Instrumentation

=> Exercices sur la transformée en Z

Exercice 1

Calculer la transfo en Z et en déduire la transfo de Fourier

$x(n) = \alpha^{-n} u(-n-1) + \alpha^{n} u(n) \quad (0<\alpha<1)$

(U est echelon)

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\alpha^{-n} u(-n-1) + \alpha^{n} u(n)) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^{-n} \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n} z^{-n}$$

si on pose $k=-n$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha z)^{k} + \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^{n}$$

On a la formule de la somme géométrique

$$\sum_{n=0}^{N} x^{n} = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \qquad \text{Si } N \to \infty : \frac{1}{1-x} \quad (x<1)$$

$\frac{1}{1-x} - 1$

$\frac{1-1+x}{1-x}$

$$\hookrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^{n} = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^{n} = \frac{x}{1-x}$$

$$= \frac{\alpha z}{1-\alpha z} + \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

⚠ il faut $|\alpha z|$ et $|\alpha z^{-1}| < 1$

$\Rightarrow |\alpha| < z < \left|\frac{1}{\alpha}\right|$

or comme $0<\alpha<1 \to 1 \leqslant z < \ldots$

↳ le cercle unité fait parti du domaine de convergence → Transfo de Fourier OK !

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{\alpha e^{j\omega}}{1-\alpha e^{j\omega}} + \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

Exercice 2 : Transformée inverse

Calculer la transformée en z inverse de

$$X(z) = \frac{2}{z-4} \qquad |z|>4$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{2}{z-4} \cdot \frac{z^{-1}}{z^{-1}} = \frac{2z^{-1}}{1-4z^{-1}}$$

on sait que $x(n) = \alpha^n u(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$

+ il reste le z^{-1} qui correspond à un décalage

$$\Leftrightarrow X_1(z) = \frac{2}{z-4} \xleftrightarrow{z} x_1(n) = 2 \cdot 4^n u(n)$$

$$\Leftrightarrow X(z) = X_1(z) \cdot z^{-1} \xleftrightarrow{z} x(n) = 2 \cdot 4^{n-1} u(n-1)$$

Exercice 3 : sommateur - différentiateur

Calculer la fonct de transf. du som. et du diff et en déduire pole et zero. Discuter de la stabilité à temps discret et en déduire leurs rep. en freq.

a) Sommateur : $h(n) = u(n)$

$h(n) = u(n) = \alpha^n u(n)$ où $\alpha = 1$

or on a $\alpha^n u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad \text{pour } |z|>1$$

$$\Leftrightarrow H(z) = \frac{z}{z-1}$$

: Pole en $z=1$

Zero en $z=0$

↳ Instable car tout les poles ne sont pas à l'interieur du cercle unité

↳ on ne peut pas remplacé z par $e^{j\omega}$, il n'y a donc pas de réponses en fréquence.

b) Différentiateur : $h(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$

Par déf : $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \cdot z^{-n}$

$\Rightarrow H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\delta(n) - \delta(n-1)) \cdot z^{-n}$

$= z^{-0} - z^{-1} = 1 - z^{-1}$

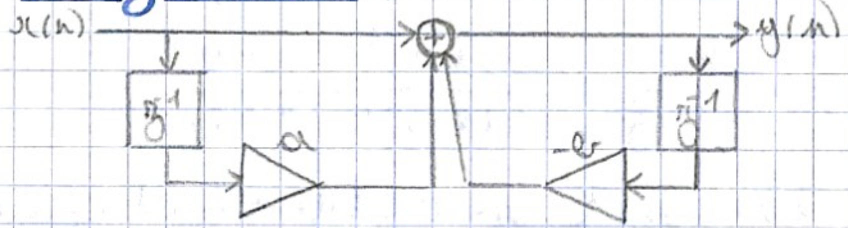
$\Leftrightarrow H(z) = \frac{z-1}{z}$ Pole en $z=0$
Zero en $z=1$

système stable car tout les poles dans le cercle unité

↳ Rep. en fréqu : $H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega}$

Exercice 4 : Système causal du 1er ordre

a) Système 1



$a = -\frac{h}{4}$

$b = \frac{h}{3}$

1. Déterminer la fonction de transf

on a $y(n) = x(n) + a.x(n-1) - b\,y(n-1)$

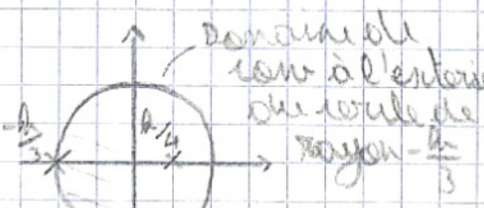
$\xleftrightarrow{Z} Y(z) = X(z) + a z^{-1} X(z) - b z^{-1} Y(z)$

$\Leftrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + a z^{-1}}{1 + b z^{-1}} = \frac{z+a}{z+b}$

2. Déduire les poles et zeros

Zero en $-a = \frac{h}{4}$

Pole en $-b = -\frac{h}{3}$



3. Valeur de h pour que le système soit stable

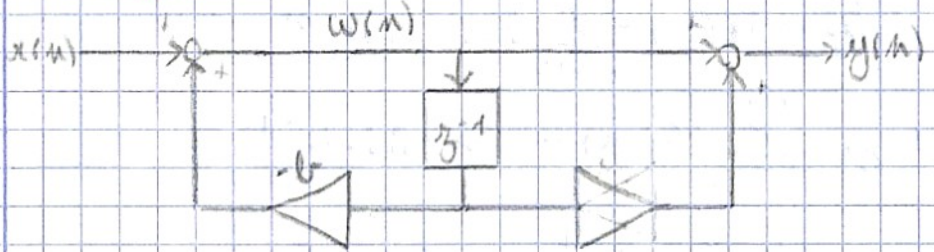
↳ Cercle unité ∈ dom. de conv $\Leftrightarrow \left|-\frac{h}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow |h| < 3$

4. Le filtre est-il recursif ?

Le filtre est recursif car la sortie $y(n)$ dépend des valeurs antérieures de $y(n-1)$

↳ la rep imp du filtre sera donc infinie

b) Système 2



1. Déterminer la fonction de transfert

On a $\begin{cases} w(n) = x(n) - b\,w(n-1) \\ \text{et } y(n) = w(n) + a\,w(n-1) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} W(z) = X(z) - b z^{-1} W(z) \\ Y(z) = W(z) + a z^{-1} W(z) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} W(z) = \frac{1}{1+bz^{-1}} X(z) \\ Y(z) = \frac{1}{1+bz^{-1}} X(z) + \frac{az^{-1}}{1+bz^{-1}} X(z) \end{cases}$$

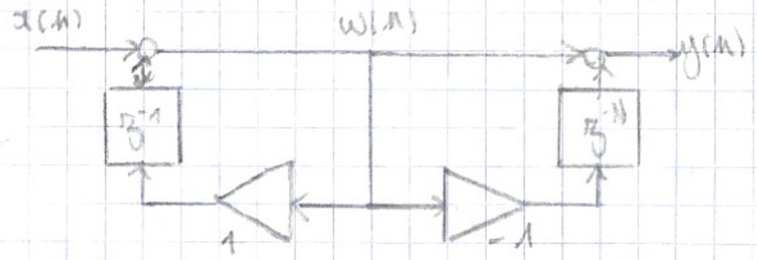
$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+az^{-1}}{1+bz^{-1}} = \frac{z+a}{z+b}$$

↳ même fonction de transfert que au a)

↳ même conclusions

Exercices : filtre à moyenne glissante

Exercices : filtre à moyenne glissante



Soit le filtre à moy. gliss donné par

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + \dots + x(n-N+1)$$

1. Déterminer la fonction de transfert

$Z \Rightarrow Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) + \dots + z^{-N+1}X(z)$

$\Leftrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-N+1} = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n}$

$\Leftrightarrow H(z) = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$

2. Comparer au système représenté

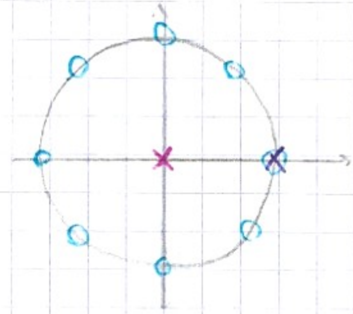
$\Rightarrow \begin{cases} w(n) = x(n) + w(n-1) \\ y(n) = w(n) - w(n-N) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} W(z) = X(z) + z^{-1}W(z) \\ Y(z) = W(z) - z^{-N}W(z) \end{cases} \Rightarrow H(z) = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$

↳ ils ont la même fonction de transfert.
Ce système synthétise donc le filtre à moy. gliss

3. Écrire les pôles et les zéros et discuter de la stabilité

$H(z) = \dots = \frac{z - z^{-(N-1)}}{z-1} = \frac{z^N - 1}{z^{N-1}(z-1)}$



× Pôle en $z=0$ de mult. $N-1$

× Pôle en $z=1$

○ Zéro : $z^N = 1 \Leftrightarrow z = e^{jk\frac{2\pi}{N}}$ où $k = 0, \dots, N-1$

$\Rightarrow$ Pôle en $z=1$ → devrait être instable

Mais est compensé par un zéro en $z=1$

↳ ils s'annulent et donc le système est stable

4. Determiner la reponse en frequence

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$\Leftrightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega \frac{N}{2}}}{e^{-j\omega/2}} \left(\frac{e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} \right)$$

$$= e^{-j\omega \frac{(N-1)}{2}} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

$$\hookrightarrow |H(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin(\omega \frac{N}{2})}{\sin(\omega/2)} \right|$$