

Examen 2021 – 2022 (seconde session)

13h – 16h

- Répondez aux questions sur les feuilles mises à votre disposition **ou** en laissant des commentaires dans vos programmes.
- Veuillez indiquer votre nom et prénom sur **chaque** feuille et dans le **premier commentaire** de chaque programme.
- Répondez aux questions 1-2, 3 et 4 sur des feuilles **séparées** (ces groupes de questions seront corrigés séparément).
- Sauvegardez vos programmes dans le répertoire **examen** existant.
- **Sauvegardez régulièrement les fichiers en cours d'édition.**

Question 1. (4+1+1 points) Soient

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 & 9 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 9 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 9 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

- Déterminez de manière efficace et numériquement stable les matrices L , U et P de la factorisation LU de A .
- Utilisez **uniquement** les matrices L , U et P du point (a) pour résoudre numériquement et de manière efficace le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- Utilisez **uniquement** les matrices L , U et P du point (a) pour résoudre numériquement et de manière efficace le système linéaire $A(A\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Précisez le coût de cette résolution (factorisation exclue).

NOTE : pour l'ensemble de la Question 1, vous pouvez utiliser l'instruction \ (backslash) **seulement** avec les systèmes triangulaires; les instructions `lu` et `inv` (ou équivalentes) sont **interdites**; ces limitations ne concernent pas d'éventuelles vérifications.

Question 2. (4 points)

- Définissez une représentation en virgule flottante **normalisée** en base β . Donnez la valeur de $\overline{0.10} \cdot \beta^3$ en fonction de β ; illustrez avec $\beta = 2$.
- Soient x un réel qui ne dépasse pas les limites de la représentation et $\text{fl}(x)$ le réel le plus proche de x dans cette représentation. Démontrez que $|\text{fl}(x) - x|/|x|$ peut être majoré par l'unité d'arrondi.
- Pourquoi l'hypothèse « x ne dépasse pas les limites de la représentation» est-elle importante?

Question 3. (5 points) Déterminer numériquement la solution du système d'équations non-linéaires

$$\begin{cases} -x_1(x_1 - x_2 + 1) + 1 & = 0, \\ -x_1x_2 - x_1 + 1 & = 0, \end{cases}$$

dans la région $0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$.

Question 4. (5 points)

- Déterminez numériquement les approximations de l'intégrale $\int_0^1 x \exp(x) dx$ à l'aide de la formule des trapèzes (composite) dont le pas h d'intégration est donné par $h = 2^{-k}$, avec $k = 1, 2, 3, 4$ et 5 . (Notez qu'ici il **ne s'agit pas** de la méthode de Romberg).
- Sachant que $\int_0^1 x \exp(x) dx = 1$, produisez le graphe de l'erreur absolue pour l'intégrale déterminée par formule des trapèzes en fonction de h ; utilisez l'échelle logarithmique (instruction `loglog`). Ce graphe est-il conforme à la théorie? Justifiez.