Ananum notes 23

Chap 1

virgules flottantes

$\pm O.\, d_1 \bar{d_2} \ldots d_t.\, \beta^e = \pm \beta^e \sum ti = 1 \frac{d_i}{\beta^i}$

erreur d'arrondi

u: l'unité d'arrondi
$u := \frac{1}{2}\beta^{1-t} \geq \frac{|fl(x)-x|}{|x|}$

erreur absolue: $\epsilon_{abs} = |\widehat{x} - x|$
erreur relative(pour x $\neq$ 0): $\epsilon_{rel} = \frac{|\widehat{x}-x|}{|x|}$

en *double* (64bit): $u \simeq 1.1 * 10^{-16}$

Conditionnement

stabilité directe
en x s'il exite C_1, $C_2 \geq 1$ tq:
$||\hat{y} - y|| \leq C_1 ||f(x + \delta x) - f(x)||$ qu'on peut diviser par $||y||$ à gauche et $||f(x)||$ à droite
pour au moins un δx tq $||\delta x||/||x|| \leq C_2 u$

le **conditionnement**:
$\kappa(x) := \lim_{\epsilon->0}(\sup_{||\delta x|| \leq \epsilon ||x||}(\frac{||f(x+\delta x)-f(x)||/||f(x)||}{||\delta x||/||x||}))$
le **conditionnement** est le **pire des facteurs** par lequel i lfaut multiplier les erreurs relatives dans x pour obtenir les erreurs relatives dans $f(x)$ (avec erreurs -> 0)

$\kappa(x) = \sup \frac{\text{erreur relative résultat}}{\text{erreur relative données}}$

- conditionnement ne dépend pas de l'algo, mais bien du problème considéré (via $y = f(x)$)
- si $\kappa(x) >> 1$ prob mal conditionné
- si f(x) différenciable (et f'(x) matr Jacobienne):
  $\kappa(x) = \frac{||f'(x)||.||x||}{||f(x)||}$

erreur inverse Δx d'un algo $\hat{y}$:
tq $f(x + \Delta x) = \hat{y}$

Chap 2

Sys linéaire $Ax = b$

Conditionnement sys liénaire

> **cas 1**
>
> perturbations δb de b
> $\kappa = \sup_{||\delta b||}(\frac{||\delta x||/||x||}{||\delta b||/||b||}) \leq \frac{||A^{-1}||.||b||}{||x||} = \frac{||A^{-1}||.||Ax||}{||x||} \leq ||A^{-1}||.\,||A||$
>
> **cas 2**
>
> perturbations δA de A
> $\kappa = \sup_{||\delta A||}(\frac{||\delta x||/||x||}{||\delta A||/||A||}) \leq ||A^{-1}||.\,||A||$

erreurs dans les données A,b s'un sys linéaire sont amplifiées par (au plus):
$\kappa(A) := ||A^{-1}||.\,||A||$
$\kappa(A)$: conditionnement de la matrice A

en Octave: `cond`

Factorisation LU

$LUx = b$ où $Ux = y$
(par ex: $L_2L_1Ax = L_2L_1b$ où en fait $L_2L_1A = U$ => $A = LU$)

```
^x = U\(L\b)
```

Algo Octave:

```
function [L U] = factLU (A)
    n = size(A, 1); # ordre de la matrice (plutot que length(A))
    for k = 1:n
        for j = k:n
        # on construit ligne par ligne
            U(k,j) = A(k,j);
        endfor
        L(k,k) = 1;
        for i = k+1:n
            L(i,k) = A(i,k)/A(k,k);
            # on cree les coeff de l'elimination de Gauss (dans la
premiere colonne quand k vaut 1)
        endfor
        for i = k+a:n
            for j = k+1:n
                A(i,j) = A(i,j) - ( L(i,k) * A(k,j) );
            endfor
        endfor
    endfor
endfunction
```

puis on fait

```
A=...;
[L U] = factLU(A)
x = U\(L\b) # moyen mémo ULB, attention parantheses
```

- coût LU: $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ flops
- si fact LU existe, elle est **unique**
- existe **pas toujours** pour matrices régulières
- **pas stable** (alors on va faire avec pivot => PALU)

Factorisation PALU

$PA = LU$

- même coût que LU
- **existe** pour toute matrice régulière
- réputée **stable en pratique**

calcul du dét(A)

inversion matricielle

Algo Octave:

```
function [L U P] = factPALU (A)
    #n = size(A,1);
    P1 = eye(4);
    P2 = eye(4);
    P3 = eye(4); # ? 3 matrices P car A d'ordre 4??
    U = A; # on pourrait juste tout faire avec A et à la fin mettre U=A

    P1([1,4],:) = P1([4,1],:); % on switch les LIGNES 1 et 4 de P1
    # ^ (change direct les deux lignes)

    U = P1*U;

    #pour les L on va remplacer les éléments de chaque colonne, qui sont
    #en dessous de la diagonale

    # construction de L1
    L1 = eye(4);
    L1([2:4],1) = -U([2:4],1)/U(1,1);
    # remplace le 2e, 3e et 4e élément de la 1e colonne de L1
    # par l'opposé du:
    # 2e, 3e et 4e élément de la première colonne de U (//ou A), divisé
par le 1e element
    # (info: ce 1e element étant donc sur la diagonale)

    U=L1*U;
    # L1 sert à faire apparaitre des zeros dans la premiere colonne
    # (elimination de gauss)

    # --- meme chose avec P2 ---
    P2([2,4],:) = P2([4,2],:); # switch lignes 2 et 4 de P2

    U=P2*U;

    #construction de L2
    L2=eye(4);
    L2([3:4],2) = -U([3:4],2)/U(2,2);
    # remplace le 3e et 4e element de la 2e colonne de L2
    # par l'opposé du:
    # 3e et 4e element de la 2e colonne de A, divisé par le 2e element
    # (info: ce 2e element étant sur la diagonale)
```

```
    U=L2*U;

    # --- meme chose avec P3 ---
    # (4e element de la 3e colonne (sous la diagonale donc))
    P3([3,4],:) = P3([4,3],:);
    U=P3*U;
    L3=eye(4);
    L3(4,3) = -U(4,3)/U(3,3); # ([4,4], ) = (4, )
    U=L3*U;

    # L = ( ... matrice identité dont les colonnes du triangle inférieur sont -Lp1 et -Lp2 et -Lp3
    Lp3 = L3;  # Lp: "L prime" (L')
    Lp2 = P3*L2*P3;
    Lp1 = P3*P2*L1*P2*P3;
    P = P3*P2*P1
    L=eye(4) # matrice identité
    # triangle inférieur sera les colonnes opposées de Lp1 Lp2 et Lp3
    L([2:4],1) = -Lp1([2:4],1);
    L([3:4],2) = -Lp2([3:4],2);
    L(4,3) = -Lp3(4,3)

    # ici U a déjà été modifié de la matrice A de départ pendant le calcul

endfunction
```

qu'on peut faire:

```
A=...;
[L U P] = factPALU(A)
# x = ?? U\(L\(P*b)) ??
```

peut aussi utiliser la func `lu()` de Octave pour vérif (`[L U P] = lu(A)`)

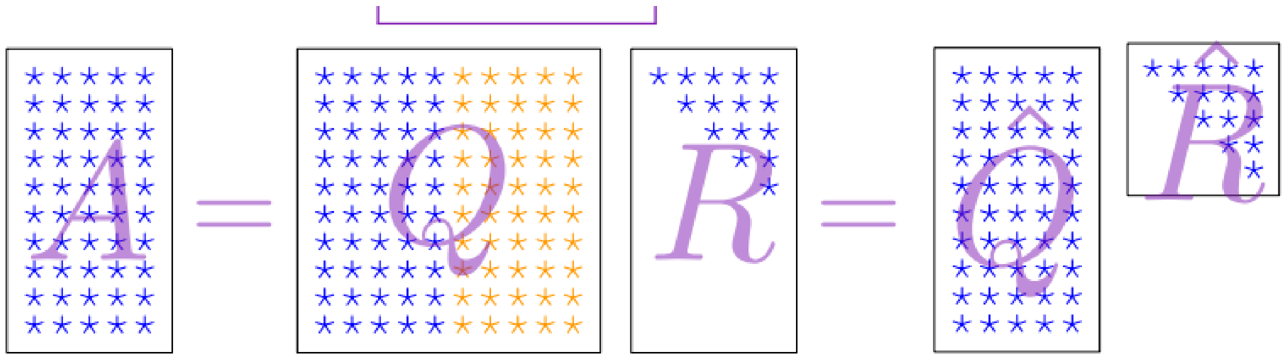
Chap 3

Factorisation QR

matrice Q orthogonale : carrée et $Q^T Q = I$

$R = (r_{ij})$ trapézoidale suéprieure si $r_{ij} = 0$ pour tout $i > j$

$A = QR$



Algo Octave:

(on peut le faire en boucle for mais pas important):

```
function [Q R] = factQR (A)
  x = A(:,1);
  x(1) = x(1) + sign(x(1))*norm(x);
  v1 = x/norm(x);
  # H = I - 2*v*transpose(v)
  A = (eye(4)-2*v1*transpose(v1))*A;
  #    ^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^=Q1
  x = A(:,2);
  x(1) = x(1) + sign(x(1))*norm(x);
  v2 = x/norm(x);
  A = (eye(4)-2*v2*transpose(v2))*A;

  x = A(:,3);
  x(1) = x(1) + sign(x(1))*norm(x);
  v3 = x/norm(x);
  A = (eye(4)-2*v3*transpose(v3))*A;

  x = A(:,4);
  x(1) = x(1) + sign(x(1))*norm(x);
  v4 = x/norm(x);
  A = (eye(4)-2*v4*transpose(v4))*A

  # Créer la matrice Q :
  #   Q = Q1*Q2*Q3
  # mais 4x4 3x3 2x2
  # Qi est en fait identité avec en bas à gauche la matrice avec les
infos
  # voir photo Q = ....
  Q = eye(4);
  Q(3:4,3:4)=(eye(2)-2*v3*transpose(v3))*Q(3:4,3:4);
  Q(2:4,2:4)=(eye(3)-2*v2*transpose(v2))*Q(2:4,2:4);
  Q(1:4,1:4)=(eye(4)-2*v1*transpose(v1))*Q(1:4,1:4)

endfunction
```

pour ensuite:

```
A=...;
[Q R] = factQR(A)
```

on peut vérifier avec `qr(A)` d'Octave (ou `qr(A,0)` pour une QR réduite)

- coût: $2n^2(m-n/3)+O(mn)$ pour une matrice A de dimensions $m \times n$

Interlude: propriétés Norme Euclidienne

?

conditionnement sys surdéterminés

?

Chap 4

Méthodes itératives pour systèmes linéaires
=> résoudre $Ax=b$ de manière itérative
(k) num d'itération
erreur $e^{(k)} = x - \widehat{x}(k)$
$Ae^{(k)} = b - Ax^{(k)}$
On peut définir $B \simeq A$ si B est plus facile à inverser

$x^{(k+1)} = x^{(k)} + e^{(k)}$ -> il faut que cette erreur tende vers 0 après les itérations
=> $x^{(k+1)} = x^{(k)} + B^{-1}(b - Ax^{(k)})$

On devra mettre un critère d'arrêt
$\frac{||r^{(k)}||}{||b||} \leq 10^{-3}$ (10^{-3} par exemple ici)

$\frac{||\widetilde{x}-x||}{||x||} \leq k(A)\frac{||r^{(k)}||}{||b||}$

méthodes stationnaires

Jacobi

> matrice tri-diagonale
> première ligne, que 1 voisin

$B_J = D_A$
(D_A: diagonale de A)

Algo Octave:

´´´matlab
function [pfait, rsurb, sol] = tp6(A, b, critdarret)

```
x = zeros(size(A,1),1);
n = size(A,1)

p = 1;
pfait = p;
residu = norm(b-A*x);
rsurb = residu/norm(b);

while rsurb > critdarret && p < 200

    x(1) = (1/A(1,1))*(b(1) - A(1,2)*x(2));

    for i = 2:n-1
        x(i)=(1/A(i,i))*(b(i) - A(i, i-1)*x(i-1) - A(i, i+1)*x(i+1));
    endfor
    %A(n,n);
    %x(n)=(1/A(n,n))*(b(n) - A(n, n-1)*x(n-1));
    x(n)=(1/A(n,n))*(b(n) - A(n, n-1)*x(n-1));

    sol = x;
    pfait = p;
    residu = norm(b-A*x);
    rsurb = residu/norm(b);

    p++;

endwhile
```

endfunction

‘‘‘

exemple de crit d'arret: 10^{-3}

Gauss-Seidel

algo: en gros pareil que Jacobi mais sans $x(0)$

$B_{GS} = L_A$
rappel: $A = L_A + U_A - D_A$
(L_A: triangulaire lower de A
U_A: triangulaire upper de A
D_A: diagonale de A)

Algo Octave:

```
function [pfait, rsurb, sol] = tp6ex2(A, b, critdarret)

    n = size(A,1);
    x = zeros(n,1)

    p = 1;
    pfait = p;
    residu = norm(b-A*x);
    rsurb = residu/norm(b);

    while rsurb > critdarret && p < 200

        x(1) =  (1/A(1,1))*(b(1) - A(1,2)*x(2))

        for i = 2:n-1
            x(i) = (1/A(i,i))*(b(i) - A(i,i-1)*x(i-1) - A(i,i+1)*x(i+1))
        endfor

        x(n) = (1/A(n,n))*(b(n) - A(n, n-1)*x(n-1));

        pfait = p;
        residu = norm(b-A*x);
        rsurb = residu/norm(b);
        sol = x;

        p++;

    endwhile

endfunction
```

exemple de crit d'arret: 10^{-3}

On peut comparer
$\frac{||\backslash{\sim}x-x||}{||x||}$ de Jacobi et Gauss-Seidel.

Minimisation d'énergie

norme énergie: $||v||_A = \sqrt{v^T Av}$

principe: choisi une direction $p \neq 0$ et que forme solution approchée à l'iter $k+1$ est

$$x^{(k+1)}(\alpha) = x^{(k)} + \alpha p$$

Trouver la valeur de α qui minimise $f(x^{(k+1)})$

$$\alpha = \frac{p^T r^{(k)}}{p^T A p}$$

/!\ système avec A symétrique définie positive
L'énergie d'un système est définie par la focntion:

$$\begin{aligned} f(x^{(k)}) := ||x - x^{(k)}||_A^k &= (x - x^{(k)})^T A (x - x^{(k)}) \\ &= x^{(k)T} A x^{(k)} - 2x^{(k)T} A x + x^T A x \\ &= x^{(k)T} A x^{(k)} - 2x^{(k)T} b + \text{cste} \end{aligned}$$

Soit une direction $p \neq 0$

$\alpha = \frac{p^T r^{(k)}}{p^T A p}$ minimise l'énergie $f(x^{(k+A)}$ de

$$x^{(k+1)}(\alpha) = x^{(k)} + \alpha p$$

Algo:

$$\dots$$

Méthode du gradient

Algo

Méthode du gradient conjugué

?

Controle de convergence

Critère d'arret

norme du résidu...

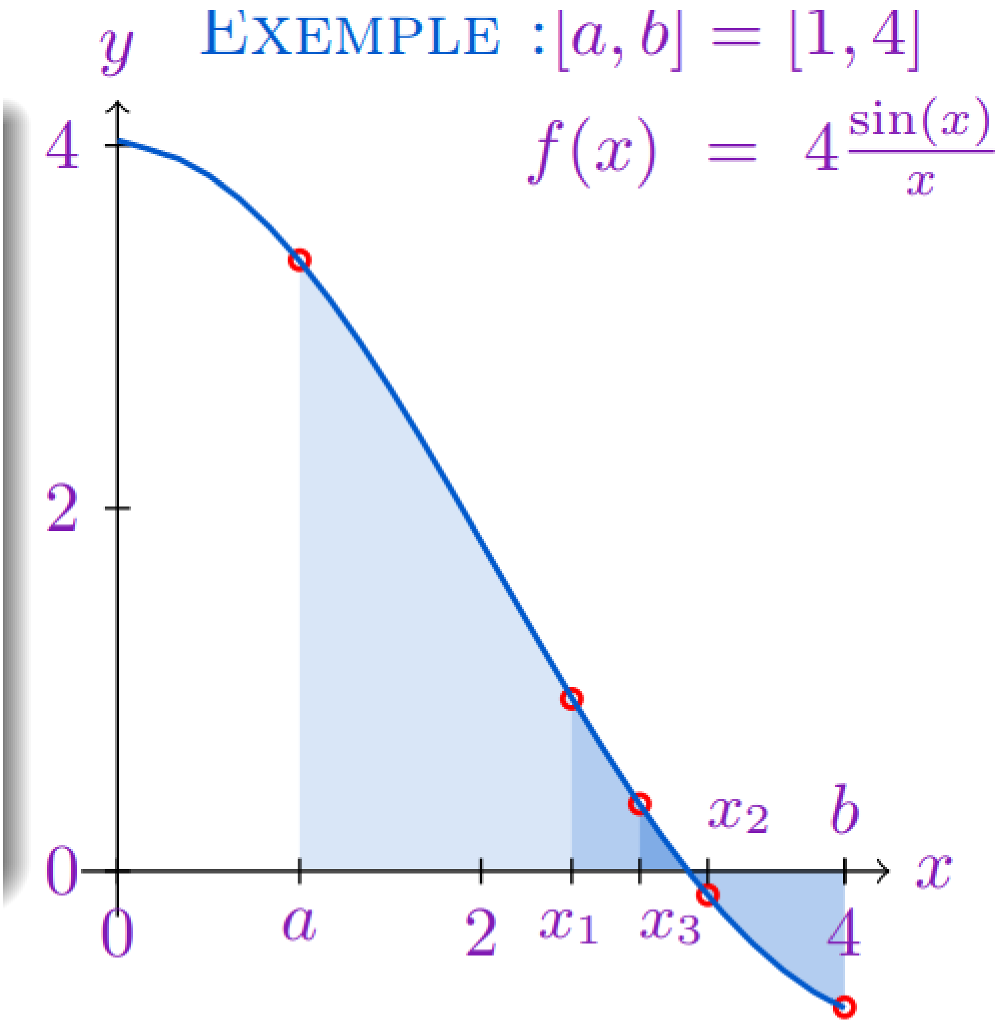
> **TP6: interpollation ?**

Chap 5

équations et sys non-linéaires

Dichotomie

critère d'arret de limite d'iterations



Algo Octave:

```
function [niterations, sol] = algodicho(f, a, b, espilon)
  niterations = 0;
  while abs(a-b) > espilon & niterations < 69
    niterations++;
    x = (a + b)/2;
    if f(a)*f(x) < 0
      b = x;
    endif
    if f(b)*f(x) < 0
      a = x;
    endif

    # critère d'arret:
    if f(x) < 10^(-6) # plutot que f(x(k)) == 0 car précision
      sol = x;
      break
    endif
  endwhile
endfunction
```

puis

```
[nbr_iter sol] = algodicho(f, a, b, epsilon) #on peut aussi passer un
critère d'arret plutot que de le hardcoder
```

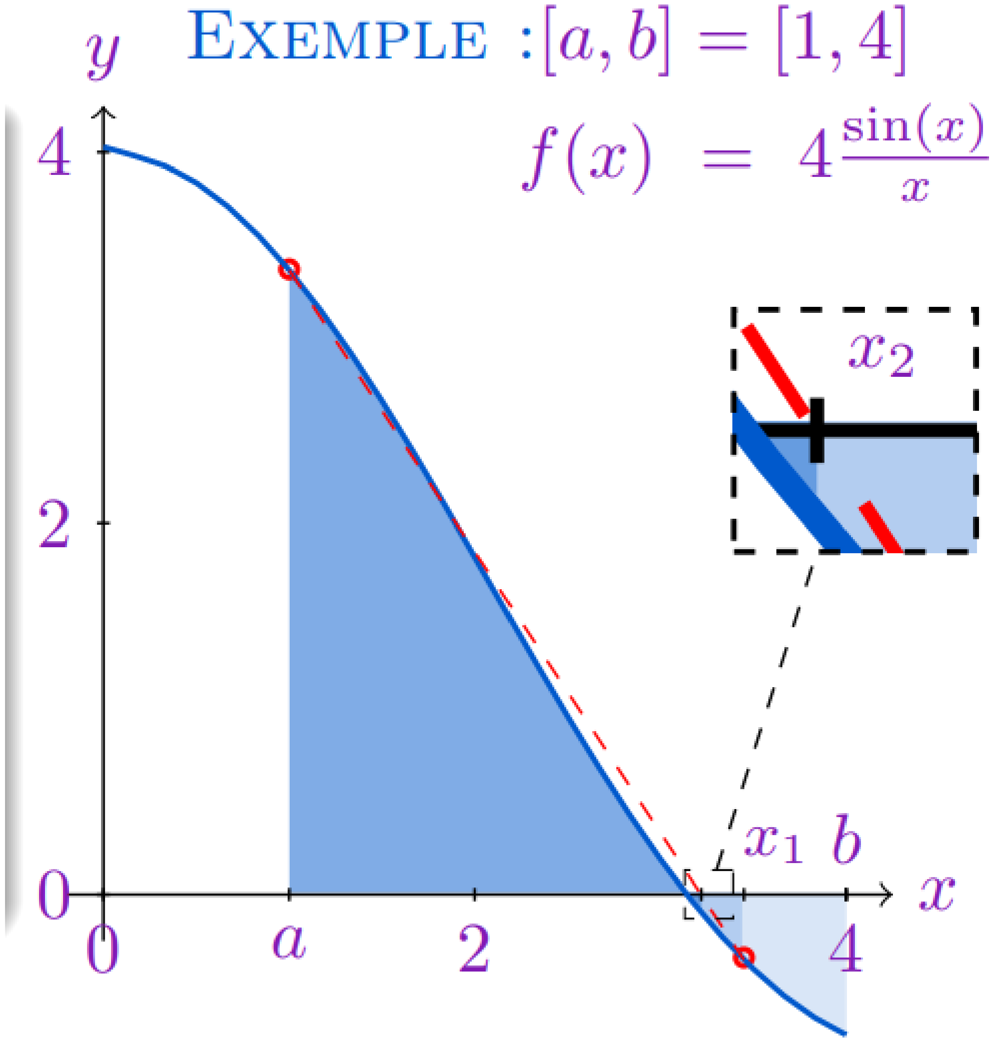
Fausse position

crit d'arret: on va evaluer si $f(x^{(k+1)}) < \epsilon$

> ?

Exemple : $[a, b] = [1, 4]$

$$f(x) = 4\frac{\sin(x)}{x}$$



Algo Octave:

```
function [n, sol] = algofaussepos(f, a, b)
  n = 0;
  while n < 69
    n++;
    x = a - f(a)*((b-a)/(f(b)-f(a)));
    if f(a)*f(x) < 0
      b = x;
    endif
    if f(b)*f(x) < 0
      a = x;
    endif

    # critere d'arret
    if f(x) < 10^(-6) # plutot que f(x(k)) == 0 car précision
      sol = x;
      break
    endif
  endwhile
endfunction
```

puis

```
[n_iter sol] = algofaussepos(f, a, b) #on peut aussi passer un critère
d'arret plutot que de le hardcoder
```

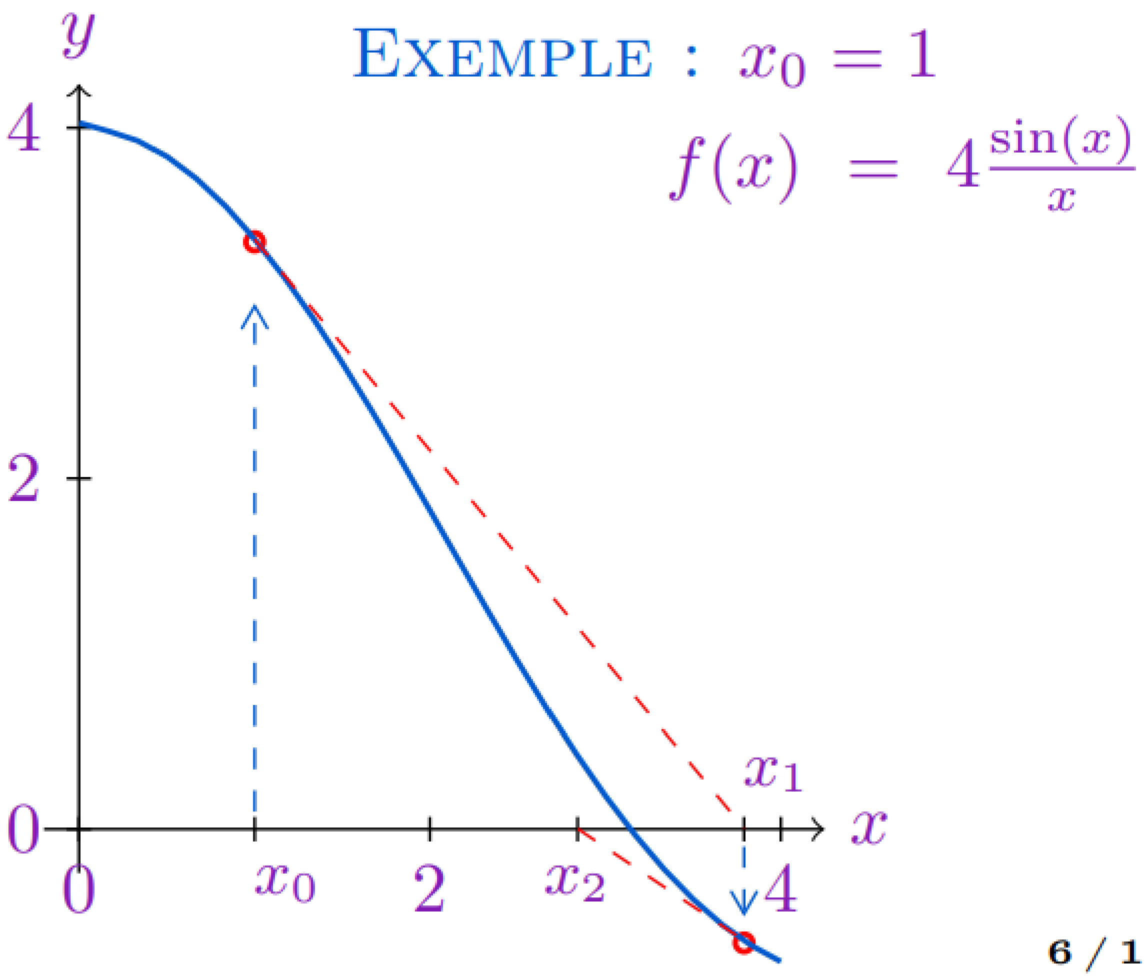
Newton-Raphson

Principe: prendre pour x_{k+1} la racine du dév de Taylor de premier ordre autour de x_k
Cela revient,pour autant que $f'(x_k) \neq 0$, à déterminer x_{k+1} qui satisfait:

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$$

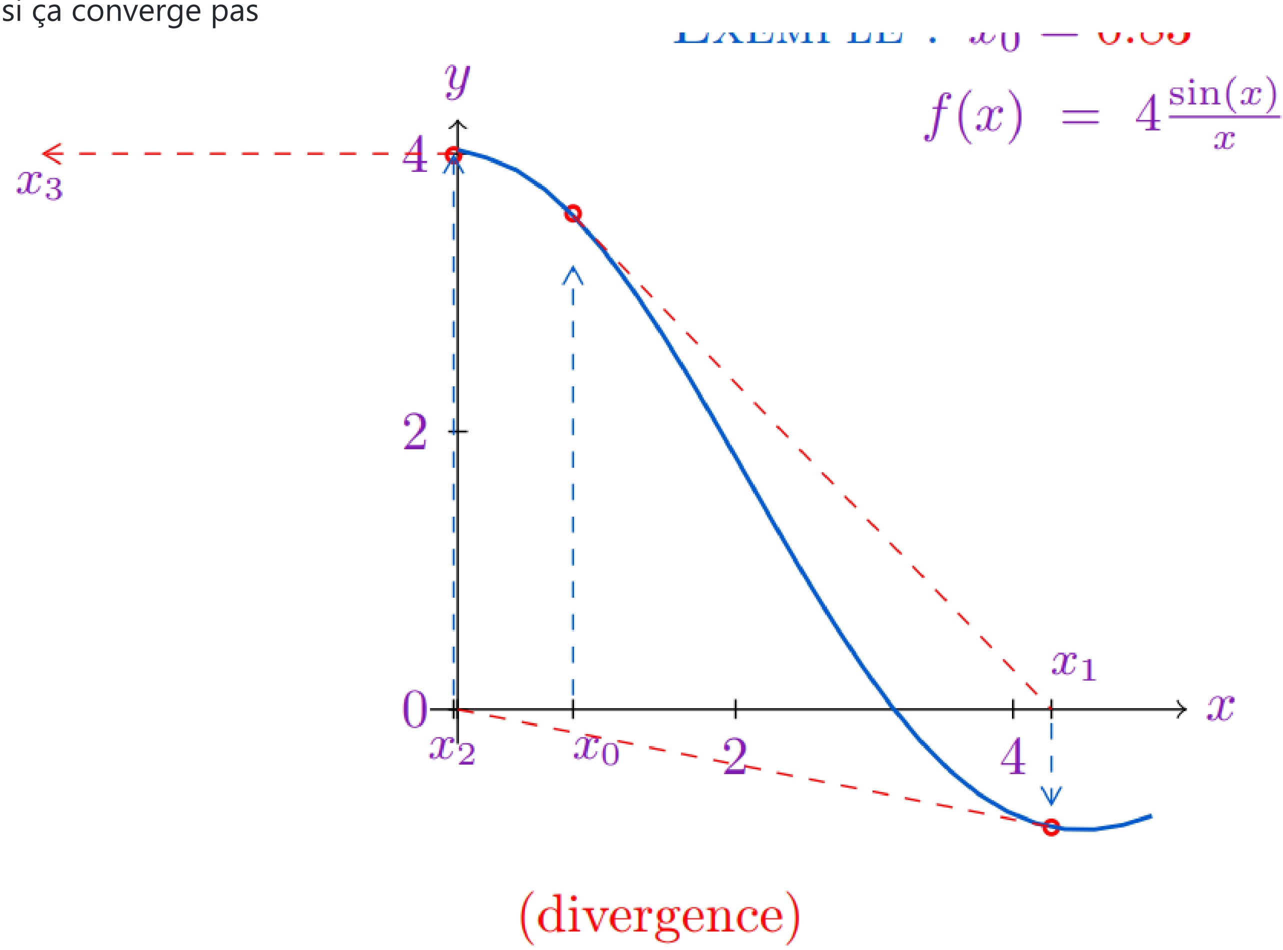
et donc $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

ATTENTION: il faut connaitre la dérivée de cette fonction
on choisi un x_0 suffisamment proche de la racine (en regardant un plot par ex)
si racine est un extremum: cette methode est pas super précise

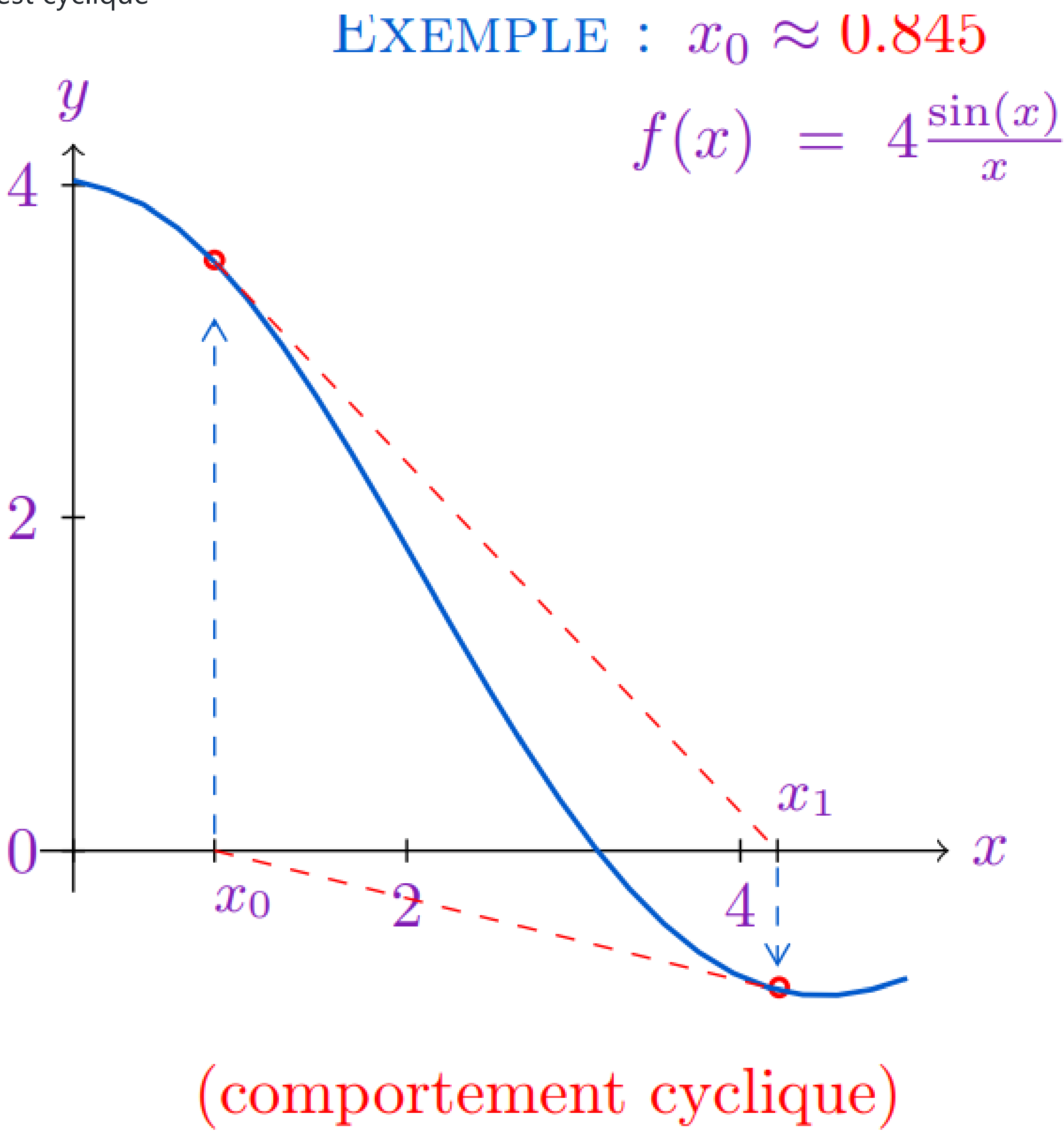


deux problèmes:

- si ça converge pas



- si c'est cyclique



Convergence s'une suite x_k, $k = 0, 1 \ldots$ vers x est d'ordre p s'il existe une constante C tq:

$$|x - x_{k+1}| \leq C|x - x_k|^p$$

- si $p = 1$ et $C < 1$ **convergence linéaire**
- si $p = 2$ **convergence quadratique**
- si $\lim_{k\to\infty} \frac{|x-x_{k+1}|}{|x-x_k|} = 0$ **convergence superlinéaire**

Algo Octave:

```
function [n, sol] = algonewtonraphson(f, fprime, x0)
  n = 0;
  %x = x0 - f(x0)/fprime(x0); % si scalaire
  x = x0 - fprime(x0)\f(x0); % pour vectoriel ET scalaire

  #while (fprime(x) > 10^(-4)) & (fprime(x) < -10^(-4)) & n < 50
  # critere d'arret
  while n < 69
    n++;
    %x = x - f(x)/fprime(x); % si scalaire
    x = x - fprime(x)\f(x); % pour vectoriel ET scalaire
  endwhile
  sol = x;
endfunction
```

puis

```
[n_iter sol] = algorewtonraphson(f, fprime, x0) #on peut aussi passer un critère d'arret plutot que de le hardcoder
```

N-R avec recherche linéaire

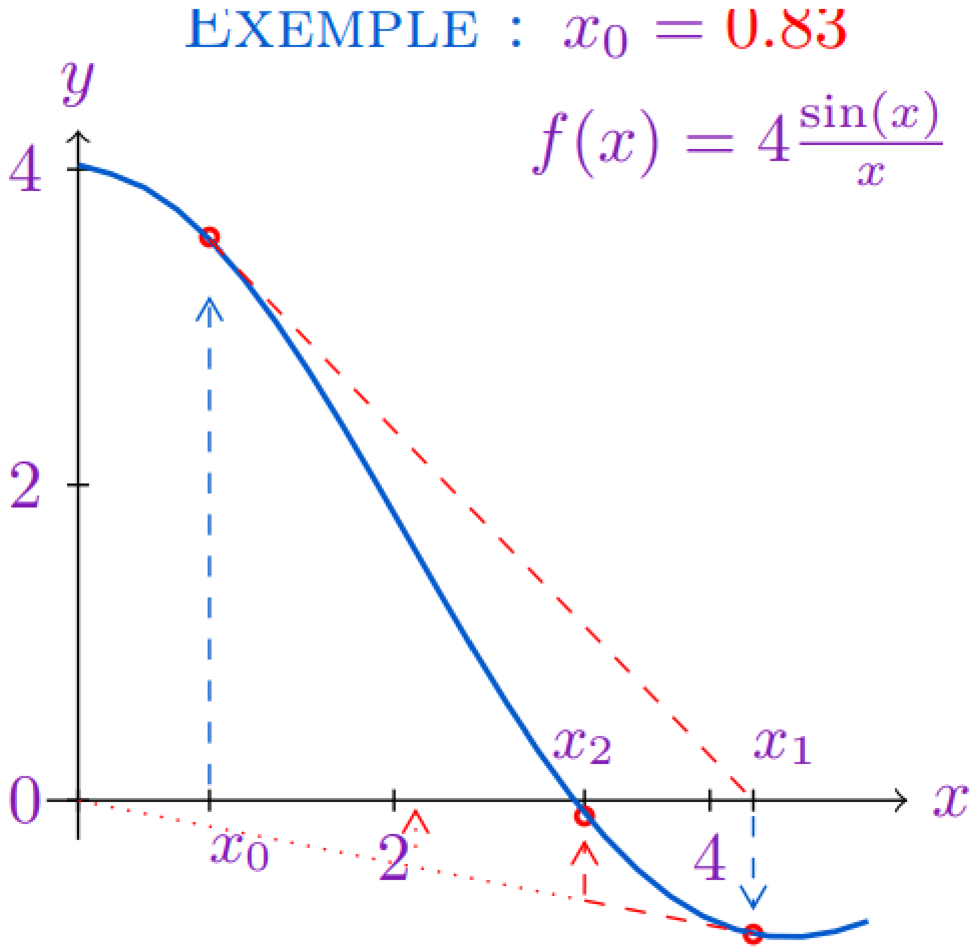
Principe: même chose que N-R mais avec un facteur d'amortissement α_k dans l'incrément, qui réduit à chaque itération (on le divise par 2)
equation =>

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

en cherchant un facteur α_k qui satisfait $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$
Elle permet d'empecher un comportement cyclique avec un simple N-R.

> Taylor: $f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(c)(x_{k+1} - x_k) = f(x_k)(1 - \alpha_k \frac{f'(c)}{f(x_k)})$
> ...

besoin aussi de f' comme N-R
on utilise un facteur d'amortissement $\alpha_k > 0$, qu'on va diviser par 2 jusqu'à l'arret (on commence avec $\alpha = 1$)



Algo Octave:

```
function [n, sol] = algonrrecherchelin(f, fprime, x0)
  n = 0;
  alpha = 1;

  # critere d'arret
  while n < 69
    n++;
    p = f(x0)/fprime(x0)
    x = x0 - alpha*p;
    if abs(f(x)) < abs(f(x0));
      break
    endif
    alpha = alpha/2
    x0 = x
  endwhile
  sol = x;
endfunction
```

puis

```
[n_iter sol] = algonrrecherchelin(f, fprime, x0) #on peut aussi passer un critère d'arret plutot que de le hardcoder
```

variantes

on peut exprimer $f'(x)$ sans le connaitre...

- formule de différences finies...
- méthode de la sécante...

Généralisation au systèmes non-linéaires

LU...

Newton-Corde

Principe: factorisation LU peut être couteux pour système à taille importante => LU remplacée par méthode itérative.
Convergence n'est plus quadratique
Factorisation fait qu'une seule fois au début de l'algo

Critères d'arret

- **[+]** $||f(x_k)|| \leq \epsilon_a$ (ou relativement $||f(x_k)|| \leq \epsilon_r ||f(x_0)||$)
- **[-]** nombre max d'itérations
- **[-]** Pour les méthodes de type Newton, le fait que la dérivée $f'(x_k)$ ou son approximation soit non-inversible peut mener à l'arrêt de la méthode.

Chap 6

Interpolation et approximation
... TODO

Chap 7

Intégration

Methode des trapèzes

Intervalles réguliers
Prendre un intervalle h entre x_i et x_{i+1}
Aire trapèze $= h * (f(a) + f(a+b))/2$ (petite base + grande base fois hauteur (l'intervale) sur 2)
Plus h est petit, plus c'est précis

On risque que la longueur $[a, b]$ soit pas un nombre entier de fois h,
alors $h = (b - a)/n$ avec n le nombre d'intervalles

Exacte pour tout polynome de degré au plus 1

Erreurs:

$c \in]x_i, x_{x+1}[$
Erreur locale: $E_{loc}(h_i) = -\frac{1}{12} h_i^3 f''(c)$

$c \in]a, b[$
Erreur globale: $E_{glob}(h) = -\frac{1}{12}(b - a)h^2 f''(c)$

Algo Octave:

```
function [aire] = tp9trapezes (f, a, b, h)

  n=(b-a)/h;
  int = 0;

  for i = 0:n-1
    int = int + ( h/2 )*( f(a + h*i) + f(a + h*(i+1)) );
  endfor

  aire = int;

endfunction
```

Methode de Simpson

Point au milieu de $[a + h, a + 2h]$: $a + \frac{3}{2}h$
interpolation quadratique
intégrale $= (f(a + h) + h * f(a + \frac{3}{2}h) + f(a + 2h))/6$
Exact pour tout polynome de degré au plus 3

Erreur globale:
$|E_{glob}| = -\frac{1}{12} * (b - a) * h^2 * |f''(c)|$
c est un réel appartenant à $[a, b]$

$|E_{glob}| <= 10^-6$
$h^2 * |f''(c)| <= 10^-6$

on va sortir un $h_{erreur} <= sqrt((12 * 10^-6)/((b - a) * |f''(c)|))$
$n = (b - a)/h_{erreur}$; appartient PAS à N

`n = ceil(n)`
$h_{effetif} = (b-a)/n <= h_{erreur}$
que quand la methode est pas exacte, que quand il y a une erreur à calculer

si elle est exacte le h est indépendant de l'erreur (car pas d'erreur) donc h qu'on veut

Algo Octave

```
function [aire] = tp9simpson(f, a, b, n)
  h = (b-a)/n;
  int = 0;
  for i=0:n-1
    int = int + (h/6)*(f(a+i*h)+4*f(a+h*(i+0.5))+f(a+h*(i+1)));
  endfor

  aire = int;

endfunction
```

Methode de Newton-Cotes

...

Methode de Romberg

...

Chap 8 éq différentielles avec cond Initiales

Prob de Cauchy (scalaire ou vectoriel)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)), t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Methode d'Euler

Ordre: 1
Un pas de discrétisation: $h_k = t_{k+1} - t_k$
(ou pas d''intégration).
h plus petit donne un meilleur solution (on observe que si on double le pas, l'erreur est 2x plus grande (linéairement)).
Erreur $|y_k - y(t_k)|$ semble proportionnelle à h.

D'ordre 2 l'erreur augmenterait de manière quadratique.

Euler progressive

Méthode explicite
Stabilité: **pas toujours** stable
Principe: approcher la dérivée au point t_k par...
=> on va vers l'avant

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k)$$

Algo Octave:

```
function [y] = tp10eulerpro (f, y0, t) # t contient t_min et t_max

  n = length(t);
  h = t(2) - t(1); # h constante
  y(1)=y0;

  for i = 1:n-1
    y(i+1) = y(i)+h*f(t(i),y(i));
  endfor

endfunction
```

Euler retrograde

Méthode implicite (pas moyen d'isoler directement y_{k+1} àpd y_k)
Stabilité: **toujours stable**
Principe: approcher la dérivée au point t_{k+1} par...
=> on va vers l'arrière

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

(On peut utiliser la fonction Octave `fsolve(g, y(k))` pour la résolution d'équations non linéaires, où `g` la fctn et `y(k)` aux alentours où il faut chercher)

Algo Octave:

```
function [y] = tp10eulerret (f, y0, t) # t contient t_min et t_max

  n = length(t);
  h = t(2) - t(1); # h constante
  y(1)=y0;

  for i = 1:n-1
    g=@(X) y(i) + h*f(t(i+1),X) - X;
    y(i+1) = fsolve(g, y(i));
  endfor

endfunction
```

Ordre

methode est d'ordre n si:

$$\max_k |y_k - y(t_k)| \leq Ch^n$$

(Les méthodes d'Euler sont de **1er** ordre)

Stabilité

Prenons prob de Cauchy où $\frac{dy}{dt}(t) = -\beta y(t)$
La sol exacte est $y(t) = y_0 e^{-\beta t}$ elle tend vers 0 pour $\beta > 0$ et croît pour $\beta < 0$

- methode (absolument) stable pour le prob de Cauchy avec $\beta > 0$ si:
  elle produit une séquence de y_k, $k = 1, 2..,$ d'approximations de y(t_k) telle que:

  $$y_k \to 0 \text{ lorsque } t_k \to \infty$$

  (en gros lorsque la "suite" y_k tend vers 0 quand $t_k \to \infty$)

- euler **progressive**: **pas toujours** (stable si $|A - h\beta_i| < 1$, $i = 1, \ldots, n$)

- euler **retrograde**: **toujours stable** stable (pour tout h)

ex: euler progressive absolument pas stable si $h\beta <>?2$

Methode du second ordre

Methode de Crank-Nicolson

Principe: methode s'obtient en approchant l'intégrale par la formule des trapèzes.
Methode implicite (pas moyen d'isoler directement y_{k+1} àpd y_k).

Ordre: 2 ($|y_k - y(t_k)| \propto h^2$)
Stabilité: stable, quel que soit le pas h_k.

équation:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}h_k(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}))$$

où come avant $h_k = t_{k+1} - t_k$

Algo Octave:

?

Methode de Heun (ou Runge-Kutta d'ordre 2)

Principe: rendre la methode de Crank-Nicolson explicite sur base de la formule d'Euler progressive.
Methode explicite
Ordre: 2 ($|y_k - y(t_k)| \propto h^2$)
Stabilité: stable si $h\beta < 2$.

équation:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}h_k(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + h_k f(t_k, y_k)))$$

en gros on a changé y_{k+1} dans le membre de droite par $y_k + h_k f(t_k, y_k)$ (la formule d'Euler Progressive).
Ce qui la rend donc explicite.

Algo Octave:

?

Methode multi-pas

...

Chap 9 éq différentielles avec cond aux Limites

croisons les doigts que ça tombe pas à l'exam