Admisibilidad de la regla estructural de weakening sobre un sistema de secuentes en deducción natural etiquetada para la lógica S4 (G3K4).

Luis Alberto Díaz Díaz

June 20, 2021

Este trabajo es parcialmente una traducción al español del capitulo 10 del libro Proof Analysis de Negri y Von Plato. Cualquier error que se encuentre es probablemente soluble consultando dicho libro.

0.1 Lógica Modal

La lógica modal es una forma de llamar a diversos tipos de sistemas formales que tratan de capturar ciertas nociones. La falta de consenso sobre dichas nociones es la razón de existir de diversos sistemas formales. Por lo anterior, no intentaremos definir que es la lógica modal y nos contentaremos con usar el termino para referirnos al estudio de sistemas donde las formulas lógicas del calculo proposicional admiten dos operadores nuevos, los operadores modales $\Box$ y $\diamond$ (necesidad y posibilidad).

Así pues, las formulas que tendremos en cuenta son las generadas mediante el uso regular de los conectivos $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ y los operadores unarios prefijos $\neg$, $\Box$, $\diamond$. Por ejemplo si A es una formula proposicional regular, entonces $\Box A$ y $\diamond A$, también son formulas proposicionales y su lectura sera respectivamente "necesariamente A" y "posiblemente A".

El sistema base para trabajar con la lógica modal es denotado como $\mathbb{K}$ y corresponde al sistema de la lógica clásica con los siguientes axiomas añadidos :

$$\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B) \tag{1}$$

$$Regla\,de\,necesidad: \; De\,A\,se\,sigue\,\Box A. \tag{2}$$

Junto con la regla de modus ponens. La regla de necesidad requiere que A sea un teorema dentro del sistema axiomático.

Por supuesto el sistema que nos interesa para S4 es uno de deducción natural, por lo que debemos abordar el tema de la traducción de los axiomas de $\mathbb{K}$ a reglas de deducción natural. En este caso obtenemos:

$$\frac{\Box(A \Rightarrow B) \quad \Box A}{\Box B} \tag{3}$$

$$\frac{A}{\Box A}\,\Box\mathrm{I} \tag{5}$$

Tal como su nombre lo sugiere, los operadores $\Box$ y $\diamond$ tratan de modelar un mundo donde algunas cosas son siempre ciertas y algunas solo son ciertas en algún contexto. Por esta razón, la regla de necesidad requiere de restricciones, en este caso, se trata de darle algún contexto a A para evitar el poder formar el esquema $A \Rightarrow \Box A$ (que todo lo que es cierto en algún contexto es cierto siempre). Una discusión sobre cuando se puede aplicar la regla de necesidad nos llevaría a una comparación entre el cuantificador universal y el operador de necesidad. Y en realidad, utilizaremos el cuantificador universal en nuestra meta-teoría para definir el sentido del operador de necesidad.

Antes de continuar, requerimos notar que al usar la lógica proposicional clásica, $\Box$ y $\diamond$ pueden definirse mutuamente mediante el uso de la negación y por ello omitiremos en ocaciones a $\diamond$. El efecto al considerar como base la lógica proposicional intuicionista es que estaremos trabajando únicamente con el fragmento de la necesidad.

La posibilidad de definir un operador en términos del otro dejara de ser sorprendente al saber que usaremos el cuantificador existencial de la meta-lógica para definir a la $\diamond$.

Múltiples axiomas pueden ser añadidos a $\mathbb{K}$ y tener consecuencias interesantes, pero los que nos interesan son los siguientes :

$$\Box A \Rightarrow A \tag{T}$$
$$\Box A \Rightarrow \Box\Box A \tag{4}$$

Donde el numeró cuatro es el nombre del axioma.

0.2 Semántica de Kripke

Un frame de Kripke es un conjunto W cuyos elementos llamaremos mundos, junto con una relación binaria R sobre los elementos de W que llamamos relación de accesibilidad.

Una valuación val para un frame de Kripke toma un mundo w y una formula P y devuelve un valor 0 o 1. Adoptamos la notación :

$$w \Vdash P \quad iff \quad val(w, P) = 1.$$

Y decimos que : La formula P se cumple en el mundo w. Adicionalmente si val(w, P) = 0, podemos escribir $w \nVdash P$.

Adicionalmente esperamos que una valuación satisfaga:

Toda variable proposicional tiene un valor asociado por la valuación en cada mundo.
$w \Vdash A \wedge B \quad si\, w \Vdash A\, y\, w \Vdash B.$
$w \Vdash A \vee B \quad si\, w \Vdash A\, o\, w \Vdash B.$
$w \Vdash A \Rightarrow B \quad si\, de\, w \Vdash A\, se\, sigue\, w \Vdash B.$
$w \Vdash \perp para\, ningun\, w.$

Con estas condiciones toda formula en un mundo tiene un valor asociado y utilizando las reglas de la valuación para la implicación y la constante falso, se cumple $w \nVdash A$ implica $w \Vdash \neg A$.

Un frame de Kripke junto con una valuación es llamado un modelo de Kripke.

Diremos que una formula A en un frame de Kripke W es valida en W si, para cada evaluación, $w \Vdash A$ para cada mundo w de W.

Hasta ahora ignoramos a la relación binaria que viene con el frame, para la relación definimos el que una formula sea necesaria como:

$$w \Vdash \Box A \text{ si y solo si para toda } o, \quad o \Vdash A \quad \text{se sigue de } wRo.$$

Con lo anterior acabamos de establecer un significado para la necesidad.

Si necesitamos otra razón para estudiar la lógica modal a través de los modelos de Kripke, esta seria que varios los diversos axiomas que se pueden añadir al sistema $\mathbb{K}$, son equivalentes a expresar condiciones sobre la relación de accesibilidad R. Por ejemplo, el axioma (4) es equivalente a que la relación de accesibilidad sea transitiva, probemos solo que la transitividad implica el axioma:

Asuma $w \Vdash \Box A$, sean r, o tales que wRr y rRo, por hipótesis wRo y $o \Vdash A$. Luego $r \Vdash \Box A$ para todo r y entonces $w \Vdash \Box\Box A$.

De la misma forma se puede probar que se cumple el axioma (T) si se da la reflexividad sobre R.

En ambos casos es posible probar el reciproco mediante la selección de un mundo arbitrario y una valuación particular para el mundo y la formula.

Por lo tanto los modelos de Kripke nos ofrecen un lugar donde examinar a la lógica S4.

0.3 Calculo de secuentes.

Para traducir el uso de modelos de Kripke a secuentes, es necesario saber como codificar los diversos mundos. Esto se puede hacer mediante el uso de etiquetas en la los secuentes de la lógica clásica. No solo eso, esta codificación tiene la ventaja de permitir una separación parcial entre las reglas lógicas del sistema y propiedades sobre la relación binaria del modelo de Kripke. Dicha separación parcial permite utilizar estructuras complejas sobre la relación manteniendo admisibles las reglas estructurales de weakening y cut.

Dicho esto, nuestros contextos son multiconjuntos cuyos elementos son formulas modales etiquetadas por su mundo $w : A$ para indicar que $w \Vdash A$ y átomos relacionales wRo.

Las reglas para el calculo de secuentes de $\mathbb{K}$ forman el sistema llamado G3Kse muestran a continuación para Γ y Δ contextos.

Initial sequents

$$w : P, \Gamma \to \Delta, w : P \qquad\qquad wRo, \Gamma \to \Delta, wRo$$

Propositional rules

$$\frac{w : A, w : B, \Gamma \to \Delta}{w : A\&B, \Gamma \to \Delta}\, L\& \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, w : A \quad \Gamma \to \Delta, w : B}{\Gamma \to \Delta, w : A\&B}\, R\&$$

$$\frac{w : A, \Gamma \to \Delta \quad w : B, \Gamma \to \Delta}{w : A \vee B, \Gamma \to \Delta}\, L\vee \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, w : A, w : B}{\Gamma \to \Delta, w : A \vee B}\, R\vee$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, w : A \quad w : B, \Gamma \to \Delta}{w : A \supset B, \Gamma \to \Delta}\, L\supset \qquad \frac{w : A, \Gamma \to \Delta, w : B}{\Gamma \to \Delta, w : A \supset B}\, R\supset$$

$$\frac{}{w : \bot, \Gamma \to \Delta}\, L\bot$$

Modal rules

$$\frac{o : A, w : \Box A, wRo, \Gamma \to \Delta}{w : \Box A, wRo, \Gamma \to \Delta}\, L\Box \qquad \frac{wRo, \Gamma \to \Delta, o : A}{\Gamma \to \Delta, w : \Box A}\, R\Box$$

$$\frac{wRo, o : A, \Gamma \to \Delta}{w : \Diamond A, \Gamma \to \Delta}\, L\Diamond \qquad \frac{wRo, \Gamma \to \Delta, w : \Diamond A, o : A}{wRo, \Gamma \to \Delta, w : \Diamond A}\, R\Diamond$$

En los secuentes iniciales P es una formula atómica arbitraria. En $R\Box$ y $L\Diamond$, la o es una variable fresca.

Ahora se puede apreciar la separación mencionada al observar que la regla de secuente inicial para R es la única que permite el uso de los átomos relacionales en el lado derecho del $\vdash$.

Debemos traducir los axiomas (4) y (T) a este calculo de secuentes.

El primer caso es simple pues la reflexividad es fácil de expresar.

$$\frac{wRw, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\text{Ref}$$

$$\frac{wRr, wRo, oRr\Gamma \vdash \Delta}{wRo, oRr, \Gamma \vdash \Delta}\text{Trans}$$

El caso de la transitividad requiere un poco mas de atención pues, la regla esquematica para la forma de traducir axiomas a reglas de secuentes indicaria el uso de una sola wRr en el lado izquierdo del antecedente si se usara de forma ciega.

Con estas dos reglas tenemos el sistema con el que vamos a trabajar G3S4. Por conveniencia continuaremos mencionándolo como S4 salvo que indiquemos lo contrario.

0.4 Admisibilidad

Vamos a preparar el terreno para probar que el sistema axiomático para S4 se corresponde con las reglas para el calculo de secuentes que tenemos.

Theorem 1. *Para toda formula modal A, en S4 se cumple que*

$$w : A, \Gamma \vdash \Delta, w : a$$

es derivable.

Proof. La prueba es por inducción sobre las formas de construir una formula moda. El caso de una formula atómica es directamente un secuente inicial. Para los conectivos regulares solo es necesario aplicar las reglas proposicionales, basta aplicar primero la regla derecha correspondiente y después la regla izquierda. Para los operadores modales hacemos solo la derivación para la necesidad

$$\dfrac{\dfrac{o : A, w : \Box A, wRo, \Gamma \vdash \Delta, o : A}{w : \Box A, wRo, \Gamma \vdash \Delta, o : A}\text{L}\Box}{w : \Box A, \Gamma \vdash \Delta, w : \Box A}\text{R}\Box$$

♠

Theorem 2. *Para toda formulas modales A,B en S4 se cumple que*

$$\vdash \Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$$

es derivable.

Proof. Por el teorema anterior es valido el secuente inicial de la derivación :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{o : A, o : B, o : A, wRo, w\Box A, w : \Box(A \Rightarrow B) \vdash o : B}{o : A \Rightarrow B, o : A, wRo, w\Box A, w : \Box(A \Rightarrow B) \vdash o : B}\text{L} \Rightarrow}{o : A, wRo, w\Box A, w : \Box(A \Rightarrow B) \vdash o : B}\text{L} \Box}{wRo, w\Box A, w : \Box(A \Rightarrow B) \vdash o : B}\text{L} \Box}{w\Box A, w : \Box(A \Rightarrow B) \vdash w : \Box B}\text{R} \Box}{w : \Box(A \Rightarrow B) \vdash w : (\Box A \Rightarrow \Box B)}\text{R}\Rightarrow$$

♠

Así pues, nos hace falta probar la admisibilidad de la regla de necesidad para poder afirmar que S4 cumple al menos con los axiomas de $\mathbb{K}$ para logica modal. Para probar la admisibilidad, primero probaremos la regla de weakening y para ello nuestra mas poderosa aliada sera la sustitución de etiquetas definida como:

$$\begin{aligned}
wRo(r/l) &= wRo\, si\, l \neq w\, y l \neq o \\
wRo(r/w) &= rRo\, si\, w \neq o \\
wRo(r/o) &= wRr\ si\, w \neq o \\
wRw(r/w) &= rRr \\
w : A(r/o) &= w : A\, si\, o \neq w \\
w : A(r/w) &= r : A
\end{aligned}$$

Theorem 3. *Si* $\Gamma \vdash \Delta$ *en S4, entonces* Γ*(o/w)* $\vdash \Delta$*(o/w) también es derivable y lo es con la misma altura.*

Proof. Para el caso $n = 0$ y si la sustitución no es vacía, los casos en que es un secuente inicial y no la regla de falso, son inmediatos así como también lo es el caso de la regla de falso.

Para $n > 0$ hay varios casos. Primero si la ultima regla aplicada en la derivación es una proposicional distinta a falso, solo hacemos el caso para $L\wedge$.

$$\dfrac{\begin{matrix} & \vdots \\ w : A, \Gamma \vdash \Delta & w : B, \Gamma \vdash \Delta \end{matrix}}{w : A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}\text{L} \wedge$$

Por lo que usando la hipótesis de inducción en A y B y volviendo a aplicar la regla, se obtiene la conclusión deseada. Lo mismo ocurre con las reglas $L\Box$ y $R\diamond$.

De las reglas modales restantes solo consideramos $R\Box$. Si la sustitución es vacía terminamos, si no, tenemos dos casos el primero de los cuales tiene otros dos subcasos. El primer caso es que w aparezca en la regla, asumimos que w no es la variable fresca pues de serlo seria inmediato.

El primer subcaso es si o no es la variable fresca, en cuyo caso repetimos el proceso de las reglas proposicionales. El segundo subcaso donde o es la variable fresca que requiere la regla, entonces podemos conseguir primero una nueva variable fresca r distinta a o y que no aparece en el resto de secuentes, por lo que es simple remplazar o por r en esta regla sin alterar los secuentes, con lo que podemos proceder como antes.

El segundo caso es si w no aparece como etiqueta de la formula principal de la regla, por lo que se puede seguir aplicando el mismo proceso que en los anteriores casos.

Falta pues, probar que las reglas de reflexividad y transitividad tambien admiten la sustitución.

El caso de la reflexividad se hace por casos si w aparece como formula principal o no y es analogo.

La transitividad requiere de considerar casos como en la regla de $R\Box$. ♠

Debido a que tenemos reglas izquierda, derecha y un caso inicial adicional, la regla de weakening viene como cuatro reglas separadas.

Theorem 4. *some some*

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{w : A, \Gamma \vdash \Delta}\,LW \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, w : A}\,RW$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{wRo, \Gamma \vdash \Delta}\,LW_R \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, wRo}\,RW_R$$

Proof. Las cuatro pruebas son similares, por lo que solo haremos la primera prueba. La prueba es por inducción sobre la altura de la derivación. Para cualquiera de lo secuentes iniciales la conclusión se sigue de las reglas iniciales. Para la regla de falso también basta usar la regla de falso. Para una derivación de altura $n > 0$, solo hacemos el caso para $L\wedge$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ s : C, s : B, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{s : C \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\wedge$$

Por hipótesis de inducción tenemos una prueba de altura $n - 1$ para

$$\begin{array}{c}\vdots\\ w : A, s : C, s : B, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}$$

por lo que aplicando $L\wedge$ obtenemos la conclusión.

El caso de las reglas modales se hace utilizando el teorema de sustitución si es necesario, para remplazar las variables que puedan coincidir y aplicando la hipótesis de inducción como el caso anterior.

Las reglas de reflexividad y transitividad tampoco ofrecen mayor problema. ♠

Con esto ya podemos probar que en S4 es al menos tan poderosa como $\mathbb{K}$

Theorem 5. *La regla de necesidad es admisible en S4*

Proof. Dada una derivación de $\vdash w : A$. Por el teorema sobre sustitución existe una prueba de $\vdash o : A$ y como el weakening es admisible, $wRo \vdash o : A$. Por $R\Box$ tenemos entonces $\vdash w : \Box A$ ♠

Para finalizar debemos al menos probar que el resto de axiomas de S4 como sistema de Hilbert, son validos en G3K4.

El primero es $\Box A \Rightarrow a$ que tiene una derivación simple.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{w : A, wRw, w : \Box A \vdash w : A}{wRw, w : \Box A \vdash w : A}\text{L}\Box}{wRw \vdash w : \Box A \Rightarrow A}\text{L}\Rightarrow}{\vdash w : \Box A \Rightarrow A}\text{Ref}$$

La transitividad es solo un poco mas complicada.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{r : A, wRr, oRr, wRo, w : \Box A \vdash r : A}{wRr, oRr, wRo, w : \Box A \vdash r : A}\text{L}\Box}{oRr, wRo, w : \Box A \vdash r : A}\text{Trans}}{wRo, w : \Box A \vdash o : \Box A}\text{R}\Box}{w : \Box A \vdash w : \Box\Box A}\text{R}\Box}{\vdash w : w : \Box A \Rightarrow \Box\Box A}\text{R}\Rightarrow$$

Así que G3K4 es capaz de derivar las mismas cosas que el sistema axiomático para S4.