Annexe 1 : La transformation bilinéaire

La transformation bilinéaire est une méthode où l'on passe du plan « analogique » (en s ou en p) au plan « numérique » (en z). Le changement de plan passe par une correspondance de l'axe imaginaire du plan p sur le cercle unité du plan z. La méthode consiste donc à effectuer la substitution suivante dans la fonction de transfert $H_c(p)$ du système continu :

$$p = \frac{2}{T}\,\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{T}\,\frac{z - 1}{z + 1}$$

La fonction de transfert du système discret est donc :

$$H_d(z) = H_c(p)\,\Big|\; p = \frac{2}{T}\,\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

La transformation inverse s'en déduit :

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}\,p}{1 - \frac{T}{2}\,p}$$

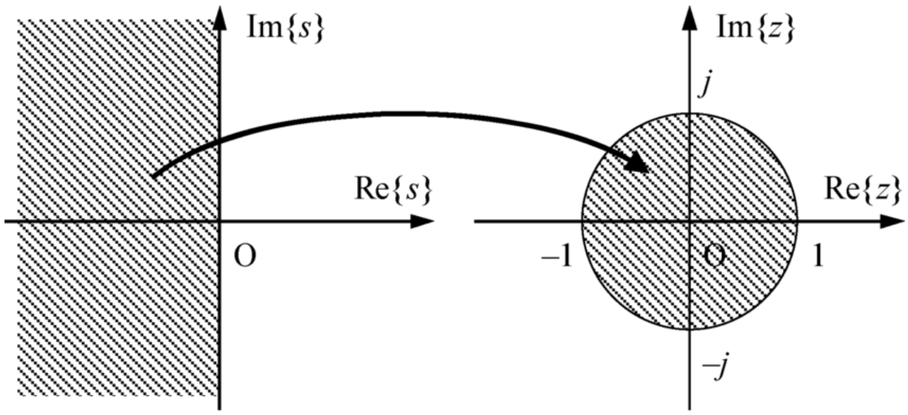
Il y a correspondance biunivoque entre les plans p et z. Puisque l'axe imaginaire correspond au cercle unité, on vérifie que :

$$Re(p) > 0 \Leftrightarrow |z| > 1$$

$$Re(p) < 0 \Leftrightarrow |z| < 1$$

$$Re(p) = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$$

Un filtre analogique est stable si ses pôles ont une partie réelle négative. Dans le domaine discret, un filtre est stable si ses pôles font partie du disque unité. Par la correspondance ci-dessus, on observe que la transformation bilinéaire conserve la stabilité des filtres transformés.



(a) s plane (b) z plane

Rappelons-nous que $H_c(j\Omega) = H_c(p)_{|p=j\Omega}$ et que $H_d\left(e^{j\omega}\right) = H_d(z)_{|z=e^{j\omega}}$. Par la transformation bilinéaire, on peut donc examiner la correspondance entre l'axe imaginaire $p = j\Omega$ et le cercle unité $z = e^{j\omega}$:

(Ω = pulsation dans le plan p (continu) et ω = pulsation dans le plan z (discret))

$$p = \frac{2}{T}\,\frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = \frac{2}{T}\,.\,\frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}} = \frac{2}{T}\,j\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = j\Omega$$

et donc, la relation entre la pulsation en continu et la pulsation en discret est donnée par :

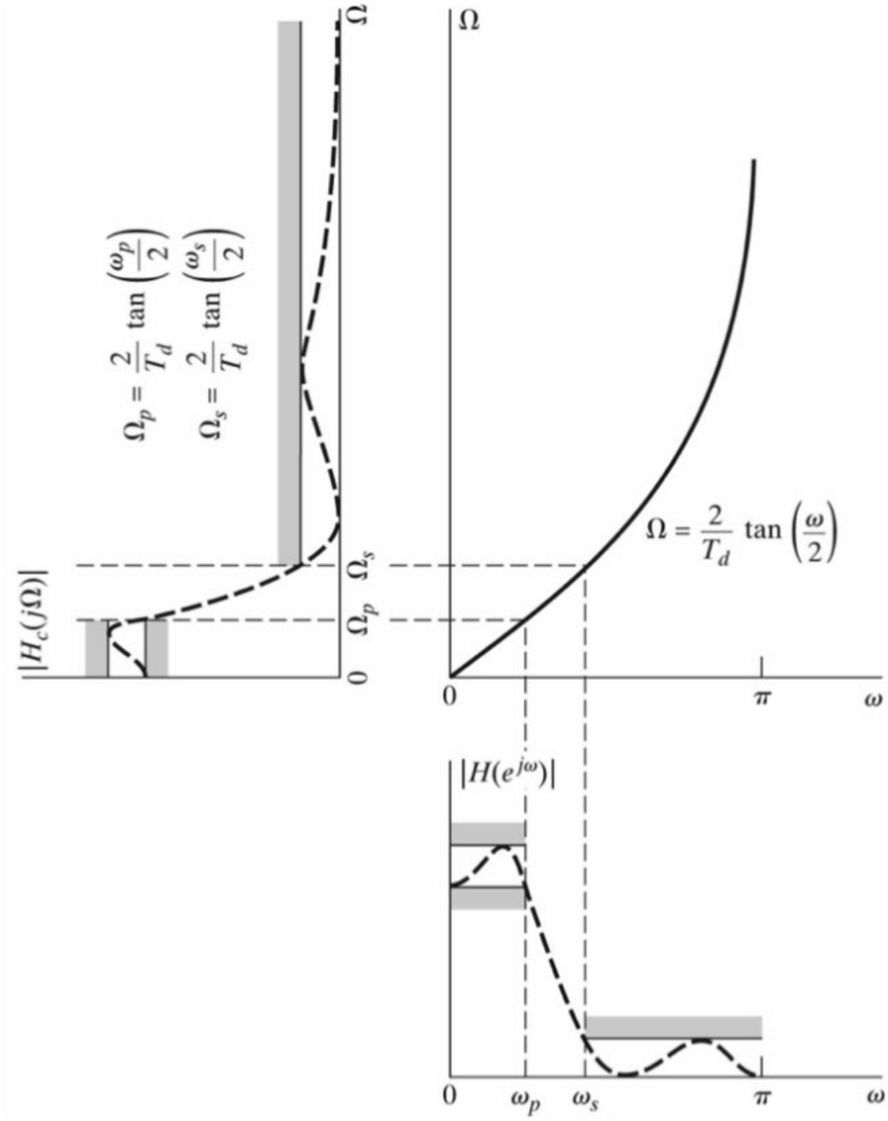
$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\omega = 2\,\mathrm{atan}\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$$

Cette relation non linéaire associe bien à chaque point de la réponse en fréquence du filtre analogique une réponse en fréquence correspondante du filtre numérique, mais est également la raison pour laquelle on observe de la distorsion de l'axe des fréquences (frequency warping).

Pour $\omega << \frac{\pi}{2}$ (avec π étant la fréquence de Nyquist), on a bien une correspondance quasiment linéaire entre le domaine discret et analogique $\Omega \cong \frac{\omega}{T}$ ($\tan(x) \cong x$ via l'approximation des petits angles) . Mais la distorsion devient évidente lorsqu'on se rapproche de la fréquence de Nyquist.

Puisque les fréquences Ω élevées correspondront toujours à des fréquences ω inférieures à la fréquences de Nyquist, il n'y a pas de repliement spectral.


$|H_c(j\Omega)|$
$\Omega_p = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right)$
$\Omega_s = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right)$
0
Ω_p
Ω_s
Ω
$\Omega = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$
π
ω
$|H(e^{j\omega})|$
ω_p
ω_s

Annexe 2 : Structure de réalisation d'un filtre numérique

Lorsque la fonction H(z) est connue, il reste à rechercher une structure (ou configuration, ou algorithme de calcul) permettant de réaliser cette fonction de transfert donnée soit sur un ordinateur à usage général, soit au moyen d'une réalisation spécifique. Il existe une infinité de structures permettant de réaliser une même fonction de transfert H(z). Cependant si deux structures sont équivalentes lorsqu'on idéalise les opérations arithmétiques effectuées par le système discret (on suppose une précision infinie), elles peuvent différer lorsque l'on introduit les effets de quantification (précision finie des opérations arithmétiques).

Une structure est l'assemblage des trois composants suivants :

- Le sommateur
- Le multiplicateur par une constante (gain a)
- Le délai (élément à mémoire) (Rappelez-vous que l'opérateur z correspond à un délai d'un échantillon.)

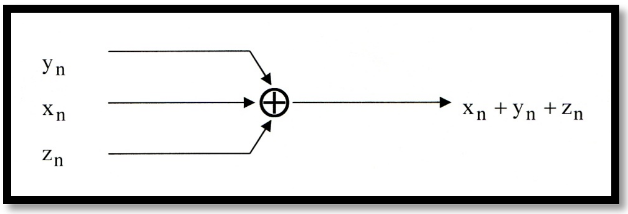


Figure 1: Le sommateur

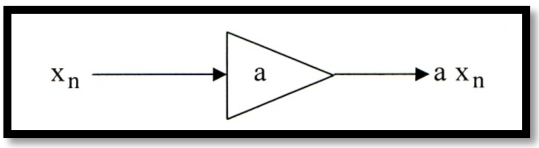


Figure 2: Le multiplieur

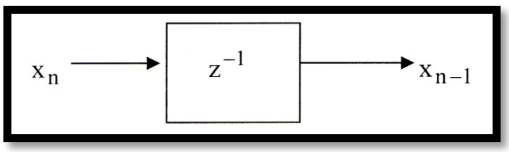


Figure 3: Le délai

Ces différents éléments peuvent ensuite être combinés, avec plusieurs étages afin de former le filtre numérique.

Les filtres numériques sont divisées en 2 catégories : les filtres FIR (finite impulse response) et IIR (infinite impulse response, càd récursif). Un filtre FIR peut fournir une réponse en phase linéaire jusqu'à la fréquence de coupure mais nécessite un ordre plus élevé qu'un filtre IIR pour fournir la même atténuation. On préfèrera donc les filtres IIR si la linéarité de la réponse en phase est peu importante et que la mémoire est limitée (un ordre élevé impliquant de stocker plus de coefficients et d'échantillons précédents). Attention qu'un filtre IIR, à cause de la récursivité, peut être instable s'il est mal dimensionné Les filtres numériques sont généralement complexes à réaliser en plus d'ajouter de la latence au signal, à cause de la conversion A/N, des filtres anti-aliasing requis et des délais dans leur implémentation. Un filtre FIR d'ordre élevé ne serait donc pas un bon choix pour un système boucle fermée en temps réel.

Exemple de synthèse d'un filtre IIR (récursif) :

$$y[n] = a_1 \cdot y[n-1] + a_2 \cdot y[n-2] + b \cdot x[n]$$

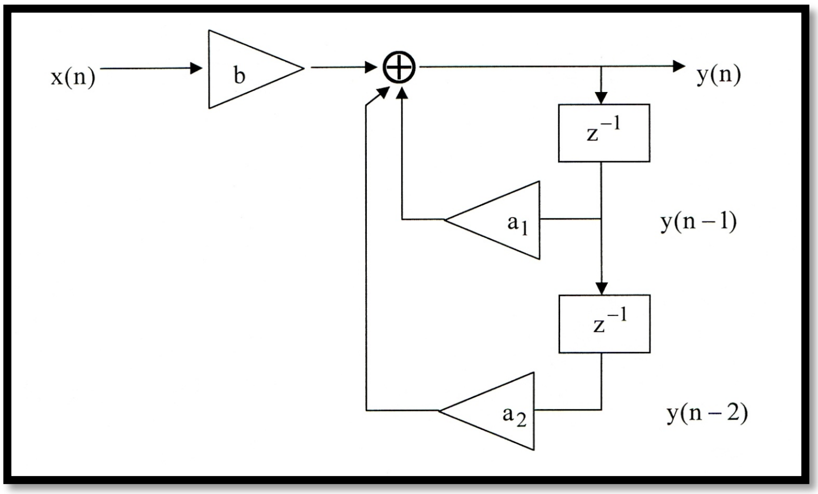


Figure 4: Exemple de synthèse

Par la transformée en z de ce filtre, on obtient :

$$Y(z) = a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) + bX(z)$$

On en déduit la transformée en z de la fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{b}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

En pratique, la formule générale d'un filtre récursif sera toujours de la forme :

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} a_k \, y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k \, x(n-k)$$

Et la transformée en z de la fonction de transfert sera donc :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \, z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k \, z^{-k}}$$

Avec M l'ordre de « feedforward » et N l'ordre de « feedback ». L'ordre du filtre étant égal à max(M,N).