1 Gerichtete Graphen

Ein gerichteter Graph (kurz: Digraph) $G = (V, E)$ besteht aus:

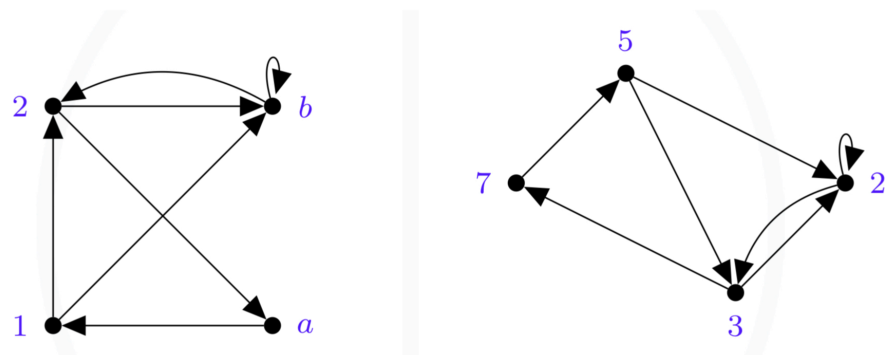
- Kontenmenge $V \rightarrow\ v \in V$ sind die Knoten von G
- die binaere Relation $E \subseteq V \times V$ ist die Kantenmenge von G
- G endlich $\Leftrightarrow$ V endlich
- G ist bipartit $\Leftrightarrow$ (s. Grundlagenskript)
- Pfad (s. Grundlagenskript)
- ein Teilgraph $U \subseteq V$ schreibt man $G[U]$ (von U induzierter Teilgraph):

  $\rightarrow V_H \subseteq V_G$
  $\rightarrow E_H \subseteq E_G$

- G ist zusammenhaengend $\Leftrightarrow u(E \cup E^{-1})^* v\ \forall\ u, v \in V$
- G ist stark zusammenhaengend $\Leftrightarrow uE^*v\ \wedge\ vE^*u\ \forall\ u, v \in V$
- $U \subseteq V$ ist eine (starke) Zusammenhangskomponente $\Leftrightarrow G[U]$ stark zshng.
- U ist eine maximal (starke) Zusammenhangskomponente $\Leftrightarrow$ *not* $\exists\, U \subseteq U^{'} \subseteq V$
- ein Kreis ist einfach $\Leftrightarrow$ alle Knoten paarweise verschieden sind
- eine Schleife/Schlinge ist eine Selbstkante: $(u, u) \in E$
- ein Digraph heit azyklisch $\Leftrightarrow$ kreisfrei
- $uEv \Rightarrow u$ Vorgaenger von v und v Nachfolger von u

1.1 Isomorphie von gerichteten Graphen

Zwei Graphen G, H sind isomorph (strukturgleich) $G \cong H \Leftrightarrow \exists\ \beta : V_G \rightarrow V_H$
Also eine Bijektion exisitert die Kanten respektiert und erhaelt:



$\beta(1) = 5,\ \beta(2) = 3,\ \beta(a) = 7,\ \beta(b) = 2$

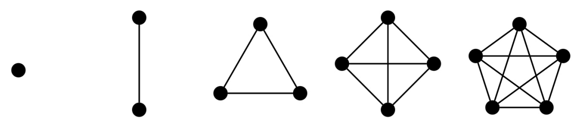
2 Ungerichtete und einfache Graphen

- ein Digraph ist ungerichtet $\Leftrightarrow$ E symmetrisch
- ein endlicher Digraph ist einfach $\Leftrightarrow$ E symmentrisch und irreflexiv
- man beschreibt Kanten als $\binom{V}{2} := \big\{\{u,v\} \subseteq V \mid u \neq v\big\}$
- Nachbarschaft: $\Gamma(u) = \big\{u \in V \mid \{u,v\} \in E\big\}$
- Knotengrad beschreibt die Anzahl der Nachbarn: $deg(u) := |\Gamma(u)|$
- ein Pfad mit mind. 3 Kanten ist ein einfacher Kreis (ohne u, v, u)
- ein einfacher Graph ist bipartit $\Leftrightarrow$ *not* $\exists$ Kreis ungerader Laenge in G

2.1 Vollstaendiger Graph

$K_n := \Big([n], \binom{[n]}{2}\Big)$

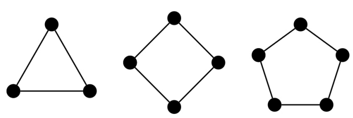
K_1 K_2 K_3 K_4 K_5



2.2 Kreisgraph

$C_n := \Big([n], \big\{\{i, (i\ mod\ n) + 1\} \mid i \in [n]\big\}\Big)$

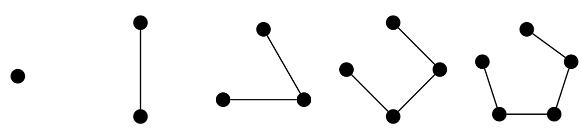
C_3 C_4 C_5



2.3 Pfadgraph

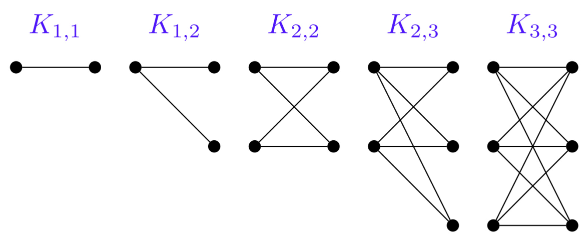
$P_n := \Big([n], \big\{\{i, i+1\} \mid i \in [n-1]\big\}\Big)$

P_1 P_2 P_3 P_4 P_5



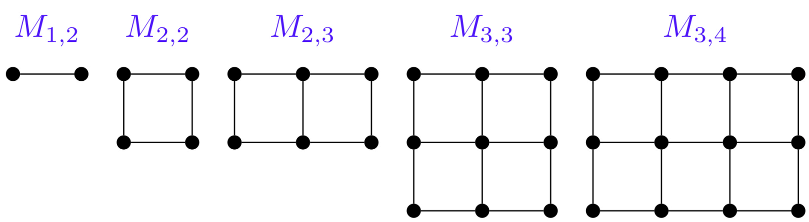
2.4 Vollstaendiger bipartiter Graph

$K_{m,n} := \Big([m+n], \big\{\{i,j\} \mid i \in [m], j \in [m+n] \setminus [m]\big\}\Big),\ m \leq n$



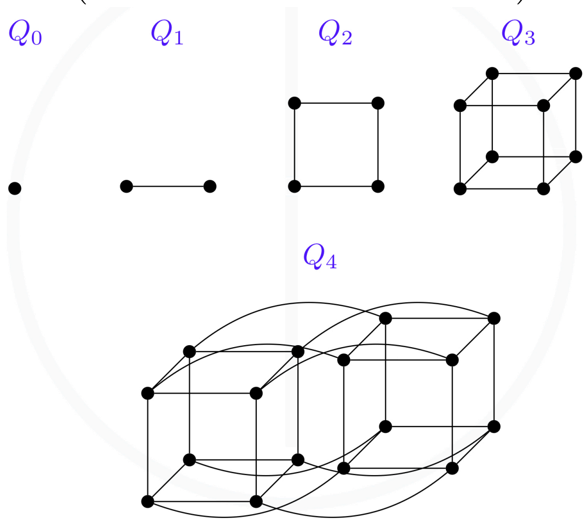
2.5 Gittergraph

$M_{m,n} := \Big([m] \times [n], \big\{\{(i,j),(k,l)\} \mid |i-k| + |j-l| = 1\big\}\Big),\ m \leq n$



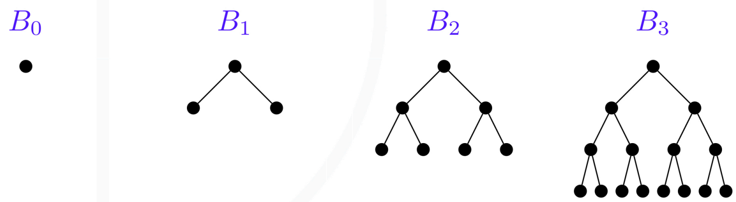
2.6 Hyperwuerfel

$Q_n := \Big(\{0,1\}^n, \big\{\{u,v\} \mid \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i| = 1\big\}\Big)$ mit $Q_0 := \big(\{\epsilon\}, \emptyset\big),\ dim : n$



2.7 perfekter Binaerbaum

$B_h := \Big(\{0,1\}^{\leq h}, \big\{\{u, ux\} \mid u \in \{0,1\}^{\leq h}, x \in \{0,1\}\big\}\Big)$



Ein Knoten u mit $deg(u) \leq 1$ wird als Blatt bezeichnet, alle anderen Knoten als innere Knoten