1 Půllitr

- Obsah půllitru: $V = \pi r^2 v = 0.5 \text{ l} = 0.5 \text{ dm}^3$
- Povrch půllitru: $S = \pi r^2 + 2\pi r v$

Hledáme minimální povrch S půllitru při zadané podmínce.

1. Vyjádříme z rovnice pro objem v.

$$\begin{aligned} \pi r^2 v &= 0.5 \\ v &= \frac{1}{2\pi r^2} \end{aligned}$$

2. Dosadíme do rovnice pro povrch a upravíme.

$$\begin{aligned} S &= \pi r^2 + 2\pi r v \\ &= \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1}{2\pi r^2} \\ &= \pi r^2 + \frac{1}{r} \end{aligned}$$

3. Hledáme minimum této funkce, využijeme tedy první derivace, kterou položíme rovnu nule a vyjádříme r.

$$\begin{aligned} S' &= 0 \\ 2\pi r - \frac{2}{r^2} &= 0 \quad \text{(hledáme } r > 0\text{)} \\ 2\pi r^3 - 2 &= 0 \\ \pi r^3 &= 1 \\ r &= \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \end{aligned}$$

4. Dosadíme vypočítané r do vyjádření v a dopočítáme hodnotu v.

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2\pi r^2} \\ v &= \frac{1}{2\pi \sqrt[3]{\pi^{-1}}^2} \end{aligned}$$

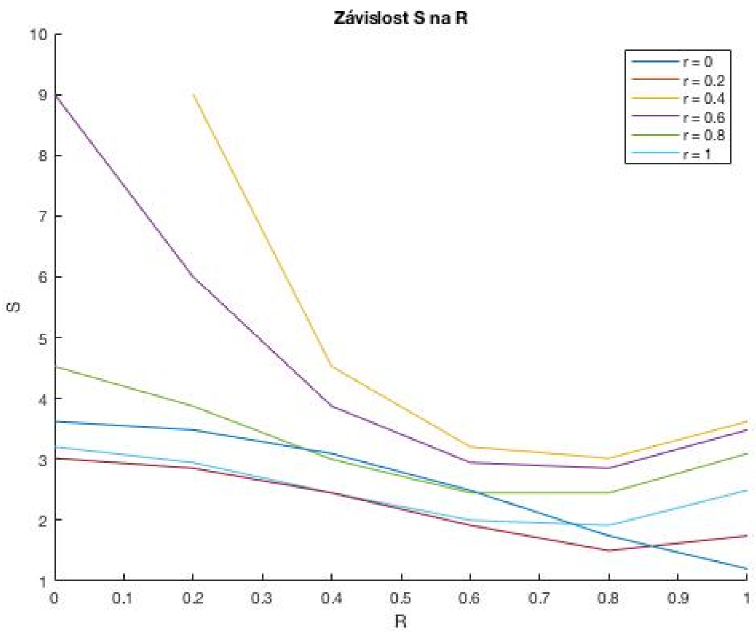
Rozměry půllitru jsou poloměr $r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$ a výška $v = \frac{1}{2\pi \sqrt[3]{\pi^{-1}}^2}$.

2 Kelímek

1. V MATLABu napište funkci pro výpočet povrchu kelímku, jejímiž jedinými vstupními parametry budou r, R a V.

```
function out = povrch(r, R, V)
    height = (V * 3) ./ (pi * (r.^2 + r .* R + R.^2));
    podstava = pi * min(min(r), min(R)).^2;
    plast = pi * (r + R) .* sqrt(height.^2 + (r - R).^2);
    out = podstava + plast;
end
```

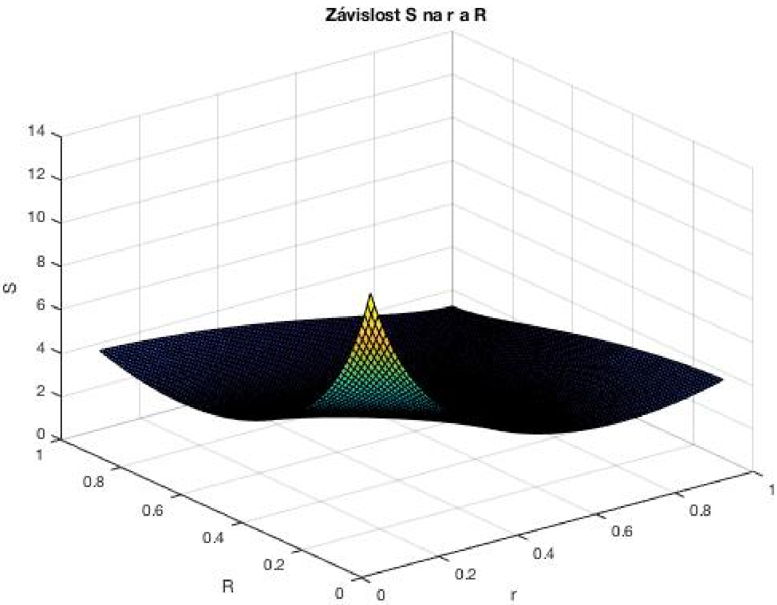
2. Pro $V = 0.6$ vykreslete graf závislosti S na poloměru horní podstavy R. Vykreslete závislost pro poloměry dolní podstavy $r = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$. Výsledný graf vložte do zprávy. Odevzdejte i kód v MATLABu, který daný graf generuje.




```
r = 0:.2:1;
R = r;
v = 0.6;

hold on
for a = r
    y = povrch(a, R, v);
    plot(r, y);
end
hold off
```

3. Vykreslete 3D plochu závislosti S na r a R (r a R budou x a y osy grafu) pro hodnoty $r \in [0.1, 1]$ a $R \in [0.1, 1]$. Výsledný graf vložte do zprávy, kód odevzdejte.




```
r = .1:.01:1;
R = .1:.01:1;

[X, Y] = meshgrid(r, R);
Z = povrch(X, Y, 0.6);
surf(X, Y, Z);
```

4. Libovolnou metodou (s možností využití MATLABu) nalezněte řešení úlohy s přesností minimálně na 2 desetinná místa. Součástí odpovědi musí být i výsledná hodnota r, R, h a S. MATLAB kód také odevzdejte.

   - Poloměr spodní podstavy: 0.3860
   - Poloměr horní podstavy: 0.7030
   - Výška: 0.6265
   - Povrch: 2.8702

```
r = 0:.001:5;
R = 0:.001:5;
V = 0.6;

min_r = intmax;
min_R = intmax;
```

```
min_S = realmax;

for a = r
    for b = R
        S = povrch(a, b, V);
        if S >= min_S
            continue
        end
        min_r = a;
        min_R = b;
        min_S = S;
    end
end

min_r
min_R
height = (V * 3) ./ ...
    (pi * (min_r.^2 + min_r .* min_R + min_R.^2))
povrch(min_r, min_R, V)
```

5. Krátce diskutujte, zda se kelímky takového tvaru skutečně používají a pokud ne, jaké mohou být případně jejich nevýhody.

   Kelímky tohoto rozměru se nevyrábějí, protože by připomínaly spíše talíře = byly by hodně široké a nízké, špatně by se z nich pilo.

3 Maticová algebra

1. Dokažte, že pro každou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ platí:

   (a) $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ je symetrická.

   $\mathbf{A}$ je symetrická, pokud $a_{ij} = a_{ji}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \\ b_{ij} &= a_{ij} + a_{ji} \\ b_{ji} &= a_{ji} + a_{ij} = a_{ij} + a_{ji} = b_{ij} \\ &\Rightarrow \text{ matice } \mathbf{B} \text{ je symetrická} \end{aligned}$$

   (b) $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ je antisymetrická.

   $\mathbf{A}$ je symetrická, pokud $a_{ij} = -a_{ji}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \\ b_{ij} &= a_{ij} - a_{ji} \\ b_{ji} &= a_{ji} - a_{ij} = -a_{ij} + a_{ji} = -\left(a_{ij} - a_{ji}\right) = -b_{ij} \\ &\Rightarrow \text{ matice } \mathbf{B} \text{ je antisymetrická} \end{aligned}$$

   (c) existuje právě jedna symetrická matice $\mathbf{B}$ a právě jedna antisymetrická matice $\mathbf{C}$ tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$.

   (d) $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ je symetrická.

   Označme $\mathbf{B} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)$ a $\mathbf{C} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)$. Potom

$$\mathbf{B}^T = \left(\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)\right)^T = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right) = \mathbf{B}$$

   matice $\mathbf{B}$ je tedy symetrická. Podobně pro matici $\mathbf{C}$ ukážeme

$$\mathbf{C} = \left(\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)\right)^T = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\right) = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right) = -\mathbf{C}$$

   že matice $\mathbf{C}$ je antisymetrická. Zbývá dokázat jednoznačnost

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}+\mathbf{A}^T &= \mathbf{B}+\mathbf{B}^T+\mathbf{C}+\mathbf{C}^T \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)+\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)+\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\right)-\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)+\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right) \\
&= 2\cdot\mathbf{B} \\
&= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right) \\
&= \mathbf{A}+\mathbf{A}^T
\end{aligned}
$$

a

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}-\mathbf{A}^T &= \mathbf{B}-\mathbf{B}^T+\mathbf{C}-\mathbf{C}^T \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)-\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)+\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\right)+\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\right)+\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\right) \\
&= 2\cdot\mathbf{C} \\
&= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\right) \\
&= \mathbf{A}-\mathbf{A}^T
\end{aligned}
$$

2. Dokažte, že pokud je matice $\mathbf{I}-\mathbf{A}$ regulární, pak $\mathbf{A}\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}=\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}$.

$$
\begin{aligned}
\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\cdot\mathbf{A} &= \mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1} \\
\mathbf{A} &= \left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1} \\
\mathbf{A} &= \left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^2\right)\cdot\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1} \\
\mathbf{A} &= \mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}-\mathbf{A}^2\cdot\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1} \\
0 &= \mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}-\mathbf{A}^2\cdot\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}-\mathbf{A} \\
0 &= \mathbf{A}\cdot\left(\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}-\mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}-\mathbf{I}\right) \\
0 &= \mathbf{A}\cdot\left(\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)\cdot\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}-\mathbf{I}\right) \\
0 &= \mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{I}-\mathbf{I}\right) \\
0 &= \mathbf{A}\cdot 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

3. Dokažte, že pro každé $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ má matice

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{BA} & \mathbf{B} \\ 2\mathbf{A} - \mathbf{ABA} & \mathbf{AB} - \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

vlastnost $\mathbf{L}^2 = \mathbf{I}$ (kde $\mathbf{L}^2$ je zkratka pro $\mathbf{LL}$).

Nejdříve je potřeba zkontrolovat, zda-li odpovídají vnitřní rozměry jednotlivých podmatic.

$$\begin{bmatrix} n \cdot n & n \cdot m \\ m \cdot n & m \cdot m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n \cdot n & n \cdot m \\ m \cdot n & m \cdot m \end{bmatrix}$$

z čehož je vidět, že vnitřní rozměry si odpovídají. Dále vypočteme jednotlivé prvky výsledné matice a porovnáme ji s maticí jednotkovou.

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{BA}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{BA}) + \mathbf{B} \cdot (2\mathbf{A} - \mathbf{ABA}) &= \mathbf{I}^2 - 2\mathbf{BA} + \mathbf{BABA} + 2\mathbf{BA} - \mathbf{BABA} \\ &= \mathbf{I}^2 \\ &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{BA}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{AB} - \mathbf{I}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{BAB} + \mathbf{BAB} - \mathbf{B} = 0$$

$$\begin{aligned} &(2\mathbf{A} - \mathbf{ABA}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{BA}) + (\mathbf{AB} - \mathbf{I}) \cdot (2\mathbf{A} - \mathbf{ABA}) = \\ &\quad = 2\mathbf{A} - 2\mathbf{ABA} - \mathbf{ABA} + \mathbf{ABABA} + 2\mathbf{ABA} - \mathbf{ABABA} - 2\mathbf{A} + \mathbf{ABA} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2\mathbf{A} - \mathbf{ABA}) \cdot \mathbf{B} + (\mathbf{AB} - \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{AB} - \mathbf{I}) &= 2\mathbf{AB} - \mathbf{ABAB} + \mathbf{ABAB} - \mathbf{AB} - \mathbf{AB} + \mathbf{I}^2 \\ &= \mathbf{I}^2 \\ &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

Vlastnost $\mathbf{L}^2 = \mathbf{I}$ (kde $\mathbf{L}^2$ je zkratka pro $\mathbf{LL}$) tedy platí.