

1 Mengen

- Reihenfolge und Vielfachheit bei einer Menge egal: $\{a, b, c, b\} = \{b, c, a\}$
- Mengen gleich/äquivalent falls $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- Mengen sind Objekte die Objekte enthalten $\rightarrow \{a, b, \{c, d\}\}$ ist eine Menge
- $A \subseteq \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$
- $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A$ und B sind disjunkt

Die Potenzmenge 2^M , bzw. $P(M)$ enthält alle möglichen Teilmengen von der Menge M :

- $M = \{1, 2\} \rightarrow P(M) = P(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- $|P(M)| = 2^{|M|} \rightarrow |P(M)| = 2^2 = 4 \rightarrow$ Beweis durch Binaerbaum

$P \subseteq P(M)$ ist die Partition einer Menge M und besteht aus disjunkten, nicht leeren Teilmenge von M , deren Vereinigung M ergibt:

- $\forall A, B \in P \subseteq P(M) : A \cap B = \emptyset \vee A = B$
- mögliche Partitionen von $M = \{1, 2, 3\} : \{1, 2, 3\}, \{\{1\}, 2, 3\}, \dots$

1.1 Operationen auf Mengensysteme

- $\cap S := \cap_{M \in S} M \Rightarrow$ mit $S = \{\{a, b, c\}, \{b, d\}\}, \cap S = \{b\}$
- $\cup S := \cup_{M \in S} M \Rightarrow$ mit $S = \{\{a, b, c\}, \{b, d\}\}, \cup S = \{a, b, c, d\}$

Damit gilt:

- $A \cap B = \cap\{A, B\}$
- $A \cup B = \cup\{A, B\}$

Für $S = \{M_1, \dots, M_k\}$ über die Mengen M_1, \dots, M_n und $k \in \mathbb{N}$:

- $\cup_{i=1}^k := \cup$
- $\cap_{i=1}^k := \cap$

1.2 Mengenoperationen auf einem definierten Universum

Ist eine Menge Ω (Universum) definiert $\Omega \setminus A = -A$

Mengenumformungen:

- $A = - - A$
- $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- $A \setminus (...) = A \cap -(...)$
- $A \setminus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

2 Tupel

Endliche Auflistung einer Anzahl an Objekten unter Beachtung von Reihenfolge und Vielfachheiten.

- $(a, b, c, a, c, a) \neq (a, b, c)$
- $|(a, b, c, a, c, a)| = 6$
- $\forall i \in (\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_0) \exists_1 a_i \Rightarrow$ Sequenz/Folge (geordnete Auflistung)

2.1 Kartesisches Produkt

- $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$
- $A \times B \times C := \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$
- $(A \times B) \times C := \{((a, b), c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$

$\rightarrow A^k = A \times \dots \times A^k$ mit $a_1, \dots, a_k \in A$

2.2 Sprachen

Die Menge aller (endlicher) Tupel mit Einträgen aus dem Alphabet Σ schreibt man:

$$\Sigma^* := \cup_{k \in \mathbb{N}} \Sigma^k = \cup \{\Sigma^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$$

(Σ^* beschreibt # endlicher Wörter über Σ)

- leeres Tupel entspricht dem leeren Wort: ϵ
- Wörter werden konkateniert dargestellt und nicht als Tupel
- $L \subseteq \Sigma^*$ beinhaltet die erlaubten Wörter der Sprache aus dem Alphabet Σ
- uv beschreibt das Konkatenieren zweier Wörter

3 Relationen

- die Relation $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_k$ lautet k-stellige Relation.
- analog dazu lautet $R \subseteq A \times B$ binaere Relation.
- $(a_1, \dots, a_k) \in R \Rightarrow$ die Elemente (a_1, \dots, a_k) stehen bzgl. R in Relation.

Ein Notationsproblem taucht auf \rightarrow Somit fuehren wir die Infixnotation ein:

- $3 \leq_{\mathbb{N}} 5$ statt $(3, 5) \in \leq_{\mathbb{N}}$
- $\geq_{\mathbb{R}}^{-1} = \leq_{\mathbb{R}}$ - die Inverse Relation $R^{-1} := \{(b, a) \mid (a, b) \leq_R\}$

3.1 Ausblick Datenbanken

Der Join - $R \bowtie_{i=j} S$ konkatinert die Eintragege zweier Tables, dessen i-ter Eintrag in ihrer jeweiligen Zeile zum j-ten Eintrag der jeweiligen Zeile in S passt.

Die Projektion $\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_j}$ reduziert jedes Tupel mit (r_1, \dots, r_k) auf die Eintraege der Position $i \leq 1, \dots, j \leq k$.

3.2 Graphen

Veranschaulichung von binaeren Relationen mittels Graphen.

Ein gerichteter Graph (kurz: Digraph) $G = (V, E)$ besteht aus:

- die Knotenmenge V : $v \in V$ sind die Knoten von G
- die binaere Relation $E \subseteq V \times V$: Menge an Kantentupeln zwischen 2 Knoten
- $\forall (s, t) \in E$ gilt: s (*source*) $\longrightarrow t$ (*target*) (Darstellungsrichtung)

Ein Digraph G ist endlich, falls $|V|$ endlich.

Ein Digraph G ist bipartit falls man V in M_1 und M_2 unterteilen kann mit $M_1 \cap M_2 = \{\}$ und $\forall e \in E$ gilt: (a, b) mit $a \in M_1$ und $b \in M_2$

Ein Weg/Pfad:

- $(v_0, \dots, v_k), v_i \in V$ ist ein Pfad falls $(v_{i-1}, v_i) \in E$ exisitiert
- Laenge des Pfades entspricht den Eintraegen des Tupels -1
- ein Pfad lautet "einfach", falls jeder enthaltende Knoten im Tupel unique ist

3.3 Relationales Produkt

Sind $R \subseteq A \times B$ sowie $S \subseteq C \times D$ binäre Relationen so ist das relationale Produkt die binäre Relation $RS \subseteq A \times D$ (Verkettung):

$$RS = \{(a, d) \mid x \in B \cap C, (a, x) \in R, (x, d) \in S\}$$

Binäere Relationen $R \subseteq A \times A$, auf der Menge A :

- $R^0 := Id_A := \{(a, a) \mid a \in A\}$
- $R^1 := R$ - trivial
- $R^2 := RR$ - Verkettung
- $R^k := R \dots R$ - k -mal, $k \in \mathbb{N}_0$
- $R^{\leq k} := \bigcup_{i=0}^k R^i = R^0 \cup \dots \cup R^k$, $k \in \mathbb{N}_0$
- $R^{\geq k} := \bigcup_{i=k}^{\infty} R^i = R^k \cup \dots \cup R^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}_0$
- ...
- Transitive Hülle: $R^+ := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R^k = R^{>0}$
- Reflexiv-transitive Hülle: $R^* := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R^k = R^0 \cup R^+ = R^{\geq 0}$

Ist A endlich und $n = |A|$, dann gilt: $R^* = R^{\leq n-1}$, denn der größte einfache Pfad ist $n - 1$ Kanten lang mit einem Pfad von n Einträgen

3.4 Eigenschaften Relationen

$R \subseteq A \times A$ auf einer Menge A :

- reflexiv: $Id_A \subseteq R$
- symmetrisch: $\forall (s, t) \in R \exists (t, s) \in R$
- asymmetrisch: $\forall (s, t) \in R \text{ not } \exists (t, s) \in R$, $s \neq t$
- antisymmetrisch: $(s, t) \in R$ falls $\exists (t, s) \in R$ dann $s = t$
- transitiv: $\forall ((s, t) \in R \wedge (t, u) \in R) \exists (s, u) \in R$

Äquivalenzrelation - Unterteilen/partitionieren die Objekte eines Universums nach verschiedenen "Äquivalenzbegriffen":

- Eigenschaften: reflexiv, symmetrisch, transitiv
- $=_{\mathbb{Z}}$: dieselbe/identische Zahl
- $\equiv_{\mathbb{N}}$: derselbe Rest bei Division durch n

Ordnungsrelation - (teilweise) (partieller) Anordnung von Objekten:

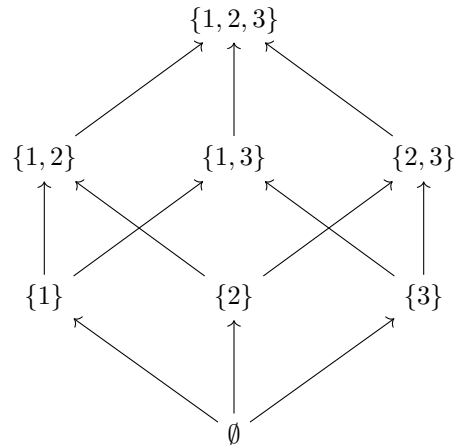
$R \subseteq A \times A$: reflexiv, antisymmetrisch, transitiv \rightarrow partielle Ordnung (Halbordnung)

$R \subseteq A \times A$: $\forall a, b \in R$ gilt: $((a, b) \vee (b, a)) \in R \rightarrow$ totale Ordnung (Totalordnung)

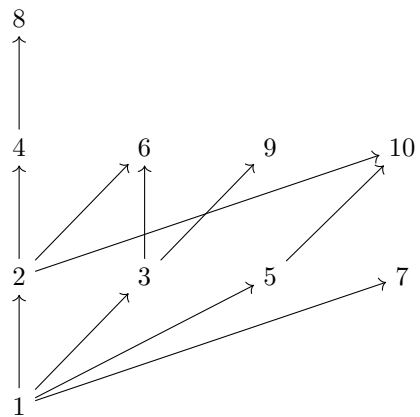
3.5 Hasse-Diagramm

Eine Hasse-Diagramm visualisiert Ordnungsrelationen. Dabei kann es eine Ordnung bezüglich, Teilbarkeit, Grössee, etc. sein.

Hasse-Diagramm bezüglich der Teilmengen der Potenzmenge \subseteq auf $P([3])$:

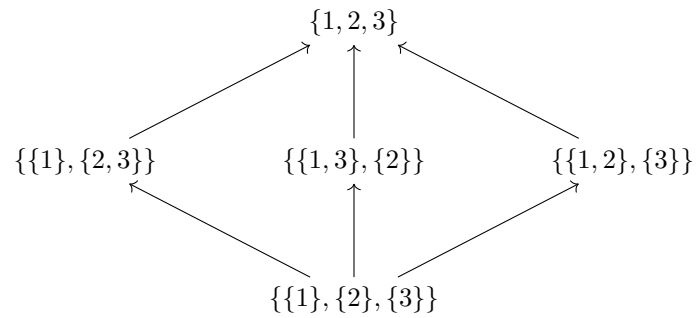


Hasse-Diagramm bezüglich $|\mathbb{N} \cap ([10] \times [10])$ - direkte Teiler(an)ordnung:



3.6 Ordnungsrelationen

Hasse-Diagramm zur Ordnung auf Äquivalenzrelation ueber $\{1, 2, 3\} - R \preceq S$:



$m \in A$ ist ein maximales Element falls es keine ausgehenden Kanten gibt (ausser zu sich selbst)

$m \in A$ ist das groeste Element falls es von jedem Element eine eingehende Kante hat aber keine ausgehenden Kanten besitzt

Analog dazu definiert man minimales / kleinstes Element

4 Funktionen

Eine Relationen $R \subseteq A \times B$ ist eine totale Funktion, falls $\forall a \in A \exists_1 b \in B$ mit $(a, b) \in R$

Als partielle Funktion bezeichnet man Funktionen die jedem $a \in A$ hoechstens ein $b \in B$ zuordnen koennen

Konventionen:

- $f : A \rightarrow B$ bedeutet: $f \subseteq A \times B$ eine totale Funktion von A nach B ist
- $f : A \hookrightarrow B$ bedeutet: $f \subseteq A \times B$ eine partielle Funktion von A nach B ist
- $f(a)$ steht fuer das eindeutige $b \in B$ mit $(a, b) \in f$
- " \mapsto " definiert Funktion: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$
- die Menge aller Funktionen von A nach B : $B^A := \{f : A \rightarrow B\}$
- die Anzahl der Funktionen dazu analog: $|B|^{|A|}$
- Schreibweise von Funktion die k Parameter nehmen: $f(a_1, \dots, a_k)$
- k bezeichnet man als Stelligkeit/Aritaet von f (k -aere Funktion)
- die Urbildmenge ist eine Teilmenge von A fuer die gilt: $a \in A \exists_{\geq 1} b \in B$
- die Bildmenge ist die Menge $\{f(a) \mid a \in A\}$

Operationen:

- $f : A^k \rightarrow A$ bedeutet k -stellige Operation auf A
- Infixnotation fuer binaere Operationen: $(x +_{\mathbb{R}} y)$ statt $+_{\mathbb{R}}(x, y)$

Eine binaere Operation $\otimes : A \times A \rightarrow A$ ist:

- assoziativ, falls: $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c), \forall a, b, c \in A$
- kommutativ, falls: $a \otimes b = b \otimes a, \forall a, b \in A$
- idempotent, falls: $a \otimes a = a, \forall a \in A$

Komposition (Nacheinanderausfuehrung):

- $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ schreibt man: $(g \circ f) : A \rightarrow C, a \mapsto g(f(a))$
- Komposition ist assoziativ: $(h \circ (g \circ f))(a) = ((h \circ g) \circ f)(a)$
- Komposition ist nicht kommutativ!
- Schreibweise: $fg = \{(a, g(f(a))) \mid a \in A\} = (g \circ f)$

Eigenschaften:

- injektiv, falls $\forall a \in A$ bilden jeweils allein auf $\exists_1 b$ ab
- surjektiv, falls $\forall b \in B \exists_{\geq 1} a \in A$ womit $(a, f(a))$
- bijektiv, falls injektiv und surjektiv erfuehlt

\rightarrow ist f bijektiv existiert ihre Umkehrfunktion: $\{(b, a) \mid b \in B, a \in f^{-1}(\{b\})\}$
 $\rightarrow f^{-1}$ ist auch bijektiv, da $(f^{-1} \circ f)(a) = a, \forall a \in \text{dom}(f) \subseteq A$

Weitere Eigenschaften:

- f injektiv $\Rightarrow g : A \rightarrow f(A), a \mapsto f(a)$ bijektiv
- $f : A \rightarrow A$ mit $f : A \rightarrow \mathbb{N}_k$ und injektiv $\Rightarrow f$ bijektiv
- $f : A \rightarrow A$ mit $f : A \rightarrow \mathbb{N}_k$ und surjektiv $\Rightarrow f$ bijektiv
- $f : A \rightarrow B \wedge g : B \rightarrow C$ injektiv $\Rightarrow (g \circ f)$ injektiv
- $f : A \rightarrow B \wedge g : B \rightarrow C$ surjektiv $\Rightarrow (g \circ f)$ surjektiv
- $(g \circ f)$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv
- $(g \circ f)$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv

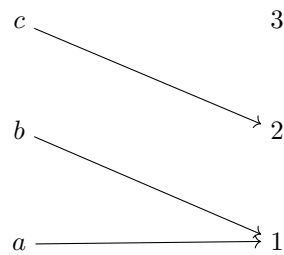
- $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$
- $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

- $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$
- $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$ (Achtung)
- $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y) \Leftrightarrow f$ injektiv

4.1 Visualisierung

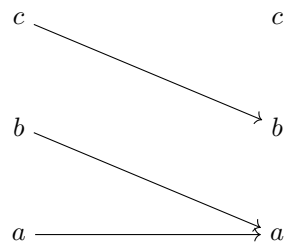
$f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\} \subseteq A \times B$ mit $A = \{a, b, c\}$, $B = [3]$

als Funktion:



$f = \{(a, a), (b, a), (c, b)\} \subseteq A \times A$ mit $A = \{a, b, c\}$

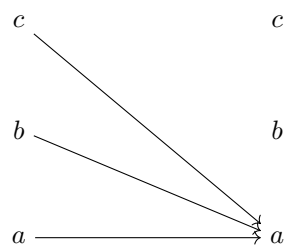
als Funktion:



$f = \{(a, f(f(a))) \mid a \in A\}$ mit $A = \{a, b, c\}$

Hierbei ueberspringt man den ersten Schritt und visualisiert direkt $(a, f(f(a)))$ und nicht (a, b) , (b, c) als Aneinanderhaengung

als Funktion:



5 Kardinalitaet von Mengen

$f : A \rightarrow B$ injektiv $\Rightarrow \forall a \in A \exists_1 \text{ unique } b \in B \wedge (a, b) \in R \Rightarrow |B| \geq |A|$
 $\Rightarrow B$ mindestens so maechtig wie A

$f : A \rightarrow B$ bijektiv $\Rightarrow \forall a \in A \exists_1 \text{ unique } b \in B$
 $\wedge \forall b \in B \exists_1 \text{ unique } a \in A \wedge (a, b) \in R \Rightarrow |B| = |A|$
 $\Rightarrow A$ und B sind gleichmaechtig

Die Komposition injektiver Funktionen ist wieder injektiv:
 $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$

Fuer zwei beliebige Mengen gilt:
 $|A| \leq |B| \wedge |A| \geq |B| \Rightarrow |A| = |B|$ (Satz von Cantor-Bernstein-Schroeder)

Fuer nichtabzaehlbare Mengen gilt:

- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}_0| \leq |\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{N}| \leq \dots \Rightarrow$ gleichmaechtig
- unendliche Mengen sind zueinander immer bijektiv $\Rightarrow |\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$
- eine beliebige Mengen A nennt man abzaehlbar, falls $|A| < |\mathbb{N}|$, sonst nennt man A ueberabzaehlbar

5.1 Ueberabzaehlbare Mengen

- $|A|$ nennt man Kardinalzahl fuer eine Menge A
- \leq ist auf alle Kardinalzahlen antisymmetrisch ist (Cantor-Schroeder)
- A abzaehlbar, falls $\forall a \in A$ eine eindeutige Identifikationsnummer aus \mathbb{N} erhalten koennen

Satz von Cantor:

- es gilt $|A| < |P(A)|$
- $f : A \rightarrow P(A), a \mapsto \{a\} \Rightarrow |A| \leq |P(A)|$

Durch Diagonalisierung: $m \in M \Leftrightarrow m \notin f(m) \in M$
 \Rightarrow Widerspruch $\Rightarrow f : A \rightarrow P(A)$ nicht bijektiv

5.2 Multimengen

Bei einer Multimenge beachtet man die Vielfachheiten der Elemente aber nicht die Reihenfolge.

- Kennzeichnung Multimenge: $\{\}_M$
- fuer ein festes Universum Ω lassen sich Multimengen mittels Zaehlfunktion $m \in \mathbb{N}_0^\Omega$ darstellen:
 - $\rightarrow \Omega = \{a, b, c, d\} : \{a, b, c, a\}_M = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1), (d, 0)\}$
 - \rightarrow eine Menge $A \subseteq \Omega$ laesst sich somit als charakteristische Funktion von A darstellen: $\{0, 1\}^\Omega$
- die Vereinigung zweier Multimengen entspricht der punktweisen Addition der Zaehlfunktionen
- der Schnitt entspricht dem punktweisen Minimum der Zaehlfunktionen