1 Gradfolge

- jedem einfachen Grad laesst sich eine Gradfolge zuordnen
  $\rightarrow (deg(v_1), ..., deg(v_k))$ fuer $V = \{v_1, ..., v_k\}$
- ein Graph heisst k-regulaer $\Leftrightarrow \forall\ v \in V : deg(v) = k$
- der vollstaendige Graph K_n ist $(n-1)$-regulaer
- der Kreisgraph C_n mit $n \geq 3$ ist 2-regulaer
- der Hyperwuerfel Q_n ist n-regulaer
- wichtig: 2 nicht isomorphe Graphen koennen dieselbe Gradfolge besitzen
  $\rightarrow$ Gradfolge kein Beweis fuer Isomorphie

1.1 Handschlaglemma

$$2|E| = \sum_{i \in [n]} deg(v_i)$$

$\rightarrow$ ein einfacher Graph existiert $\Leftrightarrow$ die Summe gerade ist
$\rightarrow$ ein einfacher Graph muss eine gerade Anzahl an Knoten ungeraden Grades haben
$\rightarrow$ ein einfacher Graph mit $|V| > \frac{1}{2} \sum_{i \in [n]} d_i + 1 \Rightarrow |V| > |E| + 1$ kann nicht zshg. sein

1.2 Realisierbarkeit von Gradfolgen - Havel Hakimi

1.2.1 1. Phase

Rekursive Reduktion der Gradfolge bis man eine Abbruchbedingung erreicht
$\rightarrow$ es werden immer so viele Grafolgen reduziert wie gross die Gradfolge des zu entfernenden Knoten ist
$\rightarrow$ nach jedem Schritt neu aufsteigend die uebrig gebliebende Gradfolge sortieren

Bsp.: $(1, 1, 2, 3, 4, 4, 5) \rightarrow (0, 1, 1, 2, 3, 3) \rightarrow (0, 0, 1, 1, 2) \rightarrow (0, 0, 0, 0)$

Falls wird nicht bei einem Tupel aus nur 0 enden ist die Gradfolge nicht realisierbar.

1.2.2 2. Phase

Bottom-up Konstruktion einer Gradfolge beginnend bei 0 um die Existenz eines Graphens und seiner zugehoerigen folge zu beweisen.

2 Baeume

- ein einfacher Graph welcher zshg. und kreisfrei ist, ist ein Baum
  $\rightarrow$ ein Graph ist ein Baum $\Leftrightarrow |E| = |V| - 1$
- ein Knoten mit $deg(u) = 1$ wird als Blatt bezeichnet, sonst als innerer Knoten
- zu einem Baum mit $n \geq 4$ Knoten gibt es $n - 1$ Isomorphe Baeume
- ein Graph dessen maximale Zshgkomponenten Baeume sind nennt man Wald
- jeder Graph hat mindestens einen Spannbaum

2.1 Wurzelbaeume

Ein Wurzelbaum $G = (V, E, r)$ ist ein Baum $G = (V, E)$ mit Wurzel $r \in V$

- die Hoehe $h_G(v),\ v \in V$ ist die Laenge des kuerzesten Pfades zu r
- die Hoehe von G wird mit $h(G) = max\{h_G(v) \mid v \in V\}$
- implizit sind alle Kanten von r weggerichtet, sodass man fuer uEv schreibt:

  $\rightarrow \{u, v\} \in E$ und $h_G(v) = h_G(u) + 1$
  $\rightarrow$ gilt uEv, dann ist u der Vater und v das Kind
  $\rightarrow$ gilt uE^*v, dann ist u der Nachfahre und v der Vorfahre

- fuer $u \in V$ ist $\left(uE^*, E \cap \binom{uE^*}{2}, u\right)$ der durch u induzierte Teilbaum von G
- (B_h, ϵ) hat die Hoehe h, es gibt $2^{h+1} - 1$ Knoten und $2^{h+1} - 2$ Kanten

$\rightarrow$ Anwendung: Suffixbaeume

3 Eulertouren und Hamiltonkreise

Fuer einen Pfad $v_0, ..., v_k$ in G mit $v_0 = v_k$ gilt:

3.1 Eulertour

Ein Pfad heisst Eulertour $\Leftrightarrow$ falls jede Kante genau einmal besucht wird:

$$\Big|\big\{\{v_0, v_1\}, ..., \{v_{k-1}, v_k\}\big\}\Big| = |E|$$

3.1.1 Existenz

Ein zshg. Graph $G = (V, E)$ besitzt eine Eulertour $\Leftrightarrow deg(v) \; mod \; 2 = 0, \forall \; v \in V$

3.2 Hamiltonkreis

Ein Pfad heisst Hamiltonkreis $\Leftrightarrow$ er jeden Knoten genau einmal besucht:

$$|\{v_0, ..., v_{k-1}\}| = |V|$$

3.2.1 Existenz

Hinreichende Bedingung:
Ein einfacher Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ besitzt einen Hamiltonkreis
$\Leftrightarrow deg(v) \geq \frac{|V|}{2}, \; \forall \; v \in V$