Justification: soit p_1 un des pôles dominants
 - Condition sur le module de $D(p)$: $|D(p_1)| = |k_C \frac{p_1 + z_C}{p_1 + p_C}| \simeq k_C$
 k_C sera choisi proche de 1 pour ne pas affecter significativement la réponse transitoire
 - Augmentation du gain statique : $D(0) = z_C/p_C$
 - Condition sur l'argument de $D(p)$: $-5^\circ < \arg \frac{p_1 + z_C}{p_1 + p_C} < 0^\circ$

Conception d'un régulateur à retard de phase (3)

Marche à suivre

- Tracer le lieu d'Evans de $G(p)$ et localiser les pôles dominants sur la base des spécifications
- Evaluer la constante d'erreur statique d'intérêt pour le problème et déterminer le facteur par lequel il faut augmenter cette constante pour vérifier les spécifications
- Déterminer z_C et p_C pour atteindre le gain statique du correcteur requis sans modifier de façon significative le lieu d'Evans au voisinage des pôles dominants
- Tracer le lieu d'Evans obtenu avec le correcteur et ajuster le gain k_C au besoin

Note

La présence d'un pôle lent en boucle fermée dû au correcteur à retard de phase peut induire un transitoire lent, particulièrement dans la réponse à une perturbation ($\rightarrow z_C$ pas trop proche de zéro)

Conception d'un régulateur à retard de phase - Exemple

Enoncé

Soit le système réglé décrit par $G(p) = \frac{1.06}{p(p+1)(p+2)}$. Placé dans une boucle à rétroaction unitaire avec un régulateur proportionnel de gain $k_P = 1$, la boucle fermée donne une réponse transitoire satisfaisante, mais la constante d'erreur de vitesse est trop faible ($K_v = 0.53s^{-1}$). On souhaite obtenir une réponse transitoire similaire, mais avec une constante d'erreur de vitesse $K_v = 5s^{-1}$.

Solution

- La fonction de transfert de la boucle fermée est:

$$\frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{1.06}{(p + 0.3307 - j0.5864)(p + 0.3307 + j0.5864)(p + 2.3386)}$$

Pôles dominants: $p_{1,2} = -0.3307 \pm j0.5864$

Amortissement: $\zeta = 0.491$ et $\omega_n = 0.673s^{-1}$

Conception d'un régulateur à retard de phase - Exemple (suite)

Solution

- Comme la constante d'erreur de vitesse doit être multipliée d'un facteur 10 environ, on choisit un rapport $z_C/p_C = 10$. On choisit $p_C = 0.005$ et $z_C = 0.05$ (beaucoup plus proches de l'origine que les pôles dominants). Contribution angulaire au voisinage d'un pôle dominant:

$$\arg(p_1 + 0.05) - \arg(p_1 + 0.005) = -3.47^\circ$$

- Boucle ouverte du correcteur en cascade avec le système réglé

$$D(p)G(p) = \frac{k_C(p + 0.05)1.06}{p(p + 0.005)(p + 1)(p + 2)}$$

- Gain d'Evans: $K = 1.06k_C$

Conception d'un régulateur à retard de phase - Exemple (suite)

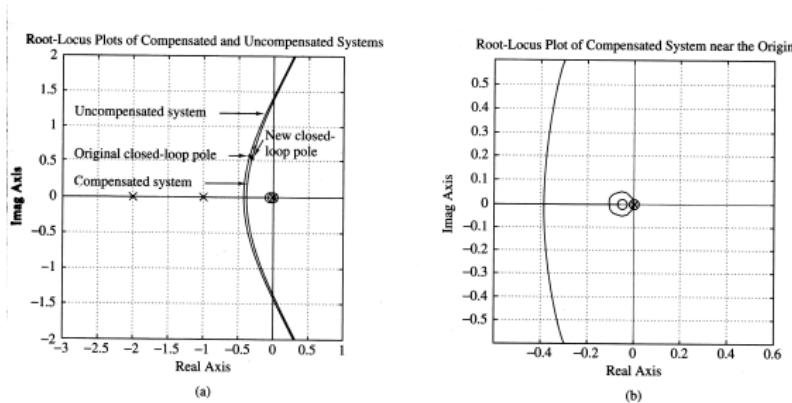


Figure: (a) Lieux d'Evans du système avec correcteur ($L(p) = \frac{p+0.05}{p(p+0.005)(p+1)(p+2)}$) et sans correcteur ($L(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$), (b) Détail du cas avec correcteur dans le voisinage de l'origine [Ogata, 2010]

Conception d'un régulateur à retard de phase - Exemple (suite)

Solution

- Si l'on conserve le même facteur d'amortissement pour les pôles dominants, ceux-ci deviennent:

$$p_{1,2} = -0.31 \pm j0.55$$

(correspond à $p^2 + 0.6200p + 0.3986$ et donc $\zeta = 0.491$).

- Valeur de K correspondante:

$$K = \left| \frac{p(p + 0.005)(p + 1)(p + 2)}{p + 0.05} \right|_{p=-0.31+j0.55} = 1.024$$

- Soit $k_C = K/1.06 = 0.966$
- Correcteur $D(p) = 0.966 \frac{p+0.05}{p+0.005}$
- Constante d'erreur de vitesse: $K_v = \lim_{p \rightarrow 0} pD(p)G(p) = 5.12s^{-1}$

Conception d'un régulateur à retard de phase - Exemple (suite)

Solution

Autres pôles de la boucle fermée:

- $p_3 = -2.326$ éloigné de l'axe imaginaire par rapport aux pôles complexes conjugués
- $p_4 = -0.0549$ proche du zéro en -0.05 induit transitoire lent mais de faible amplitude

Conception d'un régulateur à retard de phase - Exemple (suite)

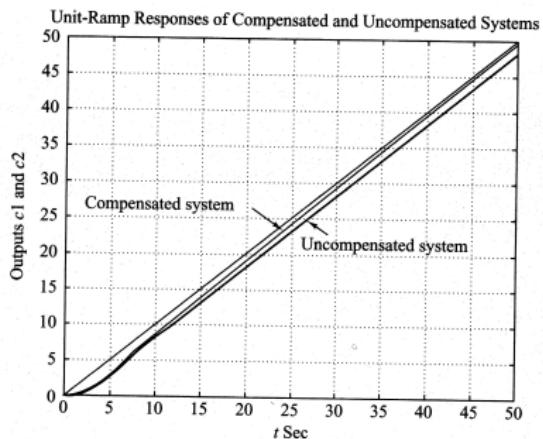


Figure: Réponse en boucle fermée du système avec et sans correcteur à retard de phase pour une consigne en rampe [Ogata, 2010]

Conception d'un régulateur à retard de phase - Exemple (suite)

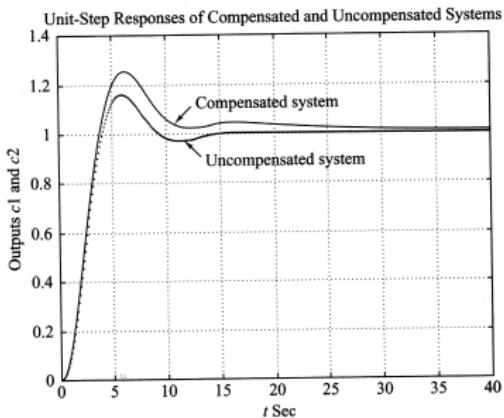


Figure: Réponse en boucle fermée du système avec et sans correcteur à retard de phase pour une consigne de la forme d'un échelon unitaire [Ogata, 2010]

Correcteur à avance et à retard de phase

- "Lead-lag compensator"
- Mise en série d'un compensateur à avance de phase et d'un compensateur à retard de phase
- Utilisé lorsqu'on doit à la fois améliorer la réponse transitoire et la précision du système à l'équilibre

Effet d'une erreur sur le gain du système réglé - Marge de gain

Définition

Marge de gain: facteur maximum et/ou minimum par lequel on peut modifier le gain du système réglé (ou de la boucle ouverte) sans perdre la stabilité de la boucle fermée (marge de gain souvent exprimée en dB)

Contexte (cf figure au "slide" suivant)

- Régulateur $D(p)$ conçu sur la base du modèle nominal (obtenu pour $g = 1$)
- Quelle est la valeur la plus grande (et/ou la plus petite) de g pour laquelle la boucle fermée reste stable ?

Effet d'une erreur sur le gain du système réglé - Marge de gain

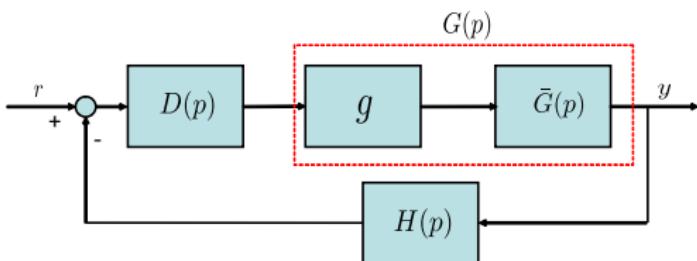


Figure: Boucle fermée incluant un système réglé de gain incertain

Détermination de la marge de gain par le lieu d'Evans - Exemple

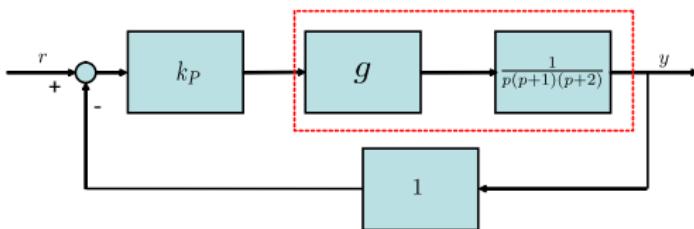


Figure: Système réglé avec gain incertain; boucle fermée avec régulateur proportionnel $D(p) = k_P$

Détermination de la marge de gain par le lieu d'Evans - Exemple

- Tracé du lieu basé sur la factorisation suivante: $K = k_P$,
$$L(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$$
- Spécifications : facteur d'amortissement $\zeta = 0.5$ pour les pôles dominants de la boucle fermée
- A partir des spécifications et du tracé du lieu d'Evans, il vient $k_P = K = 1.0383$ (cf "slide" suivant)
- Valeur maximale de K avant de perdre la stabilité: $K = 6$
- Marge de gain: $MG = 20 \log_{10} 6/1.0383 = 15.27dB$

Détermination de la marge de gain par le lieu d'Evans - Exemple

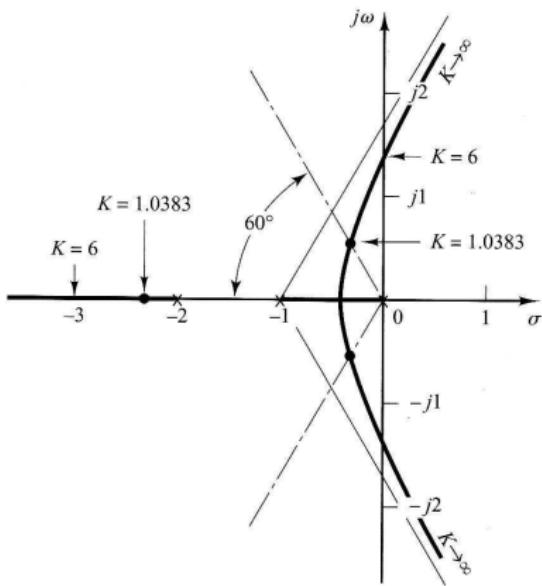


Figure: Lieu d'Evans de $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ [Ogata, 2010]

Récapitulation

- Le lieu d'Evans représente l'évolution des pôles de la boucle fermée en fonction d'un paramètre apparaissant de manière linéaire dans les coefficients de l'équation caractéristique ($a(p) + Kb(p) = 0$ avec $L(p) = b(p)/a(p)$)
- La condition sur les arguments est à la base des règles pour le tracé du lieu.
Lieu positif

$$\sum_{i=1}^m \phi_i - \sum_{i=1}^n \theta_i = \pm 180^\circ (2\ell - 1)$$

Lieu négatif

$$\sum_{i=1}^m \phi_i - \sum_{i=1}^n \theta_i = \ell 360^\circ$$

- La condition sur le module permet de déterminer la valeur absolue du gain d'Evans K pour un point du lieu p_0

$$K = 1/|L(p_0)|$$

Récapitulation (suite)

- Correcteur à avance de phase

$$D(p) = k_C \frac{p + z_C}{p + p_C} \quad z_C < p_C \quad z_C, p_C \in \mathbb{R}^+$$

Approche un correcteur PD. Permet de déplacer le lieu vers la gauche et donc d'accélérer la réponse transitoire et/ou d'améliorer le facteur d'amortissement des pôles dominants.

- Correcteur à retard de phase

$$D(p) = k_C \frac{p + z_C}{p + p_C} \quad z_C > p_C \quad z_C, p_C \in \mathbb{R}^+$$

Approche un régulateur PI. Permet de diminuer l'erreur statique sans modifier de façon significative le temps de montée, en augmentant le gain aux basses fréquences.