

# Quadratic placement

Lukáš Hromadník

1. Vysvětlete, jak nalézt pozice volných bodů

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

tak, aby minimalizovaly kvadrát součtu jejich délek.

---

Máme zadanou sumu kvadrátů délek:

$$\sum_{k=1}^K \left[ (x_{I(k)} - x_{J(k)})^2 + (y_{I(k)} - y_{J(k)})^2 \right],$$

kde  $I(k)$ , resp.  $J(k)$ , označuje index počátečního, resp. koncového, uzlu hrany.

Ze zadané sumy je vidět, že jednotlivé souřadnice jsou na sobě nezávislé a tedy je lze optimalizovat každou zvlášť.

Na začátku máme zadanou matici  $\mathbf{A}$ , která v řádcích obsahuje index bodu, ve kterém hrana začíná, a index bodu, ve kterém hrana končí. Počáteční, resp. koncový, uzel je v matici označen jako 1, resp.  $-1$ . Matice obsahuje  $k$  řádků, kde číslo  $k$  označuje počet hran mezi body.

Ze zadání je známo, kolik bodů je fixních a kolik volných. Díky tomu lze z matici rozdělit na dvě části, kde v jedné části budou body volné a v druhé body fixní

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_? \mathbf{A}_F].$$

Po této úpravě dostáváme následující výraz

$$[\mathbf{A}_? \mathbf{A}_F] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \text{---} \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

Z něj je vidět, že matice  $\mathbf{A}_?$  má rozměry  $k \times n$  a matice  $\mathbf{A}_F$  má rozměry  $k \times N - n$ , kde  $N$  je celkový počet bodů (uzlů).

Pokud tento výraz upravíme a položíme rovný 0, získáme rovnici, která lze převést na optimalizační úlohu minimalizace

$$[\mathbf{A}_? \ \mathbf{A}_F] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \text{---} \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = [\mathbf{A}_? \ \mathbf{A}_F] \cdot \begin{bmatrix} x_? \\ x_F \end{bmatrix} = \mathbf{A}_? \cdot x_? + \mathbf{A}_F \cdot x_F$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_? \cdot x_? + \mathbf{A}_F \cdot x_F &= 0 \\ \mathbf{A}_? \cdot x_? &= (-1) \cdot \mathbf{A}_F \cdot x_F \end{aligned}$$

z čehož dostáváme optimalizační úlohu

$$\min \|\mathbf{A}_? - \mathbf{A}_F' \cdot x_F\|,$$

kde  $\mathbf{A}_F' = (-1) \cdot \mathbf{A}_F$ .

2. Napište program pro Matlab, který daný úkol vyřeší pro zadané hodnoty.

Zadané hodnoty nejsou zobrazeny, pouze doplněný kód.

```
% Afree = A_?, Afixed = A_F
Afree = A(:,1:n);
Afixed = A(:,(n+1):end);

xfree = Afree \ (Afixed * xfixed * -1);
yfree = Afree \ (Afixed * yfixed * -1);
```

Výsledek je `ans = 22.2237`.

