PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas e de Informática

Trabalho de Projeto e Análise de Algoritmos - Caminho Mais Curto em um Grafo com Aresta de Peso Negativo*

Luiz Gustavo Bragança dos Santos[1]
Pedro Augusto Prosdocimi Resende[2]
Pedro Henrique Silva Xavier[3]

*Artigo apresentado ao Instituto de Ciências Exatas e Informática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais como pré-requisito para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

[1]Aluno, Ciência da Computação, Brasil, luiz.braganca@sga.pucminas.br.
[2]Aluno, Ciência da Computação, Brasil, pedro.prosdocimi@sga.pucminas.br.
[3]Aluno, Ciência da Computação, Brasil, phsxavier@sga.pucminas.br.

Sumário

Lista de Figuras

1 INTRODUÇÃO

Um problema clássico na área da Teoria de grafos trata-se de encontrar o caminho mais curto em grafos dirigidos ou não dirigidos. O presente trabalho objetiva apresentar o Algoritmo de Dijkastra e Bellman-Ford para encontrar o caminho mais curto tanto em grafos com arestas com peso positivo quanto em grafos com arestas possuindo peso negativo, respectivamente. Os algoritmos desenvolvidos neste trabalho, primeiramente verificam a existência de arestas com peso negativo, caso não exista é aplicado tanto Dijkstra quanto Bellman- Ford para resolver o problema, e caso exista é utilizado apenas Bellman-Ford em que também é feito a verificação de existência de ciclos, pois caso ocorram há comprometimento do resultado.Será também apresentado no decorrer deste trabalho, a classe grafo a qual o trabalho utiliza, análise de complexidade e testes realizados para verificação do funcionamento dos Algoritmo de Dijkastra e Bellman-Ford.

2 ALGORITMO DE DIJKSTRA

O algoritmo de Dijkstra[2], objetiva encontrar o caminho mínimo partindo- se de um vértice inicial, aos demais vértices. O algoritmo pode ser utilizado seja para grafos orientado ou não orientado, e se assemelha a outro algoritmo aplicado em grafos, Busca em largura[3]. É um algoritmo guloso, pois no momento da execução, toma a provável decisão ótima. Possui ordem de complexidade $O([m+n]\log n)$ onde m é o número de arestas e n o número de vértices.

2.1 Restrições

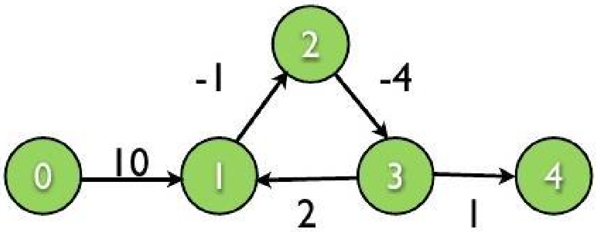
Mesmo sendo um algoritmo que solucione o problema de encontrar o menor caminho entre um vértice inicial e os demais tanto para grafos direcionado quanto não direcionado, no entanto as arestas do grafo devem ter custos não negativos.

3 ALGORITMO DE BELLMAN-FORD

O algoritmo de Bellman-Ford[4], assim como Dijkstra, encontra o menor caminho de um vértice a outro, porém resolve o problema quando existem arestas com peso negativo. O que torna-se necessário, no entanto, com esse algoritmo é encontrar ciclos negativos, caso existam. A existência de um ciclo negativo compromete o algoritmo, pois cada vez que se entra no ciclo, o somatório dos pesos diminui e então nunca alcançará um limite inferior para esse somatório. Na imagem 2 abaixo, segue um exemplo de como se tornará impossível encontrar um caminho mínimo caso existam *loops* negativos.

3.1 Restrições

Encontrar ciclos negativos, caso existam. Sendo encontrados não haverá como determinar o caminho mínimo.



No exemplo desta imagem, é possível perceber que ao tentar descobrir um caminho de custo mínimo entra os vértices 0 e 4, entramos em ciclo negativo cuja a cada passagem o valor do somatório dos pesos das arestas é decrementado, de forma que não conseguirmos uma valor final.

No pseudocódigo acima, a função recebe como parâmetro uma lista de vértices e arestas. Utilizando os atributos distância e anterior, os vértices serão modificados para armazenar o caminho mais curto.

4 IMPLEMENTAÇÃO

4.1 A Classe Grafo

Para a realização deste trabalho, foi criada uma classe Grafo, para grafos orientados, cuja representação utilizada foi matriz de adjacência. A classe Grafos, elabora o grafo da seguinte forma:

- Para N vértices, é criada uma matriz NxN;
- O Número de vértices é indicado pela variável numVertice
- Matriz[i][j] contém o peso relacionado a aresta i para j e,
- Caso não exista aresta entre i e j o peso é 0.

Apresentação de algumas partes da classe Grafo e suas respectivas funções:

```
//A classe Grafo possui os atributos: numVertice e grafo
//numVertice serve para saber a dimens o da matriz.
//o construtor abaixo   utilizado para construir a matriz de Adjac ncia.
//o desconstrutor, para liberar o espa o que foi alocado.
class Grafo {
```

```
    private:
        int numVertice;
        int **grafo;

    public:
        bool negAresta;

    Grafo(int n){
        numVertice = n;
        negAresta = false;
        grafo = new int*[numVertice];
        for(int i = 0; i < numVertice; i++){
            grafo[i] = new int[numVertice];
        }
    }

    ~Grafo(){
        for(int i = 0; i < numVertice; i++){
            delete grafo[i];
        }
    }

    //M todo para preencher a matriz conforme entrada:
    void criarGrafo(){
        int tmp = 0;

        for(int i = 0; i < numVertice; i++){
            for(int j = 0; j < numVertice; j++){
                scanf("%d,", &(tmp));
                grafo[i][j] = tmp;
                if(tmp < 0) negAresta = true;
        }
    }
}
```

4.2 Algoritmo de Dijkstra

```
void dijkstra(int verticeIni,Grafo* grafo) {
    int n_v = grafo->getnumVertice();
    bool visitado[n_v];
    int prox[n_v];
    int distancia[n_v];

    // inicializando os vetores.
    for(int i = 0;i < n_v; i++)
        distancia[i] = INT_MAX, visitado[i] = false, prox[i] = -1;
```

```

    // Distancia de "verticeIni" ate ele mesmo    0
    distancia[verticeIni] = 0;

    // procurar o menor caminho para cada vertice
    for (int count = 0; count < n_v -1; count++) {
        //procurar a menor distancia , apos encontrar marca o vertice como visitado
        int x = minDistance(distancia, visitado, n_v);
        visitado[x] = true;

        // atualizar a distancia dos vizinhos do vertices "u"
        for (int M = 0; M < n_v; M++){
            int peso = grafo->getPeso(x, M);

            // atualizar a distancia se encontrar outro caminho menor
            // atualizar so os vertices nao visitados, pois no caso seu menor caminho ja esta definido
            if (!visitado[M] && grafo->aresta(x, M) && distancia[x] != INT_MAX && distancia[x]+ grafo->getPeso(x, M) < distancia[M]){
                distancia[M] = distancia[x] + grafo->getPeso(x, M);
                prox[M] = x;
            }
        }
    }
    printF(distancia, n_v, prox);
}
```

O método acima recebe como parâmetro um vértice inicial e um grafo, e utilizando 3 vetores estabelece então um caminho deste vértice inicial recebido á todos os outros. Sobre os vetores:

- O vetor visitado, é utilizado apenas quando se tem certeza que o caminho do vértice inicial, até o vértice analisado é o menor possível. Então o vértice em questão é marcado como visitado;
- O vetor de distancia, armazena as distancias do vetor inicial a todos os outros. Apenas é armazenada a distancia caso esta seja a menor;
- O vetor prox, guarda o menor caminho entre o vértice inicial a todos os outros.

O algoritmo de Dijkstra acima implementado no trabalho, utiliza também da seguinte função:

```
int minDistance(int dist[], bool visited[], int V)
{
    // inicializar o min
    int min = INT_MAX, min_index;

    for (int v = 0; v < V; v++)
        if (visited[v] == false && dist[v] <= min)
            min = dist[v], min_index = v;

    return min_index;
}
```

Esta função fornece o vértice anda não visitado e cuja distancia seja menor do que a distancia já conhecida, ou seja dado um vértice que já se sabe sua distancia utiliza-se esta função para retornar o seu vértice adjacente ainda não visitado e como distancia menor do que a conhecida.

4.3 Algoritmo de Bellman-Ford

```
bool bellmanFord(int verticeIni,Grafo* grafo){
    int n_v = grafo->getnumVertice();
    int prox[n_v];
    int distancia[n_v];
    bool resposta = false;

    // inicializando vetor de distancia :
    for(int i = 0;i < n_v ;i++)
        distancia[i] = INT_MAX, prox[i] = -1;

    //distancia do vertice inicial a ele mesmo e' 0
    distancia[verticeIni] = 0;
    for( int i = 0; i < n_v-1; i++){
        for( int j = 0 ; j < n_v; j++){
            for(int k = 0; k < n_v; k++){
                int x, v, peso;
                x = j, v = k, peso = grafo->getPeso(j, k);

                // verifica se existe aresta direcionada j->k,
                //caso tenha menor distancia passando por estas arestas
                    ↪ atualiza vetor distancia.
                if(grafo->aresta(j, k) && distancia[x] != INT_MAX &&
                    ↪ distancia[x] + peso < distancia[v]){
                    distancia[v] = distancia[x] + peso;
                    prox[v] = x;
                }
            }
        }
    }
    //verificando se existe ciclo negativo,
    //a cada passagem sera obtido um valor menor.
    for(int j = 0; j < n_v; j++){
        for(int k = 0; k < n_v; k++){
            int x = j, v = k, peso = grafo->getPeso(j, k);
            if( grafo->aresta(j, k) && distancia[x] != INT_MAX && distancia
                ↪ [x] + peso < distancia[v]){
                resposta = true;
            }
        }
    }
    if(!resposta) {
        printF(distancia, n_v, prox);
    }
    else{
        printf("Existe ciclo negativo!!");
    }
```

```
    return resposta;
}
```

A função bellmanFord() acima, recebe como parâmetro o vértice inicial a partir do qual irá determinar a menor distância para todos os outros utilizando a estratégia de programação dinâmica. Utilizando-se de dois vetores prox e distancia acompanha-se o menor caminho do vértice inicial a todos os outros.

Após as inicializações, verifica-se a existência de aresta direcionada e caso esta possui menor distancia é então colocado este valor no vetor distância. Após todo esse processo é verificado a existência de ciclo negativo, caso exista a cada passagem um valor menor será obtido e a variável controladora resposta, que informará a existência de ciclo, assumirá o estado verdadeiro, caso contrario permanece como instanciada indicando que não há ciclos.

5 AMBIENTE COMPUTACIONAL UTILIZADO

Todo o trabalho foi desenvolvido utilizando o sistema operacional Linux versão 16.04. O programa foi desenvolvido no editor Sublime Text. O compilado utilizado g++.

Para compilar o programa basta:

```
$ g++ CaminhoM.cpp -o CaminhoM
```

Para executar o programa basta:

```
$ ./CaminhoM < entradaX.txt > saidaX
```

O X se refere a qual entrada padrão é utilizada, gerando então uma saída.

5.1 Entrada e saída Padrão

A entrada padrão utilizado é um arquivo de texto, com as seguintes especificações:

- A primeira linha se refere ao tamanho da matriz quadrada(vértices);
- A segunda linha ao vértice inicial utilizado para a busca;
- O restante se refere a composição da matriz utilizada.

A saída padrão é feita de acordo com o algoritmo utilizado para obter o menor caminho dado o vértice inicial. Caso utilizado o Dijkstra, é apresentado na parte superior do arquivo de saída que utilizou-se dijkstra, caso contrário Bellman, ou ambos.

6 ANÁLISE DE COMPLEXIDADE

6.1 Melhor Caso

Ocorre quando o grafo é nulo.

6.1.1 Dijkastra

Operações relevantes definidas são:

- Comparação entre elementos do vetor;
- Atribuição ao vetor.

Os acessos aos métodos da classe grafo possuem função de custo $T(n) = \theta(n)$.
Função: minDistance()

$$\sum_{i=0}^{n}(1 + 2n + \sum_{j=1}^{n} 4) = 6n^2 - 5n = \theta(n^2)$$

Análise de complexidade para o for que procura o menor caminho para cada vértice:

- Esta estrutura de repetição ocorre n-1 vezes(o numero de vértices menos 1), no melhor caso, ocorreria uma única chamada á função minDistancia(), uma única atribuição ao vetor e então a estrutura de repetição que se segue seria executada.

Análise de complexidade do melhor caso da estrutura de repetição(*for*) cuja função é atualizar a distancia dos vizinhos do vértices "u":

Esta estrutura de repetição ocorre n vezes (n = numero de vértices), sendo que no melhor caso ocorrerá 3 comparações com elementos do vetor e 3 chamadas a métodos da classe grafo.

6.1.2 Bellman-Ford

A seguintes operações foram definidas como relevantes:

- Comparação com elementos do vetor;
- Atribuição ao vetor.

Os acessos aos métodos da classe grafo possuem função de custo $T(n) = \theta(n)$.

A parte do código direcionada ao relaxamento. Para a primeira e segunda estrutura de repetição relacionada ao relaxamento. Ambas estruturas estão aninhadas, e possuem o mesmo número de repetições, sendo que fazem duas comparações com elementos do vetor e dois acessos a métodos get e set da classe grafo :

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} 3 = 3n^2 = \theta(n^2)$$

Para a estrutura de repetição mais interna, acessa duas vezes os métodos da classe Grafo e duas comparações:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} 3 = \theta(n^3)$$

6.2 Pior Caso

6.2.1 Dijkstra

Operações relevantes definidas são:

- Comparação entre elementos do vetor;
- Atribuição ao vetor.

Os acessos aos métodos da classe grafo possuem função de custo $T(n) = \theta(n)$.
Função: minDistance()
O número de comparações que ocorre é 2n, logo:

$$T(n) = \theta(n)$$

Análise de complexidade para o for que procura o menor caminho para cada vértice:

Esta estrutura de repetição ocorre n-1 vezes(o numero de vértices menos 1), no pior caso, ocorreria uma chamada á função minDistance(), uma atribuição ao vetor e então a estrutura de repetição que se segue seria executada.

Análise de complexidade do pior caso da estrutura de repetição(for) cuja função é atualizar a distancia dos vizinhos do vertices "u":

Esta estrutura de repetição ocorre n vezes (n = numero de vértices), sendo que no pior caso ocorrerá 3 comparações com elementos do vetor e 3 chamadas a métodos da classe grafo e duas atribuições ao vetor:

$$\sum_{i=0}^{n}(1 + 2n + \sum_{j=1}^{n} 4) = 6n^2 - 5n = \theta(n^2)$$

6.2.2 Bellman-Ford

A seguintes operações foram definidas como relevantes:

- Comparação com elementos do vetor;
- Atribuição ao vetor.

Os acessos aos métodos da classe grafo possuem função de custo $T(n) = \theta(n)$.

A parte do código direcionada ao relaxamento. Para a primeira e segunda estrutura de repetição relacionada ao relaxamento. Ambas estruturas estão aninhadas, e possuem o mesmo número de repetições, sendo que fazem duas comparações com elementos do vetor e dois acessos a métodos get e set da classe grafo, resultando na função de custo:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} 4 = 4n^2 = \theta(n^2)$$

Para a estrutura de repetição mais interna, realiza duas comparações com elementos do vetor, duas atribuições e duas chamadas a métodos da classe Grafo, resultando na seguinte função de custo:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} 5 = \theta(n^3)$$

Análise de complexidade para classe Grafo:

Para a análise de complexidade, foram definidas as operações relevantes:

- Comparação com os elementos do vetor;
- Atribuição de valores ao vetor;
- Operação de leitura;
- Operação de exibição em tela(printF).

Os métodos get set utilizados na classe Grafo possui função de curso: $T(n) = 0 = \theta(0)$.

O método printF() fora da classe grafo possui função de custo: $T(n) = n + 1 = \theta(n)$.

O construtor e desconstrutor possui função de custo: $T(n) = n = \theta(n)$.

O método CriarGrafo() possui função de custo: $T(n) = n^2 = \theta(n^2)$.

7 TESTES REALIZADOS

Os Testes foram realizados utilizando-se a entrada padrão. Foram utilizadas quatro entradas que seguem a baixo:

Entrada 1: Corresponde a um Grafo simples. Para encontrar o menor caminho, pode-se utilizar qualquer um dos dois algoritmos.

```
6
0
0 5 0 0 9 0
0 0 12 15 0 0
0 0 0 3 0 0
0 0 0 0 0 0
0 2 0 0 0 4
0 0 1 0 0 0
```

Saída 1: Vértice inicial 0

```
        Dijkstra

Vertice          Distancia       Caminho
0                0               0
1                5               1 < para 0
2                14              2 < para 5 < para 4 < para 0
3                17              3 < para 2 < para 5 < para 4 < para 0
4                9               4 < para 0
5                13              5 < para 4 < para 0


        Bellman-Ford

Vertice          Distancia       Caminho
0                0               0
1                5               1 < para 0
2                14              2 < para 5 < para 4 < para 0
3                17              3 < para 2 < para 5 < para 4 < para 0
4                9               4 < para 0
5                13              5 < para 4 < para 0
```

Entrada 2: Corresponde a um Grafo simples, que possui aresta negativa. Para encontrar o caminho mínimo pode-se utilizar apenas Bellman-Ford.

```
4
0
0 5 2 8
0 0 −1 2
0 0 0 0
1 1 1 0
```

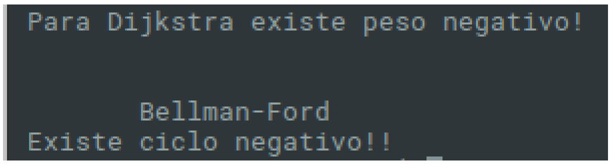
Saída 2: Vértice inicial 0

```
 Para Dijkstra existe peso negativo!


        Bellman-Ford

Vertice          Distancia       Caminho
0                0               0
1                5               1 < para 0
2                2               2 < para 0
3                7               3 < para 1 < para 0
```

Entrada 3: Corresponde a um Grafo simples, com aresta negativa e também possui um ciclo negativo, logo mesmo utilizando Bellman-Ford não encontrará o menor caminho.

```
8
0
0 4 4 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 4 −2 0 0
3 0 2 0 0 0 0 0
0 0 0 1 0 0 −2 0
0 3 0 0 −3 0 0 0
0 0 0 0 0 2 0 2
0 0 0 0 −2 0 0 0
```

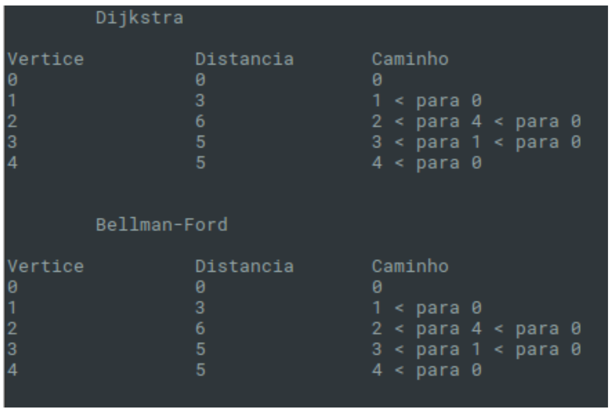
Saída 3: Vértice inicial 0



Entrada 4: Corresponde a um grafo simples, sem arestas negativas.
Pode-se utilizar Dijkstra, assim como Bellman-Ford.

```
6
0
0 5 0 0 9 0
0 0 12 15 0 0
0 0 0 3 0 0
0 0 0 0 0 0
0 2 0 0 0 4
0 0 1 0 0 0
```

Saída 4: Vértice inicial 0



8 CONCLUSÃO

Utilizando-se os algoritmos Dijkstra e Bellman-Ford, é possível resolver problemas de caminho mínimo desde que não possuam ciclos negativos. O algoritmo de Djkstra é possível apenas resolver os problemas cujo Grafo não possua arestas negativa, isso ocorre porque Dijkstra toma a melhor decisão do momento e não volta atrás, por tanto pode ainda haver caminhos menores porém não serão encontrados. O algoritmo de Bellman-Ford é capaz de resolver problemas de caminho mínimo com arestas de peso negativo, pois possibilita a mudança da distância caso encontre um caminho menor do que o já encontrado,ao contrário de Dijkstra, porém a presença de ciclos negativos ainda é um problema.

Conclui-se também nesta trabalho, que caso o grafo possua ciclo negativo, mas esse não seja atingido, o funcionamento do algoritmo Bellman-Ford é garantido, pois ciclos negativos comprometem o resultado visto que o algoritmo pode entrar no ciclo diversas vezes e sempre obtendo valores menores.

Referências

GEEKSFORGEEKS. **Bellman–Ford Algorithm | DP-23**. Disponível em: <http://www.geeksforgeeks.org/dynamic-programming-set-23-bellman-ford-algorithm/>.

MISA, Thomas J; FRANA, Philip L. An interview with edsger w. dijkstra. **Communications of the ACM**, ACM, v. 53, n. 8, p. 41–47, 2010.

PROFESSEURS. **Busca em Largura**. 2001. Disponível em: <http://www.professeurs.polymtl.ca/michel.gagnon/Disciplinas/Bac/Grafos/Busca/busca.html#Larg>.

WIKIPÉDIA. **Bellman-Ford**. 2019. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_de_Bellman-Ford>.