

# Etude des modèles en variables d'état

Année 2019-2020

# Plan

- 1 Mise en contexte - Concepts de base
- 2 Passage d'une fonction de transfert à une description en variables d'état
- 3 Notions d'observabilité et de gouvernabilité
- 4 Changement de variables d'état
- 5 Réalisation minimale

## Contexte

- Etant donné un système caractérisé par une fonction de transfert rationnelle, comment peut-on simuler son comportement à l'aide de composants électroniques (sommateurs, intégrateurs, potentiomètres) ?
- Comment mettre en oeuvre un régulateur (caractérisé par une fonction de transfert rationnelle) sur un calculateur analogique, c-à-d à partir de sommateurs, d'intégrateurs et de potentiomètres ?
- Pour un système décrit par un modèle en variables d'état,
  - sous quelle condition peut-on estimer son état à partir de la connaissance des entrées et des sorties (notion d'observabilité) ?
  - sous quelle condition peut-on amener l'état de ce système à une valeur fixée à l'aide d'un signal réglant approprié (notion de gouvernabilité) ?
- Quel est le nombre d'intégrateurs requis pour mettre en oeuvre un régulateur caractérisé par une fonction de transfert d'ordre  $n$  sur un calculateur analogique?

# Objectifs

- Déterminer un modèle en variables d'état de dimension minimale (réalisation minimale) pour un système à partir de sa fonction de transfert; en déduire un schéma de câblage pour simuler ou mettre en oeuvre ce système sur un calculateur analogique
- Déterminer si un système est observable et/ou gouvernable; dans la négative déterminer la partie de l'état qui est observable et gouvernable
- Comprendre le lien entre les simplifications "pôle/zéro" et les notions d'observabilité et de gouvernabilité

# Description en variables d'état

## Forme générale pour un système non linéaire

$$\dot{X}(t) = f(X(t), U(t))$$

$$Y(t) = g(X(t), U(t))$$

$f$  et  $g$  fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  par rapport à  $X$  et  $U$

$X(t)$ : vecteur d'état (ensemble des valeurs possibles appelé espace d'état)

$U(t)$ : signal d'entrée

$Y(t)$ : signal de sortie

(Attention exceptionnellement majuscules utilisées pour représenter des variables temporelles)

## Etats d'équilibre

$$0 = f(X_0, U_0)$$

$$Y_0 = g(X_0, U_0)$$

## Description en variables d'état (suite)

### Modèle linéarisé autour d'un état d'équilibre

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

avec

$$x(t) = X(t) - X_0 \quad u(t) = U(t) - U_0 \quad y(t) = Y(t) - Y_0$$

$$A : n \times n \quad B : n \times 1 \quad C : 1 \times n$$

et  $D$  scalaire (système à une entrée et une sortie)

$$A = \left. \frac{\partial f(X, U)}{\partial X} \right|_{(X_0, U_0)} \quad B = \left. \frac{\partial f(X, U)}{\partial U} \right|_{(X_0, U_0)}$$

$$C = \left. \frac{\partial g(X, U)}{\partial X} \right|_{(X_0, U_0)} \quad D = \left. \frac{\partial g(X, U)}{\partial U} \right|_{(X_0, U_0)}$$

## Solution des équations d'état dans le cas linéaire

- Exponentielle d'une matrice

$$\exp(A t) = I_n + A t + A^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + A^n \frac{t^n}{n!} + \cdots$$

Remarque :  $A \exp(A t) = \exp(A t) A$

- Solution de  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  ;  $x(0) = x_0$

$$x(t) = \exp(A t)x_0 + \int_0^t \exp(A (t - \tau))Bu(\tau)d\tau$$

- Démontrez le résultat en le substituant dans l'équation différentielle
- La connaissance de l'état initial et de  $\{u(\tau), \tau \geq 0\}$  permet de déduire  $\{x(\tau), \tau \geq 0\}$ .

# Passage d'une description en variables d'état à une fonction de transfert

- Transformée de Laplace (unilatérale) des équations d'état pour  $x(0) = x_0$

$$pX(p) - x_0 = AX(p) + BU(p) \quad Y(p) = CX(p) + DU(p)$$

- Soit en réorganisant les termes

$$(pI_n - A)X(p) = x_0 + BU(p) \quad Y(p) = CX(p) + DU(p)$$

- D'où

$$X(p) = (pI_n - A)^{-1}x_0 + (pI_n - A)^{-1}BU(p) \quad Y(p) = CX(p) + DU(p)$$

- A conditions initiales nulles, on déduit:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C(pI_n - A)^{-1}B + D = \frac{CA \text{adj}(pI_n - A)B + D \det(pI_n - A)}{\det(pI_n - A)}$$

où  $I_n$  est la matrice identité d'ordre  $n$

- Pôles de la fonction de transfert identiques aux valeurs propres de la matrice  $A$  si pas de simplification entre numérateur et dénominateur



## Passage d'une fonction de transfert à un modèle en variables d'état

### Fonction de transfert du SLP

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{n_H(p)}{d_H(p)}$$

avec

$$d_H(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$$

$$n_H(p) = b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \dots + b_n$$

( $H(p)$  strictement propre c-à-d  $\partial d_H(p) > \partial n_H(p)$ )

## Passage d'une fonction de transfert à un modèle en variables d'état (suite)

### Marche à suivre

- Ecrire le lien entre  $Y(p)$  et  $U(p)$  sous la forme suivante (cas  $n = 3$ ):

$$(p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3)Y(p) = (b_1p^2 + b_2p + b_3)U(p)$$

- Diviser par la puissance maximale de  $p$  (ici  $p^3$ ) et regrouper les termes comme suit:

$$Y(p) = -a_1 \frac{Y(p)}{p} - a_2 \frac{Y(p)}{p^2} - a_3 \frac{Y(p)}{p^3} + b_1 \frac{U(p)}{p} + b_2 \frac{U(p)}{p^2} + b_3 \frac{U(p)}{p^3}$$

- Construire le schéma fonctionnel ci-dessous et prendre pour variables d'état la sortie de chaque bloc intégrateur

## Passage d'une fonction de transfert à un modèle en variables d'état (suite)

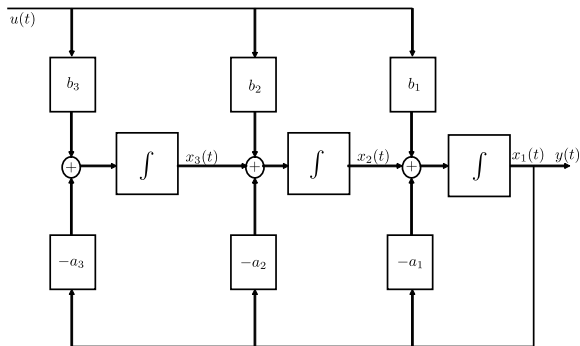


Figure: Schéma fonctionnel pour l'obtention d'un modèle en variables d'état

## Passage d'une fonction de transfert à un modèle en variables d'état (suite)

### Modèle en variables d'état

- On déduit du schéma fonctionnel

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -a_1x_1(t) + x_2(t) + b_1u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -a_2x_1(t) + x_3(t) + b_2u(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -a_3x_1(t) + b_3u(t)\end{aligned} \quad y(t) = x_1(t)$$

- Soit sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

## Passage d'une fonction de transfert à un modèle en variables d'état (suite)

### Modèle en variables d'état

- Forme matricielle (suite)

Définissons

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

- On retrouve la forme standard

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

## Passage d'une fonction de transfert à un modèle en variables d'état (suite)

### Cas d'une fonction de transfert de même degré au numérateur et au dénominateur

- Fonction de transfert:

$$H(p) = \frac{b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}$$

- Se ramener au cas précédent ( $H(p)$  strictement propre) en séparant le terme d'action directe

$$H(p) = b_0 + \frac{(b_1 - b_0 a_1)p^2 + (b_2 - b_0 a_2)p + (b_3 - b_0 a_3)}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}$$

- Définissons la fonction de transfert strictement propre ( $\partial d_{H_{sp}} > \partial n_{H_{sp}}$ )

$$H_{sp}(p) = \frac{(b_1 - b_0 a_1)p^2 + (b_2 - b_0 a_2)p + (b_3 - b_0 a_3)}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}$$

## Passage d'une fonction de transfert à un modèle en variables d'état (suite)

### Cas d'une fonction de transfert de même degré au numérateur et au dénominateur(suite)

- Relation entrée/sortie

$$Y(p) = b_0 U(p) + H_{sp}(p) U(p)$$

- Description en variables d'état

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

avec  $H_{sp}(p) = C(pI_n - A)^{-1}B$  et  $D = b_0$  (où  $(A, B, C)$  sont déterminés par la méthode décrite précédemment)

## Détermination de l'état - Observabilité

### Position du problème

Considérons le SLP

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(0) &= x_0 & t &\geq 0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

On connaît  $(A, B, C, D)$  ainsi que  $\{u(t), t \geq 0\}$  et  $\{y(t), t \geq 0\}$ .  
Déterminer si possible  $\{x(t), t \geq 0\}$  de manière univoque.

### Remarque

Seule inconnue  $x_0$  car

$$x(t) = \exp(A t)x_0 + \int_0^t \exp(A (t - \tau))Bu(\tau)d\tau$$



## Détermination de l'état initial - Observabilité

Reprenons la description du modèle en variables d'état

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(0) &= x_0 & t &\geq 0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Expression de la sortie et de ses dérivées

$$\begin{aligned}y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ \dot{y}(t) &= C\dot{x}(t) + D\dot{u}(t) = CAx(t) + CBu(t) + D\dot{u}(t) \\ \ddot{y}(t) &= C\ddot{x}(t) + D\ddot{u}(t) \\ &= CA\dot{x}(t) + CB\dot{u}(t) + D\ddot{u}(t) \\ &= CA^2x(t) + CABu(t) + CB\dot{u}(t) + D\ddot{u}(t) \\ &\dots\end{aligned}$$

## Détermination de l'état initial - Observabilité

Expression de la sortie et de ses dérivées (suite)

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ CA^{(n-2)}B & \cdots & \cdots & CB & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

Matrice d'observabilité :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$\mathcal{O}$ : matrice  $n \times n$  dans le cas d'un système à une sortie

## Détermination de l'état initial - Observabilité

### CNS d'observabilité (observability)

- Notons  $\mathcal{Y}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$  et  $\mathcal{U}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$

$$\mathcal{Y}(t) = \mathcal{O}x(t) + \mathcal{T}\mathcal{U}(t)$$

soit en particulier en  $t = 0$

$$\mathcal{Y}(0) - \mathcal{T}\mathcal{U}(0) = \mathcal{O}x(0)$$

- A tout  $\mathcal{Y}(0), \mathcal{U}(0)$  il correspond une seule valeur de  $x(0)$  si et seulement si

$$\text{rang } \mathcal{O} = n$$

(cf  $x(0) = \mathcal{O}^{-1}(\mathcal{Y}(0) - \mathcal{T}\mathcal{U}(0))$ )

- Un SLP est observable si et seulement si  $\text{rang } \mathcal{O} = n$

## Détermination de l'état initial - Observabilité

### Remarques

- Pas d'intervention de l'entrée dans les questions d'observabilité
- **Définition de l'observabilité:** possibilité de reconstruire de façon **univoque** l'état  $\{x(t), t \geq 0\}$  à partir du modèle  $\{A, B, C, D\}$  et des trajectoires de l'entrée et de la sortie  $(\{u(t), t \geq 0\}, \{y(t), t \geq 0\})$ .
- En pratique, on ne dispose généralement pas des dérivées de  $u(t)$  et  $y(t)$  et on ne peut que les approcher. On préfère passer par des "observateurs d'état" ou des "capteurs logiciels" pour estimer l'état du système.
- L'observabilité ne dépend que de la paire  $(C, A)$  pour un système linéaire permanent.
- Exemple de système non observable: moteur dont on mesure la vitesse angulaire (cf impossibilité de reconstruire de façon univoque la position angulaire)

## Amener l'état à une valeur donnée - gouvernabilité ou commandabilité

### Définition

Un SLP est gouvernable s'il est possible d'amener l'état d'une valeur initiale  $x(0) = x_0$  à une valeur finale  $x(T) = x_1$  à l'aide d'une fonction  $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  appropriée (typiquement une fonction continue par morceaux)

### Mise en équations

Trouver  $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  tel que

$$x_1 = \exp(AT) x_0 + \int_0^T \exp(A(T - \tau)) Bu(\tau) d\tau$$

soit encore

$$\underbrace{x_1 - \exp(AT) x_0}_q = \int_0^T \exp(A(T - \tau)) Bu(\tau) d\tau \quad (1)$$

## Amener l'état à une valeur donnée - gouvernabilité ou commandabilité

### CNS de gouvernabilité (controllability)

Un SLP est gouvernable si et seulement si  $\text{rang } \mathcal{C} = n$  où  $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$  est la matrice de gouvernabilité ou de commandabilité.

### Démonstration de la condition nécessaire

- Supposons que  $\text{rang } \mathcal{C} < n$ , c-à-d  
 $\exists \gamma \neq 0$  tel que  $\gamma' \mathcal{C} = 0$
- Reprenons l'expression (1) avec  $q = \gamma$ . On doit déterminer  $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  tel que

$$\gamma' \gamma = \int_0^T \gamma' \exp(A(T - \tau)) B u(\tau) d\tau$$

## Amener l'état à une valeur donnée - gouvernabilité ou commandabilité

### Démonstration de la condition nécessaire (suite)

- Notons que:

$$\begin{aligned}\gamma' \exp(A(T - \tau))B &= \gamma'B + \gamma'AB(T - \tau) + \cdots + \gamma' \frac{A^{n-1}}{(n-1)!}B(T - \tau)^{(n-1)} + \cdots \\ &= 0\end{aligned}$$

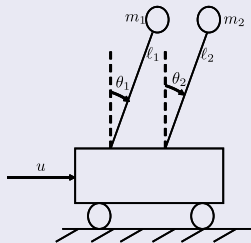
car  $\gamma'C = 0$  et les termes en puissance de  $A$  supérieure ou égale à  $n$  sont nuls par le théorème de Cayley Hamilton.

- Il en résulte  $\gamma'\gamma = 0$  soit  $\gamma = 0$ , ce qui est une contradiction.
- Il n'est donc pas possible de trouver  $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  qui mène à  $\gamma \neq 0$

## Amener l'état à une valeur donnée - gouvernabilité ou commandabilité

### Exemple de système ingouvernable

Système formé d'un chariot muni de deux pendules inversés de même longueur ( $\ell_1 = \ell_2$ ) et de même masse ( $m_1 = m_2$ )



En effet,  $\theta_1(0) = \theta_2(0) \rightarrow \theta_1(t) = \theta_2(t)$  quelle que soit  $u(t)$



## Transformation de similitude - Changement de variables

- Soit un système décrit par le modèle en variables d'état suivant

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

- Changement de variables d'état - transformation de similitude (Similarity transform)

$$x(t) = T\tilde{x}(t)$$

avec  $T$  matrice carrée régulière ("non singular")

- Par substitution dans les équations d'état, il vient:

$$\begin{aligned}T\dot{\tilde{x}}(t) &= A T\tilde{x}(t) + Bu(t) & \tilde{x}(0) &= T^{-1}x_0 \equiv \tilde{x}_0 \\ y(t) &= C T\tilde{x}(t) + Du(t)\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= T^{-1}A T\tilde{x}(t) + T^{-1}Bu(t) & \tilde{x}(0) &= \tilde{x}_0 \\ y(t) &= C T\tilde{x}(t) + Du(t)\end{aligned}$$

## Transformation de similitude - Changement de variables (suite)

- Introduisons les notations

$$\tilde{A} = T^{-1} A T \ ; \ \tilde{B} = T^{-1} B$$

$$\tilde{C} = C T \ ; \ \tilde{D} = D$$

- Il vient:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \quad t \geq 0$$

$$y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}u(t)$$

### Conclusion sur les changements de variables d'état

A partir d'une représentation en variables d'état, on peut déduire une infinité d'autres par transformation de similitude.

## Forme modale

- Hypothèse:  $A$  a des valeurs propres distinctes
- Changement de variables mettant la matrice  $A$  sous forme diagonale

$$x(t) = Lx_d(t)$$

avec  $L$  matrice formée des vecteurs propres de  $A$

- Forme modale (ou diagonale) des équations d'état

$$\begin{aligned}\dot{x}_d(t) &= L^{-1}A Lx_d(t) + L^{-1}Bu(t) & x_d(0) &= L^{-1}x_0 \equiv x_{d0} \\ y(t) &= C Lx_d(t) + Du(t)\end{aligned}$$

- Notations

$$\begin{aligned}\Lambda &= \text{diag}_{i=1,n}\{\lambda_i\} = L^{-1} A L \\ B_d &= L^{-1} B = \begin{bmatrix} b_{d1} & b_{d2} & \cdots & b_{dn} \end{bmatrix}' \\ C_d &= C L = \begin{bmatrix} c_{d1} & c_{d2} & \cdots & c_{dn} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

## Forme modale (suite)

- Description en variables d'état sous une forme modale

$$\begin{aligned}\dot{x}_{di}(t) &= \lambda_i x_{di}(t) + b_{di} u(t) \quad i = 1, \dots, n \\ y(t) &= \sum_{i=1}^n c_{di} x_{di}(t) + Du(t)\end{aligned}$$

- Matrice de gouvernabilité

$$\mathcal{C}_d = \begin{bmatrix} b_{d1} & \lambda_1 b_{d1} & \cdots & \lambda_1^{n-1} b_{d1} \\ b_{d2} & \lambda_2 b_{d2} & \cdots & \lambda_2^{n-1} b_{d2} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{dn} & \lambda_n b_{dn} & \cdots & \lambda_n^{n-1} b_{dn} \end{bmatrix} = L^{-1} \mathcal{C}$$

- Remarque :  $\text{rang} \mathcal{C}_d = \text{rang} \mathcal{C}$  (la gouvernabilité d'une réalisation n'est pas affectée par une transformation de similitude)

## Forme modale (suite)

- Matrice de gouvernabilité (suite)

$$C_d = \begin{bmatrix} b_{d1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{d2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{dn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

→

$$\det C_d = \left( \prod_{i=1}^n b_{di} \right) \left( \prod_{\substack{i=1 \\ i < j}}^n (\lambda_i - \lambda_j) \right)$$

- Système non gouvernable si et seulement si au moins un des coefficients  $b_{di}, i = 1 \cdots, n$  est nul.
- De manière similaire,  $\text{rang } \mathcal{O}_d < n$  (système inobservable) si et seulement si au moins un des  $c_{di}, i = 1 \cdots, n$  est nul. De plus, l'observabilité d'un système n'est pas affectée par une transformation de similitude.

## Forme modale (suite)

- Equation d'état associée à  $x_i$  lorsque  $b_{di} = 0$ :

$$\dot{x}_{di}(t) = \lambda_i x_{di}(t)$$

→ impossibilité d'agir (par  $u(t)$ ) sur  $x_{di}(t)$

→ état  $x_{di}(t)$  non gouvernable et système non gouvernable

- Equation de sortie lorsque  $c_{di} = 0$

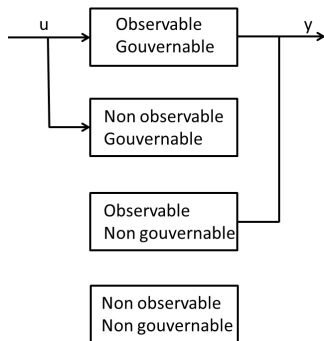
$$y(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_{dj} x_{dj}(t) + Du(t)$$

→ Comme les états  $x_{dj}(t), j \neq i$  sont indépendants de  $x_{di}(t)$ , il est impossible de déduire de l'information sur  $x_{di}(t)$  à partir de  $y(t)$

→ l'état  $x_{di}(t)$  est inobservable et le système est inobservable

## Forme modale (suite)

- Séparation de l'état en sa partie gouvernable et non gouvernable et sa partie observable et non observable correspond à la décomposition de Kalman



## Forme modale (suite)

- Fonction de transfert:
$$H(p) = C_d(pI_n - \Lambda)^{-1}B_d = \sum_{j=1}^n \frac{c_{dj} b_{dj}}{p - \lambda_j}$$
$$= C(pI_n - A)^{-1}B$$
- Si  $c_{di} = 0$  ou  $b_{di} = 0$ , il y a une simplification entre le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert; on dit que  $H(p)$  n'est pas **irréductible**.
- De manière générale (même quand  $A$  a des valeurs propres confondues), **un système caractérisé par une fonction de transfert  $H(p)$  d'ordre  $n$  peut être décrit par un modèle en variables d'état d'ordre  $n$  gouvernable et observable si et seulement si  $H(p)$  est irréductible. Une telle représentation en variables d'état est dite "minimale" car on ne peut pas trouver un un modèle avec moins d'états pour  $H(p)$ .**
- En d'autres termes, si l'on détermine une réalisation d'ordre supérieur à  $n$  pour une fonction de transfert irréductible d'ordre  $n$ , cette réalisation sera inobservable et/ou ingouvernable. Cette réalisation a le même comportement entrée-sortie qu'une réalisation d'ordre  $n$  pour des conditions initiales nulles, mais elle risque d'avoir un état inobservable et/ou ingouvernable instable.



## Simplification pôle/zéro

**Illustration par un exemple numérique:**  $H(p) = \frac{(p-1)}{(p-1)(p+1)}$

- Considérer comme la mise en série de  $H_1(p) = \frac{1}{p-1}$  et

$$H_2(p) = \frac{p-1}{p+1}$$

- Description en variables d'état

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + u_1(t) \qquad \dot{x}_2(t) = -x_2(t) - 2u_2(t)$$

$$y_1(t) = x_1(t) \qquad y_2(t) = x_2(t) + u_2(t)$$

Mise en série  $\rightarrow u_2(t) = y_1(t)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_1(t)$$

$$y_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix}'$$

## Simplification pôle/zéro - complément

- Transformée de Laplace unilatérale des équations d'état

$$pX_1(p) - x_{10} = X_1(p) + U_1(p) \rightarrow X_1(p) = \frac{x_{10}}{p-1} + \frac{U_1(p)}{p-1}$$

$$pX_2(p) - x_{20} = -2X_1(p) - X_2(p) \rightarrow X_2(p) = \frac{x_{20}}{p+1} - 2\frac{X_1(p)}{p+1}$$

$$Y_2(p) = \frac{x_{10} + x_{20}}{p+1} + \frac{U_1(p)}{p+1}$$

- Transformée de Laplace inverse

$$x_1(t) = x_{10}e^t + e^t \nu(t) * u_1(t)$$

$$x_2(t) = x_{20}e^{-t} + x_{10}(e^{-t} - e^t) + (e^{-t} - e^t)\nu(t) * u_1(t)$$

$$y_2(t) = (x_{10} + x_{20})e^{-t} + e^{-t}\nu(t) * u_1(t)$$

pour  $t \geq 0$

## Simplification pôle/zéro - complément

- Gouvernabilité

$$\text{rang } \mathcal{C} = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 2$$

Système gouvernable

- Matrice d'observabilité

$$\text{rang } \mathcal{O} = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = 1$$

Système non observable

- Exercice: en calculant une forme modale pour ce système, montrez que la variable d'état associée à la valeur propre  $\lambda = 1$  est inobservable
- La partie de l'état inobservable est associée au pôle simplifié par le zéro

## Conclusions

- Observabilité du système : possibilité d'estimer l'état à partir des trajectoires de l'entrée et de la sortie
- Gouvernabilité du système : possibilité d'amener l'état en un point quelconque de l'espace d'état
- Pour la mise en oeuvre d'un régulateur, utiliser une réalisation minimale (gouvernable et observable)
- Pour une réalisation non gouvernable et/ou non observable, il y a une ou plusieurs simplifications pôle/zéro dans la fonction de transfert du système.
- Pour des systèmes en cascade, la simplification d'un pôle par un zéro n'est admissible que si le pôle est dans le demi-plan gauche sans quoi on induit un état inobservable ou ingouvernable qui est instable.