

# 1 Mengen

- Reihenfolge und Vielfachheit bei einer Menge egal:  $\{a, b, c, b\} = \{b, c, a\}$
- Mengen gleich/äquivalent falls  $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- Mengen sind Objekte die Objekte enthalten  $\rightarrow \{a, b, \{c, d\}\}$  ist eine Menge
- $A \subseteq \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$
- $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A$  und  $B$  sind disjunkt

Die Potenzmenge  $2^M$ , bzw.  $P(M)$  enthält alle möglichen Teilmengen von der Menge  $M$ :

- $M = \{1, 2\} \rightarrow P(M) = P(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- $|P(M)| = 2^{|M|} \rightarrow |P(M)| = 2^2 = 4 \rightarrow$  Beweis durch Binaerbaum

$P \subseteq P(M)$  ist die Partition einer Menge  $M$  und besteht aus disjunkten, nicht leeren Teilmenge von  $M$ , deren Vereinigung  $M$  ergibt:

- $\forall A, B \in P \subseteq P(M) : A \cap B = \emptyset \vee A = B$
- mögliche Partitionen von  $M = \{1, 2, 3\} : \{1, 2, 3\}, \{\{1\}, 2, 3\}, \dots$

## 1.1 Operationen auf Mengensysteme

- $\cap S := \cap_{M \in S} M \Rightarrow$  mit  $S = \{\{a, b, c\}, \{b, d\}\}, \cap S = \{b\}$
- $\cup S := \cup_{M \in S} M \Rightarrow$  mit  $S = \{\{a, b, c\}, \{b, d\}\}, \cup S = \{a, b, c, d\}$

Damit gilt:

- $A \cap B = \cap\{A, B\}$
- $A \cup B = \cup\{A, B\}$

Für  $S = \{M_1, \dots, M_k\}$  über die Mengen  $M_1, \dots, M_n$  und  $k \in \mathbb{N}$ :

- $\cup_{i=1}^k := \cup$
- $\cap_{i=1}^k := \cap$

## 1.2 Mengenoperationen auf einem definierten Universum

Ist eine Menge  $\Omega$  (Universum) definiert  $\Omega \setminus A = -A$

Mengenumformungen:

- $A = - - A$
- $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- $A \setminus (...) = A \cap -(...)$
  
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

## 2 Tupel

Endliche Auflistung einer Anzahl an Objekten unter Beachtung von Reihenfolge und Vielfachheiten.

- $(a, b, c, a, c, a) \neq (a, b, c)$
- $|(a, b, c, a, c, a)| = 6$
- $\forall i \in (\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_0) \exists_1 a_i \Rightarrow$  Sequenz/Folge (geordnete Auflistung)

### 2.1 Kartesisches Produkt

- $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$
- $A \times B \times C := \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$
- $(A \times B) \times C := \{((a, b), c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$

$\rightarrow A^k = A \times \dots \times A^k$  mit  $a_1, \dots, a_k \in A$

### 2.2 Sprachen

Die Menge aller (endlicher) Tupel mit Einträgen aus dem Alphabet  $\Sigma$  schreibt man:

$$\Sigma^* := \cup_{k \in \mathbb{N}} \Sigma^k = \cup \{\Sigma^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$$

( $\Sigma^*$  beschreibt # endlicher Wörter über  $\Sigma$ )

- leeres Tupel entspricht dem leeren Wort:  $\epsilon$
- Wörter werden konkateniert dargestellt und nicht als Tupel
- $L \subseteq \Sigma^*$  beinhaltet die erlaubten Wörter der Sprache aus dem Alphabet  $\Sigma$
- $uv$  beschreibt das Konkatenieren zweier Wörter

### 3 Relationen

- die Relation  $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_k$  lautet k-stellige Relation.
- analog dazu lautet  $R \subseteq A \times B$  binaere Relation.
- $(a_1, \dots, a_k) \in R \Rightarrow$  die Elemente  $(a_1, \dots, a_k)$  stehen bzgl.  $R$  in Relation.

Ein Notationsproblem taucht auf  $\rightarrow$  Somit fuehren wir die Infixnotation ein:

- $3 \leq_{\mathbb{N}} 5$  statt  $(3, 5) \in \leq_{\mathbb{N}}$
- $\geq_{\mathbb{R}}^{-1} = \leq_{\mathbb{R}}$  - die Inverse Relation  $R^{-1} := \{(b, a) \mid (a, b) \leq_R\}$

#### 3.1 Ausblick Datenbanken

Der Join -  $R \bowtie_{i=j} S$  konkatinert die Eintragege zweier Tables, dessen i-ter Eintrag in ihrer jeweiligen Zeile zum j-ten Eintrag der jeweiligen Zeile in S passt.

Die Projektion  $\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_j}$  reduziert jedes Tupel mit  $(r_1, \dots, r_k)$  auf die Eintraege der Position  $i \leq 1, \dots, j \leq k$ .

#### 3.2 Graphen

Veranschaulichung von binaeren Relationen mittels Graphen.

Ein gerichteter Graph (kurz: Digraph)  $G = (V, E)$  besteht aus:

- die Knotenmenge  $V$ :  $v \in V$  sind die Knoten von G
- die binaere Relation  $E \subseteq V \times V$ : Menge an Kantentupeln zwischen 2 Knoten
- $\forall (s, t) \in E$  gilt:  $s$  (*source*)  $\longrightarrow t$  (*target*) (Darstellungsrichtung)

Ein Digraph  $G$  ist endlich, falls  $|V|$  endlich.

Ein Digraph  $G$  ist bipartit falls man  $V$  in  $M_1$  und  $M_2$  unterteilen kann mit  $M_1 \cap M_2 = \{\}$  und  $\forall e \in E$  gilt:  $(a, b)$  mit  $a \in M_1$  und  $b \in M_2$

Ein Weg/Pfad:

- $(v_0, \dots, v_k)$ ,  $v_i \in V$  ist ein Pfad falls  $(v_{i-1}, v_i) \in E$  existiert
- Laenge des Pfades entspricht den Eintraegen des Tupels  $-1$
- ein Pfad lautet "einfach", falls jeder enthaltende Knoten im Tupel unique ist

### 3.3 Relationales Produkt

Sind  $R \subseteq A \times B$  sowie  $S \subseteq C \times D$  binäre Relationen so ist das relationale Produkt die binäre Relation  $RS \subseteq A \times D$  (Verkettung):

$$RS = \{(a, d) \mid x \in B \cap C, (a, x) \in R, (x, d) \in S\}$$

Binäere Relationen  $R \subseteq A \times A$ , auf der Menge  $A$ :

- $R^0 := Id_A := \{(a, a) \mid a \in A\}$
- $R^1 := R$  - trivial
- $R^2 := RR$  - Verkettung
- $R^k := R \dots R$  -  $k$ -mal,  $k \in \mathbb{N}_0$
- $R^{\leq k} := \bigcup_{i=0}^k R^i = R^0 \cup \dots \cup R^k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$
- $R^{\geq k} := \bigcup_{i=k}^{\infty} R^i = R^k \cup \dots \cup R^{\infty}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$
- ...
- Transitive Hülle:  $R^+ := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R^k = R^{>0}$
- Reflexiv-transitive Hülle:  $R^* := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R^k = R^0 \cup R^+ = R^{\geq 0}$

Ist  $A$  endlich und  $n = |A|$ , dann gilt:  $R^* = R^{\leq n-1}$ , denn der größte einfache Pfad ist  $n - 1$  Kanten lang mit einem Pfad von  $n$  Einträgen

### 3.4 Eigenschaften Relationen

$R \subseteq A \times A$  auf einer Menge  $A$ :

- reflexiv:  $Id_A \subseteq R$
- symmetrisch:  $\forall (s, t) \in R \exists (t, s) \in R$
- asymmetrisch:  $\forall (s, t) \in R \text{ not } \exists (t, s) \in R$ ,  $s \neq t$
- antisymmetrisch:  $(s, t) \in R$  falls  $\exists (t, s) \in R$  dann  $s = t$
- transitiv:  $\forall ((s, t) \in R \wedge (t, u) \in R) \exists (s, u) \in R$

Äquivalenzrelation - Unterteilen/partitionieren die Objekte eines Universums nach verschiedenen "Äquivalenzbegriffen":

- Eigenschaften: reflexiv, symmetrisch, transitiv
- $=_{\mathbb{Z}}$ : dieselbe/identische Zahl
- $\equiv_{\mathbb{N}}$ : derselbe Rest bei Division durch  $n$

Ordnungsrelation - (teilweise) (partiell) Anordnung von Objekten:

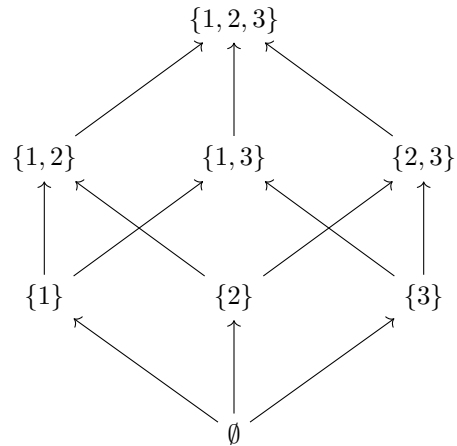
$R \subseteq A \times A$  : reflexiv, antisymmetrisch, transitiv  $\rightarrow$  partielle Ordnung (Halbordnung)

$R \subseteq A \times A$  :  $\forall a, b \in R$  gilt:  $((a, b) \vee (b, a)) \in R \rightarrow$  totale Ordnung (Totalordnung)

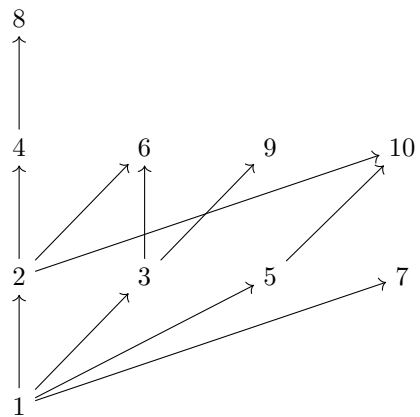
### 3.5 Hasse-Diagramm

Eine Hasse-Diagramm visualisiert Ordnungsrelationen. Dabei kann es eine Ordnung bezüglich, Teilbarkeit, Grössee, etc. sein.

Hasse-Diagramm bezüglich der Teilmengen der Potenzmenge  $\subseteq$  auf  $P([3])$  :

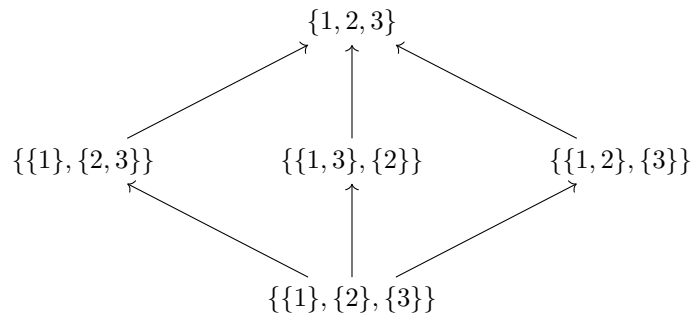


Hasse-Diagramm bezüglich  $|\mathbb{N} \cap ([10] \times [10])$  - direkte Teiler(an)ordnung:



### 3.6 Ordnungsrelationen

Hasse-Diagramm zur Ordnung auf Äquivalenzrelation über  $\{1, 2, 3\} - R \preceq S$ :



$m \in A$  ist ein maximales Element falls es keine ausgehenden Kanten gibt (außer zu sich selbst)

$m \in A$  ist das größte Element falls es von jedem Element eine eingehende Kante hat aber keine ausgehenden Kanten besitzt

Analog dazu definiert man minimales / kleinstes Element

## 4 Funktionen

Eine Relationen  $R \subseteq A \times B$  ist eine totale Funktion, falls  $\forall a \in A \exists_1 b \in B$  mit  $(a, b) \in R$

Als partielle Funktion bezeichnet man Funktionen die jedem  $a \in A$  hoechstens ein  $b \in B$  zuordnen koennen

Konventionen:

- $f : A \rightarrow B$  bedeutet:  $f \subseteq A \times B$  eine totale Funktion von  $A$  nach  $B$  ist
- $f : A \hookrightarrow B$  bedeutet:  $f \subseteq A \times B$  eine partielle Funktion von  $A$  nach  $B$  ist
- $f(a)$  steht fuer das eindeutige  $b \in B$  mit  $(a, b) \in f$
- " $\mapsto$ " definiert Funktion:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$
- die Menge aller Funktionen von  $A$  nach  $B$ :  $B^A := \{f : A \rightarrow B\}$
- die Anzahl der Funktionen dazu analog:  $|B|^{|A|}$
- Schreibweise von Funktion die  $k$  Parameter nehmen:  $f(a_1, \dots, a_k)$
- $k$  bezeichnet man als Stelligkeit/Aritaet von  $f$  ( $k$ -aere Funktion)
- die Urbildmenge ist eine Teilmenge von  $A$  fuer die gilt:  $a \in A \exists_{\geq 1} b \in B$
- die Bildmenge ist die Menge  $\{f(a) \mid a \in A\}$

Operationen:

- $f : A^k \rightarrow A$  bedeutet  $k$ -stellige Operation auf  $A$
- Infixnotation fuer binaere Operationen:  $(x +_{\mathbb{R}} y)$  statt  $+_{\mathbb{R}}(x, y)$

Eine binaere Operation  $\otimes : A \times A \rightarrow A$  ist:

- assoziativ, falls:  $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c), \forall a, b, c \in A$
- kommutativ, falls:  $a \otimes b = b \otimes a, \forall a, b \in A$
- idempotent, falls:  $a \otimes a = a, \forall a \in A$

Komposition (Nacheinanderausfuehrung):

- $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$  schreibt man:  $(g \circ f) : A \rightarrow C, a \mapsto g(f(a))$
- Komposition ist assoziativ:  $(h \circ (g \circ f))(a) = ((h \circ g) \circ f)(a)$
- Komposition ist nicht kommutativ!
- Schreibweise:  $fg = \{(a, g(f(a))) \mid a \in A\} = (g \circ f)$

Eigenschaften:

- injektiv, falls  $\forall a \in A$  bilden jeweils allein auf  $\exists_1 b$  ab
- surjektiv, falls  $\forall b \in B \exists_{\geq 1} a \in A$  womit  $(a, f(a))$
- bijektiv, falls injektiv und surjektiv erfuehlt

$\rightarrow$  ist  $f$  bijektiv existiert ihre Umkehrfunktion:  $\{(b, a) \mid b \in B, a \in f^{-1}(\{b\})\}$   
 $\rightarrow f^{-1}$  ist auch bijektiv, da  $(f^{-1} \circ f)(a) = a, \forall a \in \text{dom}(f) \subseteq A$



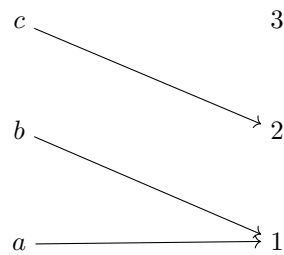
Weitere Eigenschaften:

- $f$  injektiv  $\Rightarrow g : A \rightarrow f(A), a \mapsto f(a)$  bijektiv
- $f : A \rightarrow A$  mit  $f : A \rightarrow \mathbb{N}_k$  und injektiv  $\Rightarrow f$  bijektiv
- $f : A \rightarrow A$  mit  $f : A \rightarrow \mathbb{N}_k$  und surjektiv  $\Rightarrow f$  bijektiv
- $f : A \rightarrow B \wedge g : B \rightarrow C$  injektiv  $\Rightarrow (g \circ f)$  injektiv
- $f : A \rightarrow B \wedge g : B \rightarrow C$  surjektiv  $\Rightarrow (g \circ f)$  surjektiv
- $(g \circ f)$  surjektiv  $\Rightarrow g$  surjektiv
- $(g \circ f)$  injektiv  $\Rightarrow f$  injektiv
  
- $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$
- $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$
  
- $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$
- $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$  (Achtung)
- $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y) \Leftrightarrow f$  injektiv

## 4.1 Visualisierung

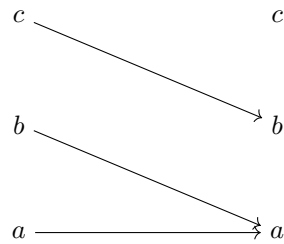
$f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\} \subseteq A \times B$  mit  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = [3]$

als Funktion:



$f = \{(a, a), (b, a), (c, b)\} \subseteq A \times A$  mit  $A = \{a, b, c\}$

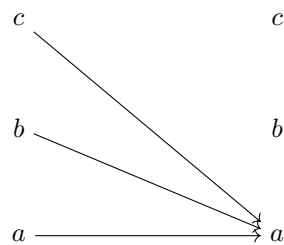
als Funktion:



$f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$  mit  $A = \{a, b, c\}$

Hierbei ueberspringt man den ersten Schritt und visualisiert direkt  $(a, f(f(a)))$  und nicht  $(a, b), (b, c)$  als Aneinanderhaengung

als Funktion:



## 5 Kardinalitaet von Mengen

$f : A \rightarrow B$  injektiv  $\Rightarrow \forall a \in A \exists_1 \text{ unique } b \in B \wedge (a, b) \in R \Rightarrow |B| \geq |A|$   
 $\Rightarrow B$  mindestens so maechtig wie  $A$

$f : A \rightarrow B$  bijektiv  $\Rightarrow \forall a \in A \exists_1 \text{ unique } b \in B$   
 $\wedge \forall b \in B \exists_1 \text{ unique } a \in A \wedge (a, b) \in R \Rightarrow |B| = |A|$   
 $\Rightarrow A$  und  $B$  sind gleichmaechtig

Die Komposition injektiver Funktionen ist wieder injektiv:  
 $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$

Fuer zwei beliebige Mengen gilt:  
 $|A| \leq |B| \wedge |A| \geq |B| \Rightarrow |A| = |B|$  (Satz von Cantor-Bernstein-Schroeder)

Fuer nichtabzaehlbare Mengen gilt:

- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}_0| \leq |\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{N}| \leq \dots \Rightarrow$  gleichmaechtig
- unendliche Mengen sind zueinander immer bijektiv  $\Rightarrow |\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$
- eine beliebige Mengen  $A$  nennt man abzaehlbar, falls  $|A| < |\mathbb{N}|$ , sonst nennt man  $A$  ueberabzaehlbar

### 5.1 Ueberabzaehlbare Mengen

- $|A|$  nennt man Kardinalzahl fuer eine Menge  $A$
- $\leq$  ist auf alle Kardinalzahlen antisymmetrisch ist (Cantor-Schroeder)
- $A$  abzaehlbar, falls  $\forall a \in A$  eine eindeutige Identifikationsnummer aus  $\mathbb{N}$  erhalten koennen

Satz von Cantor:

- es gilt  $|A| < |P(A)|$
- $f : A \rightarrow P(A), a \mapsto \{a\} \Rightarrow |A| \leq |P(A)|$

Durch Diagonalisierung:  $m \in M \Leftrightarrow m \notin f(m) \in M$   
 $\Rightarrow$  Widerspruch  $\Rightarrow f : A \rightarrow P(A)$  nicht bijektiv