Fundamentos

1. Princípios da Lógica Clássica

A Lógica Clássica trabalha com sentenças ou conclusões que possuem uma forma de classificação bem específica, dentro de um sistema dicotômico, ou seja, sentenças ou conjunto delas que podem assumir somente uma de duas possibilidades: verdadeira ou falsa.

Há inúmeras situações em que essa situação pode ser aplicada, basta que identifiquemos, nesses casos, a ocorrência de apenas uma de duas possibilidades (apenas). Exemplos:

- Verdadeiro / Falso
- Certo / Errado
- Sim / Não
- Ligado / Desligado
- Igual / Diferente
- Dia / Noite
- 0 / 1
- Funciona / não funciona
- Vendeu / não vendeu
- Sistema gerou fatura / Sistema não gerou fatura
- Fatura correta / Fatura incorreta
- Pedido preenchido corretamente / pedido não preenchido corretamente
- Peça boa / peça não boa (em qualidade, são muito usadas as expressões “conforme” / “não conforme”)

(1º) **Princípio de terceiro excluído**: toda sentença é verdadeira ou falsa, não existindo outra condição. Ou seja, não há uma terceira possibilidade.

(2º) **Princípio da não-contradição**: nenhuma sentença é verdadeira e falsa simultaneamente, não existindo outra condição. Exemplo: “Hoje comi repolho no almoço”. Perceba que não há uma terceira possibilidade para a veracidade dessa afirmação (ou realmente eu comi, ou então eu não comi repolho no almoço – são apenas duas possibilidades). E veja também que não é possível ocorrer esse fato e não ocorrer esse fato, simultaneamente. Se seu amigo lhe falasse “hoje eu comi repolho no almoço e hoje eu não comi repolho no almoço”, você iria estranhar, não é mesmo? Bem, veja que “Comi repolho no almoço.” é uma sentença declarativa. É com esse tipo de sentença, que chamamos de proposição, que iremos trabalhar.

2. A Lógica Proposicional – o que é uma proposição?

Na linguagem corrente as sentenças são classificadas em declarativas (“Ontem fui pescar.”), interrogativas (“Você está nervoso?”), imperativas (“Vá pescar imediatamente.”) e exclamativas (“Que peixão!”). A lógica das proposições somente se encarregará das primeiras: entendemos por proposição o significado de uma sentença declarativa. Exemplos:

- Ontem fui pescar.
- Roberval comprou um carro verde.
- Meu irmão mora em Botucatu.
- A tecnologia evolui em ritmo exponencial.
- A receita da empresa cresceu linearmente em Setembro.
- 5+8=15

• Hoje não comi repolho no almoço.

Uma proposição é uma sentença declarativa, que pode ser expressa de forma afirmativa ou negativa, para a qual podemos atribuir um valor lógico: verdadeiro (V) ou falso (F).
Neste sentido, perceba que "valor" se refere a um resultado, que não é um número, mas sim uma classificação: verdadeiro (V) ou falso (F). A forma como uma proposição é escrita pode variar e, no entanto, duas proposições de formas diferentes de se escrever podem se referir à mesma proposição. Exemplo de duas proposições equivalentes:
• Gosto de abobrinha frita.
• É verdade que gosto de abobrinha frita. Essas sentenças declarativas (proposições) podem ser verdadeiras ou falsas, e as sentenças que não possuem essa característica (ser declarativa), não serão aqui estudadas. Veja exemplos de sentenças que não são proposições:
• Você vai à festa? (é uma interrogação, não é possível dizer, agora, se ela é verdadeira ou falsa)
• Pare de coçar o cotovelo! (é uma sentença que está no imperativo, é uma ordem; também não é possível defini-la como verdadeira ou falsa)
• Que susto! (sentença exclamativa, nem verdadeira, nem falsa)
• Pode ser que eu estude Matemática amanhã. (sentença com valor probabilístico, também não se classifica como verdadeira ou falsa).
Ainda: uma proposição pode ser simples (atômica) ou composta (molecular). Por exemplo:
• Gosto de repolho roxo (proposição simples).
• Gosto de repolho roxo e de salada de rúcula (proposição composta). Nosso intuito, é explorar todos os valores lógicos possíveis de uma proposição e, para isso, usaremos um recurso chamado de tabela verdade.

3. NEGAÇÃO de uma proposição Analisando os princípios estudados e aplicando-os nas proposições , percebemos que uma proposição ou é verdadeira, ou é falsa, não podendo ser ambas as coisas "ao mesmo tempo" (simultaneamente). Disso decorre que, se uma proposição é verdadeira, sua negação é falsa. E se essa proposição é falsa, sua negação é verdadeira. Veja estas situações.

Se na realidade eu comi repolho no almoço:

- "comi repolho no almoço" é uma afirmação VERDADEIRA.
- "não comi repolho no almoço" é uma afirmação FALSA.

Há uma forma de simbolizar situações como essa. Primeiramente, podemos atribuir a uma proposição um símbolo, no caso, uma letra, para que sua representação fique mais prática (ao invés de ficarmos repetindo "comi repolho no almoço" a todo o momento). Por exemplo, podemos chamar essa proposição de P. Assim:

• P = comi repolho no almoço.

Agora, em forma de tabela (que chamamos de tabela-verdade), mostraremos os resultados possíveis sobre a veracidade dessa informação, conforme trabalhamos nos últimos parágrafos. Veja que prático:

Quadro 1: tabela-verdade para a proposição P = comi repolho no almoço

P	**~P**
V	**F**
F	**V**

Na primeira coluna da tabela indicamos as duas possibilidades para “P”: V ou F. Na segunda coluna, indicamos os respectivos valores lógicos para “~P”. Você se assustou com o símbolo “~P”? Não se assuste, pois ele simplesmente indica a negação de P , ou seja, “não P”. Observe: • P = comi repolho no almoço. • ~P = não comi repolho no almoço.

Há vários símbolos distintos para representar a negação em Lógica Proposicional, e os mais famosos são ~P, ¬P, $\overline{P}$ e P’, todos equivalentes entre si.

4. Os conectivos lógicos “e”, “ou” e “ou...ou...” nas proposições compostas nas proposições compostas.

As proposições compostas são constituídas de proposições simples, conectadas por palavras muito especiais denominadas conectivos lógicos. Só para você ter uma ideia, perceba a diferença entre a sentença “A empresa diminuiu os custos e aumentou as vendas.” e a sentença “A empresa diminuiu os custos ou aumentou as vendas”. Bem, esses dois exemplos possuem as mesmas duas proposições simples, que simbolizaremos a seguir com as letras A e B:

- A = A empresa diminuiu os custos.
- B = A empresa aumentou as vendas.

Em cada proposição composta que citamos, há um conectivo que as liga; nesses exemplos, temos o conectivo e e o conectivo ou. Veja que essas proposições simples poderiam ser escritas assim, tanto na Língua Portuguesa como numa linguagem mais simbólica:

Quadro 2: Proposições compostas

Língua Portuguesa	**Com símbolos**
A empresa diminuiu os custos **e** aumentou as vendas.	A **e** B
A empresa diminuiu os custos **ou** aumentou as vendas.	A **ou** B

Porém, esses conectivos também possuem símbolos na Lógica! O conectivo e assume o símbolo “∧” na maioria dos textos que envolve a Lógica Matemática, enquanto o conectivo ou possui o símbolo “∨”. Podemos agora ampliar o Quadro 2, usando essa simbologia:

Quadro 3: Proposições compostas com simbologia da Lógica Matemática

Língua Portuguesa	**Com símbolos**	**Simbologia completa**
A empresa diminuiu os custos **e** aumentou as vendas.	A e B	$A \wedge B$
A empresa diminuiu os custos **ou** aumentou as vendas.	A ou B	$A \vee B$

O Quadro 4 contém todos os conectivos lógicos que estudaremos, porém, neste texto trabalharemos com os quatro primeiros (veja que os três primeiros já foram mencionados até aqui):

Quadro 4: Conectivos da Lógica Matemática

Conectivo	Símbolo
não	$\sim$ *ou* $\neg$ *ou* $\overline{\ }$ *ou* $'$
e	$\wedge$
ou	$\vee$
ou...ou...	$\underline{\vee}$
se...então...	$\rightarrow$
se e somente se	$\leftrightarrow$

A negação (conectivo "não") já foi abordada. De agora em diante trataremos separadamente as ideias relativas aos demais conectivos.

4.1 O Conectivo "e" (que faz a CONJUNÇÃO entre proposições)

As proposições compostas que são formadas por proposições simples, ligadas por palavras que fazem uma substancial diferença em relação ao significado final de toda uma frase, em especial naquilo que envolve o valor lógico final de uma proposição (V ou F).

Machado de Assis foi um escritor e Led Zeppelin foi uma banda de Rock. Note que essa proposição é composta e pode ser subdividida em outras duas simples:

1) Machado de Assis foi um escritor.
2) Led Zeppelin foi uma banda de Rock.
Note, também, que estas proposições simples estão associadas pelo conectivo e. Pois bem, neste exemplo, ambas as proposições simples são verdadeiras e a proposição composta também é verdadeira. Agora, o que dizer sobre a veracidade das proposições compostas seguintes:

- Machado de Assis não foi um escritor e Led Zeppelin foi uma banda de Rock.
- Machado de Assis foi um escritor e Led Zeppelin não foi uma banda de Rock.
- Machado de Assis não foi um escritor e Led Zeppelin não foi uma banda de Rock.

Você concorda que são todas falsas? Isso porque todas possuem pelo menos uma proposição simples que é falsa, e este fato nos leva à conclusão de que toda a afirmação é falsa, já que as proposições simples estão ligadas pelo conectivo e que transmite a ideia de simultaneidade. Quaisquer que sejam as proposições simples A e B, a tabela-verdade apresentada no Quadro 5 determina o valor lógico para a proposição composta A ∧ B, para todas as possibilidades.

Quadro 5: tabela-verdade completa para A **e** B

A	**B**	**A ∧ B**
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

Portanto, você deve chegar à seguinte conclusão para uma conjunção (duas proposições ligadas por e): ela (inteira) será verdadeira se as duas sentenças que a compõem forem simultaneamente verdadeiras. Nos demais casos, a conjunção é falsa.

DICA

Na língua portuguesa, há expressões que são associadas ao mesmo conectivo lógico.
Conjunção: e, mas, também, além disso.
Negação: não, é falso que, não é verdade que.

4.2 O “ou” inclusivo (DISJUNÇÃO inclusiva).

Agora vamos estudar proposições compostas que são formadas por proposições simples ligadas por ou. Considere a proposição composta:

• Os alunos dessa turma gostam de cantar ou dançar. As proposições simples envolvidas são:

- Os alunos dessa turma gostam de cantar.
- Os alunos dessa turma gostam de dançar.

Naquela proposição composta, a ideia transmitida é a de que pelo menos uma das duas proposições simples é verdadeira, o que não desconsidera o fato de ambas serem verdadeiras simultaneamente. Observe que isso ocorre porque ela envolve o conectivo ou, cujo símbolo é $\vee$. Preste bastante atenção neste parágrafo, pois ele te mostrará as quatro linhas da tabela-verdade para o conectivo ou:

- se os alunos gostam de cantar e não gostam de dançar, a afirmação é verdadeira.
- se os alunos não gostam de cantar mas gostam de dançar, a afirmação também é verdadeira.
- se os alunos gostam de dançar e de cantar, tudo bem, a afirmação é verdadeira.
- somente não é verdadeira se os alunos não gostam de cantar nem de dançar. Todos esses resultados podem ser conferidos no Quadro 6. Quaisquer que sejam as proposições simples A e B, a tabela-verdade apresentada no Quadro 6 determina o valor lógico para a proposição composta $A \vee B$, para todas as possibilidades.

Quadro 6: tabela-verdade completa para A **ou** B

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Mas está faltando uma explicação: por que essa conversa toda sobre o conectivo ou recebeu o nome de disjunção inclusiva? A palavra disjunção nos lembra de conjuntos que não possuem elementos em comum, mas aqui a ideia se refere mais à situação em que os conjuntos são diferentes, podendo ou não ter elementos em comum (as proposições podem ter valores lógicos diferentes, uma é V e a outra é F, ou vice-versa). E a palavra inclusiva vem completar a ideia de incluir a possibilidade de ocorrer as duas proposições simples envolvidas na proposição composta; no caso do exemplo que fornecemos: veja que se os alunos gostam de cantar e também de dançar a sentença é verdadeira (V ou V implica em V). Bem, tudo isso é para reforçar que “V ou F”, “F ou V” e também “V ou V” são composições que resultam em V. Veja mais alguns exemplos:

• Machado de Assis foi um escritor ou Led Zeppelin foi uma banda de Rock (aqui temos um exemplo de V ou V resultando em V).

• Machado de Assis foi um escritor ou Machado de Assis escreveu "Iracema" (aqui temos um exemplo de V ou F resultando em V, já que a primeira é verdadeira, mas a segunda não, pois o belíssimo romance "Iracema" foi escrito por José de Alencar).

• Led Zeppelin foi uma banda de axé ou Led Zeppelin gravou "Stairway to Heaven" (aqui temos um exemplo de F ou V, resultando em V, já que a primeira é falsa, mas a segunda é verdadeira, pois "Stairway to Heaven" é uma das canções mais populares do Rock).

4.3 O "ou" exclusivo (DISJUNÇÃO exclusiva).

Observe a proposição: "Agripino é paulista ou pernambucano". A escrita (sintaxe) da palavra ou é a mesma, mas o significado (semântica) dessa proposição composta não é exatamente o mesmo discutido na seção anterior. Veja outro exemplo: "a luz está acesa ou apagada." Percebeu o porquê da palavra "exclusiva"? Não? Então vamos explicar: o conectivo ou que está nas proposições compostas anteriores não admitirá que ambas as condições aconteçam simultaneamente. Esse ou, nesse exemplo de Agripino, exclui a possibilidade de ocorrer ambas as proposições ao mesmo tempo. Na proposição composta "Agripino é paulista ou pernambucano", considere as proposições simples: 1) Agripino é paulista. 2) Agripino é pernambucano. Neste caso, a palavra ou exclui uma das possibilidades, já que uma pessoa não pode ter nascido, simultaneamente, em Pernambuco e em São Paulo. Ou seja, somente uma das duas expressões se realizará para que se torne verdadeira. Portanto, esse "ou exclusivo" deve se diferenciar do "ou inclusivo" nos símbolos. Seu símbolo é parecido com aquele do ou inclusivo, mas com um traço embaixo, ficando assim: $\veebar$. Veja que o exemplo "A luz está acesa ou apagada." é similar, pois a luz não poderá estar apagada e acesa ao mesmo tempo. Também existem proposições compostas em que podemos destacar apenas uma alternativa entre duas, ou seja, em que o ou transmite a ideia de exclusão da ocorrência simultânea das proposições simples, mesmo havendo a possibilidade da ocorrência simultânea delas. Por exemplo:

• Farei inscrição para o curso de Espanhol ou de Inglês. Para abordar esse "ou exclusivo" na linguagem corrente, e diferenciar o "ou inclusivo" do "ou exclusivo", usa-se a palavra "ou" escrita duas vezes (ou...ou...). Iremos reescrever os exemplos desta seção para você perceber que já conhece essa maneira de excluir uma de duas possibilidades:
• "Ou Agripino é paulista, ou é pernambucano".
• "Ou a luz está acesa, ou está apagada".
• "Farei inscrição ou para o curso de Espanhol, ou para o curso de Inglês".

Quadro 7: tabela-verdade completa para **ou A ou B**

A	B	$A \veebar B$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

5. Fórmulas lógicas e a construção de Tabelas-Verdade

Chamamos de fórmula lógica qualquer proposição (simples ou composta) que podemos simbolizar por meio dos conectivos lógicos estudados até aqui.

<u>Exemplo 1</u>: Valores lógicos para $A \wedge (\sim B)$

Considere a proposição composta: “Ariovaldo assinou o formulário e Benedito não contratou a equipe de suporte.” Muito bem, comecemos simbolizando as proposições:

A = Ariovaldo assinou o formulário.
B = Benedito contratou a equipe de suporte.

Como a proposição afirma que Benedito não fez o referido contrato, então simbolizaremos essa afirmação com ~B. Porém, iniciamos a tabela com todas as possibilidades de valores V e F nas duas proposições A e B (recomendamos usar sempre a mesma ordem para começar: VV, VF, FV, FF):

A	B	~B	A ∧ (~B)
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

Exemplo 2: Valores lógicos para (~A) ∨ (~B)

Considere a proposição composta: “Clésio não tomou o remédio de pressão alta ou Clésio não tem problema de pressão alta.” Simbolizando as proposições: A = Clésio tomou o remédio de pressão alta. B = Clésio tem problema de pressão alta. Primeiramente, fazemos a negação de A, e depois a negação de B:

A	B	~A	~B	(~A) ∨ (~B)
V	V	F		
V	F	F		
F	V	V		
F	F	V		

A	B	~A	~B	(~A) ∨ (~B)
V	V	F	F	
V	F	F	V	
F	V	V	F	
F	F	V	V	

Exemplo 3: Valores lógicos para ~(A $\veebar$ B)

Considere a proposição composta: “Não é verdade que você ou vai à reunião ou termina o relatório”. Simbolizando as proposições: A = Você vai à reunião. B = Você termina o relatório. Ao contrário do exemplo 2, não iniciaremos pela negação, pelo fato de que a expressão “não é verdade que...” está negando toda a proposição composta que vem a seguir; portanto, faremos primeiramente a tabela do “ou exclusivo” para, em seguida, fazermos a negação dela. Veja a evolução dessa tabela:

A	B	A $\veebar$ B	~(A $\veebar$ B)
V	V	F	
V	F	V	
F	V	V	
F	F	F	

A	B	A $\veebar$ B	~(A $\veebar$ B)
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

A Informática, em especial as Linguagens de Programação, utiliza muito os conceitos estudados. Ela usa, inclusive, algumas notações próprias para símbolos que estudamos aqui, por exemplo: os dígitos 0 e 1, que são usados em códigos binários, são comumente associados aos valores lógicos que estudamos: 0 equivale a FALSO e 1 equivale a VERDADEIRO. E é perceptível como a lógica é a mesma da teoria dos conjuntos. Diante disso, aprecie as tabelas que você já estudou, escritas de outra maneira, para cada um dos conectivos.

(a) A negação. No começo do texto desta UA, vimos que negação está associada ao complementar de um conjunto. Veja as tabelas para a negação e também para os outros conectivos, em três "versões": para a Lógica Proposicional, para a Informática e para a Teoria dos Conjuntos.

Tabela lógica

A	~A
V	F
F	V

Tabela da informática

A	¬A
1	0
0	1

Tabela de pertinência

A	$\bar{A}$
∈	∉
∉	∈

(b) Conectivo E (na Informática, é bastante usado o símbolo "•", que lembra a multiplicação entre números).

Tabela lógica

A	B	A ∧ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabela da informática

A	B	A • B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tabela de pertinência

A	B	A ∩ B
∈	∈	∈
∈	∉	∉
∉	∈	∉
∉	∉	∉

(c) Conectivo OU (inclusivo) – Na Informática, é bastante usado o símbolo "+", que lembra a adição entre números.

Tabela lógica

A	B	A ∨ B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela da informática

A	B	A + B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tabela de pertinência

A	B	A ∪ B
∈	∈	∈
∈	∉	∈
∉	∈	∈
∉	∉	∉

(d) Conectivo OU (exclusivo) – Na Informática, é bastante usado o símbolo "⊕", que lembra o símbolo + já usado, porém com este sinal dentro de um círculo. Lembre-se que esse conectivo foi associado à diferença simétrica (△) nos conjuntos.

Tabela lógica

A	B	A $\veebar$ B
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela da informática

A	B	A ⊕ B
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tabela de pertinência

A	B	A △ B
∈	∈	∉
∈	∉	∈
∉	∈	∈
∉	∉	∉

Veja agora um resumo com todas as operações, usando os conectivos lógicos do texto:

A	B	~A	~B	A ∧ B	A ∨ B	A $\veebar$ B
V	V	F	F	V	V	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F