ADS

Análise e Desenvolvimento de Sistemas
Fatec Taquaritinga

Apostila

Cálculo

1º semestre 2017

Profª Aparecida Patrícia Roberto Marchioni

Faculdade de Tecnologia de Taquaritinga
www.fatectq.edu.br
Av. Dr. Flávio Henrique Lemos, 585 – Portal Itamaracá
15.900-000 – Taquaritinga – SP – Brasil
Tel./Fax +55.16.3252.5250

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Sumário

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Função Linear

A função linear dada pela fórmula f(x) = ax ou y = ax, com $a \in \Re \; e \; a \neq 0$, é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade. O gráfico será uma reta e passará pela origem.

Exemplos:
1- Um posto cobra R$2,90 o litro de gasolina. Considere que o carro comporte no máximo 60 litros de combustível para responder as questões a seguir:
a) Quais são as variáveis envolvidas?

b) Qual e a lei de associação dessa função?

c) Construa o gráfico desta função. Esta função é crescente ou decrescente? Por quê?

d) Encontre a parte do gráfico que tem sentido diante do problema: Domínio e Imagem.

2- Construir os gráficos das funções lineares a seguir, identificando a taxa de variação e se estas são crescentes ou decrescentes:
a) y = 2x

b) y = -2x

Função Afim

A função afim caracteriza-se pela fórmula f(x) = ax + b, com $a \in \Re \; e \; a \neq 0$ e $b \in \Re \; e \; b \neq 0$. Neste caso não ocorre a proporcionalidade embora o gráfico seja uma reta. No entanto, a reta não passará pela origem do sistema cartesiano.
Exemplos:
1- Em determinado estacionamento de automóveis vê-se a seguinte placa:

PREÇO DESTE ESTACIONAMENTO Paga-se R$ 2,00 pela entrada e mais R$ 1,50 por hora de permanência do automóvel

Determine:
a) A lei que dá o preço a pagar de cada automóvel.
b) Construa uma tabela e um gráfico desta função. Esta função é crescente ou decrescente? Qual é a taxa de variação?
c) Encontre o domínio e a imagem supondo um período máximo de permanência do veículo de 24 horas.
d) Quais são as variáveis envolvidas? Estas variáveis são diretamente proporcionais?

2- Construir os gráficos das funções a seguir, identificando a taxa de variação e se estas são crescentes ou decrescentes:
a) y = 2x + 1
b) y = -2x + 3

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Função Constante

A função constante é caracterizada por um número real fixo, ou seja, f(x) = a, com $a \in \Re$.

Exemplos:
1- Numa estrada, um carro vai do km 50 ao km 450, sempre com a mesma velocidade de 80 km/h.
a) Construa o gráfico da velocidade do carro (km/h) em função do tempo (h)
b) Qual é a lei de associação desta função?
c) Qual é o domínio e a imagem nesta situação problema.
d) Poderíamos classificar esta função como crescente ou decrescente?

2- Construir os gráficos das funções a seguir, identificando a taxa de variação e se estas são crescentes, decrescentes ou constantes:
a) y = 2
b) y = - 3

Exercícios

1- Representar graficamente as funções, identificando a taxa de variação e se estas são crescentes ou decrescentes:
a) y = 3x
b) y = 5
c) y = 4x – 8
d) y = x
e) y = - x + 3
f) y = - 4 + 2x
g) y = -1

2- Classifique as funções a seguir em crescentes, decrescentes ou constantes sem construir os gráficos:
a) y = 3x – 5
b) y = -2x +1
c) y = -4
d) y = -4 + 2x
e) y = -4x

3- Uma máquina nova custa R$ 50,00. Ao sair da fábrica, sofre uma desvalorização anual constante de R$ 5,00 pelo seu uso. Determine:
a) A lei de associação.
b) O esboço do gráfico dessa função.
c) O tempo para que essa máquina se desvalorize totalmente.
d) O domínio e a imagem.
e) Se esta função é crescente ou decrescente.
f) Quais são as variáveis envolvidas? Estas variáveis são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou se trata de outro tipo de variação?

4- Na confecção de certo produto, a fábrica Compre Bem tem um custo fixo de R$ 10.000,00 e mais um custo adicional de R$ 50,00 por unidade produzida.
a) Qual é a fórmula do custo total y (em reais) para produzir x unidades?
b) Qual é o custo para produzir 1.000 unidades?
c) Faça um esboço do gráfico.
d) Se na venda de 1.000 unidades a Compre Bem deseja ter um lucro de R$ R$ 50.000,00, qual deve ser o preço de venda de cada unidade?

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Inequações lineares com duas variáveis

Exemplos:

1- Representar graficamente:

a) $x_1 + x_2 \leq 3$

b) $x_1 + x_2 \geq 3$

c) $2x_1 + x_2 > 12$

d) $2x_1 + 2x_2 < 16$

e) $x_1 \geq 3$

f) $x_1 \geq 0 \; e \; x_2 \geq 0$

2- Um fazendeiro dispõe de 18 alqueires para plantar milho e alfafa. Chamando de x_1 a área a ser plantada de milho e x_2 a área a ser plantada de alfafa, e sabendo que o fazendeiro pode optar por deixar uma parte das terras sem plantar nenhuma das culturas, responda as questões seguintes:

a) Represente a relação algébrica que deve existir entre x_1 e x_2.
b) Represente a região B do plano cartesiano que corresponde a relação entre x_1 e x_2.
c) Sabendo que devem ser plantados, no mínimo, 5 alqueires de milho, qual é a região C do plano que corresponde aos pares (x_1 , x_2) que satisfazem as condições formuladas?
d) Sabendo que devem ser plantados, no mínimo, 5 alqueires de milho e, no mínimo 3 alqueires de alfafa, qual é a região D do plano que corresponde aos pares (x_1, x_2) que satisfazem as condições formuladas?

Exercícios

1- Representar graficamente as inequações:

a) $x_1 + x_2 \leq 2$

b) $2x_1 + 2x_2 \leq 16$

c) $3x_1 + 5x_2 \geq 15$

d) $-5x_1 + 2x_2 \geq -10$

e) $3x_1 + 2x_2 \leq 18$

f) $x_2 \geq 4$

g) $x_1 \leq 4$

h) $x_1, \; x_2 \geq 0$

2- Uma fábrica produz dois tipos de produtos: A e B. A quantidade produzida diariamente de A é igual a x, e a quantidade diária de B é igual a y. O processo de produção é tal que cada unidade produzida de A custa sempre R$ 5,00 e cada unidade de B custa R$ 8,00. Sendo assim determine:

a) a expressão que indica o custo máximo de R$ 3.200,00.

b) Represente em um plano cartesiano os pontos que indicam o custo máximo de R$ 3.200,00.

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Função Quadrática

É a função dada pela regra $y = Ax^2 + Bx + C$, com domínio R, onde A, B, C são números reais e $A \neq 0$.
O gráfico da função quadrática é uma parábola que tem concavidade voltada para cima, caso A seja positivo, e concavidade voltada para baixo, caso A seja negativo.

Exemplos:

a) $y = 3x^2 + 14x + 5$ A = ____ B = ____ C = _____

b) $y = -2x^2 + 18$ A = _____ B = ____ C = _____

Construções dos gráficos básicos

Construa em cada item a seguir os gráficos das funções no mesmo plano cartesiano. Em seguida escreva sua conclusão analisando o que ocorre com a parábola de acordo com os coeficientes **a** e **c**.

1-

$y=x^2$

$f(x)= x^2 + 3$

$g(x)= x^2-2$

$h(x) = x^2 -3$

Conclusão:

2-

$y=-x^2$

$f(x) = -x^2 +4$

$g(x) = - x^2 -3$

Conclusão:

Função Quadrática: Esboço do gráfico

Exemplo

Construir a representação gráfica das funções abaixo identificando os pontos de intersecção da parábola com os eixos x e y e as coordenadas do vértice:

a) $y = x^2 - 5x + 6$

b) $y = - x^2 + 2x - 5$

c) $y = x^2 + 6x + 9$

Exercícios

1- Construir os gráficos das funções a seguir identificando se a parábola tem concavidade para baixo ou para cima e se o vértice é ponto máximo ou mínimo.

a) $y = x^2 - 4x + 3$

b) $y = x^2 - x + 5$

c) $y = - x^2 + 10\, x - 16$

d) $y = x^2 - 4x + 4$

e) $y = -x^2 + 4x$

f) $y = - x^2 - 1$

2- Um objeto lançado obliquamente a partir do solo, alcança uma altura h (em metros) que varia em função do tempo t (em segundos) de acordo com a fórmula $h(t) = - t^2 + 20t$.
a) Em que instante o objeto atinge altura máxima? De quantos metros é essa altura?
b) Em que instante ele atinge o solo novamente?

3- Um carpinteiro vai construir um galinheiro retangular. Ele vai usar 12m de tela e, para um dos lados, pretende aproveitar uma parede já existente, conforme o desenho. Expresse a área desse galinheiro em função da medida de um dos lados (x, na figura). A seguir, descubra quais são as medidas dos lados desse retângulo para que a área seja máxima.

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Limites

Noção Intuitiva

1º Exemplo:
Dada a função f(x) = x + 2, construir o gráfico e determinar intuitivamente :

a) $\lim_{x \to 3_-} f(x) =$

b) $\lim_{x \to 3_+} f(x) =$

c) $\lim_{x \to 3} f(x) =$

2º Exemplo:

Dada a função:

$f(x) = \begin{cases} x, & se \ \ x \leq 3 \\ x+2, & se \ x > 3 \end{cases}$, construir o gráfico e determinar:

a) $\lim_{x \to 3_-} f(x) =$

b) $\lim_{x \to 3_+} f(x) =$

c) $\lim_{x \to 3} f(x) =$

Regra prática

Calcular:

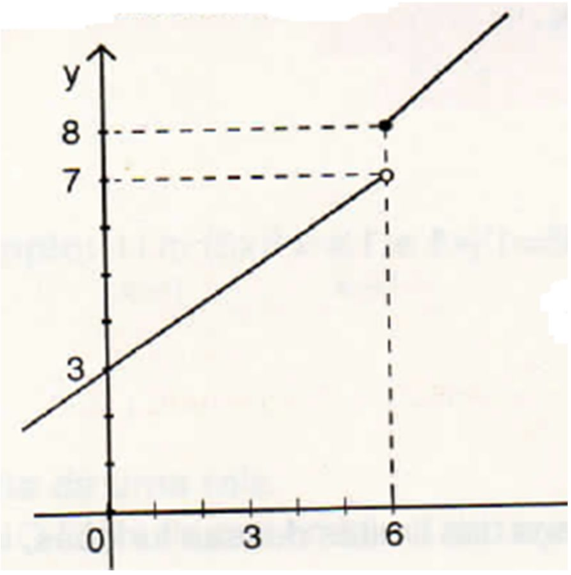
a) $\lim_{x \to 3} (x+2) =$

b) $\lim_{x \to 3} 5 =$

c) $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2 + x - 3}{x + 2} \right) =$

Exercícios

1- Seja o gráfico da função f:



Calcule, se existir:

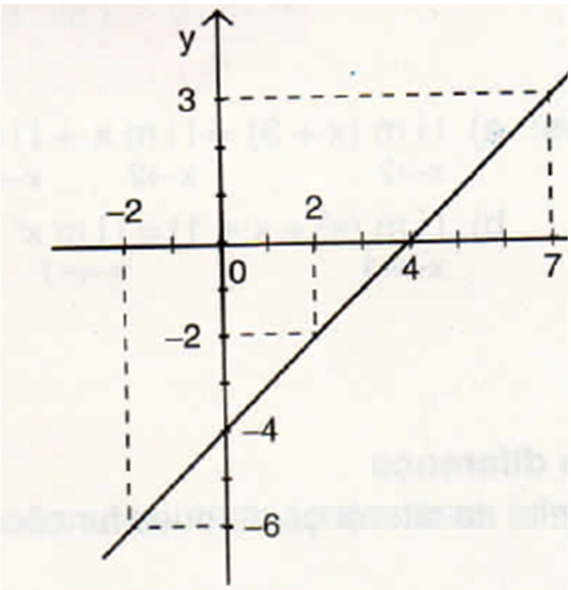
a) $\lim_{x \to 0} f(x) =$

b) $\lim_{x \to 6+} f(x) =$

c) $\lim_{x \to 6_-} f(x) =$

d) $\lim_{x \to 6} f(x) =$

2- Considere o gráfico da função:



Calcule:

a) $\lim_{x \to 7_+} f(x) =$

b) $\lim_{x \to 7_-} f(x) =$

c) $\lim_{x \to 2} f(x) =$

d) $\lim_{x \to 4+} f(x) =$

e) $\lim_{x \to 4_-} f(x) =$

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

f) $\lim_{x \to 0} f(x) =$

3- Determine:

a) $\lim_{x \to 4} 7 =$

b) $\lim_{x \to -1} \frac{2}{3} =$

c) $\lim_{x \to 2} (5x^3 + x) =$

d) $\lim_{x \to -4} (4x^2 - \frac{1}{2}x) =$

e) $\lim_{x \to 3} (3x^2 + x - 1) =$

f) $\lim_{x \to 0} (x^4 - x^3 + x^2 + 1) =$

g) $\lim_{x \to 3} (x-1)(4-x) =$

h) $\lim_{x \to 3} \frac{4x^2}{x+1} =$

i) $\lim_{x \to 5} \frac{x^3}{x^2 - 1} =$

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

j) $\lim\limits_{x \to -1} (2x-1)^{6} =$

k) $\lim\limits_{x \to 2} (3x^3 - 2x^2 + 5x - 1)^2 =$

l) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt[4]{81x^4} =$

3- Dada a função $f(x) = \dfrac{5x^3 - 6x^2 + 3x}{x^3 - x^2 + 3x}$, calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) =$

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Cálculo de Limites quando o numerador e o denominador tendem a zero

Exemplos:

Calcular:

a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} =$

b) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} =$

c) $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 + 8x + 16}{x + 4} =$

d) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} =$

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Exercícios

Calcule o valor de:

a) $\lim\limits_{x \to 5} = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{4x} =$

c) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 + 5x}{x + 5} =$

d) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x^2 - 81}{x - 9} =$

e) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 10x + 25}{x - 5} =$

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

f) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x - 40}{x - 8} =$

Limites para x tendendo ao infinito

Exemplos:
Para analisar o limite em cada caso a seguir realizar o esboço dos gráfico para verificar o que ocorre com o limite tendendo ao infinito quando a função é crescente ou decrescente:

a) $\lim_{x \to +\infty} (x+5) =$

b) $\lim_{x \to -\infty} (x+5) =$

c) $\lim_{x \to \infty} (-x) =$

d) $\lim_{x \to -\infty} (-x) =$

Exercício:

Calcular:

a) $\lim_{x \to +\infty} (2x) =$

b) $\lim_{x \to -\infty} (2x) =$

c) $\lim_{x \to +\infty} (-5x) =$

d) $\lim_{x \to -\infty} (-5x) =$

e) $\lim_{x \to +\infty} (2x+7) =$

f) $\lim_{x \to -\infty} (2x+7) =$

g) $\lim_{x \to +\infty} (-4x+1) =$

h) $\lim_{x \to -\infty} (-4x+1) =$

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Limites para x tendendo ao infinito da função f(x) = 1/x

Construir o gráfico da função f(x) = 1/x e determinar:

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} =$

$b)\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} =$

$c)\ \lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{1}{x} =$

$d)\ \lim\limits_{x\to 0_-} \dfrac{1}{x} =$

Para qualquer função do tipo $\dfrac{1}{x^n}$, temos: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0.$

Verificar este fato observando os gráficos construídos no Geogebra.

Exercício

Calcular:

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} =$

$b)\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x} =$

$c)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5}{x} =$

$d)\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-5}{x} =$

Limite da função polinomial para $x \to \pm\infty$

Exemplos:

1- Dada a função f(x) = $2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$, calcular:

$a)\ \lim_{x \to +\infty} f(x) =$

$b)\ \lim_{x \to -\infty} f(x) =$

2- Calcular $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{4x^2 + 3x - 7}$

Exercícios

1- Calcular:

a) $\lim_{x \to \infty} (3x^6 + 2x^3 - x + 4) =$

b) $\lim_{x \to -\infty} (-x^3 + 2x + \sqrt{2}) =$

c) $\lim_{x \to -\infty} (4x^7 + 2x^2 + \sqrt{3}x) =$

$d)\ \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 4x + 1}{5x^2 + x - 3} =$

$e)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{-2 + 4x + x^2}{3 + 5x + 2x^3} =$

$f)\ \lim_{x \to \infty} \frac{8x + 1}{4x - 5} =$

$g)\ \lim_{x \to \infty} \frac{3x + 2}{x^2 - 5x + 6} =$

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Taxa Média de variação de uma função y = f(x) no intervalo [a, b]

Exemplos

1- Calcular e interpretar o valor da taxa média de variação da função:
$f(x) = x^2 + 1$, no intervalo [1, 3].

2- Calcular e interpretar o valor da taxa média de variação da função:
$f(x) = \dfrac{x^2 + 10}{3x + 4}$, no intervalo [0, 6].

Exercício

Calcular e interpretar o valor da taxa média de variação da função nos intervalos:

1) $f(x) = 3x + 10$; [2, 5].

2) $f(x) = 10x - x^2$, [0,2]

3) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$, [5, 8]

4) $f(x) = 3^x$, [1, 3]

5) $f(x) = 2x^2 - x^3$, [3, 5]

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Derivada

Conceito da Derivada de uma função em um ponto

Exemplos:

1- Estudar o comportamento da função $f(x) = x^2 + 4$ próximo ao ponto p = 3.

2- Aplicando a definição, calcule:
a) a derivada da função $f(x)= x^2 + x$ no ponto de abscissa x = 3.

b) a derivada da função $f(x)= x^2-5x + 6$, no ponto x = 1.

Exercícios

1- Determinar a derivada de $f(x) = 3x^2$ no ponto de abscissa p = 2.

Para qualquer função do tipo $\dfrac{1}{x^n}$, temos: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.

2- Dada a função $f(x) = x^2-2x$, determinar f ’ (6).

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Cálculo da Função Derivada
Regras de Derivação

1- Derivada de uma função constante

$$f(x) = c \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = 0$$

Exemplos:

a) $f(x) = 5 \quad \rightarrow$

b) $g(x) = -1/2 \quad \rightarrow$

2- Derivada da função potência

$$f(x) = x^n \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = n.x^{n-1}$$

Exemplos:

a) $f(x) = x \quad \rightarrow$

b) $y = x^2 \quad \rightarrow$

c) $f(x) = x^{10} \quad \rightarrow$

d) $g(x) = x^{1/2} \quad \rightarrow$

e) $y = x^{-1} \quad \rightarrow$

f) $y = x^{-2} \quad \rightarrow$

g) $f(x) = x^{3/4} \quad \rightarrow$

3- Derivada do produto de constante c por uma função

$$\mathbf{f(x) = c \,.\, g(x) \rightarrow \qquad f'(x) = c.\, g'(x)}$$

Exemplos:

a) $f(x) = 5\,x^3 \quad \rightarrow$

b) $f(x) = -5\,x^7 \quad \rightarrow$

c) $g(x) = \frac{2}{3}x^{12} \rightarrow$

d) $g(x) = \frac{3}{x^2} \quad \rightarrow$

e) $h(x) = \frac{1}{x^3} \quad \rightarrow$

f) $h(x) = 5\sqrt{x} \rightarrow$

g) $f(x) = 2\sqrt[3]{x} \rightarrow$

4- Derivada da Soma ou Diferença de funções

$$\mathbf{y = f \pm g \rightarrow \qquad f'(x) = f' \pm g'}$$

Exemplos:

a) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x + 1 \quad \rightarrow$

b) $g(x) = \frac{x^3 - 4x^2}{8} \quad \rightarrow$

Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Exercícios:

1- Calcular a função derivada de cada uma das funções a seguir:

a) $y = 5$

b) $y = -8$

c) $y = x^3$

d) $f(x) = x^{20}$

e) $f(x) = x^{-1}$

f) $f(x) = x^{-4}$

g) $g(x) = 5x$

h) $g(x) = -6x$

i) $y = 0{,}40x$

j) $y = -20x$

k) $y = \frac{1}{3}x$

l) $y = \frac{3}{4}x$

m) $y = -0{,}9x$

n) $y = \frac{1}{4}x^5$

o) $f(x) = -4x^2$

p) $f(x) = 10x^3$

q) $g(x) = -4x^3$

2- Calcular a derivada de cada função a seguir:

a) $y = 7x^3 - 2x^2 + x - 1$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}$

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

c) $f(t) = 10 - 3t^2 + 4t^4$

d) $f(s) = s^3 + 2s^2 - s + 1$

e) $f(t) = t^2 + \sqrt{t}$

f) $f(s) = \sqrt[3]{s} + \sqrt{s}$

g) $y = \dfrac{x^2 + 10}{5}$

h) $y = x^2 - \dfrac{10}{x^2}$

i) $y = x^3 + \dfrac{15}{x}$

j) $y = \sqrt{x} + x^3$

k) $y = \dfrac{-x^3}{6} + 4x^2 - \dfrac{1}{3}x + 10$

5- Derivada do quociente de duas funções

$$\mathbf{y} = \frac{u}{v} \rightarrow \qquad \mathbf{y'} = \frac{u'.v - v'.u}{v^2}$$

Exemplo:

Dada a função f(x) = $\frac{x^2+1}{x-3}$, calcular f ’(x).

Exercícios

Determine a derivada f ’(x) das seguintes funções:

a) f(x) = $\frac{x^2}{x^2-1}$

b) f(x) = $\frac{4x-5}{3x+2}$

c) f(x) = $\frac{2x+5}{4x}$

d) f(x) = $\frac{1}{x^2-4}$

e) f(x) = $\frac{10}{1-x}$

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

6- Derivada da Potência de uma função (Regra da cadeia)

$$\mathbf{y = g^n \quad \rightarrow \quad y' = n \cdot g^{n-1} \cdot g'}$$

1º Exemplo:
Dada a função $f(x) = (2x + 1)^4$, calcular f '(x).

2º Exemplo:
Dada a função $f(x) = \sqrt{x-2}$, calcular f '(6).

Exercício

Determine a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = (x^2 - 1)^3$

b) $f(x) = (5x + 3)^{100}$

c) $f(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$

d) $f(x) = (x^3 - 2x)^2$

f) $f(t) = \sqrt[3]{4t + 1}$

Derivadas Sucessivas

Exemplos:

1- Dada a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 2$, calcular: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ e $f''''(x)$.

2- Dada a função $f(x) = 1 - 4x^3 - 4x^4$, resolver a equação $f'''(x) = 0$.

Exercícios

1- Encontre as quatro primeiras derivadas da função: $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x - 1$

2- Determine a derivada segunda de $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 1$, no ponto $x = 0$.

3- Determine a derivada terceira de $f(x) = \frac{1}{x}$.

4- Seja a função $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 5x + 2$, calcule $f'(0) + f''(0) + f'''(0)$.

5- Calcule as duas primeiras derivadas de: $f(x) = \frac{x-3}{x+4}$.

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Aplicações das Derivadas

1- Estudo do movimento

A velocidade (v) de um corpo é a derivada da função posição (s = f(t)) do corpo.
v = s'= f' (t)

A aceleração é a derivada da velocidade, ou seja, é a derivada segunda do espaço. Assim:
a = v' = f''(t)

Exemplo:

1- Um corpo movimenta sobre uma trajetória retilínea, obedecendo à função horária $s = 4t^2 + 5t + 1$ (no SI).
a) Determine as funções velocidade (v) e aceleração (a).
b) Determine a posição e a velocidade do corpo no instante 3s.

2- Um balão meteorológico é solto e sobe verticalmente de modo que sua distância s(t) do solo durante os 10 primeiros segundos de voo é dada por $s(t) = 6 + 2t + t^2$, na qual s(t) é contada em metros e t em segundos. Determine a velocidade do balão quando o tempo for igual a 1s, 2s e 8s.

Exercícios

1- Um ponto material descreve uma trajetória retilínea, obedecendo à função horária $s = 3 – 6t + t^2$ (no SI)
a) Determine as funções horárias da velocidade e da aceleração.
b) Calcule a velocidade do ponto material no instante 10 s.

2- Um corpo se desloca sobre uma trajetória retilínea de acordo com a função horária $s = \frac{5}{2}t^2 - t$ (com t em segundos e s em metros).
a) Qual é a velocidade do corpo no instante 6s?
b) Em que instante a velocidade do corpo é de 66,5 m/s
c) Qual é a aceleração do corpo no instante 2s?

3- Um ponto material se desloca segundo a função horária $s = \sqrt{t}$ (t em segundos e s em metros). Determine a velocidade e a aceleração do ponto material no instante t = 16s.

4- Uma bola desce um plano inclinado de modo que a distância (cm) que ela percorre em t segundos é dada por $s(t) = 2t^3 + 3t^2+4$ para 0 $0 \le t \le 3$.
a) Determine a velocidade da bola em t = 2.
b) Em que instante a velocidade é 30 cm/s?

2-Custo Marginal

O Custo Marginal: é o aumento do custo ocasionado pela produção de uma unidade extra do produto. Por exemplo, numa empresa que produza 100 computadores a um custo total de R$ 50.000,00 e que ao passar a produzir 101 computadores o custo total passe a ser de R$ 50.600,00, o custo marginal é de R$ 600,00.

O Custo marginal é obtido pela derivada da função Custo.

Exemplo:

Suponha que o custo total ao se fabricar q unidades de brinquedos seja de
$C(q) = 3q^2 + 5q + 10$.

a) Qual é o custo de produção de 50 brinquedos?

b) Deduza a fórmula do custo marginal.

c) Qual é o custo marginal de 50 unidades produzidas?

d) Qual é o custo real de produção do 51º brinquedo?

Exercícios

1- Suponha que C(q) seja o custo total de produção de q unidades de canetas, e
$C(q) = 2q^2 + q + 8$.

a) Qual será o custo para produção de 100 canetas?

b) Encontre a função Custo marginal

c) Calcule o Custo Marginal de produção de 100 unidades produzidas e explique o seu significado.

2- O custo total C(q) da produção de q unidades de um produto é dado por:
$C(q) = \frac{1}{2}q^3 - 5q^2 + 10q + 120$

a) Qual é o custo, o custo marginal e o custo real para a produção de 20 unidades?

b) Determinar se existem os valores de q tais que o custo marginal é nulo.

Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

3- Taxa de variação

Exemplo:

Uma cidade X é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia) é, aproximadamente, dado por:

$$f(t) = 64t - \frac{t^3}{3}.$$

a) Qual é a taxa de propagação da epidemia no tempo t = 4?
b) Qual é a taxa de propagação da epidemia no tempo t = 8?
c) Quantas pessoas serão atingidas pela epidemia no 5º dia?

Exercícios

1- Uma peça de carne foi colocada num freezer no instante t = 0. Após t horas, sua temperatura, em graus centígrados, é dada por:

$$T(t) = 30 - 5t + \frac{4}{t+1},\ 0 \le t \le 5.$$

Qual é a velocidade de redução de sua temperatura após 2 horas?

2- Supondo que a massa de uma árvore destinada à produção de papel seja aproximadamente expressa por: $p(t) = 12t^2 - t^3$ sendo t entre 2 e 8 anos.
Encontre a taxa de variação da massa da árvore quando esta completar 4 e 6 anos.

3- Numa pequena comunidade obteve-se uma estimativa que daqui a t anos a população será de $p(t) = 20 - \frac{5}{t+1}$ milhares.

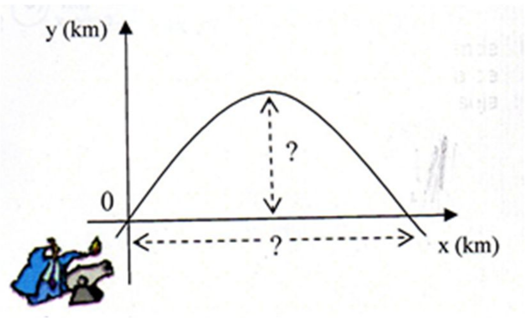
a) Daqui a 18 meses, qual será a taxa de variação da população desta comunidade?

b) Qual será a variação real sofrida durante o 18º mês?

Pontos de Máximo e Mínimo

Aplicações I

1- Durante uma guerra, um canhão lançou uma bala com uma trajetória oblíqua em relação ao solo, conforme mostra a figura abaixo. A bala descreveu uma parábola de equação y = $-0{,}0005x^2 + 0{,}2x$, com x e y em quilômetros. Descobrir a altura máxima que a bala atingiu e a distância horizontal do ponto de lançamento até o ponto em que a bala se chocou com o chão (alcance).

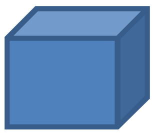


2- Uma empresa deseja construir uma caixa de base quadrada, que comporte 500 ml de suco e que use a menor quantidade de material. Quais serão as suas dimensões?

Exercícios
1- Resolva o exemplo 2 anterior considerando a caixa sem tampa.

2- Resolva o exemplo 2 considerando o volume de 1 litro, ou seja, 1000m (1000 cm^3)

3- Um fazendeiro deseja construir um depósito em forma de prisma de base quadrada, aberto em cima e com capacidade de 64 m^3.



Detemine suas dimensões a e b de modo que o material necessário para construí-lo seja mínimo.

4- Uma pedra é lançada do solo verticalmente para cima. Ao fim de t segundos, atinge a altura h, dada por: $h = 40t - 5t^2$.
a) Depois de quanto tempo a partir do lançamento a pedra atingirá o chão novamente?
b) Faça um esboço do gráfico.
c) Qual é a altura máxima que esta pedra atingirá?

Ponto Máximo e Mínimo

Aplicações II

1- Um fazendeiro deseja construir um galinheiro retangular com 60 m de tela. Quais deverão ser as dimensões para que a área seja máxima?

2- Um carpinteiro vai construir um galinheiro retangular. Ele vai usar 12 m de tela e, para um dos lados, pretende aproveitar uma parede já existente, conforme o desenho. Expresse a área desse galinheiro em função da medida de um dos lados (x, na figura). A seguir, descubra quais são as medidas dos lados desse retângulo para que a área seja máxima.

Exercícios

1) Determinar as dimensões de um retângulo de área máxima, a ser construído com um arame de 40 cm de comprimento.

2) Um homem pretende cercar um lote retangular situado a margem de um rio. Não é necessário cercar ao longo do rio. Se ele tiver 800 metros de cerca e quiser que a área seja máxima, determinar as dimensões do desejado lote e o valor da área máxima. Fazer um esboço do gráfico.

3) Quais devem ser as dimensões de uma pastagem retangular de 10.000m^2 de área, feita à margem de um rio reto para que o gasto com a cerca seja o menor possível sabendo que não é necessário fazer cerca ao longo do rio?

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Ponto de Máximo e Mínimo

Aplicações III

Exemplos

1) Uma empresa tem acompanhado a resposta do mercado para diversas quantidades oferecidas de um produto, e chegou à conclusão de que o preço evolui com a quantidade oferecida, segundo o modelo: p = 100 – 0,2q, sendo $200 \leq q \leq 300$.
Que quantidade deverá ser oferecida ao mercado para que a receita seja máxima?

2) Uma empresa tem acompanhado o custo devido á produção e à comercialização de q quantidades de seu produto e concluiu que um modelo que descreve aproximadamente o comportamento do custo em função da quantidade produzida é: $C = q^3 – 2.650q + 1000$ para $0 \leq q \leq 45$ unidades. Se a empresa vende a unidade de seu produto a R$50,00, qual é a quantidade que deve ser comercializada Para ter lucro máximo?

Exercícios

1) Se o preço de mercado de um produto relaciona-se com a quantidade segundo a equação p = 80 – 0,2q, sendo $1.000 \leq q \leq 3.000$, qual a quantidade a oferecer para o mercado para que a receita de vendas seja a maior possível?

2) Uma grande empresa que controla a oferta de um bem verifica que a demanda desse bem depende do preço por ela fixado, segundo a equação q = 40 – 0,25p, $70 \leq p \leq 85$. Qual o preço que deve ser fixado pela empresa para garantir a máxima receita de vendas?

3) Se o custo de produção de um bem é dado por $C = q^3-6q^2+14q+1000$, $5 \leq q \leq 10$ e o preço unitário de venda é R$ 77,00, determinar a produção que maximize o lucro de empresa devido à comercialização desse produto.

4) Se o custo total da produção de um bem é dado por C = 4q + 20, $7 \leq q \leq 10$ e a demanda é dada por p = 40 – 2q, $7 \leq q \leq 10$, determinar a produção que maximiza o lucro da empresa e o lucro máximo correspondente.

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Integral Indefinida

O processo de obter uma função a partir de sua derivada é chamado de antiderivação ou integração indefinida.
Se f é uma função contínua, então sua integral indefinida é dada por
$\int f(x)dx = F(x) + C$, sendo F(x) a função Primitiva ou antiderivada e C a constante.

Fórmulas de integração:

1) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2) $\int kdx = kx + C$

Propriedades:

1) $\int (f \pm g)(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
2) $\int k.f(x)\, dx = k.\int f(x)dx + C$

Exemplos:

Calcular as integrais indefinidas a seguir:

a) $\int (x^2 + 5)\, dx =$

b) $\int 3\, dx =$

c) $\int -5\, dx =$

d) $\int (x^3 + x^2)dx =$

e) $\int (x^2 + x + 4)dx =$

f) $\int (3x^4 - 2x^2 + 5)dx =$

g) $\int \left(\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{3}{4}x + 9 \right) dx =$

h) $\int \left(\sqrt{x} + x^{-3} + \dfrac{1}{x^2} \right) dx =$

i) $\int (x-5)^2 dx =$

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Exercícios:

1) Calcular as integrais indefinidas :

a) $\int 4\,dx =$

b) $\int -\frac{3}{4}\,dx =$

c) $\int (x^2 - x)\,dx =$

d) $\int 10x^4 dx =$

e) $\int (x^2 - 5x + 4)\,dx =$

f) $\int (6x^2 + 3x - 7)\,dx =$

g) $\int \left(\frac{x^5}{4} + \frac{x^2}{3} + x \right) dx =$

h) $\int \left(x^4 + \frac{1}{4}x^2 + 1 \right) dx =$

i) $\int \left(-x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right) dx =$

j) $\int (x^3 + x^2 + x + 1)\,dx =$

k) $\int \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{5}x^2 + 10 \right) dx =$

l) $\int (-4 + x^3 + x^4)\,dx =$

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

m) $\int \left(\frac{1}{2}x^7 - \frac{2}{3}x \right) dx =$

n) $\int \left(\frac{x^3 - 2x^2 + 4}{5} \right) dx =$

o) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{3}x - 1 \right) dx =$

2- Calcular:

a) $\int (2x+5)^2\, dx =$

b) $\int (5x+3)^2\, dx =$

c) $\int (3x-5)^2\, dx =$

d) $\int (5x-3)^2\, dx =$

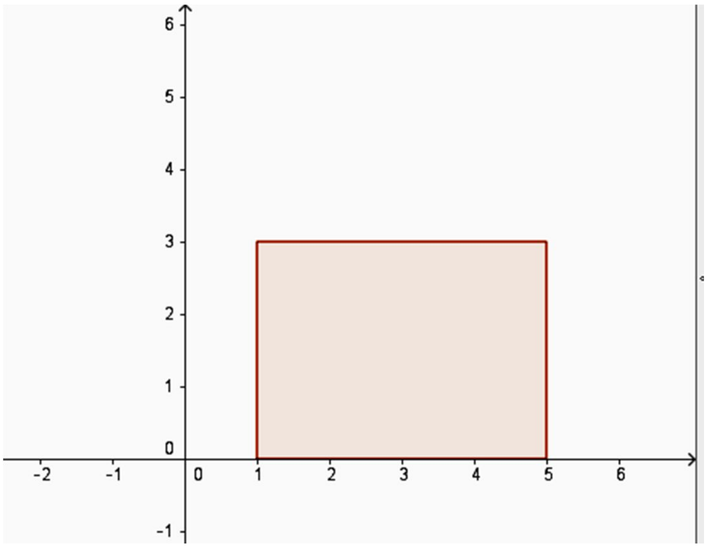
Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Integral Definida

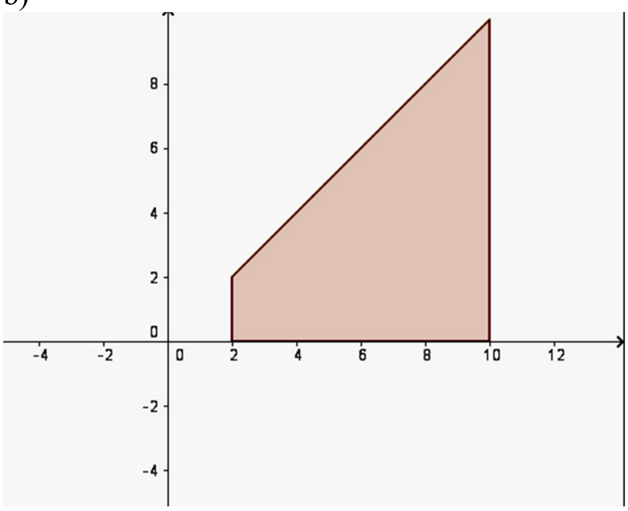
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

1- Usando os conhecimentos do ensino fundamental e médio calcule a área pintada em cada figura abaixo. Em seguida realize os cálculos usando a integral definida.

a)

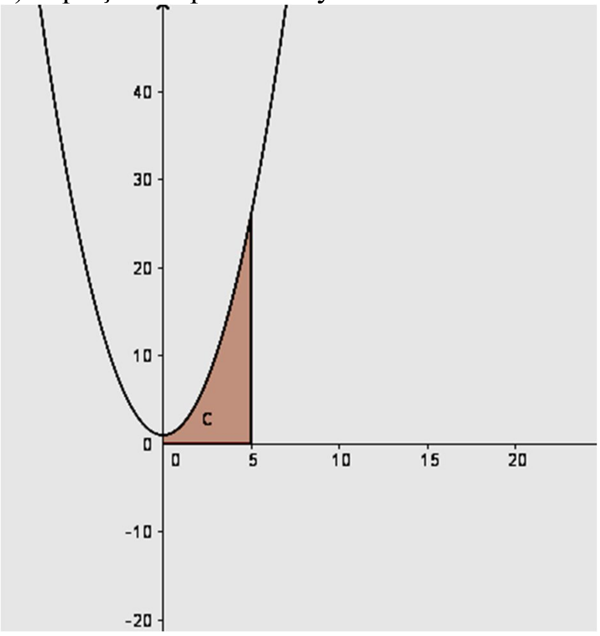


b)



Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

c) Equação da parábola: $y = x^2+1$



2- Calcular as integrais definidas:

a) $\int_0^5 (x^2+1)dx =$

b) $\int_0^3 (16-x^2)dx =$

c) $\int_{-2}^4 \left(\frac{1}{2}x+3\right)dx =$

d) $\int_0^{10} (3x^2+2x)dx =$

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Exercícios

1- Calcular as integrais definidas a seguir:

a) $\int_{1}^{10} 4\,dx =$

b) $\int_{0}^{1} \frac{1}{2}\,dx =$

c) $\int_{-1}^{1} dx =$

d) $\int_{-1}^{1} x^2\,dx =$

e) $\int_{-1}^{0} x^3\,dx =$

f) $\int_{0}^{2} \left(x^2 + 3\right) dx =$

g) $\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{4}x^2 + 5x + 1\right) dx =$

h) $\int_{-1}^{1} \left(x^3 - 3x^2 + 2x + 4\right) dx =$

i) $\int_{0}^{4} \left(\sqrt{x}\right) dx =$

j) $\int_{-2}^{3} \left(6x^2 - 5\right) dx =$

k) $\int_{0}^{3} \left(2x - 5\right)^2\,dx =$

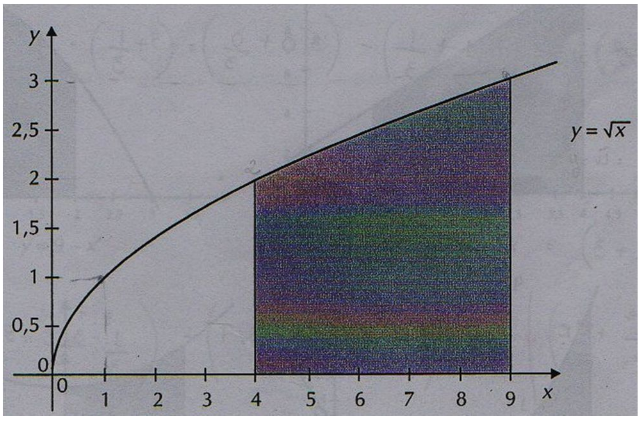
Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Cálculo de Áreas

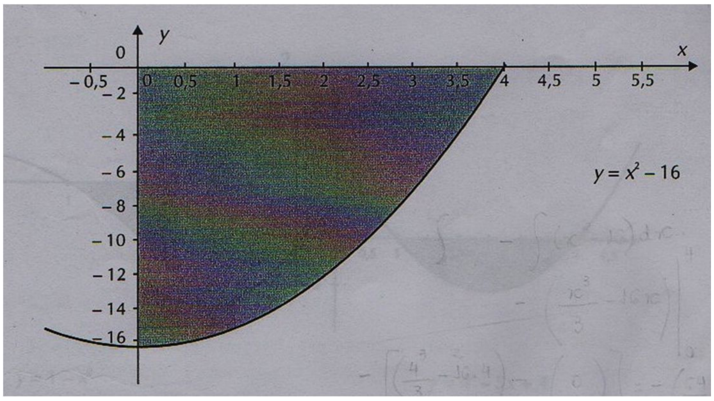
Exemplos

Calcular as áreas indicadas nas figuras:

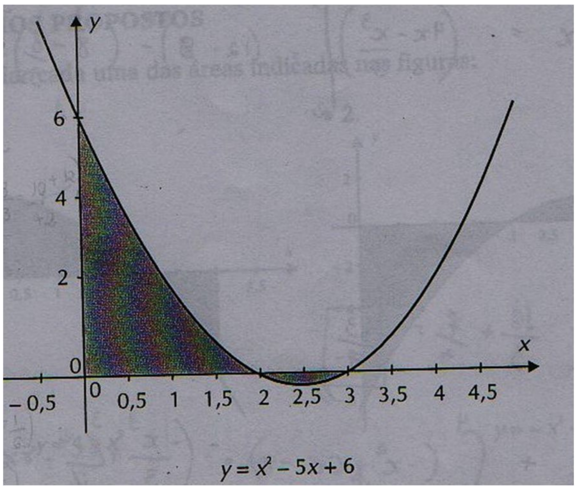
a)



b)



c)

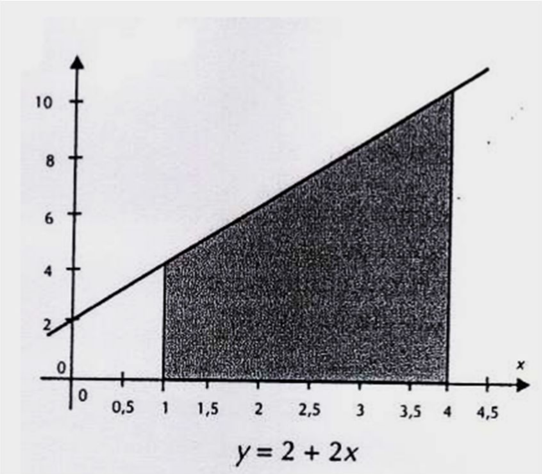


Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

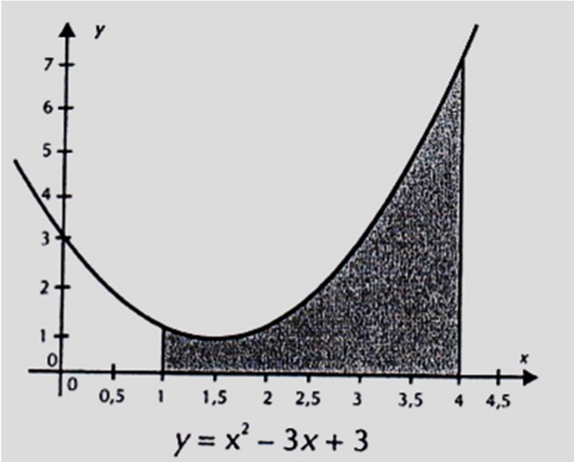
Exercícios

Calcular as áreas indicadas nas figuras a seguir:

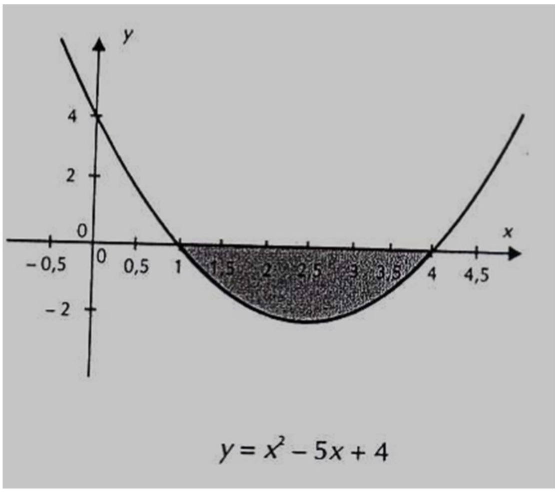
a)



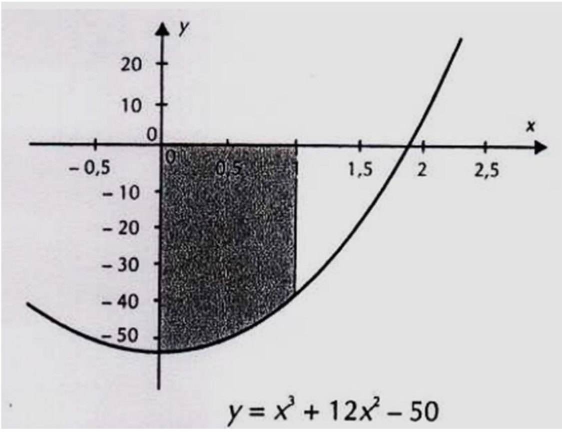
b)



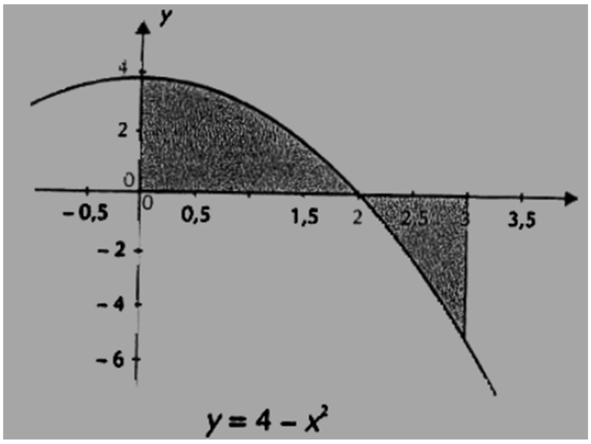
c)



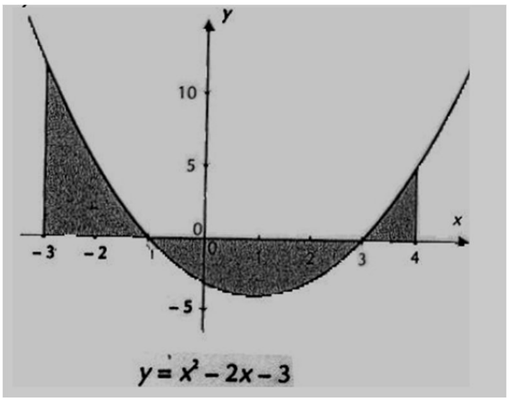
d)



e)



f)



Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Volume: Sólido de Revolução I

Resolva os problemas a seguir se possível utilizando os conhecimentos do ensino fundamental e médio e em seguida resolva-os usando a integral.

1- Calcular o volume de uma caneca cilíndrica cujo diâmetro da base mede 7 cm e altura 9 cm.

2- Calcule o volume de um cone cujo diâmetro da base mede 8 cm e altura 10 cm.

3- Calcule o volume de um tronco de cone cujo diâmetro da base maior seja igual a 9 cm e diâmetro da base menor 3 cm e altura 12 cm.

4- Calcule o volume de uma esfera cujo diâmetro seja igual a 4 cm.

Cálculo
Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Exercícios

Calcule o volume dos sólidos a seguir através dos dois métodos apresentados anteriormente:

a) Leiteira cilíndrica – diâmetro = 13 cm e altura 12 cm.

b) xícara de café cilíndrica - diâmetro 5 cm e altura 5 cm.

c) Piscina cilíndrica – diâmetro = 4m e altura 50 cm.

d) Cone de chocolate – diâmetro da base = 5 cm e altura 12 cm.

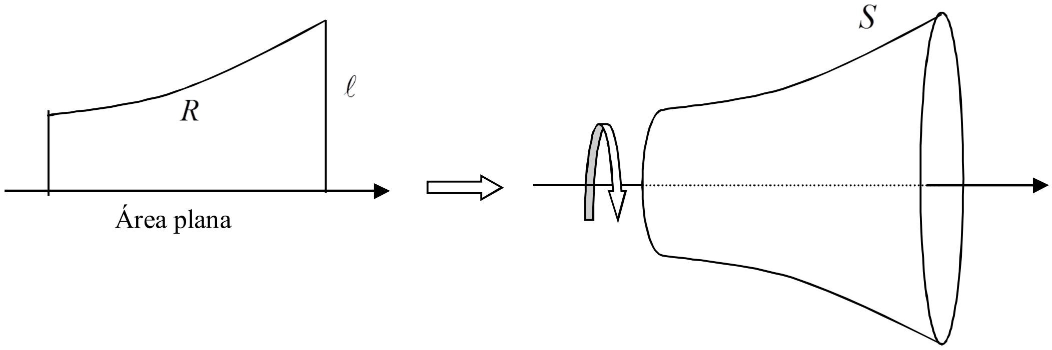
e) Copo no formato do tronco de cone – diâmetros: 8 cm e 6 cm

f) brigadeiro no formato de uma esfera de diâmetro 2 cm.

Profª Ms. Ap. Patrícia Roberto Marchioni
email: pmarchioni@globo.com

Volume: Sólido de Revolução II

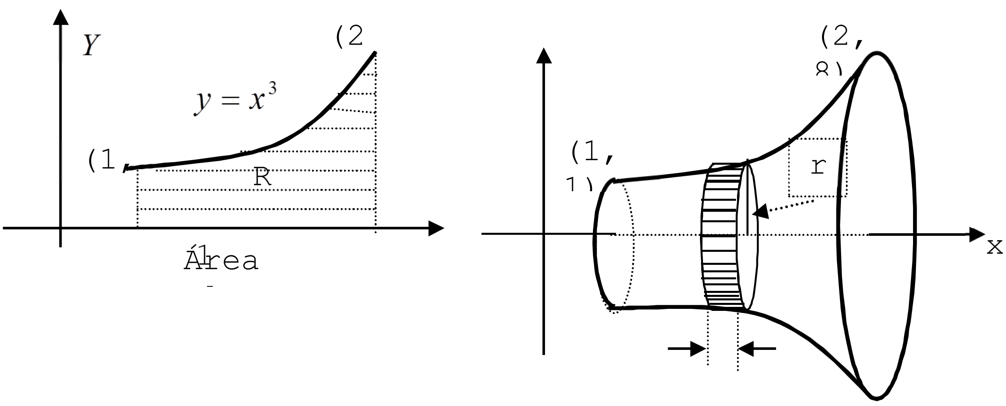
Dada uma região R plana e uma linha reta, ou eixo, girando-se R em torno deste eixo, forma-se uma região no espaço tridimensional denominada **sólido de revolução**.



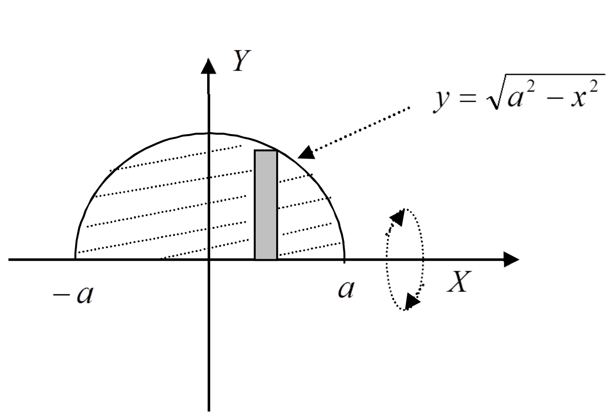
Sólido gerado pela rotação.

Fórmula para o cálculo do Volume
V = $\pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$

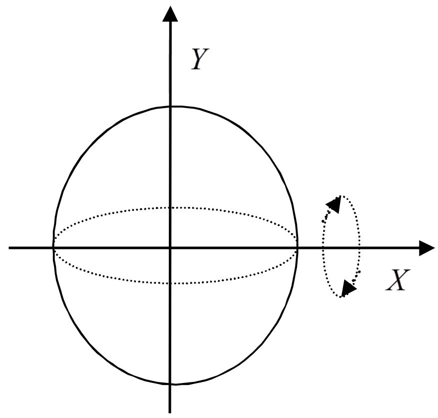
1- Calcule o volume do sólido gerado pela revolução da região sob a função $y = f(x) = x^3$, no intervalo $[1,2]$.



2- Achar o volume da esfera de raio 5 cm gerada pela função $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ em $[-a, a]$
.



Semi-círculo em rotação



Sólido gerado pela rotação do semi-círculo

3- Calcular o volume da esfera de raio 10 cm utilizando a integral definida nos cálculos.

4- Calcule o volume do sólido obtido pela rotação do gráfico de $f(x) = x^2$, $x \in [1,3]$, em torno do eixo x.

5- Calcule o volume do tronco de cone gerado pela rotação do gráfico de $y = 2x - 1$ ao redor do eixo x, sendo $x \in [1,2]$.

6- Calcular o volume do sólido obtido girando-se a região, da curva $y = \sqrt{x}$, no intervalo $[0,4]$.

7- Calcular o volume do sólido obtido pela rotação do gráfico de y = 2 + 2x, $x \in [1,4]$, em torno do eixo x.

8- Calcular o volume do cilindro de diâmetro 10 cm e altura 30 cm usando os conhecimentos do ensino fundamental e integral.

9- Calcular o volume de um recipiente no formato de tronco de cone de Diâmetro maior (D= 30 cm) e diâmetro menor (d= 10 cm) e altura h = 18 cm.

10- Calcular o volume de um cone de altura 12 cm e raio 4 cm

Referências Bibliográficas

FLEMMING, D. M., GONÇALVES, M. B**. Cálculo A**: Funções, Limite, Derivação e Integração. 6ª Edição Ampliada. Pearson Prentice Hall, 2006.

GIOVANNI, J. R., BONJORNO, J. R. **Matemática (2º grau)**. São Paulo: FTD, 1992.

KÜHKAMP, Nilo. **Cálculo 1.** 3.ed. Florianópolis: Ed. da UFSC, 2006.

MACHADO, N J; IEZZI,G; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar: Limites, Derivadas, Noções de Integral**. Atual, v. 8., 2004

SÃO PAULO, Secretaria da Educação. **Caderno do Professor: Matemática**, Ensino Médio- 3ª série. São Paulo: SEE, v.1, 2014.

Silva, S. M. , Silva, E. M., Silva. E. M. **Matemática Básica para Cursos Superiores**. São Paulo: Makron Books, 2002.