1 Mengen

- Reihenfolge und Vielfachheit bei einer Menge egal: $\{a, b, c, b\} = \{b, c, a\}$
- Mengen gleich/aequivalent falls $A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A$
- Mengen sind Objekte die Objekte enthalten $\rightarrow \{a, b, \{c, d\}\}$ ist eine Menge
- $A \subseteq \emptyset \ \Leftrightarrow \ A = \emptyset$
- $A \cap B = \emptyset \ \Leftrightarrow \ A$ und B sind disjunkt

Die Potenzmenge 2^M, bzw. $P(M)$ enthaelt alle moeglichen Teilmengen von der Menge M:

- $M = \{1, 2\} \rightarrow P(M) = P(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- $|P(M)| = 2^{|M|} \rightarrow |P(M)| = 2^2 = 4 \rightarrow$ Beweis durch Binaerbaum

$P \subseteq P(M)$ ist die Partition einer Menge M und besteht aus disjunkten, nicht leeren Teilmenge von M, deren Vereinigung M ergibt:

- $\forall \ A, B \in P \subseteq P(M): \ A \cap B = \emptyset \ \vee \ A = B$
- moegliche Partitionen von $M = \{1, 2, 3\}: \ \{1, 2, 3\}, \{\{1\}, 2, 3\}\}, ...$

1.1 Operationen auf Mengensysteme

- $\cap S := \cap_{M \in S} M \Rightarrow$ mit $S = \{\{a, b, c\}, \{b, d\}\}, \ \cap S = \{b\}$
- $\cup S := \cup_{M \in S} M \Rightarrow$ mit $S = \{\{a, b, c\}, \{b, d\}\}, \ \cup S = \{a, b, c, d\}$

Damit gilt:

- $A \cap B = \cap\{A, B\}$
- $A \cup B = \cup\{A, B\}$

Fuer $S = \{M_1, ..., M_k\}$ ueber die Mengen $M_1, ..., M_n$ und $k \in \mathbb{N}$:

- $\cup_{i=1}^{k} := \cup$
- $\cap_{i=1}^{k} := \cap$

1.2 Mengenoperationen auf einem definierten Universum

Ist eine Menge Ω (Universum) definiert $\Omega \setminus A = -A$

Mengenumformungen:

- $A = --A$
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- $A \setminus (...) = A \cap -(...)$

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

2 Tupel

Endliche Auflistung einer Anzahl an Objekten unter Beachtung von Reihenfolge und Vielfachheiten.

- $(a, b, c, a, c, a) \neq (a, b, c)$
- $|(a, b, c, a, c, a)| = 6$
- $\forall\ i \in (\mathbb{N}\ \vee\ \mathbb{N}_0)\ \exists_1\ a_i \Rightarrow$ Sequenz/Folge (geordnete Auflistung)

2.1 Karthesisches Produkt

- $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$
- $A \times B \times C := \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$
- $(A \times B) \times C := \{((a, b), c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$

$\rightarrow A^k = A \times ... \times A^k$ mit $a_1, ..., a_k \in A$

2.2 Sprachen

Die Menge aller (endlicher) Tupel mit Eintraegen aus dem Alphabet Σ schreibt man:

$$\Sigma^* := \cup_{k \in \mathbb{N}} = \cup\{\Sigma^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$$

(Σ^* beschreibt # endlicher Woerter ueber Σ)

- leeres Tupel entspricht dem leeren Wort: ϵ
- Woerter werden konkatiniert dagestellt und nicht als Tupel
- $L \subseteq \Sigma$ beinhaltet die erlaubten Woerter der Sprache aus dem Alphabet Σ
- uv beschreibt das konkatinieren zweier Woerter

3 Relationen

- die Relation $R \subseteq A_1 \times ... \times A_k$ lautet k-stellige Relation.
- analog dazu lautet $R \subseteq A \times B$ binaere Relation.
- $(a_1, ..., a_k) \in R \Rightarrow$ die Elemente $(a_1, ..., a_k)$ stehen bzgl. R in Relation.

Ein Notationsproblem taucht auf $\rightarrow$ Somit fuehren wir die Infixnotation ein:

- $3 \leq_{\mathbb{N}} 5$ statt $(3, 5) \in \leq_{\mathbb{N}}$
- $\geq_{\mathbb{R}}^{-1} = \leq_{\mathbb{R}}$ - die Inverse Relation $R^{-1} := \{(b, a) \mid (a, b) \leq_R\}$

3.1 Ausblick Datenbanken

Der Join - $R \bowtie_{i=j} S$ konkatiniert die Eintragege zweier Tables, dessen i-ter Eintrag in ihrer jeweiligen Zeile zum j-ten Eintrag der jeweiligen Zeile in S passt.

Die Projektion $\pi_{i_1}, ..., \pi_{i_j}$ reduziert jedes Tupel mit $(r_1, ..., r_k)$ auf die Eintraege der Position $i \leq 1, ..., j \leq k$.

3.2 Graphen

Veranschaulichung von binaeren Relationen mittels Graphen.
Ein gerichteter Graph (kurz: Digraph) $G = (V, E)$ besteht aus:

- die Knotenmenge V: $v \in V$ sind die Knoten von G
- die binaere Relation $E \subseteq V \times V$: Menge an Kantentupeln zwischen 2 Knoten
- $\forall (s, t) \in E$ gilt: s $(source) \longrightarrow t$ $(target)$ (Darstellungsrichtung)

Ein Digraph G ist endlich, falls $|V|$ endlich.
Ein Digraph G ist bipartit falls man V in M_1 und M_2 unterteilen kann mit $M_1 \cap M_2 = \{\}$ und $\forall\ e \in E$ gilt: (a, b) mit $a \in M_1$ und $b \in M_2$

Ein Weg/Pfad:

- $(v_0, ..., v_k)$, $v_i \in V$ ist ein Pfad falls $(v_{i-1}, v_i) \in E$ existiert
- Laenge des Pfades entspricht den Eintraegen des Tupels -1
- ein Pfad lautet "einfach", falls jeder enthaltende Knoten im Tupel unique ist

3.3 Relationales Produkt

Sind $R \subseteq A \times B$ sowie $S \subseteq C \times D$ binare Relationen so ist das relationale Produkt die binaere Relation $RS \subseteq A \times D$ (Verkettung):

$$RS = \{(a,d) \mid x \in B \cap C,\ (a,x) \in R,\ (x,d) \in S\}$$

Binaere Relationen $R \subseteq A \times A$, auf der Menge A:

- $R^0 := Id_A := \{(a,a) \mid a \in A\}$
- $R^1 := R$ - trivial
- $R^2 := RR$ - Verkettung
- $R^k := R....R$ - k-mal, $k \in \mathbb{N}_0$
- $R^{\leq k} := \cup_{i=0}^{k} R^i = R^0 \cup ... \cup\ R^k,\ k \in \mathbb{N}_0$
- $R^{\geq k} := \cup_{k}^{\infty} R^i = R^k \cup ... \cup\ R^\infty,\ k \in \mathbb{N}_0$
- ...
- Transitive Huelle: $R^+ := \cup_{k \in \mathbb{N}} R^k = R^{>0}$
- Reflexiv-transitive Huelle: $R^* := \cup_{k \in \mathbb{N}_{\not{0}}} R^k = R^0 \cup R^+ = R^{\geq 0}$

Ist A endlich und $n = |A|$, dann gilt: $R^* = R^{\leq n-1}$, denn der groete einfache Pfad ist $n-1$ Kanten lang mit einem Pfad von n Eintraegen

3.4 Eigenschaften Relationen

$R \subseteq A \times A$ auf einer Menge A:

- reflexiv: $Id_A \subseteq R$
- symmetrisch: $\forall (s,t) \in R\ \exists\ (t,s) \in R$
- asymmetrisch: $\forall (s,t) \in R\ not\ \exists\ (t,s) \in R,\ s \neq t$
- antisymmetrisch: $(s,t) \in R$ falls $\exists\ (t,s) \in R$ dann $s = t$
- transitiv: $\forall \big((s,t) \in R\ \wedge\ (t,u) \in R\big)\ \exists\ (s,u) \in R$

Aequivalenzrelation - Unterteilen/partitionieren die Objekte eines Universums nach verschiedenen "Aequivalenzbegriffen":

- Eigenschaften: reflexiv, symmetrisch, transitiv
- $=_{\mathbb{Z}}$: dieselbe/identische Zahl
- $\equiv_{\mathbb{N}}$: derselbe Rest bei Division durch n

Ordnungsrelation - (teilweise) (partitielle) Anordnung von Objekten:

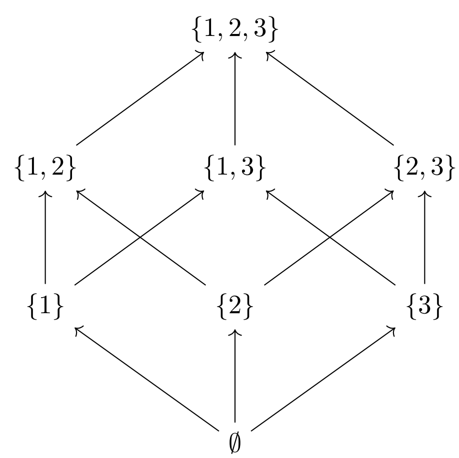
$R \subseteq A \times A$: reflexiv, antisymmetrisch, transitiv $\rightarrow$ partielle Ordnung (Halbordnung)

$R \subseteq A \times A$: $\forall\ a,b \in R$ gilt: $((a,b)\ \vee\ (b,a)) \in R \rightarrow$ totale Ordnung (Totalordnung)

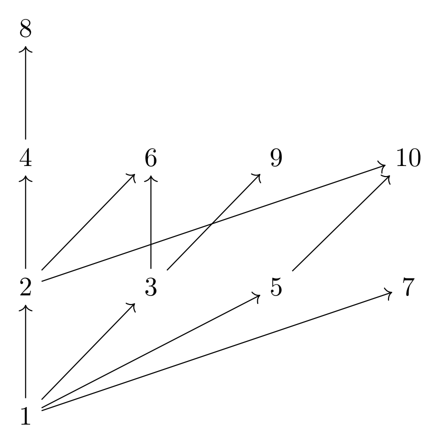
3.5 Hasse-Diagramm

Eine Hasse-Diagramm visualisiert Ordnungsrelationen. Dabei kann es eine Ordnung bezglich, Teilbarkeit, Groessee, etc. sein.

Hasse-Diagramm bezueglich der Teilmengen der Potenzmenge $\subseteq$ auf $P([3])$:



Hasse-Diagramm bezueglich $|_{\mathbb{N}} \cap ([10] \times [10])$ - direkte Teiler(an)ordnung:



3.6 Ordnungsrelationen

Hasse-Diagramm zur Ordnung auf Aequivalenzrelation ueber $\{1,2,3\}\ -R \preccurlyeq S$:

$$\begin{tikzcd}
& \{1,2,3\} & \\
\{\{1\},\{2,3\}\} \arrow[ur] & \{\{1,3\},\{2\}\} \arrow[u] & \{\{1,2\},\{3\}\} \arrow[ul] \\
& \{\{1\},\{2\},\{3\}\} \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$m \in A$ ist ein maximales Element falls es keine ausgehenden Kanten gibt (ausser zu sich selbst)

$m \in A$ ist das groete Element falls es von jedem Element eine eigehende Kante hat aber keine ausgehenden Kanten besitzt

Analog dazu definiert man minimales / kleinstes Element

4 Funktionen

Eine Relationen $R \subseteq A \times B$ ist eine totale Funktion, falls $\forall a \in A\ \exists_1\ b \in B$ mit $(a, b) \in R$
Als partielle Funktion bezeichnet man Funktionen die jedem $a \in A$ hoechstens ein $b \in B$ zuordnen koennen

Konventionen:

- $f : A \to B$ bedeutet: $f \subseteq A \times B$ eine totale Funktion von A nach B ist
- $f : A \hookrightarrow B$ bedeutet: $f \subseteq A \times B$ eine partielle Funktion von A nach. B ist
- $f(a)$ steht fuer das eindeutige $b \in B$ mit $(a, b) \in f$
- "$\mapsto$" definiert Funktion: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 1$
- die Menge aller Funktionen von A nach B: $B^A := \{f : A \to B\}$
- die Anzahl der Funktionen dazu analog: $|B|^{|A|}$
- Schreibweise von Funktion die k Parameter nehmen: $f(a_1, ..., a_k)$
- k bezeichnet man als Stelligkeit/Aritaet von f (k-aere Funktion)
- die Urbildmenge ist eine Teilmenge von A fuer die gilt: $a \in A\ \exists_{\geq 1}\ b \in B$
- die Bildmenge ist die Menge $\{f(a) \mid a \in A\}$

Operationen:

- $f : A^k \to A$ bedeutet k-stellige Operation auf A
- Infixnotation fuer binaere Operationen: $(x +_{\mathbb{R}} y)$ statt $+_{\mathbb{R}}(x, y)$

Eine binaere Operation $\otimes : A \times A \to A$ ist:

- assoziativ, falls: $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c),\ \forall a, b, c \in A$
- kommutativ, falls: $a \otimes b = b \otimes a,\ \forall a, b \in A$
- idempotent, falls: $a \otimes a = a,\ \forall a \in A$

Komposition (Nacheinanderausfuehrung):

- $f : A \to B$ und $g : B \to C$ schreibt man: $(g \circ f) : A \to C,\ a \mapsto g(f(a))$
- Komposition ist assoziativ: $(h \circ (g \circ f)(a) = ((h \circ g) \circ f)(a)$
- Komposition ist nicht kommutativ!
- Schreibweise: $fg = \{(a, g(f(a))) \mid a \in A\} = (g \circ f)$

Eigenschaften:

- injektiv, falls $\forall a \in A$ bilden jeweils allein auf $\exists_1\ b$ ab
- surjektiv, falls $\forall b \in B \exists_{\geq 1}\ a \in A$ womit $(a, f(a))$
- bijektiv, falls injektiv und surjektiv erfuellt

$\to$ ist f bijektiv existiert ihre Umkehrfunktion: $\{(b, a) \mid b \in B, a \in f^{-1}(\{b\})\}$
$\to$ f^{-1} ist auch bijektiv, da $(f^{-1} \circ f)(a) = a,\ \forall a \in dom(f) \subseteq A$

Weitere Eigenschaften:

- f injektiv $\Rightarrow g : A \to f(A),\ a \mapsto f(a)$ bijektiv
- $f : A \to A$ mit $f : A \to \mathbb{N}_k$ und injektiv $\Rightarrow f$ bijektiv
- $f : A \to A$ mit $f : A \to \mathbb{N}_k$ und surjektiv $\Rightarrow f$ bijektiv
- $f : A \to B\ \wedge\ g : B \to C$ injektiv $\Rightarrow (g \circ f)$ injektiv
- $f : A \to B\ \wedge\ g : B \to C$ surjektiv $\Rightarrow (g \circ f)$ surjektiv
- $(g \circ f)$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv
- $(g \circ f)$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv

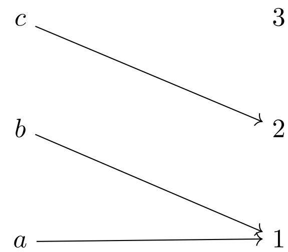
- $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$
- $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

- $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$
- $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$ (Achtung)
- $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y) \Leftrightarrow f$ injektiv

4.1 Visualisierung

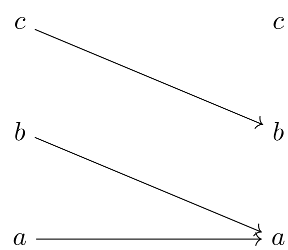
$f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\} \subseteq A \times B$ mit $A = \{a, b, c\},\ B = [3]$

als Funktion:



$f = \{(a, a), (b, a), (c, b)\} \subseteq A \times A$ mit $A = \{a, b, c\}$

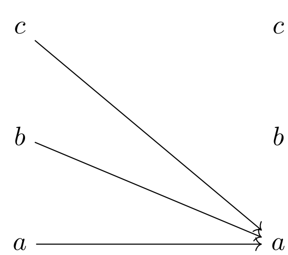
als Funktion:



$f = \{(a, f(f(a)))|\ a \in A)\}$ mit $A = \{a, b, c\}$

Hierbei ueberspringt man den ersten Schritt und visualisiert direkt $(a, f(f(a)))$ und nicht $(a, b), (b, c)$ als Aneinanderhaengung

als Funktion:



5 Kardinalitaet von Mengen

$f : A \to B$ injektiv $\Rightarrow \forall a \in A\ \exists_1$ unique $b \in B\ \wedge (a,b) \in R \Rightarrow |B| \geq |A|$
$\Rightarrow$ B mindestens so maechtig wie A

$f : A \to B$ bijektiv $\Rightarrow \forall a \in A\ \exists_1$ unique $b \in B$
$\wedge\ \forall b \in B\ \exists_1$ unique $a \in A\ \wedge (a,b) \in R \Rightarrow |B| = |A|$
$\Rightarrow$ A und B sind gleichmaechtig

Die Komposition injektiver Funktionen ist wieder injektiv:
$|A| \leq |B|\ \wedge\ |B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$

Fuer zwei beliebige Mengen gilt:
$|A| \leq |B|\ \wedge\ |A| \geq |B| \Rightarrow |A| = |B|$ (Satz von Cantor-Bernstein-Schroeder)

Fuer nichtabzaehlbare Mengen gilt:

- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}_0| \leq |\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{N}| \leq ... \Rightarrow$ gleichmaechtig
- unendliche Mengen sind zueinander immer bijektiv $\Rightarrow |\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$
- eine beliebige Mengen A nennt man abzaehlbar, falls $|A| < |\mathbb{N}|$, sonst nennt man A ueberabzaehlbar

5.1 Ueberabzaehlbare Mengen

- $|A|$ nennt man Kardinalzahl fuer eine Menge A
- $\leq$ ist auf alle Kardinalzahlen antisymmetrisch ist (Cantor-Schroeder)
- A abzaehlbar, falls $\forall\ a \in A$ eine eindeutige Identifikationsnummer aus $\mathbb{N}$ erhalten koennen

Satz von Cantor:

- es gilt $|A| < |P(A)|$
- $f : A \to P(A),\ a \mapsto \{a\} \Rightarrow |A| \leq |P(A)|$

Durch Diagonalisierung: $m \in M \Leftrightarrow m \notin f(m) \in M$
$\Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow f : A \to P(A)$ nicht bijektiv