

Analyse du modèle d'un SLP

February 16, 2020

Plan

- 1 Objectifs du chapitre
- 2 Schéma fonctionnel
- 3 Influence de la position des pôles
- 4 Spécifications temporelles
- 5 Effets de zéros et de pôles additionnels
- 6 Stabilité

Comment caractériser les performances d'une boucle fermée ?

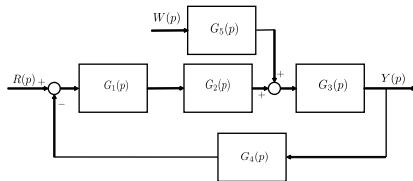
- Méthode de conception basée sur la position des pôles et des zéros de la boucle fermée (Lieu d'Evans)
→ Effet de la position des pôles et des zéros d'une fonction de transfert sur la réponse indicielle
- Spécifications dans le domaine temporel
Principales caractéristiques d'une réponse indicielle

Objectif à atteindre

- Pouvoir comprendre les schémas fonctionnels et déterminer la fonction de transfert entre une entrée et une sortie spécifiées
- Maîtriser le lien entre la position des pôles d'une fonction de transfert rationnelle et l'allure de sa réponse indicielle ou impulsionnelle
- Connaître les propriétés des systèmes du premier et du second ordre dans le domaine temporel (temps de montée, temps d'établissement, dépassement indiciel) et savoir comment elles sont affectées par des pôles et des zéros supplémentaires
- Pouvoir mettre en oeuvre le critère de Routh pour étudier la stabilité d'un SLP

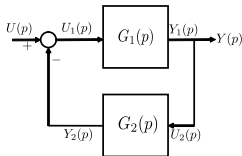
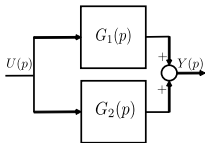
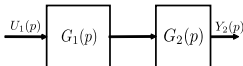
Notion de schéma fonctionnel (block diagram)

Souvent les systèmes peuvent être décomposés en composants qui n'interagissent que par leur entrée et leur sortie (sortie d'un composant = entrée d'un autre)



- Chaque bloc représente un composant
- Lien entrée-sortie décrit par segment de droite orienté (flèche)
- Interconnection contient des sommateurs (cercles) qui effectuent la somme ou la différence des signaux d'entrée (selon les signes indiqués)

Schémas fonctionnels élémentaires et leur fonction de transfert (1)



- Série : $\frac{Y_2(p)}{U_1(p)} = G_1(p)G_2(p)$
- Parallèle : $\frac{Y(p)}{U(p)} = G_1(p) + G_2(p)$
- Rétroaction négative : $\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{G_1(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)}$

Schémas fonctionnels élémentaires et leur fonction de transfert (2)

- Fonction de transfert d'un système en rétroaction

$$U_1(p) = U(p) - Y_2(p)$$

$$Y_2(p) = G_2(p)G_1(p)U_1(p)$$

$$Y(p) = Y_1(p) = G_1(p)U_1(p)$$

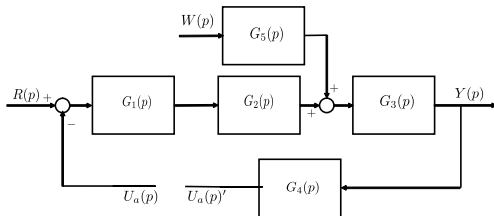
$$\rightarrow Y(p) = \frac{G_1(p)}{1+G_1(p)G_2(p)}U(p)$$

- Règle

La fonction de transfert d'un système en rétroaction négative est donnée par la fonction de transfert de la chaîne directe divisée par la somme de 1 et de la fonction de transfert de la boucle ouverte

Boucle ouverte

Exemple: Fonction de transfert entre U_a et U'_a (entrées nulles) **sans inclure le signe négatif de la rétroaction**



Fonction de transfert de la boucle ouverte: $G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)$
 Ne dépend pas de l'endroit où l'on ouvre la boucle

Exemples de manipulations de schémas fonctionnels (1)

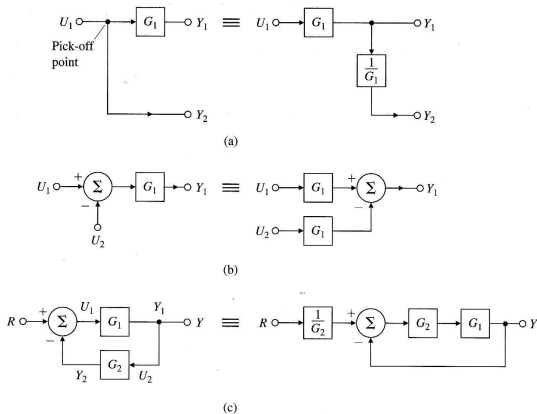
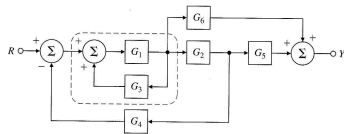


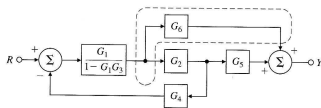
Figure: [Franklin et al., 2010]

Exemples de manipulations de schémas fonctionnels (2)

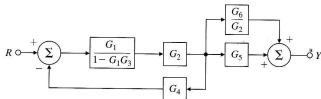
Calcul de la fonction de transfert par manipulation du schéma fonctionnel [Franklin et al., 2010]



(a)



(b)



(c)

Exemples de manipulations de schémas fonctionnels (3)

Mise en série de deux systèmes: un système en rétroaction et une paire de systèmes en parallèle

$$T(p) = \frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{\frac{G_1 G_2}{1 - G_1 G_3}}{1 + \frac{G_1 G_2 G_4}{1 - G_1 G_3}} \left(G_5 + \frac{G_6}{G_2} \right)$$

Soit

$$T(p) = \frac{G_1 G_2 G_5 + G_1 G_6}{1 - G_1 G_3 + G_1 G_2 G_4}$$

Notions de pôles et de zéros

- Fonction de transfert d'un SLP sous la forme d'une fraction rationnelle $H(p) = \frac{b(p)}{a(p)}$
Supposons que $b(s)$ et $a(s)$ n'ont pas de facteur commun
- Pôles de $H(p)$: valeurs de p telles que $a(p) = 0$
- Zéros de $H(p)$: valeurs de p telles que $b(p) = 0$
- Par transformée de Laplace inverse de $H(p)$ on obtient la réponse impulsionnelle du système → lien entre allure de la réponse temporelle et position des pôles de $H(p)$

Système du premier ordre (1)

- Fonction de transfert $H(p) = \frac{A_0\sigma}{p+\sigma}$ avec σ réel
- Réponse impulsionnelle $h(t) = A_0\sigma e^{-\sigma t}\nu(t)$
- Réponse indicielle $s(t) = A_0(1 - e^{-\sigma t})\nu(t)$
Système stable si $\sigma > 0$ soit pôle $p_1 = -\sigma$ négatif
- Constante de temps : instant auquel $h(t)$ vaut $1/e$ fois sa valeur initiale

$$\tau = 1/\sigma$$

Caractérise taux de décroissance (croissance) de $h(t)$ (de $s(t)$)

Système du premier ordre (2)

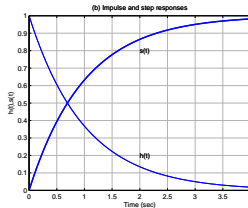
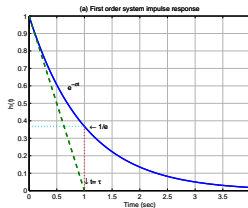


Figure réalisée pour $A_0 = 1$

Pôles complexes conjugués - système du deuxième ordre (1)

- Pôles : $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d$
- Dénominateur associé:

$$a(p) = (p + \sigma + j\omega_d)(p + \sigma - j\omega_d) = (p + \sigma)^2 + \omega_d^2$$

- Forme classique de la fonction de transfert

$$H(p) = A_0 \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2}$$

$$\rightarrow \sigma = \zeta\omega_n \text{ et } \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

- Vocabulaire

ζ : facteur d'amortissement (damping ratio), $0 \leq \zeta \leq 1$

ω_n : pulsation naturelle ; ω_d : pulsation apparente

Pôles complexes conjugués - système du deuxième ordre (2)

- Position des pôles dans le plan complexe
Module des pôles: $|p_{1,2}| = \omega_n$
Angle par rapport à l'axe imaginaire : $\theta = \arcsin(\zeta)$
- Cas particuliers : $\zeta = 0$: pôles imaginaires;
 $\zeta = 1$: pôles réels confondus

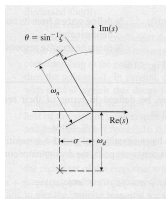


Figure: Position des pôles complexes conjugués [Franklin et al., 2010]

Pôles complexes conjugués - système du deuxième ordre (3)

- Réponse impulsionnelle: $h(t) = A_0 \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t} (\sin \omega_d t) \nu(t)$
- Réponse indicielle: $s(t) = A_0 \left(1 - e^{-\sigma t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \right) \nu(t)$

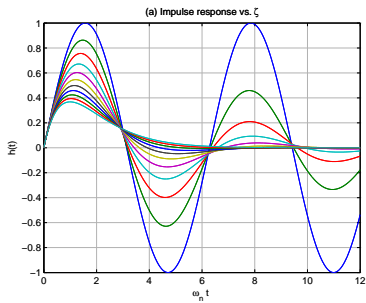


Figure réalisée pour $A_0 = 1$

Pôles complexes conjugués - système du deuxième ordre (4)

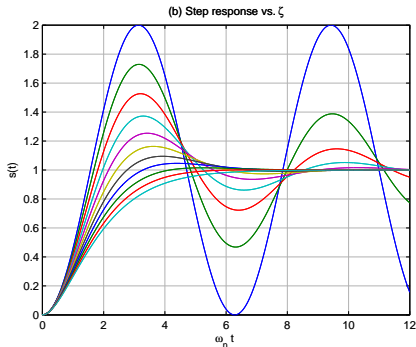


Figure: ζ croît par pas de 0.1 de 0 (bleu foncé) à 1 (bleu clair sans dépassement); figure réalisée pour $A_0 = 1$

Pôles complexes conjugués - système du deuxième ordre (5)

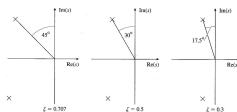


Figure: Positions des pôles correspondant à 3 valeurs de ζ [Franklin, 2010]

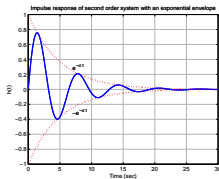


Figure: Mise en évidence de l'enveloppe exponentielle dans $h(t)$

Influence de la position des pôles

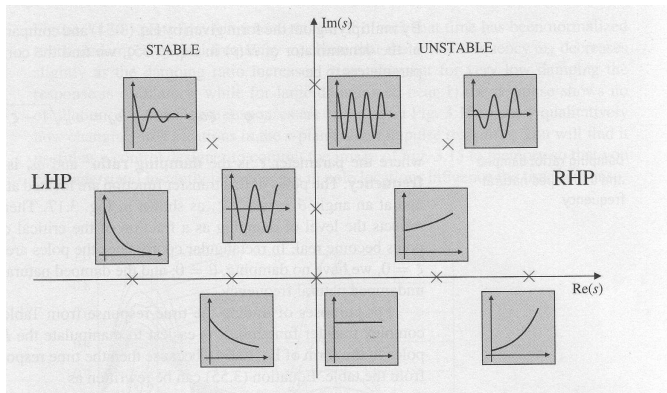


Figure: Allure de la réponse impulsionnelle en fonction de la position du pôle réel ou des pôles complexes conjugués [Franklin et al., 2010]

Définitions

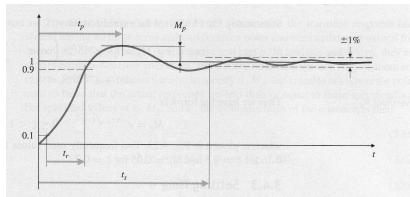


Figure: [Franklin et al. 2010]

- t_r : temps de montée (rise time)
- t_s : temps d'établissement (settling time)
- M_p : dépassement indiciel (souvent exprimé en pourcents) (overshoot)
- t_p : instant du dépassement indiciel maximum (peak time)

Temps de montée

- Pour système du second ordre plus ζ grand, plus t_r augmente pour ω_n fixé
- Considérons $\zeta = 0.5$ pour obtenir une approximation du temps de montée moyen
Temps pour que $s(t)$ passe de 0.1 à 0.9: $\omega_n t_r \simeq 1.8$, soit

$$t_r \simeq \frac{1.8}{\omega_n}$$

- Règle utilisée pour obtenir un ordre de grandeur du temps de montée, même pour des systèmes d'ordre supérieur à deux, éventuellement avec zéros (résultat à affiner par simulation)

Dépassement indiciel et instant du dépassement maximum (1)

Maximum atteint pour $\dot{s}(t) = h(t) = 0$, soit

$$h(t) = A_0 \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\sigma t} (\sin \omega_d t) \nu(t) = 0$$

d'où

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Dépassement indiciel et instant du dépassement maximum (2)

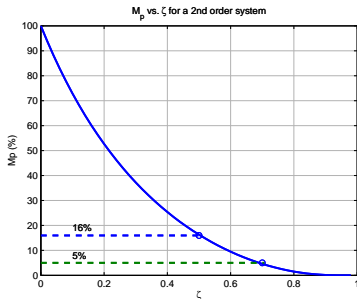
En substituant t_p pour t dans l'expression de $s(t)$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{s(t_p)}{A_0} \equiv 1 + M_p &= 1 - e^{-\sigma\pi/\omega_d} \left(\cos \pi + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \pi \right) \\ &= 1 + e^{-\sigma\pi/\omega_d}\end{aligned}$$

On en déduit l'expression du dépassement indiciel

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}, 0 \leq \zeta < 1$$

Dépassement indiciel et instant du dépassement maximum (3)



Notons les deux points couramment utilisés: $M_p = 0.16$ pour $\zeta = 0.5$
et $M_p = 0.05$ pour $\zeta = 0.7$

Temps d'établissement (1)

- Laps de temps requis pour que $s(t)$ ait presque atteint l'équilibre (ici écart maximum de 1 pourcent)
- La durée du transitoire est essentiellement dictée par l'exponentielle décroissante dans l'expression de $s(t)$
→ t_s instant pour lequel

$$e^{-\sigma t_s} = e^{-\zeta \omega_n t_s} = 0.01$$

- Finalement

$$t_s = \frac{4.6}{\zeta \omega_n} = \frac{4.6}{\sigma}$$

Exploitation des résultats en conception de régulateur

Emplacement des pôles pour t_r , M_p et t_s imposés

(temps de montée $\leq t_r^*$, dépassement indiciel $\leq M_p^*$, temps d'établissement $\leq t_s^*$)

$$\begin{aligned}\omega_n &\geq \frac{1.8}{t_r^*} \\ \zeta &\geq \zeta(M_p^*) \quad (\text{cf figure}) \\ \sigma &\geq \frac{4.6}{t_s^*}\end{aligned}$$

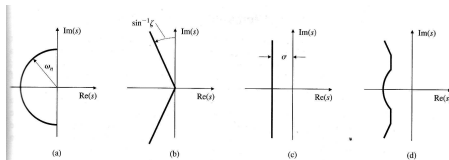


Figure: Régions du plan complexe spécifiées par les expressions ci-dessus:
(a) t_r^* ; (b) M_p^* ; (c) t_s^* ; (d) regroupement des 3 spécifications

Cas particulier: système du premier ordre

- Fonction de transfert: $H(p) = A_0 \frac{\sigma}{p+\sigma}$
- Réponse indicielle: $s(t) = A_0(1 - e^{-\sigma t})\nu(t)$
- Par similitude avec le cas du 2^e ordre: $t_s = \frac{4.6}{\sigma}$
- Pas de dépassement indiciel possible: $M_p = 0$
- Temps de montée: $t_r = \frac{\ln 0.9 - \ln 0.1}{\sigma} = \frac{2.2}{\sigma}$
- Constante de temps: $\tau = 1/\sigma$

Effet d'un zéro(1)

Exemple numérique Deux fonctions de transfert ayant les mêmes pôles et le même gain statique:

$$H_1(p) = \frac{2}{(p+1)(p+2)} = \frac{2}{p+1} - \frac{2}{p+2}$$
$$H_2(p) = \frac{2(p+1.1)}{1.1(p+1)(p+2)} = \frac{0.18}{p+1} + \frac{1.64}{p+2}$$

Réponses indicielles

$$h_1(t) = \left(2e^{-t} - 2e^{-2t}\right) \nu(t)$$
$$h_2(t) = \left(0.18e^{-t} + 1.64e^{-2t}\right) \nu(t)$$

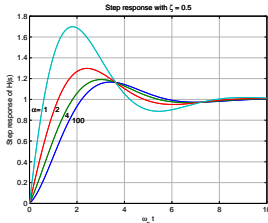
- Modification des coefficients des termes exponentiels dont la forme est imposée par les pôles
- Zéro proche d'un pôle réduit la contribution du terme associé (ici pôle en 1)

Effet d'un zéro(2)

Fonction de transfert du 2^e ordre avec un zéro et deux pôles complexes conjugués de gain statitique unitaire

$$H(s) = \frac{(p/\alpha\zeta\omega_n) + 1}{(p/\omega_n^2) + 2\zeta(p/\omega_n) + 1}$$

- Zéro en $p = -\alpha\zeta\omega_n = -\alpha\sigma$
- Augmentation du dépassement indiciel d'autant plus importante que α est petit
- Pas d'influence importante sur t_s



Effet d'un zéro(3)

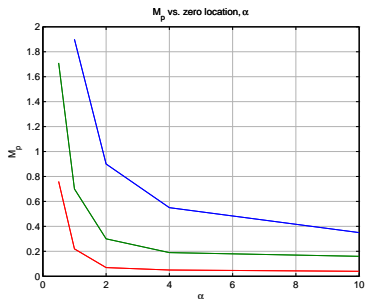


Figure: M_p en fonction de la position normalisée du zéro, α
bleu: $\zeta = 0.3$; vert: $\zeta = 0.5$; rouge: $\zeta = 0.7$

Effet d'un zéro(4)

Explication de l'effet d'un zéro

Considérons le cas $\omega_n = 1$ pour la simplicité:

$$H(p) = \frac{p/\alpha\zeta + 1}{p^2 + 2\zeta p + 1} = \frac{1}{p^2 + 2\zeta p + 1} + \frac{1}{\alpha\zeta} \frac{p}{p^2 + 2\zeta p + 1}$$

Notons $H_0(p)$ le premier terme (sans zéro); soit $s_0(t)$ sa réponse indicielle.

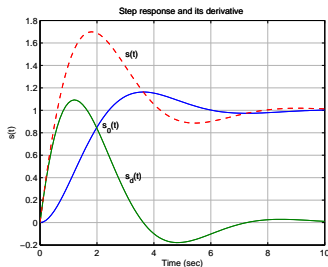
Par transformée de Laplace inverse,

$$s(t) = s_0(t) + \frac{1}{\alpha\zeta} \frac{ds_0(t)}{dt} = s_0(t) + s_d(t)$$

avec $s_d(t)$ le produit de la dérivée de $s_0(t)$ et d'une constante liée au zéro

Effet d'un zéro(5)

Illustration

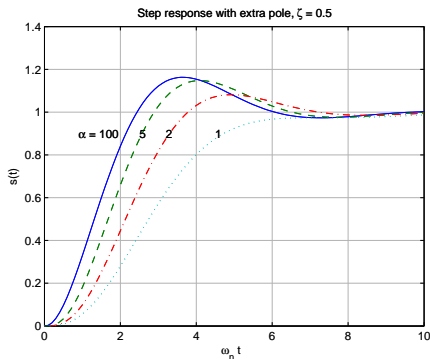


Cas où $\alpha < 0$: zéro dans le demi-plan droit ou zéro à déphasage non minimal

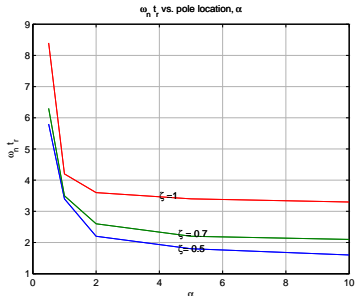
Dérivée soustraite à la réponse indicielle sans zéro → dépassement négatif

Effet d'un pôle supplémentaire (1)

$$H(p) = \frac{1}{(p/\alpha\zeta\omega_n + 1) ((p/\omega_n)^2 + 2\zeta(p/\omega_n) + 1)}$$



Effet d'un pôle supplémentaire (2)



Temps de montée normalisé : $\omega_n t_r$

Pôle supplémentaire \rightarrow augmentation significative du temps de montée si le pôle supplémentaire est dans un rapport inférieur à 4 de la partie réelle des pôles complexes conjugués

Définitions et CNS (1)

- On se limite au cas des SLP; étude de la stabilité des états d'équilibre des systèmes non linéaires beaucoup plus complexe
- Stabilité au sens entrée bornée / sortie bornée ou stabilité EBSB (BIBO stability)
 - **Définition: Toute entrée bornée donne une sortie bornée**
 - Pas de prise en compte de ce qui se passe à "l'intérieur" du système
 - CNS de stabilité EBSB: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$
 - **CNS de stabilité EBSB pour un système décrit par une fraction rationnelle propre: tous les pôles de la fonction de transfert obtenue après les éventuelles "simplifications pôle/zéro" ont une partie réelle négative**

Définitions et CNS (2)

- Stabilité interne ou stabilité asymptotique
 - **Définition:** Pour une entrée nulle, l'état tend vers zéro quand t tend vers l'infini, quel que soit l'état initial.
 - Conséquence: Toute entrée bornée donne une sortie et des grandeurs d'états (ou variables internes) bornées
 - CNS de stabilité asymptotique pour un système décrit par une fraction rationnelle propre: tous les pôles de la fonction de transfert obtenue **avant** toute "simplification pôle/zéro" ont une partie réelle négative
 - **CNS de stabilité interne pour un SLP décrit par un modèle en variables d'état:** toutes les valeurs propres de la matrice A ont une partie réelle négative
- Remarque: le polynôme caractéristique de la matrice A est égal au dénominateur de la fonction de transfert avant toute "simplification pôle/zéro": $H(p) = C(pI - A)^{-1}B = \frac{C \text{Adj}(pI - A)B}{\det(pI - A)}$

Définitions et CNS (3)

Démonstration de la CNS de stabilité asymptotique en termes des valeurs propres de la matrice A

Solution de $\dot{x}(t) = Ax(t)$ avec $x(0) = x_0$

Supposons que les valeurs propres de A sont distinctes.

Dès lors, $A = L\Lambda L^{-1}$ avec $L = [l_1, \dots, l_n]$ formée des vecteurs propres de A et $\Lambda = \text{diag}_{i=1, \dots, n} \{\lambda_i\}$ où λ_i est la i^e valeur propre de A

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \exp(At)x_0 \\
 &= L \exp(\Lambda t) L^{-1} x_0 \\
 &= [l_1 \dots l_n] \text{diag}_{i=1, \dots, n} \{\exp(\lambda_i t)\} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \quad \text{avec } \gamma = L^{-1} x_0 \\
 &= \sum_{i=1}^n l_i e^{\lambda_i t} \gamma_i
 \end{aligned} \tag{1}$$

Définitions et CNS (3)

Démonstration de la CNS de stabilité asymptotique en termes des valeurs propres de la matrice A (suite)

Par (1), $x(t)$ tend vers zéro pour tout x_0 si et seulement si $\lambda_i < 0$

Rappel: Dénominateur de la fonction de transfert identique au polynôme caractéristique de A avant toute simplification entre numérateur et dénominateur d'où la condition de stabilité asymptotique pour la fonction de transfert

Simplification pôle/zéro (1)

Illustration par un exemple numérique: $H(s) = \frac{(p-1)}{(p-1)(p+1)}$

- Considérer comme la mise en série de $H_1(p) = \frac{1}{p-1}$ et

$$H_2(p) = \frac{p-1}{p+1} = 1 - \frac{2}{p+1}$$

- Description en variables d'état

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + u_1(t) \qquad \dot{x}_2(t) = -x_2(t) - 2u_2(t)$$

$$y_1(t) = x_1(t) \qquad y_2(t) = x_2(t) + u_2(t)$$

Mise en série $\rightarrow u_2(t) = y_1(t)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_1(t)$$

$$y_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix}'$$

Simplification pôle/zéro (2)

- Transformée de Laplace unilatérale des équations d'état

$$pX_1(p) - x_{10} = X_1(p) + U_1(p) \rightarrow X_1(p) = \frac{x_{10}}{p-1} + \frac{U_1(p)}{p-1}$$

$$pX_2(p) - x_{20} = -2X_1(p) - X_2(p) \rightarrow X_2(p) = \frac{x_{20}}{p+1} - 2\frac{X_1(p)}{p+1}$$

$$Y_2(p) = \frac{x_{10} + x_{20}}{p+1} + \frac{U_1(p)}{p+1}$$

- Transformée de Laplace inverse

$$x_1(t) = x_{10}e^t + e^t \nu(t) * u_1(t)$$

$$x_2(t) = x_{20}e^{-t} + x_{10}(e^{-t} - e^t) + (e^{-t} - e^t)\nu(t) * u_1(t)$$

$$y_2(t) = (x_{10} + x_{20})e^{-t} + e^{-t}\nu(t) * u_1(t)$$

pour $t \geq 0$

Simplification pôle/zéro (3)

Discussion

- Sortie bornée pour toute entrée bornée et tout état initial
- Etats non bornés si $x_{10} \neq 0$ et pour une large classe d'entrées $u_1(t)$ bornées

Critères de stabilité

- Un seul pôle en -1 après simplification \rightarrow Système stable au sens EBSB
- Un pôle en -1 et un pôle en 1 avant simplification \rightarrow pas stabilité interne
- Valeurs propres de A en -1 et $1 \rightarrow$ pas stabilité interne

Critère de stabilité de Routh

- Permet d'évaluer la stabilité interne d'un système à partir de son polynôme caractéristique sans devoir en calculer les racines
- Permet d'évaluer l'intervalle des valeurs d'un paramètre (ou de plusieurs paramètres) pour lequel le système est asymptotiquement stable (polynôme caractéristique avec coefficients symboliques)
- Donnée: polynôme caractéristique:

$$\begin{aligned}a(p) &= \det(pI - A) \\ &= p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \cdots + a_{n-1} p + a_n\end{aligned}$$

- Remarque 1: condition nécessaire (mais pas suffisante) de stabilité interne :
 $a_i > 0, i = 1, \cdots, n$
- Remarque 2: CNS de stabilité interne pour un système du 2e ordre : $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$

Table de Routh(1)

- Deux premières lignes formées à partir des coefficients du polynôme caractéristique

ligne	n	p^n	1	a_2	a_4	\cdots
ligne	$n - 1$	p^{n-1}	a_1	a_3	a_5	\cdots
ligne	$n - 2$	p^{n-2}	b_1	b_2	b_3	\cdots
ligne	$n - 3$	p^{n-3}	c_1	c_2	c_3	\cdots
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
ligne	2	p^2	*	*		
ligne	1	p	*			
ligne	0	p^0	*			

- Lignes suivantes obtenues par le calcul de déterminants ("normalisés") à partir des deux lignes qui les précèdent

Table de Routh(2)

- Expressions des éléments des lignes $n - 2$ et $n - 3$

$$b_1 = - \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix}}{a_1} ; \quad b_2 = - \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{bmatrix}}{a_1} ;$$

$$b_3 = - \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{bmatrix}}{a_1} ; \dots$$

$$c_1 = - \frac{\det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}}{b_1} ; \quad c_2 = - \frac{\det \begin{bmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}}{b_1} ;$$

$$c_3 = - \frac{\det \begin{bmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{bmatrix}}{b_1} ; \dots$$

- $n + 1$ éléments dans la première colonne lorsque la table est construite
- CNS de stabilité asymptotique: les $(n + 1)$ éléments de la première colonne de la table de Routh sont tous positifs**

Table de Routh(3)

- Le nombre de changements de signe dans la première colonne de la table de Routh correspond au nombre de pôles dans le demi-plan droit.
- Pour simplifier les calculs, on peut multiplier ou diviser une ligne par une constante positive avant de poursuivre le calcul du tableau.
- Les deux dernières lignes n'ont qu'un élément non nul
- Cas particuliers
 - Le premier élément d'une ligne est nul
Remplacer la valeur nulle par $\epsilon > 0$ et poursuivre la construction de la table de Routh.
Appliquer le critère de stabilité en considérant la limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$

Table de Routh(4)

- Cas particuliers (suite)

- Une ligne du tableau est entièrement nulle

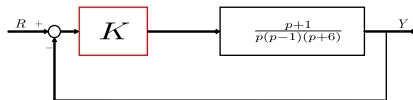
Si la i^e ligne est nulle, construire un polynôme auxiliaire à partir de la ligne précédente (ligne $(i + 1)$ dans nos conventions)

$$a_1(p) = \beta_1 p^{i+1} + \beta_2 p^{i-1} + \beta_3 p^{i-3} + \dots$$

Substituer les coefficients de la i^e ligne par ceux de la dérivée de $a_1(p)$

Table de Routh(5)

- Exemple : stabilité d'une boucle fermée avec régulateur proportionnel



Valeurs de K garantissant la stabilité de la boucle fermée ?

- Solution

Fonction de transfert de la boucle fermée:

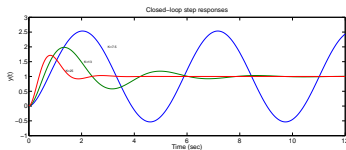
$$T(s) = \frac{BO(p)}{1 + BO(p)} \quad \text{avec} \quad BO(p) = \frac{K(p+1)}{p(p-1)(p+6)}$$

$$\text{Soit } T(p) = \frac{K(p+1)}{p^3 + 5p^2 + (K-6)p + K}$$

Table de Routh(6)

- Table de Routh:

$p^3 :$	1	$K - 6$
$p^2 :$	5	K
$p :$	$(4K - 30)/5$	
$p^0 :$	K	
- Conditions de stabilité: $4K - 30 > 0$ et $K > 0$, soit $K > 7.5$



Récapitulation (1)

- Lien entre la position des pôles dans le plan complexe et la forme de la réponse indicielle ou impulsionnelle
- Caractérisation de la réponse indicielle par t_r , M_P , t_s ; lien avec ζ et ω_n pour un système du deuxième ordre (fondement des méthodes de conception par placement des pôles)
- Un zéro à partie réelle négative tend à induire une augmentation du dépassement indiciel
- Un pôle additionnel tend à ralentir la réponse

Récapitulation (2)

- CNS de stabilité EBSB: Un système décrit par une fraction rationnelle irréductible est EBSB stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert (après simplification pôle/zéro) ont une partie réelle négative
- CNS de stabilité interne (ou asymptotique): Un SLP est asymptotiquement stable si et seulement si les racines de son polynôme caractéristique ont une partie réelle négative