

Table des matières

1	Modélisation dynamique	1
1.1	Exercice 1	1
1.1.1	Pôles réels	1
1.1.2	S'il y a des pôles complexes conjugués	2
1.2	Exercice 2	4
2	Introduction à la régulation	5
2.1	Exercice	5
2.1.1	Régulateur proportionnel $D(p) = k_p$	5
2.1.2	Régulateur proportionnel et intégrateur $D(p) = k_p + \frac{k_i}{p}$	5
2.1.3	Régulateur proportionnel, intégrateur et dérivateur $D(p) =$ $k_p + \frac{k_i}{p} + \frac{k_d p}{pT_f + 1}$	6
3	Analyse et conception de régulateurs via le lieu d'Evans	7
3.1	Exercice 1	7
3.2	Exercice 2	7
4	Analyse par les méthodes harmoniques	11
4.1	Exercice 1	11
4.2	Exercice 2	12
5	Conception de régulateurs par les méthodes harmoniques et représentation en variables d'état	15
5.1	Exercice 1	15
5.2	Exercice 2	16

Séance 1

Modélisation dynamique

1.1 Exercice 1

Soit le système décrit par :

$$H(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{-1}{mp^2 + bp + k_s} \quad (1.1)$$

qui possède des pôles en :

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk_s}}{2m} \quad (1.2)$$

La réponse indicielle est définie par :

$$S(p) = H(p) \frac{1}{p} \quad (1.3)$$

1.1.1 Pôles réels

Pente en $t \rightarrow 0$: Théorème de la valeur initiale de $\frac{ds}{dt}(t)$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{ds}{dt}(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p[pS(p)] = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{-1}{mp^2 + bp + k_s} = 0 \quad (1.4)$$

Valeur asymptotique : Théorème de la valeur finale de $s(t)$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-1}{mp^2 + bp + k_s} = \frac{-1}{k_s} \quad (1.5)$$

Temps d'établissement t_s : Les pôles étant réels, le système du second ordre est équivalent à la mise en série des deux systèmes du premier ordre $\frac{1}{p+p_1}$ et $\frac{1}{p+p_2}$. Dès lors, $t_{s2} < t_{s1} < t_s < t_{s1} + t_{s2}$ où t_{s1} et t_{s2} correspondent aux temps d'établissement des deux systèmes $\frac{1}{p+p_1}$ et $\frac{1}{p+p_2}$. Note : Pour un système du premier ordre, $t_s = 4.6/\sigma$.

Temps de montée t_r : Pour la même raison, $t_{r2} < t_{r1} < t_r < t_{r1} + t_{r2}$ où t_{r1} et t_{r2} correspondent aux temps de montée des deux systèmes $\frac{1}{p+p_1}$ et $\frac{1}{p+p_2}$. Note : Pour un système du premier ordre, $t_r = 2.2/\sigma$.

Note : Pas de dépassement indicielle ou d'oscillation.

Application numérique

$$\begin{aligned} m &= 1200 \\ b &= 50000 \\ k_s &= 500000 \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} p_1 &= -16.6667 \\ p_2 &= -25 \\ t_{s1} &= 0.276s \\ t_{s2} &= 0.184s \\ t_s &\in [0.28s, 0.46s] \\ t_{r1} &= 0.13s \\ t_{r2} &= 0.088s \\ t_r &\in [0.13s, 0.218s] \end{aligned}$$

1.1.2 S'il y a des pôles complexes conjugués

$$H(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{-1}{mp^2 + bp + k_s} = \frac{A_0 \omega_n^2}{p^2 + 2\zeta \omega_n p + \omega_n^2} \quad (1.6)$$

avec :

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{k_s}{m}} \\ \zeta &= \frac{b}{2m\omega_n} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Pente en $t \rightarrow 0$: idem

Valeur asymptotique : idem

Temps d'établissement t_s : $t_s = \frac{4.6}{\zeta \omega_n}$

Temps de montée t_r : Si $\zeta \approx 0.5$ $t_r = 1.8/\omega_n$.

Dépassement indicielle :

$$\begin{aligned} \text{— Instant du maximum } t_p &= \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \\ \text{— Amplitude } M_p &= e^{-\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \end{aligned}$$

Application numérique

$$\begin{aligned} m &= 1200 \\ b &= 5000 \\ k_s &= 500000 \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \omega_n &= 20.41 \text{ rad/s} \\ \zeta &= 0.1 \\ t_s &= 2.25s \\ t_r &\approx 88ms \\ t_p &= 0.15s \\ M_p &= 0.73 \end{aligned}$$

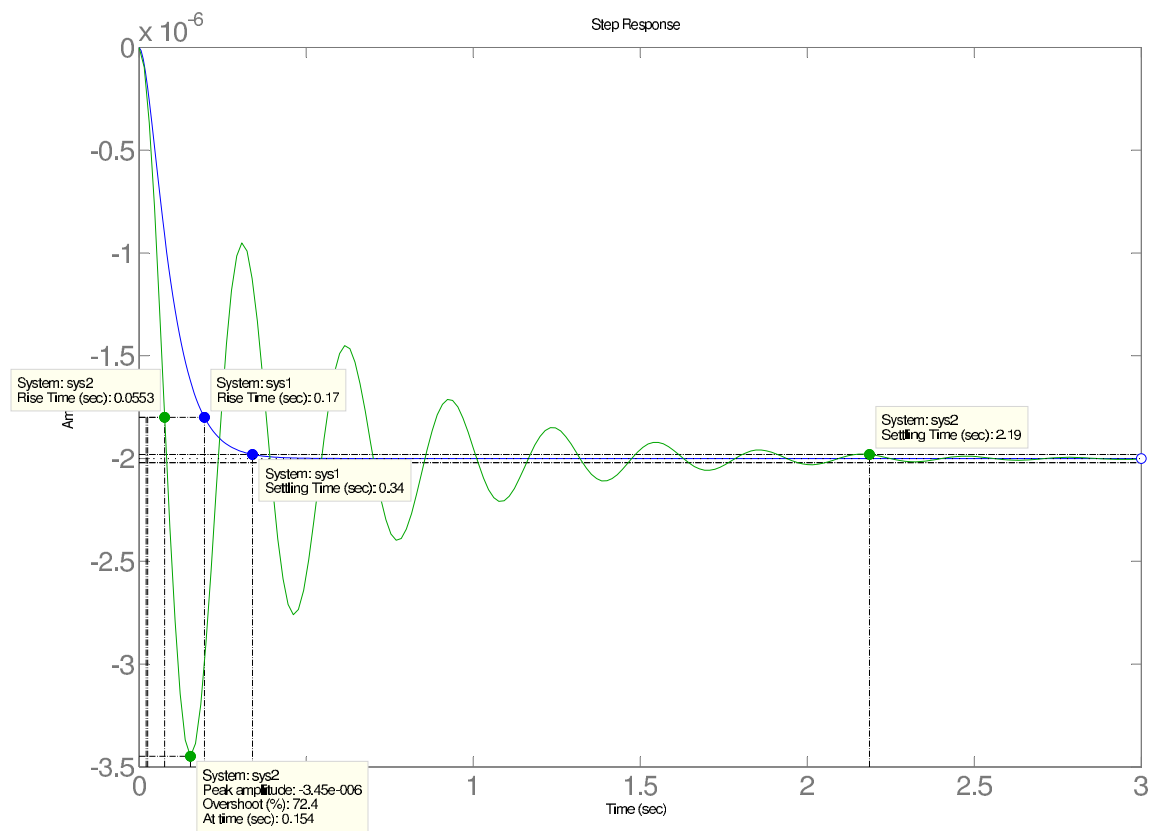


FIGURE 1.1 – Réponses indicielles des amortisseurs de voitures

1.2 Exercice 2

Soit le point de fonctionnement (u_0, v_0) et le système non linéaire défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{1}{m}(\lambda u - \beta x^2) \\ v &= x \end{cases} \quad (1.8)$$

Avec comme état x , la vitesse de la voiture v . Il faut pour obtenir un modèle linéaire développer x^2 autour du point de fonctionnement :

$$x^2 \approx x_0^2 + 2x_0(x - x_0) \quad (1.9)$$

Si on remplace dans (1.8) on trouve (1.10) avec x_0 constant.

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{1}{m}(\lambda u - \beta x_0^2 - 2\beta x_0(x - x_0)) \\ v &= x \end{cases} \quad (1.10)$$

En opérant le changement de variable $\tilde{u} = u - u_0$, $\tilde{v} = v - v_0$ et $\tilde{x} = x - x_0$, il vient

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= \frac{1}{m}(\lambda \tilde{u} + \lambda u_0 - \beta x_0^2 - 2\beta x_0 \tilde{x}) \\ \tilde{v} &= \tilde{x} \end{cases} \quad (1.11)$$

Car $\dot{x}_0 = 0$ et $v = x$ donc $v_0 = x_0$. Or par définition du point de fonctionnement :

$$\lambda u_0 - \beta x_0^2 = 0 \quad (1.12)$$

On obtient :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{v} &= C\tilde{x} + D\tilde{u} \end{cases} \quad (1.13)$$

Avec

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2\beta v_0}{m} & ; & & B &= \frac{\lambda}{m} \\ C &= 1 & ; & & D &= 0 \end{aligned}$$

Séance 2

Introduction à la régulation

2.1 Exercice

Soit un système réglé modélisé par $G(p) = \frac{A_0}{(p\tau_1+1)(p\tau_2+1)}$ associé à un régulateur de transmittance isomorphe $D(p)$ dans une boucle fermée à rétroaction unitaire. La grandeur réglée peut être calculée vis-à-vis de la référence $y^*(t)$ et de la perturbation $w(t)$ agissant sur l'entrée du système réglé par la relation :

$$y(t) = \frac{G(p)D(p)}{1 + G(p)D(p)}y^*(t) + \frac{G(p)}{1 + G(p)D(p)}w(t) \quad (2.1)$$

L'erreur de réglage $\varepsilon(t) = y^*(t) - y(t)$ peut donc être calculée via :

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{1 + G(p)D(p)}y^*(t) - \frac{G(p)}{1 + G(p)D(p)}w(t) \quad (2.2)$$

Pour autant que la boucle fermée soit stable, l'erreur statique vis-à-vis d'une référence en échelon d'amplitude T^* est donnée par (2.3) ou d'une perturbation en échelon d'amplitude A par (2.4).

$$\varepsilon_\infty^* = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{T^*}{1 + G(p)D(p)} \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_\infty^w = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-AG(p)}{1 + G(p)D(p)} \quad (2.4)$$

2.1.1 Régulateur proportionnel $D(p) = k_p$

$$\begin{cases} \varepsilon_s^* &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{T^*(p\tau_1+1)(p\tau_2+1)}{(p\tau_1+1)(p\tau_2+1)+A_0k_p} &= \frac{T^*}{1+A_0k_p} \\ \varepsilon_s^w &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-AA_0}{(p\tau_1+1)(p\tau_2+1)+A_0k_p} &= \frac{-AA_0}{1+A_0k_p} \end{cases} \quad (2.5)$$

2.1.2 Régulateur proportionnel et intégrateur $D(p) = k_p + \frac{k_i}{p}$

$$\begin{cases} \varepsilon_s^* &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{T^*p(p\tau_1+1)(p\tau_2+1)}{p(p\tau_1+1)(p\tau_2+1)+A_0(k_p p + k_i)} &= 0 \\ \varepsilon_s^w &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-AA_0p}{p(p\tau_1+1)(p\tau_2+1)+A_0(k_p p + k_i)} &= 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

2.1.3 Régulateur proportionnel, intégrateur et dérivateur $D(p) = k_p + \frac{k_i}{p} + \frac{k_d p}{pT_f + 1}$

$$\begin{cases} \varepsilon_s^* &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{T^* p(p\tau_1 + 1)(p\tau_2 + 1)(pT_f + 1)}{p(p\tau_1 + 1)(p\tau_2 + 1)(pT_f + 1) + A_0(k_p p(pT_f + 1) + k_i(pT_f + 1) + k_d)} &= 0 \\ \varepsilon_s^w &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-AA_0 p(pT_f + 1)}{p(p\tau_1 + 1)(p\tau_2 + 1)(pT_f + 1) + A_0(k_p p(pT_f + 1) + k_i(pT_f + 1) + k_d)} &= 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Séance 3

Analyse et conception de régulateurs via le lieu d'Evans

3.1 Exercice 1

Pour le lieu d'Evans de l'échangeur de chaleur décrit par la transmittance (3.1) asservi par un régulateur proportionnel de gain k_p , la partie de l'axe réel appartenant au lieu pour $K_{reg} > 0$ est le segment $] -1/\tau_2, -1/\tau_1[$ ($\tau_2 < \tau_1$). Les directions asymptotique sont de $\pm 90^\circ$. Le lieu d'Evans est fourni à la figure 3.1. Sur cette figure le point $-\sigma_0$ est trouvé au milieu du segment $] -1/\tau_2, -1/\tau_1[$ à savoir en $-\frac{\tau_2 + \tau_1}{2\tau_1\tau_2}$.

$$G(p) = \frac{A_0}{(p\tau_1 + 1)(p\tau_2 + 1)} \quad (3.1)$$

3.2 Exercice 2

Le cahier des charges dynamique pour la régulation de l'attitude du satellite Hubble est fourni en terme de facteur d'amortissement et de pulsation naturelle des pôles dominants au tableau 3.1. La position des pôles doit être à l'intérieur du secteur hachuré de la figure 3.2.

pulsation naturelle	$\omega_n > 1s^{-1}$
Facteur d'amortissement	$\zeta > 0.6$

TABLE 3.1 – Cahier des charges dynamique pour l'attitude de Hubble

Pour placer les deux pôles dominants de la boucle fermée en $p_{1,2} = -0.6 \pm 0.8j$ (qui appartient au secteur défini à la figure 3.2), il convient de déterminer la position du pôle p_c via le critère de l'argument. Il faut donc calculer l'argument de la boucle ouverte aux pôles $p_{1,2}$. On écrit la boucle ouverte $BO(p)$ sous la forme :

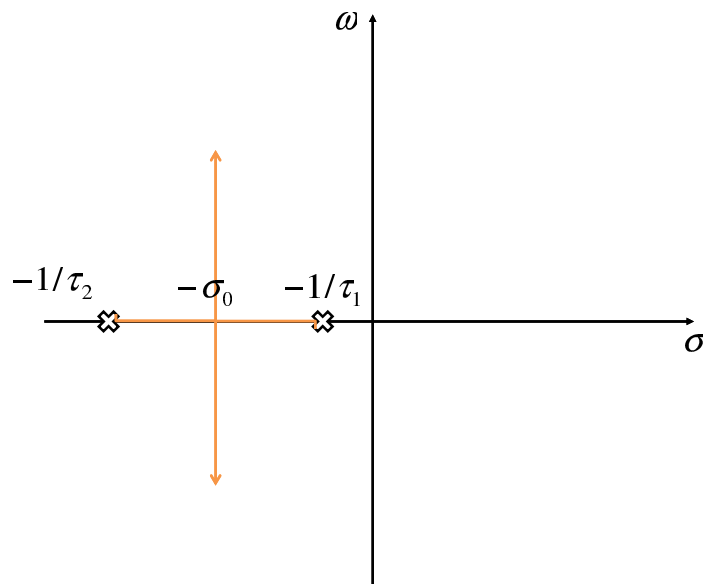


FIGURE 3.1 – Lieu d'Evans de l'échangeur de chaleur asservi par un régulateur proportionnel

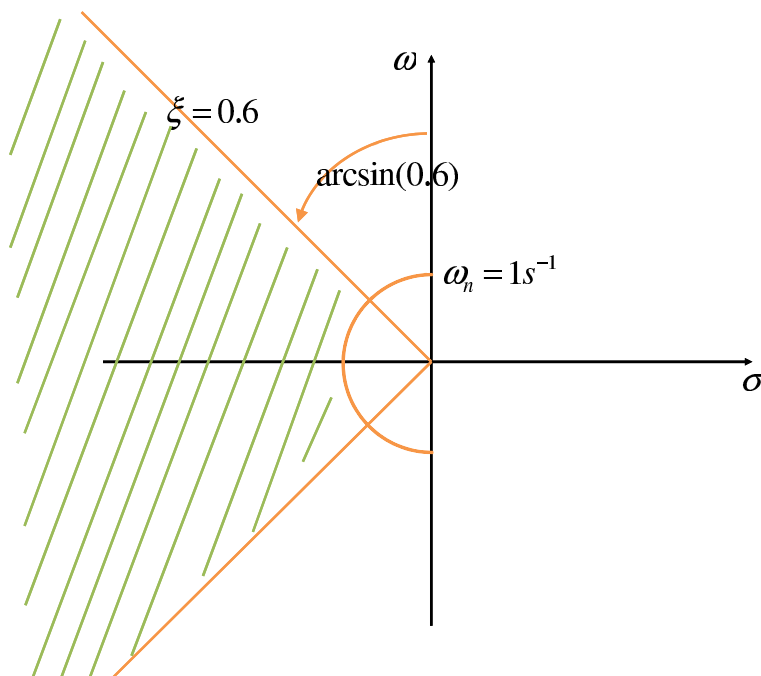


FIGURE 3.2 – Cahier des charges dynamique pour le satellite Hubble

$$\begin{aligned}
BO(p) &= KL(p) \\
&\text{avec} \\
K &= \frac{k_c}{I} \\
L(p) &= \frac{p+z_c}{(p+p_c)(pT_f+1)p^2}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

où $L(p)$ est bien sous forme monique. Il vient que l'argument de la boucle ouverte en p_1

$$\begin{aligned}
arg(L(p_1)) &= arg\left(\frac{p_1+0.4}{(p_1+p_c)(p_1T_f+1)p_1^2}\right) \\
&= arg(p_1+0.4) - arg(p_1+p_c) - arg(p_1T_f+1) - 2arg(p_1) \\
&= 104^\circ - arg(p_1+p_c) - 5^\circ - 254^\circ \\
&= -155^\circ - arg(p_1+p_c) \\
&= -180^\circ
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Il faut donc que $\theta = arg(p_1+p_c) \approx 25^\circ$, or comme p_c est réel :

$$p_c = \frac{0.8}{tg(\theta)} + 0.6 \approx 2.28 \tag{3.4}$$

La gain k_c correspondant pour avoir les pôles en p_1 est donné par la règle du module :

$$k_c = I \frac{|p_1+p_c||p_1T_f+1||p_1|^2}{|p_1+z_c|} \approx 5.97 \tag{3.5}$$

Comme on peut voir sur le lieu d'Evans du satellite Hubble muni de son régulateur à avance de phase (voir figure 3.3), la marge de gain est de $\approx 20dB$.

Note : N'oubliez pas d'annoter sur le lieu d'Evans les flèches indiquant l'évolution des pôles de la boucle fermée pour K croissant.

A titre d'exercice additionnel, déterminez les unités du gain k_c obtenu à l'équation (3.5) et justifiez pourquoi uniquement le gain k_c positif a été étudié.

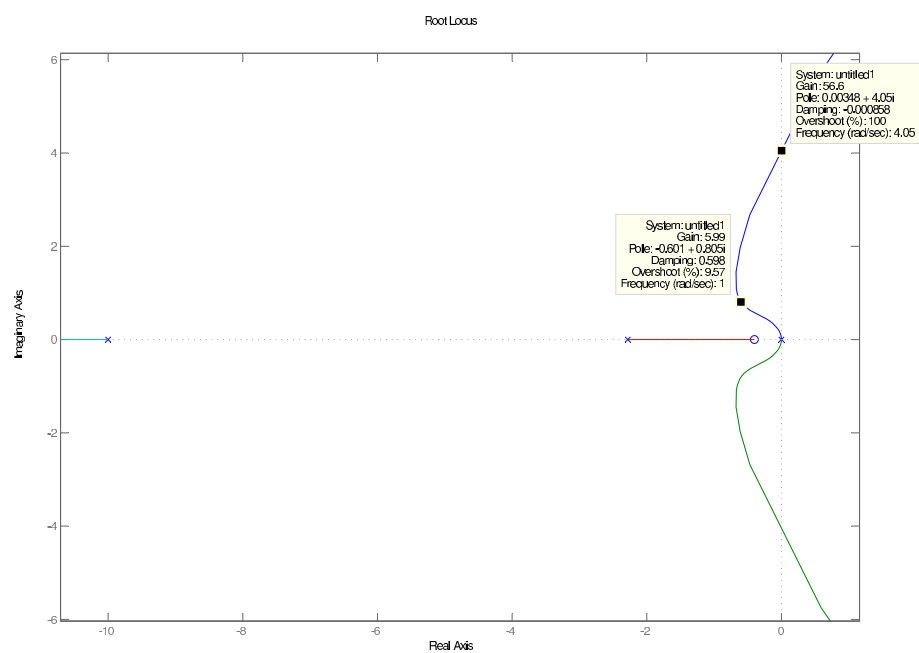


FIGURE 3.3 – Lieu d'Evans du satellite Hubble asservi par un régulateur à avance de phase

Séance 4

Analyse par les méthodes harmoniques

4.1 Exercice 1

Le tracé asymptotique ainsi que le tracé réel des courbes de Bode de l'échangeur de chaleur est fourni à la figure 4.1. Pour les valeurs de $\omega \in [0.2, 1]$, la pente du tracé asymptotique du gain est de $20dB/dec$ alors que pour les valeurs $\omega > 1$ elle est de $40dB/dec$.

La transmittance isochrone de l'échangeur de chaleur est donnée par :

$$G(j\omega) = \frac{20}{(5\omega j + 1)(\omega j + 1)} = \frac{20 - 100\omega^2}{|5\omega j + 1|^2 |\omega j + 1|^2} + \frac{-120\omega}{|5\omega j + 1|^2 |\omega j + 1|^2} j \quad (4.1)$$

La réponse d'un tel système a une entrée sinusoïdale appliquée depuis $t \rightarrow -\infty$ $u(t) = A \sin(\omega t)$ est calculé via :

$$y(t) = A |G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg(G(j\omega))) \quad (4.2)$$

où $\arg(G(j\omega)) = -\arctg(5\omega) - \arctg(\omega)$ et $|G(j\omega)| = 20/(\sqrt{(25\omega^2 + 1)(\omega^2 + 1)})$. Pour $\omega = 1 \text{ rad/s}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \arg(G(j)) &= \text{tg}^{-1}(-120/(20 - 100)) \\ &= -123.69^\circ \\ |G(j)| &= 20/(\sqrt{52}) \\ &= 8.86 \text{ dB} \\ y(t) &= 2.77 \sin(t - 2.16 \text{ rad}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Le tracé asymptotique nous donne $\arg(\tilde{G}(j)) = -180^\circ$ et $|\tilde{G}(j)| = 12 \text{ dB}$. Cette différence provient du caractère asymptotique de \tilde{G} par rapport à G qui est valable pour des pulsations éloignées des pulsations liées au pôles et zéros de $G(p)$.

Le tracé de la courbe de Nyquist déduite des courbes de Bode est fourni à la figure 4.2. Il s'agit d'une représentation polaire de la transmittance isochrone. Pour le point correspondant à $\omega = 1 \text{ rad/s}$, l'équation (4.1) fournit le

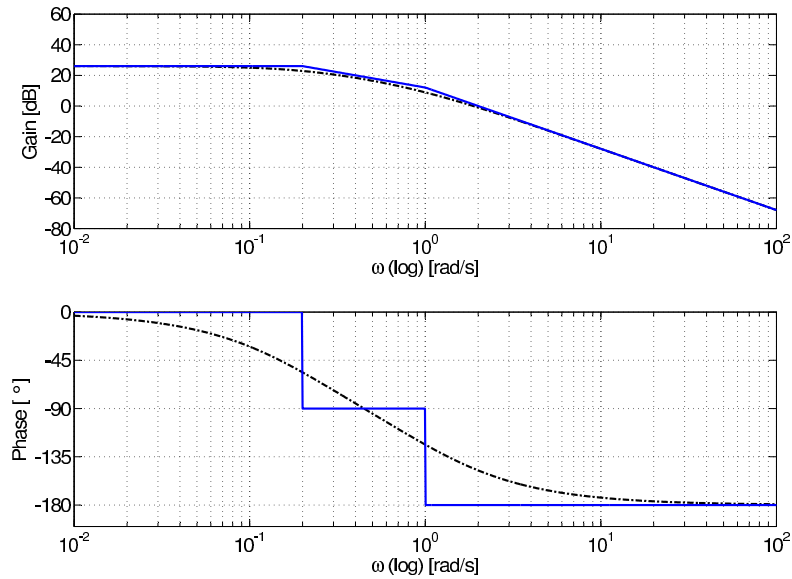


FIGURE 4.1 – Courbes de Bode de l'échangeur de chaleur (bleu : tracé asymptotique, noire : tracé réel)

point $(-1.538, -2.308)$ du plan de Gauss. Afin de compléter la courbe il faut y ajouter le symétrique par rapport à l'axe réel en inversant le sens de parcours.

4.2 Exercice 2

La boucle ouverte est donné par (4.4) et le tracé des courbes de Bode est représenté à la figure 4.3. Pour le tracé asymptotique, les pentes sont de -40,-20,-40,-60 dB/dec respectivement dans les intervalles $\omega \in [0, 0.4[,]0.4, 2.4[,]2.4, 10[,]10, \infty]$. Les marges de gain et de phase sont respectivement de 20.8dB et de 40.3°

$$BO(j\omega) = 6 \frac{j\omega + 0.4}{j\omega + 2.4} \frac{1}{-2.8\omega^2} \frac{1}{0.1j\omega + 1} \quad (4.4)$$

Le tracé de la courbe de Nyquist déduite des courbes de Bode est fourni à la figure 4.4.

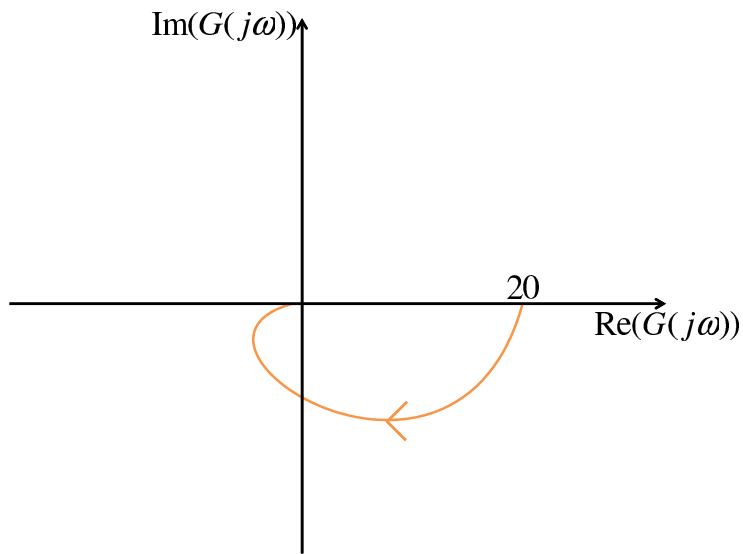


FIGURE 4.2 – Courbe de Nyquist incomplète de l'échangeur de chaleur

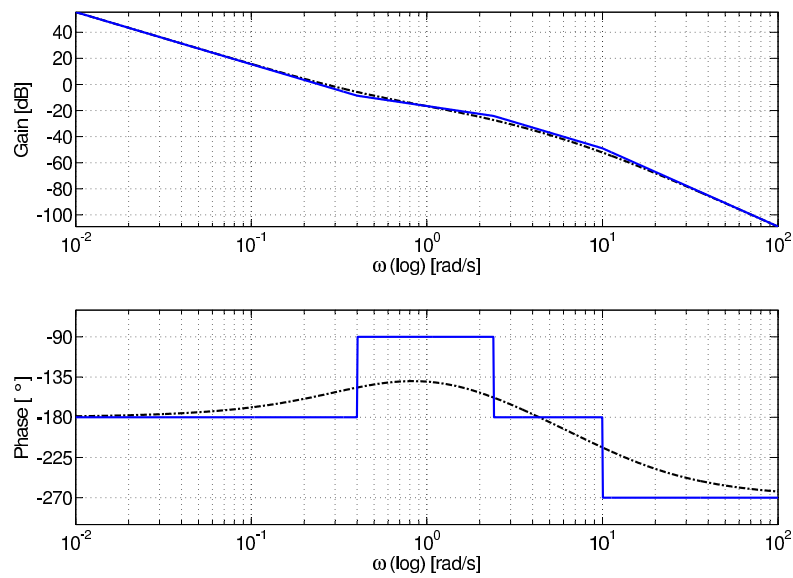


FIGURE 4.3 – Courbe de Bode pour le satellite Hubble muni de son régulateur en boucle ouverte

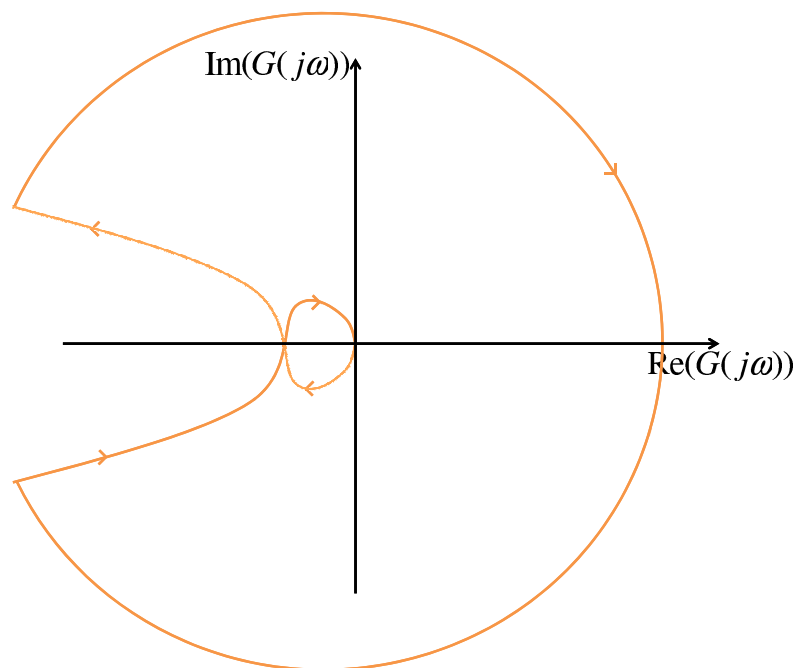


FIGURE 4.4 – Courbe de Nyquist complète de la boucle ouverte construite pour régler le satellite Hubble

Séance 5

Conception de régulateurs par les méthodes harmoniques et représentation en variables d'état

5.1 Exercice 1

La concentration de sortie du mélangeur modélisé par (5.1) est asservie au moyen d'un régulateur à effet proportionnel et intégral (équation (5.2) ou (5.3)).

$$G_{ss} = \begin{cases} \dot{x}_1 &= -\theta x_1 + \theta C_e \\ C_s &= x_1 \end{cases} \quad (5.1)$$

avec x_1 la concentration dans la cuve et $\theta = \frac{Q}{hs}$

$$D_{PI}(p) = k_p(1 + \frac{1}{pT_i}) \quad (5.2)$$

$$D_{ss} = \begin{cases} \dot{x} &= 1/T_i u \\ y &= k_p x + k_p u \end{cases} \quad (5.3)$$

La mise en série du régulateur et du système réglé s'obtient en combinant les équation (5.1) et (5.3) en y incluant la relation $y = C_e$ qui décrit la mise en série. On obtient dès lors :

$$BO_{ss} = \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + Bu \\ C_s &= C\mathbf{x} \end{cases} \quad (5.4)$$

avec $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -\theta & \theta k_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \theta k_p \\ 1/T_i \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres de la matrice A donnent $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -\theta$. Elles sont associées au vecteurs propres $v_1 = (1, 1/k_p)$ et $v_2 = (1, 0)$. La matrice de transformation est dès lors $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/k_p & 0 \end{pmatrix}$. On obtient donc par transformation de similitude :

$$BO_{ss} = \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_d &= \tilde{A}\mathbf{x}_d + \tilde{B}u \\ C_s &= \tilde{C}\mathbf{x}_d \end{cases} \quad (5.5)$$

avec $\mathbf{x}_d = \begin{pmatrix} k_p x \\ x_1 - k_p x \end{pmatrix}$ $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\theta \end{pmatrix}$, $\tilde{B} = \begin{pmatrix} k_p/T_i \\ \theta k_p - k_p/T_i \end{pmatrix}$ et $\tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dans le cas $T_i = 1/\theta$, l'état $x_1 - k_p x$ devient ingouvernable. Il s'agit de la seule possibilité de perte de gouvernabilité ou d'observabilité. Cet état est associé à la valeur propre $-\theta < 0$, et peut donc être rendu ingouvernable (ou inobservable) sans introduire de problème a posteriori car il va dans tous les cas rejoindre sa valeur d'équilibre ($=0$) et y rester. Par contre s'il avait été associé à une valeur propre positive, il divergerait vers $\pm\infty$ sans aucune action possible. Cette état serait donc instabilisable.

En écrivant le mélangeur sous la forme d'une fonction de transfert on obtient $\frac{\theta}{p+\theta}$. La mise en série avec le régulateur avec $T_i = 1/\theta$ décrit par (5.2) mène à :

$$BO_{tf}(p) = k_p \frac{p+\theta}{p} \frac{\theta}{p+\theta} \quad (5.6)$$

On remarque donc que la condition $T_i = 1/\theta$ aboutit à une simplification entre le pôle du mélangeur et le zéro du régulateur.

5.2 Exercice 2

Les différentes hypothèses mènent à une boucle ouverte décrite par :

$$BO_{tf}(j\omega) = k_p \frac{0.5e^{-1.5j\omega}}{j\omega} \quad (5.7)$$

$$\begin{cases} |BO_{tf}(j\omega)| &= k_p \frac{0.5}{\omega} \\ \arg(BO_{tf}(j\omega)) &= -\pi/2 - 1.5\omega \end{cases} \quad (5.8)$$

Pour garantir la marge de gain de 6dB, il faut :

$$\begin{cases} 0.5 &= k_p \frac{0.5}{\omega_{180}} &\rightarrow k_p &= \omega_{180} = \pi/3 \\ -\pi &= -\pi/2 - 1.5\omega_{180} &\rightarrow \omega_{180} &= \pi/3 \end{cases} \quad (5.9)$$

Pour garantir la marge de phase de 60° , il faut :

$$\begin{cases} 1 &= k_p \frac{0.5}{\omega_c} &\rightarrow k_p &= 2\omega_c = 2\pi/9 \\ -2\pi/3 &= -\pi/2 - 1.5\omega_c &\rightarrow \omega_c &= \pi/9 \end{cases} \quad (5.10)$$

k_p	M_G	M_ϕ
$\pi/3$	6dB	45°
$2\pi/9$	9.54dB	60°

TABLE 5.1 – Robustesse de la boucle fermée pour les 2 cas envisagés

On peut conclure en examinant le tableau 5.1 que seul le cas $k_p = 2\pi/9$ remplit le cahier des charges au niveau de la marge de gain et de la marge de phase.